UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTA' DI SCIENZE MM. FF. NN.

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

TESI DI LAUREA

DISUGUAGLIANZE ASSOCIATE AI TRIANGOLI

RELATORE
DOTT. FRANCIS J. SULLIVAN

LAUREANDO
GIOVANNA SCIOLI

ANNO ACCADEMICO 2003-2004

Poche parole per presentarmi e per testimoniare che nella vita non bisogna "mai dire mai".

Eccomi alle ultime battute, spero, di questa avventura strana ma bella, tornerò ancora una volta a Padova, poi non so se mi capiterà più di tornarvi, certo ne avrò nostalgia e sarò sempre grata a questa città per avermi regalato questa bellissima esperienza.

Dedico questo breve, ma sofferto, lavoro a tutti coloro, e sono tanti, che hanno creduto in me e mi hanno dato la forza e il coraggio per cimentarmi in questa prova, a tutti loro va il mio grazie.

Mi piace, anche, ringraziare i professori che ho avuto la fortuna di incontrare e che hanno dimostrato una squisita delicatezza e massima disponibilità nei miei confronti.

UN METODO GENERALE PER STABILIRE LE DISUGUAGLIANZE GEOMETRICHE IN UN TRIANGOLO

1. Introduzione

I triangoli sono, assieme ai cerchi, le figure geometriche piane più importanti, sempre protagonisti nella geometria euclidea del piano e fonti inesauribili di problemi e di dimostrazioni più o meno complicate.

Razvan Alin Satnoianu ce ne offre un esempio nel numero di Aprile 2001 - Monthly 108, dove ci presenta un principio semplice, ma efficace, di dimostrazione riconducibile a una vasta gamma di disuguaglianze geometriche nei triangoli, facendo uso delle funzioni trigonometriche degli angoli del triangolo.

Il metodo consiste nel ridurre il caso di triangoli generici a quello di triangoli isosceli e dimostrare la disuguaglianza per questi ultimi.

Descriviamo il metodo:

per un dato triangolo euclideo denotiamo con a,b,c le misure, in radianti, dei suoi angoli, scelti in maniera che

$$0 < a \leq b \leq c < \pi \qquad e \qquad a + b + c = \pi \tag{1.1}$$

a volte è conveniente assumere che $c \leq b \leq a$.

Per stabilire che sussiste la disuguaglianza $f(a,b,c) \geq 0$, basta dimostrare che

$$f(a,b,c) \geq f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) \geq 0 \tag{1.2}$$

dove la seconda disuguaglianza rappresenta il caso di un triangolo isoscele.

L'esperienza ci mostra che spesso è più facile dimostrare la seconda disuguaglianza della (1.2) piuttosto che direttamente la prima.

Per stabilire la prima disuguaglianza, consideriamo la differenza

$$e = e(a,b,c) = f(a,b,c) - f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) \tag{1.3}$$

e usiamo appropriate disuguaglianze trigonometriche per dimostrare che $e \geq 0$.

Si può anche porre $d = (b+c)/2$ e considerare la funzione

$$h(t) = f(a, d-t, d+t) - f(a,d,d)$$

dove $0 \leq t \leq d-a < \pi/2$; in tal caso notiamo che $h(0) = 0$, e quindi, usando i metodi di calcolo, dimostrare che h è non decrescente.

Nella pratica possiamo incontrare forme più o meno complicate per la funzione f, ad esempio formule dipendenti da altri elementi del triangolo come altezza, bisettrice, raggi, in ognuno di tali casi, però, grazie alla trigonometria che ci permette di risolvere facilmente numerosi problemi di geometria euclidea senza dover ricorrere a difficili teoremi o noiosi passaggi algebrici, è sempre possibile esprimere i risultati in termini che coinvolgono solo le funzioni trigonometriche degli angoli del triangolo, il che riduce il problema al caso mostrato sopra.

Illustriamo questo metodo prendendo spunto da una varietà di esempi, presi da problemi proposti e pubblicati in Monthly attraverso gli anni, nel prossimo paragrafo.

2. Illustrazioni

2.1 E' noto che in ogni triangolo si ha la disuguaglianza

$$sen\ (a/2) + sen\ (b/2) + sen\ (c/2) \leq 3/2 \qquad (2.1)$$

La dimostrazione classica usa la concavità della funzione *sen (x/2)* su un intervallo appropriato.

La ricerca della concavità, verso l'alto o verso il basso, di una funzione si effettua attraverso lo studio del segno della derivata seconda. Dove questa risulta positiva, la concavità sarà rivolta verso l'alto, verso il basso in caso contrario.

Sia $f(x) = sen\ (x/2)$, calcoliamo la derivata prima $f'(x) = ½ \cos\ (x/2)$ e la derivata seconda $f''(x) = -¼\ sen\ (x/2)$ che per $0 < x < \pi$ è sempre negativa essendo il seno positivo: in questo caso la concavità sarà rivolta verso il basso e la funzione risulta convessa.

Inoltre sappiamo che una funzione per essere convessa deve essere tale che il suo valore nel punto medio dell'intervallo di definizione è minore o uguale alla media dei valori assunti agli estremi, cioè in formule

$$f\ [(x+y)/2] \geq ½\ f(x) + ½\ f(y)$$

e nel nostro caso deve essere tale che

$$sen\ [(x+y)/4] \geq ½\ [sen(x/2) + sen\ (y/2)]$$

quindi

$$2\ sen\ [(x+y)/4] \geq sen(x/2) + sen\ (y/2)$$

Usando il nostro metodo, invece, consideriamo la funzione

$$f(a,b,c) = 3/2 – sen\ (a/2) – sen\ (b/2) – sen\ (c/2)$$

e la funzione

$$f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = 3/2 – sen\ (a/2) – 2\ sen\ [(b+c)/4]$$

dobbiamo provare che

$$e = f(a,b,c) - f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) \geq 0$$

Infatti

$$e = f(a,b,c) - f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = 3/2 – sen\ (a/2) – sen\ (b/2) – sen\ (c/2) – 3/2 + sen\ (a/2) + 2\ sen\ [(b+c)/4]$$

$$e = 2\ sen\ [(b+c)/4] – [sen\ (b/2) + sen\ (c/2)]$$

Ora consideriamo la formula di prostaferesi:

$$sen\ x + sen\ y = 2\ sen\ [(x+y)/2] \cos\ [(x-y)/2]$$

che possiamo dimostrare facilmente ponendo

$$x = (x+y)/2 + (x-y)/2 \qquad e \qquad y = (x+y)/2 - (x-y)/2$$

da cui

$$sen\ x + sen\ y = sen\ [(x+y)/2 + (x\text{-}y)/2] + sen\ [(x+y)/2 – (x\text{-}\ y)/2] =$$

$$=sen\ [(x+y)/2]\ cos\ [(x\text{-}y)/2] + cos\ [(x+y)/2]\ sen\ [(x\text{-}y)/2] +$$

$$sen\ [(x+y)/2]\ cos\ [(x\text{-}y)/2] - cos\ [(x+y)/2]\ sen\ [(x\text{-}y)/2]$$

e quindi

$$sen\ x + sen\ y = 2\ sen\ [(x+y)/2]\ cos\ [(x\text{-}y)/2]$$

nel nostro caso sarà

$$sen\ (b/2) + sen\ (c/2) = 2\ sen\ [(b+c)/4]\ cos\ [(b\text{-}c)/4]$$

Ora, un’applicazione di questa formula dimostra che

$$e = f(a,b,c) – f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = 2\ sen\ [(b+c)/4]– [sen\ (b/2) + sen\ (c/2)] =$$

$$= 2\ sen\ [(b+c)/4] - 2\ sen\ [(b+c)/4]\ cos\ [(b\text{-}c)/4]$$

$$e = 2\ sen\ [(b+c)/4]\ [1 – cos\ [(b\text{-}c)/4)]]$$

che nell’intervallo (0, π) è non negativa, infatti poiché un teorema classico della geometria euclidea asserisce che in un triangolo la somma di due angoli è strettamente minore di un angolo piatto, si ha che

$$0 < (b+c) < \pi \qquad \text{da cui} \qquad 0 < (b+c)/4 < \pi/4$$

di conseguenza $0 < sen\ [(b+c)/4] < (\sqrt{}2)/2$ ed essendo la quantità entro la parentesi comunque positiva, o al massimo nulla, si dimostra che $e \geq 0$.

L’uguaglianza sussiste solo quando $b=c$, infatti in tal caso si ha:

$$e = f(a,b,c) – f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = 2\ sen\ (2b/4)\ (1\text{-}cos\ 0) = 0$$

Ora dimostriamo che $f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) \geq 0$, cioè che

$$3/2 – sen\ (a/2) – 2\ sen\ [(b+c)/4] \geq 0$$

il che equivale a dimostrare la (2.1) per un qualsiasi triangolo isoscele. Grazie alla simmetria possiamo considerare solo il caso:

$$b = c = t, \qquad a = \pi – 2t, \qquad con\ t > 0.$$

poi da

$$f(a,b,c) = 3/2 – sen\ (a/2) – sen\ (b/2) – sen\ (c/2)$$

si ha

$$f_1 = f(\pi – 2t, t, t) = 3/2 – sen\ [(\pi – 2t)/2] – sen\ (t/2) – sen\ (t/2) =$$

$$= 3/2 – sen\ [(\pi/2 – t)] – 2\ sen\ (t/2) = 3/2 – cos\ t – 2\ sen\ (t/2)$$

$$f_1 = 3/2 – cos\ t – 2\ sen\ (t/2)$$

Ora considerando il fatto che possiamo scrivere:

$$cos\ t = cos\ 2\ (t/2) = cos^2(t/2) – sen^2(t/2) = 1 – 2\ sen^2(t/2)$$

possiamo concludere dicendo che

$$f_1 = 3/2 – 1 + 2\ sen^2(t/2) – 2\ sen\ (t/2) =$$

$$f_1 = 2\ sen^2(t/2) – 2\ sen\ (t/2) + 1/2$$

che è non negativa per tutti i $0 \leq t \leq \pi$.

Infatti calcoliamo il minimo della funzione f_1, ponendo la derivata prima uguale a zero

$$f_1' = 4\ sen\ (t/2)\cos(t/2)\ ½\ - 2\cos(t/2)\ 1/2 =$$
$$= 2\ sen\ (t/2)\cos(t/2) - \cos(t/2)$$
$$f_1' = \cos(t/2)\ [2\ sen\ (t/2) - 1] = 0$$

che ammette soluzioni per

$\cos(t/2) = 0$ e $sen\ (t/2) = 1/2$

cioè per $t/2 = \pi/2$ e $t/2 = \pi/6$

quindi per $t = \pi$ e $t = \pi/3$

la soluzione $t = \pi$ non è accettabile perché si riferisce al triangolo degenerato, quindi consideriamo la sola soluzione $t = \pi/3$.

Ora calcoliamo la derivata seconda

$$f_1'' = -½\ sen\ (t/2)\ [2\ sen\ (t/2) - 1] + \cos^2(t/2) =$$
$$= -sen^2(t/2) + ½\ sen\ (t/2) + \cos^2(t/2) =$$
$$= \cos^2(t/2) - sen^2(t/2) + ½\ sen\ (t/2) =$$
$$= \cos t + ½\ sen\ (t/2)$$

e ricordando che i punti di massimo e minimo di una funzione si ricercano ponendo la funzione derivata prima uguale a zero e sostituendo i valori che l'annullano nella derivata seconda, si ha

$$f_1''(\pi/3) = \cos(\pi/3) + ½\ sen\ (\pi/6) = ½ + ¼ = ¾ > 0$$

quindi la derivata seconda è positiva e la concavità sarà rivolta verso l'alto perciò il punto è un minimo.

Pertanto la funzione

$$f_1 = 3/2 - \cos t - 2\ sen\ (t/2)$$

è non negativa per tutti i t tali che $0 \leq t \leq \pi$ e presenta un minimo per $t = \pi / 3$.

Così è dimostrato che

$$f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) \geq 0$$

ed essendo già provato che $e \geq 0$, ne consegue che $f(a,b,c) \geq 0$, così la (2.1) è dimostrata anche per un triangolo qualsiasi e l'uguaglianza:

$$sen\ (a/2) + sen\ (b/2) + sen\ (c/2) = 3/2$$

può sussistere solo quando $f_1 = 0$, il che accade solo per $a = b = c = \pi / 3$ cioè per il triangolo equilatero.

In modo simile possiamo dimostrare che

$cos\ a + cos\ b + cos\ c \leq 3/2$ (2.1.1)

$sen\ a + sen\ b + sen\ c \leq (3\sqrt{3})/2$ (2.1.2)

$sen\ a\ sen\ b\ sen\ c \leq (3\sqrt{3})/8$ (2.1.3)

$cos\ a\ cos\ b\ cos\ c \leq 1/8$ (2.1.4)

$sen\ (a/2)\ sen\ (b/2)\ sen\ (c/2) \leq 1/8$ (2.1.5)

e così via.

Per dimostrare la (2.1.1) consideriamo la funzione

$$f(a,b,c) = 3/2 - cos\ a - cos\ b - cos\ c$$

e la funzione

$$f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = 3/2 - cos\ a - 2\ cos\ [(b+c)/2]$$

per cui sarà

$$e = f(a,b,c) - f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) =$$

$$= 3/2 - cos\ a - cos\ b - cos\ c - 3/2 + cos\ a + 2\ cos\ [(b+c)/2]$$

$$e = 2\ cos\ [(b+c)/2] - cos\ b - cos\ c$$

Ora consideriamo la formula di prostaferesi:

$$cos\ x + cos\ y = 2\ cos\ [(x+y)/2]\ cos\ [(x-y)/2]$$

che si può dimostrare facilmente ponendo

$$x = (x+y)/2 + (x-y)/2 \qquad \text{e} \qquad y = (x+y)/2 - (x-y)/2$$

da cui

$$cos\ x + cos\ y = cos\ [(x+y)/2 + (x-y)/2] + cos\ [(x+y)/2 - (x- y)/2] =$$

$$cos\ [(x+y)/2]\ cos\ [(x-y)/2] - sen\ [(x+y)/2]\ sen\ [(x-y)/2] +$$

$$cos\ [(x+y)/2]\ cos\ [(x-y)/2] + sen\ [(x+y)/2]\ sen\ [(x-y)/2]$$

e quindi

$$cos\ x + cos\ y = 2\ cos[(x+y)/2]\ cos\ [(x-y)/2]$$

nel nostro caso sarà

$$cos\ b + cos\ c = 2\ cos[(b+c)/2]\ cos\ [(b-c)/2]$$

ora un'applicazione di questa formula dimostra che

$$e = f(a,b,c) - f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = 2\ cos\ [(b+c)/2] - cos\ b - cos\ c =$$

$$2\ cos\ [(b+c)/2] - (cos\ b + cos\ c) = 2\ cos\ [(b+c)/2] - 2\ cos\ [(b+c)/2]\ cos\ [(b-c)/2]$$

$$e = 2\ cos\ [(b+c)/2]\ [1 - cos\ [(b-c)/2]]$$

che nell'intervallo $(0, \pi)$ è non negativa, infatti essendo

$0 < (b+c) < \pi$ si ha $0 < (b+c)/2 < \pi/2$

di conseguenza il $cos\ [(b+c)/2]$ è sempre maggiore di 0, poiché si trova nel primo quadrante della circonferenza goniometrica ed essendo la quantità entro la

parentesi comunque positiva, o al massimo nulla, si dimostra che $e \geq 0$.
L'uguaglianza sussiste solo quando $b=c$, infatti in tal caso si ha:

$$e = f(a,b,c) - f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = 2 \cos (2b/2) (1-\cos 0) = 0$$

Inoltre dimostriamo la

$$f(a,b,c) = 3/2 - \cos a - \cos b - \cos c$$

per un qualsiasi triangolo isoscele, considerando il caso:

$$b = c = t, \qquad a = \pi - 2t, \qquad con\ t > 0$$

allora

$$f_1 = f(\pi - 2t, t, t) = 3/2 - \cos (\pi - 2t) - 2 \cos t =$$

$$= 3/2 + \cos 2t - 2 \cos t = 3/2 + 2 \cos^2 t - 1 - 2 \cos t$$

$$f_1 = 1/2 - 2 \cos t + 2 \cos^2 t$$

$$f_1 = 2 \cos^2 t - 2 \cos t + ½$$

che è non negativa per tutti i t tali che $0 \leq t \leq \pi$.
Infatti calcoliamo il minimo della funzione f_1 , ponendo la derivata prima uguale a zero

$$f_1' = - 4 \cos t\ sen\ t + 2\ sen\ t = 0$$

$$2\ sen\ t (1 - 2 \cos t) = 0$$

da cui $2\ sen\ t = 0$ e $1 - 2 \cos t = 0$

che ha soluzioni per $sen\ t = 0$ e $\cos t = ½$

cioè per $t = 0, \pi$ e $t = \pi / 3$

al solito l'unica soluzione accettabile è $t = \pi / 3$.
Ora calcoliamo la derivata seconda

$$f_1'' = 4\ sen^2 t - 4 \cos^2 t + 2 \cos t = 4 (1 - \cos^2 t) - 4 \cos^2 t + 2 \cos t$$

$$f_1'' = 4 - 8 \cos^2 t + 2 \cos t$$

che per il valore $t = \pi / 3$ è pari a

$$f_1''(\pi/3) = 4 - 8 \cos^2(\pi/3) + 2 \cos (\pi/3) = 4 - 8 (1/4) + 2 (1/2) = 4 - 2 + 1 = 3 > 0$$

quindi la derivata seconda è positiva e la concavità sarà rivolta verso l'alto perciò il punto è di minimo.
Quindi la funzione

$$f_1 = 1/2 - 2 \cos t + 2 \cos^2 t$$

ha un minimo per $t = \pi / 3$ ed è non negativa per tutti i $0 \leq t \leq \pi$.
Così la disuguaglianza (2.1.1) è dimostrata anche per un triangolo qualsiasi e l'uguaglianza:

$$\cos a + \cos b + \cos c = 3/2$$

può sussistere solo quando $f_1 = 0$, il che accade solo per $a = b = c = \pi / 3$ cioè per il triangolo equilatero.

Le disuguaglianze (2.1.2) e (2.1.3) sono apparse, come problema E 3038, in Monthly (6, p.140), proposto da T. Sekiguchi:

Sia *ABC* un triangolo in un piano, mostrare che

$$sen\ a + sen\ b + sen\ c \leq (3\sqrt{3})/2 \quad \text{e} \quad sen\ a\ sen\ b\ sen\ c \leq (3\sqrt{3})/8$$

Per dimostrare la prima disuguaglianza, usando il nostro metodo, poniamo

$$f(a,b,c) = (3\sqrt{3})/2 – sen\ a – sen\ b – sen\ c$$

e

$$f(a,(b+c)/2,(b+c)/2) = (3\sqrt{3})/2 – sen\ a – 2\ sen\ [(b+c)/2]$$

da cui

$$e = (3\sqrt{3})/2 – sen\ a - sen\ b –sen\ c – (3\sqrt{3})/2 + sen\ a +2sen\ [(b+c)/2]$$

$$e = 2sen\ [(b+c)/2] – (sen\ b+sen\ c)$$

ora abbiamo visto che

$$sen\ b+sen\ c = 2\ sen\ [(b+c)/2]\ cos\ [(b-c)/2]$$

per cui, sostituendo, si ha

$$e = 2\ sen\ [(b+c)/2] – 2\ sen\ [(b+c)/2]\ cos\ [(b-c)/2]$$

$$e = 2\ sen\ [(b+c)/2]\ [1- cos[(b-c)/2]]$$

che nell'intervallo (0, π) è non negativa, infatti essendo

$0 < (b+c) < \pi$ si ha $0 < (b+c)/2 < \pi/2$

di conseguenza $0 < sen\ [(b+c)/2] < 1$ ed essendo la quantità entro la parentesi comunque positiva, o al massimo nulla, si dimostra che $e \geq 0$ e l'uguaglianza si verifica solo per $b = c$, infatti in tal caso si ha:

$$e = f(a,b,c) – f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = 2\ sen\ (2b/2)\ (1-cos\ 0) = 0$$

Inoltre dimostriamo la

$$f(a,b,c) = (3\sqrt{3})/2 – sen\ a – sen\ b – sen\ c$$

per un qualsiasi triangolo isoscele, considerando il caso:

$$b = c = t, \qquad a = \pi – 2t, \qquad con\ t > 0$$

allora

$$f_1 = f(\pi – 2t, t, t) = (3\sqrt{3})/2 – sen\ (\pi – 2t) – 2\ sen\ t =$$

$$= (3\sqrt{3})/2 - sen\ 2t – 2\ sen\ t = (3\sqrt{3})/2 - 2\ sent\ cos\ t – 2\ sent$$

$$f_1 = (3\sqrt{3})/2 – 2\ sen\ t\ (cost + 1)$$

che è non negativa per tutti i $0 \leq t \leq \pi$.

Infatti calcoliamo il minimo della funzione f_1:

$$f_1' = - 2\ cos\ t\ (cos\ t+1) + 2\ sen^2 t =$$

$$= 2\ sen^2 t – 2\ cos^2 t – 2\ cos\ t =$$

$$= - 2\ cos^2 t – 2\ cos\ t + 2 – 2\ cos^2 t = - 4\ cos^2 t – 2\ cos\ t + 2 = 0$$

da cui $2\cos^2 t + \cos t - 1 = 0$

per cui $\cos t = (-1 \pm 3)/4$ che ammette soluzioni per

$\cos t = -1$ e $\cos t = ½$ cioè per $t = \pi$ e $t = \pi/3$ e la soluzione $t = \pi$ non è accettabile perché si riferisce al triangolo degenerato, quindi consideriamo la sola soluzione $t = \pi/3$.

Ora calcoliamo la derivata seconda di

$$f_1' = 2\,sen^2 t - 2\cos^2 t - 2\cos t$$

ottenendo

$$f_1'' = 4\,sen\,t\cos t + 4\cos t\,sen\,t + 2\,sen\,t = 8\,sen\,t\cos t + 2\,sen\,t =$$
$$= 2\,sen\,t\,(4\cos t + 1)$$

che per il valore $t = \pi/3$ è pari a

$$f_1''(\pi/3) = 2\,sen(\pi/3)\,[4\cos(\pi/3) + 1] = 2\,(\sqrt{3})/2\,(4\,½ + 1) = 3\sqrt{3} > 0$$

quindi la derivata seconda è maggiore di zero e la concavità sarà rivolta verso l'alto perciò il punto è un minimo.

Quindi la funzione

$$f_1 = (3\sqrt{3})/2 - 2\,sen\,t\,(cost + 1)$$

è non negativa per tutti i t tali che $0 \le t \le \pi$ e presenta un minimo per $t = \pi/3$.

Così la (2.1.2) è dimostrata per ogni tipo di triangolo e l'uguaglianza:

$$sen\,a + sen\,b + sen\,c = (3\sqrt{3})/2$$

può sussistere solo quando $f_1 = 0$, il che accade solo per $a = b = c = \pi/3$ cioè per il triangolo equilatero.

Similmente per dimostrare la seconda disuguaglianza, poniamo

$$f(a,b,c) = (3\sqrt{3})/8 - sen\,a\,sen\,b\,sen\,c$$

e

$$f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = (3\sqrt{3})/8 - sen\,a\;sen^2\,[(b+c)/2]$$

da cui

$$e = (3\sqrt{3})/8 - sen\,a\,sen\,b\,sen\,c - (3\sqrt{3})/8 + sen\,a\,sen^2\,[(b+c)/2]$$
$$e = sen\,a\,[sen^2\,[(b+c)/2] - sen\,b\,sen\,c]$$

Essendo $0 < a < \pi$, il $sen\,a$ è sempre positivo, poiché si trova nei primi due quadranti del cerchio trigonometrico, allora per dimostrare che $e \ge 0$ basta dimostrare che la parentesi è positiva, cioè che

$$sen^2\,[(b+c)/2] - sen\,b\,sen\,c \ge 0$$

Ponendo

$$b = (b+c)/2 + (b-c)/2 \quad \text{e} \quad c = (b+c)/2 - (b-c)/2$$

si ha

$$sen\ b = sen\ [(b+c)/2]\ cos\ [(b-c)/2] + cos\ [(b+c)/2\ sen\ [(b-c)/2]$$

$$sen\ c = sen\ [(b+c)/2]\ cos\ [(b-c)/2] - cos\ [(b+c)/2\ sen\ [(b-c)/2]$$

da cui

$$sen\ b\ sen\ c = sen^2\ [(b+c)/2]\ cos^2\ [(b-c)/2] - cos^2\ [(b+c)/2\ sen^2\ [(b-c)/2] =$$

$$= sen^2\ [(b+c)/2]\ cos^2\ [(b-c)/2] -[1 -\ sen^2\ [(b+c)/2]\ sen^2\ [(b-c)/2] =$$

$$= sen^2\ [(b+c)/2]\ cos^2\ [(b-c)/2] - sen^2\ [(b-c)/2] + sen^2\ [(b+c)/2]\ sen^2\ [(b-c)/2] =$$

$$= sen^2\ [(b+c)/2]\ [cos^2\ [(b-c)/2] + sen^2\ [(b-c)/2]] - sen^2\ [(b-c)/2]$$

quindi

$$sen\ b\ sen\ c = sen^2\ [(b+c)/2] - sen^2\ [(b-c)/2]$$

allora

$$sen^2\ [(b+c)/2] - sen\ b\ sen\ c = sen^2\ [(b-c)/2]$$

che è senz'altro una quantità positiva, quindi ne consegue che

$$e = sen\ a\ sen^2\ [(b-c)/2]$$

è anch'essa una quantità positiva, così si è dimostrato che $e \geq 0$. L'uguaglianza sussiste solo quando $b=c$, infatti in tal caso si ha:

$$e = f(a,b,c) - f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = sen\ a\ [sen^2\ (2b/2) - sen^2\ b] = 0$$

Inoltre dimostriamo la

$$f(a,b,c) = (3\sqrt{3})/8 - sen\ a\ sen\ b\ sen\ c$$

per un qualsiasi triangolo isoscele, considerando il caso:

$$b = c = t, \qquad a = \pi - 2t, \qquad con\ t > 0.$$

allora

$$f_1 = f(\pi - 2t, t, t) = (3\sqrt{3})/8 - sen\ (\pi - 2t)\ sen^2 t =$$

$$= (3\sqrt{3})/8 - sen\ 2t\ sen^2\ t$$

$$f_1 = (3\sqrt{3})/8 - 2\ sen^3 t\ cost$$

che è non negativa per tutti i t tali che $0 \leq t \leq \pi$.

Infatti calcoliamo il minimo della funzione f_1:

$$f_1' = - 6\ sen^2 t\ cos^2 t + 2\ sen^4 t = 0$$

$$sen^4 t - 3\ sen^2 t\ (1 - sen^2 t) = 0 \qquad sen^4 t - 3\ sen^2 t + 3\ sen^4 t = 0$$

da cui

$$4\ sen^4 t - 3\ sen^2 t = 0 \quad \text{cioè} \quad sen^2 t\ (4\ sen^2 t - 3) = 0$$

che ammette soluzioni per

$sen^2 t = 0$ e $sen^2 t = 3/4$

cioè per

$sen\ t = 0$ e $sen\ t = \pm(\sqrt{3})/2$

quindi per

$t = 0$ e $t = \pi$ e $t = \pm\ \pi / 3$.

Le soluzioni per $t = 0$ e $t = \pi$ non sono accettabili perché si riferiscono al triangolo degenerato e la soluzione $t = -\pi/3$ non è accettabile perché non appartenente all'intervallo di definizione della funzione, in quanto per ipotesi $0 \leq t \leq \pi$, per cui l'unica soluzione possibile è per $t = \pi / 3$.

Ora troviamo la derivata seconda

$$f_1'' = 8 \, sen^3 t \cos t - 12 \, sen \, t \cos^3 t + 12 \, sen^3 t \cos t =$$
$$= 20 \, sen^3 t \cos t - 12 \, sen \, t \cos^3 t = 4 \, sen \, t \cos t \, (5 \, sen^2 t - 3 \cos^2 t)$$

e calcoliamola nei punti che annullano la derivata prima.

$$f_1''(\pi/3) = 4 \, sen \, (\pi/3) \cos(\pi/3) \, [5 \, sen^2(\pi/3) - 3 \cos^2(\pi/3)] =$$
$$4(\sqrt{3}/2) \, ½ \, (5 \, ¾ - 3 \, ¼) = 3\sqrt{3} > 0$$

quindi la funzione f_1 presenta un minimo per $t = \pi / 3$ ed è non negativa per tutti i t tali che $0 \leq t \leq \pi$.

Così la (2.1.3) è dimostrata e l'uguaglianza:

$$sen \, a \, sen \, b \, sen \, c = (3\sqrt{3})/8$$

può sussistere solo quando $f_1 = 0$, il che accade solo per $a = b = c = \pi/3$ cioè per il triangolo equilatero.

La (2.1.4) si dimostra sempre con lo stesso metodo, considerando cioè la funzione:

$$f(a,b,c) = 1/8 - \cos a \cos b \cos c$$

e la funzione

$$f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = 1/8 - \cos a \, \cos^2 [(b+c)/2]$$

per cui sarà

$$e = f(a,b,c) - f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) =$$
$$= 1/8 - \cos a \cos b \cos c - 1/8 + \cos a \cos^2 [(b+c)/2]$$
$$e = \cos a \, [\cos^2 [(b+c)/2] - \cos b \cos c]$$

Nel caso in cui $\pi/2 \leq a < \pi$ il $\cos a$ è negativo, ma per noi non ha senso in quanto si avrebbe $0 < \pi/2 \leq a \leq b \leq c < \pi$ il che è impossibile, per la sussistenza del triangolo.

Allora a questo punto dobbiamo solo considerare il caso in cui $0 < a < \pi/2$, in questo intervallo il $\cos a$ è sempre positivo, allora per dimostrare che $e \geq 0$ basta dimostrare che la parentesi è positiva cioè che

$$\cos^2 [(b+c)/2] - \cos b \cos c \geq 0$$

Infatti, ponendo

$$b = (b+c)/2 + (b-c)/2 \qquad \text{e} \qquad c = (b+c)/2 - (b-c)/2$$

si ha

$$cos\ b = cos\ [(b+c)/2]\ cos\ [(b-c)/2] - sen\ [(b+c)/2\ sen\ [(b-c)/2]$$

$$cos\ c = cos\ [(b+c)/2]\ cos\ [(b-c)/2] + sen\ [(b+c)/2\ sen\ [(b-c)/2]$$

da cui

$$cos\ b\ cos\ c = cos^2\ [(b+c)/2]\ cos^2\ [(b-c)/2] – sen^2\ [(b+c)/2\ sen^2\ [(b-c)/2]=$$

$$= cos^2\ [(b+c)/2]\ cos^2\ [(b-c)/2] –[1 - cos^2\ [(b+c)/2]]\ sen^2\ [(b-c)/2]=$$

$$= cos^2\ [(b+c)/2]\ cos^2\ [(b-c)/2] – sen^2\ [(b-c)/2] + cos^2\ [(b+c)/2]\ sen^2\ [(b-c)/2] =$$

$$= cos^2\ [(b+c)/2]\ [cos^2\ [(b-c)/2] + sen^2\ [(b-c)/2]] – sen^2\ [(b-c)/2]$$

$$cos\ b\ cos\ c = cos^2\ [(b+c)/2] - sen^2\ [(b-c)/2]$$

Allora

$$cos^2\ [(b+c)/2] – cos\ b\ cos\ c = cos^2\ [(b+c)/2] – cos^2\ [(b+c)/2] + sen^2\ [(b-c)/2] =$$

$$= sen^2\ [(b-c)/2]$$

risulta senz'altro positiva e quindi

$$e = cos\ a\ sen^2\ [(b-c)/2]$$

è non negativa, così si è dimostrato che $e \geq 0$.

L'uguaglianza sussiste solo quando $b=c$, infatti in tal caso si ha:

$$e = f(a,b,c) – f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = cos\ a\ [cos^2\ (2b/2) – cos^2 b] = 0$$

Inoltre dimostriamo la

$$f(a,b,c) = 1/8 – cos\ a\ cos\ b\ cos\ c$$

per un qualsiasi triangolo isoscele, considerando il caso:

$$b = c = t, \qquad a = \pi – 2t, \qquad con\ t > 0$$

allora

$$f_1 = f(\pi – 2t, t, t) = 1/8 – cos\ (\pi – 2t)\ cos^2 t =$$

$$= 1/8 + cos\ 2t\ cos^2 t = 1/8 + (2\ cos^2 t – 1)\ cos^2 t$$

$$f_1 = 1/8 + 2\ cos^4 t – cos^2 t = 0.$$

che è non negativa per tutti i $0 \leq t \leq \pi$.

Infatti calcoliamo il minimo della funzione f_1

$$f_1' = - 8\ cos^3 t\ sen\ t + 2\ cos\ t\ sen\ t = 0$$

da cui

$$2\ cos\ t\ sen\ t\ (1 – 4\ cos^2 t) = 0$$

che ammette soluzioni per $2\ cos\ t\ sen\ t = 0$ e per $1 – 4\ cos^2 t = 0$

$2\ cos\ t\ sen\ t = 0$ si trasforma in $2\ \sqrt{(1 - sen^2 t)}\ sen\ t = 0$ cioè in

$4\ sen^2 t\ (1 - sen^2 t) = 0$ da cui $4\ sen^2 t = 0$ cioè $sen\ t = 0$

e $(1 - sen^2 t) = 0$ da cui $sen^2 t = 1$ cioè $sen\ t = \pm 1$

e $1 – 4\ cos^2 t = 0$ implica $4\ cos^2 t = 1$ cioè $cos\ t = \pm ½$

Quindi le soluzioni sono per $t = 0$ e $t = \pi$, che non sono accettabili perché si riferiscono al triangolo degenerato, per $t = \pm \pi / 2$ e per $t = \pm \pi / 3$.

Anche le soluzioni per $t = -\pi / 2$ e $t = -\pi / 3$ non sono accettabili perché al di fuori dell'intervallo di definizione in quanto per ipotesi $0 < t < \pi$, per cui le sole soluzioni possibili sono per $t = \pi / 2$ e $t = \pi / 3$.

Ora troviamo la derivata seconda

$$f_1'' = 24 \cos^2 t \, sen^2 t - 8 \cos^4 t - 2\, sen^2 t + 2 \cos^2 t$$

e calcoliamola nei punti che annullano la derivata prima

$$f_1''(\pi/2) = 24 \cos^2(\pi/2)\, sen^2(\pi/2) - 8 \cos^4(\pi/2) - 2\, sen^2(\pi/2) + 2 \cos^2(\pi/2)$$

$$f_1''(\pi/2) = -2 < 0$$

la derivata seconda è negativa allora significa che la concavità è rivolta verso il basso e la funzione presenta un punto di massimo in $\pi / 2$.

$$f_1''(\pi/3) = 24 \cos^2(\pi/3)\, sen^2(\pi/3) - 8 \cos^4(\pi/3) - 2\, sen^2(\pi/3) + 2 \cos^2(\pi/3) =$$

$$= 24 \tfrac{1}{4}\ \tfrac{3}{4} - 8\,(1/16) - 2\ \tfrac{3}{4} + 2\ \tfrac{1}{2} = 7/2 > 0$$

quindi la funzione presenta un minimo per $t = \pi / 3$.

Così la disuguaglianza (2.1.4) è dimostrata e l'uguaglianza:

$$\cos a \cos b \cos c = 1/8$$

può sussistere solo quando $f_1 = 0$, il che accade solo per $a = b = c = \pi/3$ cioè per il triangolo equilatero.

Infine resta da dimostrare l'ultima disuguaglianza, a tale scopo consideriamo la funzione:

$$f(a,b,c) = 1/8 - sen\,(a/2)\, sen\,(b/2)\, sen\,(c/2)$$

e la funzione

$$f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = 1/8 - sen\,(a/2)\, sen^2\,[(b+c)/4]$$

per cui sarà

$$e = f(a,b,c) - f(a,(b+c)/2,(b+c)/2) =$$

$$= 1/8 - sen\,(a/2)\, sen\,(b/2)\, sen\,(c/2) - 1/8 + sen\,(a/2)\, sen^2\,[(b+c)/4]$$

$$e = sen\,(a/2)\,[sen^2[(b+c)/4] - sen\,(b/2)\, sen\,(c/2)]$$

Essendo $0 < a < \pi$ il $sen\, a/2$ è sempre positivo, poiché si trova nel primo quadrante del cerchio trigonometrico, allora per provare che $e \geq 0$ basta dimostrare che la parentesi è positiva, cioè che

$$sen^2[(b+c)/4] - sen\,(b/2)\, sen\,(c/2) \geq 0$$

a tale scopo poniamo

$$b/2 = (b/2 + c/2)/2 + (b/2 - c/2)/2 = (b+c)/4 + (b-c)/4$$

e

$$c/2 = (b/2 + c/2)/2 - (b/2 - c/2)/2 = (b+c)/4 - (b-c)/4$$

da cui si avrà

$$sen\ (b/2) = sen\ [(b+c)/4]\ cos\ [(b-c)/4] + cos\ [(b+c)/4]\ sen\ [(b-c)/4]$$

e

$$sen\ (c/2) = sen\ [(b+c)/4]\ cos\ [(b-c)/4] – cos\ [(b+c)/4]\ sen\ [(b-c)/4]$$

pertanto

$$sen\ (b/2)\ sen\ (c/2) = sen^2[(b+c)/4]\ cos^2[(b-c)/4] – cos^2[(b+c)/4]\ sen^2[(b-c)/4] =$$
$$= sen^2[(b+c)/4]\ cos^2[(b-c)/4] – [1 - sen^2[(b+c)/4]\ sen^2[(b-c)/4] =$$
$$sen^2[(b+c)/4]\ cos^2[(b-c)/4] – sen^2[(b-c)/4] + sen^2[b+c)/4]\ sen^2[(b-c)/4] =$$
$$= sen^2[(b+c)/4]\ [cos^2[(b-c)/4] + sen^2[(b-c)/4]] – sen^2[(b-c)/4] =$$
$$= = sen^2[(b+c)/4] – sen^2[(b-c)/4]$$

quindi

$$sen\ (b/2)\ sen\ (c/2) = sen^2[(b+c)/4] – sen^2[(b-c)/4]$$

allora

$$sen^2[(\ b+c)/4] – sen\ (b/2)\ sen\ (c/2) = sen^2[(b+c)/4] – sen^2[(b+c)/4]+sen^2[(b-c)/4]$$
$$= sen^2[(b-c)/4]$$

che è senz’altro una quantità positiva, quindi

$$e = sen\ a/2\ sen^2\ [(b-c)/4]$$

è anch’essa una quantità positiva, così si è dimostrato che $e \geq 0$ e l’uguaglianza sussiste solo quando $b=c$, infatti in tal caso si ha:

$$e = f(a,b,c) – f(a, (b+c)/2, (\ b+c)/2) = sen\ (a/2)\ [sen^2\ (2b/2) – sen^2 b] = 0$$

Inoltre dimostriamo la

$$f(a,b,c) = 1/8 – sen\ (a/2)\ sen\ (b/2)\ sen\ (c/2)$$

per un qualsiasi triangolo isoscele, considerando il caso:

$$b = c = t, \qquad a = \pi – 2t, \qquad con\ t > 0$$

allora

$$f_1 = f(\pi – 2t, t, t) = 1/8 – sen\ [(\pi – 2t)/2]\ sen^2\ (t/2) =$$
$$= 1/8 – sen\ (\pi/2 – t)\ (1 – cos\ t)/2 = 1/8 – cos\ t\ (1 - cost)/2$$
$$f_1 = 1/8 – (cos\ t)/2 + (cos^2 t)/2$$

che è non negativa per tutti i $0 \leq t \leq \pi$.

Infatti calcoliamo il minimo della funzione f_1

$$f_1' = ½\ sen\ t - cost\ sen\ t = 0$$

da cui $sen\ t\ (1/2 – cos\ t) = 0$

che ammette soluzioni per $sen\ t = 0$ e $cos\ t = ½$

cioè per $t = 0, \pi$ e $t = \pi / 3,$ di cui accettiamo solo la seconda.

Ora troviamo la derivata seconda

$$f_1'' = ½\ cos\ t + sen^2 t – cos^2 t$$

e calcoliamola nei punti che annullano la derivata prima

$f_1''(\pi/3) = ½ \cos(\pi/3) + sen^2(\pi/3) - \cos^2(\pi/3) = ½ ½ + ¾ - ¼ = ¾ > 0$

quindi la funzione presenta un minimo per $t = \pi / 3$ ed è non negativa per tutti i t tali che $0 \le t \le \pi$.

Così la disuguaglianza (2.1.5) è dimostrata e l'uguaglianza:

$$sen\,(a/2)\; sen\,(b/2)\; sen\,(c/2) = 1/8$$

può sussistere solo quando $f_1 = 0$, il che accade solo per $a = b = c = \pi/3$ cioè per il triangolo equilatero.

Un altro esempio dove è applicabile il metodo che stiamo illustrando è il problema E 2029 (3, p.1133), proposto da J. Garfunkel.

Se a, b, c sono gli angoli di un triangolo, dimostrare che

$$3\,(\cos a + \cos b + \cos c) \ge 2\,(sen\,a\; sen\,b + sen\,b\; sen\,c + sen\,c\; sen\,a) \qquad (2.1.6)$$

Usando il nostro metodo, poniamo:

$$f(a,b,c) = 3\,(\cos a + \cos b + \cos c) - 2\,(sen\,a\; sen\,b + sen\,b\; sen\,c + sen\,a\; sen\,c)$$

e

$$f(a,(b+c)/2,(b+c)/2)=$$
$$= 3[\cos a + 2\cos[(b+c)/2]] - 2[2\, sen\,a\; sen\,[(b+c)/2] + sen^2\,[(b+c)/2)]]$$

per cui sarà

$$e = f(a,b,c) - f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = 3\cos a + 3(\cos b + \cos c) - 2\, sen\,a\; sen\,b - 2\, sen\,b\; sen\,c - 2\, sen\,c\; sen\,a - 3\cos a - 6\cos[(b+c)/2] + 2\,[2\, sen\,a\; sen\,[(b+c)/2] + sen^2[(b+c)/2)]] =$$

$$= 3(\cos b + \cos c) - 2\, sen\,a\; sen\,b - 2\, sen\,b\; sen\,c - 2\, sen\,c\; sen\,a - 6\cos[(b+c)/2] + 2\,[2\, sen\,a\; sen\,[(b+c)/2] + sen^2[(b+c)/2)] =$$

sostituiamo

$$\cos b + \cos c = 2\cos[(b+c)/2]\cos[(b-c)/2]$$

e abbiamo

$$e = 6\cos[(b+c)/2]\cos[(b-c)/2] - 6\cos[(b+c)/2] - 2\, sen\,a\; sen\,b - 2\, sen\,b\; sen\,c - 2\, sen\,c\; sen\,a + 4\, sen\,a\; sen\,[(b+c)/2] + 2\, sen^2[(b+c)/2)]$$

sappiamo che

$$sen\,b\; sen\,c = sen^2[(b+c)/2] - sen^2[(b-c)/2]$$

da cui ricaviamo che

$$sen^2[(b+c)/2] = sen\,b\; sen\,c + sen^2[(b-c)/2]$$

e sostituendo si ha

$$e = 6\cos[(b+c)/2]\,[\cos[(b-c)/2] - 1] + 4\, sen\,a\; sen\,[(b+c)/2] + 2\, sen\,b\; sen\,c + 2\, sen^2[(b-c)/2)] - 2\, sen\,a\; sen\,b - 2\, sen\,b\; sen\,c - 2\, sen\,a\; sen\,c =$$

$$= 6 \cos[(b+c)/2]\ [\cos[(b-c)/2] - 1] + 4\ sen\ a\ sen\ [(b+c)/2] - 2\ sen\ a\ (sen\ b + sen\ c)$$
$$+ 2\ sen^2[(b-c)/2]$$

ricordiamo che

$$sen\ b + sen\ c = 2\ sen\ [(b+c)/2] \cos [(b-c)/2]$$

da cui

$$e = 6 \cos[(b+c)/2]\ [\cos[(b-c)/2] - 1] + 4\ sen\ a\ sen\ [(b+c)/2] -$$
$$- 4\ sen\ a\ sen\ [(b+c)/2] \cos [(b-c)/2] + 2\ sen^2[(b-c)/2] =$$
$$= 6 \cos[(b+c)/2]\ [\cos[(b-c)/2] - 1] + 4\ sen\ a\ sen\ [(b+c)/2]\ [1 - \cos [(b-c)/2]]$$
$$+ 2\ sen^2[(b-c)/2] =$$
$$= 6 \cos[(b+c)/2]\ [\cos[(b-c)/2] - 1] - 4\ sen\ a\ sen\ [(b+c)/2]\ [\cos [(b-c)/2] - 1]$$
$$+ 2\ sen^2[(b-c)/2]$$

$$e = [\cos[(b-c)/2] - 1]\ [6 \cos [(b+c)/2] - 4\ sen\ a\ sen\ [(b+c)/2]] + 2\ sen^2[(b-c)/2]$$

Ora studiamo la parentesi $[\cos [(b-c)/2] - 1]$ e consideriamo la relazione

$$1 = sen\ (a/2) + 2\ sen^2[(\pi - a)/4]$$

che, essendo

$$b + c = \pi - a \qquad \text{e} \qquad a = \pi - (b+c)$$

equivale alla relazione

$$1 = sen\ (a/2) + 2\ sen^2[(b+c)/4]$$

e sostituiamola nella parentesi in oggetto, si ha

$$[\cos [(b-c)/2] - 1] = \cos [(b-c)/2] - sen\ (a/2) - 2\ sen^2[(b+c)/4] =$$
$$= \cos [(b-c)/2] - sen\ [[\pi - (b+c)]/2] - 2\ sen^2[(b+c)/4] =$$
$$= \cos [(b-c)/2] - \cos [(b+c)/2] - 2\ sen^2[(b+c)/4]$$

ora

$$\cos [(b-c)/2] - \cos [(b+c)/2] = \cos (b/2 - c/2) - \cos (b/2 + c/2) =$$
$$= \cos (b/2) \cos (c/2) + sen\ (b/2)\ sen\ (c/2) - \cos (b/2) \cos (c/2) + sen\ (b/2)\ sen\ (c/2) =$$
$$= 2\ sen\ (b/2)\ sen\ (c/2)$$

per cui

$$\cos [(b-c)/2] - 1 = 2\ sen\ (b/2)\ sen\ (c/2) - 2\ sen^2[(b+c)/4]$$

inoltre, come si è già dimostrato, sappiamo che

$$sen\ (b/2)\ sen\ (c/2) = sen^2[(b+c)/4] - sen^2[(b-c)/4]$$

di conseguenza si ha che

$$\cos [(b-c)/2] - 1 = 2\ sen^2[(b+c)/4] - 2\ sen^2[(b-c)/4] - 2\ sen^2[(b+c)/4] =$$
$$= - 2\ sen^2[(b-c)/4]$$

allora possiamo scrivere:

$$e = - 2\ sen^2[(b-c)/4]\ [6 \cos[(b+c)/2] - 4\ sen\ a\ sen\ [(b+c)/2]] + 2\ sen^2[(b-c)/2]$$

inoltre si può porre

$$sen\ a = sen\ [\pi - (b+c)] = sen\ [(b+c)] = sen\ 2[(b+c)/2] =$$
$$= 2\ sen\ [(b+c)/2]\ cos\ [(b+c)/2]$$

e quindi

$$e = -\ 2\ sen^2[(b-c)/4]\ [6\ cos[(b+c)/2] - 8\ sen^2[(b+c)/2]\ cos\ [(b+c)/2]] +$$
$$+\ 2\ sen^2[(b-c)/2] =$$
$$= -\ 4\ sen^2[(b-c)/4]\ cos\ [(b+c)/2]\ [3 - 4\ sen^2[(b+c)/2]] + 2\ sen^2[(b-c)/2] =$$
$$e = 4\ sen^2[(b-c)/4]\ cos\ [(b+c)/2]\ [4\ sen^2[(b+c)/2] - 3] + 2\ sen^2[(b-c)/2]$$

che risulta positiva per

$$[4\ sen^2[(b+c)/2] - 3] \geq 0$$

essendo verificato che gli altri fattori sono tutti positivi, quindi la differenza e risulta positiva per

$$sen^2[(b+c)/2] \geq 3/4 \qquad sen\ [(b+c)/2] \geq \sqrt{3}/2$$

e cioè per $(b+c)/2 \geq \pi/3$ che risulta essere l'unico caso possibile per noi, in quanto se fosse $(b+c)/2 < \pi/3$ avremmo $(b+c) < 2\pi/3$ ed avendo posto per ipotesi $a \leq b \leq c$, con b il minimo fra b e c, si avrebbe $b < \pi/3$ e a maggior ragione $a < \pi/3$, il che significa che $a + (b + c) < \pi/3 + 2\pi/3 = \pi$ quindi non avremmo più il triangolo.

Così si è dimostrato che $e \geq 0$. L'uguaglianza sussiste solo quando $b=c$, infatti in tal caso si ha:

$$e = f(a,b,c) - f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = 3\ (cos\ a + 2\ cosb) - 2\ (2\ sen\ a\ sen\ b +$$
$$sen^2b) - 3\ (cos\ a + 2\ cos\ 2b/2) + 2\ (2\ sena\ sen\ 2b/2 + sen^2b) = 0$$

Inoltre dimostriamo la

$$f(a,b,c) = 3\ (cos\ a + cos\ b + cos\ c) - 2\ (sen\ a\ sen\ b + sen\ b\ sen\ c + sen\ a\ sen\ c)$$

per un qualsiasi triangolo isoscele, considerando il caso:

$$b = c = t, \qquad a = \pi - 2t, \qquad con\ t > 0$$

allora

$$f_1 = f(\pi - 2t, t, t) = 3[cos\ (\pi - 2t) + 2\ cos\ t] - 2\ [2\ sen\ (\pi - 2t)\ sen\ t + sen^2t] =$$
$$3\ (-\ cos\ 2t + 2\ cos\ t) - 2\ (2\ sen\ 2t\ sen\ t + sen^2t) =$$
$$3\ (2\ cos\ t - cos^2t + sen^2t) - 2\ (4\ sen^2t\ cos\ t + sen^2t) =$$
$$6\ cos\ t - 3\ cos^2t + 3\ sen^2t - 8\ sen^2t\ cos\ t - 2\ sen^2t =$$
$$6\ cos\ t - 3\ cos^2t + sen^2t - 8\ sen^2t\ cos\ t =$$
$$6\ cos\ t - 3\ cos^2t + 1 - cos^2t - 8\ cos\ t\ (1 - cos^2t) =$$
$$6\ cos\ t - 4\ cos^2t + 1 - 8\ cos\ t + 8\ cos^3t =$$
$$8\ cos^3t - 4\ cos^2t - 2\ cos\ t + 1 = 4\ cos^2t\ (2\ cos\ t - 1) - (2\ cos\ t - 1) =$$
$$(2\ cos\ t - 1)\ (4\ cos^2t - 1) = (2\ cos\ t - 1)\ (2\ cos\ t - 1)\ (2\ cos\ t + 1) =$$
$$f_1 = (2\ cos\ t - 1)^2\ (2\ cos\ t + 1) \geq 0.$$

che è non negativa per tutti i $0 \le t \le \pi$.

Infatti calcoliamo il minimo della funzione f_1

$$f_1' = 2\,(2 \cos t - 1)\,(-\,2 \operatorname{sen} t)\,(2 \cos t + 1) - 2 \operatorname{sen} t\,(2 \cos t - 1)^2 =$$

$$= -\,2 \operatorname{sen} t\,(2 \cos t - 1)\,[2\,(2 \cos t + 1) + (2 \cos t - 1)] =$$

$$= -\,2 \operatorname{sen} t\,(2 \cos t - 1)\,(6 \cos t + 1) = -\,2 \operatorname{sen} t\,(12 \cos^2 t + 2 \cos t - 6 \cos t - 1) =$$

$$= -\,2 \operatorname{sen} t\,(12 \cos^2 t - 4 \cos t - 1)$$

$$f_1' = -\,24 \cos^2 t\, \operatorname{sen} t + 8 \cos t \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} t = 0$$

cioè $\qquad 2 \operatorname{sen} t\,(-\,12 \cos^2 t + 4 \cos t + 1) = 0$

da cui

$2 \operatorname{sen} t = 0$ quindi $t = 0,\ \pi$ che si riferiscono al triangolo degenerato e quindi non si accettano e

$12 \cos^2 t - 4 \cos t - 1 = 0$ da cui

$\cos t = [2 \pm \sqrt{(4 + 12)}]/\,12 = (2 \pm 4)/12$

che ammette soluzioni per $\cos t = ½$ e $\cos t = -\,1/6$

cioè per $t = \pi / 3$ e $t = arcocos\,(-1/6)$ che non si accetta perché fuori dell'intervallo di definizione.

Ora troviamo la derivata seconda

$$f_1'' = 48 \cos t \operatorname{sen}^2 t - 24 \cos^3 t - 8 \operatorname{sen}^2 t + 8 \cos^2 t + 2 \cos t$$

e calcoliamola nei punti che annullano la derivata prima

$f_1''(\pi/3) = 48 \cos(\pi/3) \operatorname{sen}^2(\pi/3) - 24\cos^3(\pi/3) - 8\operatorname{sen}^2(\pi/3) + 8\cos^2(\pi/3) + 2\cos(\pi/3) =$

$= 48\ ½\ \ ¾\ - 24\,(1/8) - 8\ ¾\ + 8\ ¼ + 2\ ½\ = 12 > 0$

quindi la funzione presenta un minimo per $t = \pi / 3$.

Così la disuguaglianza (2.1.6) è provata innanzitutto per il triangolo isoscele, quindi per ogni triangolo e l'uguaglianza:

$$3\,(\cos a + \cos b + \cos c) = 2\,(\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c)$$

può sussistere solo quando $f_1 = 0$, il che accade solo per $a = b = c = \pi/3$ cioè per il triangolo equilatero.

2.2 Il metodo è applicabile anche al problema E 1935 (1, p.404), proposto da W. J. Blundon, apparso anche in Canadian Math. Bull. 8 (1965) dove l'autore è riuscito a stabilire che, fra le molte proprietà ben note del triangolo espresse in termini di R, r, s, quella in questione è la più forte disuguaglianza lineare possibile.

Provare che per ogni triangolo ABC vale la disuguaglianza:

$$s \le 2R + (3\sqrt{3} - 4)r \qquad (2.2.1)$$

dove s, R, r sono rispettivamente il semiperimetro, il raggio del cerchio circoscritto e il raggio del cerchio inscritto. L'uguaglianza sussiste solo per triangoli equilateri.

Per prima cosa riduciamo il problema in forma appropriata.

Dalla geometria dei triangoli sappiamo che:

$$s = R(\text{sen}\, a + \text{sen}\, b + \text{sen}\, c) \qquad (2.2.2)$$

infatti, dalla definizione del semiperimetro s di un triangolo di lati A,B,C discende che $(A + B + C) = 2\, s$ e dalla legge dei seni che stabilisce che

$$A / \text{sen}\, a = B / \text{sen}\, b = C / \text{sen}\, c = 2R$$

possiamo ricavarci le relazioni:

$A = 2\, R\, \text{sen}\, a$

$B = 2\, R\, \text{sen}\, b$

$C = 2\, R\, \text{sen}\, c$

e quindi affermare che

$$A + B + C = 2\, R\, (\text{sen}\, a + \text{sen}\, b + \text{sen}\, c) = 2\, s$$

e cioè

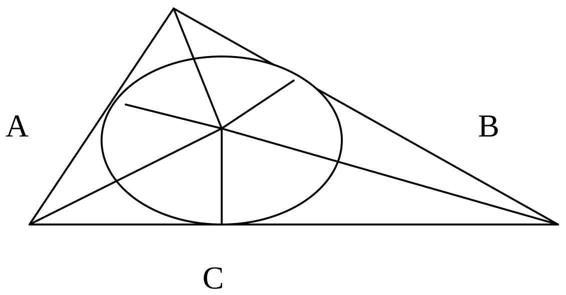
$$s = R(\text{sen}\, a + \text{sen}\, b + \text{sen}\, c)$$

Altra relazione nota è

$$r = 4R\, \text{sen}\, (a/2)\, \text{sen}\, (b/2)\, \text{sen}\, (c/2) \qquad (2.2.3)$$

per dimostrare la quale dobbiamo prima dimostrare che il raggio r di una circonferenza inscritta in un triangolo qualsiasi è pari al rapporto tra l'area ed il perimetro del triangolo stesso.

Dato quindi un triangolo ABC, la sua area è pari alla somma delle aree dei tre triangoli le cui altezze sono il raggio del cerchio inscritto:



In formule:

$$S = ½\, A\, r + ½\, B\, r + ½\, C\, r = ½\, r\, (A + B + C) = r\, s$$

da cui

$$r = S / s$$

Inoltre sappiamo che il raggio R della circonferenza circoscritta è ¼ del rapporto tra il prodotto dei lati e l'area del triangolo stesso, in formule:

$$R = A\,B\,C / 4S = A\,B\,C / 4\,r\,s$$

infatti sapendo che l'area del triangolo è pari al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso, cioè in formule

$$S = ½\,B\,C\,sen\,a$$

abbiamo che

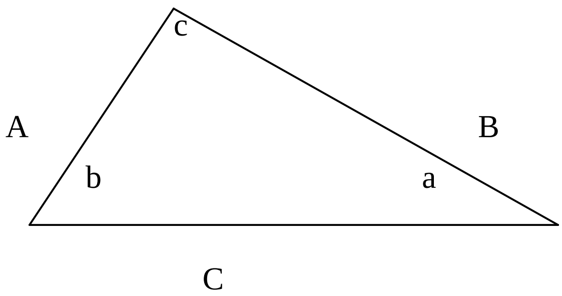
$$A\,B\,C / 4\,S = A\,B\,C / 4\,½\,B\,C\,sen\,a = A / 2\,sen\,a = ½\,2\,R = R$$

da cui

$$A\,B\,C = 4\,R\,r\,s.$$

Ora la formula di Erone esprime l'area del triangolo in funzione del semiperimetro e dei lati, cioè

$$S = \sqrt{[s\,(s - A)\,(s - B)\,(s - C)]}$$



infatti dal Teorema di Carnot abbiamo che

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2\,B\,C\,cos\,a$$

da cui

$$cos\,a = (B^2 + C^2 - A^2) / 2B\,C$$

dalle formule di bisezione ci ricaviamo il

$$sen\,(a/2) = \sqrt{[(1 - cos\,a)/2]} = \sqrt{[(2\,B\,C - B^2 - C^2 + A^2) / 4\,B\,C]} =$$
$$= \sqrt{[[A^2 - (B - C)^2] / 4\,B\,C]} = \sqrt{[(A - B + C)\,(A + B + C) / 4\,BC]}$$

teniamo presente che essendo $A + B + C = 2\,s$ si ha

$A + B - C = 2\,s - 2\,C$ e $A - B + C = 2\,s - 2\,B$

Quindi

$$sen\,(a/2) = \sqrt{[(2\,s - 2\,C)\,(2\,s - 2\,B) / 4\,B\,C]} = \sqrt{[(s - C)\,(s - B)/B\,C]}$$

e

$$cos\,(a/2) = \sqrt{[1 - sen^2(a/2)]} = \sqrt{[1 - (s-C)(s-B)/BC]} = \sqrt{[[BC - (s-C)(s-B)]/BC]} =$$
$$= \sqrt{[[BC - (s^2 - B\,s - C\,s + BC)]/BC]} = \sqrt{[(BC - s^2 + B\,s + C\,s - BC)/BC} =$$
$$= \sqrt{[[s(B+C) - s^2]/BC]}$$

$B + C = 2\,s - A$ allora

$$cos\,(a/2) = = \sqrt{[[s(2s - A) - s^2]/BC]} = \sqrt{[(2\,s^2 - A\,s - s^2)/BC]} =$$
$$= \sqrt{[(s^2 - A\,s)/BC]} = = \sqrt{[s\,(s - A)/BC]}$$

Ora sappiamo che l'area del triangolo è data da:

$$S = ½\, B\, C \,sen\, a = ½\, B\, C\, sen\, 2\, (a/2) =$$
$$= ½\, B\, C\;\; 2\, sen\, (a/2) \cos (a/2) = B\, C\, sen\, (a/2) \cos (a/2) =$$
$$= B\, C\, \sqrt{[[(s – C)(s – B)/BC]\; [s\, (s – A)/BC]]}$$
$$S = \sqrt{[s(s\; A)\; (s\text{-}B)\; (s\text{-}C)]}$$

per cui

$$r = S\, /\, s = \sqrt{[(s – A)\; (s – B)\; (s – C)\, /\, s]}$$

Scriviamo $r = r^2 / r$ allora

$$r = [(s – A)\; (s\text{-}\, B)\; (s – C)]\, /\, r\, s$$

dividiamo entrambi i membri per $4R$:

$$r / 4R = [(s – A)\; (s – B)\; (s – C)]\, /\, 4\, R\, r\, s = [(s – A)\; (s – B)\; (s – C)]\, /\, A\, B\, C =$$
$$= \sqrt{[(s – A)^2\; (s – B)^2\; (s – C)^2\, /\, A^2B^2C^2]} =$$
$$= \sqrt{[(s\text{-}\, A)\; (s – B)\, /\, A\, B]}\; \sqrt{[(s – A)\; (s – C)\, /\, A\, C]}\; \sqrt{(s – B)\; (s – C)\, /\, B\, C]}$$
$$r / 4\, R = sen\; a/2\; sen\; b/2\; sen\; c/2$$

dove per le formule di Briggs, come sopra dimostrato, si ha:

$sen\; a/2 = \sqrt{[(s – B)\; (s – C)\, /\, B\, C]}$

$sen\; b/2 = \sqrt{[(s – A)\; (s – C)\, /\, A\, C]}$

$sen\; c/2 = \sqrt{[(s – A)\; (s – B)\, /\, A\, B]}$

e quindi è dimostrato che

$$r = 4\, R\; sen\; a/2\; sen\; b/2\; sen\; c/2$$

Tornando al problema iniziale di provare la disuguaglianza

$$s \le 2R + (3\sqrt{3} – 4)r$$

sostituendo i valori di s e di r appena trovati, il problema presto si riduce a dimostrare che in ogni triangolo si ha la disuguaglianza:

$$R(\, sen\; a + sen\; b + sen\; c) \le 2\; R + 4\; R\; (3\sqrt{3} – 4)\; sen\; (a/2)\; sen\; (b/2)\; sen\; (c/2)$$

e cioè

$$sen\; a + sen\; b + sen\; c \le 2 + 4(3\sqrt{3} – 4)\; sen\; (a/2)\; sen\; (b/2)\; sen\; (c/2)$$

A tale scopo poniamo:

$$f(a,b,c)=2+4(3\sqrt{3} - 4)sen\; (a/2)\; sen\; (b/2)\; sen\; (c/2) –sen\; a–sen\; b–sen\; c \qquad (2.2.2)$$

e

$$f(a,(b+c)/2,(b+c)/2) = 2+4(3\sqrt{3}\text{-}4)\; sen\; (a/2)\; sen^2[(b+c)/4]–sen\; a–2sen\; [(b+c)/2]$$

Calcoliamo la differenza:

$$e = f(a,b,c) - f(a,\, (b+c)/2,\, (b+c)/2) =$$
$$= 2 + 4(3\sqrt{3} - 4)\; sen\; (a/2)\; sen\; (b/2)\; sen\; (c/2) – \; sen\; a - sen\; b – sen\; c – 2 –$$
$$- 4(3\sqrt{3} - 4)\; sen\; (a/2)\; sen^2[(b+c)/4] + sen\; a + 2\; sen\; [(b+c)/2] =$$
$$= 4(3\sqrt{3} - 4)\; sen\; (a/2)\; [sen\; (b/2)\; sen\; (c/2) – sen^2[(b+c)/4] + 2\; sen\; [(b+c)/2] –$$
$$- sen\; b –sen\; c$$

abbiamo

$e = 2\ sen[(b+c)/2] - sen\ b - sen\ c + \alpha\ sen\ (a/2)\ [sen\ (b/2)\ sen\ (c/2) - sen^2(b+c)4],$

dove $\alpha = 4(3\sqrt{3} - 4) > 0.$

Come lo stesso autore asserisce, questa volta è un po' più difficile dimostrare questa disuguaglianza, ma dopo alcuni passaggi trigonometrici e l'uso delle identità

1) $2\ sen\ (b/2)\ sen\ (c/2) = cos\ [(b-c)/2] - cos\ [(b+c)/2],$

2) $1 = sen\ (a/2) + 2\ sen^2[(\pi - a)/4] = sen\ (a/2) + 2\ sen^2[(b+c)/4]$

avendo posto $b+c= \pi - a$

3) $sen\ b + sen\ c = 2\ sen\ [(b+c)/2]\ cos\ [(b-c)/2]$

otteniamo

$$e = 2\ sen\ [(b+c)/2] - (sen\ b + sen\ c) + \alpha\ sen\ (a/2)\ [[cos\ [(b-c)/2] - cos\ [(b+c)/2]]/2 - sen^2[(b+c)/4]$$

dalla 2) si ha che $sen^2[(b+c)/4] = [1 - sen\ (a/2)]/2$

pertanto

$$e = 2\ sen\ [(b+c)]/2 - 2\ sen\ [(b+c)/2]\ cos\ [(b-c)/2] + ½\ \alpha\ sen\ (a/2)\ cos\ [(b-c)/2]- - ½\ \alpha\ sen\ a/2\ \ [cos\ [(b+c)/2] - \alpha\ sen\ a/2\ sen^2[(b+c)/4]$$

infine, l'autore ci suggerisce la conclusione per

$$2\ e = cos\ [(b-c)/2]\ [\alpha\ sen\ (a/2) - 4\ cos\ (a/2)] - \alpha\ sen2(a/2) - \ 2\ \alpha\ sen\ (a/2)\ sen^2[(\pi - a)/4] + 4\ cos\ (a/2)$$

e suggerendo che per $0 \le a \le \pi/3$ è facile vedere che la parentesi che moltiplica il $cos\ [(b-c)/2]$ è negativa cosicché

$2e \ge [\alpha\ sen\ (a/2) - 4\ cos\ (a/2)] - \alpha\ sen^2\ (a/2) - 2\ \alpha\ sen\ (a/2)\ sen^2[(\pi - a)/4] + 4\ cos\ (a/2) = 0$

Inoltre, ci dice anche che è semplice vedere che la disuguaglianza

$f(a,b,c)=2+4(3\sqrt{3} - 4)sen\ (a/2)\ sen\ (b/2)\ sen\ (c/2) - sen\ a - sen\ b - sen\ c \ge 0$

è soddisfatta per un qualsiasi triangolo isoscele. Infatti

$$f_1 = f(\pi - 2t, t, t) = 2 + 4(3\sqrt{3} - 4)\ sen\ [(\pi - 2t)/2]\ sen^2\ (t/2) - sen\ (\pi - 2t) - 2\ sen\ t$$

$$f_1 = 2 + 4(3\sqrt{3} - 4)\ sen\ (\pi /2 - t)\ sen^2\ (t/2) - sen\ 2t - 2\ sen\ t =$$

$$= 2 + 4(3\sqrt{3} - 4)\ cos\ t\ sen^2(t/2) - 2\ sen\ t\ cos\ t - 2\ sen\ t$$

essendo $sen\ t = \sqrt{[(1 - cos\ t)/2}$

sarà $sen^2(t/2) = (1 - cos\ t)/2$

e quindi, si avrà

$$f_1 = 2 + 4(3\sqrt{3} - 4)\ cos\ t\ (1 - cos\ t)/2 - 2\ sen\ t\ (cos\ t + 1)$$

che è non negativa per tutti i $0 \le t \le \pi.$

Così la disuguaglianza è provata innanzitutto per il triangolo isoscele, quindi per ogni triangolo e l'uguaglianza:

$$sen\ a + sen\ b + sen\ c = 2 + 4(3\sqrt{3} - 4)\ sen\ (a/2)\ sen\ (b/2)\ sen\ (c/2)$$

può sussistere solo quando $f_1 = 0$, il che accade solo per $a = b = c = \pi/3$

e si ha l'uguaglianza sia per il triangolo equilatero sia per quello degenerato con $a= 0, b = c = \pi/2$.

In modo simile si può dimostrare che la disuguaglianza

$$s \geq 3\sqrt{3}\ r \qquad (2.2.3)$$

è valida in ogni triangolo, cioè che per ogni triangolo vale la disuguaglianza:

$$R\ (sen\ a + sen\ b + sen\ c) \geq 12\sqrt{3}\ R\ sen\ (a/2)\ sen\ (b/2)\ sen\ (c/2)$$

e quindi vale la disuguaglianza:

$$sen\ a + sen\ b + sen\ c \geq 12\sqrt{3} sen\ (a/2)\ sen\ (b/2)\ sen\ (c/2)$$

Per dimostrarla, consideriamo la funzione:

$$f(a, b, c) = sen\ a + sen\ b + sen\ c - 12\sqrt{3} sen\ (a/2)\ sen\ (b/2)\ sen\ (c/2)$$

e la funzione

$$f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = sen\ a + 2\ sen\ [(b+c)/2] - 12\sqrt{3} sen\ (a/2)\ sen^2\ [(b+c)/4]$$

Calcoliamo la differenza:

$$e = f(a, b, c) - f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) =$$
$$= sen\ a + sen\ b + sen\ c - 12\sqrt{3}\ sen\ (a/2)\ sen\ (b/2)\ sen\ (c/2) - sen\ a -$$
$$- 2\ sen\ [(b+c)/2] + 12\sqrt{3}\ sen\ (a/2)\ sen^2\ [(b+c)/4] =$$
$$= sen\ b + sen\ c + 12\sqrt{3}\ sen\ (a/2)\ [sen^2[(b+c)/4] - sen\ (b/2)\ sen\ (c/2)] -$$
$$- 2\ sen\ [(b+c)/2] =$$
$$= 2\ sen\ [(b+c)/2]\ cos\ [(b-c)/2] + 12\ \sqrt{3}\ sen\ (a/2)\ [sen^2[(b+c)/4] -$$
$$- \quad sen\ (b/2)\ sen\ (c/2)] - 2\ sen\ [(b+c)/2]$$

usando la formula

$$sen^2\ [(b+c)/4] - sen\ (b/2)\ sen\ (c/2) = sen^2[(b-c)/4]$$

si ha

$$e = 2\ sen\ [(b+c)/2]\ cos\ [(b+c)/2] + 12\ \sqrt{3}\ sen\ (a/2)\ sen^2[(b-c)/4] -$$
$$- \quad 2\ sen\ [(b+c)/2] =$$
$$= 2\ sen\ [(b+c)/2]\ [cos\ [(b+c)/2 - 1] + 12\ \sqrt{3}\ sen\ (a/2)\ sen^2[(b-c)/4] =$$

ricordando che abbiamo già dimostrato che

$$[cos\ [(b+c)/2 - 1] = - 2\ sen^2[(b-c)/4]$$

sostituendo si ha

$$e = 2\ sen\ [(b+c)/2]\ [- 2\ sen^2(b-c)/4] + 12\ \sqrt{3}\ sen\ (a/2)\ sen^2[(b-c)/4] =$$
$$= - 4\ sen\ [(b+c)/2]\ sen^2[(b-c)/4] + 12\ \sqrt{3}\ sen\ (a/2)\ sen^2[(b-c)/4] =$$
$$= 4\ sen^2[(b-c)/4]\ [3\ \sqrt{3}\ sen\ (a/2) - sen\ [(b+c)/2]]$$

ora il *sen (a/2)* lo possiamo scrivere in questa forma:

$$sen\ (a/2) = sen\ [\pi - (b+c)]/2 = sen\ [\pi/2 - (b+c)/2] = cos\ [(b+c)/2]$$

quindi

$$e = 4\ sen^2[(b-c)/4]\ [3\sqrt{3}\ cos\ [(b+c)/2] - sen\ [(b+c)/2]]$$

che risulta positiva per

$$[3\sqrt{3}\ cos\ [(b+c)/2] - sen\ [(b+c)/2]] \geq 0$$

Ora dimostriamo la

$$f(a, b, c) = sen\ a + sen\ b + sen\ c - 12\sqrt{3} sen\ (a/2)\ sen\ (b/2)\ sen\ (c/2)$$

per un qualsiasi triangolo isoscele, considerando il caso:

$$b = c = t, \qquad a = \pi - 2t, \qquad con\ t > 0$$

allora

$$f_1 = f(\pi - 2t, t, t) = sen\ (\pi - 2t) + 2\ sen\ t - 12\sqrt{3} sen\ (\pi - 2t)/2\ sen^2\ (t/2) =$$
$$= sen\ 2t + 2\ sen\ t - 12\sqrt{3} sen\ (\pi/2 - t)\ sen^2\ (t/2) =$$
$$= 2\ sen\ t\ cos\ t + 2\ sen\ t - 12\sqrt{3} cos\ t\ (1 - cos\ t)/2 =$$
$$= 2\ sen\ t\ (cos\ t + 1) - 6\sqrt{3}\ cos\ t + 6\sqrt{3}\ cos^2 t =$$
$$= 2\ sen\ t\ (cos\ t + 1) + 6\sqrt{3}\ cos\ t\ (cos\ t - 1)$$

Anche in questo caso l'autore ci suggerisce che f_1 è non negativa e quindi che si è dimostrata la disuguaglianza iniziale innanzitutto per il triangolo isoscele e poi per il triangolo qualsiasi, e l'uguaglianza si ha solo quando $f_1 = 0$, il che accade solo per $a = b = c = \pi / 3$ cioè per il triangolo equilatero.

2.2.1 Un'altra applicazione del nostro metodo è offerta dal problema 10418 (4, p.1013) proposto dal nostro autore R. A. Satnoianu :

Dato un triangolo acuto, siano h_a, h_b, h_c rispettivamente le sue altezze, e sia s il suo semiperimetro. Dimostrare che

$$\sqrt{3}\ max(h_a, h_b, h_c) \geq s, \qquad (2.3.1)$$

Stavolta assumiamo che gli angoli soddisfino $a \geq b \geq c$, allora $max(h_a, h_b, h_c) = h_c$.

Usando relazioni note come:

$S = s\ r$ dove S è l'area del triangolo, s il semiperimetro e r il raggio del cerchio inscritto, da cui $s = S / r$, e usando la legge dei seni

$C / sen\ c = 2\ R$ da cui $C = 2\ R\ sen\ c$ e la relazione

$S = ½\ C\ h_c = R\ sen\ c\ h_c$

la (2.3.1) può essere trasformata nella forma equivalente

$$\sqrt{3}\ h_c \geq R\ sen\ c\ h_c / r$$

ovvero

$$4\sqrt{3}\,R\,sen\,(a/2)\,sen\,(b/2)\,sen\,(c/2) - R\,sen\,c \geq 0$$

e ancora

$$4\sqrt{3}\,sen\,(a/2)\,sen\,(b/2)\,sen\,(c/2) - sen\,c \geq 0$$

poiché

$$sen\,c = sen\,2(c/2) = 2\,sen\,(c/2)\cos\,(c/2)$$

si ha la relazione:

$$4\sqrt{3}\,sen\,(a/2)\,sen\,(b/2)\,sen\,(c/2) - 2\,sen\,(c/2)\cos\,(c/2) \geq 0$$

e quindi

$$2\,sen\,(c/2)\,[2\sqrt{3}\,sen\,(a/2)\,sen\,(b/2) - \cos\,(c/2)] \geq 0$$

A questo punto consideriamo la funzione

$$f(a,b,c) = 2\sqrt{3}\,sen\,(a/2)\,sen\,(b/2) - \cos\,(c/2) \geq 0 \qquad (2.3.2)$$

per $0 \leq c \leq b \leq a \leq \pi/2$

e la funzione

$$f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = 2\sqrt{3}\,sen\,(a/2)\,sen\,[(b+c)/4] - \cos\,[(b+c)/4]$$

Ora calcoliamo la differenza:

$$e = f(a,b,c) - f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) =$$

$$= 2\sqrt{3}\,sen\,(a/2)\,sen\,(b/2) - \cos\,(c/2) - 2\sqrt{3}\,sen\,(a/2)\,sen\,[(b+c)/4] + \cos\,[(b+c)/4]$$

$$e = 2\sqrt{3}\,sen\,(a/2)\,[sen\,(b/2) - sen\,[(b+c)/4]] - \cos\,(c/2) + \cos\,[(b+c)/4]$$

Usando le formule di prostaferesi:

$$sen\,x - sen\,y = 2\,sen\,[(x-y)/2]\cos\,[(x+y)/2]$$

$$\cos x - \cos y = 2\,sen\,[(y-x)/2]\,sen\,[(x+y)/2] = -\,2\,sen\,[(x-y)/2]\,sen\,[(x+y)/2]$$

queste semplificano tale differenza in

$$e = 2\sqrt{3}\,sen\,(a/2)\,[sen\,(b/2) - sen\,[(b+c)/4]] - \cos\,(c/2) + \cos\,[(b+c)/4]$$

e inoltre possiamo scrivere

$$sen\,(b/2) - sen\,[(b+c)/4] = 2\,sen\,[[(b/2) - (b+c)/4]/2]\cos\,[[(b/2) + (b+c)/4]/2] =$$

$$= 2\,sen\,[[(2b - b - c)/4]/2]\cos\,[[(2b + b + c)/4]/2] =$$

$$= 2\,sen\,[(b-c)/8]\cos\,[(3b + c)/8]$$

e

$$\cos\,[(b+c)/4] - \cos\,(c/2) = -\,2\,sen\,[[(b+c)/4 - (c/2)]/2]\,sen\,[[(b+c)/4 + (c/2)]/2] =$$

$$= -\,2\,sen\,[(b+c-2c)/8]\,sen\,[(b+c+2c)/8] =$$

$$= -\,2\,sen\,[(b-c)/8]\,sen\,[(b+3c)/8]$$

pertanto

$$e = 2\sqrt{3}\,sen\,(a/2)\,[2\,sen\,[(b-c)/8]\cos\,[(3b+c)/8]] - 2\,sen\,[(b-c)/8]\,sen\,[(b+3c)/8]$$

$$e = 2\,sen\,[(b-c)/8]\,[2\sqrt{3}\,sen\,(a/2)\cos\,[(3b+c)/8] - sen\,[(b+3c)/8]]$$

Entrambi i fattori qui sono positivi grazie all'ordine preso nella (2.3.2), infatti per per $0 \leq c \leq b \leq a \leq \pi/2$ e risulta positiva.

L’uguaglianza si può ottenere solo quando $b = c$, per esempio per un triangolo isoscele.

Per l’ altra disuguaglianza si può facilmente verificare, facendo uso della

$$b + c = \pi - a,$$

che

$f(a,(b+c)/2,(b+c)/2) = 2\sqrt{3}\ sen\ (a/2)\ sen\ [(\pi - a)/4] - \cos\ [(\pi - a)/4] \geq 0$ (2.3.3)

per $\pi/3 \leq a \leq \pi/2$ con l’uguaglianza in (2.3.3) ottenuta solo per $a = \pi/3$.

Infatti studiando la funzione in (2.3.3) per un qualsiasi triangolo isoscele, considerando il caso:

$$b = c = t \qquad a = \pi - 2t \qquad \text{con} \quad t > 0$$

si ha

$$f_1 = f(\pi - 2t, t, t) = 2\sqrt{3}\ sen\ [(\pi - 2t)/2]\ sen\ [(2t)/4] - \cos\ [(2t)/4] =$$

$$= 2\sqrt{3}\ sen\ (\pi/2 - t)\ sen\ (t/2) - \cos\ (t/2)$$

$$f_1 = 2\sqrt{3}\cos t\ sen\ (t/2) - \cos\ (t/2)$$

che è non negativa per tutti i $0 \leq t \leq \pi$, inoltre si può vedere che f è nulla anche per $a \approx \pi/2 + 0.06208$.

Perciò la disuguaglianza è valida per triangoli ottusi, come era stato già provato in una delle dimostrazioni pubblicate in Monthly Problema 10418 (5, p.272).

3. Conclusioni

Ci sono molte altre disuguaglianze che facilmente si adattano alla struttura che abbiamo presentato, ne abbiamo considerato solo alcune delle più interessanti per illustrare il nostro metodo.

Ad esempio potremmo verificare che il metodo è adatto a dimostrare anche la disuguaglianza di Eulero, la quale afferma che il raggio del cerchio circoscritto al triangolo è sempre maggiore del diametro del cerchio inscritto, cioè in formule:

$$R \geq 2r$$

Infatti, usando la relazione

$$r = 4R \, sen(a/2) \, sen(b/2) \, sen(c/2)$$

si ha

$$8R \, sen(a/2) \, sen(b/2) \, sen(c/2) \leq R$$

cioè

$$8 \, sen(a/2) \, sen(b/2) \, sen(c/2) \leq 1$$

da cui

$$sen(a/2) \, sen(b/2) \, sen(c/2) \leq 1/8$$

che abbiamo già dimostrato.

Allo stesso risultato si giunge per dimostrare la disuguaglianza di Kubota:

$$36r^2 \leq R^2$$

infatti, usando la stessa relazione che lega il raggio del cerchio inscritto e il raggio del cerchio circoscritto, si ha

$$36 * 16 R^2 sen^2(a/2) \, sen^2(b/2) \, sen^2(c/2) \leq 9R^2$$

$$64 R^2 sen^2(a/2) \, sen^2(b/2) \, sen^2(c/2) \leq 1$$

$$8 \, sen(a/2) \, sen(b/2) \, sen(c/2) \leq 1$$

$$sen(a/2) \, sen(b/2) \, sen(c/2) \leq 1/8$$

disuguaglianza ormai già nota.

BIBLIOGRAFIA

1. R.A. Satnoianu, *A General Method for establishing geometric inequalities in a triangle,* Monthly 108 (4, 2001) 360-364

2. J. Garfunkel, Problema E 2029 Monthly 74 (1967) 1133

3. R.A. Satnoianu, Problema 10418 101 (1994) 1013

4. T. Sekiguchi, Problema E3038, Monthly 89 (1984) 140

5. W.J. Blundon, Canadian Math. Bull. 8 (1965) 615-626

6. W.J. Blundon, E 1935, Monthly 73 (1966) 1122