

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

Corso di Laurea in Fisica

**GENERAZIONE DI ONDE
GRAVITAZIONALI
POST-MERGING NELLA COALESCENZA
DI SISTEMI BINARI
DI BUCHI NERI**

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Jean-Pierre Zendri**

Laureando:
Alvise Pizzella

ANNO ACCADEMICO 2015/2016

A nonno Guido..

Indice

Introduzione	4
1 Onde Gravitazionali e Principali Proprietà	5
2 Il Segnale Gravitazionale Generato da un Sistema Binario di Oggetti Compatti	9
3 Modi Quasi-Normali di Buchi Neri di Schwarzschild	11
3.1 Buchi Neri di Schwarzschild	11
3.2 Modi Quasi-Normali di un Buco Nero di Schwarzschild	11
3.2.1 Derivazione delle Equazioni di Regge-Wheeler e Zerilli	12
3.2.2 Studio delle Equazioni d'Onda	18
3.3 Gli Autovalori delle Equazioni d'Onda	22
3.3.1 Studio dell'Equazione Indipendente dal Tempo	22
3.3.2 Metodo WKB	22
3.3.3 Metodo delle Frazioni Continue	23
3.3.4 Studio dell'Equazione Dipendente dal Tempo	24
3.4 Buchi Neri di Kerr	25
3.4.1 Modi Quasi-Normali per Buchi Neri di Kerr	26
4 Rivelatori di Onde Gravitazionali	28
4.1 Lo Sfasamento Ottico	28
4.2 Gli Interferometri LIGO e VIRGO	30
4.2.1 L'Apparato	30
4.2.2 Sorgenti di Rumore	31
5 L'Evento GW150914	32
5.1 Rivelazione e Prima Stima dei Parametri	32
5.2 Analisi del Ringdown	34
6 Conclusioni	36
A L'Approssimazione WKB ed l'Adattamento di Schutz e Will	39
A.1 L'Approssimazione WKB	39
A.2 Effetto Tunnel	41
A.3 Il Metodo Semianalitico di Schutz e Will	43
Bibliografia	44

Introduzione

" The black holes of nature are the most perfect macroscopic objects there are in the universe: the only elements in their construction are our concepts of space and time."

Subrahmanyan Chandrasekhar

I buchi neri sono l'oggetto macroscopico più semplice dell'universo. Tutto ciò che si trova all'interno del loro orizzonte diviene inaccessibile. Noi possiamo osservare soltanto la metrica dello spaziotempo all'esterno di essi, che dipende unicamente da massa, momento angolare e (in generale) carica.

Questa tesi propone lo studio dei buchi neri perturbati. La matematica suggerisce che un buco nero discostato dal suo equilibrio dovrebbe tendervi evolvendo secondo dei modi quasi-normali, ovvero delle oscillazioni, smorzate esponenzialmente a causa dell'emissione di radiazione gravitazionale. Per il *no-hair theorem* (il *teorema senza-capelli*) la loro frequenza ed il loro tempo di smorzamento devono dipendere, nel caso di Kerr, unicamente dalla massa e dal momento angolare del buco nero. Pertanto, la rivelazione di uno spettro di modi quasi-normali caratterizzati unicamente da due parametri darebbe la prova definitiva che l'oggetto individuato sia effettivamente un *buco nero*.

I risultati ottenuti dalla teoria verranno infine confrontati con i risultati dell'evento GW150914 osservato da Advanced LIGO.

Capitolo 1

Onde Gravitazionali e Principali Proprietà

Le equazioni di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

sono non lineari, e la loro risoluzione analitica è in generale estremamente complessa. Tuttavia una loro soluzione può essere cercata in casi particolari, ad esempio in condizioni di simmetria sferica, ottenendo così come soluzione la metrica di Schwarzschild, oppure in approssimazione di campo debole: se una regione di spazio è minimamente curva, allora si può trovare un sistema di coordinate x^μ nel quale la metrica assume la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

(dove $\eta_{\mu\nu}$ indica come di consueto la metrica piatta di Minkowski $diag(-1, 1, 1, 1)$), $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ e le derivate parziali di primo grado e superiori di h devono essere infinitesime.

Espandendo in approssimazione di campo debole le (1.1) e trascurando i termini di ordine superiore al primo in h , si ottengono le equazioni di Einstein linearizzate:

$$\partial_\nu \partial_\mu h + \square^2 h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\rho h_\mu^\rho - \partial_\mu \partial_\rho h_\nu^\rho - \eta_{\mu\nu}(\square^2 h - \partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma}) = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

dove $h = h_\rho^\rho$. Nonostante la complessità apparentemente aumentata, queste equazioni si possono ulteriormente semplificare introducendo la traccia inversa di $h_{\mu\nu}$: $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h_\rho^\rho$, $\bar{h}_\rho^\rho = -h_\rho^\rho$, ottenendo:

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} - \partial_\nu \partial_\rho \bar{h}_\mu^\rho - \partial_\mu \partial_\rho \bar{h}_\nu^\rho = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

Si definisce una *trasformazione infinitesima di coordinate* una trasformazione del tipo

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \quad (1.5)$$

dove le quantità $\xi^\mu(x)$ sono 4 funzioni arbitrarie della posizione dello stesso ordine di grandezza di h , il cui effetto può essere ignorato dovunque eccetto nella metrica. Si dimostra facilmente [1] che sotto questa trasformazione $h_{\mu\nu}$ si trasforma come:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad (1.6)$$

dove $\xi_\mu = \eta_{\mu\nu} \xi^\nu$. In queste condizioni, $h_{\mu\nu}$ può essere pensato, oltre che come perturbazione della metrica, come un campo tensoriale definito sulla metrica Minkowskiana di sfondo, ed in quest'ottica questa trasformazione è l'analogo di una *trasformazione di gauge* in elettromagnetismo.

Ricordando come trasformava $h_{\mu\nu}$ per trasformazioni infinitesime di coordinate (1.6), si ricava che la sua traccia inversa trasforma come

$$\bar{h}'^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu + \eta^{\mu\nu} \partial_\sigma \xi^\sigma \quad (1.7)$$

Si ricorda che, trascurando termini di ordine superiore in h , $\bar{h}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\sigma\nu} \bar{h}_{\rho\sigma}$. Derivando la (1.7) si trova quindi che

$$\partial_\nu \bar{h}'^{\mu\nu} = \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square^2 \xi^\mu \quad (1.8)$$

Scegliendo opportunamente il vettore $\xi^\mu(x)$ in maniera tale che $\square^2 \xi^\mu(x) = \partial_\rho \bar{h}^{\rho\mu}$, si può sempre ridursi al caso $\partial_\mu \bar{h}'^{\mu\nu} = 0$. Questa scelta di gauge viene detta *gauge di Lorentz*, e semplifica ulteriormente le equazioni:

$$\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (1.9)$$

Si noti che è ancora possibile eseguire trasformazioni che mantengono invariata la condizione di gauge scelta. Tali trasformazioni sono uguali alla precedente (1.8), ma questa volta al posto di

x^μ si ha un altro vettore ζ^μ tale che $\square^2 \zeta^\mu = 0$. Queste trasformazioni sono dette *trasformazioni di gauge residua*. Andando infine a cercare delle *soluzioni nel vuoto*, dove $T^{\mu\nu} = 0$ le (1.9) si riducono a:

$$\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \quad (1.10)$$

In questo ultimo caso l'equazione è risolta da *onde piane* del tipo

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = A^{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (1.11)$$

dove $A^{\mu\nu}$ sono costanti (in generale complesse) di un tensore simmetrico (ovvero a priori 10 componenti indipendenti), mentre k_σ sono le componenti reali di un vettore. In generale, la soluzione della (1.10) è data da una sovrapposizione delle (1.11).

La condizione $\partial_\mu h'^{\mu\nu} = 0$ comporta che $k_\mu A^{\mu\nu} = 0$, mentre la stessa (1.10) comporta che $k_\sigma k^\sigma = 0$, ovvero k è un vettore nullo. Il vettore d'onda è $k^\mu = \eta^{\mu\nu} k_\nu$, e le sue componenti sono convenzionalmente indicate come $[k^\mu] = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$, ed il fatto che k^μ sia nullo comporta che $\omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2$, e quindi velocità di gruppo e velocità di fase dell'onda gravitazionale sono pari a c .

Infine, considerando un'onda gravitazionale che si propaga lungo l'asse z , e pertanto avente vettore d'onda $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ si possono fissare le effettive componenti indipendenti di $A^{\mu\nu}$ (4 *trasformazioni di gauge* e 4 *trasformazioni di gauge residua* riducono da 10 a 2 il numero di gradi di libertà) trovando:

$$A_{TT}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Introducendo i due tensori di polarizzazione:

$$\varepsilon_+^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_\times^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

si può infine scrivere che

$$A_{TT}^{\mu\nu} = a\varepsilon_+^{\mu\nu} + b\varepsilon_\times^{\mu\nu} \quad (1.14)$$

dove TT indica la scelta del *Traceless-Transverse gauge*. Qualsiasi polarizzazione di un'onda gravitazionale può quindi essere ottenuta sovrapponendo due polarizzazioni fondamentali, dette rispettivamente h_+ e h_\times , con ampiezza e fase arbitraria. I rispettivi effetti su un insieme di particelle disposte su un anello giacente su un piano perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda gravitazionale durante un periodo dell'onda sono mostrati in figura 1.1.

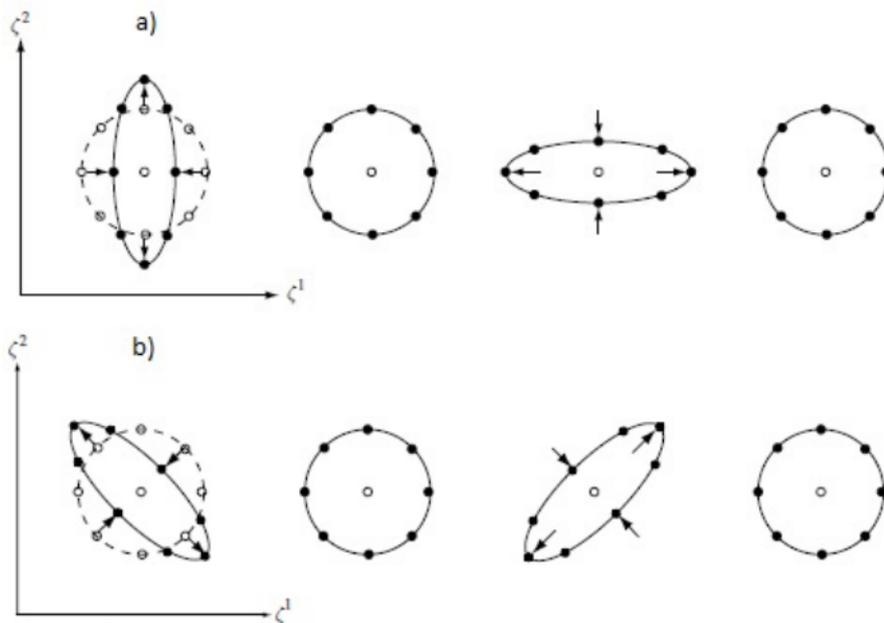


Figura 1.1: Gli effetti su un anello di materia dei due stati di polarizzazione delle onde gravitazionali: lo stato h_+ (a) e lo stato h_\times (b) [1]

Andando invece a cercare la soluzione delle Equazioni di Einstein linearizzate (1.9) in presenza di un tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$ diverso da zero, la soluzione generale è

$$\bar{h}^{\mu\nu}(ct, \vec{x}) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\mu\nu}(ct - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (1.15)$$

Nella maggior parte dei casi questa equazione restituisce soluzioni analiticamente intrattabili. Tuttavia, se la sorgente considerata ha dimensioni piccole rispetto alla distanza di osservazione, si può procedere con lo *sviluppo in multipoli*, che permette di ottenere una soluzione più semplice. Si può infatti espandere in serie di Taylor il termine

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} &= \frac{1}{r} + (-y^i)\partial_i \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2!}(-y^i)(-y^j)\partial_i\partial_j \left(\frac{1}{r}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{r} + y^i \frac{x_i}{r^3} + y^i y^j \left(\frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}\right) + \dots \end{aligned} \quad (1.16)$$

dove $r = |\vec{x}|$ convenzionalmente sono stati usati indici latini per indicare le sole componenti spaziali. In questo modo la soluzione (1.15) può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \bar{h}^{\mu\nu}(ct, \vec{x}) &= -\frac{4G}{c^4} \left[\frac{1}{r} \int T^{\mu\nu}(ct_r, \vec{y}) d^3\vec{y} + \frac{x_i}{r^3} \int T^{\mu\nu}(ct_r, \vec{y}) y^i d^3\vec{y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \int T^{\mu\nu}(ct_r, \vec{y}) y^i y^j d^3\vec{y} + \dots \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

dove è stato introdotto il *tempo ritardato* $ct_r = ct - |\vec{x} - \vec{y}|$. Poiché ogni momento di multipolo è soppresso di un fattore $\frac{1}{r}$ rispetto al precedente, a grandi distanze la dinamica del sistema è ben approssimata dai primi termini dell'espansione.

Nel caso in cui il punto di osservazione si trova ad una distanza dalla sorgente molto maggiore dell'estensione della sorgente stessa, si può troncare l'espansione al primo termine (e quindi anche $ct_r \sim ct - r$), ottenendo l'*approssimazione di sorgente compatta*

$$\bar{h}^{\mu\nu}(ct, \vec{x}) = -\frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \int T^{\mu\nu}(ct_r, \vec{y}) d^3\vec{y} \quad (1.18)$$

Nel caso in questione si può approssimare $T^{\mu\nu} \approx \rho u^\mu u^\nu$ e ricordando che vale $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0^1$ da essa si può ricavare che:

$$\int T^{ij} d^3\vec{y} = \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt'^2} \int T^{00} y^i y^j d^3\vec{y} \quad (1.19)$$

dove $ct' = ct - r$. Si ottiene così la *formula di quadrupolo*:

$$\bar{h}^{ij}(ct, \vec{x}) = -\frac{2G}{c^6 r} \left[\frac{d^2}{dt'^2} I^{ij}(ct') \right]_r \quad (1.20)$$

dove con $[]_r$ si intende che la quantità viene valutata all'istante ct_r . Nella (1.20) è stata inoltre definito il tensore *momento di quadrupolo*

$$I^{ij}(ct) = \int T^{00}(ct, \vec{y}) y^i y^j d^3\vec{y} \quad (1.21)$$

Avendo approssimato $T^{\mu\nu} \approx \rho u^\mu u^\nu$, si ha che $T^{00} \approx \rho c^2$, e la (1.21) può essere riscritta come

$$I^{ij}(ct) = c^2 \int \rho(ct, \vec{y}) y^i y^j d^3\vec{y} \quad (1.22)$$

Infine, la radiazione gravitazionale sottrae energia al sistema che la emette. Si trova per la perdita di energia a causa dell'emissione di onde gravitazionali la seguente relazione [1]:

$$\frac{dE}{dt} = -L_{GW} = -\frac{G}{5c^9} \left[\frac{d^3}{dt^3} J^{ij} \frac{d^3}{dt^3} J_{ij} \right]_r \quad (1.23)$$

dove J_{ij} è il tensore *momento di quadrupolo ridotto* definito come $J_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} I_k^k$, evidentemente a traccia nulla.

Le formule (1.20, 1.23) sono utilizzate per esempio per calcolare in prima approssimazione ampiezza ed energia dell'onda gravitazionale di un sistema binario. Andando oltre l'approssimazione $ct - |\vec{x} - \vec{y}| \sim ct - r$ nella soluzione compaiono altri termini di ordine $\left(\frac{v}{c}\right)^{2N}$ e $\left(\frac{r_s}{r}\right)^N$. Questi termini sono chiamati termini PN di ordine N dell'espansione.

Le equazioni di Einstein (1.1) sono legate ad un ad un fattore $\frac{8G}{c^4} \approx 6.59 \cdot 10^{-44}$ e quindi ci si aspetta di trovare segnali molto piccoli. Per trovare segnali di ampiezza apprezzabile bisogna avere a che fare con sistemi aventi masse e velocità. Per questo si vanno a cercare sorgenti astrofisiche quali *buchi neri*, *stelle di neutroni* e *sistemi binari* di stelle oltre che di questi ultimi. In ogni caso, i segnali così generati hanno una ampiezza a terra dell'ordine di $h \sim 10^{-20}$.

¹Questa proprietà vale nel caso linearizzato. La proprietà generale è $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$

Capitolo 2

Il Segnale Gravitazionale Generato da un Sistema Binario di Oggetti Compatti

Secondo quanto già visto, un sistema binario di masse orbitanti attorno al proprio baricentro emette onde gravitazionali. L'emissione di queste onde causa al sistema una perdita di energia, che si traduce in una progressiva diminuzione della distanza relativa tra i due e quindi del raggio dell'orbita. L'ampiezza delle onde generate cresce al diminuire della distanza e quindi all'aumentare della velocità di rotazione, dacché la distanza tra i due oggetti diminuisce sempre più rapidamente durante il processo. Questa fase di progressivo avvicinamento è detta fase di *spiraleggiamento*, e si conclude con la *Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)*. Dopo l'ultima orbita stabile si ha la coalescenza dei due oggetti, durante la quale il segnale raggiunge l'ampiezza massima. Questa fase viene detta fase di *merger*. Nel caso in cui l'unico oggetto finale generato sia un *buco nero* (che sarà l'oggetto di questa discussione), tale oggetto si troverà inizialmente in uno stato perturbato, uno stato di *ringing*, ovvero starà vibrando assumendo forme allungate ed appiattite. Tali vibrazioni saranno dei *modi quasi-normali* smorzati esponenzialmente a causa dell'emissione di radiazione gravitazionale.

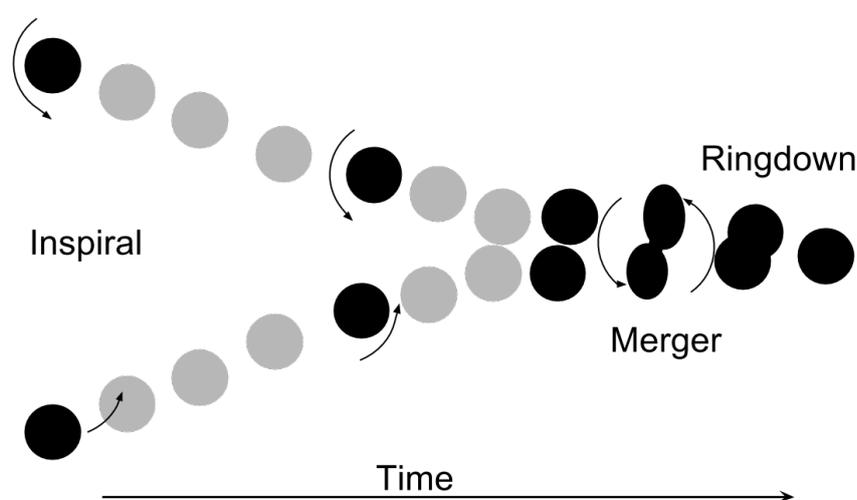


Figura 2.1: Le fasi di Spiraleggiamento, Merger e Ringdown [8]

Ma quale è la forma del segnale gravitazionale che ci si aspetta di vedere emesso da questo tipo di processo? Come premesso, questo segnale sarà una sequenza del segnale

prodotto durante i tre *regimi* elencati. Durante la prima fase di *spiraleggiamento* il segnale emesso può essere agevolmente ricavato tramite l'integrazione delle equazioni linearizzate di Einstein (1.9), attraverso le già ricavate (1.20, 1.21). Utilizzando l'approssimazione di sorgene compatta (1.20) si può facilmente ricavare [2, equazione 4.3]

$$h_+(t) = \frac{4}{r} \left(\frac{GM_{chirp}}{c^2} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\pi\nu_{og}}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \cos(2\pi\nu_{og}t_{ret} + 2\phi) \quad (2.1)$$

$$h_\times(t) = \frac{4}{r} \left(\frac{GM_{chirp}}{c^2} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\pi\nu_{og}}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \cos\theta \sin(2\pi\nu_{og}t_{ret} + 2\phi) \quad (2.2)$$

(dove r, θ, ϕ sono le consuete coordinate sferiche) che dipendono solo dalla massa chirp $M_{chirp} = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{5}}}$. Si noti che $\omega_{og} = 2\omega_{periodo}$. Studiando le prime fasi dello spiraleggiamento si può ottenere M_{chirp} .

La fase di *merging* è invece più complicata, e per ricavare il segnale da essa emesso non è possibile procedere per via analitica: è necessario integrare numericamente le equazioni complete di Einstein (1.1), poiché in questa fase la curvatura è elevata. Stimando la frequenza di merging si può stimare il raggio a chi è avvenuto (R_{ISCO}) e confrontarlo con [2, equazione 4.8]

$$R_{ISCO} = \frac{6G(m_1 + m_2)}{c^2} \quad (2.3)$$

Dalle conoscenze di questi due parametri si possono stimare separatamente m_1 ed m_2 . L'ordine PN successivo dà informazioni sul rapporto $\frac{m_1}{m_2}$ e la proiezione dello spin del buco nero sul momento angolare orbitale. La completa informazione sullo spin del buco nero richiede infine di andare ad ordini PN successivi.

Il segnale emesso nell'ultima fase, il *ringdown*, sarà nello specifico oggetto della discussione del capitolo seguente. La forma del segnale generato prende il nome di forma d'onda IMR (*Inspiral-Merger-Ringdown*) ed è mostrato in figura 2.2. Un migliore dettaglio del ringdown è mostrato in Figura 2.3.

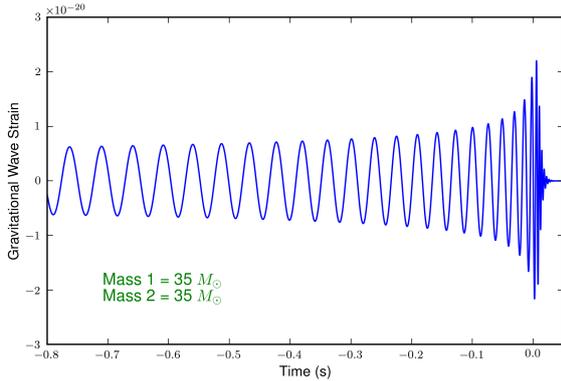


Figura 2.2: Forma d'onda IMR [8]

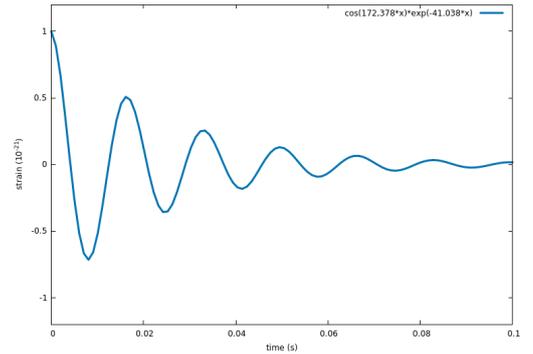


Figura 2.3: Ringdown per un buco nero di $70 M_\odot$ secondo il modo $l = 2, n = 0$

Capitolo 3

Modi Quasi-Normali di Buchi Neri di Schwarzschild

3.1 Buchi Neri di Schwarzschild

Le Equazioni di Einstein (1.1) trovano una soluzione semplice nel caso *statico a simmetria sferica* nello spazio vuoto circondante un oggetto massivo, e la metrica in questo caso assume la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.1)$$

(con $\mu = \frac{GM_\bullet}{c^2}$, e M_\bullet massa dell'oggetto). Tale metrica assume un significato fino alla superficie dell'oggetto sferico, ovvero fino a dove le equazioni di campo sono state risolte nel vuoto. Chiaramente, i coefficienti della metrica divergono a $r = 2\mu$, quantità che viene detta raggio di Schwarzschild r_s . Se un oggetto massivo si trova ad essere confinato all'interno della sfera avente raggio r_s , allora si ha a che fare con un *Buco Nero di Schwarzschild*, ovvero un buco nero perfettamente fermo non rotante, e ad $r = r_s$ si forma un *orizzonte degli eventi*. L'unico parametro da cui la metrica dipende è quindi la massa M_\bullet del buco nero, e sarà anche l'unico parametro rilevante per chi osserva il sistema. Tutte le informazioni riguardanti la materia che compone il buco nero o ciò che vi sta cadendo dentro sono racchiuse all'interno del suo orizzonte degli eventi, divenendo inaccessibili. Con queste premesse, i buchi neri diventano oggetti puramente geometrici nello spazio-tempo.

3.2 Modi Quasi-Normali di un Buco Nero di Schwarzschild

La (3.1) è una possibile soluzione statica delle Equazioni di Einstein (1.1). Tuttavia, quale sarebbe invece il comportamento di un buco nero perturbato, ovvero minimamente discostato dal suo stato di equilibrio? Si trova che in questo caso il buco nero eccitato evolve secondo dei *modi quasi normali*¹, ovvero oscillazioni a frequenze discrete e smorzate esponenzialmente, dove frequenze e tempi di smorzamento dipendono unicamente dai parametri del buco nero (e sono quindi indipendenti dal tipo di perturbazione). Trattandosi di un buco nero, non abbiamo informazioni su cosa stia oscillando all'interno del suo orizzonte degli eventi, e tali oscillazioni riguardano unicamente la metrica dello spazio tempo all'esterno dell'orizzonte.

¹Come verrà chiarito più avanti, per *modi quasi normali* (*quasi-normal modes*, QNM) si intendono le soluzioni di un'equazione d'onda risolta con particolari condizioni al contorno.

3.2.1 Derivazione delle Equazioni di Regge-Wheeler e Zerilli

Perturbazioni di uno spazio curvo Per risolvere le Equazioni di Einstein (1.1) in approssimazione di campo debole, come già visto, si espande in genere la metrica attorno alla metrica piatta $\eta_{\mu\nu}$, come già visto nella (1.2). In questo caso si ha una definizione chiara di quale sia lo sfondo (lo spazio-tempo nello *sfondo* è piatto) e si definisce di conseguenza *onda gravitazionale* qualsiasi cosa lo curvi². Tuttavia, dovendo andare a studiare l'emissione di onde vicino ad una sorgente, bisogna essere in grado di distinguere anche una perturbazione in uno spazio dinamico e non più piatto ma curvo. Il procedimento già espresso precedente può essere generalizzato: partendo dall'espansione (1.2), si può scrivere

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x) \quad (3.2)$$

dove $\bar{g}_{\mu\nu}$ è la metrica di sfondo, mentre il tensore $h_{\mu\nu}$ è soggetto alle stesse condizioni della (1.2), ovvero $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ e che le sue derivate parziali di primo grado e superiori siano sufficientemente piccole. In questa scrittura bisogna però fare una attenta distinzione tra cosa sia lo sfondo e cosa sia la perturbazione (poiché siamo noi a sceglierlo!). La distinzione più naturale può essere definita analizzando una differenza tra le scale di variazione: nel caso spaziale, se la metrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ ha una tipica scala di variazione spaziale L_B , le piccole perturbazioni di lunghezza d'onda λ saranno tali che $\lambda \ll L_B$, oppure nel caso temporale si vanno a cercare perturbazioni di frequenza f molto maggiori della frequenza di variazione dello sfondo f_B ($f \gg f_B$).

In questo caso, nella (3.2) la metrica di sfondo $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ potrebbe essere una qualsiasi soluzione delle Equazioni di Einstein (1.1), come ad esempio la metrica di Schwarzschild (3.1), che verrà usata d'ora in poi.

Si procede quindi linearizzando le Equazioni di Einstein, e tenendo unicamente i termini di primo ordine in h . Ciò permette ad esempio di alzare ed abbassare gli indici utilizzando la metrica di sfondo $\bar{g}_{\mu\nu}$:

$$h^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}^{\beta\nu} h_{\alpha\beta} \quad (3.3)$$

dalla (3.3) discende anche che

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + o(h^2) \quad (3.4)$$

Si possono quindi calcolare le perturbazioni dei termini di Christoffel, tenendo solo i termini di primo ordine in h

$$\begin{aligned} \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} (\partial_{\mu} g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{g}^{\rho\alpha} - h^{\rho\alpha}) (\partial_{\mu} (\bar{g}_{\alpha\nu} + h_{\alpha\nu}) + \partial_{\nu} (\bar{g}_{\alpha\mu} + h_{\alpha\mu}) - \partial_{\alpha} (\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})) \\ &= \frac{1}{2} \bar{g}^{\rho\alpha} (\partial_{\mu} \bar{g}_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} \bar{g}_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} \bar{g}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \bar{g}^{\rho\alpha} (\partial_{\mu} h_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} h_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} h_{\mu\nu}) + \\ &\quad - \frac{1}{2} h^{\rho\alpha} (\partial_{\mu} \bar{g}_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} \bar{g}_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} \bar{g}_{\mu\nu}) \\ &= \bar{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{g}^{\rho\alpha} (\partial_{\mu} h_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} h_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} h_{\mu\nu}) - \bar{g}^{\rho\alpha} \bar{\Gamma}^{\beta}{}_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} \\ &= \bar{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove è stata definita la quantità

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \bar{g}^{\rho\alpha} (\partial_{\mu} h_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} h_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} h_{\mu\nu}) - \bar{g}^{\rho\alpha} \bar{\Gamma}^{\beta}{}_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} \bar{g}^{\rho\alpha} (\nabla_{\mu} h_{\alpha\nu} + \nabla_{\nu} h_{\alpha\mu} - \nabla_{\alpha} h_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

²Sono denominate onde perché anche in questo caso il tensore $h_{\mu\nu}$, in un apposito gauge, rispetta l'equazione delle onde.

infine si deduce la perturbazione del tensore di Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\rho\sigma} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \partial_\nu (\bar{\Gamma}^\sigma_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}) - \partial_\sigma (\bar{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}) + (\bar{\Gamma}^\rho_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma})(\bar{\Gamma}^\sigma_{\rho\nu} + \delta\Gamma^\sigma_{\rho\nu}) + \\ &\quad - (\bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu})(\bar{\Gamma}^\sigma_{\rho\sigma} + \delta\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}) \\ &= \bar{R}_{\mu\nu} + \partial_\nu \delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\sigma_{\rho\nu} \bar{\Gamma}^\rho_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma} \bar{\Gamma}^\sigma_{\rho\nu} - \delta\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} \bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} - \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} \bar{\Gamma}^\sigma_{\rho\sigma} \\ &= \bar{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.8)$$

avendo quindi trovato

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \partial_\nu \delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\sigma_{\rho\nu} \bar{\Gamma}^\rho_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma} \bar{\Gamma}^\sigma_{\rho\nu} - \delta\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} \bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} - \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} \bar{\Gamma}^\sigma_{\rho\sigma} \\ &= \nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nel vuoto ovviamente non sono presenti perturbazioni, e quindi le Equazioni di Einstein si riducono a

$$\delta R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.10)$$

Questo è un sistema di equazioni lineari in h , ma si tratta pur sempre di un *sistema di 10 equazioni alle derivate parziali accoppiate*.

Scomposizione in serie di funzioni a simmetria sferica È quindi necessario trovare una semplificazione, sfruttando ad esempio la simmetria sferica della metrica di sfondo, che permette di separare le variabili angolari. Le equazioni delle perturbazioni possono essere separate in equazioni per la parte angolare nelle variabili θ e φ ed in equazioni per la parte radiale e temporale nelle variabili r e t .

Si può quindi scomporre il tensore $h_{\mu\nu}$ in funzioni tensoriali a simmetria sferica. Data la simmetria di $h_{\mu\nu}$, è necessario avere 10 funzioni $(Y_{LM}^n)_{\mu\nu}$. Si scrive quindi

$$h_{\mu\nu} = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^L \sum_{n=0}^{10} C_{LM}^n(t, r) (Y_{LM}^n)_{\mu\nu}(\theta, \varphi) \quad (3.11)$$

Tali funzioni tensoriali possono essere cercate notando che le parti del tensore $h_{\mu\nu}$ ³ trasformano in maniera diversa sotto rotazioni: riportando infatti con 'S' ciò che trasforma come uno scalare, con 'V' ciò che trasforma come un vettore bidimensionale, e con 'T' ciò che trasforma come un tensore 2×2 , si ha che:

$$h = \begin{pmatrix} \boxed{\text{S}} & \boxed{\text{S}} & \boxed{\text{V}} \\ \boxed{\text{S}} & \boxed{\text{S}} & \boxed{\text{V}} \\ \boxed{\text{V}} & \boxed{\text{V}} & \boxed{\text{T}} \end{pmatrix}$$

In questo modo le componenti di h che trasformano come scalari possono essere rappresentate utilizzando semplicemente le *armoniche sferiche* $Y_{LM}(\theta, \varphi)$, e quindi direttamente

³Questa asserzione è valida solamente nelle coordinate della metrica di Schwarzschild grazie alla simmetria sferica.

$S_{LM}(\theta, \varphi) = Y_{LM}(\theta, \varphi)$. Le componenti che trasformano come vettori o come tensori possono essere costruite a partire dalle stesse armoniche sferiche nel seguente modo:

$$(V_{LM}^1)_a = \nabla_a(S_{LM}) = \frac{\partial}{\partial x^a} Y_{LM}(\theta, \varphi) \quad (3.12)$$

$$(V_{LM}^2)_a = \epsilon_a{}^b \nabla_b(S_{LM}) = \gamma^{bc} \epsilon_{ac} \frac{\partial}{\partial x^b} Y_{LM}(\theta, \varphi) \quad (3.13)$$

$$(T_{LM}^1)_{ab} = \nabla_a \nabla_b(S_{LM}) \quad (3.14)$$

$$(T_{LM}^2)_{ab} = S_{LM} \gamma_{ab} \quad (3.15)$$

$$(T_{LM}^3)_{ab} = \frac{1}{2} [\epsilon_a{}^c (\nabla_c \nabla_b S_{LM}) + \epsilon_b{}^c \nabla_c \nabla_a(S_{LM})] \quad (3.16)$$

dove gli indici a, b, c assumono i valori 2 e 3, mentre γ_{ab} è la metrica di una 2-sfera unitaria, mentre ϵ è il seguente tensore totalmente antisimmetrico:

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad \epsilon_{ab} = \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e le derivate covarianti devono essere calcolate sulla 2-sfera.

Trattandosi di vettori e tensori ottenuti a partire dalle armoniche sferiche, il loro comportamento sotto *parità* dipenderà, come per le stesse armoniche sferiche, dal solo valore di L , secondo $(-1)^L$. Seguendo la dicitura di Chandrasekhar [7], nell'ambito delle perturbazioni relativistiche, vengono dette *polari* le perturbazioni che sotto parità acquisiscono un fattore $(-1)^L$, ed *assiali* quelle che acquisiscono $(-1)^{L+1}$. Delle funzioni tensoriali precedentemente ricavate, sono quindi polari S_{LM} , V_{LM}^1 , T_{LM}^1 e T_{LM}^2 , mentre sono assiali V_{LM}^2 e T_{LM}^3 . La metrica di Schwarzschild scelta come sfondo tuttavia è invariante sotto parità, e quindi ci si aspetta che i contributi polari ed assiali non si mescolino, e che sia possibile quindi studiarli separatamente. La forma generale di una perturbazione assiale dati L ed M è

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_0(t, r) \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{LM} & h_0(t, r) \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} Y_{LM} \\ 0 & 0 & -h_1(t, r) \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{LM} & h_1(t, r) \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} Y_{LM} \\ * & * & \frac{1}{2} h_2(t, r) \frac{1}{\sin\theta} X_{LM} & -\frac{1}{2} h_2(t, r) \sin\theta W_{LM} \\ * & * & * & -\frac{1}{2} h_2(t, r) \sin\theta X_{LM} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

dove gli asterischi indicano le componenti fissate dalla simmetria, mentre sono state definite le quantità:

$$X_{LM}(\theta, \varphi) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{LM} - \cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{LM} \right) \quad (3.18)$$

$$W_{LM}(\theta, \varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} Y_{LM} - \cot\theta \frac{\partial}{\partial\theta} Y_{LM} - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} Y_{LM} \right) \quad (3.19)$$

Le quantità h_0 , h_1 ed h_2 sono in realtà una serie di coefficienti per ogni L , M .

Il gauge di Regge-Wheeler Proseguendo nella semplificazione delle 10 equazioni (3.10), si può eseguire una trasformazione di gauge: da notare che il gauge dello spazio-tempo è essenzialmente fissato, essendo fissata la metrica di sfondo, tuttavia essendovi una perturbazione, è possibile variare il gauge al primo ordine in h . Questo procedimento è analogo al quanto già mostrato nelle equazioni (1.5, 1.6), solo che al posto della metrica piatta $\eta_{\mu\nu}$ si ha la metrica curva di sfondo $\bar{g}_{\mu\nu}$. La trasformazione infinitesima è sempre della stessa forma della (1.5):

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} \quad (3.20)$$

dove il vettore ξ^μ è del primo ordine in h . Analogamente, ma facendo attenzione al fatto che lo spazio non è più piatto, si trova la legge per la trasformazione della metrica:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= g_{\mu\nu}(x) + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu - g_{\mu\nu} \partial_a \xi^a \\ &= \bar{g}_{\mu\nu}(x') + h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = \bar{g}_{\mu\nu}(x') + h'_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Affinché la trasformazione di gauge conservi sia la decomposizione in armoniche sferiche tensoriali e la separazione in contributi polari ed assiali, si possono costruire due vettori di gauge, uno polare ed uno assiale.

Il vettore assiale ha la forma

$$\xi^\mu = \Lambda(t, r) [0, 0, V^2(\theta, \varphi)] = \Lambda(t, r) [0, 0, -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{LM}, \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} Y_{LM}] \quad (3.22)$$

Andando quindi a calcolare esplicitamente i cambiamenti nelle perturbazioni della metrica, il nuovo tensore $h'_{\mu\nu}$ ha giustamente la forma (3.17), e le variazioni dei coefficienti valgono

$$\delta h_0 = \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(t, r) \quad \delta h_1 = \frac{\partial}{\partial r} \Lambda(t, r) - 2 \frac{\Lambda(t, r)}{r} \quad \delta h_2 = -2\Lambda(t, r) \quad (3.23)$$

Definendo il coefficiente

$$k_1 = h_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} h_2 - 2 \frac{h_2}{r} \right) \quad (3.24)$$

si trova che

$$\delta k_1 = \frac{\partial}{\partial r} \Lambda - 2 \frac{\Lambda}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} (-2\Lambda) - 2 \left(-2 \frac{\Lambda}{r} \right) \right) = 0 \quad (3.25)$$

e quindi k_1 è invariante sotto tali trasformazioni infinitesime. La scelta di Regge e Wheeler è quella di utilizzare la libertà del gauge per eliminare il contributo nelle derivate di ordine più alto negli angoli θ e φ , ovvero porre $h_2(t, r) = 0$, effetto che si ottiene ponendo

$$\Lambda(t, r) = -\frac{1}{2} h_2(t, r) \quad (3.26)$$

Operando questa scelta del gauge di Regge-Wheeler, si ottiene infine che $k_1(t, r) = (h_1)_{RW}(t, r)$

Il vettore di gauge polare invece è

$$\xi^\mu = [M_0(t, r) Y_{LM}(\theta, \phi), M_1(t, r) Y_{LM}(\theta, \varphi), M_2(t, r) \frac{\partial}{\partial\theta} Y_{LM}(\theta, \varphi), M_2(t, r) \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{LM}(\theta, \varphi)] \quad (3.27)$$

dove le ultime due componenti altro non sono che $M_2(t, r) V_{LM}^1(\theta, \varphi)$. Questa volta ci sono tre funzioni che possono essere scelte in maniera da annullare i coefficienti di V^1 e T^1 (h_0 e h_1). Da notare che data una perturbazione in un gauge qualsiasi, essa può essere riportata punto a punto nel gauge di Regge-Wheeler.

Le condizioni di questo gauge sulla metrica della perturbazione h possono essere quindi scritte come

$$\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta h_{02}) = -\frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{1}{\sin\theta} h_{03} \right) \quad \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta h_{12}) = -\frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{1}{\sin\theta} h_{13} \right) \quad (3.28)$$

$$h_{23} = 0 \quad h_{33} = \sin^2\theta h_{22} \quad (3.29)$$

e sono valide per perturbazioni sia assiali che polari.

Equazioni Linearizzate per le Perturbazioni Scrivendo il tensore per le perturbazioni assiali nel gauge di Regge-Wheeler, ed inserendolo nelle (3.10), si trovano più equazioni, alcune delle quali banalmente soddisfatte, alcune non banali solo per $M \neq 0$ ed altre non banali anche per $M = 0$. Considerata poi la proprietà stessa delle armoniche sferiche di soddisfare l'equazione differenziale

$$\left(\sin^2\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \cos\theta \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \sin^2\theta L(L+1) \right) Y_{LM}(\theta, \varphi) = 0 \quad (3.30)$$

ogni componente $\delta R_{\mu\nu}$ può essere scomposta in una funzione radiale $R_i(t, r)$ ed una parte angolare $A_i(\theta, \varphi)$. Il risultato è il seguente:

Soddisfatte banalmente	$\delta R_{00} = \delta R_{01} = \delta R_{11} = 0$
Condizioni non banali per tutti i valori di M	$\delta R_{23} = R_1(h_0, h_1, t, r) A_1(\theta, \varphi)$ $\delta R_{13} = R_2(h_0, h_1, t, r) A_2(\theta, \varphi)$ $\delta R_{03} = R_3(h_0, h_1, t, r) A_3(\theta, \varphi)$
Condizioni non banali solo per $M \neq 0$	$\delta R_{22} = R_1(h_0, h_1, t, r) A_1(\theta, \varphi)$ $\delta R_{33} = R_1(h_0, h_1, t, r) A_1(\theta, \varphi)$ $\delta R_{12} = R_2(h_0, h_1, t, r) A_2(\theta, \varphi)$ $\delta R_{02} = R_3(h_0, h_1, t, r) A_3(\theta, \varphi)$

Scrivendole esplicitamente, queste condizioni sono

$$\delta R_{23} : 0 = R_1(h_0, h_1, t, r) = \frac{1}{B(r)} \frac{\partial}{\partial t} h_0 - \frac{\partial}{\partial r} (B(r) h_1) \quad (3.31)$$

$$\delta R_{13} : 0 = R_2(h_0, h_1, t, r) = \frac{1}{B(r)} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} h_1 - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} h_0 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial t} h_0 \right) + \frac{1}{r^2} (L(L+1) - 2) h_1 \quad (3.32)$$

$$\delta R_{03} : 0 = R_3(h_0, h_1, t, r) = \frac{1}{2} B(r) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} h_0 - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} h_1 - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial t} h_1 \right) + \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} B(r) - \frac{1}{2} L(L+1) \right) h_0 \quad (3.33)$$

dove $B(r) = (1 - \frac{2GM_\bullet}{rc^2})$, con M_\bullet massa del buco nero. Si hanno quindi 3 equazioni differenziali per due sole funzioni incognite $h_0(t, r)$ ed $h_1(t, r)$, ma si trova immediatamente che le tre equazioni sono ridondanti, poiché una qualsiasi soluzione delle (3.31, 3.32) soddisferebbe la derivata temporale della (3.33). Dopodiché, h_0 non è completamente fissato, poiché compare solo nella sua derivata temporale nelle (3.31, 3.32), e si può quindi sempre aggiungere una funzione arbitraria di r. Tale funzione di r può essere fissata con la (3.33), che avrà quindi il ruolo di fissare l'ambiguità sulla funzione h_0 .

L'Equazione di Regge-Wheeler Si può isolare $\frac{\partial}{\partial t} h_0$ dall'equazione (3.31) per sostituirlo nella (3.32), dove comparirà quindi solo h_1 ottenendo

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{B(r)} h_1 - \left(\frac{\partial}{\partial r} B(r) \right)^2 \frac{1}{B(r)} h_1 + \left(\frac{\partial}{\partial r} B(r) \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} h_1 \right) + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} B(r) \right) h_1 + \frac{2}{r} B(r) \left(\frac{\partial}{\partial r} h_1 \right) + \frac{1}{r^2} (L(L+1) - 2) h_1 \quad (3.34)$$

Successivamente, definendo

$$Q_L(t, r) := \frac{1}{r} B(r) (h_1)_{RW}(t, r) = \frac{1}{r} B(r) k_1(t, r) \quad (3.35)$$

si può riscrivere l'equazione differenziale per $Q_L(t, r)$ ottenendo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_L - B(r) \left(\frac{\partial}{\partial r} B(r) \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} r Q_L \right) + \frac{2}{r} B^2(r) \left(\frac{\partial}{\partial r} (r Q_L) \right) + \frac{1}{r} (L(L+1) - 2) B(r) Q_L = 0 \quad (3.36)$$

che è una equazione dipendente da L ma non da M come ci si aspetta a causa della simmetria sferica dello sfondo. Eseguendo poi un cambiamento di coordinate

$$x = r + 2\mu \ln \left(\frac{r}{2\mu - 1} \right) \quad (3.37)$$

ed utilizzando sempre x come coordinata radiale⁴ l'equazione (3.36) diventa

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_L(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} Q_L(t, x) + V_{RW}(x) Q_L(t, x) = 0 \quad (3.38)$$

dove

$$V_{RW}(x) = \left(1 - \frac{2\mu}{r(x)} \right) \left(\frac{L(L+1)}{r(x)^2} - \frac{3\mu}{r(x)^3} \right) \quad (3.39)$$

è detto *potenziale di Regge-Wheeler*. L'equazione di perturbazione assume quindi la forma di un'equazione d'onda unidimensionale con un potenziale aggiuntivo. Questa equazione è detta *equazione di Regge-Wheeler*. Da notare che parimenti a k_1 , anche Q_L è invariante sotto trasformazioni di gauge del primo ordine in h . Inoltre, si può costruire l'intera equazione di perturbazione assiale, trovando l'equazione per h_0 , che può essere ottenuta integrando la (3.31) ed utilizzando la (3.33) per fissare completamente h_0 .

L'equazione di Zerilli Eseguendo un procedimento analogo per le perturbazioni polari, si ottiene un'equazione che ha la stessa forma di quella di Regge-Wheeler, e differente unicamente per il potenziale:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Z_L(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_L(t, x) + V_Z(x) Z_L(t, x) = 0 \quad (3.40)$$

dove

$$V_Z = \left(1 - \frac{2\mu}{r(x)} \right) \left[\frac{9\mu^3}{r(x)^5 \lambda^2} - \frac{6\mu}{r(x)^3 \lambda^2} (L-1)(L+2) \left(1 - \frac{3\mu}{2r(x)} \right) + \frac{(L-1)L(L+1)(L+2)}{r(x)^2 \lambda} \right] \quad (3.41)$$

con

$$\lambda = L(L+1) - 2 + \frac{2\mu}{r(x)} \quad (3.42)$$

Nonostante la forma analitica particolarmente diversa, i due potenziali sono in realtà simili, come mostrato in figura 3.1:

Alla fine di questo procedimento si trova quindi che il comportamento di un buco nero in seguito ad una perturbazione è descritto da due equazioni d'onda unidimensionali in presenza di un potenziale efficace. Risolvendo queste due equazioni, il comportamento del buco nero è completamente determinato.

⁴Questo cambiamento di coordinate sposta $r = 2\mu$ a $x = -\infty$, limitando il dominio dell'equazione differenziale allo spaziotempo esterno all'orizzonte. Proprio per questa ragione, in inglese queste coordinate vengono chiamate *tortoise coordinate*, ovvero coordinate tartaruga, perché proprio come nel paradosso di Zenone *Achille e la tartaruga*, non si raggiunge mai l'orizzonte.

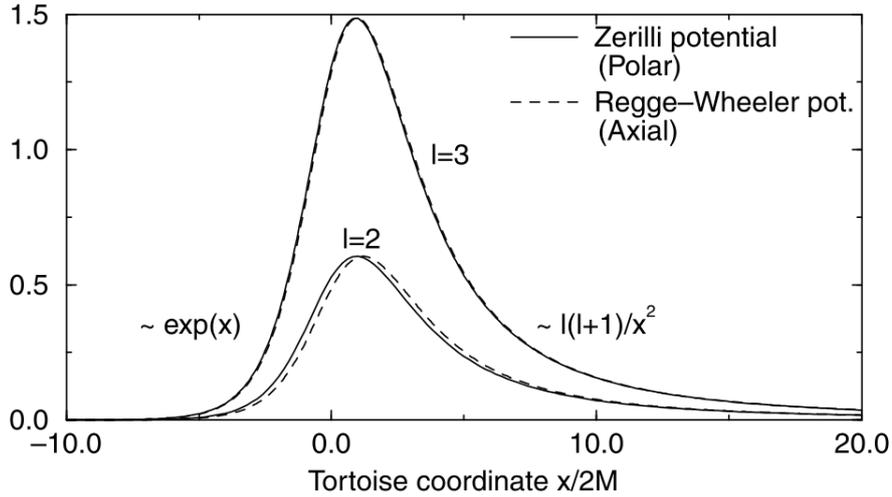


Figura 3.1: I potenziali di Regge-Wheeler e Zerilli per $l = 2, 3$ [3]

3.2.2 Studio delle Equazioni d'Onda

Le due equazioni (3.38, 3.40) con i rispettivi potenziali (3.39, 3.41) definiscono completamente il comportamento di un buco nero perturbato. Bisogna quindi risolverle per ottenere le informazioni cercate.

Dipendenza Armonica dal Tempo e Trasformata di Fourier Volendo mantenere un approccio analitico al problema, si può assumere una dipendenza armonica dal tempo, per ottenere così una equazione indipendente dal tempo per la perturbazione. Se la funzione $Q_L(t, x)$ può essere espressa nella forma⁵

$$Q_\omega(t, x) = e^{i\omega t} \phi(x) \quad (3.43)$$

(dove $\omega \in \mathbb{C}$ ha nella parte reale il significato di oscillazione, mentre nella parte complessa la variazione nel tempo dell'ampiezza; in particolare, essendo le oscillazioni smorzate a causa del flusso di energia gravitazionale emessa, si deve avere che $Im(\omega) > 0$, e i modi sono quindi stabili) allora, utilizzando la *trasformata di Fourier* una qualsiasi equazione del tipo delle (3.38, 3.40) assume la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) + (\omega^2 - V(x)) \phi(x) = 0 \quad (3.44)$$

ed è quindi stata resa *indipendente dal tempo*. In seguito le (3.38, 3.40) verranno talvolta richiamate con l'appellativo di *dipendente dal tempo*.

Ricordando la forma del potenziale, che si annulla per $|x| \rightarrow \infty$ e che è sempre positivo, se ne deduce che non ammette stati legati. La risoluzione di questo tipo di equazione necessita di condizioni al contorno, che non possono essere l'annullarsi della perturbazione agli estremi del dominio. Piuttosto, dal momento che $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0$, allora in questo limite la (3.44) tende alla forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) + \omega^2 \phi(x) = 0 \quad (3.45)$$

che avrà come soluzione una sovrapposizione di onde, in entrata ed in uscita dal dominio. Assumendo che non giungano perturbazioni dall'esterno, queste onde potranno essere solo

⁵Saranno omessi d'ora in poi gli indici L ed M .

uscanti (*out-going*), e quindi le condizioni al contorno da imporre sono

$$x \rightarrow -\infty \quad \rightarrow \quad \phi(\omega, x) \sim e^{i\omega x} \quad x \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad \phi(\omega, x) \sim e^{-i\omega x} \quad (3.46)$$

in questo modo ad $x \rightarrow -\infty$, ovvero in $r = 2\mu$ si ha che tali onde stanno entrando dentro il buco nero (e quindi escono dal dominio) mentre per $x \rightarrow \infty$ le onde si allontanano all'infinito spaziale.

A questo punto il terreno è pronto per una definizione più rigorosa di *modi quasi-normali*. Le frequenze discrete che ammettono soluzioni per le equazioni d'onda, combinate con le condizioni al contorno (3.46) sono chiamate *frequenze quasi-normali*, mentre le soluzioni così costruite sono dette *modi quasi-normali*. Il termine quasi viene giustapposto perché questi modi differiscono dai modi normali, precipuamente perché non sono stazionari a causa del forte smorzamento.

Questo approccio tuttavia presenta dei problemi, perché tali modi dovrebbero divergere all'infinito spaziale o all'orizzonte del buco nero. Inoltre, le (3.46) non determinano univocamente una soluzione della (3.44). Un ulteriore problema sorge quando si vuole studiare l'evoluzione temporale di una perturbazione iniziale: nel caso dei modi normali, che formano un sistema completo, le condizioni iniziali possono essere univocamente espresse come combinazione lineare di modi normali. Ciò non è invece possibile nel caso di modi quasi-normali, sempre a causa del loro divergere all'orizzonte o all'infinito. In ultima istanza, un modo quasi normale, andando a divergere, dovrebbe trasportare energia infinita. Questo paradosso porta a concludere che i modi quasi-normali non rappresentano uno stato fisico del sistema, e che non bisogna pensarli come una soluzione stazionaria, ovvero come un insieme di soluzioni che sono esistite per tutti i tempi passati e che continueranno ad esistere per tutto il futuro. Bisogna piuttosto cercare esplicitamente i dati della perturbazione iniziale.

Trasformata di Laplace L'uso della *trasformata di Fourier* rende quindi difficoltosa l'inclusione delle condizioni iniziali, che, tra l'altro, non erano nemmeno il primo interesse, in quanto si era alla ricerca di una caratteristica peculiare del buco nero, indipendente dal tipo di perturbazione. Tuttavia, l'uso della *trasformata di Laplace* permette di includere anche questa componente. Ricordando la definizione prima della trasformata e poi della antitrasformata

$$\mathcal{L}[f(t, x)](s) = \hat{f}(s, x) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t, x) dt \quad (3.47)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\hat{f}(s, x)](t) = f(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{st} \hat{f}(s, x) ds \quad (3.48)$$

Nel caso particolare d'interesse in questa discussione, si trova facilmente integrando per parti che trasformando la derivata seconda temporale di una funzione vale:

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, x) \right] (s) = s^2 \hat{f}(s, x) - s \frac{\partial}{\partial t} f(0, x) - f(0, x) \quad (3.49)$$

di conseguenza il tipo di equazioni in considerazione possono essere riscritte come

$$\hat{Q}(s, x) = \int_0^{\infty} e^{-st} Q(t, x) dt \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{Q}(s, x) + (-s^2 - V(x)) \hat{Q}(s, x) = -s Q(t, x)|_{t=0} - \frac{\partial}{\partial t} Q(t, x)|_{t=0} = \mathcal{J}(s, x) \quad (3.51)$$

dove il primo integrale converge se $Re(s) > 0$, mentre $\mathcal{J}(s, x)$ è determinato dalle condizioni iniziali. Di conseguenza, non appena si trova una soluzione della (3.51), si può ritrovare la

funzione di partenza tramite la antitrasformata (3.48):

$$Q(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^{st} \hat{Q}(t, s) ds \quad (3.52)$$

dove è stato usato come cammino di integrazione un asse parallelo all'asse immaginario ed infinitesimamente traslato a destra rispetto ad esso.

La (3.51) è una *equazione differenziale non omogenea*, e per risolverla bisogna risolvere prima la sua *omogenea associata*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{Q}(s, x) + (-s^2 - V(x)) \hat{Q}(s, x) = 0 \quad (3.53)$$

Dette $Q_-(s, x)$ e $Q_+(s, x)$ due qualsiasi soluzioni linearmente indipendenti della omogenea associata (3.53), si può definire una particolare *funzione di Green* per la soluzione della non omogenea

$$G(s, x, x') = \begin{cases} \frac{1}{\det(W)} Q_-(s, x) Q_+(s, x') & \text{per } x' > x \\ \frac{1}{\det(W)} Q_-(s, x') Q_+(s, x) & \text{per } x' < x \end{cases} \quad (3.54)$$

dove $W(s)$ è il determinante della matrice Wronskiana

$$W = \begin{pmatrix} Q_-(s, x) & Q_+(s, x) \\ \frac{\partial}{\partial x} Q_-(s, x) & \frac{\partial}{\partial x} Q_+(s, x) \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

$$\det(W) = W(s) = Q_-(s, x) \frac{\partial}{\partial x} Q_+(s, x) - Q_+(s, x) \frac{\partial}{\partial x} Q_-(s, x) \quad (3.56)$$

(da notare che se $Q_-(s, x)$ e $Q_+(s, x)$ sono soluzioni della (3.53), allora tale determinante è indipendente da x ⁶, tale che

$$\hat{Q}(s, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s, x, x') \mathcal{J}(s, x') dx' \quad (3.57)$$

Avendo preso una coppia qualunque di soluzioni della (3.53), ogni coppia formerà una diversa funzione di Green $G(s, x, x')$. Per capire quale sia la funzione di Green corretta, ovvero quale corrisponda ai dati iniziali, bisogna andare a guardare la *limitatezza della soluzione nello spaziotempo*, la quale implica che la sua trasformata di Laplace sia limitata anche in x oltre che in s . La (3.57) restituisce una soluzione limitata se e solo se $Q_-(s, x)$ è limitata per $x \rightarrow -\infty$ (all'orizzonte), se $Q_+(s, x)$ è limitata per $x \rightarrow \infty$ (all'infinito spaziale) e $Re(s) > 0$. Si trova infatti che è così: analizzando la *omogenea* (3.53) risulta che per $Re(s) > 0$ esiste una coppia di soluzioni Q_1 ed Q_2 linearmente indipendenti⁷, delle quali Q_1 è limitata per $x \rightarrow -\infty$, mentre Q_2 diverge. Pertanto l'unica combinazione lineare limitata delle due che in generale risolve la (3.53) è la stessa Q_1 . Se ne deduce quindi che Q_- deve essere proporzionale ad Q_1 . Dualmente, per $x \rightarrow \infty$ accade la stessa cosa con un'altra coppia di soluzioni. In questo modo non c'è più bisogno di condizioni al contorno appositamente create, ma la matematica stessa del problema impone e determina le soluzioni. Si sa quindi come costruire una soluzione, che però esula ora dalla definizione di modi quasi-normali.

Modi Quasi-Normali secondo la Trasformata di Laplace Avendo ora la trasformata di Laplace della soluzione cercata $\hat{Q}(t, x)$, per trovare la soluzione stessa bisogna calcolarne l'antitrasformata (3.52). Questo conto si svolge andando a chiudere in qualche modo il

⁶Questo fatto può essere verificato derivando $W(s)$ per x , e sostituendo la (3.53)

⁷Ovvero $\lambda_1 Q_1(s, x) + \lambda_2 Q_2(s, x) = 0 \quad \forall s : Re(s) > 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

cammino di integrazione, e, in assenza di singolarità essenziali all'interno del cammino, il calcolo dell'integrale si riduce alla somma dei residui racchiusi calcolati nei suoi poli s_q :

$$\oint e^{st} \hat{Q}(s, x) ds = 2\pi i \sum_q \text{Res}(e^{st} \hat{Q}(s, x), s_q) \quad (3.58)$$

Si può quindi chiudere il cammino a destra o a sinistra, nel limite $|s| = \infty$, in modo che il contributo di questa parte all'integrale svanisca. È stato assunto fino a qui, come è generalmente verificato, che sia Q_- che Q_+ siano olomorfe in s e che non presentino singolarità essenziali all'interno del cammino di integrazione. In queste ipotesi, gli zeri della funzione di Green possono essere originati solo dagli zeri di $W(s)$. Se questi zeri sono poli semplici, si può scrivere:

$$\begin{aligned} Q(t, x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} G(s, x, x') \mathcal{J}(s, x') dx' ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint e^{st} \frac{1}{W(s)} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_-(s, x_<) Q_+(s, x_>) \mathcal{J}(s, x') dx' ds \\ &= \sum_q e^{s_q t} \text{Res} \left(\frac{1}{W(s)}, s_q \right) \int_{-\infty}^{+\infty} Q_-(s_q, x_<) Q_+(s_q, x_>) \mathcal{J}(s_q, x') dx' \end{aligned} \quad (3.59)$$

In particolare, se i dati iniziali sono a supporto compatto (ovvero spazialmente limitati) e la variabile x si trova a destra di questo supporto (ovvero la perturbazione è originata nella direzione del buco nero) si ha che

$$Q(t, x) = \sum_q c_q u_q(t, x) \quad (3.60)$$

con

$$c_q = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial s} W(s)} \int_{x_l}^{x_r} Q_-(s_q, x') \mathcal{J}(s_q, x') dx' \quad u_q(t, x) = e^{s_q t} Q_+(s_q, x) \quad (3.61)$$

e x_l ed x_r denotano i limiti del supporto dei dati iniziali. I c_q sono quindi una serie di *coefficienti indipendenti dal tempo*, come avviene generalmente in una scomposizione in modi normali. Gli zeri di $W(s)$ si trovano sulla parte sinistra del piano complesso di s (dove le due funzioni non sono più linearmente indipendenti) e il cammino di integrazione va chiuso sul lato sinistro del piano complesso di s . Se $W(s = s_q) = 0$, $Q_-(s_q, x)$ ed $Q_+(s_q, x)$ devono essere proporzionali. Si trova inoltre che per le soluzioni che devono essere limitate in uno dei due estremi valgono le relazioni

$$Q_-(s, x) \sim e^{+sx} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \quad x \rightarrow -\infty \quad (3.62)$$

$$Q_+(s, x) \sim e^{-sx} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \quad x \rightarrow +\infty \quad (3.63)$$

nella parte destra del piano complesso di s .

Sostituendo $s \rightarrow i\omega$ la (3.53) si riduce al caso della trasformata di Fourier (3.44), e vengono rispettate anche le condizioni al contorno per le onde uscenti (3.46). Di conseguenza, l'annullarsi di $W(s)$ per certi valori di s (o ω) implica che la corrispondente soluzione dell'equazione differenziale indipendente dal tempo $Q_- = Q_+$ e la funzione deve così rispettare le condizioni al contorno contemporaneamente ad entrambi i capi. Può quindi essere identificata come un *modo quasi normale* di un buco nero di Schwarzschild secondo quanto definito con le condizioni al contorno (3.46).

Ultimi accorgimenti: gli zeri di $W(s)$ si trovano nella parte sinistra del piano complesso di s , mentre le condizioni al contorno per f_- ed f_+ sono state poste nella metà destra. La loro definizione è estesa alla parte sinistra del piano complesso in virtù del prolungamento analitico in s delle due funzioni. Nel caso di un potenziale reale, le frequenze quasi-normali compaiono in coppie complesse-coniugate, infatti se $f(s_q, x)$ è un modo quasi normale, allora $f^*(s_q^*, x)$ soddisfa il complesso coniugato della (3.53). Infine, la (3.60) così com'è afferma che qualsiasi dato iniziale può essere scomposto in una somma pesata di modi quasi normali, che formerebbero quindi una base completa nello spazio delle soluzioni.

Il fatto che l'integrale si riduca alla somma dei contributi di alcuni punti suggerisce già la natura *discreta* dei modi quasi normali che ne risulteranno, ovvero delle frequenze e dei tempi di smorzamento.

Con le (3.60, 3.61) è stata dedotta la struttura dei modi normali, ma per identificarli bisogna prima calcolare i valori s_q : per trovarli bisogna risolvere l'equazione agli autovalori (3.51) le condizioni al contorno (3.46). Gli autovalori sono i poli del wronskiano, per i quali $Q_- = c_q Q_+$. Una volta trovati i poli, saranno determinati coppie di valori per smorzamento e frequenza di oscillazione, e saranno quindi determinati i modi quasi-normali.

3.3 Gli Autovalori delle Equazioni d'Onda

Per quanto le equazioni (3.38, 3.40) sembrino mansuete, almeno una volta celato il potenziale, determinarne analiticamente la soluzione non è stato finora possibile. Il metodo della trasformata di Laplace porta ad un apparentemente semplice somma di residui (3.61). Tuttavia, dal punto di vista pratico questo conto è irrisolvibile, poichè bisogna valutare la derivata del Wronskiano sui suoi poli. Oltre al metodo della trasformata di Laplace esistono altri metodi di risoluzione delle (3.38, 3.40), in seguito riportati.

3.3.1 Studio dell'Equazione Indipendente dal Tempo

Un approccio diretto seguito da Chandrasekhar e Detweiler prevedeva una approssimazione asintotica in serie per ciascuna delle soluzioni sensate in prossimità degli estremi del dominio, evolvendo poi la funzione verso un punto comune prossimo al massimo del potenziale, ovvero $x = 3\mu$. Dopodiché, se il determinante del Wronskiano delle due soluzioni trovate si annulla per qualche valore di s , allora questo valore di s è una frequenza quasi-normale. In questo modo sono state identificate le prime 2 o 3 pulsazioni per vari valori di L . Questo metodo è stato poi migliorato da Nollert e Schmidt con migliori stime delle quasi-autofunzioni nelle prossimità degli estremi.

3.3.2 Metodo WKB

Schutz e Will hanno modificato il metodo WKB per adattarlo al calcolo dei modi quasi-normali, trasformandolo in una potente tecnica che ha dato risultati accurati. L'idea di base è che, come in meccanica quantistica, il problema può essere trattato come un insieme di onde diffratte o riflesse sul picco di una barriera di potenziale. Questo tipo di approccio ha portato alla seguente relazione per le pulsazioni:

$$(M_\bullet \omega_n)^2 = V_L(x_0) - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \left[-2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_L(x_0) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.64)$$

dove x_0 è il valore di x per cui si ha il massimo del potenziale. Si ricorda che $\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x_0) < 0$. Questa relazione ottiene risultati migliori nel caso di n piccolo, e conseguentemente

piccole parti immaginarie. Da notare che secondo questa relazione la parte immaginaria della frequenza cresce molto rapidamente: questo significa che solo i primi modi contribuiscono significativamente al segnale gravitazionale emesso, ed un comportamento simile vale anche per gli alti valori di L . Da sottolineare che l'uso di questo metodo porta ad avere una legge per le pulsazioni trovate, cosa che manca per i metodi puramente numerici. I dettagli del procedimento si trovano nella Appendice A.

Si noti che poiché ω è complessa, si può scrivere $\omega = \tilde{\omega} + i/\tau$ dove $\tilde{\omega}$ è la pulsazione, e τ è il tempo di smorzamento. Si evince quindi che $\omega \propto 1/M$ mentre $\tau \propto M$.

Gli autovalori, che dovrebbero avere le dimensioni dell'inverso di un tempo. Tuttavia vengono calcolati in *unità geometriche*, vale a dire $c = G = 1$. Per la conversione in unità naturali bisogna seguire la seguente formula:

$$\omega_{MKS} = \omega_{geom} \frac{c^3}{GM_{\odot}} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right) \approx 203197.28 \omega_{geom} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right) \quad (3.65)$$

3.3.3 Metodo delle Frazioni Continue

Il metodo delle frazioni continue fu presentato da Leaver nel 1985 e si dimostrò molto accurato, anche per ordini elevati, per il calcolo delle pulsazioni quasi-normali. Il suo metodo si basa sul fatto che l'equazione indipendente dal tempo (3.44) abbia la stessa forma dell'equazione di Schrödinger per lo ione H_2^+ , con l'unica differenza che in quest'ultimo caso le autofunzioni cercate sono limitate all'infinito spaziale, mentre nel caso dei modi quasi normali non lo sono. Si trova che gli autovalori di questo problema sottostanno ad una relazione di *frazioni continue*, ovvero le funzioni presenti nelle frazioni continue sono date da una relazione ricorsiva che determina i coefficienti in una rappresentazione in serie della specifica soluzione dell'equazione differenziale.

Grazie a questo metodo sono state calcolate numericamente numerosissime pulsazioni quasi-normali (più di 100,000) spingendosi fino ad $n = 60$. Le prime sono riportate nella tabella 3.1:

n	$M_{\bullet}\omega$ (L=2)		$M_{\bullet}\omega$ (L=3)		$M_{\bullet}\omega$ (L=4)	
0	0.37367	-0.08896 i	0.59944	-0.09270 i	0.80918	-0.09416 i
1	0.34671	-0.27391 i	0.58264	-0.28130 i	0.79663	-0.28443 i
2	0.30105	-0.47828 i	0.55168	-0.47909 i	0.77271	-0.47991 i
3	0.25150	-0.70514 i	0.51196	-0.69034 i	0.73984	-0.68392 i

Tabella 3.1: Le prime quattro pulsazioni quasi normali (ωM_{\bullet}) per un buco nero di Schwarzschild per $l = 2, 3, 4$ in *unità geometriche* [4]

Il seguente grafico in figura 3.2 riporta invece le prime pulsazioni calcolate con questo metodo:

Da notare che la 'successione' di pulsazioni attraversa l'asse $Re(\omega M_{\bullet}) = 0$, nel caso di $l = 2$ questo succede per il 9° modo, mentre per $l = 3$ avviene per il 41° modo. Tra questi, i modi più importanti sono quelli con $n = 0$ (n d'ora in poi sarà omesso), ed $L = 2, 3$. Convertendoli in MKS si ha ($\nu_2 = 12kHz \frac{M_{\odot}}{M}$, $\tau_2 = 55.5\mu s \frac{M}{M_{\odot}}$), ($\nu_3 = 19kHz \frac{M_{\odot}}{M}$, $\tau_3 = 53.3\mu s \frac{M}{M_{\odot}}$). Un risultato importante è che una volta noto M , tutte le frequenze ed i tempi di decadimento sono univocamente determinati.

I numerosi risultati di Leaver permettono di avere anche un'idea dell'andamento asintotico delle pulsazioni quasi-normali. Nel limite per n grande, si trova un andamento indipendente da L :

$$M_{\bullet}\omega = 0.0437137 + \frac{1}{4} \left(n + \frac{1}{2} \right) + o(n^{-\frac{1}{2}}) \quad (3.66)$$

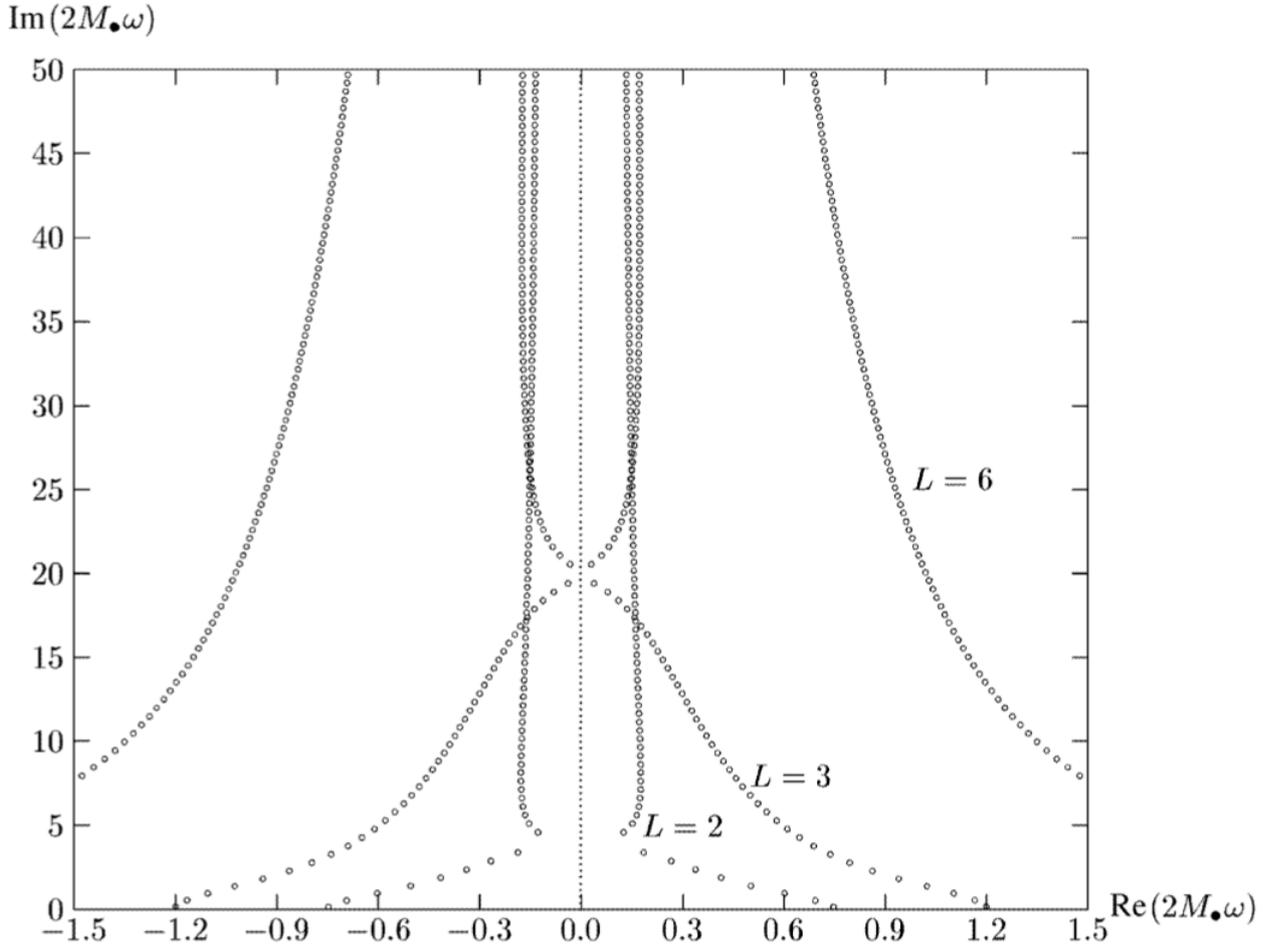


Figura 3.2: pulsazioni quasi-normali di un buco nero di Schwarzschild per diversi valori di L [3]

Si trova anche una espressione per il limite di L grande:

$$M_\bullet\omega = L + \frac{1}{2} + i \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.67)$$

3.3.4 Studio dell'Equazione Dipendente dal Tempo

Un'ultima via è l'*integrazione numerica* delle (3.38, 3.40) scritte così come sono. Storicamente, questo è stato il primo approccio utilizzato da Vishveshwara, poi ripreso ultimamente grazie all'incrementata potenza dei calcolatori. Secondo questo metodo, si può evolvere un set di dati iniziali, e poi svolgere una analisi di Fourier sulla funzione d'onda risultante. In questo modo non è necessario prestare troppa attenzione alle condizioni al contorno all'infinito spaziale o sull'orizzonte del buco nero. Questo metodo trova però i suoi svantaggi nel fatto che non permette di vedere l'intero spettro del buco nero, ma permette di vedere unicamente i modi quasi-normali che verrebbero generati dalle particolari condizioni iniziali scelte. Per trovare più pulsazioni, bisogna 'giocare' con i dati iniziali.

La Figure (3.3, 3.4) mostrno il risultato di questo calcolo nel caso di due buchi neri che collidono frontalmente. Emerge immediatamente che dopo la perturbazione iniziale, il sistema oscilla con una sola frequenza smorzata. Di fatti evolvendo una perturbazione iniziale di un buco nero, la funzione risultante sarà una sovrapposizione di modi quasi-normali dove il contributo principale deriva da al massimo 2 pulsazioni, quelle meno smorzate.

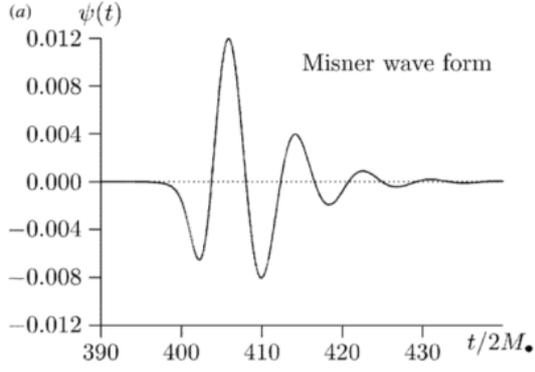


Figura 3.3: Evoluzione temporale della funzione di Regge-Wheeler per $L=2$ in scala lineare

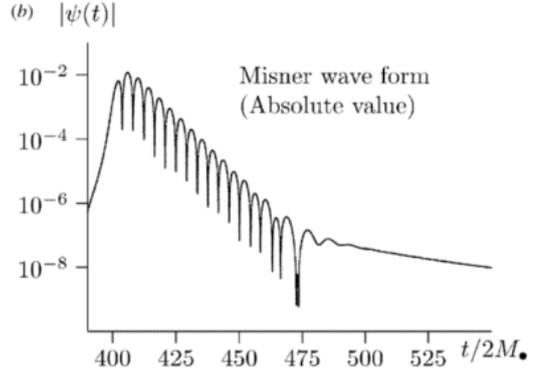


Figura 3.4: Evoluzione temporale della funzione di Regge-Wheeler per $L=2$ in scala logaritmica

3.4 Buchi Neri di Kerr

La metrica di Schwarzschild rappresenta la geometria dello spazio-tempo al di fuori di un oggetto massivo a simmetria sferica, ed è caratterizzata unicamente dalla sua massa M_\bullet . Tuttavia, in generale un oggetto massivo sarà dotato anche da un moto rotatorio, ed avrà quindi momento angolare diverso da zero. In tal caso la simmetria non potrà più essere sferica, perché si avrà una direzione privilegiata, ovvero la direzione di rotazione dell'oggetto. La geometria dello spazio-tempo al di fuori di un oggetto massivo in rotazione sarà quindi *assissimetrica*, ed è descritta dalla *metrica di Kerr*, espressa nella *forma di Boyer-Lindquist*

$$ds^2 = \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma^2} c^2 dt^2 - \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} (d\phi - \omega dt)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (3.68)$$

dove sono state definite le quantità

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad \Delta = r^2 - 2\mu r + a^2 \quad (3.69)$$

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \quad \omega = \frac{2\mu c r a}{\Sigma^2} \quad (3.70)$$

Come atteso, la metrica dipende da due parametri, μ ed a (non più solo da μ come nella metrica di Schwarzschild) come ci si aspetterebbe per un corpo in rotazione. Nel limite $a \rightarrow 0$ si ha che

$$\Delta \rightarrow r^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \quad \rho^2 \rightarrow r^2 \quad \Sigma^2 \rightarrow r^4 \quad (3.71)$$

e si ritrova la metrica di Schwarzschild (3.1), e si può quindi identificare anche in questo caso $\mu = \frac{GM_\bullet}{c^2}$. D'altra parte a è in relazione con il momento angolare J_\bullet , e si trova $J_\bullet = M_\bullet a c$. Da notare che le coordinate r e θ assumono il significato geometrico che avevano nella metrica di Schwarzschild solo nel limite di rotazioni lente, ma in generale non sono le coordinate standard di questa metrica. Infine, la metrica di Kerr presenta una *singolarità* per $\Delta = 0$, ed una *singolarità essenziale* per $\rho = 0$. Ricordando la definizione di ρ , questo avviene per $a = 0$ e $\theta = \pi/2$, e il luogo dei punti così identificato è un anello di raggio a giacente sul piano equatoriale. La singolarità in $\Delta = 0$ identifica invece le superfici $r_\pm = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - a^2}$. Dalla condizione $\Delta = 0$ consegue che $g_{rr} = -\frac{\rho^2}{\Delta} = \infty$, che è la condizione richiesta perché la superficie trovata sia un orizzonte degli eventi. La condizione $\Delta = 0$ tuttavia non ha sempre soluzioni: infatti gli orizzonti degli eventi esistono solo se $a^2 < \mu^2$. In caso contrario

Δ non si annulla mai, e la metrica di Kerr è regolare ovunque eccetto in $\rho = 0$. Nel caso particolare $a = \mu$ si ha un *buco nero di Kerr estremo*. È da notare che in natura ci si aspetta che il processo finale della fusione di due oggetti compatti porti ad un buco nero di Kerr con $a \sim \mu$. In fatti, considerando ad esempio due buchi neri di Schwarzschild, il loro momento angolare prima del collasso può essere facilmente calcolato con la teoria del potenziale efficace: $L_{ISCO} = 2\sqrt{3}\mu$ [17]. Se questo momento angolare venisse trasferito completamente al buco nero centrale si arriverebbe addirittura al caso $a > \mu$. In realtà un'analisi numerica più accurata mostra che $L_{orbitale} \sim 0.9\mu$ [15]. Nel caso in cui i buchi neri iniziali abbiano spin interno il valore cresce ancora, e si avvicina ad μ [15]. Da notare che il calcolo corretto tiene conto che le onde gravitazionali portano via momento angolare fino a 0.4μ [15].

3.4.1 Modi Quasi-Normali per Buchi Neri di Kerr

Le perturbazioni della metrica di Kerr possono essere studiate in analogia con quanto svolto per il caso dei buchi neri di Schwarzschild. La complicazione che sorge in questo caso deriva dal nuovo tipo di simmetria, quella assiale, che permette di separare la sola variabile φ e non più θ . In maniera analoga al caso dei buchi neri di Schwarzschild, Teukolsky [13] ha scritto una equazione linearizzata per la perturbazione gravitazionale, dove questa volta si ha come sfondo la metrica di Kerr. Ha poi trovato che l'equazione può essere separata nelle variabili r e θ scrivendola come prodotto di due funzioni $R_{LM}(r, \omega)$ e $S_{LM}(\theta, \omega)$ che dipendono dai parametri L ed M . Le funzioni $S_{LM}(\theta, \omega)$ prendono il nome di *spin weighted spherical harmonics*. Come per le armoniche sferiche, $\int |S_{LM}| d\Omega = 1$. Nel caso gravitazionale lo spin $s = \pm 2$, e queste funzioni verranno d'ora in poi chiamate $Y^{lm}(\theta, \omega)$.

Nel caso di un sistema binario di buchi neri, durante la coalescenza la binaria assume una forma che corrisponde alla *spin weighted spherical harmonics* $L = M = 2$ [14], e quindi questo modo ha una ampiezza rilevante. Si trova inoltre che è anche quello meno smorzato. Echeverria [14] ha ricavato i seguenti fit analitici in funzione della massa M e momento angolare $a = \frac{J}{Mc}$:

$$\omega_{22} \approx \left[1 - 0.63(1 - a)^{\frac{3}{10}} \right] \approx (0.37 + 0.19a) \frac{c^3}{GM_{\odot}} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right) \quad (3.72)$$

$$\tau_{22} \approx \frac{4M}{(1 - a)^{\frac{9}{10}}} \left[1 - 0.63(1 - a)^{\frac{3}{10}} \right]^{-1} \approx M(1.48 + 2.09a) \frac{GM_{\odot}}{c^3} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1} \quad (3.73)$$

Si noti che la dipendenza da M è la stessa che per i buchi neri di Schwarzschild. Nel limite $a \rightarrow 1$ il tempo di decadimento cresce fortemente, mentre ω si stabilizza.

Si può successivamente dare una stima grossolana dell'energia emessa tramite la (1.23), una volta assunta una distribuzione di massa sensata. Nel caso di due buchi neri di massa uguale che iniziano il *merger*, il sistema può essere rozzamente approssimato come un'ellissoide avente un asse inizialmente lungo il doppio degli altri due, e che poi oscilla raggiungendo al massimo la metà della lunghezza degli altri due. In tal modo gli assi possono essere parametrizzati come $(l^2, l^2, l^2(1 + \frac{3}{5}\sin(\omega t)))$. Ponendo $\beta^2 = 1 + \frac{3}{5}\sin(\omega t)$, l'ellissoide assume la forma

$$D(t) = \left\{ x, y, z : \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{l^2} + \frac{z^2}{l^2\beta^2} \leq 1 \right\} \quad (3.74)$$

Ed il suo volume è $V(t) = \frac{4}{3}\pi l^3\beta$. L'oggetto ha massa M , e si assume che la densità sia costante e quindi $\rho(t) = \frac{M}{V(t)}$. Per la stima dell'energia irradiata bisogna quindi calcolare il

momento di quadrupolo (1.21). Si trova che

$$I_{xx} = I_{yy} = \int_{D(t)} c^2 \rho x^2 dx dy dz = c^2 \frac{M}{V(t)} \int_{D(t)} x^2 dx dy dz = \frac{1}{5} M c^2 l^2 \quad (3.75)$$

$$I_{zz} = \int_{D(t)} c^2 \rho z^2 dx dy dz = c^2 \frac{M}{V(t)} \int_{D(t)} z^2 dx dy dz = \frac{1}{5} \beta^2 M c^2 l^2 \quad (3.76)$$

$$I_{ij} \text{ con } i \neq j = 0 \quad (3.77)$$

ove l'ultima relazione dipende banalmente dalla simmetria. I_{xx} e I_{yy} non dipendono dal tempo e non danno contributo alla radiazione. Usando la (1.23) si trova che $L = 9GM^2 l^4 \omega^6 / c^5 5^5$. Il segnale emesso dal corpo oscillante è qualcosa del tipo

$$h(t) = \frac{\mathcal{A}M}{r} e^{-(t-t_0)/\tau} \cos(\omega_{qnr}(t-t_0) + \phi) \quad (3.78)$$

La luminosità per questo tipo di segnale è $L = \frac{\mathcal{A}^2 M^2 c^3 \omega^2}{16\pi G}$ al tempo iniziale. Assumendo che il momento angolare sia $a = 0.98$, si ha che $\omega = \omega_{qnr} = 0.13 \frac{c^3}{GM_\odot} \frac{M_\odot}{M} \text{ rad/s}$. Assumendo inoltre che la massa del buco nero sia uniformemente distribuita entro l'orizzonte esterno r_+ , che $r_+ \approx r_s$ dal momento che $a \sim 1$ e confrontando le due relazioni per la luminosità si trova

$$\mathcal{A} = 0.6 \frac{G}{c^2} \quad (3.79)$$

Il segnale gravitazionale è quindi

$$h(t = t_0) = 1.5 \times 10^{-23} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{1Gp}{d} \right) \quad (3.80)$$

con d distanza tra sorgente ed osservatore.

Capitolo 4

Rivelatori di Onde Gravitazionali

Un'onda gravitazionale modifica la distanza relativa tra due masse. I rivelatori di onde gravitazionali sfruttano questa proprietà andandone a misurare la distanza relativa in funzione del tempo.

Modernamente i risultati migliori sono giunti dall'interferometria. Verranno discussi in maggiore dettaglio gli interferometri che hanno captato l'evento GW150914.

4.1 Lo Sfasamento Ottico

Un interferometro converte il segnale gravitazionale in uno sfasamento ottico $\Delta\phi$ rilevato da un fotodiodo. Si propone in questa sezione il conto per ricavare lo sfasamento ottico indotto da un'onda gravitazionale in un semplice interferometro di Michelson.

Per questo tipo di costruzione, è sensibile ad un unico tipo di polarizzazione dell'onda gravitazionale, ad esempio ad h_+ . Assumendo che $\lambda_{og} \gg L$ e che l'onda si propaghi lungo l'asse z , si ha $h^{\mu\nu}(t) = a\varepsilon_+^{\mu\nu} \cos(\omega t - kz)$ e quindi $g^{\mu\nu}(t) = \eta^{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(t)$, si può dedurre il comportamento nei bracci dei fasci di luce che partono dallo splitter al tempo $t_0 = 0$. Si consideri un interferometro a due bracci giacente sul piano xy , con un braccio parallelo all'asse x e di lunghezza L_x ed un braccio parallelo all'asse y , di lunghezza L_y . Giacendo sul piano xy , $dz = 0$. Per il primo braccio, di lunghezza L_x , si ha che $dy = 0$ e quindi

$$ds^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = g_{00} c^2 dt^2 + g_{xx} dx^2 = -(c dt)^2 + (1 + a \cos(\omega t - kz)) dy^2 \quad (4.1)$$

Di conseguenza $c dt = \pm dy [1 + (1 + a \cos(\omega t - kz))]^{\frac{1}{2}}$. Nel caso di $a \ll 1$ vale $(1+a)^{\frac{1}{2}} = 1+a/2$ e quindi

$$c dt = \pm dy \left[1 + \frac{a}{2} \cos(\omega t - kz) \right] \quad dy = \mp c dt \left[1 - \frac{a}{2} \cos(\omega t - kz) \right] \quad (4.2)$$

Nel caso dell'altro braccio si ha invece

$$c dt = \pm dx \left[1 - \frac{a}{2} \cos(\omega t - kz) \right] \quad dx = \mp c dt \left[1 + \frac{a}{2} \cos(\omega t - kz) \right] \quad (4.3)$$

dove in entrambe le relazioni di destra, il $+$ vale per il viaggio di andata, mentre il $-$ per quello di ritorno. Dal momento che in TTgauge le coordinate dei punti non cambiano, si ha, detto t_c il tempo necessario per raggiungere il collettore all'altro capo della cavità nel viaggio di andata:

$$\int_0^{L_x} dx = c \int_{t_0}^{t_c} \left[1 - \frac{a}{2} \cos(\omega t - kz) \right] dt \implies L_x = c(t_x - t_0) - \frac{a c}{2 \omega} \sin(\omega t - kz) \Big|_{t_0}^{t_x} \quad (4.4)$$

ovvero la lunghezza L_x è data dalla lunghezza imperturbata più una piccola correzione dovuta all'onda. In assenza dell'onda si avrebbe infatti $L_x = c(t_c - t_0)$ ovvero $t_c = t_0 + \frac{L_x}{c}$. Sostituendo nella (4.4) si ottiene

$$\frac{L_x}{c} = (t_c - t_0) - \frac{a}{2\omega} \left[\sin \left(\omega \left(t_0 + \frac{L_x}{c} \right) \right) - \sin(\omega t_0) \right] \quad (4.5)$$

Per il viaggio di ritorno si ha invece

$$\int_{L_x}^0 dx = -c \int_{t_c}^{t_{BS}} \left[1 - \frac{a}{2} \cos(\omega t - kz) \right] dt \implies -L_x = -c(t_{BS} - t_c) + \frac{a}{2\omega} \sin(\omega t - kz) \Big|_{t_c}^{t_{BS}} \quad (4.6)$$

dove $t_{BS} = t_c + \frac{L_x}{c}$. Sostituendo come fatto in precedenza nella (4.6)

$$\frac{L_x}{c} = (t_{BS} - t_c) - \frac{a}{2\omega} \left[\sin \left(\omega \left(t_0 + \frac{2L_x}{c} \right) \right) - \sin \left(\omega \left(t_0 + \frac{L_x}{c} \right) \right) \right] \quad (4.7)$$

Sommando le (4.5, 4.7) e ricordando che $\sin(\alpha + 2\beta) - \sin(\alpha) = 2\sin(\beta)\cos(\alpha + \beta)$, e posto $\Delta t = t_{BS} - t_0$ si giunge a:

$$\frac{2L_x}{c} = \Delta t_x - \frac{a}{\omega} \sin \left(\omega \frac{L_x}{c} \right) \cos \left(\omega \left(t_0 + \frac{L_x}{c} \right) \right) \quad (4.8)$$

Nel caso dell'altro braccio si ha invece

$$\frac{2L_y}{c} = \Delta t_y + \frac{a}{\omega} \sin \left(\omega \frac{L_y}{c} \right) \cos \left(\omega \left(t_0 + \frac{L_y}{c} \right) \right) \quad (4.9)$$

Se $L_x \approx L_y = L$ allora $\Omega_{em}\Delta t_x = \phi_x$ e $\Omega_{em}\Delta t_y = \phi_y$, e $\Delta\phi = \phi_x - \phi_y$. Di conseguenza, rinominando per chiarezza $\omega \rightarrow \omega_{og}$:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{2a\Omega_{em}}{\omega_{og}} \sin \left(\omega_{og} \frac{L}{c} \right) \cos \left(\omega_{og} \left(t_0 + \frac{L}{c} \right) \right) \\ &= \frac{2h\Omega_{em}L}{c} \frac{\sin \left(\omega_{og} \frac{L}{c} \right)}{\frac{\omega_{og}L}{c}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Questa relazione può essere riscritta in funzione della lunghezza d'onda λ_{em} e così diviene

$$\Delta\phi = 4\pi \frac{Lh}{\lambda_{em}} \frac{\sin \frac{\omega_{og}L}{c}}{\frac{\omega_{og}L}{c}} \quad (4.11)$$

dove h è l'ampiezza dell'onda gravitazionale¹. Nel caso $\frac{\omega_{og}L}{c} \ll 1$ si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e quindi

$$\Delta\phi = \frac{4\pi L}{\lambda_{em}} \quad (4.12)$$

La lunghezza ideale del cammino ottico è, come nel caso elettromagnetico, un quarto della lunghezza d'onda del segnale da rivelare, condizione equivalente a che il tempo di permanenza della luce nell'interferometro raggiunga metà del periodo dell'onda $L = \frac{\lambda_{og}}{4} = \frac{c}{4\nu_{og}} t = \frac{T_{og}}{2}$. Nel caso di un onda di frequenza $100Hz$ si tratta di $750km$. Un interferometro di tali dimensioni presenta evidenti difficoltà di costruzione, e pertanto si sceglie di riflettere più volte il fascio all'interno del braccio, creando due cavità, chiamate *cavità di Fabry-Perot*.

¹Più precisamente, h è una combinazione lineare di h_+ e h_\times , le ampiezze delle due polarizzazioni.

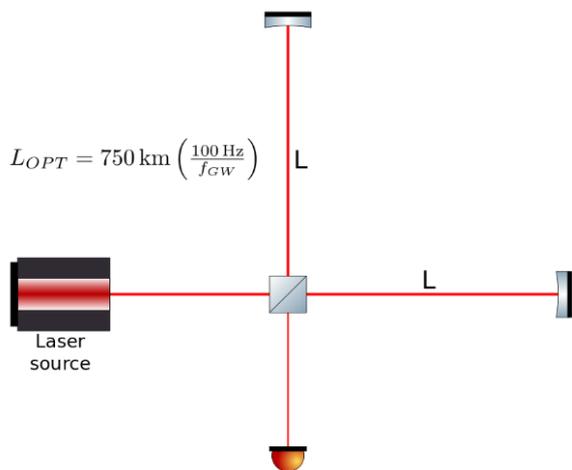


Figura 4.1: Un interferometro di Michelson

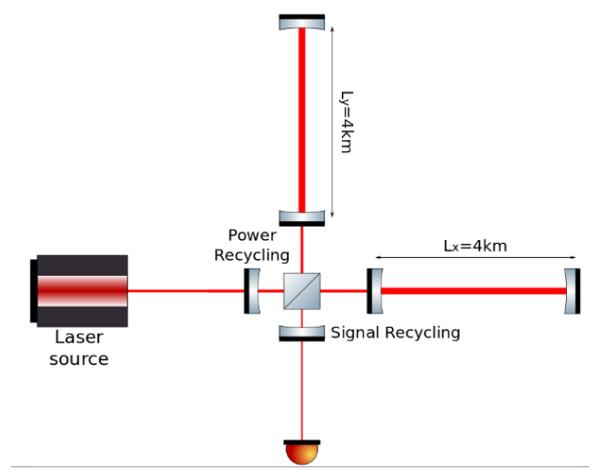


Figura 4.2: Un interferometro con cavità

4.2 Gli Interferometri LIGO e VIRGO

Gli interferometri LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) sono una coppia di interferometri gemelli, situati uno a Hanford, nello stato di Washington (chiamato H1), e l'altro a Livingston, in Louisiana (L1), ad una distanza di 10 ms luce. Il progetto è diventato operativo nel 2002, con il nome di LIGO, tuttavia senza rivelare nulla di significativo. Per questo gli interferometri sono stati potenziati e riaccessi nel settembre 2015 con il nome di Advanced LIGO.



Figura 4.3: Gli Interferometri di Livingston e Hanford [12]

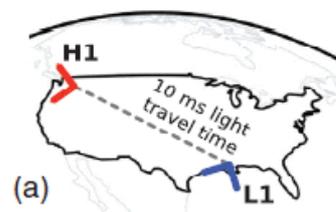


Figura 4.4: Localizzazione degli Interferometri Ligo H1 ed L1

4.2.1 L'Apparato

Il loro principio di funzionamento è quello dell'interferometro di Michelson, ed uno schema è mostrato in Figura 4.2. L'apparato consiste in quattro masse di test, in questo caso degli specchi in silice purissima ed omogenea, del diametro di 34 cm, 20 cm di spessore e peso di 40 kg ad altissima riflessività. Due specchi sono posti alle estremità del braccio, e due nella parte interna. Un fascio di luce laser di lunghezza d'onda $\lambda = 1064nm$, e quindi nell'infrarosso, viene generato alla potenza massima di 180W. Questo fascio viene poi diviso da uno specchio semiriflettente in due fasci di luce ortogonali. Questi fasci percorrono due cammini ottici distinti, di lunghezza L_x ed L_y , e vengono poi ricombinati nello splitter, e rivelati da un fotodiode. Sono inoltre presenti due ulteriori specchi, uno che reimmette nelle cavità la luce in uscita da queste e diretta verso il fotodiode ed uno che riflette la luce inutilizzata che dallo specchio semiriflettente torna verso il laser. Al momento del ricombinamento, i due fasci interferirebbero costruttivamente se la differenza di cammino ottico fosse un multiplo

della lunghezza d'onda $\Delta L = L_x - L_y = n\lambda$ mentre interferirebbero distruttivamente se $\Delta L = (n + \frac{1}{2})\lambda$. Il sistema è costruito in modo che l'interferenza sia distruttiva nel caso le quattro masse rimangano perfettamente ferme, pertanto se il fotodiodo rivela qualcosa, è perché un'onda gravitazionale ha variato i cammini ottici previsti. L'apparato converte quindi il segnale gravitazionale in uno *sfasamento ottico* $\Delta\phi$ rilevato dal fotodiodo.

4.2.2 Sorgenti di Rumore

Il sistema è soggetto a molte forme di *rumore*. Le masse devono essere il meglio possibile isolate da ogni agente esterno che potrebbe spostarle, come ad esempio moti convettivi o onde sismiche. Per questo ogni specchio è sospeso tramite un pendolo a più fasi, e lo stesso pendolo è montato su una piattaforma attiva, che compensa gli spostamenti causati dall'*attività microsismica* e dalle *forze mareali*². Il tutto si trova infine dentro una camera vuota. Altre sorgenti di rumore sono: il *rumore quantistico* dovuto alla fluttuazione del numero di fotoni che colpisce lo specchi istante per istante. La variazione dell'impulso che essi scambiano con lo specchio causa il *rumore di pressione di radiazione*, che decresce come $\frac{1}{m\omega^2}$ con m massa dello specchio e ω frequenza della radiazione, ed è quindi importante a basse frequenze. il *rumore di conteggio* dei fotoni, il cui tasso di arrivo sul fotodiodo è soggetto a fluttuazioni statistiche. Questo rumore è però un limite cruciale nella rivelazione della differenza di lunghezza dei due bracci. Questo rumore decresce come $P^{-\frac{1}{2}}$ dove P è la potenza del laser, e per questo si cerca di aumentare la potenza. Tenendo conto di tutte queste sorgenti di rumore, lo spettro equivalente in strain in ingresso è riportato in Figura 4.5.

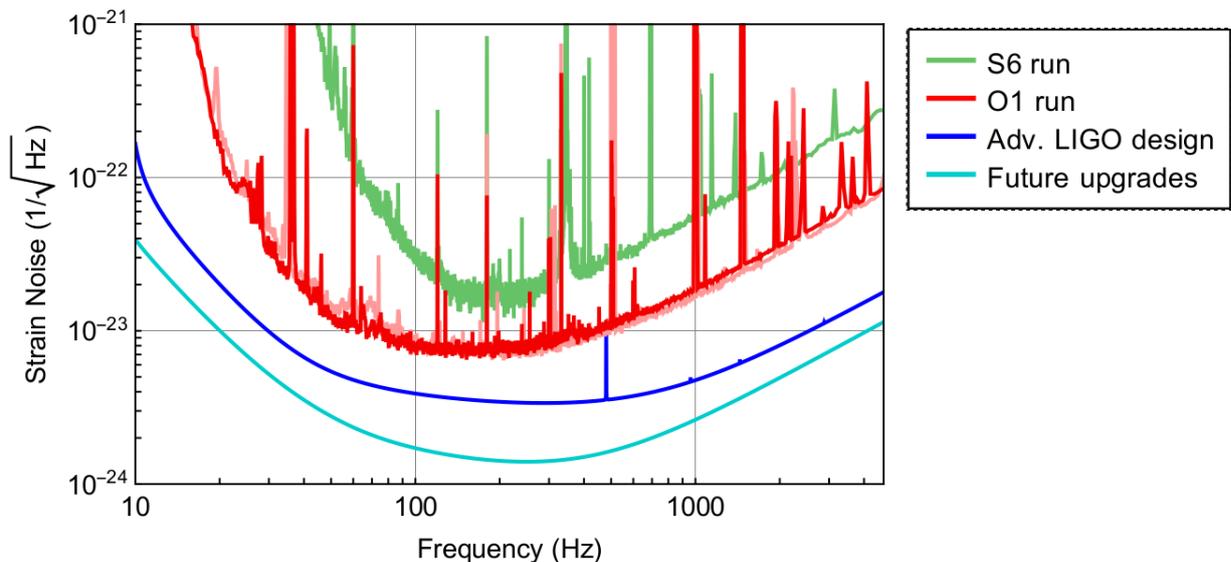


Figura 4.5: La sensibilità dello strumento in funzione della frequenza durante l'ultimo run di LIGO (S6) e il primo run di Advanced LIGO (O1). Sono inoltre presenti stime future [11].

Dal momento che l'ampiezza attesa del segnale è tra 10^{-21} e 10^{-22} , LIGO è quindi sensibile nella banda AUDIO ~ 10 -2000 Hz.

²Queste ultime possono causare spostamenti fino a ben $100\mu m$.

Capitolo 5

L'Evento GW150914

5.1 Rivelazione e Prima Stima dei Parametri

Il 14 settembre 2015 i rivelatori LIGO hanno osservato per la prima volta un'onda gravitazionale. Si riporta il segnale chiaramente visto e le sue ricostruzioni in figura 5.1:

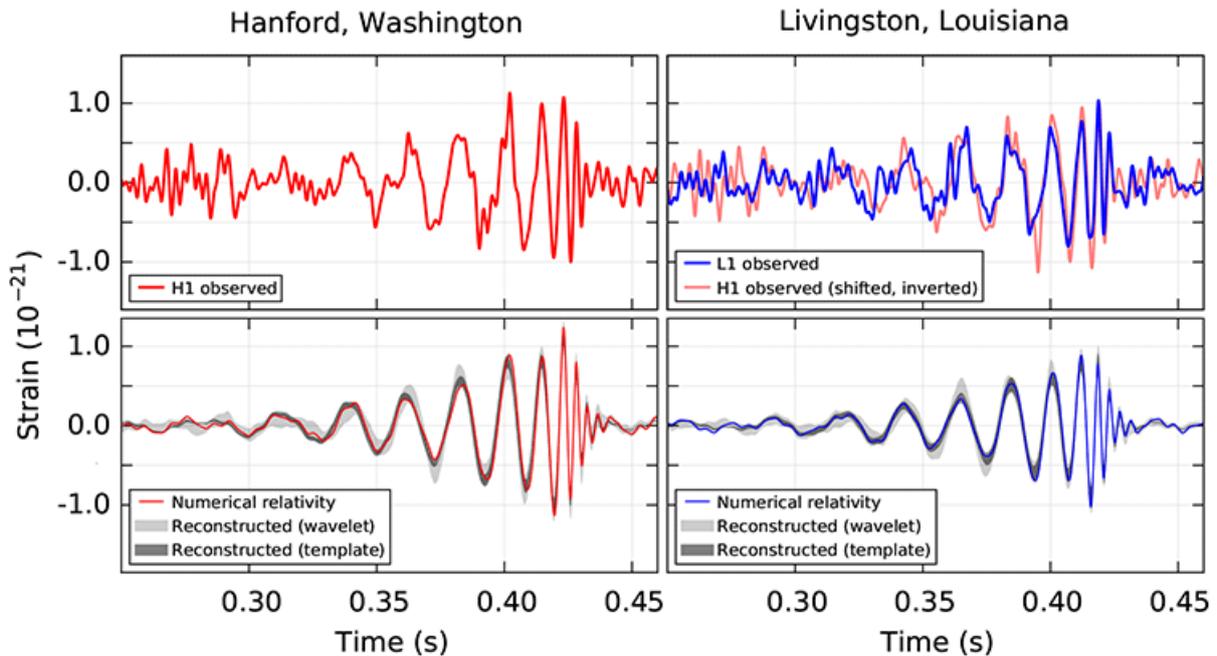


Figura 5.1: Il Segnale visto da LIGO a Hansford e Livingston e le sue Ricostruzioni [12]

Il segnale visto è chiaramente quello generato dal sistema già descritto nel Capitolo 2, con l'accorgimento che bisogna ancora verificare che si tratti effettivamente di buchi neri. Dal momento che la radiazione di quadrupolo ha una frequenza doppia rispetto a quella dell'orbita, si evince che le due masse in questione hanno completato almeno 4 cicli orbitali nella banda del rivelatore, dal momento che si distinguono 8 periodi nel segnale. Come predetto, la frequenza aumenta con il passare del tempo. Assume particolare rilievo il valore della frequenza durante il picco di ampiezza del segnale gravitazionale: in questo caso $f_{max} = 150Hz$.

Il sistema irradia energia, in prima approssimazione, secondo la formula per la luminosità (1.23). Nel caso dello spiraleggiamento di due corpi di massa diversa, tale formula restituisce

$$\frac{d}{dt}E_{og} = -\frac{32}{5}\mu^2 r^4 \omega^6 \quad (5.1)$$

dove $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ è la classica massa ridotta, r è la distanza tra i due corpi e ω è la frequenza di rotazione dei due oggetti. Dal momento che l'energia orbitale è $E_{orb} = -\frac{GM\mu}{2r}$ dove $M = m_1 + m_2$) e quindi

$$\frac{d}{dt}E_{orb} = \frac{GM\mu}{2r^2}\dot{r} = -\frac{d}{dt}E_{og} \quad (5.2)$$

La terza legge di Keplero afferma che $r^3 = \frac{GM}{\omega^2}$, e la sua derivata temporale è $\dot{r} = -\frac{2}{3}r\frac{\dot{\omega}}{\omega}$. Sostituendo tutti gli r nella (5.2) si ottiene

$$\dot{\omega}^3 = \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{\omega^{11}}{c^5} G^5 \mu^3 M^2 = \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{\omega^{11}}{c^5} (GM_{chirp})^5 \quad (5.3)$$

dove si ritrova la $M_{chirp} = (\mu^3(m_1 + m_2)^2)^{\frac{1}{5}}$ già definita nel Capitolo 2. Questa formula porta ad una diretta relazione tra frequenza ν_{og} e la sua derivata $\dot{\nu}_{og}$, e quindi la massa chirp può essere ricavata direttamente dai dati. In questo modo si ricava $M_{chirp} = 30.2_{-1.9}^{+2.5} M_{\odot}$.

Si può successivamente provare che i due oggetti che hanno generato il segnale siano compatti. Assumendo per semplicità che i due corpi abbiano massa uguale, che non è così lontano dalla realtà, si dedurrebbe dalla massa chirp che $m_1 = m_2 = 2^{\frac{1}{5}} M_{chirp} = 35 M_{\odot}$. Assumendo pure che gli oggetti non ruotino, e che le loro orbite siano circolari fino al momento del *merger*, si può calcolare la distanza minima tra i due oggetti deducendo la frequenza massima di rotazione a partire da f_{max} :

$$R_{min} = \left(\frac{GM}{\omega_{max}^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 350 km \quad (5.4)$$

Questo valore, se confrontato con le dimensioni tipiche degli oggetti astrofisici, è *piccolo*: i raggi stellari son dell'ordine di milioni di chilometri, mentre quelli delle nane bianche di migliaia di chilometri. Le stelle di neutroni sono sì più piccole (decine di km), ma le loro masse in genere sono attorno alle $3M_{\odot}$, non $35M_{\odot}$ come in questo caso.

Andando a considerare il raggio di Schwarzschild per una massa di $35M_{\odot}$, si trova che questo vale $103 km$, e pertanto i $350 km$ di raggio dell'ultima orbita stabile sono 1.7 volte la somma dei due raggi di Schwarzschild. Il fatto che l'evoluzione Kepleriana dell'orbita cessi quando la distanza tra i due oggetti è dell'ordine dei raggi dei buchi neri è un'ulteriore prova della compattezza dei due oggetti. Per di più, assunto più generalmente orbite ellittiche, il limite alla compattezza degli oggetti è ancora maggiore, in quanto detta ε l'eccentricità dell'orbita, il raggio minimo sarebbe $\tilde{R} = (1 - \varepsilon)R$. Anche l'altra assunzione, quella delle masse uguali, se venisse a mancare non farebbe altro che restringere il limite di compattezza, quindi il caso dal quale sono state tratte le conclusioni era un limite superiore.

Riguardo la distanza del sistema dalla terra, questa può essere stimata grazie al fatto che il picco di luminosità emessa durante lo spiraleggiamento ha una forma universale. La (5.1) può essere approssimata per $\omega \sim cr$, $r \sim \frac{GM}{c^2}$ e $M\omega \sim \frac{c^3}{G}$. Si ricava quindi $L \sim 2.0 \times 10^{-4} erg/s$. Dal momento che

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c^3}{16\pi G} \int |\dot{h}|^2 dS = \frac{G}{5c^9} \left[\frac{d^3}{dt^3} I_{ij} \frac{d^3}{dt^3} I^{ij} \right] \quad (5.5)$$

si ha una relazione tra luminosità ed energia irradiata. Pertanto chiamando d_L la distanza della sorgente e h_{max} l'ampiezza massima del segnale

$$L \sim \frac{c^3 d_L^2}{4G} |\dot{h}|^2 \sim \frac{c^5}{4G} \left(\frac{\omega_{og} d_L h_{max}}{c} \right)^2 \quad (5.6)$$

Il risultato di questo conto restituisce $300 Mpc \sim 9.785 \times 10^8$ anni luce.

Un'analisi dettagliata [20] conduce alle seguenti stime: l'evento rivelato è stato generato da due buchi neri di $36_{-4}^{+5} M_{\odot}$ e $29_{-4}^{+4} M_{\odot}$. Il buco nero finale generato ha massa $62_{-4}^{+4} M_{\odot}$ e

momento angolare $0.67^{+0.05}_{-0.07}$. Una quantità di energia pari a $3.0^{+0.5}_{-0.5}M_{\odot}c^2$ è stata irradiata sotto forma di onde gravitazionali. La distanza effettiva del sistema è $d_L \sim 410^{+160}_{-180}Mpc \sim 1.337 \times 10^9 ly$.

5.2 Analisi del Ringdown

Per andare a vedere se effettivamente c'è stato il ringdown predetto dalla teoria nella fase successiva al merging, è stata eseguita una analisi *bayesiana* dei dati. In base ai dati ricavati dalla fase di spiraleggiamento è possibile stimare i valori della frequenza e tempo di smorzamento del modo quasi-normale meno smorzato, $l = 2, m = 2, n = 0$: $\nu_{220} = 251^{+8}_{-8}Hz$ e $\tau_{220} = 4.0^{+0.3}_{-0.3}ms$, riportata nel plot al 90% di confidenza.

Il segnale cercato è un esponenziale smorzato del tipo:

$$h(t) = Ae^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \cos(2\pi\nu_0(t-t_0) + \phi_0) \quad (5.7)$$

dove sono state lasciate libere la fase iniziale e il tempo di inizio del ringdown: non sapendo quando il buco nero inizia a comportarsi secondo la teoria dei modi quasi normali, il tempo di inizio viene deciso in base a quando i dati corrisponderanno al modello. Inoltre si è posto $h(t < t_0) = 0$ per far iniziare il segnale di ringdown al tempo t_0 scelto per l'analisi. Per t_0 sono stati scelti ed analizzati 4 valori: $t_0 = t_M + 1, 3, 5, 6.5ms$ dove t_M è il *merger time*, ovvero l'istante in cui l'ampiezza del segnale è massima.

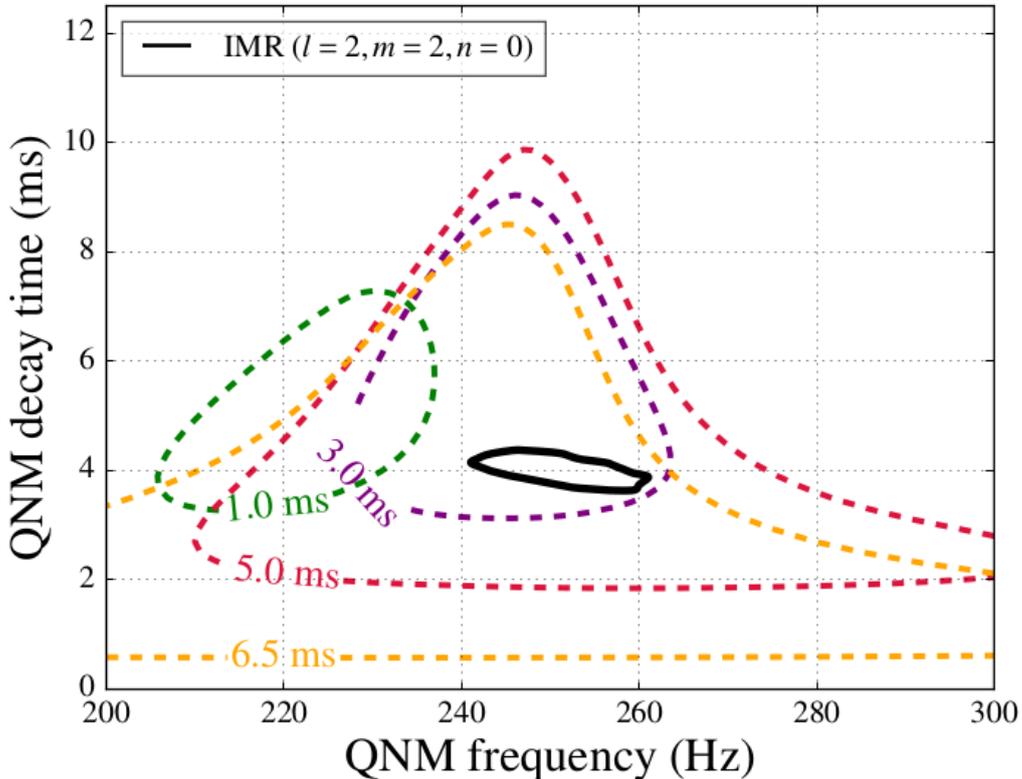


Figura 5.2: Regioni al 90% di confidenza per frequenza ν_0 e tempo di smorzamento τ per i tempi di inizio considerati $t_0 = t_M + 1, 3, 5, 6.5ms$. La linea nera continua mostra la regione al 90% di confidenza secondo i dati ricavati di massa e momento angolare del buco nero finale [16].

Il passo successivo è il calcolo del *fattore di Bayes* tra la sinusoide smorzata ed il rumore gaussiano ai vari tempi di inizio e le stime a posteriori di $\{\nu_0, \tau\}$ in funzione dei tempi di

inizio del ringdown. Come assunzioni a priori si assume che la frequenza sia distribuita uniformemente tra i 200 e i 300 Hz, e il tempo di smorzamento tra 0.5 e 20 ms. Riguardo ampiezza e fase, una volta eseguita la trasformazione da $(A, \phi) \rightarrow (A_s = -A \sin \phi, A_c = A \sin \phi)$, è stata scelta una distribuzione gaussiana isotropa, con una scala caratteristica per l'ampiezza di $A \in [2, 10] \times 10^{-22}$. I risultati sono riportati in figura 5.2:

La figura mostra che la regione di confidenza si sovrappone con i valori predetti secondo i parametri misurati dalla forma d'onda IMR per $t_0 = t_M + 3ms$ ($\sim 10M$ dopo il merger in unità geometriche). Per questo valore si ottiene un fattore di Bayes $\log_{10}B \sim 14$ e rapporto segnale rumore SNR ~ 8.5 . Per $t_0 = t_M + 5ms$ la regione di confidenza si sovrappone ancora, ma $\log_{10}B = 6.5$ e SNR ~ 6.3 . Infine per $t_0 = t_M + 6.5ms$ si ottiene $\log_{10}B \sim 3.5$ e SNR ~ 4.8 . Il segnale si perde poco dopo per $t_0 \gtrsim t_M + 9ms$, dove $B \lesssim 1$.

L'aver misurato frequenza e tempo di decadimento di un solo modo quasi-normale non permette di concludere di aver visto il modo quasi-normale meno smorzato del buco nero finale. Tuttavia le simulazioni numeriche affermano che, nel caso di $M \sim 68M_\odot$ la frequenza dovrebbe stabilizzarsi dai 3 ai 7 ms dopo il merger. Dal momento che in questa area gli intervalli di confidenza al 90% per i parametri stimati per la forma d'onda IMR e per la sinusoide smorzata sono concordi, *si può concludere che i dati sono compatibili con il modo quasi-normale meno smorzato predetto dalla relatività generale*. Rimane il fatto che la stima dei parametri del ringdown è affetta da un notevole errore. Ci si aspetta dai prossimi eventi (vedi Capitolo 6) uno statement più forte.

Capitolo 6

Conclusioni

L'analisi dei dati fornisce forte indicazione dell'esistenza dei modi quasi normali, ma l'evento GW150914 non è in grado di dare una stima dei parametri molto stringente, e il modello rimane soltanto debolmente verificato.

Uno statement più forte giungerebbe se il rapporto segnale rumore fosse più alto. Al fine di verificare se in futuro potremo aspettarci eventi con maggiore SNR, si consideri che il SNR (ρ) usando un *filtro ottimo* vale

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = 4 \int_0^{+\infty} \frac{|H(\nu)|^2}{S_{hh}(\nu)} d\nu \quad (6.1)$$

dove $H(\nu)$ è la trasformata di Fourier del segnale e $S_{hh}(\nu)$ è lo spettro di rumore del rivelatore (vedi Figura 4.5). Supponendo che il segnale sia interamente compreso dove S_{hh} ha valore minimo (nel caso di LIGO si tratta della banda 10Hz-10kHz) e che S_{hh} abbia ivi valore costante si può scrivere

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 \sim \frac{4}{S_{hh}} \int_0^{+\infty} |H(\nu)|^2 d\nu \quad (6.2)$$

Si consideri ora che il segnale può essere approssimato con il modo dominante 22 [18]

$$h_{+, \times}(t) \sim \frac{AM}{r} e^{-\frac{t}{\tau_{22}}} \cos(\omega_{22}t) Y_{+, \times}^{22}(\iota) \quad (6.3)$$

dove ι è l'angolo di vista. Il modulo quadro della trasformata di Fourier della (6.3) è del tipo $\frac{1}{(\omega_{22}-\omega)^2-1/\tau^2}$. L'area di questa curva va come $\frac{1}{\tau^2}\tau = \tau$, e si ottiene quindi che

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 \propto \frac{A^2}{S_{hh}} \frac{M^2 \tau_{22}}{r^2} Y_{+, \times}^{22}(\iota) \propto \frac{A^2}{S_{hh}} \frac{M^3}{r^2} Y_{+, \times}^{22}(\iota) \quad (6.4)$$

dal momento che $\tau \propto M$ (vedi (3.73)). Risulta quindi che il rapporto segnale rumore scala come $M^{\frac{3}{2}}$. Un segnale generato da un buco nero di massa maggiore addurrebbe quindi prove più stringenti. Tuttavia $\omega \sim \frac{1}{M}$, e c'è il rischio di andare fuori banda di sensibilità del rivelatore. L'evento GW150914 ha frequenza $\sim 250Hz$ e massa $62M_{\odot}$. LIGO mantiene ancora una buona sensibilità attorno ai $50Hz$, e questo permette di aumentare la massa di un fattore 5 ottenendo $\sim 300M_{\odot}$. In queste condizioni il rapporto segnale rumore aumenterebbe di un fattore $5^{\frac{3}{2}} \sim 11.2$, ammesso che nell'universo si trovino buchi neri di queste dimensioni.

Infine dalla (6.4) emerge che il rapporto segnale rumore dipende dall'armonica sferica. Questo particolare denota la dipendenza dalla direzione di vista del segnale. Detto ι l'angolo formato tra la direzione del momento angolare orbitale e la congiungente tra la binaria e il luogo di osservazione, si trova che i singoli modi hanno una direzione preferenziale di osservazione (vedi figura 6.1).

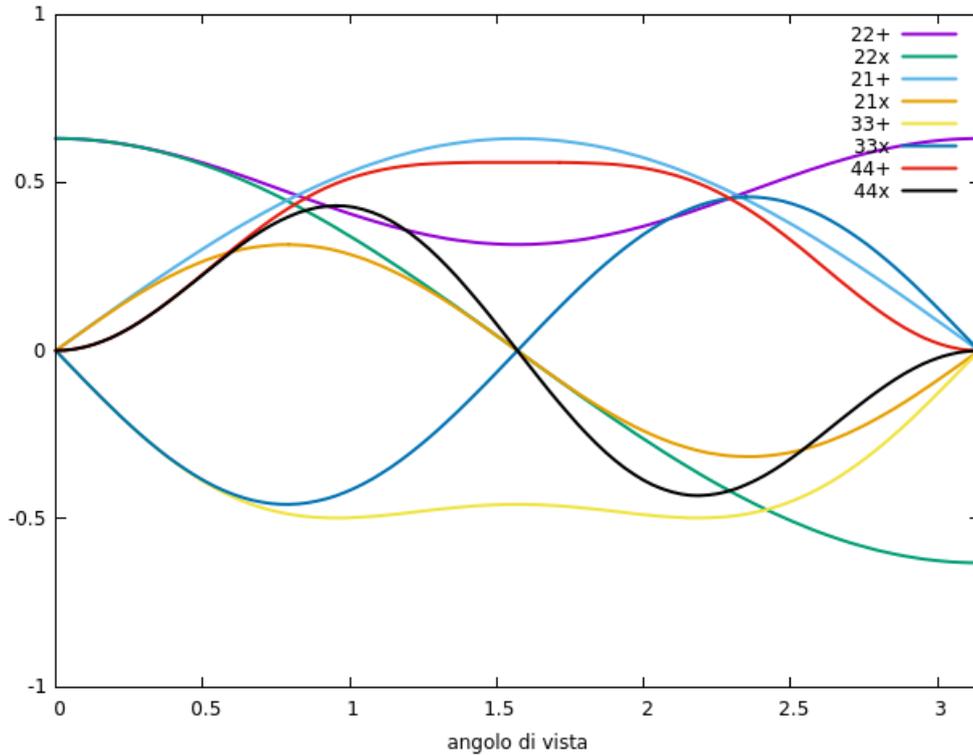


Figura 6.1: Le armoniche sferiche pesate con spin per i modi 21, 22, 33, 44

Nel caso di GW150914, tale angolo era molto piccolo. In queste condizioni è ben visibile il modo 22, ma sono meno visibili tutti gli altri modi (illustrati di qui a poco).

L'obiettivo della tesi è discutere la possibilità di confermare il *no-hair theorem* tramite la rivelazione di uno spettro di modi quasi. Sarebbe a questo scopo sufficiente misurare due modi quasi-normali durante il ringdown, e poi confrontarli tra di loro.

Il segnale di ringdown visibile è una sovrapposizione dei modi quasi-normali del buco nero, definiti dagli indici l, m, n . Ci si può tuttavia limitare a considerare solo i modi più importanti, che sono i modi $n = 0, l = 2, m = 1$ e $n = 0, m = l = \{2, 3, 4\}$ (chiamati in genere 21, 22, 33, 44) [18]. Eseguendo una simulazione per un merging di buchi neri dove il risultante ha una massa di $5 \times 10^6 M_{\odot}$, $q = \frac{m_1}{m_2} = 2$ alla distanza di $1Gpc$ si ottengono per i singoli modi le ampiezze riportate in Figura 6.2. L'ampiezza attesa dei 4 modi principali mostrati dipende dal rapporto tra le masse dei due buchi neri progenitori. Il risultato delle simulazioni è riportato in Figura 6.3 in funzione del rapporto simmetrico di massa $\nu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{q}{(1+q)^2}$.

L'ampiezza del modo $m = l = 2$ aumenta linearmente con la simmetria del sistema, ovvero con ν , mentre l'ampiezza degli altri tre modi ha un andamento opposto. Nel caso di GW150914 le masse erano quasi uguali: ci si può auspicare quindi in futuro di rivelare eventi dove il rapporto tra le due masse sia più sbilanciato. Come già detto riguardo la Figura 6.1, l'angolo di vista di GW150914 è stato piccolo, e questo ha reso poco visibili i modi 21, 33, 44. La loro rivelazione sarebbe facilitata se ι valesse $\pi/4$ o $3\pi/4$.

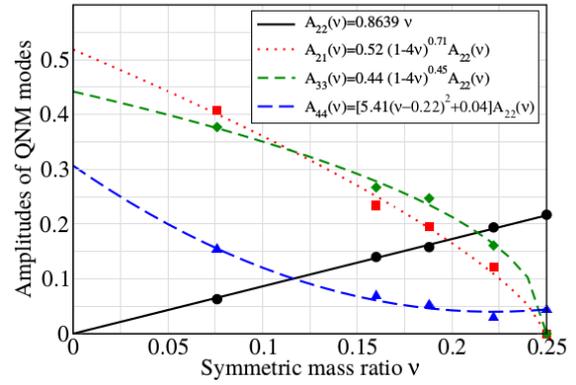
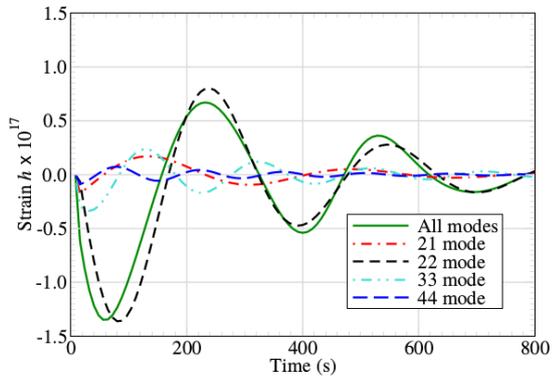


Figura 6.2: Le ampiezze dei singoli modi di Figura 6.3: Ampiezza dei modi in funzione un buco nero di massa $5 \times 10^6 M_\odot$ alla distanza di $1Gpc$, eccitato dopo il merger di due buchi neri aventi rapporto di massa $q = \frac{m_1}{m_2} = 2$ [18].

Appendice A

L'Approssimazione WKB ed l'Adattamento di Schutz e Will

A.1 L'Approssimazione WKB

L'approssimazione WKB, che prende il nome dai tre propositori *Wentzel, Kramers e Brillouin*, è una approssimazione introdotta nella *meccanica quantistica* qualora le dimensioni L che determinano le condizioni di un dato problema concreto sia molto maggiore della *lunghezza d'onda di de Broglie* delle particelle. In tali condizioni le proprietà del problema sono vicine a quelle classiche, ed infatti l'approssimazione è chiamata anche *semiclassica*.

Considerando l'equazione di Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + U(x)\psi = E\psi \quad (\text{A.1})$$

si può eseguire la sostituzione formale

$$\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}\sigma} \quad (\text{A.2})$$

dove σ è una funzione sviluppabile in \hbar :

$$\sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^k \sigma_k = \sigma_0 + \frac{\hbar}{i}\sigma_1 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \sigma_2 + \dots \quad (\text{A.3})$$

Sostituendo quindi la (A.2) nella (A.1) si ottiene

$$(\sigma')^2 - i\hbar\sigma'' = p^2(x) \quad (\text{A.4})$$

dove

$$p^2(x) = 2m(E - U(x)) \quad (\text{A.5})$$

rappresenta, nel caso $E > U(x)$ l'impulso classico, e l'apostrofo indica la derivata rispetto ad x .

Approssimando la (A.3) con il solo primo termine σ_0 , si può ricavare immediatamente il valore di quest'ultimo, ottenendo:

$$(\sigma'_0)^2 = p^2 \quad (\text{A.6})$$

dove si è ommesso il termine contenente \hbar : tale approssimazione è possibile se nella (A.4) il secondo termine è molto minore del primo, ovvero:

$$\hbar \left| \frac{\sigma''}{\sigma'} \right| \ll 1 \implies \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\hbar}{\sigma'} \right) \right| \ll 1 \quad (\text{A.7})$$

Si ricava quindi:

$$\sigma_0 = \pm \int p(x) dx \quad (\text{A.8})$$

dove ai due segni possibili della radice corrispondono due soluzioni linearmente indipendenti.

Se in prima approssimazione $\sigma'_0 = p$, allora la condizione (A.7) può essere riscritta come

$$\frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \ll 1 \quad (\text{A.9})$$

dove $\lambda(x) = 2\pi\hbar/p(x)$ è la lunghezza d'onda di de Broglie. Questa è proprio la condizione di *semiclassicità* cercata, secondo la quale la lunghezza d'onda della particella deve variare poco su distanze dello stesso ordine. Un altro modo per ottenere la condizione (A.9) è il seguente:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{2m(E - U(x))} = -\frac{m}{p} \frac{dU}{dx} = \frac{m}{p} F \quad (\text{A.10})$$

dove $F = -\frac{dU}{dx}$ è la forza classica agente sulla particella. Questa forma porta all'equazione:

$$\hbar \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{p} \right) \right| \ll 1 \implies \frac{m\hbar|F|}{p^3} \ll 1 \quad (\text{A.11})$$

Appare evidente che tale condizione non è rispettata nei *punti di inversione*, dove $E \approx U(x)$ e $p \approx 0$.

Proseguendo, si può includere anche il termine σ_1 ottenendo:

$$\left(\sigma'_0 + \frac{\hbar}{i} \sigma'_1 \right)^2 + \frac{\hbar}{i} \left(\sigma''_0 + \frac{\hbar}{i} \sigma''_1 \right) = p(x) \quad (\text{A.12})$$

sviluppando quindi i prodotti, tralasciando tutto ciò che viene moltiplicato per \hbar^2 e ricordando il valore già trovato per σ_0 (A.6) si ottiene

$$\sigma'_1 = -\frac{\sigma''_0}{\sigma'_0} = -\frac{p'}{2p} \quad (\text{A.13})$$

integrando questa relazione si trova, omettendo la costante di integrazione

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2} \ln(p) \quad (\text{A.14})$$

Sostituendo dunque i due risultati trovati per σ_0 e σ_1 si trova la funzione d'onda approssimata al primo ordine:

$$\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma_0 + \frac{\hbar}{i}\sigma_1)} = \frac{C_1}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int p dx\right) + \frac{C_2}{\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int p dx\right) \quad (\text{A.15})$$

L'espressione precedente potrebbe essere estesa a termini di ordine successivo al primo, tuttavia l'approssimazione WKB consiste proprio nel fermarsi ai termini del primo ordine. Si assume quindi che la funzione d'onda abbia la forma (A.15), e gli integrali vengono valutati nell'intervallo $[x_0, x]$ dove x_0 è un punto di riferimento, dal quale dipendono anche i valori delle costanti C_1 e C_2 .

Nel caso in cui la particella si trovi nell'area classicamente inaccessibile, dove $U(x) > E$ e la funzione $p(x)$ è immaginaria pura, e gli esponenti sono reali. In questi casi la funzione d'onda si scrive:

$$\psi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{|p|}} \exp\left(-\int |p| dx\right) + \frac{C_2}{\sqrt{|p|}} \exp\left(\int |p| dx\right) \quad (\text{A.16})$$

tuttavia l'approssimazione semiclassica non consente di tenere i termini esponenzialmente piccoli rispetto a quelli esponenzialmente grandi, e quindi si ha a che fare in genere con uno solo dei due termini della (A.16).

A causa dell'impossibilità di utilizzare questa approssimazione nei punti di inversione, l'insieme delle coordinate si trova ad essere partizionato in vari intervalli, ed occorre quindi determinare le costanti per raccordare la funzione d'onda tra i vari intervalli. Se avessimo ad esempio a che fare con un potenziale tale che per $x = a$ si abbia $E = U(x)$, e $U(x) > E$ per $x > a$ avremmo la zona vietata classicamente in $x > a$ e la zona permessa classicamente in $x < a$. Per $x < a$ la funzione d'onda sarà una combinazione reale delle due funzioni d'onda semiclassiche, ovvero la (A.15), dove gli integrali vengono calcolati tra x ed a . Invece per $x > a$ si avrà una sola delle (A.16), e vale la stessa condizione per gli integrali.

L'idea per svolgere il conto è quella di risolvere *esattamente* l'equazione di Schrödinger con una approssimazione lineare del potenziale in un intorno di $x = a$. In seguito si può quindi connettere lo sviluppo asintotico di questa soluzione alla soluzione WKB valida per $|x - a| \gg 0$.

Nell'intorno di $x = a$ si può approssimare $E - U(x) \sim F_0(x - a)$, dove $F_0 = -\frac{dU}{dx}(x = a) < 0$ è la forza classica. Il caso in questione diventa quindi quello del moto di una particella in un campo costante, e l'equazione di Schrödinger (A.1) diventa:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = -\frac{2m}{\hbar^2} F_0(x - a) \quad (\text{A.17})$$

includendo $\frac{2m}{\hbar^2}$ nella costante F_0 e ponendo $(x - a) = (-F_0)^{-\frac{1}{3}} z$ l'equazione può essere riscritta come

$$\frac{d^2}{dz^2} \psi - z\psi = 0 \quad (\text{A.18})$$

Le soluzioni indipendenti di questa equazione differenziale sono dette *funzioni di Airy*, e sono spesso indicate come $Ai(z)$ e $Bi(z)$. Il comportamento di queste funzioni per $|z| \rightarrow \infty$ è il seguente:

$$\frac{|z|^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)_{z \rightarrow -\infty} \longleftarrow Ai(z) \longrightarrow_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.19})$$

$$-\frac{|z|^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)_{z \rightarrow -\infty} \longleftarrow Bi(z) \longrightarrow_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} e^{+\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.20})$$

Segue che per trovare i coefficienti delle funzioni d'onda in questione bisogna confrontare i limiti per le due funzioni d'onda per la zona classicamente proibita e la zona classicamente permessa con le espressioni asintotiche (A.19, A.20).

A.2 Effetto Tunnel

Il caso interessante per il problema dei modi quasi-normali di cui si sta cercando la soluzione è quello di un'onda che urta contro una barriera di potenziale, e che ha una probabilità non nulla di attraversarla. Se la barriera soddisfa le condizioni di quasi-classicità, allora la questione può essere approssimata secondo il metodo esposto. Tali condizioni implicano che la barriera sia *larga*, e che il coefficiente di trasmissione nel caso quasi-classico sia piccolo.

Il potenziale in questione è quello mostrato nella figura A.1. Assumendo che la particella incida sulla barriera provenendo da sinistra, dalla regione I, questo comporta che nella regione III sia presente solo la parte trasmessa dell'onda. La funzione d'onda nella zona trasmessa può essere scritta come:

$$\psi_{III}(x) = \sqrt{\frac{D}{v}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_b^x p dx + \frac{i\pi}{4}\right) \quad (\text{A.21})$$

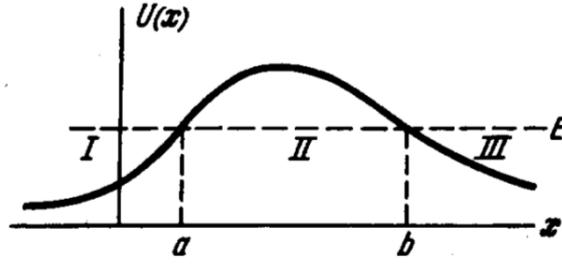


Figura A.1: Barriera di Potenziale [5]

dove $v = \frac{p}{m}$ e D è la *densità di corrente dell'onda*. La regola di connessione sopra ricavata assume in questo caso la seguente forma, volendo considerare il punto di inversione b :

$$\frac{C}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{x, x>b}^b p dx + \frac{i\pi}{4}\right) \rightarrow \frac{C}{\sqrt{|p|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \left| \int_{x, x<b}^b p dx \right|\right) \quad (\text{A.22})$$

dove l'integrale di sinistra è svolto per $x > b$, mentre quello di destra per $x < b$. Applicando la (A.22) alla (A.21) si può ricavare la funzione d'onda nella regione II:

$$\begin{aligned} \psi_{II}(x) &= \sqrt{\frac{D}{v}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \left| \int_x^b p dx \right|\right) \\ &= \sqrt{\frac{D}{v}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \left| \int_a^b p dx \right| - \frac{1}{\hbar} \left| \int_a^x p dx \right|\right) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Per il punto di inversione a vale inoltre la seguente relazione:

$$\frac{C}{2\sqrt{|p|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \left| \int_a^x p dx \right|\right) \rightarrow \frac{C}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \left| \int_a^x p dx \right|\right) \quad (\text{A.24})$$

Applicando quindi la condizione (A.24) alla (A.23) si trova la funzione d'onda nella regione I:

$$\psi_I(x) = 2\sqrt{\frac{D}{v}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx\right) \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^a p dx - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.25})$$

Ponendo

$$D = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p| dx\right) \quad (\text{A.26})$$

la ψ_I assume la forma:

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= \frac{2}{\sqrt{v}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^a p dx - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{v}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx + \frac{i\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{v}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx - \frac{i\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Il primo termine della (A.27) corrisponde all'onda incidente, e per $x \rightarrow -\infty$ corrisponde ad un'onda piana $\psi \approx e^{ipx/\hbar}$. Avendo posto la densità di corrente pari ad uno nell'onda incidente, D coincide con il coefficiente di trasmissione.

A.3 Il Metodo Semianalitico di Schutz e Will

Il metodo di Schutz e Will si propone di risolvere l'equazione indipendente dal tempo (3.44) con una approssimazione analoga alla WKB, dal momento che tali equazioni hanno il medesimo aspetto. Ricordando la (3.44):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) + (\omega^2 - V(x)) \phi(x) = 0 \quad (\text{A.28})$$

questa equazione può essere scritta nella forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) + Q(x) \phi(x) = 0 \quad (\text{A.29})$$

Nel caso dell'equazione di Schrödinger (A.1), $-Q(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [U(x) - E]$, mentre nel caso dell'equazione d'onda dei modi quasi-normali $-Q(x) = -(\omega^2 - V(x))$. Ricordando la forma del potenziale, $Q(x)$ tende ad essere una costante per $|x| \rightarrow \infty$, e $\phi(x) \approx e^{\pm i\omega x}$, $Re(\omega) > 0$, come già detto precedentemente.

In meccanica quantistica generalmente si esegue il conto per la trasmissione e la riflessione di un'onda che incide contro una barriera di potenziale, anche se in genere il conto viene eseguito per una energia della particella minore del massimo del potenziale, ottenendo così che l'ampiezza dell'onda incidente e l'ampiezza dell'onda riflessa sono comparabili, mentre è piccola l'ampiezza dell'onda trasmessa: questa è data in genere da e^{-B} dove B è dato da un integrale di $[-Q(x)^{-\frac{1}{2}}]$ nei punti di inversione. Nel caso dei modi quasi-normali dei buchi neri invece le condizioni al contorno sono diverse, e ci si aspetta che onda trasmessa e riflessa siano comparabili in ampiezza. Se il coefficiente di riflessione è dato dall'integrale suddetto, pare assurdo cercare una approssimazione di questo tipo, per la quale vuole che $e^{-B} \approx 1$. Tuttavia la ricerca ha senso nel singolo caso in cui $-Q(x) = 0$: in questo caso si ottengono due coefficienti di trasmissione e riflessione uguali e pari a $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Questo suggerisce che i modi quasi-normali esistono per frequenze tali che $Q(x) \approx 0$. In questo caso tuttavia non si può applicare il metodo WKB standard, perché i punti di inversione classici sono troppo vicini: la soluzione è *raccordare simultaneamente le due soluzioni WKB in entrambi i punti di inversione*, dal momento che conosciamo il loro andamento nei limiti destro e sinistro.

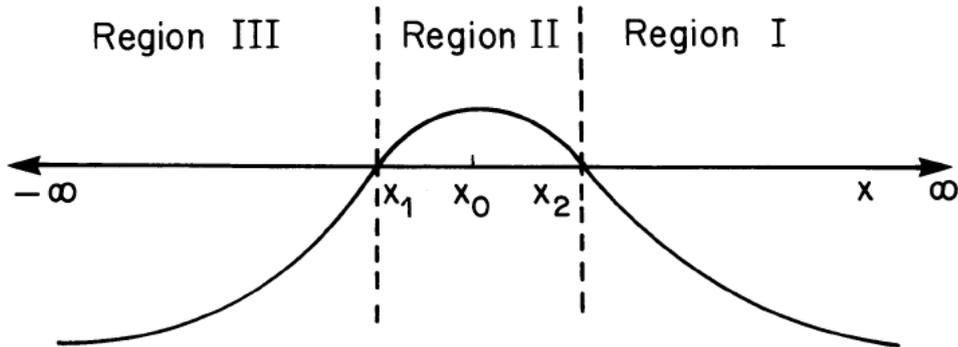


Figura A.2: La Barriera di Potenziale approssimata da Schutz e Will [6]

Al di fuori dei punti di inversione, la funzione d'onda è:

$$\psi_{III}(x) \approx Q^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\pm i \int_x^{x_1} [Q(t)]^{\frac{1}{2}} dt\right) \quad (\text{A.30})$$

$$\psi_I(x) \approx Q^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\pm i \int_{x_2}^x [Q(t)]^{\frac{1}{2}} dt\right) \quad (\text{A.31})$$

Nella regione II si può invece approssimare $Q(x)$ con una parabola, dal momento che i punti di inversione sono vicini. Quindi se $[-Q(x)]_{max} \ll |Q(\pm\infty)|$, allora, detto x_0 il punto a metà tra i due punti di inversione x_1 e x_2 , Q può essere approssimata con

$$Q(x) = Q_0 + \frac{1}{2}Q_0''(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^3 \quad (\text{A.32})$$

con $Q_0 = Q(x_0) < 0$ e $Q_0'' = \frac{\partial^2}{\partial x^2}Q(x_0) > 0$. Si può trovare quindi la funzione d'onda nella zona II che si raccorda con le altre funzioni nelle zone I e III. La risoluzione di questo problema porta ad una quantizzazione delle frequenze, secondo

$$\frac{Q_0}{\sqrt{2Q_0''}} = i \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A.33})$$

per $n = 0, 1, 2, \dots$. Questa equazione ha validità del tutto generale. Applicando questa equazione alla $Q(x)$ definita nel caso dell'equazione d'onda dei buchi neri, si ottiene che

$$(M\omega_n)^2 = V_l(x_0) - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \left[-2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_l(x_0) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.34})$$

che è la condizione (3.64) già mostrata.

Bibliografia

- [1] M. P. Hobson, G. Efstathiou, A. N. Lasenby, *General Relativity*, Cambridge University Press, 2006
- [2] M. Maggiore, *Gravitational Waves, Volume 1: Theory and Experiments*, Oxford University Press, 2008
- [3] H. P. Nollert, *Quasinormal modes: the characteristic 'sound' of black holes and neutron stars*, 1999
- [4] K. D. Kokkotas, *Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes*, 1999
- [5] L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Fisica Teorica 3*, Editori Riuniti, 1976
- [6] B.F. Schutz, C. M. Will, *Black Hole Normal Modes: A Semianalytic Approach*, 1985
- [7] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford, 1983
- [8] Comparing search techniques for studying collisions of binary black holes, Satya Mohapatra, Laura Cadonati, Sarah Caudill, James Clark, Chad Hanna, Sergey Klimenko, Chris Pankow, Ruslan Vaulin, Gabriele Vedovato, and Salvatore Vitale
- [9] G. Pizzella, *Fisica Sperimentale del Campo Gravitazionale*, La Nuova Italia Scientifica, 1993
- [10] Oleg Verkhodanov, *On the detection of gravitational waves by the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO)*, 2016
- [11] B. P. Abbott *et al.*, *GW150914: The Advanced LIGO Detectors in the Era of First Discoveries*, 2016
- [12] www.ligo.caltech.edu
- [13] S. A. Teukolsky, *Phys. Rev. Lett.* **29** 1114, 1972
- [14] F. Echeverria, *Phys. Rev. D* 40 3194, 1988
- [15] E. A. Flanagan, S. A. Hughes, *Measuring gravitational waves from binary black hole coalescences: I. Signal to noise for inspiral, merger, and ringdown*, 1997
- [16] *Tests of general relativity with GW150914*, LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, 2015
- [17] *Innermost stable circular orbits of spinning test particles in Schwarzschild and Kerr space-times*, P. I. Jefremov, O. Y. Tsupko and G. S. Bisnovaty-Kogan, 2015
- [18] *Bayesian model selection for testing the no-hair theorem with black hole ringdowns*, S. Gossan, J. Veitch, and B. S. Sathyaprakash, 2012

- [19] E. Berti, V. Cardoso, and C. M. Will, Phys.Rev. D73, 064030 (2006), gr-qc/0512160
- [20] Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), Phys. Rev. Lett. **116** 061102, 2016
- [21] Black-hole hair loss: learning about binary progenitors from ringdown signals, I. Kamaretsos, M. Hannam, S.Husa, and B.S. Sathyaprakash, 2012

Ringraziamenti

Alla fine di questa avventura, voglio ringraziare chi ha contribuito a portarmi alla fine di questi tre anni. Ringrazio innanzitutto il professor Zendri, che con disponibilità, la dedizione e la simpatia mi ha permesso di cimentarmi in un argomento tanto ricco ed affascinante. Ho veramente apprezzato come mi ha avvicinato al mondo della ricerca e stimolato la mia curiosità.

Ringrazio tutti gli amici con cui ho condiviso la vita universitaria: i compagni di corso Andrea, Beatrice, Lorenzo, Clara, Arianna e Marco ed anche Pierfrancesco, Giorgio, My, e Sergej.

Ringrazio tutti i compagni di squadra che mi hanno aiutato a sfogarmi negli allenamenti di questi tre anni.

Ringrazio Ugo, il mio insegnante di pianoforte che mi ha fatto appassionare alla musica da dieci anni a questa parte. So che non ci vedremo più, ma il suo contributo alla mia persona è stato più che notevole.

Ringrazio infine tutti i membri della mia famiglia, che tanto mi hanno aiutato in questi 21 anni. In particolare mio nonno Guido Pizzella che si è applicato all'ambito delle onde gravitazionali prima di me, inducendomi alla scelta di questo argomento, ed i miei genitori per avermi sempre permesso di studiare e soprattutto iscritto a scuola un anno prima, facendomi guadagnare un anno il cui valore inizia finalmente ad essermi chiaro. Ringrazio i manicaretti di nonna Carla che mi hanno sempre sostenuto nelle giornate di studio. Per ultima ringrazio la neonata gattina che mi ha tenuto compagnia con la sua vitalità in queste ultime serate.