

INDICE

Abstract	pag 3
Introduzione	pag 4
1. Ciclo Economico e Ciclo Finanziario	pag 6
2. Modelli <i>Markov-Switching</i>	pag 9
2.1 <i>Markov-Switching-Mean</i>	pag 15
2.2 <i>Markov-Switching-Mean</i> con dinamica AR(1)	pag 16
2.3 Durata attesa di un regime	pag 18
2.4 <i>Markov-Switching-Intercept</i>	pag 19
2.5 Specificazione ARCH con cambiamenti di regime	pag 20
2.6 Un Modello bivariato	pag 24
2.7 <i>Standard Errors</i>	pag 27
3. Aspetti Computazionali Legati alla Stima dei Parametri	pag 29
3.1 Filtro di Hamilton	pag 32
3.2 Algoritmo <i>Smoothing</i> di Kim	pag 34
4. Ciclo Economico e Ciclo Finanziario nell'Area Euro: i Dati	pag 36
4.1 Analisi Preliminari dei Dati	pag 38
4.2 Fasi del Ciclo Economico Europeo	pag 48
5. Risultati	pag 51
5.1 Modelli <i>Markov-Switching-Mean</i> e <i>Markov-Switching-Intercept</i> per IPI	pag 52
5.2 Modelli <i>Markov-Switching-Mean</i>, <i>Markov-Switching-Intercept</i>, <i>Markov-Switching-ARCH-L</i> per Indice Mercato	pag 60
5.3 Modello <i>Markov-Switching-Intercept</i> bivariato	pag 73

6. Conclusioni	pag 78
7. Possibili Sviluppi di Questa Tesi	pag 81
8. Appendice	pag 82
8.1 <i>Markov-Switching-Mean</i>	pag 83
8.2 <i>Markov-Switching-Intercept</i>	pag 90
8.3 Specificazione ARCH con cambiamenti di regime	pag 97
8.4 Modello bivariato	pag 108
Bibliografia	pag 117
Ringraziamenti	pag 120

ABSTRACT

In questa tesi analizziamo le serie storiche dei rendimenti mensili azionari e della produzione industriale. Rileviamo che i rendimenti azionari sono caratterizzati da periodi di alta volatilità, separati da più lunghi periodi di bassa volatilità. La crescita reale (rendimenti della produzione industriale), d'altro canto, è soggetta a bruschi cambiamenti nella media associata a contrazioni economiche. Studiamo successivamente un modello bivariato nel quale questi due tipi di cambiamenti sono guidati dalla medesima variabile non osservata. Per concludere, confrontiamo i *turning points* del sistema economico derivati dalla nostra inferenza, con quelli già presenti in letteratura.

INTRODUZIONE

L'obiettivo di questa tesi è quello di studiare il ciclo economico e il ciclo finanziario mediante modelli *Markov–Switching*. Dapprima ci concentreremo sui due cicli singolarmente; successivamente ci focalizzeremo su un modello bivariato che ci permetterà di valutare in maniera più precisa le relazioni intercorrenti tra i due cicli.

Tra le possibili applicazioni dei risultati che otterremo ci potranno essere, ad esempio, l'implementazione di strategie di portafoglio più efficienti, oppure l'adozione di politiche economiche più adatte alla situazione economico – finanziaria presente e futura.

Dall'analisi dell'Indice della Produzione Industriale (Area Euro) e dell'Indice di Mercato da noi elaborato (sulla base degli indici nazionali MSCI, *Morgan Stanley Capital International*), risulteranno evidenti dei cambiamenti molto significativi, all'interno del campione, nell'andamento delle serie stesse. In particolar modo, potremo osservare che sia la media sia la varianza presenteranno delle dinamiche con caratteristiche strutturali assai differenti, a seconda dei periodi.

Per quanto riguarda l'Indice della Produzione Industriale, esso risulterà caratterizzato da medie dei rendimenti notevolmente differenti a seconda del fatto che ci si trovi in periodi di espansione o di contrazione del ciclo economico; mentre, per quanto concerne l'Indice di Mercato, esso presenterà varianze molto dissimili a seconda che si trovi in periodi ad alta o a bassa volatilità del mercato azionario.

Per evitare di stimare modelli aventi parametri a rischio di instabilità, noi utilizzeremo modelli *Markov–Switching*; permetteremo cioè alle serie di seguire differenti funzioni di regressione, a seconda dello stato, indicato con S_t , in cui verseranno.

S_t rappresenterà pertanto la variabile casuale, non osservata, responsabile delle caratteristiche strutturali dei cicli.

Analizzeremo le serie innanzitutto in modo univariato, così da ricavare informazioni sulle caratteristiche del ciclo economico e di quello finanziario, analizzati singolarmente. Poi cercheremo di migliorare ulteriormente la specificazione per quanto riguarda l'Indice di Mercato, considerando la possibile presenza di dinamiche ARCH e anche del cosiddetto effetto leva.

Ricordando che per effetto leva intendiamo la possibilità che aumenti o decrementi dei prezzi azionari possano avere affetti asimmetrici sulla volatilità, con questa ulteriore specificazione noi cercheremo di tener conto, in maniera più approfondita, delle dinamiche della volatilità.

Tutte queste analisi ci mostreranno come sia la produzione industriale, sia il mercato azionario, risentano sensibilmente dello stato in cui ci si trova.

Inoltre le fasi di “crisi” (contrazione od alta volatilità, a seconda del ciclo considerato) risulteranno essere abbastanza coincidenti.

Come ultimo passo arriveremo dunque ad implementare un modello bivariato che tenga conto delle relazioni intercorrenti tra ciclo economico e ciclo finanziario. Nel dettaglio, ipotizzeremo l’esistenza di una singola variabile latente (S_t , rappresentante lo “stato” dell’economia), la quale determini sia la media della produzione industriale sia la scala della volatilità azionaria. Questa variabile latente potrà assumere due soli valori discreti, uno rappresentante lo stato di espansione (stato 0) e uno rappresentante lo stato di contrazione (stato 1).

Il fattore che causerà un incremento della volatilità azionaria sarà pertanto, nella nostra specificazione, il medesimo che farà entrare l’economia in uno stato di contrazione.

I risultati, per quanto concerne sia le intercette sia le varianze, saranno in linea con quanto ottenuto nei casi univariati. Il punto nodale è che in questa ultima parte noi ipotizzeremo un’unica variabile latente, lo “stato” dell’economia, e non più una variabile latente per il ciclo economico e una per quello finanziario.

Quanto ottenuto dimostrerà, dunque, come tale ipotesi sia alquanto plausibile. Anche le analisi grafiche mostreranno una sostanziale corrispondenza tra le fasi di “crisi” riscontrabili a partire dall’inferenza sul nostro modello, e quelle presenti nella datazione del ciclo economico (riportate nel capitolo 4.2).

Tutto ciò ci permetterà di concludere che, nell’analizzare il ciclo economico, quello finanziario e la loro interazione, l’approccio *Markov–Switching* da noi adottato risulterà essere valido.

Per quanto concerne lo svolgimento di questa tesi, nel capitolo 1 introdurremo i concetti di ciclo economico e di ciclo finanziario. Nel capitolo 2 presenteremo nel dettaglio tutti i modelli da noi adottati e nel capitolo 3 esporremo gli accorgimenti utilizzati per ottenere le stime di massima verosimiglianza. Nel capitolo 4 descriveremo ampiamente i dati usati in questa tesi, faremo delle analisi descrittive e faremo riferimento anche alle differenti situazioni in cui l’economia europea si è venuta a trovare. Nel capitolo 5 presenteremo dunque tutti i risultati ottenuti, nel capitolo 6 trarremo le conclusioni e nel capitolo 7 mostreremo alcuni possibili sviluppi del nostro lavoro.

Infine, per essere esaustivi, nel capitolo 8 riporteremo tutte le procedure *Gauss* utilizzate in questa tesi.

1. Ciclo Economico e Ciclo Finanziario

Nella tesi analizzeremo il ciclo economico, quello finanziario e le relazioni intercorrenti tra i due. E' dunque doveroso come prima cosa definire cosa si intenda per ciclo economico; esso consiste nell'alternanza di fasi caratterizzate da una diversa intensità dell'attività economica di un Paese o di un gruppo di Paesi economicamente collegati. Nei cicli economici sono individuate, seguendo Filardo (1994), le seguenti fasi:

- fase di espansione, distinta in due fasi: fase di ripresa, in cui l'investimento privato inizia a crescere e fase di prosperità, nella quale investimenti e consumi crescono rapidamente;
- fase di contrazione, anch'essa differenziata in due fasi: la recessione, in cui la crescita dell'economia rallenta e la depressione, nella quale la crescita economica ristagna.

Tra i principali indicatori che sono legati al ciclo economico vi sono il PIL e l'occupazione, i quali crescono nelle fasi di espansione e diminuiscono nelle fasi di contrazione. In effetti la fase di espansione trova il suo limite nel raggiungimento del valore del PIL potenziale, che misura la massima capacità produttiva complessiva di un Paese; quando il PIL effettivo coincide con il PIL potenziale si ha la piena occupazione dei fattori produttivi.

Un altro indicatore che viene spesso considerato quando si vuole trattare il ciclo economico è l'Indice della Produzione Industriale; questo, che è proprio l'indicatore da noi utilizzato, ha la desiderabile caratteristica di essere coincidente (o talvolta addirittura prociclico) rispetto alle fasi del ciclo economico stesso. Riteniamo doveroso evidenziare come il PIL e l'Indice della Produzione Industriale non misurino comunque l'andamento della stessa quantità; il primo fa infatti riferimento all'andamento dell'intera economia, mentre il secondo si basa essenzialmente sulla dimensione industriale.

Il ciclo finanziario invece non è caratterizzato da una definizione univoca; solitamente, tuttavia, si intende l'alternanza di fasi ascendenti e fasi discendenti, nel mercato finanziario.

Generalmente quello che si fa è trattare il comportamento dei mercati finanziari in relazione alle fasi del ciclo economico; ed è proprio ciò che intendiamo fare in questa tesi.

Verificheremo infatti il comportamento del mercato finanziario e lo confronteremo con le fasi derivate dalla datazione del ciclo economico.

Notiamo, inoltre, che una delle caratteristiche tipiche del ciclo finanziario è quella di essere generalmente caratterizzato da un'elevata volatilità durante le sue fasi discendenti e una minore volatilità in quelle ascendenti. Questa interessante peculiarità sarà proprio una di quelle che per prime testeremo nelle nostre analisi.

Ricordiamo altresì che, per quanto riguarda il ciclo finanziario, abbiamo deciso di considerare un indice composito da noi elaborato, basato sugli indici nazionali Morgan e Stanley (MSCI), quale rappresentativo del mercato azionario. Ricordiamo qui che le procedure mediante le quali abbiamo calcolato tale indice (a carattere europeo) sono presentate nel capitolo 4. Il fatto di aver considerato il suddetto indice (che indicheremo come Indice di Mercato), ci permette di tenere nella giusta considerazione l'andamento del mercato azionario.

Il nostro interesse sarà quello di saggiare se e in quale modo il ciclo finanziario e il ciclo economico siano correlati; il motivo è che qualora trovassimo delle interessanti relazioni tra i due cicli, queste potrebbero essere utilizzate a fini previsivi, in modo tale, ad esempio, da poter adottare delle corrette politiche monetarie in conseguenza di un *boom* o di un crollo del mercato azionario, oppure per effettuare un'efficiente gestione di portafoglio.

Per quanto riguarda il nostro oggetto di interesse, possiamo notare come, anche nella letteratura, il *link* tra il mercato azionario e l'attività economica presenti caratteristiche alquanto critiche.

Tra gli studiosi e gli economisti è infatti tutt'oggi in corso un vivace dibattito sul come e sul quanto questi due cicli siano in relazione tra loro.

A tal proposito, riportiamo un paio di teorie molto note in questo ambito. La più controversa è senz'altro quella elaborata da Shiller (1984) e Summers (1986); secondo tali autori, fattori casuali e fattori psicologici hanno un notevole effetto sulla volatilità azionaria. In base a questa visione, la volatilità azionaria ha effetti avversi sull'economia quando gli investitori razionali sostengono un rischio non necessario.

Un'ipotesi alternativa (Schwert, 1989) è che la volatilità dei rendimenti azionari rifletta l'incertezza degli operatori su future "misure", quali ad esempio *cash flow* o tassi di sconto. Secondo questa prospettiva i rendimenti azionari riflettono la crescente incertezza sul corso futuro dell'economia. Questa visione razionale sull'efficienza dei mercati azionari implica che la volatilità azionaria fornisca importanti informazioni sulla situazione macroeconomia futura.

L'idea che noi adoteremo in questa tesi si baserà pesantemente, in particolar modo, sul lavoro di Hamilton e Lin (1996). Faremo cioè una combinazione tra il modello di Hamilton (1989) per le recessioni del ciclo economico e quello di Hamilton e Susmel (1994) per i cambiamenti nel processo ARCH caratterizzante i rendimenti azionari.

Verificheremo, dunque, se le fasi ad alta (bassa) volatilità del mercato azionario saranno in qualche maniera collegate alle fasi di contrazione (espansione) del sistema economico, con l'intento di verificare se entrambe dipenderanno da un unico indicatore, che chiameremo "stato" dell'economia. Se i risultati confermeranno quanto da noi ipotizzato, allora si potrà pensare verosimilmente di utilizzare le informazioni, da noi trovate, a fini previsionali per quanto concerne sia il ciclo economico sia quello finanziario. Ad esempio si potranno implementare delle strategie maggiormente efficienti nella gestione di portafoglio, oppure adottare delle migliori politiche economiche (a fronte di un determinato andamento del mercato azionario).

Queste sono solo alcune delle possibili implicazioni del nostro studio; e proprio per la loro vasta applicabilità, dimostrano l'importanza dello stesso.

2. Modelli *Markov Switching*

In questo capitolo introdurremo i modelli utilizzati nella tesi, partendo inizialmente da modelli univariati applicati alle singole serie per poi arrivare a trattare un caso bivariato. In particolare ci soffermeremo su modelli *Markov-Switching-Mean*, *Markov-Switching-Intercept* e *Markov-Switching-ARCH*; ne vedremo nel dettaglio le specificazioni e cercheremo di capire le rispettive implicazioni.

Osservando una serie storica finanziaria o economica capita spesso di imbattersi in drastici cambiamenti della media o del comportamento dinamico della serie stessa. Tali cambiamenti possono portare a casi di instabilità dei parametri del modello stimato, con evidenti ripercussioni negative sulla conseguente inferenza e sulle previsioni.

Una delle possibili soluzioni a questo problema è di considerare che la serie storica sia governata da due differenti equazioni di regressione; ogni equazione fa riferimento ad un preciso stato dell'economia. Per semplicità, in questa tesi ipotizzeremo che siano presenti due stati nell'economia, uno di espansione ed uno di contrazione; le serie storiche in esame seguiranno dunque due differenti equazioni di regressione a seconda dello stato in cui verseranno.

Il problema di questo approccio è che non si può sapere a priori in quale stato si è, per cui l'inferenza e le previsioni diventano problematiche.

Per meglio comprendere ciò che abbiamo fatto in termini di modellazione, riteniamo istruttivo andare per gradi; partiremo cioè da un modello semplice ed arriveremo infine ad un caso più complesso di modello bivariato.

Iniziamo col presentare il caso più semplice di dati serialmente incorrelati e presenza di variabili *dummy*. Con ciò ammettiamo che siano possibili uno o più *break* strutturali all'interno del campione di riferimento, dei quali sono note le date. La serie storica in esame potrà pertanto presentare caratteristiche differenti (nei parametri quali media e varianza) in determinati sottocampioni del periodo di riferimento.

Dal punto di vista analitico, riportiamo quanto detto finora in termini di equazioni del modello:

$$y_t = x_t \beta_{dt} + e_t \quad (1)$$

$$e_t \sim N(0, \sigma_{dt}^2) \quad (2)$$

$$\beta_{dt} = \beta_0(1 - d_t) + \beta_1 d_t \quad (3)$$

$$\sigma_{dt}^2 = \sigma_0^2(1 - d_t) + \sigma_1^2 d_t \quad (4)$$

$$d_t = 0, 1 \quad (5)$$

y_t rappresenta la variabile dipendente, x_t è l'esplicativa, e_t è il termine d'errore (ipotizzato Normale di media nulla e varianza dipendente da d_t). d_t rappresenta semplicemente una variabile *dummy* che può assumere i valori zero o uno. A seconda del valore di d_t , la (1) presenta differenti parametri strutturali. In particolare qualora ci sia $d_t = 0$, allora i parametri di riferimento saranno β_0, σ_0^2 , mentre nel caso in cui $d_t = 1$, si avranno β_1, σ_1^2 .

Notiamo inoltre, e teniamo tale aspetto in considerazione in tutta la tesi, che x_t è da considerarsi sempre nota; pertanto ometteremo di trascriverla ogni volta tra le variabili che condizionano.

Mostriamo, a titolo istruttivo, il modello di regressione che otteniamo a partire dalla precedente specificazione. Sostituendo la scrittura (3) in (1) otteniamo:

$$\begin{aligned} y_t &= (\beta_0(1 - d_t) + \beta_1 d_t)x_t + e_t \\ &= (\beta_0 - \beta_0 d_t + \beta_1 d_t)x_t + e_t \\ &= \beta_0 x_t + (\beta_1 - \beta_0)d_t x_t + e_t \end{aligned} \quad (6)$$

In questo semplice caso la funzione di log-verosimiglianza è data da:

$$\ln(L) = \sum_{t=1}^T \ln(f(y_t | d_t)) \quad (7)$$

$$f(y_t | d_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{dt}^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - x_t \beta_{dt})^2}{2\sigma_{dt}^2}\right) \quad (8)$$

e la (6) può essere massimizzata rispetto a $\beta_0, \beta_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2$. Per ricavare tali stime dovremo poi utilizzare il metodo della massima verosimiglianza. Qualora avessimo invece varianza costante nel tempo, basterebbe applicare il metodo dei minimi quadrati ordinari (OLS).

Fino a questo momento noi permettevamo al processo in questione di avere parametri dipendenti dal valore assunto dalla variabile *dummy* d_t . Un'ulteriore ipotesi era quella di conoscere esattamente le date nelle quali si verificavano i *break* strutturali. Da tutte queste considerazioni appare molto chiaro come questo modello non sia molto adatto al nostro tipo di analisi.

Prima di considerare i veri e propri modelli *Markov-Switching*, riteniamo interessante riportare, seguendo Hamilton (1998), un interessante esempio: la cosiddetta miscela di distribuzioni Normali i.i.d. (indipendenti ed identicamente distribuite).

Lasciamo che lo stato nel quale un dato processo si trova al tempo t , sia indicizzato da una variabile casuale non osservata S_t . Anche in questo caso, così come fatto in tutta la tesi, noi considereremo la possibilità che S_t possa assumere solamente due valori (0 o 1, in conseguenza della esistenza di due possibili stati).

Quando il processo è nel regime 0, la variabile osservata y_t si presume derivare da una distribuzione $N(\mu_0, \sigma_0^2)$, mentre quando il processo è nel regime 1 y_t si presume derivare da una distribuzione $N(\mu_1, \sigma_1^2)$.

Pertanto la densità di y_t condizionata alla variabile casuale S_t , quando quest'ultima è pari a j , è:

$$f(y_t | S_t = j; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \quad (9)$$

per $j = 0, 1$. Qui θ è il vettore dei parametri che include $\mu_0, \mu_1, \sigma_0, \sigma_1$. La variabile S_t si presume esser stata generata da una qualche distribuzione di probabilità, per la quale la probabilità non condizionata che $S_t = j$ la definiamo π_j :

$$\Pr(S_t = j; \theta) = \pi_j \quad (10)$$

per $j = 0, 1$. Le probabilità π_j sono anch'esse incluse in θ , il quale è quindi dato da:

$$\theta = (\mu_0, \mu_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2, \pi_0, \pi_1) \quad (11)$$

Ora osserviamo che se fossimo interessati alla probabilità congiunta che $S_t = j$ e che y_t cada in un certo intervallo $[c, d]$, questa si potrebbe calcolare integrando

$$p(y_t, S_t = j; \theta) = f(y_t | S_t = j; \theta) \Pr(S_t = j; \theta) \quad (12)$$

su tutti i valori di y_t nell'intervallo $[c, d]$.

A questo punto è possibile calcolare la densità non condizionata di y_t nel seguente modo:

$$\begin{aligned} f(y_t; \theta) &= \sum_{j=0}^1 p(y_t, S_t = j; \theta) \\ &= \frac{\pi_0}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) + \frac{\pi_1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

Adesso se la variabile non osservata S_t è i.i.d. per $t = 1, \dots, T$, allora la log – verosimiglianza può essere calcolata, a partire dalla (12), nel seguente modo:

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t; \theta) \quad (14)$$

Concludiamo dicendo che le stime di massima verosimiglianza di θ sono ottenute massimizzando la (14) sotto il vincolo che $\pi_0 + \pi_1 = 1$ e che $\pi_j \geq 0$ per $j = 0, 1$.

Dopo aver trattato questo istruttivo esempio, passiamo all'implementazione di un modello *switching*, seguendo invece Krolzig (1997). Ipotizziamo dunque che il processo sia influenzato da una variabile casuale non osservabile, S_t , la quale rappresenta lo stato (o il regime) nel quale il processo si trova al tempo t .

Analiticamente avremo:

$$y_t = x_t \beta_{st} + e_t \quad (15)$$

$$e_t \sim N(0, \sigma_{st}^2) \quad (16)$$

$$\beta_{st} = \beta_0(1 - S_t) + \beta_1 S_t \quad (17)$$

$$\sigma_{st}^2 = \sigma_0^2(1 - S_t) + \sigma_1^2 S_t \quad (18)$$

$$S_t = 0,1 \quad (19)$$

y_t rappresenta la variabile dipendente, x_t è l'esplicativa, e_t è il termine d'errore (ipotizzato Normale di media nulla e varianza dipendente da S_t). S_t rappresenta dunque una variabile casuale discreta che può assumere i valori zero od uno. Come nel caso precedente, a seconda del valore di S_t , la (15) presenta differenti parametri strutturali. In particolare qualora $S_t = 0$, i parametri di riferimento saranno β_0, σ_0^2 , mentre nel caso in cui $S_t = 1$, si avranno β_1, σ_1^2 .

A questo punto riportiamo la funzione di log-verosimiglianza:

$$\ln(L) = \sum_{t=1}^T \ln(f(y_t | S_t)) \quad (20)$$

$$f(y_t | S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{st}^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - x_t\beta_{st})^2}{2\sigma_{st}^2}\right) \quad (21)$$

e la (20) può essere massimizzata rispetto a $\beta_0, \beta_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2$. Risulta evidente che qualora $S_t, t = 1, 2, \dots, T$, sia noto a priori (cioè se le date dei cambi strutturali sono note a priori) allora il modello scritto sopra è l'esatto equivalente del modello con una variabile *dummy*, d_t , presentano all'inizio del capitolo 2.

Nella realtà noi però non siamo a conoscenza dello stato in cui ci si trovi in ogni istante temporale, pertanto già da ora risulta evidente che dovremo fare un ulteriore passo prima di poter adattare un modello soddisfacente ai nostri dati.

Cominciamo con il considerare la densità congiunta di y_t e S_t , la quale non è altro che il prodotto di una densità marginale per una condizionale:

$$f(y_t, S_t | I_{t-1}) = f(y_t | S_t, I_{t-1})f(S_t | I_{t-1}) \quad (22)$$

dove I_{t-1} rappresenta il set informativo disponibile fino al tempo $t-1$.

Poi, per ottenere la densità marginale di y_t è necessario integrare la variabile S_t dalla densità congiunta (22), sommando su tutti i possibili valori di S_t :

$$\begin{aligned}
 f(y_t | I_{t-1}) &= \sum_{s_t=0}^1 f(y_t, S_t | I_{t-1}) \\
 &= \sum_{s_t=0}^1 f(y_t | S_t, I_{t-1}) f(S_t | I_{t-1}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - x_t\beta_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \Pr(S_t = 0 | I_{t-1}) \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - x_t\beta_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \Pr(S_t = 1 | I_{t-1})
 \end{aligned} \tag{23}$$

La funzione di log-verosimiglianza sarà poi data da:

$$\ln(L) = \sum_{t=1}^T \ln \left\{ \sum_{s_t=0}^1 f(y_t | S_t, I_{t-1}) \Pr(S_t | I_{t-1}) \right\} \tag{24}$$

La densità marginale riportata sopra (23) può essere interpretata come una media pesata delle densità condizionate dati $S_t = 0$ e $S_t = 1$. Per derivare la densità marginale di y_t in (23), e quindi la funzione di log-verosimiglianza, abbiamo bisogno di calcolare opportunamente i pesi $\Pr[S_t = 0 | I_{t-1}]$ e $\Pr[S_t = 1 | I_{t-1}]$.

Tuttavia, senza assunzioni a priori riguardo al comportamento stocastico della variabile S_t , questo non è possibile.

2.1 Markov Switching Mean (MSM)

Se l'evoluzione della variabile discreta S_t può essere espressa tramite una dipendenza dal suo passato, per ritardi $S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_{t-r}$, allora il processo stocastico che governa S_t è chiamato catena di Markov di ordine r .

In tutto il corso della tesi, seguendo l'approccio di Kim e Nelson (1999) noi considereremo catene di Markov del primo ordine per il processo S_t ; quindi implicitamente affermeremo che la probabilità che s_t uguagli un certo valore j dipenderà dal passato solo attraverso il più recente valore s_{t-1} :

$$\begin{aligned} \Pr(s_t = j \mid s_{t-1} = i, s_{t-2} = k, \dots) &= \\ &= \Pr(s_t = j \mid s_{t-1} = i) & (25) \\ &= p_{ij} \end{aligned}$$

dove p_{ij} rappresenta la probabilità che lo stato i sia seguito dallo stato j , ed è detta probabilità di transizione. Riportiamo adesso la matrice di transizione, ricordando che noi stiamo considerando il caso della presenza di due stati, e che la catena di Markov è del primo ordine. Avremo pertanto:

$$P_t = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Nella matrice P_t , p_{00} rappresenta la probabilità di rimanere nello stato 0 sia in $t-1$ sia in t , p_{11} rappresenta la probabilità di rimanere nello stato 1 sia in $t-1$ sia in t , p_{01} rappresenta la probabilità di passare dallo stato 0 in $t-1$ allo stato 1 in t e p_{10} è la probabilità di passare dallo stato 1 in $t-1$ allo stato 0 in t .

Sempre relativamente alla nostra specificazione, notiamo fin da subito i vincoli fondamentali della matrice P_t :

$$p_{00} + p_{01} = 1 \quad (27)$$

$$p_{10} + p_{11} = 1 \quad (28)$$

La (27) e la (28) mostrano pertanto che le probabilità di ogni riga della nostra matrice di transizione devono sommare a uno.

2.2 Markov Switching Mean (MSM) con dinamica AR(1)

Dopo aver considerato la possibilità che S_t non sia osservata, possiamo compiere un'ulteriore modifica al modello; considereremo da adesso in poi modelli autoregressivi di ordine 1. Faremo ciò perché tali modelli sono spesso utili quando si considerano serie storiche come quelle utilizzate in questa tesi. Per una maggiore e più dettagliata spiegazione di ciò, rimandiamo ai capitoli successivi.

Rappresentiamo quindi un modello, per la media e la varianza, autoregressivo di ordine 1 con sottostante catena di Markov, a 2 stati, di ordine 1:

$$y_t - \mu_{st} = \phi(y_{t-1} - \mu_{st-1}) + e_t \quad (29)$$

$$e_t \sim N(0, \sigma_{st}^2) \quad (30)$$

$$\Pr(S_t = j | S_{t-1} = i) = p_{ij} \quad (31)$$

$$\sum_{j=0}^1 p_{ij} = 1 \quad (32)$$

$$\mu_{st} = \mu_0(1 - S_t) + \mu_1 S_t \quad (33)$$

$$\sigma_{st}^2 = \sigma_0^2(1 - S_t) + \sigma_1^2 S_t \quad (34)$$

dove S_t può assumere i valori zero od uno. y_t rappresenta sempre la variabile dipendente, μ_{st} è la media (dipendente dallo stato) ed e_t è il termine d'errore (ipotizzato Normale di media nulla e varianza dipendente dallo stato). Inoltre la (31) mostra le probabilità di transizione e la (32) i relativi vincoli.

La densità di y_t sarà pertanto:

$$f(y_t | S_t, S_{t-1}, I_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{st}^2}} \exp \left\{ -\frac{[(y_t - \mu_{st}) - \phi(y_{t-1} - \mu_{st-1})]^2}{2\sigma_{st}^2} \right\} \quad (35)$$

Nello scrivere la densità di y_t data l'informazione passata I_{t-1} , noi abbiamo bisogno di S_t e S_{t-1} , i quali sono non osservati. La differenza fondamentale rispetto al caso precedente è che in questa situazione noi facciamo riferimento sia allo stato al tempo t (S_t), sia a quello relativo al tempo precedente (S_{t-1}).

Nell'affrontare tale problema dobbiamo innanzitutto derivarci la densità congiunta di y_t , S_t e S_{t-1} , condizionata all'informazione passata I_{t-1} :

$$f(y_t, S_t, S_{t-1} | I_{t-1}) = f(y_t | S_t, S_{t-1}, I_{t-1}) \Pr(S_t, S_{t-1} | I_{t-1}) \quad (36)$$

dove $f(y_t | S_t, S_{t-1}, I_{t-1})$ è data da (35). Notiamo che in (36) è presente una probabilità congiunta di due stati di S_t ; è pertanto necessario conoscere il valore di tale variabile sia al tempo t , sia al tempo $t-1$.

Per ottenere ora $f(y_t | I_{t-1})$ è necessario sommare la densità congiunta (36) per tutti i possibili valori di S_t e S_{t-1} :

$$\begin{aligned} f(y_t | I_{t-1}) &= \sum_{st=0}^1 \sum_{st-1=0}^1 f(y_t, S_t, S_{t-1} | I_{t-1}) = \\ &= \sum_{st=0}^1 \sum_{st-1=0}^1 f(y_t | S_t, S_{t-1}, I_{t-1}) \Pr(S_t, S_{t-1} | I_{t-1}) \end{aligned} \quad (37)$$

dove la densità marginale $f(y_t | I_{t-1})$ è una media pesata di 4 densità condizionate, essendo i pesi $\Pr[S_t = j, S_{t-1} = i | I_{t-1}]$, $i = 0, 1$ e $j = 0, 1$.

Quindi la funzione di log-verosimiglianza sarà data da:

$$\ln(L) = \sum_{t=1}^T \ln \left\{ \sum_{st=0}^1 \sum_{st-1=0}^1 f(y_t | S_t, S_{t-1}, I_{t-1}) \Pr(S_t, S_{t-1} | I_{t-1}) \right\} \quad (38)$$

Per arrivare ad ottenere le stime dei parametri è necessario un ulteriore passo; dobbiamo infatti ancora calcolare le probabilità $\Pr[S_t = j, S_{t-1} = i | I_{t-1}]$, $i = 0, 1$ e $j = 0, 1$. Per fare ciò dovremo utilizzare il cosiddetto filtro di Hamilton.

Questa ed un'altra interessante procedura, per il calcolo delle probabilità smussate, (l'algoritmo *smoothing* di Kim) verranno presentate nel capitolo 3. Accenniamo qui solamente che tali probabilità verranno calcolate in seguito alla stima di tutti i parametri e ci forniranno utili indicazioni in sede di inferenza e valutazione della bontà del modello.

2.3 Durata Attesa di un Regime

In questo paragrafo vogliamo semplicemente ricordare come sia possibile ricavare la durata media di un dato regime in un modello *Markov-Switching*.

L'interesse per tali dati risiede nel fatto che vogliamo confrontare il ciclo economico e quello finanziario sotto molteplici punti di vista, e dunque anche sotto l'aspetto della loro durata media delle loro fasi.

In particolar modo cercheremo di verificare se effettivamente le fasi di recessione (o periodi di alta volatilità) siano mediamente più lunghe rispetto a quelle di contrazione (o periodi di bassa volatilità). Tale importante aspetto è stato messo in luce, tra gli altri, anche da Hamilton e Lin (1996).

Le informazioni necessarie per compiere tale operazioni le possiamo ottenere a partire dagli elementi sulla diagonale della matrice contenente le probabilità di transizione.

Indicando con D la durata dello stato j , avremo che la durata attesa del regime j sarà:

$$\begin{aligned}
 E(D) &= \sum_{j=1}^{\infty} \Pr(D = j) \\
 &= 1 \Pr(S_{t+1} \neq j \mid S_t = j) \\
 &+ 2 \Pr(S_{t+1} = j, S_{t+2} \neq j \mid S_t = j) \\
 &+ 3 \Pr(S_{t+1} = j, S_{t+2} = j, S_{t+3} \neq j \mid S_t = j) + \dots \\
 &= 1(1 - p_{jj}) + 2p_{jj}(1 - p_{jj}) + 3p_{jj}^2(1 - p_{jj}) + \dots \\
 &= \frac{1}{1 - p_{jj}}
 \end{aligned} \tag{39}$$

Notiamo che per effettuare il passaggio dalla penultima all'ultima riga dell'espressione (39) abbiamo considerato il fatto di aver a che fare con una serie geometrica di ragione p_{jj} .

Questi semplici calcoli ci permetteranno di ricavare ulteriori informazioni utili sulla bontà del nostro modello; verificheremo, ad esempio, se le durate medie dei regimi saranno compatibili con quelle già presenti nella letteratura.

2.4 Markov Switching Intercept (MSI)

Fino a questo momento abbiamo sempre utilizzato il modello MSM; introduciamo ora il modello *Markov-Switching-Intercept* (Krolzig, 1997).

La differenza fondamentale rispetto a MSM è che con MSI noi ipotizziamo che sia l'intercetta (e non la media) del processo a variare a seconda dello stato; manteniamo invece inalterata l'ipotesi che il parametro autoregressivo sia costante.

Schematicamente potremmo riassumere i due modelli mediante le seguenti equazioni:

- *Markov-Switching-Mean*

$$y_t - \mu_{st} = \phi(y_{t-1} - \mu_{st-1}) + e_t, e_t \sim N(0, \sigma_{st}^2) \quad (40)$$

- *Markov-Switching-Intercept*

$$y_t = c_{st} + \phi y_{t-1} + e_t, e_t \sim N(0, \sigma_{st}^2) \quad (41)$$

Notiamo a questo punto che la differenza fondamentale tra i due modelli risiede nel fatto che MSM presenta una dipendenza sia da S_t sia da S_{t-1} , mentre MSI dipende esplicitamente solo da S_t . Sottolineiamo infatti che anche MSI dipende da S_{t-1} , ma lo fa in modo implicito, attraverso y_{t-1} .

Basta infatti effettuare la sostituzione di y_{t-1} all'interno dell'equazione (40) per ottenere:

$$y_t = c_{st} + \phi y_{t-1} + e_t = c_{st} + \phi(c_{st-1} + \phi y_{t-2} + e_{t-1}) + e_t \quad (42)$$

Comunque se ipotizziamo di condizionarci a y_{t-1} , allora la dipendenza implicita non entra direttamente nella dinamica, e ciò permette di evitare l'utilizzo del filtro di Hamilton.

Dunque per il modello MSM è necessario conoscere sia lo stato al tempo t , sia quello precedente, mentre per il modello MSI è sufficiente conoscere lo stato nel quale ci si trova al tempo t .

Per una dettagliata specificazione di tale dipendenza rimandiamo al capitolo 3. Da un punto di vista dell'implementazione i due modelli richiederanno dei differenti accorgimenti; ed anche questi verranno presentati nel capitolo 3.

Per quanto concerne i risultati vedremo invece che saranno molti simili sia sotto l'adozione di MSM sia sotto quella di MSI.

2.5 Specificazione ARCH con Cambiamenti di Regime

Come vedremo meglio nel capitolo 4, i dati utilizzati in questa tesi sono essenzialmente due serie storiche: una riguardante un indice di produzione industriale e una riguardante un indice che rappresenta il mercato azionario.

I modelli fin qui descritti saranno applicati a entrambe le serie di dati; notiamo però che sia MSM sia MSI concentrano la loro attenzione prevalentemente sulla dinamica riguardante la media. Sono sì modelli che permettono anche alla varianza di dipendere dallo stato S_t , ma questa rappresentazione rischia di risultare troppo povera quando andiamo a trattare rendimenti azionari.

Il motivo è che, quando si ha a che fare con serie storiche finanziarie, l'aspetto fondamentale è quello riguardante la volatilità dei rendimenti stessi.

Riteniamo quindi doveroso introdurre in questo paragrafo un modello che sia più attento alle dinamiche della volatilità stessa.

Il più popolare approccio per modellare tale fenomeno è sicuramente la specificazione ARCH (*autoregressive conditional heteroskedasticity*) introdotta da Engle (1982). Successivamente Bollerslev, Chou e Kroner (1992) hanno caratterizzato la seguente classe generale di modelli. Supponiamo che la variabile u_t sia governata da:

$$u_t = \sigma_t v_t \quad (43)$$

dove v_t è una sequenza i.i.d. con media nulla e varianza unitaria. A questo punto la varianza condizionata di u_t è specificata come una funzione delle proprie passate realizzazioni:

$$\sigma_t^2 = g(u_{t-1}, u_{t-2}, \dots) \quad (44)$$

Spesso si assume che $v_t \sim N(0, 1)$ e che $g(\cdot)$ dipenda linearmente dal quadrato delle passate realizzazioni di u_t :

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p b_i \sigma_{t-i}^2 \quad (45)$$

Quella in (45) è la specificazione di un GARCH (p, q) Gaussiano, introdotta da Bollerslev (1986); quando $p = 0$ si ricade invece nel caso ARCH (p) di Engle (1982).

Talvolta però neppure questa specificazione risulta soddisfacente; numerose ricerche hanno suggerito che le scarse *performance* previsive e un'elevata persistenza spuria dei modelli ARCH possano essere collegate a cambiamenti strutturali nel processo ARCH stesso.

E' altresì noto il fatto che una stima elevata del parametro di persistenza λ abbia effetti negativi sulla robustezza della stima stessa, in vari sotto-campioni. Ricordiamo che tale parametro λ è calcolato, nel caso ad esempio di un GARCH(1,1), come $(a_1 + b_1)$. Esso rappresenta pertanto una sorta di parametro di decadimento riferito alla dipendenza da valori passati di u_t^2, σ_t^2 . Diebold (1986), Lamoureux e Lastrapes (1990) hanno argomentato che le elevate stime di λ potrebbero riflettere cambiamenti strutturali, occorsi all'interno del campione, nel processo della varianza. Cai in particolare notò che la volatilità dei rendimenti dei Buoni del Tesoro statunitensi era molto meno persistente modellando il cambiamento nel parametro attraverso un processo *Markov-switching*.

Un ulteriore aspetto da tenere in considerazione è rappresentato dalla frequenza delle osservazioni; dati giornalieri mostrano tipicamente effetti ARCH, mentre è più complesso che dati a frequenza mensile lo facciano (come hanno dimostrato Hamilton e Susmel, 1994).

Un altro studio, proprio di Hamilton e Susmel (1994), estese il modello ARCH lasciando che i parametri della varianza condizionata potessero variare da periodi di alta volatilità a periodi di bassa volatilità, e viceversa.

A questo punto verrebbe naturale iniziare a descrivere più nel dettaglio i modelli *switching-GARCH*; dobbiamo però notare che sia Cai (1994) sia Hamilton e Susmel (1994) hanno argomentato come questi modelli siano essenzialmente intrattabili e pressoché impossibili da stimare. Il problema risiede nel fatto che la varianza condizionata dipende dall'intero passato dei dati; e avendo introdotto una catena di Markov, questa dipendenza si traduce nella necessità di conoscere l'intera sequenza dei regimi fino al tempo t . Tutto ciò, detto M il numero di stati considerati, porta ad avere M^t componenti per la funzione di log-verosimiglianza; il che rende intrattabile la stima per campioni molto numerosi.

Per tutti i motivi sopra elencati, in questa tesi abbiamo deciso di seguire la specificazione di Hamilton e Susmel (1994), i quali, come già precedentemente accennato, hanno utilizzato una specificazione ARCH con cambiamenti di regime.

Un ulteriore appunto è che noi terremo conto della eventuale presenza del cosiddetto effetto leva; valuteremo cioè la possibilità che aumenti o decrementi dei prezzi azionari possano avere affetti asimmetrici sulla volatilità.

I modelli che tengono conto di tale effetto vengono detti modelli asimmetrici e costituiscono un'estensione dei modelli GARCH. Il primo studioso a trattare questo problema è stato Black (1976), il quale si è soffermato sugli effetti dei rendimenti negativi sulla volatilità.

Successivamente, Zakoian (1991) e Glosten (1993) hanno introdotto il modello TARARCH (*Threshold ARCH*); l'idea di questo modello a soglia è dividere la distribuzione delle innovazioni in intervalli disgiunti e poi considerare una funzione lineare per la varianza condizionata. Se si considerano due soli intervalli, la soglia è posta tipicamente a zero, perciò l'influenza di innovazioni positive e negative è differenziata.

Un'ulteriore estensione è stata effettuata da Rabemananjara e Zakoian (1993), i quali hanno definito i modelli TGARCH includendo tra i regressori anche la varianza condizionata ritardata.

Ricordiamo inoltre che per la natura dei dati e per semplicità computazionale utilizzeremo anche in questa sezione un processo autoregressivo di ordine uno.

Entriamo adesso nel dettaglio del modello, basato sul TARARCH descritto da Zakoian (1991), e vediamo le equazioni caratteristiche:

$$y_t = c_{st} + \phi y_{t-1} + \tilde{u}_t \quad (46)$$

Qui c_{st} denota il parametro c_0 quando il processo è nel regime rappresentato da $S_t = 0$, mentre denota c_1 quando $S_t = 1$.

Modelliamo adesso i residui \tilde{u}_t :

$$\tilde{u}_t = \sqrt{g_{st}} u_t \quad (47)$$

Assumiamo che u_t segua un processo standard ARCH – L (1),

$$u_t = h_t v_t \quad (48)$$

con v_t sequenza i.i.d. a media nulla e varianza unitaria, mentre h_t obbedisce a:

$$h_t^2 = a_0 + a_1 u_{t-1}^2 + \xi d_{t-1} u_{t-1}^2 \quad (49)$$

dove $d_{t-1} = 1$ se $u_{t-1} < 0$ e $d_{t-1} = 0$ se $u_{t-1} > 0$.

Poi si moltiplica la variabile u_t per la costante $\sqrt{g_0}$ quando il processo è nel regime rappresentato da $S_t = 0$ e per la costante $\sqrt{g_1}$ quando $S_t = 1$.

Inoltre il fattore g_0 è normalizzato pari a uno; questo perchè l'idea è quella di modellare cambiamenti di regime come cambiamenti nella scala del processo. Condizionatamente all'informazione presente e passata sui regimi, la varianza implicata per i residui \hat{u}_t è data da:

$$\begin{aligned}
 E(\hat{u}_t^2 | S_t, S_{t-1}, \dots, u_{t-1}) &= \\
 &= g_{st} \left\{ a_0 + a_1 \left(\frac{\hat{u}_{t-1}^2}{g_{st-1}} \right) + \xi d_{t-1} \left(\frac{\hat{u}_{t-1}^2}{g_{st-1}} \right) \right\} \quad (50) \\
 &= \sigma_t^2(S_t, S_{t-1})
 \end{aligned}$$

In assenza di effetto leva ($\xi = 0$), diremo che \hat{u}_t in (47) segue un processo *Markov-switching-ARCH* di ordine uno, con 2 stati, e lo denoteremo $\hat{u}_t \sim \text{SWARCH}(2, 1)$.

Invece in presenza di effetto leva ($\xi \neq 0$), lo chiameremo invece *SWARCH - L* (2, 1).

Anche in questi modelli tutte le considerazioni fatte riguardo a MSM, MSI, durata attesa di uno stato, probabilità filtrate e smussate sono perfettamente valide.

2.6 Un Modello Bivariato

In questa sezione trattiamo ora il caso probabilmente più interessante della nostra tesi: il modello bivariato. Fino a questo momento tutti i modelli presentati sono stati applicati alle singole serie storiche a nostra disposizione; adesso invece implementeremo un modello bivariato, in modo tale da poter cogliere meglio le relazioni intercorrenti tra il ciclo economico (serie storica della produzione industriale) e il ciclo finanziario (serie storica di un indice azionario).

Rimandiamo al capitolo 1 per un'esaustiva definizione di tali cicli e al perché sia interessante studiarli congiuntamente,

Ricordiamo solo brevemente che il nostro scopo sarà quello di saggiare se e in quale modo il ciclo finanziario e il ciclo economico siano correlati; il motivo è che qualora trovassimo delle interessanti relazioni tra i due cicli, queste potrebbero essere utilizzate a fini previstivi, in modo tale, ad esempio, da poter adottare delle corrette politiche monetarie in conseguenza di un *boom* o di un crollo del mercato azionario oppure per effettuare un'efficiente gestione di portafoglio.

Il modello bivariato presentato in questo capitolo è coerente, in particolar modo, con quello di Hamilton e Lin (1996). Faremo cioè una combinazione tra il modello di Hamilton (1989) per le recessioni del ciclo economico e quello di Hamilton e Susmel (1994) per i cambiamenti nel processo ARCH caratterizzante i rendimenti azionari.

Cercheremo di verificare se le fasi ad alta (bassa) volatilità del mercato azionario saranno in qualche maniera collegate alle fasi di contrazione (espansione) del sistema economico, con l'intento di verificare che entrambe dipendano da un unico indicatore, che chiameremo "stato" dell'economia.

Entriamo ora nel dettaglio del modello bivariato; ciò che ipotizzeremo sarà l'esistenza di una singola variabile latente (S_t , rappresentante lo "stato" dell'economia), la quale determini sia la media della produzione industriale sia la scala della volatilità azionaria. Questa variabile latente potrà assumere due soli valori discreti, uno rappresentante lo stato di espansione (stato 0) e uno rappresentante lo stato di contrazione (stato 1).

Per quanto riguarda ulteriori aspetti metodologici, possiamo solo dire che quanto andremo a caratterizzare in questa sezione sarà comunque perfettamente compatibile con i modelli presentati nei paragrafi precedenti. In particolare noi adotteremo una specificazione bivariata *Markov-Switching-Intercept*; diciamo già che non ci interesseremo in questa sezione alle dinamiche ARCH

per quanto riguarda il ciclo finanziario. La motivazione verrà meglio esplicitata nei prossimi capitoli, ma possiamo comunque affermare che le dinamiche ARCH non risultano essere statisticamente significative. Ciò non deve indurci a pensare di essere in errore; il motivo è che tali dinamiche tendono a scomparire qualora si considerino rendimenti azionari mensili, come già verificato anche da Hamilton e Susmel (1994).

Descriviamo brevemente a questo punto le principali differenze, dal punto di vista della modellazione, tra il caso bivariato e quello univariato.

Chiamiamo x_t i rendimenti percentuali della produzione industriale e z_t i rendimenti percentuali del mercato azionario, avremo pertanto $y_t = (x_t \ z_t)$, $t = 2, \dots, T$.

A questo punto, come in tutti i casi precedentemente descritti, consideriamo una parte autoregressiva di ordine uno e otteniamo il seguente modello:

$$y_t = \theta_{st} + \Phi y_{t-1} + L_{t,st} v_t \quad (51)$$

θ_{st} rappresenta il vettore delle intercette, dipendenti dallo stato in t ; Φ rappresenta invece la matrice (2 x 2) contenente i parametri autoregressivi. Qualora i termini non diagonali risulteranno essere diversi da zero, allora si avrà che una delle serie sarà influenzata dall'altra ritardata.

Il termine d'errore v_t si presume essere i.i.d. $N(0, I_2)$, con I_2 indicante la matrice identità (2 x 2). Infine $L_{t,st}$ rappresenta la matrice (2 x 2) di varianze e covarianze; essa è dipendente dallo stato al tempo t e, se ipotizziamo che i termini d'errore delle equazioni di ciclo economico e ciclo finanziario siano indipendenti, assume la forma di una matrice diagonale.

Nel caratterizzare gli elementi della matrice $L_{t,st}$, ricordando ancora una volta che non consideriamo dinamiche ARCH, avremo pertanto:

$$L_{t,st} = \begin{pmatrix} \sigma_{st, IPI} & 0 \\ 0 & \sigma_{st, ind_merc} \end{pmatrix} \quad (52)$$

La (52) indica che la matrice $L_{t,st}$ può assumere due differenti specificazioni; pertanto a seconda dello stato avremo:

$$L_{t,0} = \begin{pmatrix} \sigma_{0, IPI} & 0 \\ 0 & \sigma_{0, ind_merc} \end{pmatrix} \quad (53)$$

nello stato 0 e

$$L_{t,1} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,IP1} & 0 \\ 0 & \sigma_{1,ind_merc} \end{pmatrix} \quad (54)$$

nello stato 1.

Per quanto riguarda la stima di massima verosimiglianza, riportiamo per completezza la forma della funzione di densità di y_t :

$$f(y_t | S_t, S_{t-1}, I_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(L_{t,st})}} \exp\left(-\frac{1}{2} v_t (L_{t,st}^2)^{-1} v_t'\right) \quad (55)$$

con

$$v_t = y_t - \theta_{st} + \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} y_{t-1} \quad (56)$$

La (55) rappresenta nel caso bivariato ciò che la (35) rappresenta nel caso univariato. Anche per questo specifico modello sono perfettamente validi tutti i discorsi relativi alla stima di massima verosimiglianza, alle probabilità filtrate e a quelle smussate ottenute mediante il filtro di Hamilton e l'algoritmo di Kim (capitolo 3).

2.7 Standard Errors

Per tutte le specificazioni presentate in questo capitolo, merita una particolare attenzione il problema della stima degli *standard errors* dei parametri d'interesse.

A partire dai modelli più semplici, fino ad arrivare al modello bivariato, noi abbiamo a che fare con parametri che necessitano di vincoli.

Ad esempio le stime delle probabilità di transizione dovranno sempre essere comprese tra zero e uno; le stime delle varianze dovranno sempre essere positive; le stime dei coefficienti autoregressivi dovranno sempre essere comprese tra meno uno e uno.

La procedura di ottimizzazione di *Gauss* stima i parametri liberi, li trasforma secondo le riparametrizzazioni da noi fornite e infine calcola la funzione di verosimiglianza.

Per una maggiore chiarezza definiamo θ il parametro d'interesse, e ψ il parametro stimato. Avremo pertanto che θ dovrà sottostare a dei vincoli, mentre ψ assumerà valori in \mathbb{R} . A questo punto riteniamo doveroso riportare tutte le riparametrizzazioni da noi adottate:

- Riparametrizzazione per le probabilità di transizione:

$$\theta = \frac{1}{\exp(\psi)} \quad (57)$$

In questo modo vincoliamo le probabilità ad assumere valori compresi tra zero e uno.

- Riparametrizzazione per le varianze:

$$\theta = \exp(\psi) \quad (58)$$

In questo modo vincoliamo le varianze ad assumere solamente valori positivi.

- Riparametrizzazione per i coefficienti autoregressivi:

$$\theta = -1 + \frac{2}{\exp(\psi)} \quad (59)$$

In questo modo vincoliamo i parametri autoregressivi ad assumere valori compresi tra meno uno ed uno.

Dunque se calcoliamo gli *standard errors* per i parametri che entrano nella funzione di verosimiglianza usando derivate numeriche otteniamo gli *standard errors* per i parametri ψ , mentre quelli che ci interessano sono relativi a θ .

Dobbiamo quindi calcolare la matrice di varianze-covarianze per θ .

Definiamo θ e ψ come vettori di coefficienti; abbiamo che $\theta = f(\psi)$ è una funzione vettoriale nella quale ogni elemento della funzione stessa è una riparametrizzazione.

Avremo pertanto:

$$\text{cov}(\theta) = \left(\frac{df(\varphi)}{d\varphi'} \right) \text{cov}(\varphi) \left(\frac{df(\varphi)}{d\varphi'} \right)' \quad (60)$$

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi'} \quad (61)$$

La (61) rappresenta una matrice Jacobiana di derivate prime; ogni elemento di θ è derivato rispetto a tutti gli elementi di ψ . Se le riparametrizzazioni sono semplici allora avremo solo la diagonale principale con valori diversi da zero.

Ricordiamo infine come abbiamo ottenuto la matrice $\text{cov}(\psi)$. Per fare ciò utilizziamo il metodo proposto da White (1982), e otteniamo:

$$\text{cov}(\varphi) \cong T^{-1} * \{ \zeta_A * \zeta_B^{-1} * \zeta_A \}^{-1} \quad (62)$$

$$\zeta_A = -T^{-1} * \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta * \partial \theta'} \Big|_{\theta = \theta_{SMV}} \quad (63)$$

$$\zeta_B = -T^{-1} \sum_{t=1}^T [h(\theta_{SMV}, Y_t)] * [h(\theta_{SMV}, Y_t)]' \quad (64)$$

$l(\theta)$ rappresenta la funzione di log-verosimiglianza e la (63) va calcolata sulle stime di massima verosimiglianza. Inoltre $h_t(\cdot)$ rappresenta il vettore ($a \times 1$) delle derivate della log-densità condizionata della t -esima osservazione rispetto all' a -esimo elemento del vettore dei parametri θ , con tali derivate calcolate per i valori di massima verosimiglianza.

Da un punto di vista computazionale non dovremo fare altro che calcolarci l'Hessiano e il Jacobiano relativi a determinate procedure e poi effettuare i precedenti calcoli, così da ottenere la corretta matrice di varianze-covarianze dei parametri di interesse.

3. Aspetti Computazionali Legati alla Stima dei Parametri

In questo capitolo esporremo tutti gli accorgimenti da noi adottati per arrivare ad ottenere le stime di massima verosimiglianza.

Dobbiamo innanzitutto specificare in maniera corretta la nostra funzione obiettivo; questa non è altro che la funzione di log – verosimiglianza. La nostra funzione obiettivo è pertanto dipendente sia dai dati a nostra disposizione, sia dai parametri del modello.

Tali parametri sono le medie (o le intercette) dei due stati, le due varianze, i parametri autoregressivi, il parametro dell'effetto leva (solo per il modello per il modello SWARCH – L) e le probabilità di transizione.

Ciò che faremo, per ricavarci le stime di massima verosimiglianza, è massimizzare la funzione obiettivo rispetto ai parametri del modello.

Il programma che utilizziamo è *Gauss* e la libreria adottata per l'ottimizzazione è *Optmum*; questa permette di minimizzare una determinata funzione (per massimizzarla basta minimizzarne l'opposto), in relazione ai parametri e ai vincoli desiderati. All'interno di *Optmum* abbiamo usato l'algoritmo BFGS (metodo di Broyden, Fletcher, Goldfarb, e Shanno) per ottenere le stime richieste. Questo metodo è simile all'algoritmo di Newton, nel senso che entrambi sfruttano le informazioni derivanti sia dalle derivate prime sia da quelle seconde. D'altronde col metodo BFGS l'Hessiano è approssimato, riducendo notevolmente in tal modo lo sforzo computazionale. Proprio a causa di tale approssimazione delle derivate seconde, il metodo BFGS è anche detto metodo quasi – Newton.

Il problema che andremo ad affrontare in questo capitolo sorge dal fatto che i modelli *Markov–Switching* da noi implementati fanno riferimento ad una variabile non osservata, S_t .

Non potendo sapere lo stato nel quale ci troviamo in ogni istante temporale, abbiamo dovuto introdurre delle probabilità che tenessero conto di questo fatto.

Nel capitolo 2 ci eravamo lasciati dicendo che per riuscire ad ottenere le stime dei parametri di interesse, era necessario adottare dei particolari accorgimenti per il calcolo di determinate probabilità; andiamo pertanto adesso a stimarle.

Iniziamo col descrivere il caso di *Markov–Switching–Intercept*; come già riportato nel capitolo 2.4, questo modello è caratterizzato dalla dipendenza dallo stato al tempo t (S_t).

Le probabilità che quindi dobbiamo ancora stimare sono $\Pr[S_t = j | I_{t-1}]$, $j = 0, 1$. Abbiamo pertanto:

$$\Pr(S_t = j | I_{t-1}) = \Pr(S_t = j | S_{t-1} = i) \Pr(S_{t-1} = i | I_{t-1}) \quad i = 0, 1 \quad j = 0, 1 \quad (65)$$

Notiamo che $\Pr(S_t = j | S_{t-1} = i)$ non è altro che la probabilità p_{ij} della matrice di transizione (24).

A questo punto è possibile ricavare la seguente densità congiunta:

$$f(y_t, S_t = j | I_{t-1}) = f(y_t | S_t = j, I_{t-1}) \Pr(S_t = j | I_{t-1}) \quad (66)$$

Ora dobbiamo solamente calcolarci le probabilità filtrate:

$$\Pr(S_t = j | I_t) = \frac{f(y_t | S_t = j, I_{t-1}) \Pr(S_t = j | I_{t-1})}{\sum_{j=0}^1 f(y_t, S_t = j | I_{t-1})} \quad (67)$$

Eseguendo i precedenti calcoli iterativamente per $t = 1, \dots, T$, otteniamo le probabilità filtrate che stavamo cercando.

Una volta ottenute tali probabilità, per calcolare la funzione di log – verosimiglianza, non dovremo fare altro che calcolare:

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln \left\{ \sum_{j=0}^1 f(y_t, S_t = j | I_{t-1}) \right\} \quad (68)$$

A questo punto, massimizzando la (68) rispetto ai parametri d'interesse, otterremo le stime di massima verosimiglianza.

Ricordiamo che per iniziare a calcolare le probabilità filtrate al tempo $t = 1$, dobbiamo inizializzare le probabilità di essere in un dato stato; utilizziamo dunque le cosiddette probabilità ergodiche. Per il nostro modello tali probabilità sono date da:

$$\pi_0 = \Pr(S_0 | I_0) = \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{11} - p_{00}} \quad (69)$$

$$\pi_1 = \Pr(S_1 | I_0) = \frac{1 - p_{00}}{2 - p_{11} - p_{00}} \quad (70)$$

Riassumendo, possiamo fornire la seguente schematizzazione dei passi effettuati finora:

1. calcolo delle probabilità condizionate di S_t , data l'informazione in $t-1$ (I_{t-1})
2. calcolo della verosimiglianza per l'istante temporale t
3. calcolo delle probabilità filtrate di S_t , data l'informazione in t (I_t)
4. iterazione dei passi 1 – 3 per $t = 1, \dots, T$
5. somma rispetto a t delle verosimiglianze ottenute

Quanto scritto finora non è però applicabile nel caso di modelli *Markov–Switching–Mean*. Infatti tali modelli sono caratterizzati dalla dipendenza dallo stato al tempo t (S_t), ma anche da quella dallo stato in $t-1$ (S_{t-1}). Ciò rende necessario adottare una procedura più complessa per il calcolo delle probabilità filtrate.

3.1 Filtro di Hamilton

Per ottenere le stime dei parametri dei nostri modelli *Markov–Switching-Mean* autoregressivi, necessitiamo dunque del calcolo di $\Pr[S_t = j, S_{t-1} = i | I_{t-1}]$, $i = 0, 1$ e $j = 0, 1$; implementiamo dunque il filtro di Hamilton. Le procedure sotto descritte sono coerenti con quanto riportato da Kim e Nelson (1999).

Per maggiore chiarezza espositiva consideriamo i seguenti 2 *step*:

- STEP 1

Date $\Pr[S_{t-1} = i | I_{t-1}]$, $i = 0, 1$, all'inizio della t -esima iterazione, i pesi $\Pr[S_t = j, S_{t-1} = i | I_{t-1}]$, $i=0, 1$ e $j = 0, 1$, sono calcolati nel modo seguente:

$$\Pr(S_t = j, S_{t-1} = i | I_{t-1}) = \Pr(S_t = j | S_{t-1} = i) \Pr(S_{t-1} = i | I_{t-1}) \quad (71)$$

dove $\Pr[S_t = j | S_{t-1} = i]$, $i = 0, 1$ e $j = 0, 1$, sono le probabilità di transizione.

- STEP 2

Una volta osservata y_t alla fine della t -esima iterazione, noi possiamo aggiornare i termini delle probabilità nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \Pr(S_t = j, S_{t-1} = i | I_{t-1}) &= \\ &= \Pr(S_t = j, S_{t-1} = i | I_{t-1}, y_t) \\ &= \frac{f(S_t = j, S_{t-1} = i, y_t | I_{t-1})}{f(y_t | I_{t-1})} \\ &= \frac{f(y_t | S_t = j, S_{t-1} = i, I_{t-1}) \Pr(S_t = j, S_{t-1} = i | I_{t-1})}{\sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 f(y_t | S_t = j, S_{t-1} = i, I_{t-1}) \Pr(S_t = j, S_{t-1} = i | I_{t-1})} \end{aligned} \quad (72)$$

con

$$\Pr(S_t = j | I_t) = \sum_{i=0}^1 \Pr(S_t = j, S_{t-1} = i | I_t) \quad (73)$$

Iterando i due *steps* per $t = 1, 2, \dots, T$ otteniamo i pesi appropriati per la funzione di log-verosimiglianza (38); massimizzandola in funzione dei parametri d'interesse potremo pertanto ricavarci le stime di massima verosimiglianza

Così come avevamo dovuto effettuare un'inizializzazione nel caso MSI, anche per iniziare ad utilizzare il filtro di Hamilton al tempo $t = 1$ dobbiamo inizializzare le probabilità di essere in un dato stato; possiamo dunque utilizzare le probabilità non condizionate o le probabilità ergodiche (di equilibrio). In un modello come il nostro tali probabilità sono date da:

$$\pi_0 = \Pr(S_0 | I_0) = \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{11} - p_{00}} \quad (74)$$

$$\pi_1 = \Pr(S_1 | I_0) = \frac{1 - p_{00}}{2 - p_{11} - p_{00}} \quad (75)$$

Riassumendo, possiamo fornire la seguente schematizzazione dei passi effettuati finora:

1. calcolo delle probabilità condizionate di S_t e S_{t-1} , data l'informazione in $t-1$ (I_{t-1})
2. calcolo della verosimiglianza per l'istante temporale t
3. calcolo delle probabilità filtrate di S_t , data l'informazione in t (I_t), secondo la (73)
4. iterazione dei passi 1 – 3 per $t = 1, \dots, T$
5. somma rispetto a t delle verosimiglianze ottenute

In generale i problemi di inferenza in un modello *Markov-switching* sono la stima dei parametri del modello, tramite massimizzazione della funzione di log-verosimiglianza, e il fare inferenza su S_t , $t = 1, 2, \dots, T$. Quest'ultima è usualmente compiuta condizionatamente ai parametri stimati del modello. Sempre riguardo alla variabile di stato, è importante distinguere le probabilità smussate dalle probabilità filtrate.

Le probabilità filtrate si riferiscono all'inferenza su S_t condizionata all'informazione fino al tempo t , I_t ; tali probabilità sono ottenute mediante il filtro di Hamilton presentato poc'anzi.

Le probabilità smussate invece si riferiscono all'inferenza su S_t condizionata a tutta l'informazione del campione, I_T ; per ottenere tali probabilità dobbiamo a questo punto implementare l'algoritmo *smoothing* di Kim

3.2 Algoritmo *Smoothing* di Kim

Una volta ottenute tutte le stime dei parametri del modello, è possibile fare inferenza su S_t utilizzando tutta l'informazione contenuta nel campione. Ciò ci permette di ricavare $\Pr[S_t = j | I_T]$, $t=1, 2, \dots, T$, la quale rappresenta la probabilità smussata (al contrario di $\Pr[S_t = j | I_t]$, $t = 1, 2, \dots, T$, che è la probabilità filtrata vista precedentemente).

Consideriamo dunque la seguente derivazione della probabilità congiunta che $S_t = j$ e $S_{t+1} = k$ basata su tutta l'informazione disponibile:

$$\begin{aligned}
 & \Pr(S_t = j, S_{t+1} = k | I_T) \\
 &= \Pr(S_{t+1} = k | I_T) \Pr(S_t = j | S_{t+1} = k, I_T) \\
 &= \Pr(S_{t+1} = k | I_T) \Pr(S_t = j | S_{t+1} = k, I_t) \\
 &= \frac{\Pr(S_{t+1} = k | I_T) \Pr(S_t = j, S_{t+1} = k | I_t)}{\Pr(S_{t+1} = k | I_t)} \\
 &= \frac{\Pr(S_{t+1} = k | I_T) \Pr(S_t = j | I_t) \Pr(S_{t+1} = k | S_t = j)}{\Pr(S_{t+1} = k | I_t)}
 \end{aligned} \tag{76}$$

e

$$\Pr(S_t = j | I_T) = \sum_{k=0}^1 \Pr(S_t = j, S_{t+1} = k | I_T) \tag{77}$$

Ottenuta $\Pr[S_t | I_T]$ all'ultima iterazione del filtro di Hamilton, l'espressione precedente può essere iterata per $t = T-1, T-2, \dots, 1$ in modo da ottenere le probabilità smussate $\Pr[S_t | I_T]$, $t = T-1, T-2, \dots, 1$. Per dimostrare la validità del passaggio tra la seconda e la terza riga dell'equazione (76) definiamo $h_{t+1, T} = (y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_T)'$ per $T > t$. Cioè $h_{t+1, T}$ è il vettore delle osservazioni dalla data $t+1$ fino alla data T . Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}
 & \Pr(S_t = j | S_{t+1} = k, I_T) = \\
 & = \Pr(S_t = j | S_{t+1} = k, h_{t+1,T}, I_t) = \\
 & = \frac{f(S_t = j, h_{t+1,T} | S_{t+1} = k, I_t)}{f(h_{t+1,T} | S_{t+1} = k, I_t)} \quad (78) \\
 & = \frac{\Pr(S_t = j | S_{t+1} = k, I_t) f(h_{t+1,T} | S_{t+1} = k, S_t = j, I_t)}{f(h_{t+1,T} | S_{t+1} = k, I_t)} = \\
 & = \Pr(S_t = j | S_{t+1} = k, I_t)
 \end{aligned}$$

L'espressione (78) suggerisce che se S_{t+1} è in qualche modo nota, allora y_{t+1} non contiene informazioni ulteriori su S_t rispetto a quelle contenute in S_{t+1} e I_T .

Ricordiamo che per quanto riguarda sia l'algoritmo di Kim sia il filtro di Hamilton, noi ci siamo concentrati e abbiamo trascritto le formule per il caso di un modello autoregressivo di ordine 1 con sottostante catena di Markov, a 2 stati, di ordine 1.

Ovviamente è possibile effettuare le generalizzazioni per quanto concerne sia l'ordine del processo autoregressivo, sia l'ordine della catena di Markov, sia il numero di stati.

Ci siamo soffermati nel dettaglio del modello rappresentato dalle equazioni (29 - 34) per due motivi; innanzitutto perché in letteratura il modello da noi trattato è il più utilizzato ed è quello che ottiene risultati migliori, e in secondo luogo anche per motivi computazionali (aumentare il numero di stati e ordine del processo autoregressivo può portare ad una sostanziale intrattabilità del modello).

Prima di concludere questo capitolo, desideriamo soffermarci ancora un attimo sulle probabilità smussate e sulla loro importanza. Tali probabilità sono utili in quanto ci permettono di stabilire quale sia lo stato in cui ci si trova, in ogni istante temporale. Dunque, da un'analisi di queste probabilità potremmo ricavare informazioni utili per quanto concerne lo stato dell'economia.

In particolare diremo di trovarci nello stato 0 qualora la probabilità smussata dello stato 0 sia maggiore di 0.5 e diremo di trovarci nello stato 1 qualora la probabilità smussata dello stato 1 sia maggiore di 0.5; il tutto per $t = 1, \dots, T$.

4. Ciclo Economico e Ciclo Finanziario nell'Area Euro: i Dati

Nella nostra tesi siamo intenzionati ad analizzare il ciclo economico e il ciclo finanziario, prima singolarmente, poi in modo bivariato.

Le serie storiche che utilizzeremo saranno pertanto fondamentalmente due:

- Indice della Produzione Industriale (*Total Industry* escluse le costruzioni) dell'area Euro a 12 paesi, destagionalizzato
- Indice di Mercato composito europeo, costruito a partire dagli indici MSCI (*Morgan Stanley Capital International*) dei singoli paesi

Entrambe coprono l'arco temporale gennaio 1970 – marzo 2007 e sono caratterizzate da una frequenza mensile.

Le fonti dei nostri dati sono state essenzialmente il database *Datastream* e la banca dati di *Eurostat*.

Per quanto riguarda l'Indice della Produzione Industriale, abbiamo considerato l'area Euro a 12 paesi per il semplice fatto che la Slovenia non dispone di una serie storica IPI di tale lunghezza.

Per quanto concerne l'Indice di Mercato, esso è basato sugli indici MSCI dei singoli paesi; si potrebbe obiettare che magari si poteva utilizzare l'indice azionario Eurostoxx, di più facile reperibilità. Abbiamo invece optato per la costruzione di un indice alternativo basato sull'MSCI, in quanto quest'ultimo fa riferimento all'intero mercato azionario, mentre l'Eurostoxx viene calcolato a partire solamente da azioni *large cap* (cioè ad elevata capitalizzazione).

Dovendo noi far riferimento all'intero ciclo finanziario, abbiamo ritenuto pertanto più corretto utilizzare un indice che tenesse conto del maggior numero possibile di titoli.

Abbiamo così deciso di scaricare gli indici MSCI per i singoli paesi per i quali era disponibile, e di calcolare poi una sorta di indice comunitario mediante media ponderata.

A questo proposito dichiariamo che per ottenere i pesi dei singoli paesi all'interno dell'indice comunitario da noi creato, ne abbiamo utilizzato il Prodotto Interno Lordo.

Questo approccio è detto “dei fondamentali”, in quanto noi utilizziamo una misura molto importante dell'economia (il PIL) per valutare la “dimensione” di uno stato dal punto di vista “economico”.

Facciamo notare che poiché l'indice IPI è a base 2000 = 100, anche il PIL che abbiamo considerato è riferito all'anno 2000.

Riportiamo di seguito una tabella con rappresentati i PIL dei singoli paesi, e il loro conseguente peso:

PAESE	PIL (milioni di Euro)	PESO del paese nell'indice
Belgio	248455,6	4,24%
Germania	2131016,2	36,33%
Spagna	558224,6	9,52%
Francia	1379230,3	23,51%
Italia	946362,6	16,13%
Olanda	390800,7	6,66%
Austria	211758,7	3,61%

Tabella 1: PIL, e conseguente peso all'interno di dell'indice, dei sette paesi considerati

Notiamo subito che Germania, Francia e Italia sono sicuramente paesi con un PIL molto maggiore rispetto agli altri, e terremo giusta considerazione di questo fatto nella creazione dell'indice di mercato complessivo.

A questo punto calcoliamo i rendimenti logaritmici mensili percentuali delle nostre 8 serie (IPI e i 7 MSCI) mediante la formula:

$$r_t = 100 \log (y_t) - 100 \log (y_{t-1}) \quad (79)$$

con y_t serie storica dei livelli. Ora, per ottenere i rendimenti dell'Indice di Mercato europeo non dobbiamo fare altro che la media ponderata dei rendimenti MSCI dei singoli paesi. Nel dettaglio applichiamo la formula:

$$\begin{aligned} r_{\text{ind_merc}} = & 0.03610 r_{\text{austria}} + 0.04236 r_{\text{belgio}} \\ & + 0.23513 r_{\text{francia}} + 0.36329 r_{\text{germania}} \\ & + 0.16133 r_{\text{italia}} + 0.06662 r_{\text{olanda}} \\ & + 0.09517 r_{\text{spagna}} \end{aligned} \quad (80)$$

4.1 Analisi Preliminari dei Dati

A questo punto abbiamo in a disposizione entrambe le serie che ci interessano, e cioè una relativa al ciclo economico e una relativa al ciclo finanziario.

Effettuiamo quindi delle prime semplici analisi descrittive; prima di iniziare ricordiamo solamente per farle abbiamo utilizzato il programma, di analisi delle serie storiche, *E – Views*.

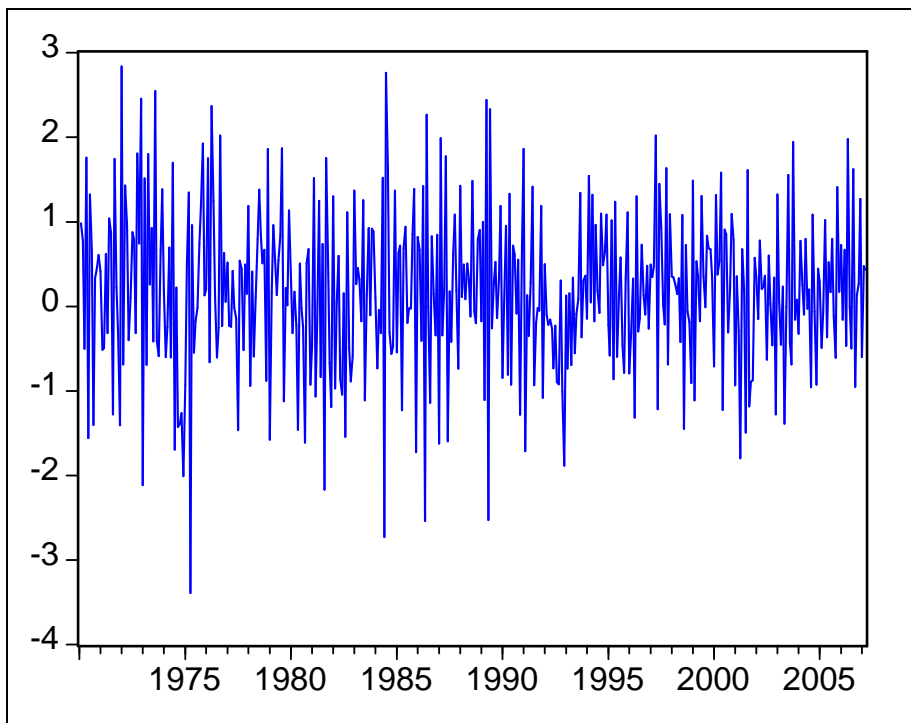


Grafico 1: rendimenti mensili Indice della Produzione Industriale

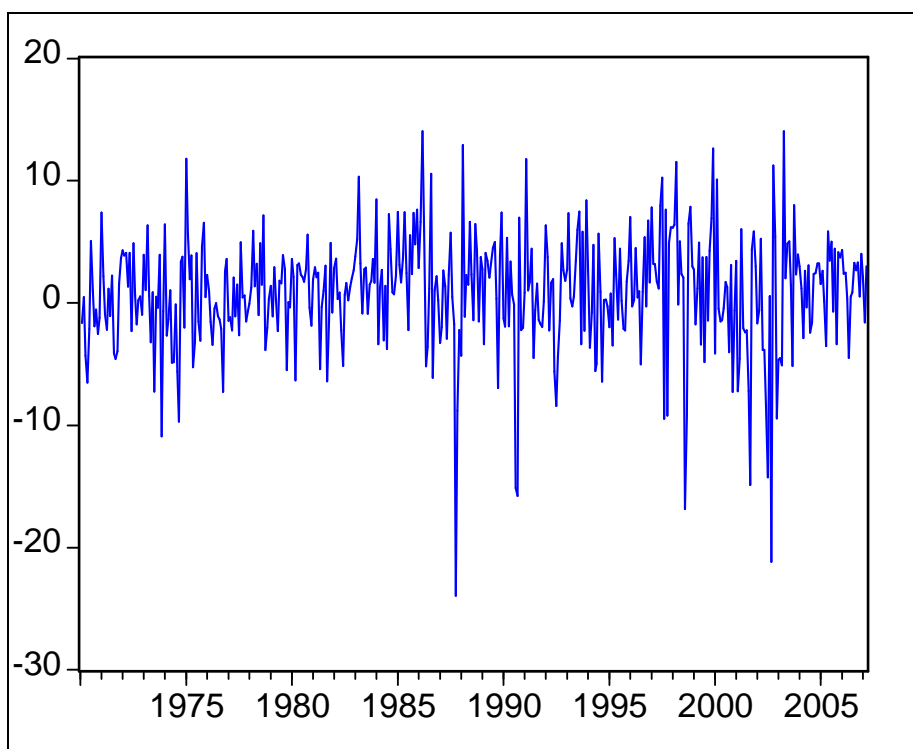


Grafico 2: rendimenti mensili Indice di Mercato

I rendimenti dell'Indice della Produzione Industriale (Grafico 1) oscillano intorno allo zero in una maniera tale da far presupporre una media quasi nulla. Per quanto riguarda la variabilità possiamo notare che essa è più o meno marcata a seconda dei periodi, ma sostanzialmente non sembra mostrare differenze particolarmente evidenti.

I rendimenti dell'Indice di Mercato (Grafico 2) sembrano anch'essi oscillare intorno allo zero; in questo caso però sono presenti molti più picchi (sia positivi sia negativi) rispetto all'altra serie. Inoltre per quanto concerne la volatilità è evidente come siano presenti periodi dalle caratteristiche molto differenti.

Tutto ciò è in linea con quanto affermato nel capitolo precedente; e cioè sarà logico e doveroso dedicare notevole attenzione alle dinamiche della media per quanto concerne la produzione industriale, e sarà altresì fondamentale soffermarsi attentamente sulle dinamiche della volatilità dell'Indice di Mercato.

Riportiamo adesso delle ulteriori analisi descrittive sulle nostre serie:

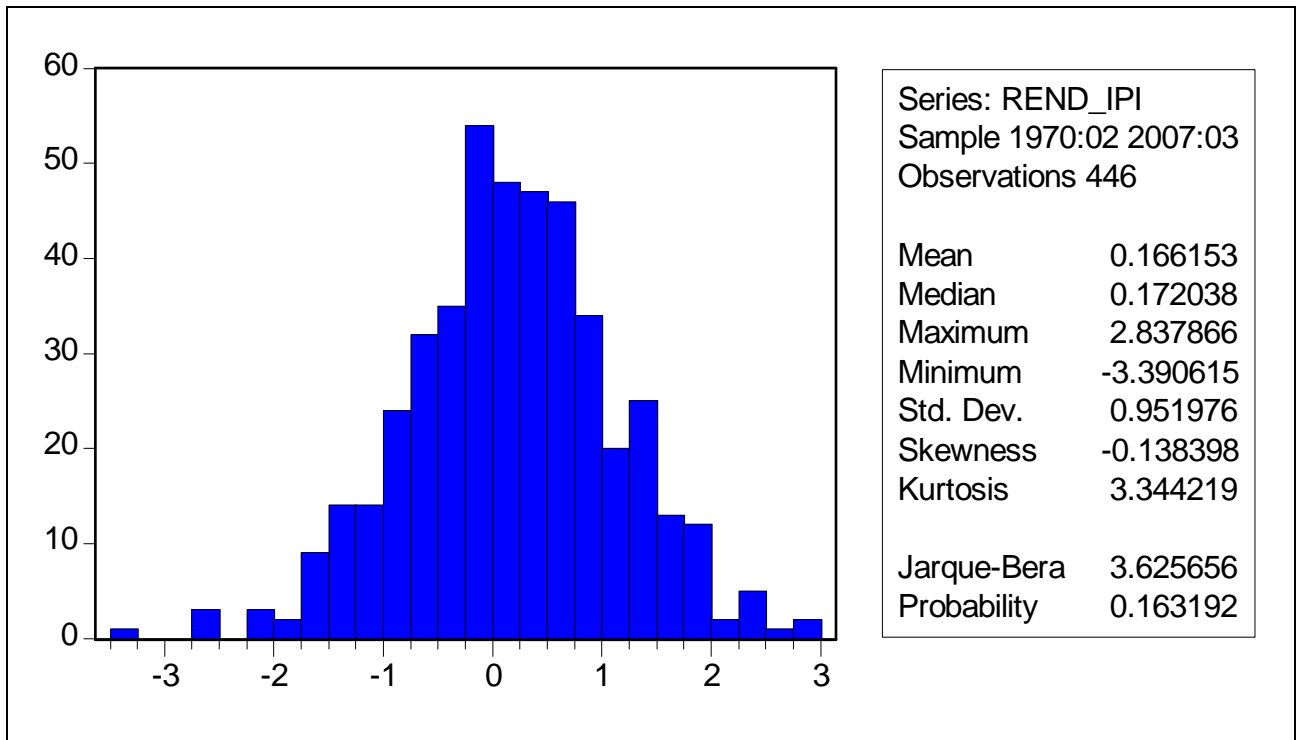


Grafico 3: istogramma e statistiche dei rendimenti mensili dell'Indice della Produzione Industriale

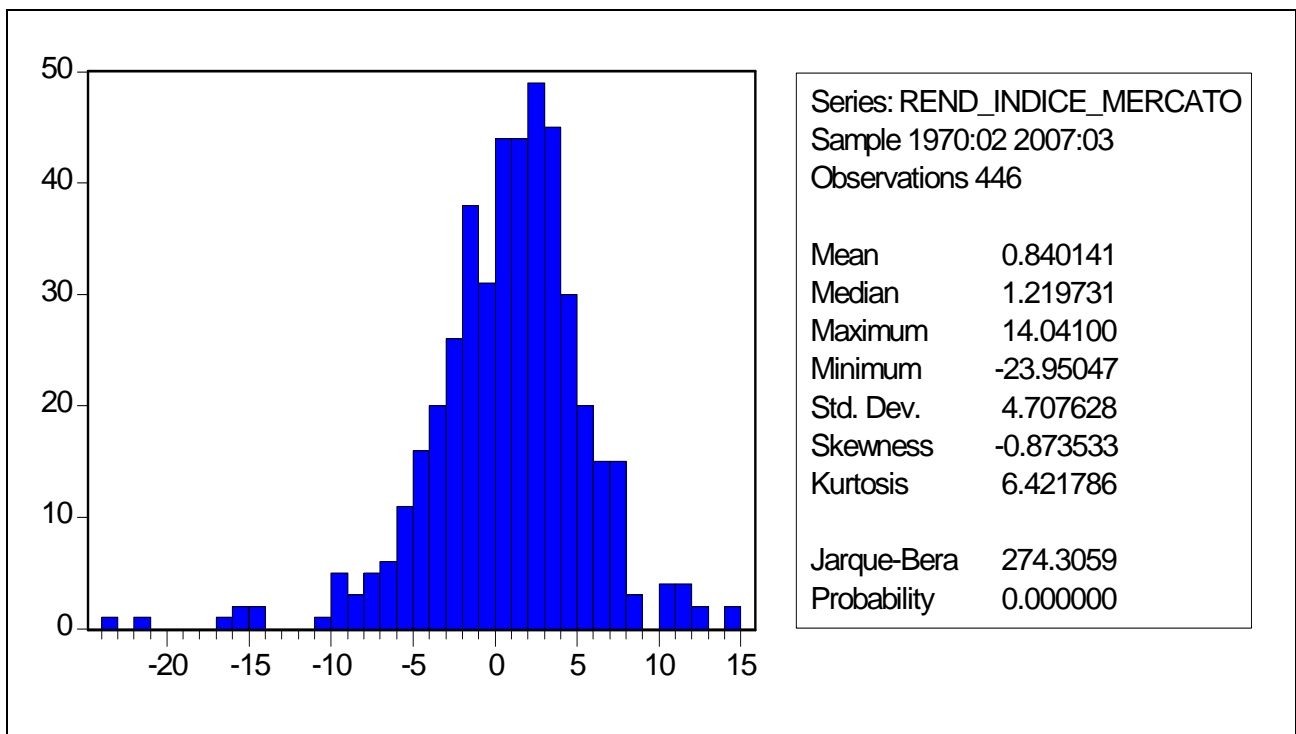


Grafico 4: istogramma e statistiche dei rendimenti mensili dell'Indice di Mercato

La produzione industriale (Grafico 3) mostra una media leggermente superiore allo zero (circa 0.17) e una varianza inferiore all'unità. E' interessante notare come la differenza tra il valore massimo e quello minimo sia di oltre 6 punti percentuali. Notiamo inoltre che il test di Jarque – Bera accetta decisamente l'ipotesi nulla di normalità dei dati in questione ($p - \text{value} = 0.16$).

L'indice di mercato (Grafico 4) mostra una media maggiore di zero (circa 0.84) e una varianza pari a circa 22.18. La differenza rispetto alla produzione industriale si nota fin da subito, ed è ancora più evidente se guardiamo alla differenza tra il valore massimo e quello minimo; per questa serie tale valore è di circa 38 punti percentuali. In questo caso però il test di Jarque – Bera rifiuta decisamente l'ipotesi nulla di normalità dei dati ($p - \text{value} = 0$).

Tutte queste basilari analisi descrittive sono perfettamente in linea con l'idea di fondo della nostra tesi; e cioè che siano presenti dei veri e propri cambiamenti strutturali, nei parametri, a seconda dello stato dell'economia.

Adesso, giusto per integrare il test di Jarque – Bera, riportiamo i qq – plot delle nostre serie:

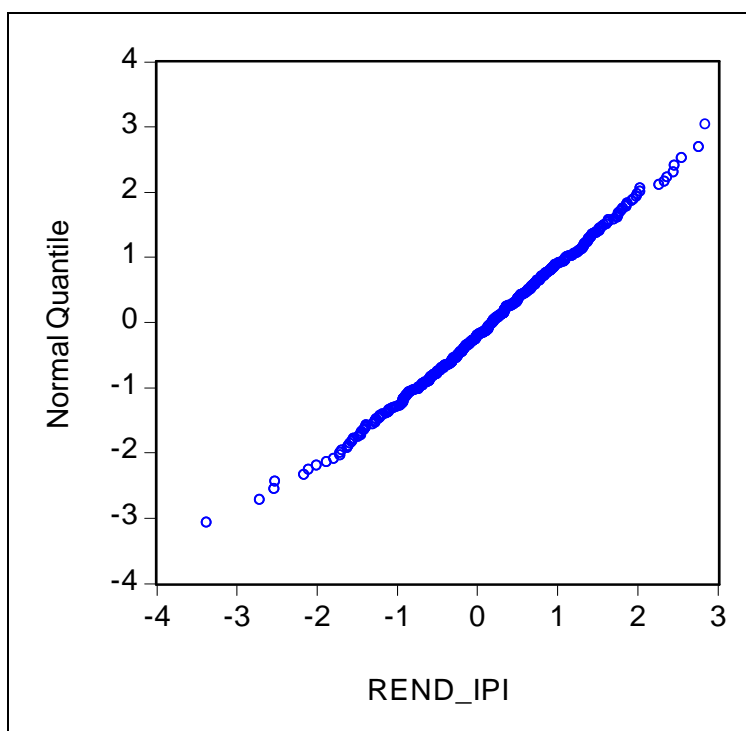


Grafico 5: qq – plot IPI

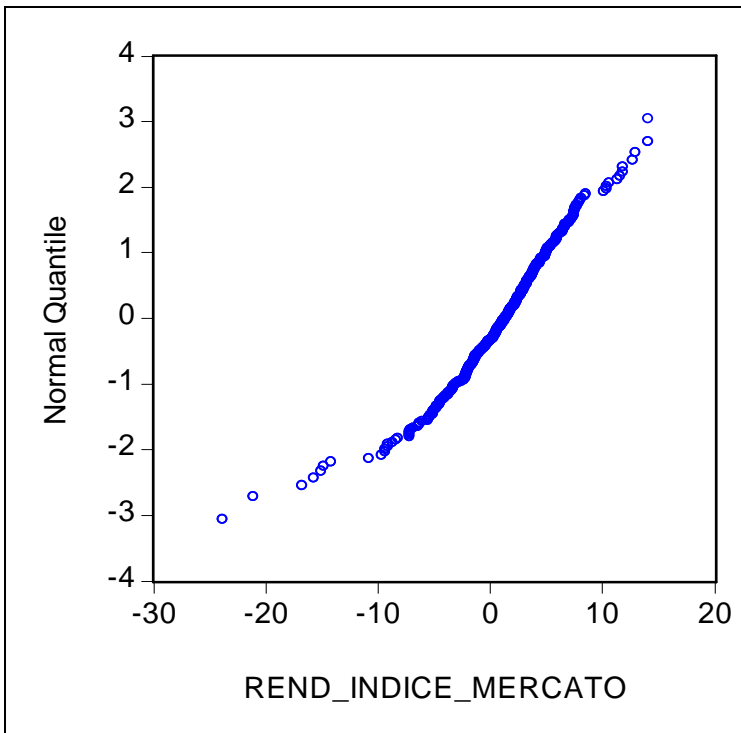


Grafico 6: qq – plot Indice di Mercato

Ricordiamo che i qq – plot sono dei grafici che confrontano i quantili della distribuzione della variabile oggetto d’analisi, con quelli di una Normale.

Il grafico 5 conferma dunque che i rendimenti IPI provengono da una distribuzione Normale. Il grafico 6 invece evidenzia dei problemi nelle code, i quali supportano quanto già detto per il test Jarque – Bera, e cioè che i rendimenti dell’Indice di Mercato non sembrano provenire da una distribuzione Normale.

Effettuiamo adesso l'analisi dei correlogrammi dei residui per verificarne la eventuale autocorrelazione:

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
*** .	*** .	1	-0.356	-0.356	57.005	0.000
. *	. .	2	0.111	-0.018	62.569	0.000
. *	. *	3	0.108	0.163	67.873	0.000
. .	. *	4	0.034	0.149	68.409	0.000
. *	. *	5	0.086	0.150	71.789	0.000
. .	. *	6	0.034	0.094	72.313	0.000
. .	. .	7	0.000	-0.001	72.313	0.000
. *	. *	8	0.126	0.089	79.542	0.000
. .	. .	9	-0.031	0.014	79.968	0.000
. .	* .	10	-0.027	-0.088	80.302	0.000
. *	. .	11	0.098	0.010	84.737	0.000
*** .	*** .	12	-0.209	-0.232	104.930	0.000
. *	* .	13	0.104	-0.096	109.940	0.000
* .	* .	14	-0.116	-0.137	116.160	0.000
. .	. .	15	0.056	0.028	117.590	0.000
. .	. .	16	-0.038	0.039	118.280	0.000
* .	* .	17	-0.174	-0.145	132.390	0.000
. *	. .	18	0.105	0.036	137.560	0.000
* .	. .	19	-0.079	0.016	140.460	0.000
. .	. *	20	-0.017	0.087	140.590	0.000

Tabella 2: correlogramma dei residui IPI

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. ***	. ***	1	0.252	0.252	28.567	0.000
. .	* .	2	-0.012	-0.081	28.633	0.000
. .	. .	3	-0.020	0.004	28.819	0.000
. .	. .	4	0.035	0.042	29.378	0.000
. .	. .	5	0.026	0.004	29.676	0.000
. .	. .	6	0.010	0.006	29.722	0.000
. .	. .	7	0.013	0.013	29.801	0.000
. .	* .	8	-0.051	-0.063	31.009	0.000
. .	. .	9	-0.010	0.022	31.055	0.000
. .	. .	10	0.023	0.017	31.296	0.001
. .	. .	11	0.003	-0.013	31.300	0.001
. *	. *	12	0.088	0.104	34.842	0.000
. .	* .	13	-0.007	-0.061	34.865	0.001
* .	. .	14	-0.065	-0.046	36.815	0.001
. .	. .	15	-0.045	-0.010	37.736	0.001
. .	. .	16	0.035	0.035	38.303	0.001
. *	. .	17	0.081	0.062	41.324	0.001
. .	. .	18	0.041	0.016	42.099	0.001
. .	. .	19	0.028	0.019	42.467	0.002
. *	. *	20	0.084	0.095	45.742	0.001

Tabella 3: correlogramma quadrato dei residui IPI

Le tabelle 2 e 3 mostrano chiaramente come l'ipotesi nulla di in correlazione dei residui e del quadrato dei residui sia da rifiutare. Pertanto, già da ora, risulta chiaro che per la serie IPI dovremo implementare un modello che tenga conto di questo fatto, introducendo ad esempio un dinamica autoregressiva.

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
. *	. *	1	0.108	0.108	5.2030	0.023
. .	. .	2	0.030	0.019	5.6090	0.061
. .	. .	3	0.056	0.051	7.0012	0.072
. .	. .	4	0.003	-0.009	7.0046	0.136
. .	. .	5	-0.026	-0.028	7.3060	0.199
. .	. .	6	0.039	0.042	7.9926	0.239
. .	. .	7	-0.040	-0.048	8.7220	0.273
. .	. .	8	0.032	0.043	9.1906	0.326
. .	. .	9	0.009	-0.002	9.2240	0.417
. *	. *	10	0.119	0.124	15.743	0.107
. .	. .	11	0.029	0.001	16.125	0.137
. *	. *	12	0.083	0.074	19.294	0.082
. .	. .	13	0.024	0.000	19.566	0.107
. .	. .	14	-0.036	-0.048	20.159	0.125
. .	. .	15	-0.048	-0.039	21.225	0.130
. .	. .	16	-0.018	-0.021	21.373	0.165
. .	. .	17	-0.042	-0.018	22.202	0.177
. .	. .	18	0.015	0.014	22.308	0.219
. .	. .	19	-0.032	-0.029	22.784	0.247
* .	* .	20	-0.118	-0.131	29.327	0.082

Tabella 4: correlogramma dei residui Indice di Mercato

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
. *	. *	1	0.165	0.165	12.262	0.000
. *	. .	2	0.084	0.058	15.423	0.000
. *	. .	3	0.084	0.064	18.636	0.000
. *	. .	4	0.071	0.045	20.909	0.000
. .	. .	5	0.056	0.031	22.351	0.000
. .	. .	6	0.034	0.010	22.881	0.001
. .	. .	7	0.042	0.025	23.702	0.001
. .	. .	8	-0.014	-0.036	23.787	0.002
. .	. .	9	0.027	0.024	24.118	0.004
. *	. .	10	0.068	0.058	26.237	0.003
. .	. .	11	-0.010	-0.034	26.285	0.006
. *	. *	12	0.077	0.077	29.014	0.004
. .	. .	13	0.052	0.025	30.276	0.004
. .	. .	14	0.045	0.021	31.215	0.005
. .	. .	15	-0.013	-0.038	31.291	0.008
. .	. .	16	0.011	0.001	31.351	0.012
. .	. .	17	-0.010	-0.025	31.399	0.018
. .	. .	18	0.006	0.012	31.418	0.026
. *	. *	19	0.101	0.096	36.230	0.010
. .	. .	20	-0.010	-0.040	36.279	0.014

Tabella 5: correlogramma quadrato dei residui Indice di Mercato

La tabella 5 mostra che i residui al quadrato dell'Indice di Mercato sono caratterizzati dalla presenza di autocorrelazione; l'ipotesi nulla di in correlazione viene infatti decisamente rifiutata. Per quanto riguarda il correlogramma dei residui (tabella 4), questo mostra dei risultati critici. Alla prima osservazione corrisponde infatti un p - value del test pari a 0.02, il che significa che ad un livello del 5 % dobbiamo rifiutare l'ipotesi nulla di incorrelazione, ma ad un livello dell'1 % possiamo accettarla. Queste analisi ci fanno capire che per l'Indice di Mercato si potrà pensare di considerare una dinamica autoregressiva, salvo poi verificarne la significatività.

In conseguenza dei risultati sui correlogrammi, riteniamo utile effettuare anche il test LM per verificare l'ipotesi nulla di assenza di effetti autoregressivi nei residui.

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	32.30069	Probability	0.000000
Obs*R-squared	56.76150	Probability	0.000000

Test Equation:

Dependent Variable: RESID

Method: Least Squares

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000242	0.042206	-0.005737	0.9954
RESID(-1)	-0.362853	0.047513	-7.636882	0.0000
RESID(-2)	-0.018170	0.047519	-0.382366	0.7024
R-squared	0.127268	Mean dependent var		-1.36E-16
Adjusted R-squared	0.123328	S.D. dependent var		0.951976
S.E. of regression	0.891342	Akaike info criterion		2.614528
Sum squared resid	351.9596	Schwarz criterion		2.642108
Log likelihood	-580.0396	F-statistic		32.30069
Durbin-Watson stat	1.991795	Prob(F-statistic)		0.000000

Tabella 6: test LM sui residui IPI

Per quanto riguarda IPI, anche il test LM rifiuta decisamente l'ipotesi nulla; possiamo dunque tranquillamente affermare la presenza di effetti autoregressivi.

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	2.675690	Probability	0.069972
Obs*R-squared	5.323314	Probability	0.069832

Test Equation:

Dependent Variable: RESID

Method: Least Squares

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000502	0.222078	0.002261	0.9982
RESID(-1)	0.105682	0.047518	2.224065	0.0266
RESID(-2)	0.018623	0.047532	0.391791	0.6954
R-squared	0.011936	Mean dependent var		-1.89E-16
Adjusted R-squared	0.007475	S.D. dependent var		4.707628
S.E. of regression	4.690001	Akaike info criterion		5.935446
Sum squared resid	9744.275	Schwarz criterion		5.963027
Log likelihood	-1320.605	F-statistic		2.675690
Durbin-Watson stat	2.000680	Prob(F-statistic)		0.069972

Tabella 7: test LM sui residui Indice di Mercato

Per quanto concerne l'indice di Mercato, possiamo invece accettare l'ipotesi nulla di assenza di correlazione, ad un livello del 5 %. Concentrando la nostra attenzione ancora sull'Indice di Mercato, effettuiamo ora il test ARCH per verificare la presenza di eventuali effetti ARCH.

ARCH Test:				
F-statistic	12.44336	Probability	0.000463	
Obs*R-squared	12.15804	Probability	0.000489	
Test Equation:				
Dependent Variable: RESID^2				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 1970:03 2007:03				
Included observations: 445 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	18.48652	2.628651	7.032705	0.0000
RESID^2(-1)	0.165295	0.046859	3.527515	0.0005
R-squared	0.027321	Mean dependent var		22.14801
Adjusted R-squared	0.025126	S.D. dependent var		51.59760
S.E. of regression	50.94526	Akaike info criterion		10.70386
Sum squared resid	1149771.	Schwarz criterion		10.72228
Log likelihood	-2379.610	F-statistic		12.44336
Durbin-Watson stat	2.019244	Prob(F-statistic)		0.000463

Tabella 8: ARCH test, residui Indice di Mercato

La tabella 8 ci mostra chiaramente che l'ipotesi nulla di assenza di effetti ARCH è da rifiutarsi. A questo punto sembra ovvio che nelle nostre modellazioni terremo conto di tale fatto introducendo dinamiche ARCH per quanto riguarda l'Indice di Mercato.

Con questo test riteniamo di aver concluso una esauriente analisi descrittiva sui dati da noi utilizzati.

4.2 Fasi del Ciclo Economico Europeo

Prima di passare a presentare tutti i risultati delle nostre modellazioni, riteniamo opportuno citare in questo paragrafo la disponibilità delle date dei cavi e dei picchi del ciclo economico europeo. Queste date ci permettono di suddividere il campione (gennaio 1970 – marzo 2007) in periodi di espansione e di contrazione.

Questi elementi ci saranno poi molto utili per valutare adeguatamente i risultati di tutte le nostre analisi. Riportiamo dunque la tabella contenente le date dei picchi e dei cavi del ciclo economico europeo:

		DATE					
EVENTO CICLO - ECONOMICO	Picchi	06-1974	01-1980	03-1982	02-1992	03-2001	07-2002
	Cavi	04-1975	03-1981	10-1982	04-1993	11-2001	05-2003

Tabella 9: datazione del ciclo economico europeo (da 01 –1970 a 03 – 2007)

I dati della tabella 9 sono stati ricavati dal lavoro di Billio, Caporin e Cazzavillan (2004).

A questo punto ci sembra doveroso fornire una descrizione delle principali situazioni di crisi nelle quali l'economia europea si è venuta a trovare nell'arco temporale preso in considerazione.

- La crisi energetica del 1973 fu dovuta principalmente ad un'improvvisa e inaspettata interruzione del flusso dell'approvvigionamento di petrolio dai paesi appartenenti all'Opec (*Organization of the Petroleum Exporting Countries*) ai Paesi importatori dell'oro nero. In quegli anni infatti la situazione mediorientale era incandescente. Nell'ottobre del 1973, l'esercito egiziano e quello siriano attaccarono contemporaneamente Israele. Dopo i primi momenti di smarrimento, l'esercito ebraico risultò vincente su entrambi i fronti. La guerra finì dopo una ventina di giorni con la proclamazione di un cessate-il-fuoco tra le due parti. Durante i combattimenti Egitto e Siria furono aiutati e supportati dalla quasi totalità dei Paesi arabi, mentre Israele godé dell'appoggio di Stati Uniti e dei Paesi europei. Per questo motivo i Paesi Arabi appartenenti all'Opec presero il controllo della produzione del greggio e della gestione delle tariffe sulle esportazioni. Questo processo portò all'innalzamento vertiginoso del prezzo del petrolio, che in molti casi aumentò più del triplo rispetto alle tariffe precedenti. I governi

dei Paesi dell'Europa Occidentale furono i più colpiti dal rincaro del prezzo del petrolio, e tutto ciò portò l'economia europea in una fase di forte contrazione economica.

- La crisi energetica del 1979 consistette nel brusco rialzo che si verificò nel mercato internazionale del petrolio a seguito della rivoluzione iraniana del 1979. Il rovesciamento del regime dello Scià Reza Pahlavi bloccò la produzione petrolifera del paese innescando forti movimenti speculativi. Il petrolio arrivò a quotare 80\$/barile (valore riportato a dollari 2005) creando grandi difficoltà di approvvigionamento energetico in tutto il mondo occidentale. Così come nel caso precedentemente riportato, anche la crisi energetica del 1979 causò l'ingresso dell'economia europea in una fase di sensibile contrazione.
- La crisi dello SME nel 1992-93. Questa crisi fu preparata da due diversi fattori: la decisione di mantenere tassi di cambio fissi, evitando ulteriori aggiustamenti, presa dai paesi dello SME nel settembre 1987 e la decisione di liberalizzare del tutto i movimenti di capitale all'interno della CEE. Questa seconda decisione colpì in particolare Francia e Italia, i paesi che più avevano utilizzato i controlli sui capitali nel corso degli anni '80 per limitare i fondi che potevano essere rastrellati dai capitali speculativi nelle fasi di crisi. Di conseguenza, per i paesi ad alta inflazione (come l'Italia e la Francia appunto) l'unico strumento per prevenire fughe di capitali restava la leva dei tassi d'interesse, che ovviamente dovettero essere mantenuti alti. Il rialzo dei tassi d'interesse nella seconda metà degli anni '80 ebbe notevoli effetti sul debito pubblico di questi paesi, comportando un suo aumento a causa delle spese per il pagamento degli interessi, e sottraendo capitali agli investimenti produttivi e al mercato finanziario interno. Di fatto, i paesi europei, in seguito all'adozione di tassi di cambio fissi fra loro e alla liberalizzazione dei movimenti di capitali, abdicarono all'indipendenza della propria politica monetaria, che restava ancorata a quella del paese che aveva la moneta più forte (la Germania). Nonostante gli alti tassi d'interesse, l'inflazione nei paesi mediterranei (soprattutto Spagna e Italia) continuò a mantenersi su livelli più alti di quella tedesca, e nel 1992 lira e peseta risultavano chiaramente sopravvalutate. La riunificazione tedesca, avvenuta nel 1990, aveva comportato un notevole sforzo finanziario legato alla completa sostituzione della moneta della DDR con marchi occidentali. L'operazione non poteva non avere effetti inflazionistici e sul deficit di bilancio pubblico. Nel 1991 la Bundesbank avvertì il governo che avrebbe alzato i tassi d'interesse e nel luglio 1992 la Bundesbank portò il tasso di sconto dall'8% all'8,75%, provocando attacchi speculativi sulla sterlina, sulla lira e sul franco. La sterlina e la lira furono svalutate e uscirono dallo SME nel settembre 1992. Tutti questi stravolgimenti portarono come ovvia conseguenza ad una fase di contrazione dell'intero panorama economico europeo.

- Crisi del 2001 - 2002. Il PIL mondiale ha registrato nel 2001 una crescita del 2,5%, dimezzandosi in pratica rispetto all'incremento del 4,7% dell'anno precedente. Questo forte rallentamento è stato determinato da due fattori: l'«atterraggio duro» dell'economia americana conseguente alla distruzione delle Torri Gemelle a New York dell'11 settembre 2001. Il 2001 è venuto così a rappresentare il punto di svolta del ciclo economico mondiale guidato dagli USA, dando luogo ad una fase di rallentamento intenso e prolungato in grado di riassorbire gli eccessi, soprattutto speculativi dei mercati finanziari, che avevano caratterizzato quella lunga fase espansiva. La brusca frenata dell'economia americana, quasi ai limiti della recessione, ed il perdurare della preoccupante crisi dell'economia giapponese, hanno finito per determinare un rallentamento sempre più intenso anche nell'economia europea. Nei tre Paesi che da soli rappresentano oltre il 70% del PIL dell'area dell'euro, cioè Francia, Germania ed Italia, l'ultimo trimestre del 2001 si è chiuso con una crescita negativa dell'ordine dello 0,2 - 0,3% rispetto al trimestre precedente, che ha ridotto l'incremento medio dell'anno al di sotto del 2,0% per Francia e Italia ed appena allo 0,6% per la Germania. I risultati deludenti del terzo e del quarto trimestre 2001 in tutte le economie industriali, in parte già imputabili all'esaurirsi del ciclo espansivo, sono stati amplificati dagli effetti diretti ed indiretti dell'attacco terroristico alle Torri Gemelle dell'11 settembre e dalla risposta degli americani e dei loro alleati. L'effetto Twin Towers ha pesato particolarmente sul volume mondiale degli scambi di merci e servizi, già indebolito dal rallentamento ciclico iniziato nella prima metà del 2001 in tutte le economie avanzate. Il commercio mondiale ha dunque subito un vero e proprio crollo, contribuendo a deprimere le economie di quei Paesi maggiormente dipendenti dalla domanda estera, come quelle europee.

5. RISULTATI

In questo capitolo riporteremo tutti i risultati ottenuti nel nostro studio. Iniziamo col dire che, per effettuare tutte le analisi, abbiamo utilizzato il software *Gauss*. Riteniamo doveroso evidenziare che non sono presenti codici già implementati per la stima di modelli *Markov–Switching*; tutti i codici e le procedure sono stati quindi da noi creati appositamente.

Per dovere di completezza, riporteremo tutte le procedure *Gauss*, adottate per ottenere i risultati di questa tesi, nell'Appendice.

Iniziamo adesso a considerare i risultati delle varie modellazioni; partiremo dai casi univariati, per arrivare infine al caso bivariato.

Ricordiamo inoltre che, in tutti i modelli univariati proposti, noi consideriamo una dinamica autoregressiva del primo ordine, che il numero degli stati è sempre due (espansione e/o contrazione) e che il processo non osservabile S_t è regolato da una catena di Markov del primo ordine.

5.1 Modelli *Markov-Switching-Mean* e *Markov-Switching-Intercept* per l'Indice della Produzione Industriale

In prima istanza implementiamo i due modelli univariati per la produzione industriale. Il primo caso che analizziamo è quello del modello *Markov-Switching-Intercept* (MSI); rimandiamo al capitolo 2.4 per un'esaustiva descrizione del modello, ricordandone qui le caratteristiche fondamentali.

Chiamiamo y_t la serie dei rendimenti logaritmici percentuali di IPI, le equazioni che caratterizzano il modello sono le seguenti:

$$y_t = c_{st} + \phi y_{t-1} + e_t \quad (81)$$

$$e_t \sim N(0, \sigma_{st}^2) \quad (82)$$

$$\Pr(S_t = j | S_{t-1} = i) = p_{ij} \quad (83)$$

$$\sum_{j=0}^1 p_{ij} = 1 \quad (84)$$

$$c_{st} = c_0(1 - S_t) + c_1 S_t \quad (85)$$

$$\sigma_{st}^2 = \sigma_0^2(1 - S_t) + \sigma_1^2 S_t \quad (86)$$

dove $S_t = 0, 1$; ricordiamo inoltre che S_t è la variabile casuale non osservata regolata dalla catena di *Markov*, e_t è il termine d'errore (ipotizzato Normale di media nulla e varianza dipendente dallo stato). Infine la (83) mostra le probabilità di transizione e la (84) i relativi vincoli.

Il modello in analisi è pertanto un autoregressivo di ordine uno, *Markov-Switching-Intercept* a due stati, con catena di *Markov* del primo ordine.

In termini pratici noi stiamo dicendo che i due parametri, quali la intercetta (c_{st}) e la varianza, assumono valori differenti a seconda dello stato in cui ci si trova. Le probabilità di transizione e il parametro autoregressivo sono invece ipotizzati costanti.

Riportiamo ora nella tabella sottostante tutti i parametri stimati:

	Parametro	Stima	Standard error	t - statistic
Probabilità di rimanere in un dato regime	p_{11}	0.98426	0.00738	133.32760
	p_{22}	0.91408	0.05586	16.36384
Intercette	c_0	0.36819	0.06404	5.74972
	c_1	-0.45239	0.20350	-2.22304
Varianze	σ^2_0	0.66413	0.05532	12.00589
	σ^2_1	0.90664	0.19471	4.65638
Parametro autoregressivo	Φ	-0.42680	0.04938	-8.64212

Tabella 10: risultati MSI su Indice Produzione Industriale

Iniziamo ad analizzare la tabella 10 notando che tutti i parametri sono statisticamente significativi. Poiché nell'analisi dell'IPI noi siamo particolarmente interessati alle dinamiche dell'intercetta, ci conforta vedere che questa varia tra i due stati.

Nello stato di espansione (stato 0) l'intercetta vale circa 0.37 mentre nello stato di contrazione (stato 1) l'intercetta vale circa -0.45. Ciò significa, com'è logico aspettarsi, che durante le fasi di espansione i rendimenti percentuali dell'Indice della Produzione Industriale sono positivi e maggiori rispetto ai periodi di contrazione (i quali hanno intercetta negativa).

Un altro aspetto da considerare è che il parametro autoregressivo, pari a circa -0.43, è anch'esso molto significativo.

Infine notiamo che la varianza durante le fasi di espansione (0.66) è minore rispetto ai periodi di contrazione (0.91); anche questo è molto sensato, in quanto è risaputo in letteratura che nei periodi di contrazione si è in presenza anche di una maggiore variabilità.

Un'ultima nota riguarda il parametro autoregressivo; la sua significatività conferma infatti quanto già ipotizzato in fase di analisi preliminari.

Riportiamo ora la durata media degli stati; per fare questi semplici calcoli utilizziamo la formula (39) e otteniamo:

	DURATA MEDIA (in mesi)
ESPANSIONE (=0)	63.53
CONTRAZIONE (=1)	11.64

Tabella 11: durata media dei regimi per IPI, modello MSI

Notiamo dunque che le fasi di espansione durano in media 5 anni e 3 mesi, mentre le fasi di contrazione durano all'incirca 1 anno.

Anche i risultati della tabella 11 confermano la bontà di quanto stiamo facendo; i periodi di espansione sono infatti molto più lunghi di quelli di contrazione, proprio come nella letteratura.

A questo punto riportiamo le probabilità smussate dei due regimi; poiché in ogni istante temporale si può essere in uno dei due regimi, le probabilità saranno reciprocamente il complemento a uno. Ricordando che la metodologia mediante la quale abbiamo ottenuto tali probabilità è dettagliatamente spiegata nel capitolo 3.2, riportiamo ora (e così faremo anche in seguito) le probabilità smussate dello stato 1 (=contrazione):

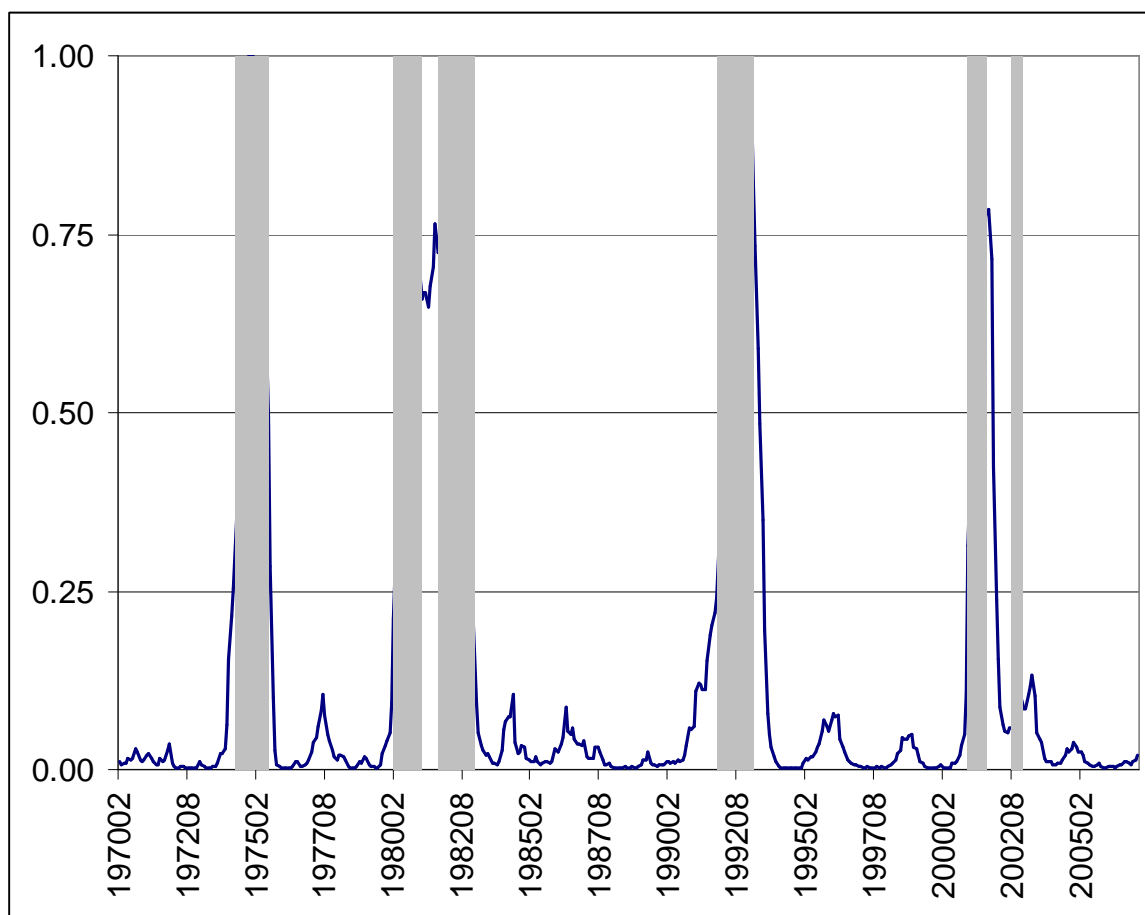


Grafico 7: probabilità smussate stato 1 per IPI, modello MSI

Queste probabilità, qualora siano maggiori di 0.5, indicano che la osservazione t – esima proviene da un periodo di contrazione. Dal grafico possiamo ricavare quattro macro periodi di contrazione:

- Agosto 1973 - luglio 1975
- Agosto 1979 - gennaio 1983
- Luglio 1990 - luglio 1993
- Agosto 2000 - maggio 2003

Le aree in grigio rappresentano i periodi di contrazione indicati nel capitolo precedente (fonte Billio, Caporin e Cazzavillan, 2004); possiamo quindi subito notare la bontà del nostro modello, infatti i periodi di contrazione, trovati mediante le probabilità smussate, del nostro modello corrispondo abbastanza fedelmente a quelli noti alla comunità economica.

In particolare osserviamo che cinque delle sei fasi di contrazione ricavate dalla tabella 2 si sovrappongono esattamente ai periodi indicati dal grafico sovrastante. L'unica differenza è nell'ultima contrazione; i nostri dati la fanno terminare a fine 2001, mentre i dati della tabella 9 la fanno terminare a maggio 2003.

Tale differenza non deve preoccupare, infatti le motivazioni sottostanti sono essenzialmente tre:

- innanzitutto abbiamo considerato l'Area Euro a 12 paesi e non quella a 15.
- in secondo luogo il periodo campionario è differente; il nostro è gennaio 1970 – marzo 2007, quello del lavoro di Billio, Caporin e Cazzavillan è invece gennaio 1970 – dicembre 2003. Di tale fatto possono aver chiaramente risentito le probabilità smussate.
- infine dobbiamo notare che utilizzare una certa serie, ad esempio IPI, nel 2004 è diverso dall'usarla nel 2007; il motivo risiede nelle revisioni dei dati effettuate da Eurostat (nostra fonte della serie IPI). Tali revisioni hanno dunque l'effetto di correggere, e dunque modificare, i dati in questione.

Tutte queste motivazioni dovrebbero aver chiarito che l'unica differenza riscontrabile fra la datazione basata sulla nostra inferenza e quella presente in letteratura, è da addebitare alla natura dei dati stessi.

Possiamo dunque affermare che tutte queste prime analisi mostrano la bontà del modello da noi implementato.

Effettuiamo adesso un'analisi leggermente differente; adattiamo cioè il modello *Markov-Switching-Mean* (MSM) ai nostri dati. Da un punto di vista metodologico tale modello è descritto in maniera dettagliata nei capitoli 2.1 e 2.2; qui ci limitiamo a riportarne le caratteristiche basilari.

Quanto scritto qui sotto descrive pertanto un autoregressivo di ordine uno, *Markov-Switching-Mean* a due stati, con catena di *Markov* del primo ordine.

Chiamando y_t la serie dei rendimenti logaritmici percentuali di IPI, le equazioni che lo caratterizzano sono le seguenti:

$$y_t - \mu_{st} = \phi(y_{t-1} - \mu_{st-1}) + e_t \quad (87)$$

$$e_t \sim N(0, \sigma_{st}^2) \quad (88)$$

$$\Pr(S_t = j | S_{t-1} = i) = p_{ij} \quad (89)$$

$$\sum_{j=0}^1 p_{ij} = 1 \quad (90)$$

$$\mu_{st} = \mu_0(1 - S_t) + \mu_1 S_t \quad (91)$$

$$\sigma_{st}^2 = \sigma_0^2(1 - S_t) + \sigma_1^2 S_t \quad (92)$$

dove $S_t = 0, 1$; ricordiamo inoltre che S_t è la variabile casuale non osservata regolata dalla catena di Markov, e_t è il termine d'errore (ipotizzato Normale di media nulla e varianza dipendente dallo stato). La (89) mostra le probabilità di transizione e la (90) i relativi vincoli.

Il modello in analisi è pertanto un autoregressivo di ordine uno, *Markov-Switching-Mean* a due stati, con catena di *Markov* del primo ordine.

La differenza fondamentale rispetto al caso precedente è che qui si ipotizza che sia proprio la media, e non l'intercetta, a dipendere dallo stato del sistema economico.

Riportiamo a questo punto nella tabella seguente i risultati ottenuti:

	Parametro	Stima	Standard error	t - statistic
Probabilità di rimanere in un dato regime	p_{11}	0.98440	0.00743	132.51934
	p_{22}	0.91133	0.06736	13.52885
Medie	μ_0	0.25729	0.04870	5.28274
	μ_1	-0.33532	0.18659	-1.79714
Varianze	σ^2_0	0.66634	0.05781	11.52620
	σ^2_1	0.91350	0.21699	4.20976
Parametro autoregressivo	Φ	-0.42816	0.04934	-8.67781

Tabella 12: risultati MSM su Indice Produzione Industriale

Notiamo innanzitutto che le probabilità di transizione, le varianze e il parametro autoregressivo hanno stime pressoché identiche al caso MSI. Una lieve differenza la possiamo rilevare tra le medie stimate qui e le intercette MSI; tale differenza di valori (comunque non molto elevata) è ovviamente da ricondursi alla natura del parametro stimato stesso.

In ogni caso possiamo comunque verificare come la media dello stato di espansione sia positiva (0.25) e nettamente maggiore rispetto a quella durante periodi di contrazione (-0.33).

Un'ulteriore osservazione è necessaria riguardo al t – test del parametro μ_1 ; questo è *border - line* rispetto alla soglia di significatività statistica al 5%. Ricordiamo quindi a questo punto che i t – test sono ovviamente per loro natura dipendenti dalle stime degli *standard errors*, ed è risaputo in letteratura che la complessità dei modelli *Markov-switching* può portare come scomoda conseguenza una stima degli *standard errors* non proprio precisissima.

In ogni caso tutti i risultati del modello MSM riportati nella tabella 12 sono perfettamente in linea con quelli del modello MSI.

Riportiamo adesso le durate attese degli stati e otteniamo:

	DURATA MEDIA (in mesi)
ESPANSIONE (=0)	64.10
CONTRAZIONE (=1)	11.28

Tabella 13: durata media dei regimi per IPI, modello MSM

Anche le durate medie dei regimi sono pressoché identiche rispetto al caso MSI; in particolare qui abbiamo che lo stato di espansione dura in media 5 anni e 4 mesi, mentre quello di contrazione dura in media circa 11 mesi.

In ultima istanza riportiamo adesso le probabilità smussate ottenute dalla stima MSM:

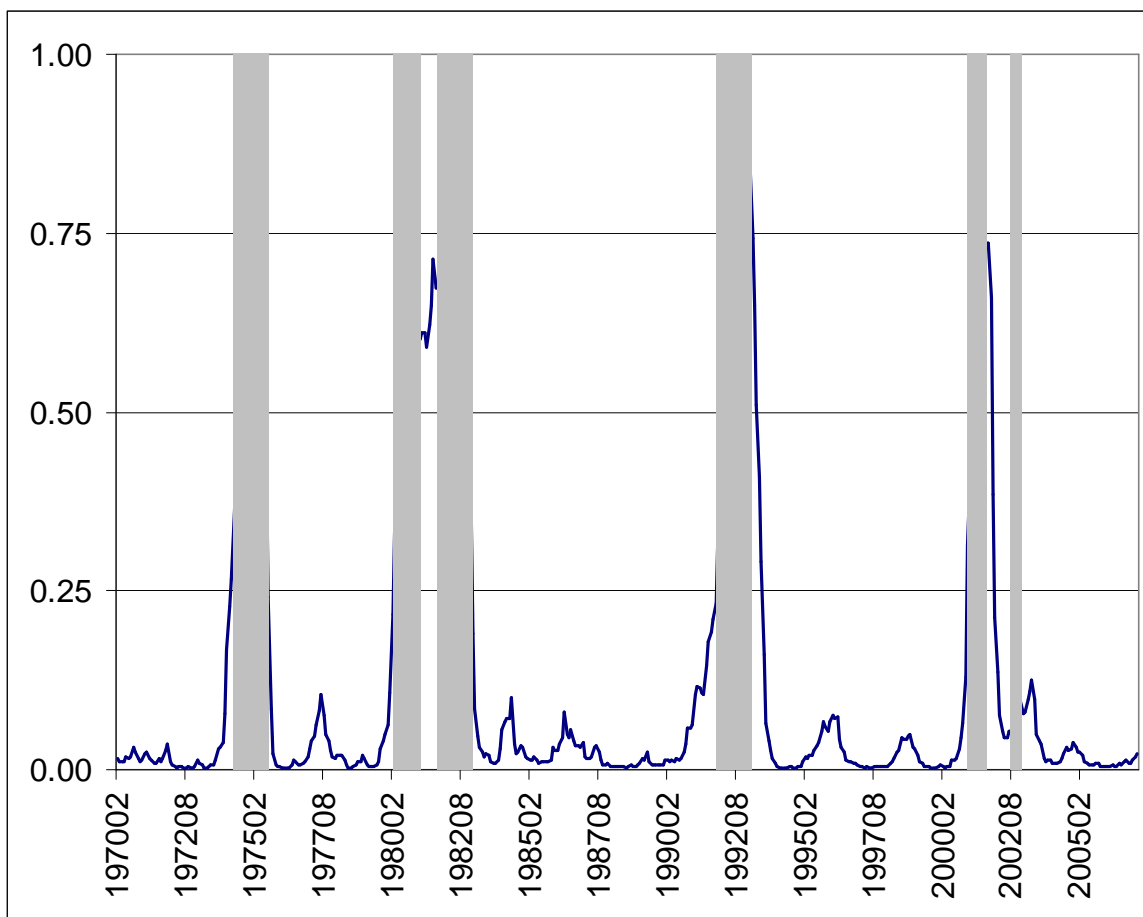


Grafico 8: probabilità smussate stato 1 per IPI, modello MSM

Le probabilità smussate risultano anch'esse praticamente identiche a quelle del modello MSI. Possiamo dunque osservare che i quattro macro-periodi di contrazione individuati sono gli stessi del caso MSI. Pertanto tutti i commenti riguardanti il confronto tra le nostre probabilità smussate e la datazione ufficiale del ciclo economico risultano validi anche in questo caso.

In conclusione possiamo affermare che sia il modello MSI sia il modello MSM ci hanno fornito i risultati che attendevamo; le procedure implementate hanno evidenziato la presenza di due stati differenti (che noi abbiamo chiamato di espansione e contrazione), i quali hanno come diretta conseguenza un cambiamento significativo dei parametri strutturali del modello.

E' quindi corretto affermare che durante i periodi di contrazione e durante i periodi di espansione l'Indice della Produzione Industriale segue processi con medie (o intercette) e varianze differenti.

Abbiamo potuto inoltre constatare una sostanziale corrispondenza tra la datazione ufficiale del ciclo economico e quella derivante dall'inferenza sul nostro modello; e questo fatto ne è un ulteriore attestato di bontà.

5.2 Modelli *Markov-Switching-Mean*, *Markov-Switching-Intercept* e *Markov-Switching-ARCH-L* per l'Indice di Mercato

Trattiamo adesso l'Indice di Mercato, ricavato secondo le modalità espresse nel capitolo 4.

Le prime due analisi che faremo saranno le stesse che abbiamo adottato per la produzione industriale; faremo poi l'ulteriore passo di implementare un modello ARCH per meglio capire le dinamiche della volatilità di questa serie.

In prima luogo consideriamo i due modelli univariati per l'indice di mercato. Il primo caso è quello del modello *Markov-Switching-Intercept* (MSI).

Chiamiamo y_t la serie dei rendimenti logaritmici percentuali dell'Indice di Mercato, le equazioni che caratterizzano il modello sono le seguenti:

$$y_t = c_{st} + \phi y_{t-1} + e_t \quad (93)$$

$$e_t \sim N(0, \sigma_{st}^2) \quad (94)$$

$$\Pr(S_t = j | S_{t-1} = i) = p_{ij} \quad (95)$$

$$\sum_{j=0}^1 p_{ij} = 1 \quad (96)$$

$$c_{st} = c_0(1 - S_t) + c_1 S_t \quad (97)$$

$$\sigma_{st}^2 = \sigma_0^2(1 - S_t) + \sigma_1^2 S_t \quad (98)$$

dove $S_t = 0, 1$; ricordiamo che S_t è la variabile casuale non osservata regolata dalla catena di *Markov*, e_t è il termine d'errore (ipotizzato Normale di media nulla e varianza dipendente dallo stato), la (95) mostra le probabilità di transizione e la (96) i relativi vincoli.

Il modello in analisi è pertanto un autoregressivo di ordine uno, *Markov-Switching-Intercept* a due stati, con catena di *Markov* del primo ordine.

Come per la produzione industriale noi stiamo dicendo che i due parametri, quali la intercetta (c_{st}) e la varianza, dipendono dallo stato in cui ci si trova. Le probabilità di transizione e il parametro autoregressivo sono anche in questo caso ipotizzati costanti.

Facciamo notare che mentre tratteremo un Indice di Mercato, più che parlare di espansione e recessione, ci riferiremo a periodi di bassa e alta volatilità. Già da questa considerazione risulta evidente quanto il nostro interesse in questo paragrafo sia prevalentemente volto alle dinamiche della varianza.

Riportiamo ora nella tabella sottostante tutti i parametri stimati:

	Parametro	Stima	Standard error	t - statistic
Probabilità di rimanere in un dato regime	p_{11}	0.96413	0.02003	48.12505
	p_{22}	0.87094	0.12103	7.19608
Intercette	c_0	1.11244	0.23777	4.67869
	c_1	-0.36652	1.17682	-0.31145
Varianze	σ^2_0	11.12661	1.39155	7.99585
	σ^2_1	58.18611	18.97389	3.06664
Parametro autoregressivo	Φ	0.06518	0.05407	1.20542

Tabella 14: risultati MSI su Indice di Mercato

Innanzitutto è necessario osservare come quasi tutti i parametri siano significativi, le eccezioni sono l'intercetta dello stato 1 (c_1) e il parametro autoregressivo (Φ). Come già ricordato nel paragrafo precedente, occorre essere critici sulle stime degli *standard errors* in questo tipo di modelli, proprio per la natura complessa degli stessi. Comunque se ci concentriamo non solamente sulle t - statistic, ma guardiamo alle stime dei parametri, possiamo affermare ragionevolmente che il parametro Φ sembra essere pressoché pari a zero, mentre il parametro c_1 è probabilmente da tenere in considerazione.

Come per la produzione industriale, anche in questo caso notiamo che l'intercetta dello stato 0 (periodo di bassa volatilità) è positiva (1.11) e maggiore rispetto a quella negativa (-0.37) dello stato 1 (periodo di alta volatilità).

Una notevole differenza è riscontrabile invece nelle varianze; nello stato 0 assistiamo ad una volatilità pari a 11.13, molto minore rispetto a quella dello stato 1 (58.18).

Tutto ciò è assai confortante, in quanto una delle tipiche caratteristiche dei rendimenti relativi a mercati azionari è proprio quella di presentare volatilità molto differenti a seconda dei periodi. In particolare è usuale osservare volatilità molto elevate nei periodi di crisi.

Il modello MSI sembra quindi adattarsi in maniera egregia ai dati, rilevando due stati con parametri strutturali assai differenti.

Riportiamo adesso la durata media degli stati; ricordiamo che per ottenere questi risultati utilizziamo sempre la formula (39) e otteniamo:

	DURATA MEDIA (in mesi)
PERIODO BASSA VOLATILITA' (=0)	27.88
PERIODO ALTA VOLATILITA' (=1)	7.75

Tabella 15: durata media dei regimi per Indice di Mercato, modello MSI

Notiamo dunque che le fasi di bassa volatilità durano in media 2 anni e 4 mesi, mentre le fasi di alta volatilità durano all'incirca 8 mesi.

Questi dati ci mostrano quindi che per quanto riguarda il ciclo finanziario, le fasi sono nettamente più brevi rispetto a quelle del ciclo economico.

Tutto ciò viene anche confermato dalle probabilità smussate che riportiamo ora:

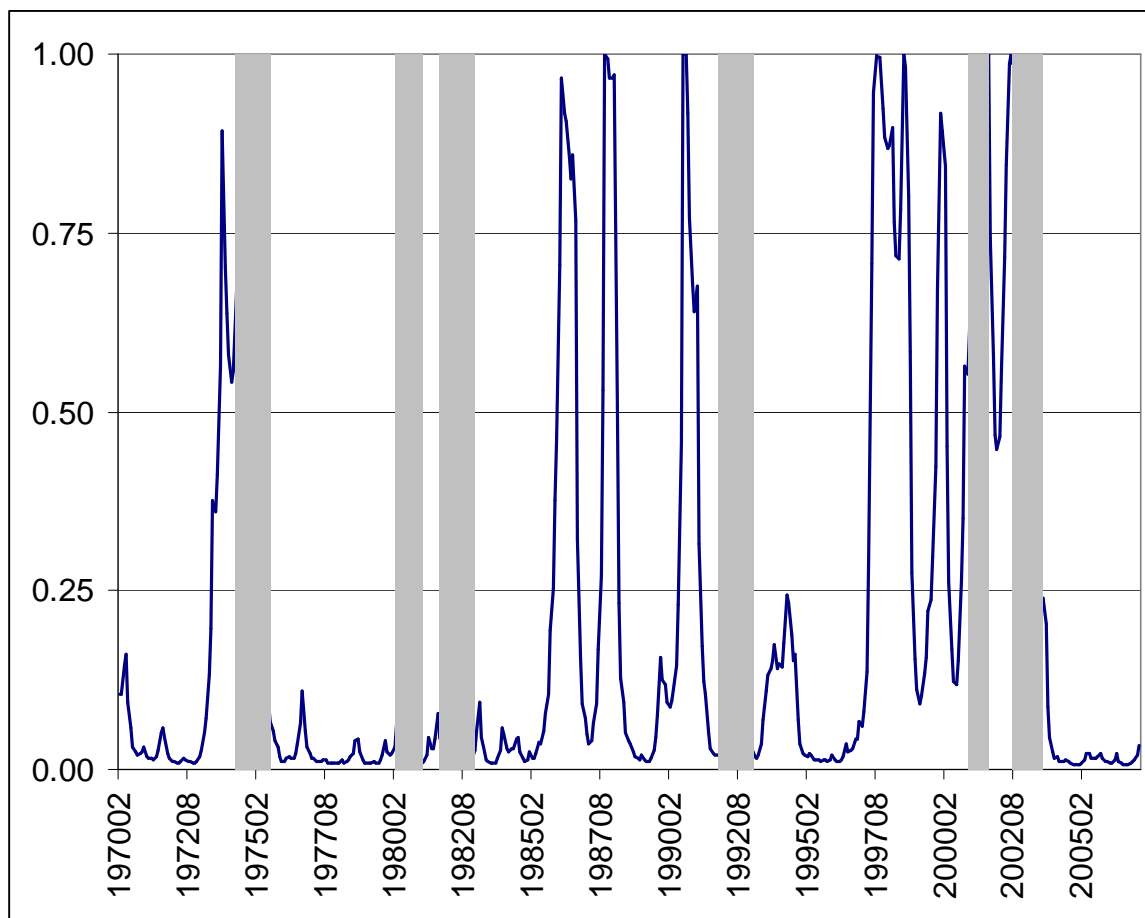


Grafico 9: probabilità smussate stato 1 per Indice di Mercato, modello MSI

Il grafico ha chiaramente un andamento molto meno smussato rispetto al caso della produzione industriale. Sono riscontrabili inoltre un numero più elevato di periodi alta volatilità (probabilità smussate dello stato 1 maggiori di 0.5); ciò era preventivabile già osservando i risultati della tabella 15.

Ricordiamo anche in questo paragrafo che i rettangoli grigi rappresentano i periodi ufficiali di contrazione del ciclo economico (ricavati dalla tabella 9). Ovviamente qui possiamo notare una minore corrispondenza (rispetto ai modelli IPI), anche in considerazione del fatto che ci stiamo riferendo a dati derivanti dal mercato azionario. In ogni caso ci conforta che tre periodi di contrazione del ciclo economico (1974, 2001 e 2002) corrispondano a periodi di alta volatilità del ciclo finanziario.

Adesso, così come abbiamo fatto nel paragrafo precedente, implementiamo il modello *Markov-Switching-Mean* (MSM) ai nostri dati. Il modello scritto qui sotto sarà pertanto un autoregressivo di ordine uno, *Markov-Switching-Mean* a due stati, con catena di *Markov* del primo ordine. Chiamando y_t la serie dei rendimenti logaritmici percentuali dell'Indice di Mercato, le equazioni lo che caratterizzano sono le seguenti:

$$y_t - \mu_{st} = \phi(y_{t-1} - \mu_{st-1}) + e_t \quad (99)$$

$$e_t \sim N(0, \sigma_{st}^2) \quad (100)$$

$$\Pr(S_t = j | S_{t-1} = i) = p_{ij} \quad (101)$$

$$\sum_{j=0}^1 p_{ij} = 1 \quad (102)$$

$$\mu_{st} = \mu_0(1 - S_t) + \mu_1 S_t \quad (103)$$

$$\sigma_{st}^2 = \sigma_0^2(1 - S_t) + \sigma_1^2 S_t \quad (104)$$

dove $S_t = 0, 1$; S_t è variabile casuale non osservata regolata dalla catena di *Markov*, e_t è il termine d'errore (ipotizzato Normale di media nulla e varianza dipendente dallo stato), la (101) mostra le probabilità di transizione e la (102) i relativi vincoli.

Come già ampiamente descritto, la differenza fondamentale rispetto al caso MSI è che qui si ipotizza che sia proprio la media, e non l'intercetta, a dipendere dallo stato.

Riportiamo a questo punto nella tabella seguente i risultati ottenuti:

	Parametro	Stima	Standard error	t - statistic
Probabilità di rimanere in un dato regime	p_{11}	0.96391	0.01941	49.65039
	p_{22}	0.86864	0.11773	7.37840
Medie	μ_0	1.18973	0.23702	5.01955
	μ_1	-0.42771	1.06328	-0.40225
Varianze	σ^2_0	11.14719	1.39215	8.00717
	σ^2_1	58.45310	18.53645	3.15341
Parametro autoregressivo	Φ	0.06593	0.05292	1.24578

Tabella 16: risultati MSM su Indice di Mercato

Le stime dei parametri sono pressoché identiche a quelle del caso MSI, e anche il discorso fatto relativamente ai t – test vale esattamente anche in questa situazione.

Dunque anche il modello MSI è perfettamente in linea con quanto speravamo; durante i periodi di bassa volatilità la media dei nostri rendimenti è positiva (1.19) e maggiore rispetto a quella dei periodi di alta volatilità (-0.43).

Ovviamente la varianza è molto maggiore per quanto concerne lo stato 1(58.45 contro 11.15), rappresentante appunto i periodi di alta volatilità.

Il modello MSM si adatta anch'esso in maniera egregia ai dati, rilevando due stati con parametri strutturali assai differenti.

Riportiamo ora le durate medie degli stati:

	DURATA MEDIA (in mesi)
PERIODO BASSA VOLATILITA' (=0)	27.71
PERIODO ALTA VOLATILITA' (=1)	7.61

Tabella 17: durata media dei regimi per Indice di Mercato, modello MSM

Anche questi risultati sono quasi identici al caso MSI, dunque le fasi di bassa volatilità durano in media 2 anni e 4 mesi, mentre le fasi di alta volatilità durano all'incirca 8 mesi.

Pertanto, anche secondo il modello MSM, il ciclo finanziario presenta fasi più brevi rispetto al ciclo economico e le fasi ad alta volatilità sono mediamente più brevi di quella a bassa volatilità.

Come ultimo aspetto, consideriamo infine le probabilità smussate dello stato 1 (alta volatilità) per il modello in questione:

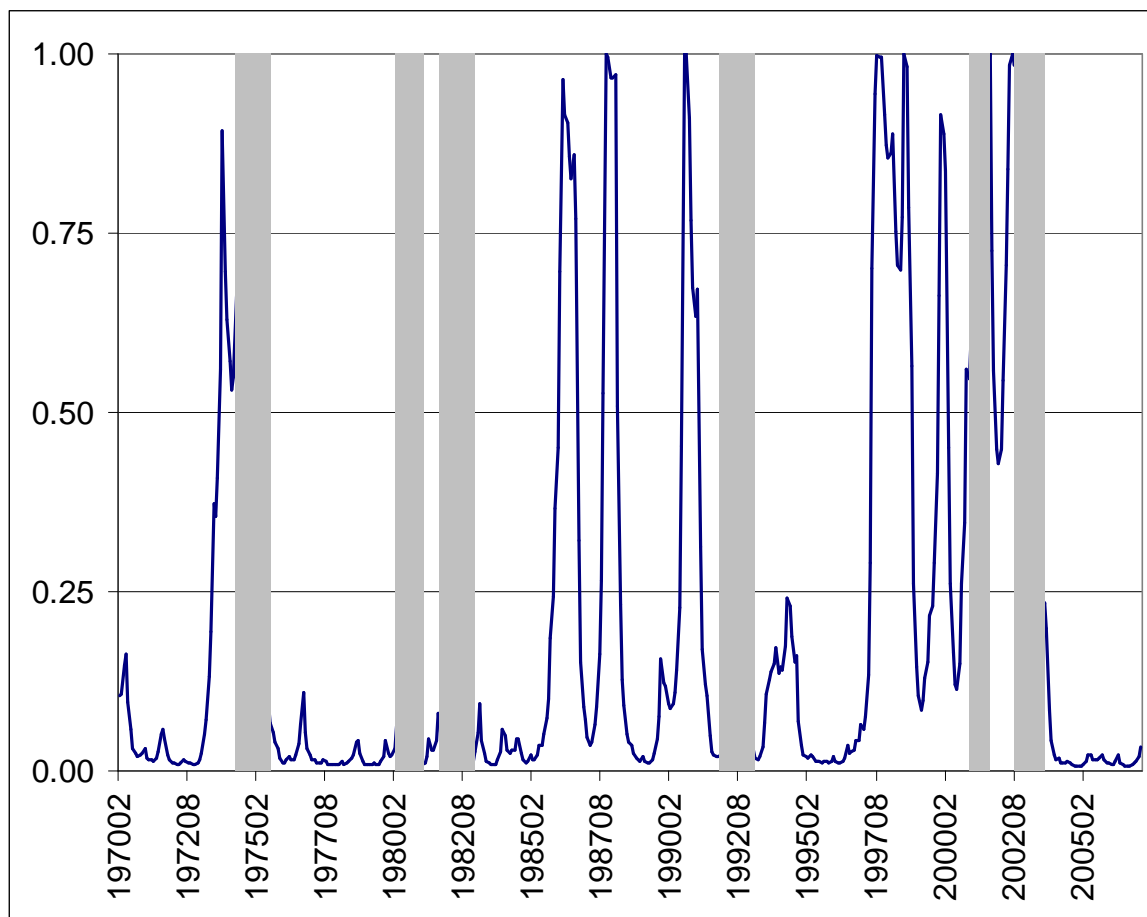


Grafico 10: probabilità smussate stato 1 per Indice di Mercato, modello MSM

Anche in questo caso, l'essere passati dal modello MSI al modello MSM non ha portato a variazioni rilevanti per quanto concerne le probabilità smussate dello stato 1 (alta volatilità). E' dunque apprezzabile il fatto che i periodi di recessione individuati da queste probabilità siano essenzialmente gli stessi del caso MSI.

Analogamente, il confronto col ciclo economico richiede esattamente gli stessi commenti effettuati per il modello MSI.

In conclusione possiamo affermare che sia il modello MSI sia il modello MSM ci hanno fornito i risultati attesi; i modelli utilizzati hanno evidenziato la presenza di due stati differenti (che noi abbiamo chiamato periodi di bassa e alta volatilità), i quali hanno come diretta conseguenza un cambiamento significativo dei parametri strutturali del modello.

E' quindi corretto affermare che durante tali periodi l'Indice di Mercato MSCI segue processi con medie (o intercette) e varianze differenti.

Inoltre abbiamo apprezzato il fatto che a periodi di contrazione del ciclo economico corrispondano periodi di alta volatilità del ciclo finanziario in tre casi su sei.

In particolare in questo paragrafo abbiamo poi potuto notare l'importanza delle dinamiche riguardanti la volatilità; le due stime σ^2_0 , σ^2_1 sono molto differenti, e tutto ciò è compatibile con quanto noto in letteratura. E' infatti risaputo che, quando si ha a che fare con rendimenti di serie storiche finanziarie, è opportuno concentrare la propria attenzione sui parametri indicanti la variabilità del processo.

Tutte questi aspetti ci fanno percepire l'esigenza di modificare il nostro modello, in maniera tale da poter meglio studiare tali dinamiche. Inoltre il test ARCH, effettuato nel capitolo 4.1, ci aveva portato a rifiutare l'ipotesi nulla di assenza di effetti ARCH.

Per tener conto anche di questo fatto, andiamo ora a stimare un modello SWARCH - L (2, 1): cioè un modello autoregressivo di ordine uno, con *Markov-switching-ARCH* di ordine uno, con due stati e la possibile presenza di effetto leva. Per una dettagliata spiegazione del modello rimandiamo al capitolo 2.5; qui siamo invece interessati a fornirne risultati e conseguenti commenti.

A titolo informativo ricordiamo che le analisi, sull'Indice di Mercato, mediante modelli MSI e MSM, hanno fornito risultati pressoché identici. Per la successiva implementazione abbiamo quindi deciso di considerare la specificazione *Markov-Switching-Intercept*; le motivazioni risiedono essenzialmente in aspetti computazionali. Come già ampiamente descritto nel capitolo 3, utilizzare il modello MSI richiede infatti di conoscere lo stato in cui ci si trova solamente al tempo t (e non anche quello in t-1, come richiede invece il modello MSM).

Chiamiamo dunque y_t la serie dei rendimenti logaritmici percentuali dell'Indice di Mercato; le equazioni che caratterizzano il modello in questione sono le seguenti:

$$y_t = c_{s_t} + \phi y_{t-1} + u_t \quad (105)$$

qui c_{s_t} denota il parametro c_0 quando il processo è nel regime rappresentato da $S_t = 0$, mentre denota c_1 quando $S_t = 1$.

Per i residui u_t consideriamo la seguente specificazione:

$$\hat{u}_t = \sqrt{g_{st}} u_t \quad (106)$$

Qui assumiamo che u_t segua un processo standard ARCH – L (1), perciò:

$$u_t = h_t v_t \quad (107)$$

con v_t sequenza i.i.d. a media nulla e varianza unitaria, mentre h_t obbedisce a:

$$h_t^2 = a_0 + a_1 u_{t-1}^2 + \xi d_{t-1} u_{t-1}^2 \quad (108)$$

dove $d_{t-1} = 1$ se $u_{t-1} < 0$ e $d_{t-1} = 0$ se $u_{t-1} > 0$. Poi si moltiplica la variabile u_t per la costante $\sqrt{g_0}$ quando il processo è nel regime rappresentato da $S_t = 0$ e per la costante $\sqrt{g_1}$ quando $S_t = 1$.

Inoltre il fattore g_0 è normalizzato pari a uno; questo perchè l'idea è quella di modellare cambiamenti di regime come cambiamenti nella scala del processo.

Il parametro ξ rappresenta infine l'effetto leva, cioè la possibilità che aumenti o decrementi dei rendimenti dell'Indice di Mercato possano avere affetti asimmetrici sulla volatilità.

Riportiamo quindi i risultati ottenuti:

	Parametro	Stima	Standard error	t - statistic
Probabilità di rimanere in un dato regime	p_{11}	0.96771	0.01937	49.94684
	p_{22}	0.89338	0.10663	8.37846
Intercette	c_0	1.09010	0.21653	5.03431
	c_1	-0.21140	0.77110	-0.27415
Parametri dinamica della volatilità	a_0	10.57613	1.41972	7.44945
	a_1	3.81018e-010	2.39884e-008	0.01588
Parametro di scala della volatilità	g_1	4.92280	1.47545	3.33663
Parametro effetto leva	ξ	-1.99696	6.05218	-0.32996
Parametro autoregressivo	ϕ	0.07233	0.05158	1.40216

Tabella 18: risultati SWARCH - L - MSI su Indice di Mercato

Iniziamo con l'analizzare i parametri delle intercette: c_0 è pari a 1.09, mentre c_1 è pari a -0.21 , il che ci indica correttamente che nelle fasi di bassa volatilità i rendimenti dell'Indice di Mercato sono maggiori rispetto alle fasi di alta volatilità. Notiamo che il parametro c_1 non sembrerebbe essere statisticamente diverso da zero (t - test = -0.27); a tal proposito ricordiamo ancora una volta che in questo tipo di modelli il calcolo degli *standard errors* potrebbe non essere altamente preciso. Prendiamo quindi con cautela l'indicazione sulla eventuale significatività o meno dei parametri; in ogni caso l'intercetta c_0 è comunque maggiore di c_1 .

Per quanto riguarda il parametro autoregressivo, esso risulta essere pari a 0.07 con un t - test di 1.40; la sua rilevanza dunque non sembra essere molta.

Esaurito il nostro interesse per le dinamiche della media, concentriamoci adesso su quelle della varianza; ricordiamo innanzitutto che i parametri a_0 , a_1 e ξ non sono dipendenti dallo stato in cui ci si trova, mentre g_1 lo è.

a_0 rappresenta una sorta di intercetta all'interno dell'equazione (108), e assume valore 10.58.

a_1 è invece il coefficiente relativo alla vera e propria parte ARCH; esso è essenzialmente nullo, il che deve farci iniziare a sospettare che non siano presenti dinamiche ARCH rilevanti.

Il parametro dell'eventuale effetto leva, ξ , risulta essere anch'esso non statisticamente significativo (t -test = -0.33); sembrerebbe dunque non essere presente alcuna dinamica di tipo ARCH.

Si potrebbe obiettare che questo è alquanto strano visto che siamo in presenza di rendimenti di un indice che si riferisce al mercato azionario e visti i risultati del test ARCH effettuato nel capitolo 4.1; tuttavia bisogna tener conto della natura dei dati. Noi abbiamo utilizzato dati a frequenza mensile, dei quali abbiamo poi calcolato i rendimenti mensili.

A questo punto è opportuno citare, tra gli altri, lo studio di Hamilton e Susmel (1994); tali autori hanno utilizzato rendimenti azionari settimanali, ottenendo come risultato che gli effetti ARCH si esauriscono completamente dopo un mese.

I nostri risultati sono dunque rassicuranti, in quanto, proprio per la natura dei dati, è logico aver ottenuto dei parametri ARCH non significativi.

Un ulteriore aspetto da tenere in considerazione è quello dei test ARCH in presenza di *Markov-Switching*; se noi effettuiamo un test ARCH su una serie generata da un *Markov-Switching* con varianze dipendenti dallo stato, rischiamo di confondere la dinamica *Markov-Switching* della varianza con possibili effetti ARCH. Quest'ultima osservazione evidenzia come sia più corretto effettuare la modellazione *Markov-Switching* e, successivamente, verificare la presenza di effetti ARCH, rispetto al trarre conclusioni affrettate dopo la sola visione di un preliminare test ARCH.

Consideriamo infine il parametro g_1 ; esso è una sorta di parametro di scala della volatilità. g_0 è stato infatti normalizzato a uno, pertanto aver ottenuto una stima di g_1 pari a 4.92 significa che nei periodi di alta volatilità la varianza è circa 5 volte superiore rispetto a quella dei periodi di bassa volatilità.

Consideriamo adesso la durata media degli stati, riportando i risultati nella tabella sottostante:

	DURATA MEDIA (in mesi)
PERIODO BASSA VOLATILITA' (=0)	30.97
PERIODO ALTA VOLATILITA' (=1)	9.38

Tabella 19: durata media dei regimi per Indice di Mercato, modello SWARCH - L - MSI

I risultati non si discostano molto da quelli ottenuti con i modelli MSI e MSM, senza parte ARCH; avremo in particolare che le fasi di bassa volatilità dureranno in media 2 anni e 7 mesi, mentre quelle di alta volatilità dureranno in media circa 9 mesi.

Riportiamo infine anche le probabilità smussate ottenute dal modello in analisi:

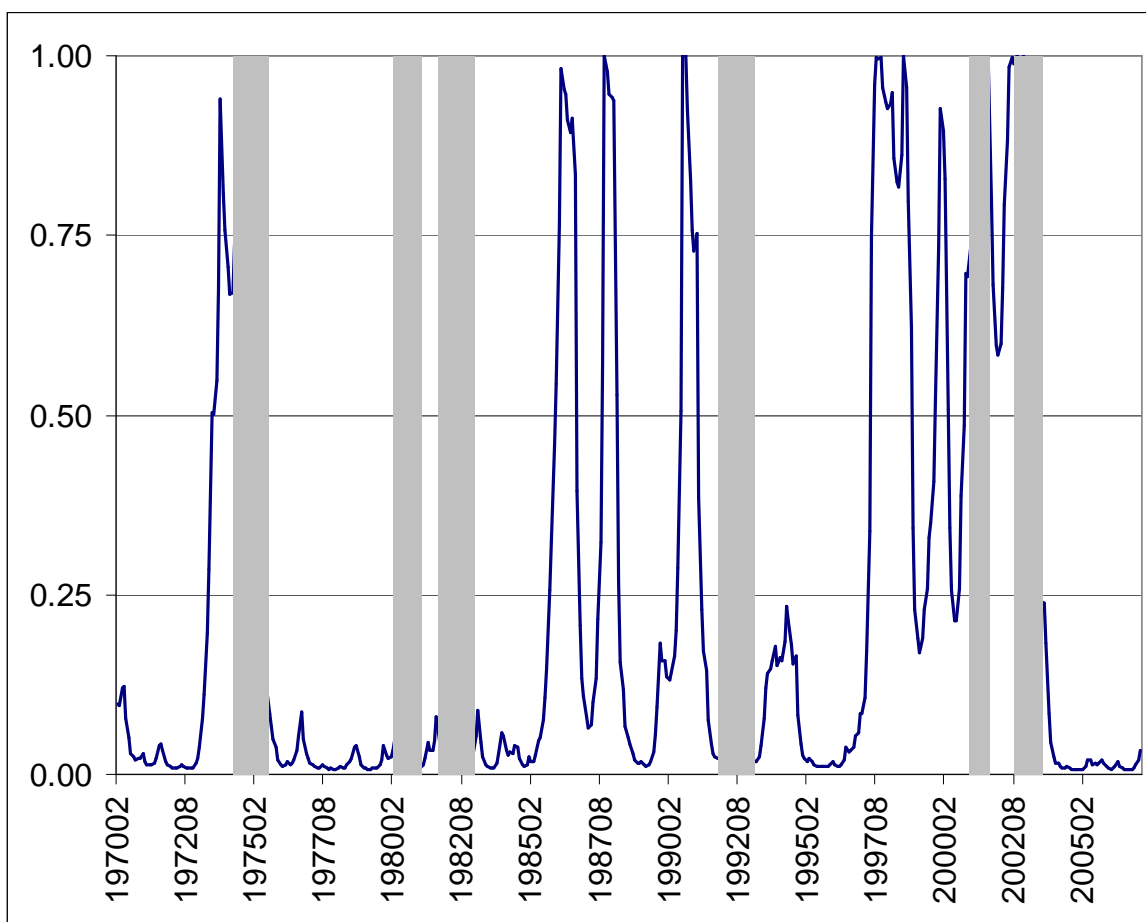


Grafico 11: probabilità smussate stato 1 per Indice di Mercato, modello SWARCH - L - MSI

Questo grafico è praticamente identico sia al grafico 10 sia al grafico 11 (probabilità smussate di modelli senza parte ARCH); per i commenti rimandiamo pertanto a quelli già effettuati poc' anzi. Con queste analisi riteniamo di aver concluso in modo esaustivo le analisi univariate sui nostri dati; l'ulteriore passo sarà quindi quello di considerare un modello bivariato.

5.3 Modello *Markov-Switching-Intercept* Bivariato

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come siano presenti dei cambi strutturali nei parametri dei modelli, a seconda dello stato in cui ci si trova. Quello che abbiamo fatto è stato però analizzare separatamente il ciclo economico e quello finanziario.

Dall'osservazione dei grafici delle probabilità smussate è stato messo in risalto come le contrazioni del ciclo economico corrispondano spesso a periodi di alta volatilità del mercato azionario (ciclo finanziario).

Quanto vogliamo fare in questa sezione, che è anche la parte fondamentale della nostra tesi, è studiare le connessioni tra le fasi del ciclo economico e quelle del ciclo finanziario.

Il passo ulteriore che facciamo è quello di considerare una specificazione secondo la quale il fattore che causa un aumento (diminuzione) nella volatilità del mercato azionario è lo stesso che fa entrare l'economia in un periodo di contrazione (espansione).

Ipotizziamo dunque l'esistenza di una sola variabile latente, S_t (la quale rappresenta lo stato dell'economia), che determini sia i parametri relativi ai rendimenti dell'Indice della Produzione Industriale, sia quelli dei rendimenti dell'Indice di Mercato.

Il modello bivariato si configura pertanto come un'alternativa più avanzata dei modelli univariati; potremo infatti valutare se ci sia un ciclo comune coerente con le oscillazioni (delle probabilità smussate) osservate nei modelli precedenti.

Il modello che implementeremo sarà basato sulla specificazione *Markov-Switching-Intercept*; permetteremo pertanto sia all'intercetta, sia alla varianza, di assumere valori differenti a seconda dello stato.

Ci siamo inoltre convinti, in conseguenza dei risultati del modello SWARCH – L, dell'inutilità di appesantire la notazione con dinamiche ARCH. Utilizzando rendimenti mensili, tali dinamiche ARCH diventano infatti del tutto ininfluenti.

Chiamiamo x_t i rendimenti percentuali della produzione industriale e z_t i rendimenti percentuali dell'Indice di Mercato, avremo pertanto $y_t = (x_t z_t)$, $t = 2, \dots, T$.

A questo punto, come in tutti i casi precedentemente descritti, consideriamo una parte autoregressiva di ordine uno e otteniamo il seguente modello:

$$y_t = \theta_{s_t} + \Phi y_{t-1} + L_{t,s_t} v_t \quad (109)$$

θ_{st} rappresenta il vettore delle intercette, dipendenti dallo stato in t ; Φ rappresenta la matrice (2 x 2) che contiene i parametri autoregressivi. Qualora i termini non diagonali risulteranno essere diversi da zero, allora si avrà che una delle serie sarà influenzata dall'altra ritardata.

Il termine d'errore v_t si presume essere i.i.d. $N(0, I_2)$, con I_2 indicante la matrice identità (2 x 2). Infine $L_{t,st}$ rappresenta la matrice (2 x 2) di varianze e covarianze; essa è dipendente dallo stato al tempo t e, se ipotizziamo che i termini d'errore delle equazioni di ciclo economico e ciclo finanziario siano indipendenti, assume la forma di una matrice diagonale.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

	Parametro	Stima	Standard error	t - statistic
Probabilità di rimanere in un dato regime	p₁₁	0.96216	0.01442	66.74105
	p₂₂	0.84544	0.09312	9.07878
Intercette	c_{0,ipi}	0.30668	0.08716	3.51863
	c_{1,ipi}	-0.06018	0.51469	-0.11693
	c_{0,ind_merc}	1.12999	0.26367	4.28567
	c_{1,ind_merc}	-0.73775	2.06104	-0.35795
Varianze	$\sigma^2_{0,ipi}$	0.70515	0.06507	10.83582
	$\sigma^2_{1,ipi}$	1.02484	0.30885	3.31818
	σ^2_{0,ind_merc}	11.46675	2.24042	5.11813
	σ^2_{1,ind_merc}	60.88941	15.94190	3.81946
Parametri autoregressivi	Φ_{11}	-0.37606	0.05488	-6.85190
	Φ_{12}	0.23354	0.26782	0.87202
	Φ_{21}	-0.00618	0.01562	-0.39531
	Φ_{22}	0.05397	0.05409	0.99780

Tabella 20: risultati MSI bivariato

Per tutti i seguenti commenti considereremo lo stato 0 equivalente a una fase di espansione e lo stato 1 equivalente a una fase di contrazione, sia per il ciclo economico che per quello finanziario

Iniziamo ad analizzare le intercette; osserviamo che anche nel caso bivariato, così come abbiamo sempre riscontrato nei casi univariati, le intercette nei periodi di espansione sono sempre maggiori ($c_{0,ipi} = 0.31$ e $c_{0,ind_merc} = 1.13$) di quelle durante le contrazioni ($c_{1,ipi} = -0.06$ e $c_{1,ind_merc} = -0.74$). Notiamo che anche stavolta sia $c_{1,ipi}$ sia c_{1,ind_merc} hanno dei t – test non molto buoni; le osservazioni fattibili sono le medesime riportate precedentemente.

Per quanto riguarda le dinamiche della volatilità osserviamo che le varianze nei periodi di espansione sono sempre minori ($\sigma^2_{0,ipi} = 0.70$ e $\sigma^2_{0,ind_merc} = 11.47$) di quelle durante le contrazioni ($\sigma^2_{1,ipi} = 1.03$ e $\sigma^2_{1,ind_merc} = 60.89$). La differenza è notevole in particolar modo quando consideriamo i valori relativi al ciclo finanziario, il che è perfettamente in linea con quanto visto finora. Inoltre questi quattro parametri risultano essere tutti altamente significativi.

Soffermiamoci infine sui parametri autoregressivi; tra questi solo il parametro Φ_{11} è statisticamente diverso da zero.

Tale parametro indica che, per quanto concerne l'Indice della Produzione Industriale, è da considerarsi anche una dinamica di tipo autoregressivo (del primo ordine).

Riassumendo, possiamo affermare che l'aver ipotizzato l'esistenza di una sola variabile latente, S_t (rappresentante lo stato dell'economia), che determini sia i parametri relativi ai rendimenti dell'Indice della Produzione Industriale sia quelli dei rendimenti dell'Indice di Mercato, è sicuramente più che plausibile.

Abbiamo infatti ottenuto risultati in linea con i modelli univariati, nei quali però ogni serie aveva una propria variabile non osservata. L'aver quindi considerato un'unica variabile latente, S_t , come stato dell'economia, ci ha permesso di capire che tale singola variabile è la responsabile dei cambiamenti strutturali dei parametri.

In conclusione possiamo, a ragion veduta, affermare quanto segue: quando l'economia si trova in uno stato di espansione le medie dei rendimenti (sia IPI che Indice di Mercato) sono maggiori rispetto a quelle in periodi di contrazione; inoltre quando l'economia si trova in uno stato di espansione le varianze dei rendimenti (sia IPI che Indice di Mercato) sono nettamente minori rispetto a quelle in periodi di contrazione.

Così come fatto in precedenza, riportiamo a questo punto anche le durate medie degli stati:

	DURATA MEDIA (in mesi)
ECONOMIA IN ESPANSIONE (=0)	26.43
ECONOMIA IN CONTRAZIONE (=1)	6.47

Tabella 21: durata media dei regimi modello MSI bivariato

Pertanto si può vedere come la durata media di un periodo di espansione sia di circa 2 anni e 2 mesi, quella di un periodo di contrazione sia invece di circa 6 mesi. Solo a titolo informativo notiamo che tali valori sono più simili a quelli ottenuti modellando univariatamente l'Indice di Mercato, rispetto al caso dell'Indice della Produzione Industriale.

Come ultimo passaggio riportiamo le probabilità smussate del modello bivariato:

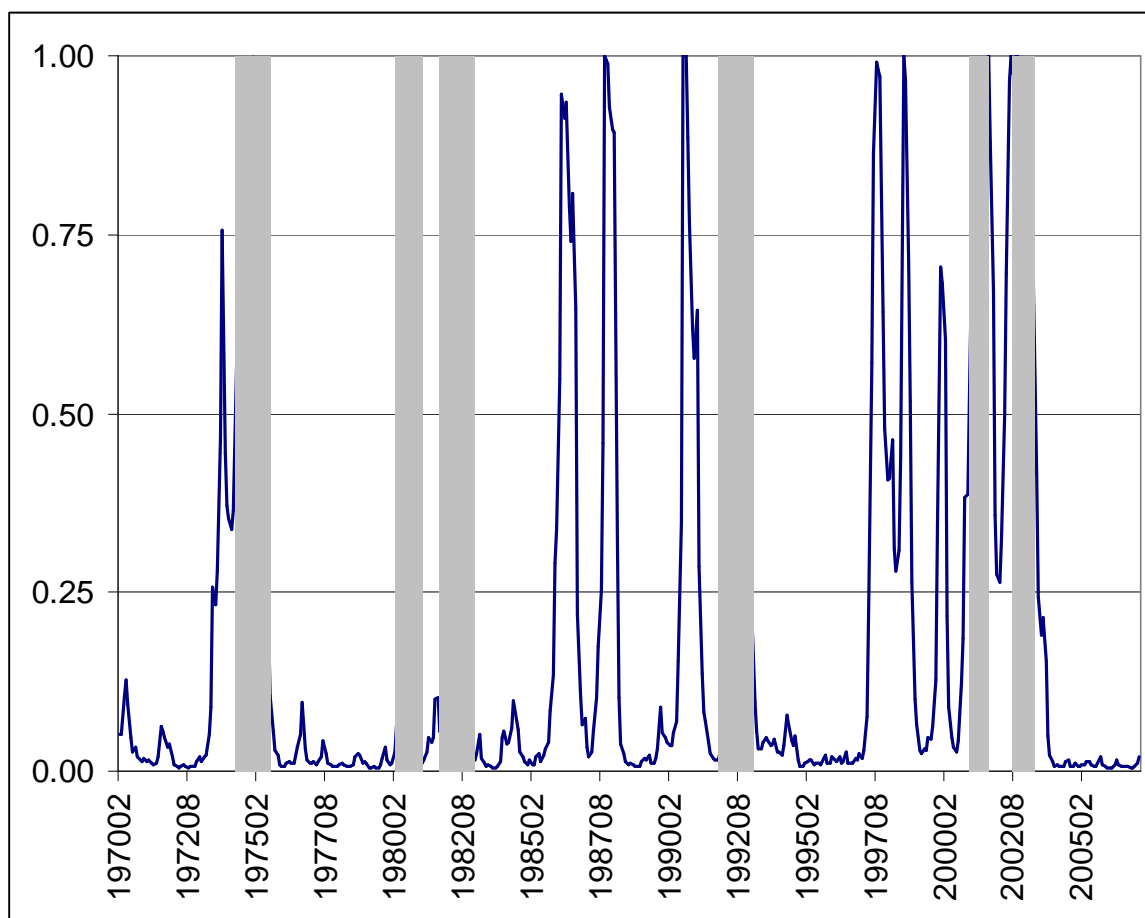


Grafico 12: probabilità smussate stato 1 per modello MSI bivariato

Il grafico 12 ci mostra che tali probabilità hanno un grado di lisciamento che è una via di mezzo tra quelle univariate di IPI e dell'Indice di Mercato.

Per quanto concerne il raffronto con la datazione ufficiale del ciclo economico (contrazioni rappresentate dalle aree in grigio), possiamo notare come il modello bivariato colga quattro periodi di contrazione su sei, e ne individui ulteriori cinque.

Consideriamo ora il grafico 12 e quelli dei casi univariati; nel confronto col modello univariato per IPI possiamo verificare quattro picchi comuni, mentre in quello per l'Indice di Mercato ne possiamo riscontrare addirittura sei.

Il fatto di aver trovato picchi comuni indica che siamo sulla buona strada e che il modello da noi adottato è più che ragionevole.

Non bisogna, d'altro canto, pensare di aver stimato il miglior modello possibile. Sono infatti evidenti nei grafici anche dei periodi di non corrispondenza tra univariato e bivariato, e il motivo potrebbe proprio risiedere nella necessità di passare a modelli ancora più avanzati.

Tali sviluppi li esporremo meglio nel capitolo 7; citiamo qui, solo a titolo informativo, gli approcci a due catene di *Markov* tra loro indipendenti (Billio, Di Sanzo, 2006) o correlate (Hamilton, Lin, 1996). Risulta evidente che considerare due differenti catene di *Markov* comporta una modellazione ancora complessa della nostra e potrebbe portare a risultati migliori.

Complessivamente il nostro modello sembra comunque essere buono; i risultati confermano pertanto che è più che plausibile ipotizzare che un'unica variabile latente (rappresentante lo "stato dell'economia") regoli i parametri strutturali sia del ciclo economico sia del ciclo finanziario.

Tali cicli si prefigurano quindi come altamente interdipendenti e sembrano andare all'incirca contemporaneamente nella medesima "direzione"; pertanto a periodi ad alta volatilità del mercato azionario corrisponderanno espansioni del ciclo economico, così come a periodi a bassa volatilità del mercato azionario corrisponderanno contrazioni del ciclo economico.

6. CONCLUSIONI

In questa tesi ciò che abbiamo fatto è stato analizzare il ciclo economico europeo, il ciclo finanziario europeo e le loro interazioni. Il periodo a cui ci siamo riferiti è gennaio 1970 – marzo 2007, con dati a frequenza mensile.

Abbiamo in particolar modo utilizzato due serie storiche; per valutare il ciclo economico abbiamo considerato l'Indice della Produzione Industriale (Area Euro 12), per valutare quello finanziario abbiamo costruito un Indice di Mercato composito.

Poiché non esiste una serie storica, a carattere europeo, dell'indice MSCI (*Morgan Stanley Capital International*) per il periodo da noi considerato, abbiamo costituito l'indice di riferimento come media ponderata degli indici MSCI dei singoli stati (come peso abbiamo considerato il PIL dei singoli paesi, adottando cioè l'approccio "dei fondamentali").

Osservando le serie storiche dei rendimenti sia dell'Indice della Produzione Industriale sia dell'Indice di Mercato, risultano evidenti cambiamenti drastici nell'andamento delle serie stesse. Tali cambiamenti hanno come conseguenza il rischio di riscontrare instabilità nei parametri dei modelli stimati, con ripercussioni negative sulla conseguente inferenza e sulle previsioni.

Per ovviare a tale problema noi abbiamo adottato dei modelli *Markov-Switching*; questa procedura è stata applicata innanzitutto sulle singole serie, trattandole pertanto in modo univariato.

Ciò che abbiamo dunque ipotizzato è che le serie storiche seguano differenti equazioni di regressione, ognuna facente riferimento ad un preciso stato dell'economia. In particolare abbiamo considerato che possano esistere due stati nell'economia: espansione e contrazione.

L'approccio *Markov-Switching* inoltre presuppone che la variabile non osservata (S_t), che rappresenta lo stato dell'economia e dalla quale dipendono i parametri del modello, segua un processo catena di Markov del primo ordine.

Applicando tali modelli *Markov-Switching* all'Indice della Produzione Industriale abbiamo potuto verificare come durante i periodi di espansione dell'economia la media (o l'intercetta, nel caso di modelli *Markov-Switching-Intercept*) dei rendimenti sia significativamente maggiore rispetto a quella riscontrabile nei periodi di contrazione. Inoltre è risultato che in tali periodi di crisi si assiste anche ad una maggiore variabilità.

Mediante il filtro di Hamilton e l'algoritmo *smoothing* di Kim abbiamo anche derivato le probabilità smussate che ci hanno permesso di fare inferenza sullo stato nel quale ci si trova, in ogni istante temporale. I grafici corrispondenti hanno mostrato una sostanziale corrispondenza tra i periodi di contrazione riscontrati dall'inferenza dei modelli e quelli presenti nella letteratura sul ciclo economico europeo (Billio, Caporin e Cazzavillan, 2004).

Il secondo passo è stato di adattare i modelli, precedentemente descritti, anche alla serie dei rendimenti mensili dell'Indice di Mercato. In questo caso, la variabile non osservata S_t faceva riferimento allo stato del ciclo finanziario, differenziabile in periodi a bassa o ad alta volatilità.

Anche questi risultati hanno mostrato la bontà della nostra modellazione; la media (o l'intercetta, nel caso di modelli *Markov-Switching-Intercept*) è nettamente più elevata nei periodi a bassa volatilità rispetto a quella nei periodi ad alta volatilità. Ovviamente, proprio per la definizione data dei due periodi, quello ad alta volatilità presenta una varianza molto maggiore rispetto a quello a bassa volatilità.

A questo punto, poiché eravamo in presenza di rendimenti di tipo azionario e poiché i risultati sulla varianza hanno mostrato differenze molto grandi tra i due periodi, abbiamo ritenuto doveroso concentrare la nostra attenzione in maniera ancora più approfondita sulla dinamica della volatilità. Il modello che siamo quindi andati a stimare è stata una specificazione *Markov - Switching - ARCH - L*. La L, che sta per *leverage*, indica che abbiamo tenuto conto anche della eventuale presenza del cosiddetto effetto leva, cioè la possibilità che aumenti o decrementi dei prezzi azionari possano avere effetti asimmetrici sulla volatilità.

I risultati, basati su rendimenti mensili, hanno evidenziato la sostanziale assenza di effetti ARCH. Ciò è in linea con quanto ottenuto da Hamilton e Susmel (1994); tali autori, lavorando su rendimenti settimanali, avevano ottenuto che qualsiasi effetto ARCH si esauriva nell'arco di un mese.

Le probabilità smussate che abbiamo ottenuto dai modelli applicati all'Indice di Mercato hanno mostrato che i periodi di alta volatilità corrispondevano in buona parte ai periodi di contrazione economica ricavati dalla modellazione sull'Indice della Produzione Industriale.

L'ultimo passo è stato quindi quello di implementare un modello bivariato. Ciò che abbiamo quindi ipotizzato è l'esistenza di una singola variabile latente (S_t , rappresentante lo "stato" dell'economia), la quale determini sia la media della produzione industriale sia la scala della volatilità azionaria. Il fattore che causa un incremento della volatilità azionaria è pertanto, nella nostra specificazione, il medesimo che fa entrare l'economia in uno stato di contrazione.

I risultati, per quanto concerne sia le intercette sia le varianze, sono in linea con quanto ottenuto nei casi univariati; il punto nodale è che in questa ultima parte noi abbiamo ipotizzato un'unica variabile latente, lo "stato" dell'economia.

Quanto ottenuto dimostra dunque come tale ipotesi sia alquanto plausibile. Anche le probabilità smussate mostrano una sostanziale corrispondenza tra le fasi di "crisi" riscontrabili a partire dall'inferenza sul nostro modello, e quelle presenti nella datazione del ciclo economico.

I cicli si prefigurano quindi come altamente interdipendenti e sembrano andare all'incirca contemporaneamente nella medesima "direzione". Quindi possiamo dire di aver verificato che a periodi ad alta volatilità del mercato azionario corrispondono espansioni del ciclo economico, così come a periodi a bassa volatilità del mercato azionario corrispondono contrazioni del ciclo economico.

Tutte le analisi effettuate ci permettono dunque di concludere che, nell'analizzare il ciclo economico, quello finanziario e la loro interazione, l'approccio *Markov – Switching* risulta essere molto buono.

7. Possibili Sviluppi di Questa Tesi

I risultati, presentati nel capitolo 5, hanno messo in luce la bontà della nostra modellazione *Markov-Switching* del ciclo economico e di quello finanziario.

In particolare abbiamo verificato che il modello bivariato, visto come alternativa più avanzata dei modelli univariati, si adatta molto bene ai nostri dati.

Non dobbiamo però avere la presunzione di aver implementato il miglior modello bivariato possibile; sono infatti presenti in letteratura dei modelli ancora più complessi, rispetto al nostro.

In questo capitolo mostreremo i più importanti sviluppi di questa tesi, in termini di differenti approcci.

Innanzitutto si potrebbe considerare non più un'unica catena di Markov, bensì due distinte catene per le variabili d'interesse. Nel dettaglio, tali catene si potrebbero ipotizzare indipendenti (come hanno fatto Billio e Di Sanzo, 2006) o correlate (così come ipotizzato da Hamilton e Lin, 1996).

Un'altra area di sviluppo potrebbe essere quella di considerare modelli a più stati, tipicamente tre o quattro. Nella definizione di ciclo economico abbiamo descritto l'espansione come distinguibile in fasi di ripresa e fasi di prosperità, e la contrazione come differenziabile in fasi di recessione e fasi di depressione. Appare dunque più che sensato ipotizzare modelli *Markov-Switching* a quattro stati.

Un'ulteriore modifica apportabile al nostro modello potrebbe essere quella di specificare in maniera più dettagliata l'equazione riguardante il ciclo economico. Si potrebbe, a tal proposito, considerare un numero maggiore di variabili cicliche, tra le quali citiamo, ad esempio, il tasso di disoccupazione.

Ulteriori sviluppi potrebbero essere infine quelli di condizionare anche i parametri autoregressivi allo stato dell'economia o di considerare probabilità di transizione variabili nel tempo.

Quanto presentato in questo capitolo, mette in luce come il nostro lavoro possa essere modificato sotto molteplici punti di vista, lasciando ampi margini operativi a chi, come noi, volesse analizzare il ciclo economico e quello finanziario mediante modelli *Markov-Switching*.

8. APPENDICE

Per coloro i quali fossero interessati a conoscere nel dettaglio le procedure *Gauss* utilizzate per ottenere i risultati presentati in questa tesi, riportiamo in questo capitolo tutti i programmi elaborati. Facciamo inoltre notare che tali procedure sono state interamente derivate da noi, in quanto non sono presenti codici già implementati per la stima di modelli *Markov–Switching*. Ricordiamo che, per meglio comprendere ciò che verrà presentato nel seguito, è necessario fare riferimento ai modelli descritti nel capitolo 1 .

8.1 *Markov-Switching-Mean*

```

new;
cls;

//IMPORTIAMO I DATI
load x[447,1]=d:/dati_ipi.txt;
ipi = x[1:446,1]~x[2:447,1];
y=100*ln(ipi[.,2])-100*ln(ipi[.,1]);
t=rows(y);

//SETTIAMO NUMERO DI STATI
s=2;

//CARICHIAMO LA LIBRERIA
library optimum,pgraph;
#include gradient.ext;
optset;
graphset;
_opmiter=200;
_opalgr=2; //5 Newton, =2 BFGS

//INIZIALIZZIAMO UN TEST SUL CALCOLO DELLA VEROSIMIGLIANZA
test={};

// INIZIALIZZAZIAMO LE PROBABILITÀ FILTRATE
fp={};

// INIZIALIZZAZIAMO I PARAMETRI
x0=0.4|-0.1|ln(2)|ln(4)|ln(0.2)|ln(0.4)|0;

```

```
//PROCEDURA DI OTTIMIZZAZIONE
```

```
{stime,f,g,retcode}=optmum(&loglik,x0);
```

```
//CREIAMO LA MATRICE DELLE DERIVATE PRIME (VINCOLI)
```

```
r1=1~0~0~0~0~0~0;
```

```
r2=0~1~0~0~0~0~0;
```

```
r3=0~0~exp(stime[3])~0~0~0~0;
```

```
r4=0~0~0~exp(stime[4])~0~0~0;
```

```
r5=0~0~0~0~(-exp(stime[5])/((1+exp(stime[5]))^2))~0~0;
```

```
r6=0~0~0~0~0~(-exp(stime[6])/((1+exp(stime[6]))^2))~0;
```

```
r7=0~0~0~0~0~0~(-2*exp(stime[7])/((1+exp(stime[7]))^2));
```

```
psi=r1|r2|r3|r4|r5|r6|r7;
```

```
//VETTORE DELLE STIME CHE TENGANO CONTO DEI VINCOLI
```

```
stimef=stime[1]|stime[2]|exp(stime[3])|exp(stime[4])|1/(1+exp(stime[5]))|1/(1+exp(stime[6]))|-  
1+2/(1+exp(stime[7]));
```

```
//CALCOLIAMO GLI STANDARD ERRORS
```

```
if s==2;
```

```
    hes=hessp(&loglikb,stime);
```

```
    gra=gradp(&loglikc,stime);
```

```
endif;
```

```
k=vcx(gra)*rows(y);
```

```
varcovcentrale=inv(hes)*k*inv(hes);
```

```
varcovfinale=psi*varcovcentrale*psi';
```

```
dcov=diag(varcovfinale);
```

```
//RIPORTIAMO I RISULTATI
```

```
"RISULTATI";
```

```
// MATRICE DI TRANSIZIONE
```

```
"Probabilità di rimanere in un dato regime; standard errors; t - statistics";
```

```
stimef[5:6]~sqrt(dcov[5:6])~stimef[5:6]/sqrt(dcov[5:6]);
```

```

"Matrice di transizione";
p00=1/(1+exp(stime[5]));
p11=1/(1+exp(stime[6]));
tm=(p00~(1-p00))|((1-p11)~p11);
tm;

// PROBABILITA' SMUSSATE
pp=fp[.,1:s]';
fp=fp[.,s+1:2*s]';
cf=cols(fp);
sm=fp[.,cf];
l=cf-1;
do while l>=1;
    sm=((tm*(sm[.,1]/pp[.,l+1])).*(fp[.,l]))~sm;
    l=l-1;
endo;
sm=sm';

"Parametri per i 2 regimi";
stimef[1:4]~sqrt(dcov[1:4])~stimef[1:4]/sqrt(dcov[1:4]);

"Parametro autoregressivo";
stimef[7]~sqrt(dcov[7])~stimef[7]/sqrt(dcov[7]);

"Probabilità smussate - stato 0";
xy(seqa(1,1,rows(sm)),sm[.,1]);
"Premere un tasto per continuare";
wait;
"Probabilità smussate - stato 1";
xy(seqa(1,1,rows(sm)),sm[.,2]);
end;

```

```
//PROCEDURE
proc(1)=loglik(b);
local p,p0,p1,sst1,ll0,ll1,llk,ll,l,pp0,pp1,s3,s4,sst,n,j,fi,ksst,ll00,ll01,ll10,ll11;
n=1;
j=0;
s3=exp(b[3]);
s4=exp(b[4]);
pp0=1/(1+exp(b[5]));
pp1=1/(1+exp(b[6]));
fi=-1+2/(1+exp(b[7]));
// MATRICE DI TRANSIZIONE
p=(pp0~(1-pp0))|((1-pp1)~pp1);
// PROBABILITA' ERGODICHE
p0=(1-pp1)/(2-pp1-pp0);
p1=(1-pp0)/(2-pp1-pp0);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA'
sst1=p0|p1;
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[1]-b[1])^2));
ll1=1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[1]-b[2])^2));
llk=ll0*sst1[1]+ll1*sst1[2];
ll=ln(llk);

// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA' FILTRATE
sst=(sst1[1]*ll0/llk)|(sst1[2]*ll1/llk);
l=2;
do while l<=rows(y);
sst1=sst1~((p')*sst[.,cols(sst)]);
// PROBABILITA' PER L'APPROSSIMAZIONE DI KIM
ksst=(p[1,1]*sst[1,cols(sst)]|(p[1,2]*sst[1,cols(sst)]|(p[2,1]*sst[2,cols(sst)]|(p[2,2]*sst[2,c
ols(sst)]);
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll00=(1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[l]-b[1]-fi*(y[l-1]-b[1]))^2)));
ll01=(1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[l]-b[2]-fi*(y[l-1]-b[1]))^2)));
```

```

ll10=(1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[l]-b[1]-fi*(y[l-1]-b[2]))^2)));
ll11=(1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[l]-b[2]-fi*(y[l-1]-b[2]))^2)));
llk=ll00*ksst[1]+ll01*ksst[2]+ll10*ksst[3]+ll11*ksst[4];
ll=ll|ln(llk);
// CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
ksst=((ll00|ll01|ll10|ll11).*ksst)/llk;
sst=sst~((ksst[1]+ksst[3])|(ksst[2]+ksst[4]));
l=l+1;
endo;
fp=sst1'~sst';
test=(ll);
retp(-sumc(ll));
endp;

proc(1)=loglikc(b);
local p,p0,p1,sst1,ll0,ll1,llk,ll,l,pp0,pp1,s3,s4,sst,n,j,fi,ksst,ll00,ll01,ll10,ll11;
n=1;
j=0;
s3=exp(b[3]);
s4=exp(b[4]);
pp0=1/(1+exp(b[5]));
pp1=1/(1+exp(b[6]));
fi=-1+2/(1+exp(b[7]));
// MATRICE DI TRANSIZIONE
p=(pp0~(1-pp0))|((1-pp1)~pp1);
// PROBABILITA' ERGODICHE
p0=(1-pp1)/(2-pp1-pp0);
p1=(1-pp0)/(2-pp1-pp0);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA'
sst1=p0|p1;
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[1]-b[1])^2));
ll1=1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[1]-b[2])^2));
llk=ll0*sst1[1]+ll1*sst1[2];

```

```

ll=ln(llk);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA' FILTRATE
sst=(sst1[1]*ll0/llk)|(sst1[2]*ll1/llk);
    l=2;
    do while l<=rows(y);
        sst1=sst1~((p')*sst[.,cols(sst)]);
        // PROBABILITA' PER L' APPROSSIMAZIONE DI KIM
        ksst=(p[1,1]*sst[1,cols(sst)]|(p[1,2]*sst[1,cols(sst)]|(p[2,1]*sst[2,cols(sst)]|(p[2,2]*sst[2,cols(sst)]));
        // CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
        ll00=(1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[l]-b[1]-fi*(y[l-1]-b[1]))^2)));
        ll01=(1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[l]-b[2]-fi*(y[l-1]-b[1]))^2)));
        ll10=(1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[l]-b[1]-fi*(y[l-1]-b[2]))^2)));
        ll11=(1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[l]-b[2]-fi*(y[l-1]-b[2]))^2)));
        llk=ll00*ksst[1]+ll01*ksst[2]+ll10*ksst[3]+ll11*ksst[4];
        ll=ll|ln(llk);
        // CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
        ksst=((ll00|ll01|ll10|ll11).*ksst)/llk;
        sst=sst~((ksst[1]+ksst[3])|(ksst[2]+ksst[4]));
        l=l+1;
    endo;
fp=sst1'~sst';
retp(ll);
endp;
proc(1)=loglikb(b);
local p,p0,p1,sst1,ll0,ll1,llk,ll,l,pp0,pp1,s3,s4,sst,n,j,fi,ksst,ll00,ll01,ll10,ll11;
n=1;
j=0;
s3=exp(b[3]);
s4=exp(b[4]);
pp0=1/(1+exp(b[5]));
pp1=1/(1+exp(b[6]));
fi=-1+2/(1+exp(b[7]));
// MATRICE DI TRANSIZIONE

```



```

p=(pp0~(1-pp0))|((1-pp1)~pp1);
// PROBABILITA' ERGODICHE
p0=(1-pp1)/(2-pp1-pp0);
p1=(1-pp0)/(2-pp1-pp0);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA'
sst1=p0|p1;
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[1]-b[1])^2));
ll1=1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[1]-b[2])^2));
llk=ll0*sst1[1]+ll1*sst1[2];
ll=ln(llk);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA' FILTRATE
sst=(sst1[1]*ll0/llk)|(sst1[2]*ll1/llk);
    l=2;
    do while l<=rows(y);
        sst1=sst1~((p')*sst[.,cols(sst)]);
        // PROBABILITA' PER L' APPROSSIMAZIONE DI KIM
        ksst=(p[1,1]*sst[1,cols(sst)]|(p[1,2]*sst[1,cols(sst)]|(p[2,1]*sst[2,cols(sst)]|(p[2,2]*sst[2,cols(sst)]));
        // CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
        ll00=(1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[l]-b[1]-fi*(y[l-1]-b[1]))^2)));
        ll01=(1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[l]-b[2]-fi*(y[l-1]-b[1]))^2)));
        ll10=(1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[l]-b[1]-fi*(y[l-1]-b[2]))^2)));
        ll11=(1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[l]-b[2]-fi*(y[l-1]-b[2]))^2)));
        llk=ll00*ksst[1]+ll01*ksst[2]+ll10*ksst[3]+ll11*ksst[4];
        ll=ll|ln(llk);
        // CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
        ksst=((ll00|ll01|ll10|ll11).*ksst)/llk;
        sst=sst~((ksst[1]+ksst[3])|(ksst[2]+ksst[4]));
        l=l+1;
    endo;
fp=sst1'~sst';
retp(sumc(ll));
endp;

```

8.2 *Markov-Switching-Intercept*

```

new;
cls;

//IMPORTIAMO I DATI
load x[447,1]=d:/dati_ipi.txt;
ipi = x[1:446,1]~x[2:447,1];
y=100*ln(ipi[.,2])-100*ln(ipi[.,1]);
t=rows(y);

//SETTIAMO NUMERO DI STATI
s=2;

//CARICHIAMO LA LIBRERIA
library optimum,pgraph;
#include gradient.ext;
optset;
graphset;
_opmiter=200;
_opalgr=2; //5 Newton, =2 BFGS

//INIZIALIZZIAMO UN TEST SUL CALCOLO DELLA VEROSIMIGLIANZA
test={};

// INIZIALIZZAZIAMO LE PROBABILITÀ FILTRATE
fp={};

// INIZIALIZZAZIAMO I PARAMETRI
x0=0.4|-0.1|ln(2)|ln(4)|ln(0.2)|ln(0.4)|0;

```

```
//PROCEDURA DI OTTIMIZZAZIONE
```

```
{stime,f,g,retcode}=optmum(&loglik,x0);
```

```
//CREIAMO LA MATRICE DELLE DERIVATE PRIME (VINCOLI)
```

```
r1=1~0~0~0~0~0~0;
```

```
r2=0~1~0~0~0~0~0;
```

```
r3=0~0~exp(stime[3])~0~0~0~0;
```

```
r4=0~0~0~exp(stime[4])~0~0~0;
```

```
r5=0~0~0~0~(-exp(stime[5])/((1+exp(stime[5]))^2))~0~0;
```

```
r6=0~0~0~0~0~(-exp(stime[6])/((1+exp(stime[6]))^2))~0;
```

```
r7=0~0~0~0~0~0~(-2*exp(stime[7])/((1+exp(stime[7]))^2));
```

```
psi=r1|r2|r3|r4|r5|r6|r7;
```

```
//VETTORE DELLE STIME CHE TENGANO CONTO DEI VINCOLI
```

```
stimef=stime[1]|stime[2]|exp(stime[3])|exp(stime[4])|1/(1+exp(stime[5]))|1/(1+exp(stime[6]))|-  
1+2/(1+exp(stime[7]));
```

```
//CALCOLIAMO GLI STANDARD ERRORS
```

```
if s==2;
```

```
    hes=hessp(&loglikb,stime);
```

```
    gra=gradp(&loglikc,stime);
```

```
endif;
```

```
k=vcx(gra)*rows(y);
```

```
varcovcentrale=inv(hes)*k*inv(hes);
```

```
varcovfinale=psi*varcovcentrale*psi';
```

```
dcov=diag(varcovfinale);
```

```
//RIPORTIAMO I RISULTATI
```

```
"RISULTATI";
```

```
// MATRICE DI TRANSIZIONE
```

```
"Probabilità di rimanere in un dato regime; standard errors; t - statistics";
```

```
stimef[5:6]~sqrt(dcov[5:6])~stimef[5:6]/sqrt(dcov[5:6]);
```

```

"Matrice di transizione";
p00=1/(1+exp(stime[5]));
p11=1/(1+exp(stime[6]));
tm=(p00~(1-p00))|((1-p11)~p11);
tm;

// PROBABILITA' SMUSSATE
pp=fp[.,1:s]';
fp=fp[.,s+1:2*s]';
cf=cols(fp);
sm=fp[.,cf];
l=cf-1;
do while l>=1;
    sm=((tm*(sm[.,1]/pp[.,l+1])).*(fp[.,l]))~sm;
    l=l-1;
endo;
sm=sm';

"Parametri per i 2 regimi";
stimef[1:4]~sqrt(dcov[1:4])~stimef[1:4]/sqrt(dcov[1:4]);

"Parametro autoregressivo";
stimef[7]~sqrt(dcov[7])~stimef[7]/sqrt(dcov[7]);

"Probabilità smussate - stato 0";
xy(seqa(1,1,rows(sm)),sm[.,1]);
"Premere un tasto per continuare";
wait;
"Probabilità smussate - stato 1";
xy(seqa(1,1,rows(sm)),sm[.,2]);
end;

```

```
//PROCEDURE
proc(1)=loglik(b);
local p,p0,p1,sst1,ll0,ll1,llk,ll,l,pp0,pp1,s3,s4,sst,n,j,fi;
n=1;
j=0;
s3=exp(b[3]);
s4=exp(b[4]);
pp0=1/(1+exp(b[5]));
pp1=1/(1+exp(b[6]));
fi=-1+2/(1+exp(b[7]));
// MATRICE DI TRANSIZIONE
p=(pp0~(1-pp0))|((1-pp1)~pp1);
// PROBABILITA' ERGODICHE
p0=(1-pp1)/(2-pp1-pp0);
p1=(1-pp0)/(2-pp1-pp0);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA'
sst1=p0|p1;
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[1]-b[1])^2));
ll1=1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[1]-b[2])^2));
llk=ll0*sst1[1]+ll1*sst1[2];
ll=ln(llk);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA' FILTRATE
sst=(sst1[1]*ll0/llk)|(sst1[2]*ll1/llk);
l=2;
do while l<=rows(y);
sst1=sst1~((p')*sst[.,cols(sst)]);
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=ll0|(1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[l]-b[1]-fi*y[l-1])^2)));
ll1=ll1|(1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[l]-b[2]-fi*y[l-1])^2)));
llk=ll0[l]*sst1[1,l]+ll1[l]*sst1[2,l];
ll=ll|ln(llk);
// CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
//ksst=((ll0|ll1).*ksst)/llk;
```

```

sst=sst~((sst1[1,1]*ll0[1]/llk)|(sst1[2,1]*ll1[1]/llk));
l=l+1;
endo;
fp=sst1'~sst';
test=(ll);
retp(-sumc(ll));
endp;

proc(1)=loglikc(b);
local p,p0,p1,sst1,ll0,ll1,llk,ll,l,pp0,pp1,s3,s4,sst,n,j,fi;
n=1;
j=0;
s3=exp(b[3]);
s4=exp(b[4]);
pp0=1/(1+exp(b[5]));
pp1=1/(1+exp(b[6]));
fi=-1+2/(1+exp(b[7]));
// MATRICE DI TRANSIZIONE
p=(pp0~(1-pp0))|((1-pp1)~pp1);
// PROBABILITA' ERGODICHE
p0=(1-pp1)/(2-pp1-pp0);
p1=(1-pp0)/(2-pp1-pp0);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA'
sst1=p0|p1;
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[1]-b[1])^2));
ll1=1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[1]-b[2])^2));
llk=ll0*sst1[1]+ll1*sst1[2];
ll=ln(llk);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA' FILTRATE
sst=(sst1[1]*ll0/llk)|(sst1[2]*ll1/llk);
l=2;
do while l<=rows(y);
sst1=sst1~((p')*sst[.,cols(sst)]);

```

```

// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=ll0|(1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[l]-b[1]-fi*y[l-1])^2)));
ll1=ll1|(1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[l]-b[2]-fi*y[l-1])^2)));
llk=ll0[l]*sst1[1,l]+ll1[l]*sst1[2,l];
ll=ll|ln(llk);
// CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
//ksst=((ll0|ll1).*ksst)/llk;
sst=sst~((sst1[1,l]*ll0[l]/llk)|(sst1[2,l]*ll1[l]/llk));
l=l+1;
endo;
fp=sst1'~sst';
retp(ll);
endp;

proc(1)=loglikb(b);
local p,p0,p1,sst1,ll0,ll1,llk,ll,l,pp0,pp1,s3,s4,sst,n,j,fi;
n=1;
j=0;
s3=exp(b[3]);
s4=exp(b[4]);
pp0=1/(1+exp(b[5]));
pp1=1/(1+exp(b[6]));
fi=-1+2/(1+exp(b[7]));
// MATRICE DI TRANSIZIONE
p=(pp0~(1-pp0))|((1-pp1)~pp1);
// PROBABILITA' ERGODICHE
p0=(1-pp1)/(2-pp1-pp0);
p1=(1-pp0)/(2-pp1-pp0);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA'
sst1=p0|p1;
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[1]-b[1])^2));
ll1=1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[1]-b[2])^2));
llk=ll0*sst1[1]+ll1*sst1[2];

```

```

ll=ln(llk);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA' FILTRATE
sst=(sst1[1]*ll0/llk)|(sst1[2]*ll1/llk);
    l=2;
    do while l<=rows(y);
        sst1=sst1~((p')*sst[.,cols(sst)]);
        // CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
        ll0=ll0|(1/(sqrt(2*pi*s3))*exp(-(0.5/s3)*((y[l]-b[1]-fi*y[l-1])^2)));
        ll1=ll1|(1/(sqrt(2*pi*s4))*exp(-(0.5/s4)*((y[l]-b[2]-fi*y[l-1])^2)));
        llk=ll0[l]*sst1[1,l]+ll1[l]*sst1[2,l];
        ll=ll|ln(llk);
        // CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
        //ksst=((ll0|ll1 l).*ksst)/llk;
        sst=sst~((sst1[1,l]*ll0[l]/llk)|(sst1[2,l]*ll1[l]/llk));
        l=l+1;
    endo;
fp=sst1'~sst';
retp(sumc(ll));
endp;

```


8.3 Specificazione ARCH con cambiamenti di regime

```

new;
cls;

//IMPORTIAMO I DATI
load x[446,2]=d:/dati_finali.txt;
y=x[:,2];
t=rows(y);

//SETTIAMO NUMERO DI STATI
s=2;

//CARICHIAMO LA LIBRERIA
library optmum,pgraph;
#include gradient.ext;
optset;
graphset;
_opmiter=200;
_opalgr=2; //5 Newton, =2 BFGS

//INIZIALIZZIAMO UN TEST SUL CALCOLO DELLA VEROSIMIGLIANZA
test={};

// INIZIALIZZAZIAMO LE PROBABILITÀ FILTRATE
fp={};

// INIZIALIZZAZIAMO I PARAMETRI
x0=1|-1|2|0.8|ln(0.2)|ln(0.25)|2|0|0;

//PROCEDURA DI OTTIMIZZAZIONE
{stime,f,g,retcode}=optmum(&loglik,x0);

```

```
//CREIAMO LA MATRICE DELLE DERIVATE PRIME (VINCOLI)
```

```
r1=1~0~0~0~0~0~0~0~0~0;
r2=0~1~0~0~0~0~0~0~0~0;
r3=0~0~exp(stime[3])~0~0~0~0~0~0~0;
r4=0~0~0~(-exp(stime[4])/((1+exp(stime[4]))^2))~0~0~0~0~0~0;
r5=0~0~0~0~(-exp(stime[5])/((1+exp(stime[5]))^2))~0~0~0~0~0;
r6=0~0~0~0~0~(-exp(stime[6])/((1+exp(stime[6]))^2))~0~0~0~0;
r7=0~0~0~0~0~0~1~0~0~0;
r8=0~0~0~0~0~0~0~(-2*exp(stime[8])/((1+exp(stime[8]))^2))~0;
r9=0~0~0~0~(-2/(1+exp(stime[9])))~0~0~0~0~((-exp(stime[9])*(2-
2*stime[4]))/(1+exp(stime[9]))^2));
psi=r1|r2|r3|r4|r5|r6|r7|r8|r9;
```

```
//VETTORE DELLE STIME CHE TENGANO CONTO DEI VINCOLI
```

```
stimef=stime[1]|stime[2]|exp(stime[3])|1/(1+exp(stime[4]))|1/(1+exp(stime[5]))|1/(1+exp(stime[6]))
|stime[7]|-1+2/(1+exp(stime[8]))|(2-2*stime[4])/(1+exp(stime[9]));
```

```
//CALCOLIAMO GLI STANDARD ERRORS
```

```
if s==2;
    hes=hessp(&loglikb,stime);
    gra=gradp(&loglikc,stime);
endif;
k=vcx(gra)*rows(y);
varcovcentrale=inv(hes)*k*inv(hes);
varcovfinale=psi*varcovcentrale*psi';
dcov=diag(varcovfinale);
```

```
//RIPORTIAMO I RISULTATI
```

```
"RISULTATI";
```

```
// MATRICE DI TRANSIZIONE
```

```
"Probabilità di rimanere in un dato regime; standard errors; t - statistics";
stimef[5:6]~sqrt(dcov[5:6])~stimef[5:6]/sqrt(dcov[5:6]);
```

```

"Matrice di transizione";
p00=1/(1+exp(stime[5]));
p11=1/(1+exp(stime[6]));
tm=(p00~(1-p00))|((1-p11)~p11);
tm;

// PROBABILITA' SMUSSATE
pp=fp[.,1:s]';
fp=fp[.,s+1:2*s]';
cf=cols(fp);
sm=fp[.,cf];
l=cf-1;
do while l>=1;
    sm=((tm*(sm[.,1]/pp[.,l+1])).*(fp[.,l]))~sm;
    l=l-1;
endo;
sm=sm';

"Parametri per i 2 regimi";
stimef[1:4]~sqrt(dcov[1:4])~stimef[1:4]/sqrt(dcov[1:4]);

"Parametro varianza stato 1";
stimef[7]~sqrt(dcov[7])~stimef[7]/sqrt(dcov[7]);

"Parametro effetto leva";
stimef[9]~sqrt(dcov[9])~stimef[9]/sqrt(dcov[9]);

"Parametro autoregressivo";
stimef[8]~sqrt(dcov[8])~stimef[8]/sqrt(dcov[8]);

"Probabilità smussate - stato 0";
xy(seqa(1,1,rows(sm)),sm[.,1]);
"Premere un tasto per continuare";

```

```

wait;
"Probabilità smussate - stato 1";
xy(seqa(1,1,rows(sm)),sm[:,2]);
end;

//PROCEDURE
proc(1)=loglik(b);
local p,p0,p1,sst1,ll0,ll1,llk,ll,l,pp0,pp1,sst,n,j,ksst,ll00,ll01,ll10,ll11,s00,s01,s10,s11,a0,a1,fi, u00,
u10, u01,u11,uu00,uu01,uu10,uu11,delta;

n=1;
j=0;
a0=exp(b[3]);
a1=1/(1+exp(b[4]));
pp0=1/(1+exp(b[5]));
pp1=1/(1+exp(b[6]));
//g1=b[7]
delta=(2-2*a1)/(1+exp(b[9]));
fi=-1+2/(1+exp(b[8]));
// MATRICE DI TRANSIZIONE
p=(pp0~(1-pp0))|((1-pp1)~pp1);
// PROBABILITA' ERGODICHE
p0=(1-pp1)/(2-pp1-pp0);
p1=(1-pp0)/(2-pp1-pp0);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA'
sst1=p0|p1;
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=1/(sqrt(2*pi*a0))*exp(-(0.5/a0)*((y[1]-b[1])^2));
ll1=1/(sqrt(2*pi*b[7]*a0))*exp(-(0.5/(b[7]*a0))*((y[1]-b[2])^2));
llk=ll0*sst1[1]+ll1*sst1[2];
ll=ln(llk);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA' FILTRATE
sst=(sst1[1]*ll0/llk)|(sst1[2]*ll1/llk);
sst1=sst1~((p')*sst[:,cols(sst)]);

```

```

// PROBABILITA' PER L'APPROSSIMAZIONE DI KIM
ksst=(p[1,1]*sst[1,cols(sst)]|(p[1,2]*sst[1,cols(sst)]|(p[2,1]*sst[2,cols(sst)]|(p[2,2]*
sst[2,cols(sst)]));

u00=y[1]-b[1];
u01=y[1]-b[1];
u10=y[1]-b[2];
u11=y[1]-b[2];
s00=1*(a0+a1*((u00^2)/1)+delta*(u00<=0)*((u00^2)/1));
s01=b[7]*(a0+a1*((u01^2)/1)+delta*(u01<=0)*((u01^2)/1));
s10=1*(a0+a1*((u10^2)/b[7])+delta*(u10<=0)*((u10^2)/b[7]));
s11=b[7]*(a0+a1*((u11^2)/b[7])+delta*(u11<=0)*((u11^2)/b[7]));
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll00=(1/(sqrt(2*pi*s00))*exp(-(0.5/s00)*((y[2]-b[1]-fi*y[1])^2)));
ll01=(1/(sqrt(2*pi*s01))*exp(-(0.5/s01)*((y[2]-b[2]-fi*y[1])^2)));
ll10=(1/(sqrt(2*pi*s10))*exp(-(0.5/s10)*((y[2]-b[1]-fi*y[1])^2)));
ll11=(1/(sqrt(2*pi*s11))*exp(-(0.5/s11)*((y[2]-b[2]-fi*y[1])^2)));
llk=ll00*ksst[1]+ll01*ksst[2]+ll10*ksst[3]+ll11*ksst[4];
ll=ll*ln(llk);
// CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
ksst=((ll00|ll01|ll10|ll11).*ksst)/llk;
sst=sst~((ksst[1]+ksst[3])|(ksst[2]+ksst[4]));
l=3;
do while l<=rows(y);
sst1=sst1~((p')*sst[.,cols(sst)]);
// PROBABILITA' PER L'APPROSSIMAZIONE DI KIM
ksst=(p[1,1]*sst[1,cols(sst)]|(p[1,2]*sst[1,cols(sst)]|(p[2,1]*sst[2,cols(sst)]|(p[2,2]*sst[2,c
ols(sst)]));

uu00=y[l-1]-b[1]-fi*y[l-2];
uu01=y[l-1]-b[1]-fi*y[l-2];
uu10=y[l-1]-b[2]-fi*y[l-2];
uu11=y[l-1]-b[2]-fi*y[l-2];

```

```

s00=1*(a0+a1*((uu00^2)/1)+delta*(uu00<=0)*((uu00^2)/1));
s01=b[7]*(a0+a1*((uu01^2)/1)+delta*(uu01<=0)*((uu01^2)/1));
s10=1*(a0+a1*((uu10^2)/b[7])+delta*(uu10<=0)*((uu10^2)/b[7]));
s11=b[7]*(a0+a1*((uu11^2)/b[7])+delta*(uu11<=0)*((uu11^2)/b[7]));
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll00=(1/(sqrt(2*pi*s00))*exp(-0.5/s00)*((y[l]-b[1]-fi*y[l-1])^2));
ll01=(1/(sqrt(2*pi*s01))*exp(-0.5/s01)*((y[l]-b[2]-fi*y[l-1])^2));
ll10=(1/(sqrt(2*pi*s10))*exp(-0.5/s10)*((y[l]-b[1]-fi*y[l-1])^2));
ll11=(1/(sqrt(2*pi*s11))*exp(-0.5/s11)*((y[l]-b[2]-fi*y[l-1])^2));
llk=ll00*ksst[1]+ll01*ksst[2]+ll10*ksst[3]+ll11*ksst[4];
ll=ll*ln(llk);
// CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
ksst=((ll00|ll01|ll10|ll11).*ksst)/llk;
sst=sst~((ksst[1]+ksst[3])|(ksst[2]+ksst[4]));
l=l+1;
endo;
fp=sst1'~sst';
test=(ll);
retp(-sumc(ll));
endp;

proc(1)=loglikc(b);
local p,p0,p1,sst1,ll0,ll1,llk,ll,l,pp0,pp1,sst,n,j,ksst,ll00,ll01,ll10,ll11,s00,s01,s10,s11,a0,a1,fi, u00,
u10, u01,u11,uu00,uu01,uu10,uu11,delta;

n=1;
j=0;
a0=exp(b[3]);
a1=1/(1+exp(b[4]));
pp0=1/(1+exp(b[5]));
pp1=1/(1+exp(b[6]));
//g1=b[7]
delta=(2-2*a1)/(1+exp(b[9]));

```

```

fi=-1+2/(1+exp(b[8]));
// MATRICE DI TRANSIZIONE
p=(pp0~(1-pp0))/((1-pp1)~pp1);
// PROBABILITA' ERGODICHE
p0=(1-pp1)/(2-pp1-pp0);
p1=(1-pp0)/(2-pp1-pp0);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA'
sst1=p0|p1;
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=1/(sqrt(2*pi*a0))*exp(-(0.5/a0)*((y[1]-b[1])^2));
ll1=1/(sqrt(2*pi*b[7]*a0))*exp(-(0.5/(b[7]*a0))*((y[1]-b[2])^2));
llk=ll0*sst1[1]+ll1*sst1[2];
ll=ln(llk);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA' FILTRATE
sst=(sst1[1]*ll0/llk)|(sst1[2]*ll1/llk);
sst1=sst1~((p')*sst[.,cols(sst)]);

// PROBABILITA' PER L'APPROSSIMAZIONE DI KIM
ksst=(p[1,1]*sst[1,cols(sst)]|(p[1,2]*sst[1,cols(sst)]|(p[2,1]*sst[2,cols(sst)]|(p[2,2]*
sst[2,cols(sst)]));

u00=y[1]-b[1];
u01=y[1]-b[1];
u10=y[1]-b[2];
u11=y[1]-b[2];
s00=1*(a0+a1*((u00^2)/1)+delta*(u00<=0)*((u00^2)/1));
s01=b[7]*(a0+a1*((u01^2)/1)+delta*(u01<=0)*((u01^2)/1));
s10=1*(a0+a1*((u10^2)/b[7])+delta*(u10<=0)*((u10^2)/b[7]));
s11=b[7]*(a0+a1*((u11^2)/b[7])+delta*(u11<=0)*((u11^2)/b[7]));
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll00=(1/(sqrt(2*pi*s00))*exp(-(0.5/s00)*((y[2]-b[1]-fi*y[1])^2)));
ll01=(1/(sqrt(2*pi*s01))*exp(-(0.5/s01)*((y[2]-b[2]-fi*y[1])^2)));
ll10=(1/(sqrt(2*pi*s10))*exp(-(0.5/s10)*((y[2]-b[1]-fi*y[1])^2)));
ll11=(1/(sqrt(2*pi*s11))*exp(-(0.5/s11)*((y[2]-b[2]-fi*y[1])^2)));

```

```

llk=ll00*ksst[1]+ll01*ksst[2]+ll10*ksst[3]+ll11*ksst[4];
ll=ll|ln(llk);
// CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
ksst=((ll00|ll01|ll10|ll11).*ksst)/llk;
sst=sst~((ksst[1]+ksst[3])|(ksst[2]+ksst[4]));
    l=3;
    do while l<=rows(y);
        sst1=sst1~((p')*sst[.,cols(sst)]);
        // PROBABILITA' PER L'APPROSSIMAZIONE DI KIM
        ksst=(p[1,1]*sst[1,cols(sst)]|(p[1,2]*sst[1,cols(sst)]|(p[2,1]*sst[2,cols(sst)]|(p[2,2]*sst[2,cols(sst)]));

        uu00=y[l-1]-b[1]-fi*y[l-2];
        uu01=y[l-1]-b[1]-fi*y[l-2];
        uu10=y[l-1]-b[2]-fi*y[l-2];
        uu11=y[l-1]-b[2]-fi*y[l-2];

        s00=1*(a0+a1*((uu00^2)/1)+delta*(uu00<=0)*((uu00^2)/1));
        s01=b[7]*(a0+a1*((uu01^2)/1)+delta*(uu01<=0)*((uu01^2)/1));
        s10=1*(a0+a1*((uu10^2)/b[7])+delta*(uu10<=0)*((uu10^2)/b[7]));
        s11=b[7]*(a0+a1*((uu11^2)/b[7])+delta*(uu11<=0)*((uu11^2)/b[7]));
        // CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
        ll00=(1/(sqrt(2*pi*s00))*exp(-(0.5/s00)*((y[l]-b[1]-fi*y[l-1])^2)));
        ll01=(1/(sqrt(2*pi*s01))*exp(-(0.5/s01)*((y[l]-b[2]-fi*y[l-1])^2)));
        ll10=(1/(sqrt(2*pi*s10))*exp(-(0.5/s10)*((y[l]-b[1]-fi*y[l-1])^2)));
        ll11=(1/(sqrt(2*pi*s11))*exp(-(0.5/s11)*((y[l]-b[2]-fi*y[l-1])^2)));
        llk=ll00*ksst[1]+ll01*ksst[2]+ll10*ksst[3]+ll11*ksst[4];
        ll=ll|ln(llk);
        // CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
        ksst=((ll00|ll01|ll10|ll11).*ksst)/llk;
        sst=sst~((ksst[1]+ksst[2])|(ksst[3]+ksst[4]));
        l=l+1;
    endo;
fp=sst1'~sst';

```



```

retp(ll);
endp;

proc(1)=loglikb(b);
local p,p0,p1,sst1,ll0,ll1,llk,ll,l,pp0,pp1,sst,n,j,ksst,ll00,ll01,ll10,ll11,s00,s01,s10,s11,a0,a1,fi, u00,
u10, u01,u11,uu00,uu01,uu10,uu11,delta;

n=1;
j=0;
a0=exp(b[3]);
a1=1/(1+exp(b[4]));
pp0=1/(1+exp(b[5]));
pp1=1/(1+exp(b[6]));
//g1=b[7]
delta=(2-2*a1)/(1+exp(b[9]));
fi=-1+2/(1+exp(b[8]));
// MATRICE DI TRANSIZIONE
p=(pp0~(1-pp0))|((1-pp1)~pp1);
// PROBABILITA' ERGODICHE
p0=(1-pp1)/(2-pp1-pp0);
p1=(1-pp0)/(2-pp1-pp0);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA'
sst1=p0|p1;
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=1/(sqrt(2*pi*a0))*exp(-(0.5/a0)*((y[1]-b[1])^2));
ll1=1/(sqrt(2*pi*b[7]*a0))*exp(-(0.5/(b[7]*a0))*((y[1]-b[2])^2));
llk=ll0*sst1[1]+ll1*sst1[2];
ll=ln(llk);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA' FILTRATE
sst=(sst1[1]*ll0/llk)|(sst1[2]*ll1/llk);
sst1=sst1~((p')*sst[.,cols(sst)]);
// PROBABILITA' PER L' APPROSSIMAZIONE DI KIM
ksst=(p[1,1]*sst[1,cols(sst)]|(p[1,2]*sst[1,cols(sst)]|(p[2,1]*sst[2,cols(sst)]|(p[2,2]*
sst[2,cols(sst)]);

```

```

u00=y[1]-b[1];
u01=y[1]-b[1];
u10=y[1]-b[2];
u11=y[1]-b[2];
s00=1*(a0+a1*((u00^2)/1)+delta*(u00<=0)*((u00^2)/1));
s01=b[7]*(a0+a1*((u01^2)/1)+delta*(u01<=0)*((u01^2)/1));
s10=1*(a0+a1*((u10^2)/b[7])+delta*(u10<=0)*((u10^2)/b[7]));
s11=b[7]*(a0+a1*((u11^2)/b[7])+delta*(u11<=0)*((u11^2)/b[7]));
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll00=(1/(sqrt(2*pi*s00))*exp(-(0.5/s00)*((y[2]-b[1]-fi*y[1])^2)));
ll01=(1/(sqrt(2*pi*s01))*exp(-(0.5/s01)*((y[2]-b[2]-fi*y[1])^2)));
ll10=(1/(sqrt(2*pi*s10))*exp(-(0.5/s10)*((y[2]-b[1]-fi*y[1])^2)));
ll11=(1/(sqrt(2*pi*s11))*exp(-(0.5/s11)*((y[2]-b[2]-fi*y[1])^2)));
llk=ll00*ksst[1]+ll01*ksst[2]+ll10*ksst[3]+ll11*ksst[4];
ll=ll*ln(llk);
// CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
ksst=((ll00|ll01|ll10|ll11).*ksst)/llk;
sst=sst~((ksst[1]+ksst[3])|(ksst[2]+ksst[4]));
    l=3;
    do while l<=rows(y);
        sst1=sst1~((p')*sst[:,cols(sst)]);
        // PROBABILITA' PER L' APPROSSIMAZIONE DI KIM
        ksst=(p[1,1]*sst[1,cols(sst)]|(p[1,2]*sst[1,cols(sst)]|(p[2,1]*sst[2,cols(sst)]|(p[2,2]*sst[2,c
        ols(sst)]));

uu00=y[l-1]-b[1]-fi*y[l-2];
uu01=y[l-1]-b[1]-fi*y[l-2];
uu10=y[l-1]-b[2]-fi*y[l-2];
uu11=y[l-1]-b[2]-fi*y[l-2];

s00=1*(a0+a1*((uu00^2)/1)+delta*(uu00<=0)*((uu00^2)/1));
s01=b[7]*(a0+a1*((uu01^2)/1)+delta*(uu01<=0)*((uu01^2)/1));
s10=1*(a0+a1*((uu10^2)/b[7])+delta*(uu10<=0)*((uu10^2)/b[7]));

```

```

s11=b[7]*(a0+a1*((uu11^2)/b[7])+delta*(uu11<=0)*((uu11^2)/b[7]));
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll00=(1/(sqrt(2*pi*s00))*exp(-(0.5/s00)*((y[l]-b[1]-fi*y[l-1])^2)));
ll01=(1/(sqrt(2*pi*s01))*exp(-(0.5/s01)*((y[l]-b[2]-fi*y[l-1])^2)));
ll10=(1/(sqrt(2*pi*s10))*exp(-(0.5/s10)*((y[l]-b[1]-fi*y[l-1])^2)));
ll11=(1/(sqrt(2*pi*s11))*exp(-(0.5/s11)*((y[l]-b[2]-fi*y[l-1])^2)));
llk=ll00*ksst[1]+ll01*ksst[2]+ll10*ksst[3]+ll11*ksst[4];
ll=ll*ln(llk);
// CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
ksst=((ll00|ll01|ll10|ll11).*ksst)/llk;
sst=sst~((ksst[1]+ksst[3])|(ksst[2]+ksst[4]));
l=l+1;
endo;
fp=sst1'~sst';
retp(sumc(ll));
endp;

```

8.4 Modello Bivariato

```

new;
cls;

//IMPORTIAMO I DATI
load x[446,2]=d:/dati_finali.txt;
ipi = x[:,1];
msci = x[:,2];
y=ipi~msci;
t=rows(y);

//SETTIAMO NUMERO DI STATI
s=2;

//CARICHIAMO LA LIBRERIA
library optmum,pgraph;
##include gradient.ext;
optset;
graphset;
_opmiter=200;
_opalgr=2; //5 Newton, =2 BFGS

//INIZIALIZZIAMO UN TEST SUL CALCOLO DELLA VEROSIMIGLIANZA
test={};

// INIZIALIZZAZIAMO LE PROBABILITÀ FILTRATE
fp={};

// INIZIALIZZAZIAMO I PARAMETRI
x0=1|-1|2|4|1|-1|2|4|0.25|0.25|0|0|0|0;

```



```
//RIPORTIAMO I RISULTATI
"RISULTATI";

// MATRICE DI TRANSIZIONE
"Probabilità di rimanere in un dato regime; standard errors; t - statistics";
stimef[9:10]~sqrt(dcov[9:10])~stimef[9:10]/sqrt(dcov[9:10]);

"Matrice di transizione";
p00=1/(1+exp(stime[9]));
p11=1/(1+exp(stime[10]));
tm=(p00~(1-p00))|((1-p11)~p11);
tm;

// PROBABILITA' SMUSSATE
pp=fp[.,1:s]';
fp=fp[.,s+1:2*s]';
cf=cols(fp);
sm=fp[.,cf];
l=cf-1;
do while l>=1;
    sm=((tm*(sm[.,1]/pp[.,l+1])).*(fp[.,l]))~sm;
    l=l-1;
endo;
sm=sm';

"Parametri per i 2 regimi";
stimef[1:8]~sqrt(dcov[1:8])~stimef[1:8]/sqrt(dcov[1:8]);

"Parametri autoregressivi";
stimef[11:14]~sqrt(dcov[11:14])~stimef[11:14]/sqrt(dcov[11:14]);

"Matrice parametri autoregressivi";
(stimef[11]~stimef[12])|(stimef[13]~stimef[14]);
```

```

"Probabilità smussate - stato 0";
xy(seqa(1,1,rows(sm)),sm[:,1]);
"Premere un tasto per continuare";
wait;
"Probabilità smussate - stato 1";
xy(seqa(1,1,rows(sm)),sm[:,2]);
end;

//PROCEDURE
proc(1)=loglik(b);
local mu0_ipi,mu0_msci,mu1_ipi,mu1_msci,p,p0,p1,sst1,ll0,ll1,llk,ll,l,pp0,pp1,sst,phi,u0,u1,u01,
sigma0_ipi,sigma1_ipi,sigma0_msci,sigma1_msci,sigma0,sigma1,mu0,mu1,fi11,fi12,fi21,fi22;

mu0_ipi=b[1];
mu1_ipi=b[2];
sigma0_ipi=exp(b[3]);
sigma1_ipi=exp(b[4]);
mu0_msci=b[5];
mu1_msci=b[6];
sigma0_msci=exp(b[7]);
sigma1_msci=exp(b[8]);
pp0=1/(1+exp(b[9]));
pp1=1/(1+exp(b[10]));
fi11=-1+2/(1+exp(b[11]));
fi12=-1+2/(1+exp(b[12]));
fi21=-1+2/(1+exp(b[13]));
fi22=-1+2/(1+exp(b[14]));
//VETTORE MEDIE
mu0=mu0_ipi~mu0_msci;
mu1=mu1_ipi~mu1_msci;
//MATRICE VARIANZE - COVARIANZE
sigma0=(sigma0_ipi~0)|(0~sigma0_msci);
sigma1=(sigma1_ipi~0)|(0~sigma1_msci);

```

```

//matrice CORRELAZIONI
phi=(fi11~fi12)|(fi21~fi22);
// MATRICE DI TRANSIZIONE
p=(pp0~(1-pp0))|(1-pp1)~pp1);
// PROBABILITA' ERGODICHE
p0=(1-pp1)/(2-pp1-pp0);
p1=(1-pp0)/(2-pp1-pp0);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA'
sst1=p0|p1;
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=((1/(sqrt(2*pi*det(sigma0))))*exp(-(0.5)*(y[1,]-mu0)*invpd(sigma0)*(y[1,]-mu0')));
ll1=((1/(sqrt(2*pi*det(sigma1))))*exp(-(0.5)*(y[1,]-mu1)*invpd(sigma1)*(y[1,]-mu1')));
llk=ll0*sst1[1]+ll1*sst1[2];
ll=ln(llk);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA' FILTRATE
sst=(sst1[1]*ll0/llk)|(sst1[2]*ll1/llk);
    l=2;
    do while l<=rows(y);
        sst1=sst1~((p)*sst[.,cols(sst)]);
        u0=y[l,]-b[1]~b[5])-(y[l-1,])*phi;
        u1=y[l,]-b[2]~b[6])-(y[l-1,])*phi;
        // CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
        ll0=ll0|((1/(sqrt(2*pi*det(sigma0))))*exp(-(0.5)*(u0)*invpd(sigma0)*u0'));
        ll1=ll1|((1/(sqrt(2*pi*det(sigma1))))*exp(-(0.5)*(u1)*invpd(sigma1)*u1'));
        llk=ll0[l]*sst1[1,l]+ll1[l]*sst1[2,l];
        ll=ll|ln(llk);
        //CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
        sst=sst~((sst1[1,l]*ll0[l]/llk)|(sst1[2,l]*ll1[l]/llk));
        l=l+1;
    endo;
fp=sst1'~sst';
test=(ll);
retp(-sumc(ll));
endp;

```

```

proc(1)=loglikc(b);
local mu0_ipi,mu0_msci,mu1_ipi,mu1_msci,p,p0,p1,sst1,ll0,ll1,llk,ll,l,pp0,pp1,sst,phi,u0,u1,u01,
sigma0_ipi,sigma1_ipi,sigma0_msci,sigma1_msci,sigma0,sigma1,mu0,mu1,fi11,fi12,fi21,fi22;

mu0_ipi=b[1];
mu1_ipi=b[2];
sigma0_ipi=exp(b[3]);
sigma1_ipi=exp(b[4]);
mu0_msci=b[5];
mu1_msci=b[6];
sigma0_msci=exp(b[7]);
sigma1_msci=exp(b[8]);
pp0=1/(1+exp(b[9]));
pp1=1/(1+exp(b[10]));
fi11=-1+2/(1+exp(b[11]));
fi12=-1+2/(1+exp(b[12]));
fi21=-1+2/(1+exp(b[13]));
fi22=-1+2/(1+exp(b[14]));
//VETTORE MEDIE
mu0=mu0_ipi~mu0_msci;
mu1=mu1_ipi~mu1_msci;
//MATRICE VARIANZE - COVARIANZE
sigma0=(sigma0_ipi~0)|(0~sigma0_msci);
sigma1=(sigma1_ipi~0)|(0~sigma1_msci);
//matrice CORRELAZIONI
phi=(fi11~fi12)|(fi21~fi22);
// MATRICE DI TRANSIZIONE
p=(pp0~(1-pp0))|((1-pp1)~pp1);
// PROBABILITA' ERGODICHE
p0=(1-pp1)/(2-pp1-pp0);
p1=(1-pp0)/(2-pp1-pp0);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA'
sst1=p0|p1;

```

```

// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=((1/(sqrt(2*pi*det(sigma0))))*exp(-(0.5)*(y[1,]-mu0)*invpd(sigma0)*(y[1,]-mu0')));
ll1=((1/(sqrt(2*pi*det(sigma1))))*exp(-(0.5)*(y[1,]-mu1)*invpd(sigma1)*(y[1,]-mu1')));
llk=ll0*sst1[1]+ll1*sst1[2];
ll=ln(llk);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA' FILTRATE
sst=(sst1[1]*ll0/llk)|(sst1[2]*ll1/llk);
    l=2;
    do while l<=rows(y);
        sst1=sst1~((p')*sst[.,cols(sst)]);
        u0=y[l,]-(b[1]~b[5])-(y[l-1,])*phi;
        u1=y[l,]-(b[2]~b[6])-(y[l-1,])*phi;
        // CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
        ll0=ll0|((1/(sqrt(2*pi*det(sigma0))))*exp(-(0.5)*(u0)*invpd(sigma0)*u0'));
        ll1=ll1|((1/(sqrt(2*pi*det(sigma1))))*exp(-(0.5)*(u1)*invpd(sigma1)*u1'));
        llk=ll0[l]*sst1[1,l]+ll1[l]*sst1[2,l];
        ll=ll|ln(llk);
        //CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
        sst=sst~((sst1[1,l]*ll0[l]/llk)|(sst1[2,l]*ll1[l]/llk));
        l=l+1;
    endo;
fp=sst1'~sst';
retp(ll);
endp;

proc(1)=loglikb(b);
local mu0_ipi,mu0_msci,mu1_ipi,mu1_msci,p,p0,p1,sst1,ll0,ll1,llk,ll,l,pp0,pp1,sst,phi,u0,u1,u01,
sigma0_ipi,sigma1_ipi,sigma0_msci,sigma1_msci,sigma0,sigma1,mu0,mu1,fi11,fi12,fi21,fi22;

mu0_ipi=b[1];
mu1_ipi=b[2];
sigma0_ipi=exp(b[3]);
sigma1_ipi=exp(b[4]);
mu0_msci=b[5];

```

```

mu1_msci=b[6];
sigma0_msci=exp(b[7]);
sigma1_msci=exp(b[8]);
pp0=1/(1+exp(b[9]));
pp1=1/(1+exp(b[10]));
fi11=-1+2/(1+exp(b[11]));
fi12=-1+2/(1+exp(b[12]));
fi21=-1+2/(1+exp(b[13]));
fi22=-1+2/(1+exp(b[14]));
//VETTORE MEDIE
mu0=mu0_ipi~mu0_msci;
mu1=mu1_ipi~mu1_msci;
//MATRICE VARIANZE - COVARIANZE
sigma0=(sigma0_ipi~0)|(0~sigma0_msci);
sigma1=(sigma1_ipi~0)|(0~sigma1_msci);
//matrice CORRELAZIONI
phi=(fi11~fi12)|(fi21~fi22);
// MATRICE DI TRANSIZIONE
p=(pp0~(1-pp0))|((1-pp1)~pp1);
// PROBABILITA' ERGODICHE
p0=(1-pp1)/(2-pp1-pp0);
p1=(1-pp0)/(2-pp1-pp0);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA'
sst1=p0|p1;
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=((1/(sqrt(2*pi*det(sigma0))))*exp(-(0.5)*(y[1,]-mu0)*invpd(sigma0)*(y[1,]-mu0)));
ll1=((1/(sqrt(2*pi*det(sigma1))))*exp(-(0.5)*(y[1,]-mu1)*invpd(sigma1)*(y[1,]-mu1)));
llk=ll0*sst1[1]+ll1*sst1[2];
ll=ln(llk);
// INIZIALIZZAZIONE PROBABILITA' FILTRATE
sst=(sst1[1]*ll0/llk)|(sst1[2]*ll1/llk);
l=2;
do while l<=rows(y);
sst1=sst1~((p')*sst[.,cols(sst)]);

```

```

u0=y[l,.]-(b[1]~b[5])-(y[l-1,.])*phi;
u1=y[l,.]-(b[2]~b[6])-(y[l-1,.])*phi;
// CALCOLO VEROSIMIGLIANZA
ll0=ll0|((1/(sqrt(2*pi*det(sigma0))))*exp(-(0.5)*(u0)*invpd(sigma0)*u0'));
ll1=ll1|((1/(sqrt(2*pi*det(sigma1))))*exp(-(0.5)*(u1)*invpd(sigma1)*u1'));
llk=ll0[l]*sst1[1,l]+ll1[l]*sst1[2,l];
ll=ll|ln(llk);
//CALCOLO PROBABILITA' FILTRATE P[s(t)|t] P[s(t),s(t-1)|t]
sst=sst~((sst1[1,l]*ll0[l]/llk)|(sst1[2,l]*ll1[l]/llk));
l=l+1;
endo;
fp=sst1'~sst';
retp(sumc(ll));
endp;

```

BIBLIOGRAFIA

L. Bauwens, A. Preminger, J. V. K. Rombouts, “*Regime Switching GARCH models*”, Discussion Paper 06-05, University of Negev (2006).

M. Billio, M. Caporin e G. Cazzavillan, “*Dating Euro15 monthly business cycle jointly using GDP and IPI*”, Working paper 2004.08, Department of Economics , University Ca’ Foscari Venezia (2004).

M. Billio, S. Di Sanzo, “*Granger-Casuality in Markov Switching Models*”, Working Paper, Department of Economics, Università Ca’ Foscari di Venezia, (2006).

F. Black, “*Studies in stock price volatility changes*”, American Statistical Association (1976), pag. 177-181

T. Bollerslev, “*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*”, Journal of Econometrics, Vol. 31 (1986), pag. 307-327.

T. Bollerslev, R. Y. Chou, K. F. Kroner, “*ARCH Modelling in Finance: a Review of the Theory and Empirical Evidence*”, Journal of Econometrics, Vol. 52 (1992), pag. 5-59.

J. Brocato, S. Steed, “*Optimal Asset Allocation Over the Business Cycle*”, The Financial Review, Vol. 33 (1998), pag. 129-148.

C. Brunetti, R. S. Mariano, C. Scotti, A. H. H. Tan, “*Markov Switching GARCH Models of Currency Turmoil in Southeast Asia*”, International Finance Discussion Papers, Board of Governors of the Federal Reserve System (2007).

J. Cai, “*A Markov Model of Switching – Regime ARCH*”, Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 12, No. 3 (luglio 1994), pag. 309-316.

N. F. Chen, R. Roll, S. A. Ross, “*Economic Forces and the Stock Market*”, The Journal of Business, Vol. 59, No. 3 (luglio 1986), pag. 383-403.

F. X. Diebold, G. D. Rudebusch, “*Measuring Business Cycle: a Modern Perspective*”, The Review of Economics and Statistics, Vol. 78, No. 1 (febbraio 1996), pag. 67-77.

D. van Dijk, T. Terasvirta, P. H. Franses, “*Smooth Transition Autoregressive Models. A Survey of Recent Developments*”, Econometrics Reviews, Vol.21, No.1 (2002), pag.1-47

J. M. Durland, T. H. McCurdy, “*Duration – Dependent Transitions in a Markov Model of U.S. GNP Growth*”, Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 12 (1994), pag. 279-288.

R. F. Engle, “*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*”, Econometrica, Vol. 50, No. 4 (luglio 1982), pag. 987-1007.

E. F. Fama, “*Stock returns, Expected returns, and Real Activity*”, The Journal of Finance, Vol. 45, No. 4 (settembre 1990), pag. 1089-1108.

A. J. Filardo, “*Business – Cycle Phases and Their Transitional Dynamics*”, Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 12, No. 3 (luglio 1994), pag. 299-308.

E. Ghysels, “*A Time Series Model with Periodic Stochastic Regime Switching*”, Mimeograph, University of Montreal (1993).

L. Glosten, R. Jagannathan, D. Runkle, “*Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks*”, Journal of Finance, Vol. 48 (1993), pag 1779-1801.

T. H. Goodwin, “*Business - Cycle Analysis with a Markov - Switching Model*”, Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 11, No. 3 (luglio 1993), pag. 331-339.

J. D. Hamilton, “*Time Series Analysis*”, (1994), Cap. 5, 14, 22.

- J. D. Hamilton**, “*A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationarity Time Series and the Business Cycle*”, *Econometrica*, Vol. 57, No. 2 (marzo 1989), pag. 357-384.
- J. D. Hamilton, G. Lin**, “*Stock Market Volatility and the Business Cycle*”, *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 11, No. 5 (settembre – ottobre 1996), pag. 573-593.
- J. D. Hamilton, R. Susmel**, “*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime*”, *Journal of Econometrics*, Vol. 64 (1994), pag. 307-333.
- C. J. Kim, C. R. Nelson**, “*State-Space Models with Regime Switching*”, (1999), Cap.3, 4, 5.
- F. Klaassen**, “*Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime-Switching GARCH*”, *Empirical Economics*, Vol. 27 (2002), pag. 363-394.
- H. M. Krolzig**, “*Markov-Switching Vector Autoregression*”, (1997), Cap. 1, 3, 6, 11.
- J. Marcucci**, “*Forecasting Stock Market Volatility with Regime – Switching GARCH Models*”, *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, Vol 9 (2005), pag. 1145-1145.
- G. Perez-Quiros, A. Timmermann**, “*Business Cycle Asymmetries in Stock Returns: Evidence from Higher Order Moments and Conditional Densities*”, *Journal of Econometrics*, Vol. 103 (2001), pag. 259-306.
- R. Rabemananjara, J. M. Zakoian**, “*Threshold ARCH models and asymmetries in volatility*”, *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 8 (1993), pag. 31-49.
- W. Schwert**, “*Business Cycle, Financial Crises and Stock Volatility*”, *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, No. 31 (1989).
- R. Susmel**, “*Switching Volatility in International Equity Markets*”, Working paper, University of Huston (1994).
- J. M. Zakoian**, “*Threshold heteroskedastic models*”, Technical report, INSEE (1991).

RINGRAZIAMENTI

Vorrei innanzitutto ringraziare il mio relatore, il Professor Massimiliano Caporin, per avermi seguito e pazientemente consigliato nella stesura di questa tesi.

Desidero inoltre ringraziare i miei genitori, per essersi sempre comportati come dei veri e propri modelli, e per avermi aiutato, consigliato e sostenuto in ogni situazione.

Ringrazio poi la mia ragazza Martina, per avermi accompagnato in questo biennio, facendomi maturare, crescere, divertire e per essermi stata d'appoggio e di conforto in ogni momento.

Non da ultimi vorrei ricordare i miei tanti amici, vecchi e nuovi, per avermi aiutato a divertirmi quando ce n'era la possibilità, e per essermi sempre stati accanto quando ce n'era bisogno.

Ringrazio infine tutti quelli che mi conoscono, per essermi sempre stati vicini: mio fratello Mattia, i miei zii, cugini e nonni.