Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di laurea in fisica

Anno accademico 2024/2025

Tesi di laurea

Ruolo delle incertezze astrofisiche nelle ricerche dirette di materia oscura

Relatore

Prof. Francesco D'Eramo

Laureando

Tullio Cavalli

Indice

1 Introduzione storica **4**
1.1 Fritz Zwicky e il teorema del viriale 4
1.2 Le curve di rotazione galattiche 6
1.3 Materia oscura fredda 7
1.4 Il modello ΛCDM 8

2 Distribuzione della DM **10**
2.1 Formazione di un alone di DM 10
2.2 Simulazioni numeriche N-Body 12
2.3 Densità locale della DM nella Via Lattea 13
2.4 Velocità locale della DM nella Via Lattea 14

3 Esperimenti di rivelazione diretta **16**
3.1 Esperimento nel SDR del laboratorio 16
3.2 Esperimento nel SDR del CM 17
3.3 Tasso di interazioni atteso 18
3.4 Dipendenza temporale del tasso di interazioni 21

4 Incertezze astrofisiche **24**
4.1 Velocità di fuga galattica 24
4.2 Velocità circolare del Sole 25
4.3 Distribuzione locale della DM 26
4.4 Distribuzione delle velocità 27

5 Conclusioni **29**

Abstract

L'evidenza accumulata negli ultimi decenni sulla materia oscura (DM) rimuove ogni dubbio riguardo alla necessità di fisica oltre il Modello Standard (SM). Lo scopo di questa tesi è di analizzare gli esperimenti di rivelazione diretta della DM condotti in laboratori sotterranei. Dopo un'introduzione storica al tema della DM, nella prima parte verrà sviluppato il formalismo matematico per calcolare il tasso di interazioni atteso. Questo risultato sarà suddiviso in vari contributi, tra cui uno che richiede una conoscenza dettagliata della distribuzione della DM attorno al sistema solare, sia nello spazio che nei momenti. Tali informazioni sono ancora sconosciute. Nella seconda parte, si analizzerà l'impatto di queste incertezze astrofisiche sulla nostra capacità di interpretare i dati sperimentali.

1 Introduzione storica

La storia della DM inizia nella prima metà del secolo scorso, quando, a partire dal 1917, le teorie della relatività di Einstein portano ad una svolta nell'astronomia teorica e sperimentale e alla nascita della cosmologia moderna. La maggiore comprensione di fenomeni, come l'effetto Doppler, permette all'astronomia di compiere significativi passi in avanti nello studio dei corpi celesti che popolano l'universo.
Nel 1922 l'astronomo olandese Jacobus Kapteyn pubblica *"Una teoria generale sulla distribuzione di massa, forze e velocità nella Via Lattea"*, in cui assume la galassia come un gas di stelle che ruota su un piano, attorno ad un asse orientato verso il polo galattico, e propone una relazione tra il moto delle stelle e la loro dispersione di velocità. Con quest'ultima espressione si intende la velocità che ogni singolo oggetto stellare o galattico ha rispetto alla velocità media del sistema più esteso in cui esso si trova. Nel 1932 l'allievo di Kapteyn, Jan Oort, progredisce notevolmente, nella stessa ricerca del maestro, grazie all'assunzione di isotermia del gas di stelle. Utilizzando il modello modificato ricava una stima della densità di materia locale in prossimità del Sole. L'astronomo arriva ad un valore, per la densità totale di massa vicino al Sole, di $0.092 \cdot M_\odot\, pc^{-3}$. È interessante usare le parole scelte da Oort per illustrare il limite sulla quantità di DM da lui trovato:

"Possiamo concludere che la massa totale di materia nebulosa o meteoritica vicino al Sole è inferiore a $0.05 \cdot M_\odot\, pc^{-3}$*; probabilmente è inferiore alla massa totale delle stelle visibili, forse di molto."*

Dall'articolo [1] si evince chiaramente che la quantità massima consentita di DM è meno della metà di quella totale ed inoltre che, secondo l'astronomo, tale materia consiste probabilmente di stelle deboli, che possono essere spiegate tramite un'estrapolazione adeguata della funzione di massa stellare, insieme a materia "nebulosa" e "meteoritica". Nell'anno successivo, però, la ricerca della materia invisibile nel cosmo compie un grande passo in avanti, per merito di uno dei protagonisti di questa storia: l'astronomo svizzero Fritz Zwicky.

1.1 Fritz Zwicky e il teorema del viriale

Fritz Zwicky è probabilmente il pioniere più famoso e citato nel campo della DM. Nel 1933 nota una grande dispersione nelle velocità di otto galassie all'interno dell'Ammasso della Chioma. Il fatto che l'Ammasso della Chioma mostri una tale dispersione di velocità è già stato notato dall'astronomo Edwin Hubble e dal suo assistente Humason, ma Zwicky fa un passo ulteriore: applica per primo il teorema del viriale all'ammasso, con l'obiettivo di quantificare la massa della sua materia non visibile.
In un sistema autogravitante ad energia negativa, il teorema del viriale afferma che le energie cinetica T e potenziale gravitazionale V soddisfano la relazione:

$$2\langle T\rangle_t = -\langle V\rangle_t \quad , \tag{1}$$

dove $\langle\cdot\rangle_t$ denota la media temporale su un tempo t sufficientemente grande.
In un modello in cui l'ammasso è considerato un sistema di $N \gg 1$ oggetti di massa m contenuti in una sfera di raggio R che interagiscono attraverso la gravità [2], è quindi possibile determinare la velocità quadratica media delle singole galassie dalla massa totale mN e dalla dimensione R del sistema:

$$2\,\frac{mN\langle v^2\rangle_t}{2} = \frac{3}{5}\frac{G(mN)^2}{R} \Rightarrow \langle v^2\rangle_t = \frac{3}{5}\frac{GmN}{R}\,. \tag{2}$$

Il calcolo del potenziale V utilizzato in questa formula è mostrato nella sezione 2.1.
Zwicky parte allora dando una stima della massa totale della Chioma come il prodotto del numero di galassie osservate, 800, per la massa media di una galassia, $10^9 \cdot M_\odot$, valore calcolato da Hubble. Così facendo ottiene, approssimativamente, la massa che dovrebbe avere l'ammasso se fosse composto solo da corpi luminosi. In seguito, per determinare R, cerca una stima per la dimensione fisica del sistema, che trova essere circa 10^6 anni luce. Da lì, calcola $\langle v^2\rangle_t$ e, infine, facendone la radice, una dispersione di velocità. Scopre che le galassie dell'ammasso della Chioma, secondo questo modello, dovrebbero mostrare una dispersione di velocità di 80 km/s. Al contrario, la dispersione media osservata lungo la direzione di acquisizione del radar è di 1000 km/s. Da questo confronto, l'astronomo conclude [3] :

"Se ciò venisse confermato, otterremmo il sorprendente risultato che la materia oscura è presente in quantità molto maggiore rispetto alla materia luminosa."

Nel 1937 Zwicky pubblica un articolo *"Sulla massa delle nebulose e degli ammassi di nebulose"*, sull' Astrophysical Journal. In questa ricerca [4] affina la propria analisi dell'Ammasso della Chioma e presenta nuove tecniche per la determinazione delle masse delle galassie, rispetto alla semplice osservazione della loro luminosità o delle loro curve di rotazione. Zwicky ritiene tali metodi non affidabili, dato che con il primo è possibile dare solo un limite inferiore alla massa del sistema complessivo ed esclusivamente con il secondo non si ottengono abbastanza informazioni per la determinazione della massa. Propone, invece, l'utilizzo del teorema del viriale, già adottato nella ricerca precedente, e l'osservazione, tra le galassie, degli effetti di lente gravitazionale dell'ammasso, direttamente collegati alla sua massa.
Zwicky continua, poi, nel suo articolo, con un'affermazione che ci permette di capire meglio cosa, in quegli anni, intende per *"materia oscura"* [4]:

"[Per derivare la massa delle galassie dalla loro luminosità] dobbiamo sapere quanta materia oscura è incorporata nelle nebulose sotto forma di stelle fredde e gelide, corpi solidi macroscopici e microscopici e gas" .

I risultati cui giunge, infine, l'astronomo, con lo stesso calcolo del '33, ma utilizzando valori più accurati, sono di un sorprendente rapporto massa-luce di circa 500.

Con la stessa metodologia di Zwicky Sinclair Smith, nel 1936, studia le galassie periferiche della Vergine e dalla loro dinamica ricava, per quest'ultima, un rapporto massa-luce di circa 200. I risultati di Zwicky e Smith portano la comunità scientifica ad una sincera preoccupazione che, nel 1940, è descritta da Erik Holmberg [5] come segue:

"Non sembra possibile accettare le alte velocità [negli ammassi della Vergine e della Chioma] come appartenenti a membri permanenti dell'ammasso, a meno che non si supponga che una grande quantità di massa – la maggior parte della massa totale dell'ammasso – sia costituita da materiale oscuro distribuito tra i membri dell'ammasso, un'ipotesi improbabile."

Durante quegli anni, però, nasce una nuova tecnica sperimentale per la misura del rapporto massa-luminosità, quella delle curve di rotazione delle galassie. Questa, come vedremo, porterà la tesi dell'astronomo svedese ad essere sempre meno sostenuta e costringerà la comunità scientifica a considerare seriamente l'elevata abbondanza di DM nell'universo.

1.2 Le curve di rotazione galattiche

Studiando la dinamica di una galassia, tramite semplici considerazioni di gravitazione newtoniana, si trova la seguente relazione tra la velocità circolare di una stella periferica e la sua distanza dal centro del nucleo galattico:

$$v_{cir}(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \tag{3}$$

dove $M(r)$ è la massa contenuta entro la distanza r dal centro, assumendo simmetria sferica. Se si considera una galassia come *esclusivamente* formata dalle stelle visibili, è possibile a grandi distanze approssimare $M(r) \approx$ costante, dato che quest'ultime si concentrano prevalentemente in prossimità del nucleo galattico. Si ottiene così $v_{cir}(r) \propto 1/\sqrt{r}$.
Il motivo per cui Zwicky, nel 1937, si esprime negativamente riguardo l'affidabilità di una tecnica sperimentale basata su questo concetto, è che la possibile "viscosità" interna dovuta alle interazioni reciproche tra le stelle, secondo l'astronomo, renderebbe le misurazioni delle velocità non utilizzabili per analisi successive. Nel 1939 Horace Babcock, nella sua tesi di dottorato, presenta la curva di rotazione della galassia di Andromeda (M31) fino a 100 arcmin dal suo centro. I valori rilevati dall'astronomo, per la velocità circolare a grandi raggi, risultano molto elevati, tanto da sembrare sospetti, come previsto da Zwicky.
Sorprendentemente, però, nel 1942 il fisico Chandrasekhar dimostra, nell'articolo *"Il tempo di rilassamento dei sistemi stellari"*, che le mutue interazioni tra le stelle sono completamente trascurabili. Questo risultato offre la possibilità di trattare le galassie come sistemi di stelle non interagenti e quindi di utilizzare le curve di rotazione per la stima della distribuzione di massa.
Successivamente, terminata la Seconda guerra mondiale, i radar militari tedeschi iniziano ad essere utilizzati per le osservazioni astronomiche, favorendo notevolmente il giovane campo della radioastronomia. L'allievo di Oort, Hendrik van de Hulst, nel 1944 scopre che l'idrogeno neutro emette fotoni alla lunghezza d'onda di circa 21 cm. L'importanza di questa scoperta è dovuta al fatto che tale atomo è presente in grande abbondanza tra le stelle delle galassie ed è perciò possibile costruire le curve di rotazione galattiche anche tramite l'osservazione della riga a 21 cm.
Fino al 1960, però, malgrado i consistenti sviluppi, non si avverte ancora una situazione di crisi nel campo dell'astrofisica, o quantomeno non vi è consenso sul fatto che le curve di rotazione osservate siano in conflitto con la comprensione vigente delle galassie, ma nel decennio successivo, le cose iniziano a cambiare drasticamente.
Negli anni Sessanta Kent Ford sviluppa uno spettrografo a tubo d'immagine che utilizza, assieme all'astronoma Vera Rubin, per compiere delle osservazioni spettroscopiche di M31. L'osservazione della curva di rotazione di M31, i cui dati ottici si estendono fino a 110 arcmin dal centro della galassia, viene nel 1970 pubblicata dai due astronomi. Al contrario di quanto atteso dalle stime teoriche, Rubin e il suo collaboratore Ford osservano che le velocità orbitali delle stelle periferiche rimangono costanti con la distanza dal nucleo galattico.

Nel 1975 Morton Roberts, insieme a R. Whitehurst, pubblica una curva di rotazione di M31, ricavata con la riga a 21 cm, che si estende fino a 150 arcmin dal suo centro, riscontrando a sua volta dei valori costanti. La curva di rotazione di M31 è presentata in figura 1. Roberts è uno dei primi a riconoscere le implicazioni della piattezza osservata nella curva di rotazione: il fisico sottolinea che tali dati richiedono che il rapporto tra massa e luminosità vari con il raggio, aumentando con la distanza dal centro. In effetti, dall'equazione 3, è facile notare che per ottenere una velocità circolare costante a grandi distanze è sufficiente avere una densità di materia (oscura), sempre a simmetria sferica, proporzionale a $1/r^2$ lontano dal nucleo galattico, da cui la tesi di Roberts.
Nel 1978, Albert Bosma pubblica l'osservazione radio dei campi di velocità e delle corrispondenti

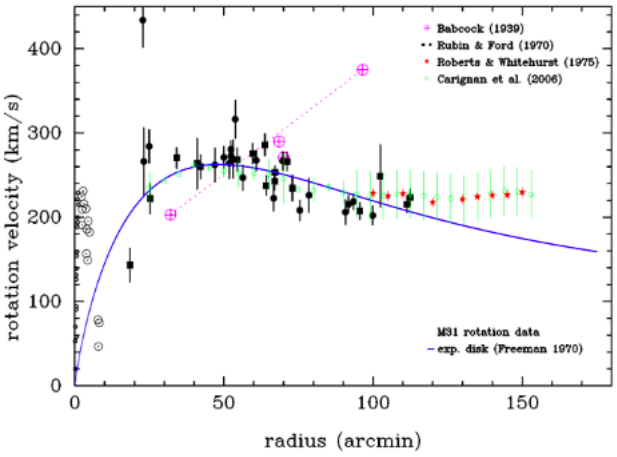


Figura 1: Curva di rotazione di M31; misure di Babcock[6], Rubin [7], Roberts[8], Carignan et al.[9], curva blu realizzata da Freeman [10]

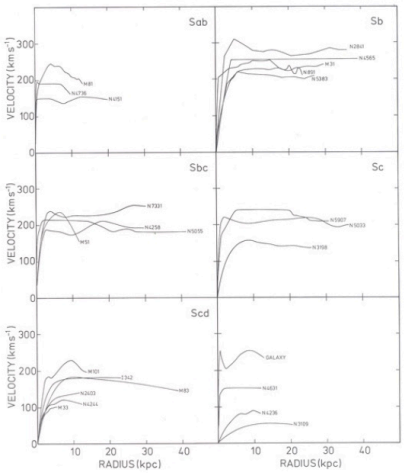


Figura 2: Curve di rotazione di Bosma [11]

curve di rotazione di 25 galassie, proposte in figura 2. Rubin, Ford e Norbert Thonnard presentano poi le curve di rotazione ottiche di altre dieci galassie a spirale ad alta luminosità. In entrambi i lavori si trova che la maggior parte di questi oggetti mostra una curva piatta fino al raggio massimo osservato. Nel 1979 Sandra Faber e John Gallagher commentano [12]:

"Si conclude che l'evidenza della massa invisibile nell'universo è molto forte e sta diventando sempre più solida." .

Risulta quindi chiaro che, verso la fine degli anni Settanta, la maggior parte della comunità scientifica ha accettato la presenza di una consistente quantità di DM nelle vicinanze delle galassie che popolano il nostro universo.

1.3 Materia oscura fredda

Fino agli anni Ottanta, come abbiamo visto, con il termine DM si intende un qualcosa di poco luminoso, difficile da rivelare con i telescopi, poiché nascosto dall'intensa luminosità delle stelle vicine. Nei decenni successivi, però, il concetto di DM evolve considerevolmente. Il motivo di questa evoluzione è che, nel tempo, un crescente numero di fisici delle particelle si interessa alla cosmologia e, in particolare, al mistero della DM. L'analisi del problema dal punto di vista particellare porta, infatti, alla formulazione dell'ipotesi che la "massa mancante" nell'universo sia riconducibile ad una o più specie di particelle subatomiche, più o meno sconosciute. Durante gli anni Ottanta, inoltre, un nuovo strumento, la simulazione numerica, è messo a disposizione per la ricerca verso questa direzione. La potenza delle simulazioni numeriche risiede nel fatto che esse possono essere utilizzate per capire come le proprietà di un'ipotetica specie particellare cambiano l'evoluzione di un universo in espansione.
La prima caratteristica ad essere testata tramite le simulazioni è la velocità tipica che un candidato di DM ha nell'era della formazione delle strutture; a seconda della loro velocità, infatti, i candidati si suddividono naturalmente in caldi (HDM), se sono relativistici, o freddi (CDM), se sono non-relativistici. Ciò che emerge tramite le prime simulazioni numeriche è che la HDM tende a formare prima delle strutture molto grandi e solo dopo procede con la formazione di sottostrutture. Al contrario, la CDM porta prima alla composizione di strutture su piccola scala

per poi, dalle loro unioni, formare strutture su larga scala. Grazie al confronto dei risultati delle simulazioni con dati sperimentali come quelli del CfA Redshift Survey, uno dei primi progetti per una mappatura 3D delle galassie nell'universo locale, la comunità scientifica conclude che la natura preponderante della DM deve essere quella fredda. Questo risultato permette di escludere i candidati al tempo più accreditati: i neutrini.
Quest'ultimi erano, infatti, stati proposti a metà degli anni Settanta come uniche particelle dello SM aventi le proprietà richieste ad un'ipotetica particella di DM, in quanto stabili e non interagenti né elettromagneticamente né forte. I neutrini, però, essendo relitti termici molto leggeri, sono usciti dall'universo primordiale con una velocità relativistica e quindi, rappresentando candidati di HDM, non possono ricoprire una percentuale dominante della DM.
In seguito ai risultati trovati con le simulazioni numeriche e una volta inquadrate le caratteristiche principali per un candidato di DM, durante l'ultima parte del ventesimo secolo nasce il concetto di WIMP (Weakly Interacting Massive Particle). Le WIMPs, intese come particelle con massa circa della scala di Fermi e interagenti con lo SM esclusivamente attraverso la forza debole, emergono in molte estensioni dello SM e possono sviluppare l'abbondanza osservata di relitti di DM attraverso il meccanismo di freeze-out. Tuttavia, le WIMPs sono solo un esempio di ciò che potrebbe essere la DM, con molte altre possibilità che includono le WISP (Weakly Interacting Slim Particle), i buchi neri primordiali e i relitti non termici supermassicci.

1.4 Il modello ΛCDM

Nel corso degli anni Settanta, anche in cosmologia si inizia a riflettere sulle implicazioni delle ultime scoperte nel processo di formazione delle strutture e nell'evoluzione dell'universo. Nel 1974 Richard Gott, James Gunn, David Schramm e Beatrice Tinsley pubblicano *"An unbound universe"*. In questo articolo sostengono che l'insieme dei dati astronomici indica che non c'è abbastanza materia nell'universo, nemmeno considerando gli alti rapporti massa-luminosità osservati tra le galassie, per eguagliare o superare la densità critica dell'universo.
In seguito all'introduzione della teoria dell'inflazione, però, cambia profondamente il modo di pensare della comunità cosmologica ed è possibile, per la prima volta, formulare previsioni specifiche sulla densità cosmologica totale e sullo spettro di potenza, di cui parleremo a breve. Questo dà inizio a un decennio di lotte per conciliare i modelli di formazione delle strutture con l'ipotesi, ormai accettata dalla comunità di cosmologi, di un universo piatto. La soluzione a questo problema arriva solo nel 1998 con la scoperta dell'espansione accelerata dell'universo e con il riconoscimento del contributo della costante cosmologica Λ, o "energia oscura", alla densità energetica totale.
Nel frattempo, il fisico Jim Peebles evidenzia come l'assenza di fluttuazioni nella radiazione cosmica di fondo (CMB) dell'ordine di 10^{-4} sia incompatibile con un universo composto esclusivamente da materia barionica, e sostiene che questo problema sarebbe risolto se l'universo fosse invece dominato da particelle massive e debolmente interagenti. Ma come si correlano le fluttuazioni nella CMB con l'evoluzione dell'universo e la formazione in esso di strutture?
La risposta è tramite lo spettro di potenza della materia, $P_\delta(\mathbf{k})$. Di questo oggetto matematico, ci basti sapere che esso quantifica l'abbondanza di strutture sulle differenti scale dell'universo; in altre parole, un valore grande (piccolo) di $P_\delta(\mathbf{k})$ indica che esistono molte (poche) strutture con dimensione caratteristica $\approx 1/k$.

Ora, le disomogeneità primordiali, quelle osservate nella CMB, sono dell'ordine di $\delta \approx 10^{-5}$. Questo pone un'ulteriore domanda: come hanno fatto le piccole disomogeneità primordiali a crescere da ampiezze così ridotte fino ai forti contrasti che osserviamo oggi?
Negli anni la comunità dei cosmologi ha provato a rispondere a questo quesito tramite diversi modelli, che spaziano da universi interamente costituiti da radiazione e materia barionica

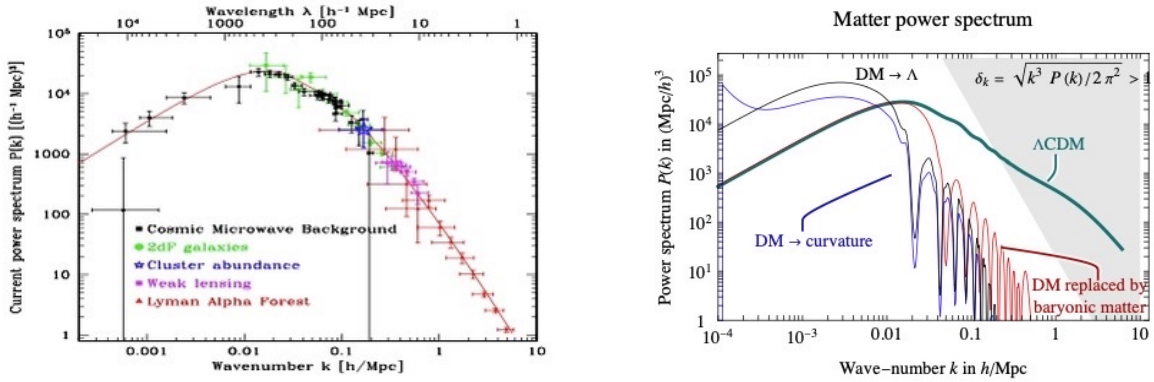


Figura 3: Spettro di potenza di materia, a sinistra quello ottenuto dalle osservazioni sperimentali, a destra quello costruito dai modelli cosmologici [13].

all'universo descritto dal nascente paradigma ΛCDM. Nell'era corrente, questo modello afferma che l'energia oscura è la componente preponderante della densità di energia, mentre la DM (la cui natura è supposta fredda) ne rappresenta $\approx 27\%$. Le osservazioni astronomiche, come la foresta Lyman-α, le misurazioni di lente gravitazionale debole, il conteggio degli ammassi, ecc., hanno poi permesso di confrontare i modelli concepiti dalla cosmologia con dei dati sperimentali (ciò è mostrato in figura 3). La risposta è dunque che la crescita delle perturbazioni di densità è stata guidata in modo cruciale dalla presenza della DM, il come verrà approfondito nel prossimo capitolo. Ma dal grafico dello spettro di potenza è possibile concludere anche alcune proprietà che deve avere questa materia [14]. In primis questo studio impone dei grandi vincoli sull'interazione DM-SM, se infatti la DM potesse interagire con lo SM, nelle prime ere dell'universo questa comunicazione avrebbe soppresso lo spettro di potenza, poiché la pressione di radiazione dei barioni e dei fotoni avrebbe impedito alle disomogeneità primordiali di crescere nel tempo. In secondo luogo la DM deve essere fredda, se fosse calda le perturbazioni entro l'orizzonte verrebbero soppresse dal suo moto, comportando nuovamente una soppressione relativa dello spettro di potenza per i modi che entrano nell'orizzonte. Come terza proprietà deve essere prevalentemente priva di collisioni all'interno del settore DM, se così non fosse la presenza di un *"bagno di radiazione oscuro"* ritarderebbe la crescita delle perturbazioni di densità e darebbe luogo a *"oscillazioni acustiche oscure"*. Infine la DM deve essere (quasi) stabile, con una vita media molto più lunga di $\tau_\chi \gg 4 \cdot 10^{17}\, s$, ovvero l'età dell'universo.
Le osservazioni dello spettro di potenza della materia, assieme a molte altre evidenze come lo spettro di potenza della CMB, hanno portato rapidamente all'affermazione del modello ΛCDM come paradigma dominante per descrivere la struttura e l'evoluzione dell'universo su tutte le scale. Seguendo questo paradigma, una delle ultime e più considerate ricerche sperimentali che analizza le anisotropie presenti nella CMB ha come pubblicazione più recente il "PLANCK 2018 results. VI. Cosmological parameters" [15] , in cui viene riportata la seguente abbondanza di DM nell'universo:

$$\Omega_\chi h^2 = 0.1200 \pm 0.001 \Rightarrow \rho_\chi = \rho_0\, \Omega_\chi \approx 1.26 \cdot 10^{-6}\, GeV/cm^3 \quad , \tag{4}$$

dove $h \approx 0.68$ è una costante adimensionale che parametrizza l'incertezza della misura e $\rho_0 = 3H_0^2/(8\pi G_N)$ è la densità critica dell'universo nell'era corrente, ovvero quella tale per cui quest'ultimo risulta piatto, come richiesto nel modello ΛCDM.

2 Distribuzione della DM

Come discusso nella sezione 1.4, la densità media di DM nell'universo ρ_χ è diversa da zero. Inoltre, a causa della formazione delle strutture, la distribuzione della DM in sistemi specifici differisce significativamente dal valore cosmologico medio. Al fine di analizzare gli esperimenti di rivelazione diretta della DM condotti in laboratori sotterranei, risulta necessaria proprio una conoscenza dettagliata della distribuzione di questi addensamenti di DM, sia nello spazio che nei momenti.
Assunte allora, per la DM, le proprietà ipotizzate dal modello ΛCDM, esposte nel capitolo precedente, quello che succede è che esistono tre diversi metodi, tra loro indipendenti, per la determinazione di $\rho(r)$ e $f(v)$, distribuzioni rispettivamente di massa e di velocità:

A) Tramite lo studio, sperimentale, della dinamica delle stelle visibili

B) Tramite lo studio, teorico, del processo di collasso gravitazionale e del suo risultato finale

C) Tramite simulazioni numeriche N-Body

Abbiamo già mostrato come dalle curve di rotazione delle galassie si riesca a stimare una densità di DM a grandi distanze dal nucleo galattico proporzionale a $1/r^2$. E' possibile, utilizzando lo stesso ragionamento, tracciare la distribuzione di DM anche in altre regioni di r. Questa è proprio l'idea che sta alla base del metodo **A**. Tuttavia, anche se, in linea di principio, il metodo sperimentale dovrebbe essere in grado di determinare la forma della distribuzione di DM, a livello pratico esistono svariate complicazioni che comportano grandi incertezze sulle curve di rotazione. Di seguito, seguendo [2], saranno dunque presentate le altre due tecniche; queste delineeranno un ottimo quadro generale delle caratteristiche degli aloni di DM nei quali si formano le galassie. Sarà poi analizzato il caso particolare della Via Lattea con il fine di ottenere delle informazioni sulle distribuzioni di massa e velocità di DM nel vicinato solare, di nostro interesse per la rivelazione diretta .

2.1 Formazione di un alone di DM

La dinamica che porta alla formazione di un alone di DM, a partire da un universo omogeneo, ha inizio da una leggera sovradensità locale. Considereremo tale addensamento composto da corpi privi di collisioni, senza dissipazione di energia e approssimativamente sferico; quest'ultima assunzione verrà poi motivata tramite le simulazioni a N-body. Quello che succede è che, se si lascia la sovradensità libera di evolvere sotto l'azione della gravità, dopo un certo intervallo di tempo il risultato finale sarà una sfera autogravitante, quasi-statica. Ciò accade perchè la DM è senza collisioni e non dissipa energia. Questo fa sì che, a differenza della materia barionica, la DM non possa mai collassare ad un buco nero. L'intero processo è noto come virializzazione e il sistema risultante è detto virializzato, ovvero per quest'ultimo è valida la formula 1.
La dinamica inizia quindi nell'istante di *turnaound*, quello in cui la forza gravitazionale, generata dalla sovradensità, blocca l'allontanamento della DM circostante, dovuto all'espansione dell'universo. Per semplicità, consideriamo la materia ormai legata dalla gravità come distribuita uniformemente, con densità costante ρ_{ta}, in una sfera di raggio r_{ta}. Al momento del turnaround, come detto, la DM si ferma; dunque in quell'istante la sua energia totale risulta:

$$E_{TOT} = V_{ta} = \int_0^{V_{ta}} dV = \int_0^{M_{TOT}} -\frac{Gm}{r(m)}\, dm = -3\frac{GM_{TOT}^2}{r_{ta}^6}\int_0^{r_{ta}} r^4\, dr = -\frac{3}{5}\frac{GM_{TOT}^2}{r_{ta}} \quad , \quad (5)$$

dove nel penultimo passaggio si è posto $m = M_{TOT}\ (r/r_{ta})^3$. Successivamente la sfera inizia a collassare fino al raggiungimento di un volume minimo, per poi riespandersi, a causa dell'elevata energia cinetica guadagnata, ed arrivare alla sua configurazione di equilibrio. Alla fine del processo, si raggiunge dunque un sistema virializzato per cui vale:

$$E_{vir} = V_{vir} + K_{vir} = \frac{V_{vir}}{2} \Rightarrow V_{vir} = 2E_{vir} = 2E_{tot} = -\frac{3}{5}\frac{GM_{TOT}^2}{r_{vir}} \quad . \tag{6}$$

Nell'ultimo passaggio è stata usata l'equazione 5 per definire $r_{vir} \equiv r_{ta}/2$. Assumendo poi che la densità raggiunta in seguito alla virializzazione sia a sua volta costante, si ottiene $\rho_{vir} = 8\rho_{ta}$. Scelta ρ_{ta} in modo ragionevole si trova, per l'alone virializzato, una densità $\rho_{\rm vir} \approx 200\rho_0$. Questo modello è una grande semplificazione di ciò che accade realmente; però, almeno per come emerge dalle simulazioni numeriche, gli ordini di grandezza sono corretti. Ora che abbiamo compreso meglio ciò che accade durante il processo di collasso gravitazionale, possiamo concentrarci sulla determinazione delle funzioni di distribuzione del sistema, dato che la $\rho_{\rm vir}$ precedentemente determinata non fornisce alcun tipo di informazione locale sulla DM.
Dal punto di vista particellare, quello che succede durante la virializzazione equivale di fatto ad un processo caratterizzato da una serie di interazioni gravitazionali tra le particelle di DM. Quindi, se consideriamo una singola particella di DM immersa nel campo gravitazionale $\phi(r)$, generato dall'intero alone virializzato, essendo il sistema finale a simmetria sferica e in stato stazionario, si può dimostrare che la sua funzione di distribuzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f(r, v)$ ed inoltre che la sua dipendenza da r e v è data solo tramite l'energia totale:

$$E = m_\chi(\frac{v^2}{2} + \phi(r)) \Rightarrow f(r,v) = \frac{n_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-E/\sigma^2} = \frac{n_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-(v^2/2+\phi)/\sigma^2} \quad . \tag{7}$$

dove il parametro σ, per analogia con la distribuzione di Maxwell-Boltzmann (MB), rappresenta la dispersione di velocità della generica particella. Data la natura di $f(r, v)$ abbiamo che l'oggetto $f(r, v)d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ rappresenta la probabilità, indipendente dal tempo, di trovare la particella nell'elemento di volume dello spazio delle fasi $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$. Dunque, per quanto affermato, è chiaro che integrando $f(r, v)$ su tutte le velocità si ottiene la distribuzione spaziale delle particelle di DM, ovvero la loro densità numerica:

$$n(r) = \int d\mathbf{v}\ f(r,v) = \frac{n_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-\phi(r)/\sigma^2} \int_0^\infty dv\ v^2 e^{-v^2/(2\sigma^2)} = n_0 e^{-\phi(r)/\sigma^2} \quad . \tag{8}$$

Da cui, moltiplicando per m_χ, massa di una singola particella, e definendo $\rho_0 \equiv m_\chi n_0$, si ottiene:

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\phi(r)/\sigma^2} \Rightarrow \phi = -\sigma^2\ \ln(\rho/\rho_0) \quad . \tag{9}$$

Infine, inserendo questa informazione nell'equazione di Poisson $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$, si trova la già citata dipendenza da $1/r^2$ per la densità di DM:

$$\frac{d}{dr}(r^2 \frac{d}{dr} \ln \rho(r)) = -\frac{4\pi G}{\sigma^2}\ r^2\rho \Rightarrow \rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G}\frac{1}{r^2} \quad . \tag{10}$$

Un oggetto caratterizzato da tale distribuzione di massa prende il nome di sfera isoterma singolare. Quest'ultima si comporta come la configurazione di equilibrio, con una temperatura uniforme nello spazio, a cui un gas arriva per effetto di urti ed interazioni tra le sue particelle. Nel nostro caso, il ruolo delle collisioni è svolto dagli scattering gravitazionali tra la particella e l'intero alone, mentre la grandezza che rimane costante al variare di r è la dispersione di velocità. La corrispondenza con il caso di un gas ideale è chiara se si identifica $\sigma^2 = k_B T/m_\chi$.

DM halo	Functional form
NFW	$\rho_{\rm NFW}(r) = \frac{\rho_s}{\frac{r}{r_s}\left(1+\frac{r}{r_s}\right)^2}$
Generalized NFW	$\rho_{\rm gNFW}(r) = \rho_s \left(\frac{r_s}{r}\right)^{\gamma} \left(1+\frac{r}{r_s}\right)^{\gamma-3}$
Einasto	$\rho_{\rm Ein}(r) = \rho_s \exp\left\{-\frac{2}{\alpha_{\rm Ein}}\left[\left(\frac{r}{r_s}\right)^{\alpha_{\rm Ein}} - 1\right]\right\}$
Cored Isothermal	$\rho_{\rm Iso}(r) = \frac{\rho_s}{1+(r/r_s)^2}$
Burkert	$\rho_{\rm Bur}(r) = \frac{\rho_s}{(1+r/r_s)(1+(r/r_s)^2)}$

Tabella 1: Profili di densità degli aloni di DM [2]

Il modello appena presentato prende il nome di Modello Standard dell'Alone (SHM). Quest'ultimo presenta però svariate problematiche, tra cui, la più evidente, una massa infinita dell'alone:

$$M(r) = \int_0^r dr'\ r'^2 4\pi\rho(r') = \frac{2\sigma^2 r}{G} \longrightarrow +\infty \text{ (per } r \longrightarrow +\infty) \quad . \tag{11}$$

Estendere l'SHM ad un modello più realistico è, in alcuni casi, analiticamente possibile, sebbene ciò comporti dei calcoli molto più complessi. Per questo motivo le simulazioni numeriche giocano un ruolo fondamentale nello studio delle caratteristiche degli aloni di DM.

2.2 Simulazioni numeriche N-Body

Tramite le simulazioni numeriche è possibile studiare in generale le caratteristiche che accumunano gli aloni di DM. I risultati mostrano che gli aloni si formano su tutte le scale simulate, da $100\,Mpc$ a poche decine di pc. Imponendo la natura non-relativistica della DM (CDM) e assumendola non collisionale, le simulazioni mostrano che gli aloni virializzati hanno una forma elissoidale. Tuttavia, la deviazione dalla sfericità è limitata e diminuisce se nelle simulazioni si includono i barioni; questo ci permette di affermare che l'approssimazione di sfericità dell'alone è perlomeno ragionevole.
I profili di densità $\rho(r)$ degli aloni, calcolati a partire dai dati numerici nell'approssimazione sferica, tendono a seguire una pendenza universale $s(r) \equiv D_{\ln(r)} \ln\rho$ che varia gradualmente da ≈ -1 (nella regione interna) a ≈ -3 (nella regione esterna). Per confronto, la sfera isoterma, ricavata nella sezione precedente, mostra una pendenza costante di -2.
Un importante utilizzo delle simulazioni N-Body consiste nell'adattamento dei loro risultati tramite funzioni come quelle riportate in tabella 1. Alcune di queste funzioni possono essere comodamente riformulate in una formula collettiva con tre parametri α, β, γ nota anche come formula della *doppia legge di potenza*:

$$\rho_{\alpha\beta\gamma}(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)^{\gamma}\left[1+(r/r_s)^{\alpha}\right]^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}}} \tag{12}$$

	α	β	γ
NFW	1	3	1
gNFW	1	3	γ
Cored Iso	2	2	0

Al variare dei parametri α, β, γ il profilo di densità della DM assume diverse forme vicino e lontano dal nucleo galattico (GC). In particolare γ determina la pendenza interna del profilo, β quella esterna e α regola la transizione tra le due regioni. Cerchiamo ora di capire meglio quali sono le differenze tra i diversi profili di densità:

- Profilo di Navarro, Frenk e White (NFW): La densità diverge come $1/r$ vicino al GC. Una versione con $\alpha = 1$, $\beta = 3$ e γ come parametro libero è detta *generalized NFW (gNFW)*. Quando $\gamma > 1$, la pendenza per $r \longrightarrow 0$ è più ripida del profilo NFW standard.

- Profilo di Einasto: a differenza del NFW, ha un esponente della legge di potenza che varia continuamente con r, controllato dal parametro $\alpha_{Ein} \in [0.1, 0.2]$. Tramite il confronto con le simulazioni $\alpha_{Ein} \approx 0.17$.

- il profilo Isotermico troncato e il profilo di Burkert: contemplano l'esistenza, nelle galassie, di un nucleo centrale di DM, con densità approssimativamente costante.

- Profilo di Di Cintio et al. (2014): considera valida per la maggior parte delle galassie la forma di doppia legge di potenza, lasciando però in generale liberi i parametri α, β e γ per poi assegnare loro un valore in base alla galassia che si vuole studiare; ciò porta a profili che variano da cuspidi a profili con nucleo, il che conferisce a questo profilo una grande adattabilità ai casi particolari.

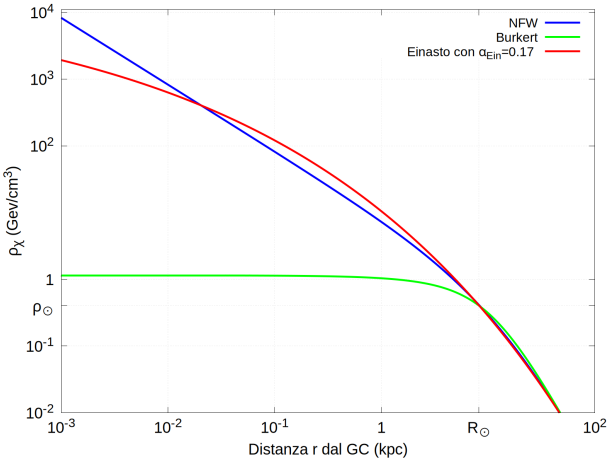
I profili appena presentati possono essere applicati alla Via Lattea, con conseguente determinazione dei parametri ρ_s e r_s, a patto che essa non abbia un alone insolitamente asferico. Di conseguenza, con il fine di proseguire lo studio delle distribuzioni, assumeremo nella prossima sezione che questo sia il caso, e utilizzeremo un alone di DM a simmetria sferica per descrivere la nostra galassia. E' doveroso notare però che questa assunzione potrebbe rivelarsi una semplificazione eccessiva: recenti misure delle velocità stellari della Via Lattea indicano che essa si è formata tramite una fusione di due grandi progenitori; questo potrebbe complicare la distribuzione locale della DM in maniera non trascurabile.

2.3 Densità locale della DM nella Via Lattea

Per ottenere un profilo di densità di materia della DM nella galassia, a partire da quelli presentati nella sezione precedente, è necessaria la determinazione dei parametri ρ_s e r_s. L'idea che possiamo utilizzare per trovarli è quella di scegliere un profilo tra quelli proposti ed imporre che quest'ultimo rispetti due condizioni, in accordo con i dati sperimentali. Le condizioni che in letteratura vengono solitamente imposte ai profili sono:

- La massa totale di DM nella Via Lattea: sono molteplici le ricerche sperimentali volte alla determinazione di questa quantità e con esse anche le metodologie adottate. E' possibile, infatti, dare una stima di M_{TOT}^{DM} tramite la cinematica dei satelliti luminosi, come le Nubi di Magellano, quella dei flussi stellari o per mezzo della velocità di fuga delle stelle erranti. Il valore più accettato della massa della DM contenuta entro un raggio di $\approx 200 - 300\, kpc$ è:
$$M_{TOT}^{DM} = (1.0 \pm 0.25) 10^{12} \cdot M_{\odot} \quad . \tag{13}$$

- La densità locale di DM in prossimità del sistema solare. Per imporre questa condizione sono necessiare due stime, quella della distanza del Sole dal GC della Via Lattea, $R_{\odot}$, e quella della densità di DM in tale regione, $\rho_{\odot}$. Assumiamo, momentaneamente, come stima di $R_{\odot}$, quella effettuata dalla collaborazione Gravity:
$$R_{\odot} = (8.277 \pm 0.031)\,\mathrm{kpc} \quad ; \tag{14}$$
per quanto riguarda $\rho_{\odot}$, un valore ragionevole determinato con il metodo **A** risulta:
$$\rho_{\odot} = (0.40 \pm 0.031)\,\mathrm{GeV/cm^3} \approx 0.0106 \cdot M_{\odot}/\mathrm{pc}^3 \quad . \tag{15}$$
Si tenga però conto che, come già accennato, questa tecnica è sensibile all'incertezza nella modellizzazione delle componenti barioniche della Galassia.



DM halo	r_s in kpc	ρ_s in GeV/cm^3
NFW	14.46	0.566
Einasto	13.63	0.154
Burkert	10.62	1.143

Figura 4: Risultati dell'adattamento al caso particolare della Via Lattea dei profili di densità presentati nella sezione 2.2.

Ciò ha fatto si che le stime di $\rho_\odot$ proposte dalla comunità scientifica, a partire dagli inizi degli anni Novanta ad oggi, risultino poco compatibili.

Imponendo, quindi, che la distribuzione $\rho(r)$ soddisfi il sistema:

$$\begin{cases} M_{TOT}^{DM} = \displaystyle\int_0^{200-300\ kpc} dr\ 4\pi\rho(r)r^2 \\ \\ \rho_\odot = \rho(R_\odot) \end{cases} \tag{16}$$

è possibile determinare ρ_s e r_s. I risultati di questa metodologia, applicata ai profili discussi nella sezione precedente, sono mostrati in figura 4. Il motivo per cui il profilo isotermico non è presente in tabella è che per quest'ultimo non è possibile trovare una soluzione che soddisfi entrambi i vincoli contemporaneamente. Questo perché la dipendenza da $1/r^2$ della densità di DM a grandi distanze è troppo lenta, portando sempre a un valore di M_{TOT}^{DM} eccessivamente elevato.

2.4 Velocità locale della DM nella Via Lattea

In questa sezione determineremo una forma funzionale della distribuzione di velocità della DM nel SDR del GC della Via Lattea; in seguito mostreremo come passare da quest'ultima a quella osservata nel SDR della Terra.
La prima cosa da considerare è che, al contrario di quanto affermato nel modello semplificato utilizzato nella sezione 2.1, la distribuzione $f(v)$ non può seguire esattamente una MB; il motivo principale è che i corpi con velocità eccessivamente elevata scappano dall'attrazione gravitazionale dell'alone di DM e ciò comporta che questi ultimi non debbano essere considerati nella distribuzione di velocità. Il limite massimo consentito per le velocità è ovviamente la velocità di fuga caratteristica della Via Lattea. Introducendo questa informazione nella distribuzione di MB, tramite la funzione caratteristica Θ, otteniamo:

$$f(v) = \frac{1}{N}\Theta(v_{\text{esc}} - v)\, e^{-v^2/v_0^2} \quad , \tag{17}$$

dove il fattore al denominatore è la normalizzazione; il suo valore sarà calcolato nel prossimo capitolo. Ora, per un sistema sferico non rotante, esiste una relazione tra la velocità circolare

locale $v_c(r)$ e la dispersione radiale della velocità $\sigma_r(r)$, assunta $\sigma_r^2 = \sigma^2/3$, ovvero:

$$v_s^2 = \sigma_r^2[s(r) + \frac{d\ \ln\sigma_r^2}{d\ \ln r} + \beta(r)] \quad , \tag{18}$$

dove $s(r)$ è la pendenza dell'alone, presentata nella sezione 2.3, e $\beta(r) \equiv 1 - \sigma_\theta^2/\sigma_r^2$. Nel modello dell'alone che stiamo studiando, $s = -2$, $d\ln\sigma_r^2/d\ln r{=}0$ e $\beta = 0$, dunque $v_c^2 = 2\sigma_r^2 = v_0^2$, ovvero la dispersione di velocità della MB è strettamente legata alla velocità circolare locale; questo ci permette di assegnare a v_0 il valore della velocità circolare del Sole. Quindi, per la determinazione di v_0 e della velocità di fuga v_{esc}, utilizziamo il metodo osservativo. Tuttavia, come già accennato, questo metodo è ancora soggetto a grandi incertezze sperimentali. Si assegnano perciò momentaneamente, col fine di eseguire i calcoli proposti nel capitolo 3, i valori di v_{esc} e v_0 come segue:

$$v_{esc} \approx 544\,km/s \qquad v_0 \approx 220\,km/s \quad . \tag{19}$$

Queste stime, assieme a quelle di $R_\odot$ e $\rho_\odot$ proposte nella sezione precedente, saranno ridiscusse nel capitolo 4.
Ora che abbiamo trovato una forma ragionevole della distribuzione di velocità nel SDR del GC possiamo mostrare come passare da questo SDR a quello della Terra. La distribuzione nel SDR della Terra è legata a quella nel SDR del GC tramite la trasformazione di Galileo:

$$f_\oplus(\mathbf{v}, t) = f(\mathbf{v} + \mathbf{v}_\oplus(t)) \qquad \text{con } \mathbf{v}_\oplus(t) = \mathbf{v}_\odot + V_\oplus[\hat{\varepsilon_1} cos\omega(t - t_1) + \hat{\varepsilon_2} sin\omega(t - t_1)] \quad , \tag{20}$$

dove $\mathbf{v}_\odot$ è la velocità del Sole rispetto al GC, $V_\oplus = 29.8\,\mathrm{km/s}$ è il modulo della velocità orbitale della Terra, $\omega = 2\pi/yr$, $t_1 = 0.218\,\mathrm{yr} = 21$ marzo corrisponde all'equinozio di primavera ed infine $\hat{\varepsilon}_1$ e $\hat{\varepsilon}_2$ sono i versori tangenti all'orbita terrestre, rispettivamente al tempo t_1 e al tempo $t_1 + 1/4\,\mathrm{yr}$, solstizio d'estate.
Per prima cosa, dunque, bisogna trovare una stima della velocità del Sole, $\mathbf{v}_\odot$, rispetto al GC. Utilizzando le coordinate galattiche, dove $\hat{\mathbf{x}}$ punta dal Sole verso il centro galattico, $\hat{\mathbf{y}}$ nella direzione della rotazione del disco e $\hat{\mathbf{z}}$ verso il polo nord galattico, si ha che la velocità $\mathbf{v}_\odot$ risulta:

$$\mathbf{v}_\odot = \mathbf{v}_{\odot,rot} + \mathbf{v}_{\odot,pec} = (0, 220, 0)\,km/s + (11.1, 12.25, 7.25)\,km/s \quad \Rightarrow \quad v_\odot \approx 233\,km/s \quad . \tag{21}$$

La quantità $\mathbf{v}_{\odot,pec}$ è detta velocità peculiare [1] e il suo valore è stato preso dalla stima di [16]. Per quanto riguarda invece i versori $\hat{\varepsilon}_1$ e $\hat{\varepsilon}_2$ abbiamo che questi ultimi, nel sistema di coordinate galattiche, risultano:

$$\hat{\varepsilon}_1 = (0.9931, 0.1170, -0.0103) \quad \hat{\varepsilon}_2 = (-0.0670, 0.4927, -0.8676) \quad . \tag{22}$$

Si definiscono infine le due grandezze utili b, seno dell'angolo tra $\mathbf{v}_\odot$ e la normale al piano orbitale della Terra, e t_c, istante in cui la velocità orbitale della Terra è massima, come segue:

$$b = \frac{[(\hat{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{v}_\odot)^2 + (\hat{\varepsilon}_2 \cdot \mathbf{v}_\odot)^2]^{\frac{1}{2}}}{v_\odot} \approx 0.490 \qquad t_c = t_1 + \frac{1}{\omega} arctan(\frac{\hat{\varepsilon}_2 \cdot v_\odot}{\hat{\varepsilon}_1 \cdot v_\odot}) \approx 2 \text{ giugno} \quad . \tag{23}$$

Con queste definizioni, la funzione di distribuzione delle velocità di DM in prossimità dei laboratori di rivelazione diretta sarà, dalla formula 20:

$$f_\oplus(\mathbf{v}, t) = f(|\mathbf{v} + \mathbf{v}_\oplus(t)|) \approx f(\sqrt{v^2 + v_\oplus^2(t) + 2v\, v_\oplus(t) cos\theta}) \quad , \tag{24}$$

dove $\mathbf{v}_\oplus(t) \approx [v_\odot + bV_\oplus cos\omega(t - t_c)]\hat{\mathbf{v}}_\odot$ e θ rappresenta l'angolo compreso tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_\odot$.

[1] $\mathbf{v}_{\odot,pec}$ è la velocità che il Sole ha rispetto alle stelle circostanti; essa è diretta verso un punto della sfera celeste, detto apice solare, situato in prossimità della costellazione di Ercole.

3 Esperimenti di rivelazione diretta

La rivelazione diretta è uno dei pilastri nella ricerca della DM, in quanto rappresenta un metodo sperimentale per studiare le interazioni delle particelle di DM nella Via Lattea con quelle dello SM. L'obiettivo è rilevare e registrare le rare occasioni in cui una particella di DM urta un materiale bersaglio, idealmente in un ambiente con un rumore di fondo estremamente basso.
Se però, fino ad ora, è stato possibile dedurre la presenza di DM in modo indiretto, osservando i suoi effetti gravitazionali su larga scala, la sua rilevazione diretta è risultata nel tempo una sfida assai più complessa. Il motivo di una tale difficoltà risiede nella necessità di considerare diversi fattori per poter prevedere il numero di interazioni atteso. Analizzare, dal punto di vista teorico, l'influenza di questi fattori sul numero di eventi attesi risulta quindi cruciale per una maggiore comprensione dei dati osservati. In questo capitolo, seguendo [17], presentiamo dunque il formalismo matematico per il calcolo del tasso di urti elastici WIMP-nucleo atteso per poi, nel capitolo 4, studiare l'impatto delle incertezze astrofisiche sulla nostra capacità di interpretare i dati sperimentali.

3.1 Esperimento nel SDR del laboratorio

La rilevazione diretta di DM tradizionale rivolge l'attenzione agli scattering tra le WIMPs, che si ipotizza compongano la maggior parte dell'alone di DM della Via Lattea, e dei nuclei bersaglio. In questo caso, il segnale di scattering della DM è prodotto dai rinculi nucleari, dovuti al passaggio della WIMP, che comportano a loro volta delle collisioni con altri atomi bersaglio, generando i segnali rilevabili di luce di scintillazione, produzione di carica o fononi.
Vediamo dunque come calcolare l'energia di rinculo nucleare; il processo in questione è schematizzato in figura 5. Innanzitutto possiamo fare delle considerazioni riguardo le tipiche velocità della WIMP e del nucleo: nel SDR del laboratorio le WIMP, come visto nella sezione 2.4, hanno velocità tipiche di $\approx 220 - 230\, km/s$, i nuclei invece, essendo mantenuti a temperature T molto più piccole di quelle dell'ambiente, hanno energie cinetiche basse, $O(k_b T)$, dunque la loro velocità iniziale può essere assunta pari a zero. Queste considerazioni ci permettono inoltre di affermare che l'urto avviene in regime non relativistico.
Denominando con $\mathbf{p}$, $\mathbf{k}$ le quantità di moto rispettivamente della WIMP e del nucleo iniziali nel SDR del laboratorio e con $\mathbf{p}'$, $\mathbf{k}'$ quelli finali si ha che, prima e dopo l'urto, l'energia totale del sistema è:

$$\text{prima:}\quad E_i = \frac{p^2}{2m_\chi} \qquad \text{dopo:}\quad E_f = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2}{2m_\chi} + \frac{q^2}{2m_N} \quad , \tag{25}$$

avendo definito l'invariante galileiano $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$, grazie alla conservazione della quantità di moto. Utilizzando la conservazione dell'energia si ottiene:

$$\frac{p^2}{2m_\chi} + \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{m_\chi} + \frac{1}{m_N}\right) - \frac{q\,p}{2}\cos\theta_R = \frac{p^2}{2m_\chi} \;\Rightarrow\; q = 2\frac{\mu_{\chi N}}{m_\chi} p \cos\theta_R \quad , \tag{26}$$

dove si è definita la massa ridotta del sistema come $\mu_{\chi N} \equiv \frac{m_\chi m_N}{m_\chi + m_N}$ ed utilizzato l'angolo θ_R presentato in figura 5. Dalla relazione appena trovata, posta l'energia di rinculo nucleare $E_R = q^2/(2m_N)$, si può ricavare:

$$E_R(v, \theta_R) = 2\frac{\mu_{\chi N}^2}{m_\chi^2}\frac{p^2}{m_N}\cos^2\theta_R = 2\frac{\mu_{\chi N}^2}{m_N} v^2 \cos^2\theta_R \quad , \tag{27}$$

in cui v rappresenta il modulo della velocità della WIMP rispetto al laboratorio. Si può allora trovare una E_R^{max}, a v fissato, ovvero quella data da $\theta_R = 0$.

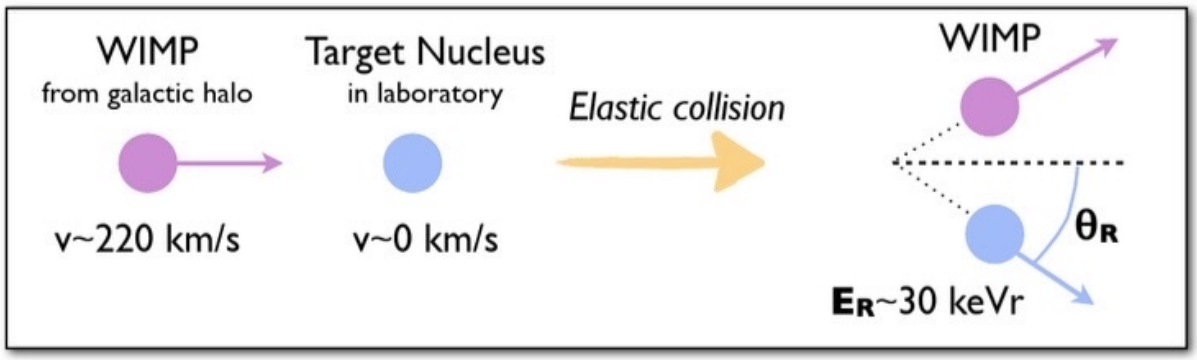


Figura 5: Rappresentazione schematica di uno scattering WIMP-nucleo nel SDR del laboratorio, figura di [17]

Ciò porta alla conclusione che, $\forall E_R$, esiste una velocità minima v_{min} data dalla relazione $E_R(v_{min}, 0) = E_R$, ovvero:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{m_N E_R}{2\mu_{\chi N}^2}} \quad . \tag{28}$$

Ora, per capire meglio di che ordine energetico è l'energia di rinculo di questi urti, se prendiamo dei valori tipici negli scattering WIMP-nucleo di $m_\chi \approx 100\,GeV$ e $m_N = m_{Xe} \approx 131\,GeV$ (lo Xenon è uno dei nuclei bersaglio più utilizzati in questi esperimenti) otteniamo $E_R^{max} \approx 150\,keV$. Come stimato dalla fisica nucleare, però, le energie tipiche di legame dei nucleoni sono $O(MeV)$, dunque lo scattering non è abbastanza energetico per portare a fissioni nucleari. Il fatto che $1/q \gg 10\,fm$, dimensione nucleare, ci permette infatti di affermare che la DM interagisce coerentemente con il nucleo, ossia vede il nucleo nella sua interezza senza distinguere l'interazione col singolo nucleone o quark.

3.2 Esperimento nel SDR del CM

Studiamo ora l'urto nel SDR del CM, consapevoli del fatto che, essendo E_R un'invariante galileiana, nel ragionevole limite non relativistico dovremo ottenere lo stesso risultato trovato nella sezione precedente. Di seguito lavoreremo dunque con $\tilde{x}$, per ogni grandezza denominata con x nel SDR del laboratorio, ad indicare che $\tilde{x}$ è l'analogo di x nel SDR del CM. La dinamica dell'urto nel SDR del CM è rappresentata in figura 6.
Come prima cosa da considerare, in questo nuovo SDR la posizione del CM sarà logicamente situata nell'origine, dunque:

$$0_{\mathbb{R}^2} = \tilde{\mathbf{x}}_{CM} \equiv \frac{m_\chi \tilde{\mathbf{x}}_\chi + m_N \tilde{\mathbf{x}}_N}{m_\chi + m_N} \quad \forall\, t \quad . \tag{29}$$

Derivando rispetto al tempo questa relazione troviamo:

$$0_{\mathbb{R}^2} = \tilde{\mathbf{v}}_{CM} \quad \forall\, t \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{p}} = -\tilde{\mathbf{k}} \quad . \tag{30}$$

Queste relazioni, combinate con la conservazione della quantità di moto, portano alla conclusione che $\tilde{\mathbf{p}}' = -\tilde{\mathbf{k}}'$ e ci permettono di affermare che, a differenza di ciò che accade nel SDR del laboratorio, il modulo degli impulsi di WIMP e nuclei, prima e dopo l'urto, rimane costante e uguale per tutti; ciò che varia è la loro direzione. Denominando allora l'angolo di deviazione con $\tilde{\theta}_R$, in accordo con la figura 6, abbiamo che le quantità di moto risultano:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{p}\,\hat{\mathbf{x}} \quad \tilde{\mathbf{k}} = -\tilde{p}\,\hat{\mathbf{x}} \quad \tilde{\mathbf{p}}' = \tilde{p}\,(\cos\tilde{\theta}_R\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\tilde{\theta}_R\,\hat{\mathbf{y}}) \quad \tilde{\mathbf{k}}' = -\tilde{p}\,(\cos\tilde{\theta}_R\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\tilde{\theta}_R\,\hat{\mathbf{y}}) \quad . \tag{31}$$

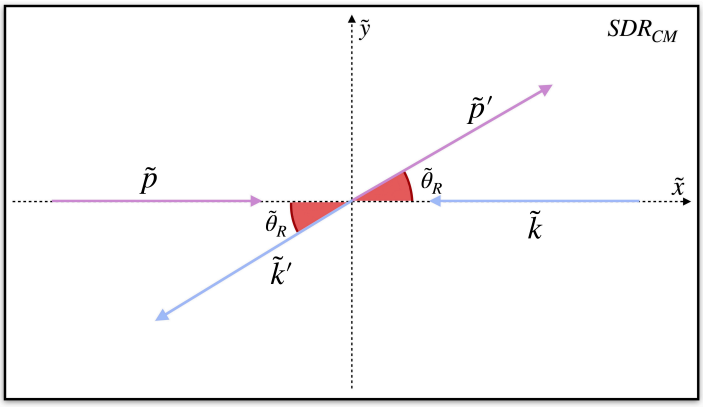


Figura 6: Rappresentazione schematica di uno scattering WIMP-nucleo nel SDR del CM.

In questo caso, dunque, l'energia di rinculo nucleare assume la seguente forma:

$$E_R(\tilde{v}, \tilde{\theta}_R) = \frac{q^2}{2m_N} = \frac{(\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}')^2}{2m_N} = \frac{\tilde{p}^2}{2m_N}[(1 - \cos\tilde{\theta}_R)^2 + \sin^2\tilde{\theta}_R] = \frac{m_\chi^2\,\tilde{v}^2}{m_N}(1 - \cos\tilde{\theta}_R) \quad . \tag{32}$$

Non ci resta quindi che trovare una relazione tra la velocità delle WIMP nel SDR del laboratorio e quella nel SDR del CM. I due sistemi sono collegati dalla trasformazione di Galileo definita dalla loro velocità relativa, ovvero $\mathbf{v}_{CM}$. La relazione che stiamo cercando risulta allora:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{CM} = v\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{m_\chi v\,\hat{\mathbf{x}}}{m_\chi + m_N} = \frac{m_N v}{m_\chi + m_N}\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu_{\chi N}}{m_\chi}\,v\,\hat{\mathbf{x}} \quad . \tag{33}$$

Inserendo infine questo risultato nell'equazione 32, troviamo che l'energia di rinculo nel SDR del CM è data da:

$$E_R(v, \tilde{\theta}_R) = \frac{\mu_{\chi N}^2}{m_N}\,v^2(1 - \cos\tilde{\theta}_R) \quad . \tag{34}$$

Anche in questo caso, come atteso, abbiamo un'energia di rinculo massima e una v_{min} ad E_R fissato di:

$$E_R^{max} = E_R(v, \pi) = 2\frac{\mu_{\chi N}^2}{m_N}\,v^2 \quad \Rightarrow \quad v_{min} = \sqrt{\frac{m_N E_R}{2\mu_{\chi N}^2}} \quad . \tag{35}$$

E' possibile, inoltre, trovare una relazione tra θ_R e $\tilde{\theta}_R$ ponendo uguali le energie di rinculo calcolate nei due SDR:

$$2\cos^2\theta_R = 1 - \cos\tilde{\theta}_R \quad \Rightarrow \quad \tilde{\theta}_R = 2\theta_R + \pi \quad . \tag{36}$$

Ora che abbiamo più chiara la dinamica dello scattering, nella prossima sezione verrà presentato il modo per trovare una relazione tra E_R e il numero di interazioni atteso.

3.3 Tasso di interazioni atteso

Seguendo i calcoli di [14], vediamo ora come stimare il numero di particelle di DM, N_χ, rivelate da un esperimento in un determinato intervallo temporale Δt. Il numero di WIMP, per unità di superficie, che attraversano il bersaglio in direzione $\hat{\mathbf{v}}$ nel tempo Δt è $\eta = nv\Delta t$, con $n = \rho_\chi/m_\chi$; dunque N_χ sarà dato dalla formula:

$$N_\chi = \Phi_\Sigma(\eta\,\hat{\mathbf{v}}) = nv\Delta t\sigma_{\chi N}N_t \tag{37}$$

dove Σ è l'area effettiva del target, presa come prodotto della $\sigma_{\chi N}$, sezione d'urto WIMP-nucleo, e del numero di nuclei che compongono il target $N_t = M_t/m_N$. Da questa grandezza si definisce il numero di eventi differenziale come segue:

$$\frac{dN_\chi}{dE_R} = nv\Delta t N_t \frac{d\sigma_{\chi N}}{dE_R} \quad . \tag{38}$$

Assumendo che le WIMP siano descritte, nel laboratorio, dalla distribuzione di velocità $f_\oplus(\mathbf{v}, t)$, formula 24, e dalla densità $\rho_\odot$, possiamo inserire questa informazione nel numero di eventi differenziale in questo modo:

$$\frac{dN_\chi}{dE_R}(E_R, t) = n_\odot N_t \Delta t \int_{v>v_{min}} d\mathbf{v}\, v\, f_\oplus(\mathbf{v}, t)\, \frac{d\sigma_{\chi N}}{dE_R} \quad . \tag{39}$$

Definendo poi $\varepsilon \equiv \Delta t M_t$, l'esposizione, e $R_\chi \equiv N_\chi/\varepsilon$, tasso di interazioni, troviamo che il tasso di interazioni differenziale è dato dalla formula:

$$\frac{dR_\chi}{dE_R}(E_R, t) = \frac{\rho_\odot}{m_N\, m_\chi} \int_{v>v_{min}} d\mathbf{v}\, v\, f_\oplus(\mathbf{v}, t)\, \frac{d\sigma_{\chi N}}{dE_R} \quad . \tag{40}$$

Se consideriamo ora un potenziale rivelatore con energia di threshold E_T avremo allora che il tasso di interazioni atteso sarà dato da:

$$R_\chi(t) = \int_{E_T}^{\infty} dE_R \frac{\rho_\odot}{m_N\, m_\chi} \int_{v>v_{min}} d\mathbf{v}\, v\, f_\oplus(\mathbf{v}, t)\, \frac{d\sigma_{\chi N}}{dE_R} \quad . \tag{41}$$

Dunque, per dare una stima del tasso di interazioni, risulta necessario esplicitare $d\sigma_{\chi N}/dE_R$, ovvero la sezione d'urto differenziale caratteristica dello scattering WIMP-nucleo. Per farlo, come prima cosa assumiamo una distribuzione d'urto isotropa nel SDR del CM; ciò comporta che la σ soddisfi:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\tilde{\theta}_R} = costante \equiv -\frac{\sigma}{2} \quad . \tag{42}$$

Utilizzando quest'ipotesi e l'equazione 34 possiamo ottenere una relazione tra la sezione d'urto differenziale e la velocità delle WIMP nel SDR del laboratorio:

$$\frac{d\sigma}{dE_R} = \frac{d\cos\tilde{\theta}_R}{dE_R}\frac{d\sigma}{d\cos\tilde{\theta}_R} = \frac{\sigma}{E_R^{max}} = \frac{m_N}{2\mu_{\chi N}^2}\frac{\sigma}{v^2} \quad . \tag{43}$$

Resta allora da capire la forma della sezione d'urto. Negli esperimenti di rivelazione diretta, come ci si può ragionevolmente aspettare, è solito l'utilizzo di nuclei bersaglio molto pesanti. Questo perché tali nuclei portano ad un'area effettiva del target maggiore e quindi, per la 37, ad un più elevato N_χ. Se però con i nuclei leggeri la sezione d'urto può essere presa come somma delle sezioni d'urto WIMP-nucleoni, nel caso di nuclei più pesanti ciò non vale più ed è necessario tener conto della configurazione nucleare. Questa correzione entra nella σ tramite i cosiddetti fattori di forma. Considerando allora due diverse sezioni d'urto e i relativi fattori di forma per le interazioni WIMP-nucleo dipendenti e indipendenti dallo spin, si può scrivere la sezione d'urto come:

$$\sigma(E_R) = \sigma^{SI}(E_R) + \sigma^{SD}(E_R) = \sigma_0^{SI}\, F_{SI}^2(E_R) + \sigma_0^{SD}\, F_{SD}^2(E_R) \quad . \tag{44}$$

Quello che succede è che, in molti modelli plausibili, il termine SI risulta dominante. In questo lavoro di tesi approssimeremo allora $\sigma \approx \sigma^{SI}$. Uno dei possibili fattori di forma nucleare per un'interazione WIMP-nucleo SI è il cosiddetto fattore di forma di Helm:

$$F_{SI}(E_R) = \frac{3j_1(R_1 q)}{R_1 q}\, e^{-(sq)^2/2} \quad \text{con} \quad q = \sqrt{2m_N E_R} \quad \text{e} \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \tag{45}$$

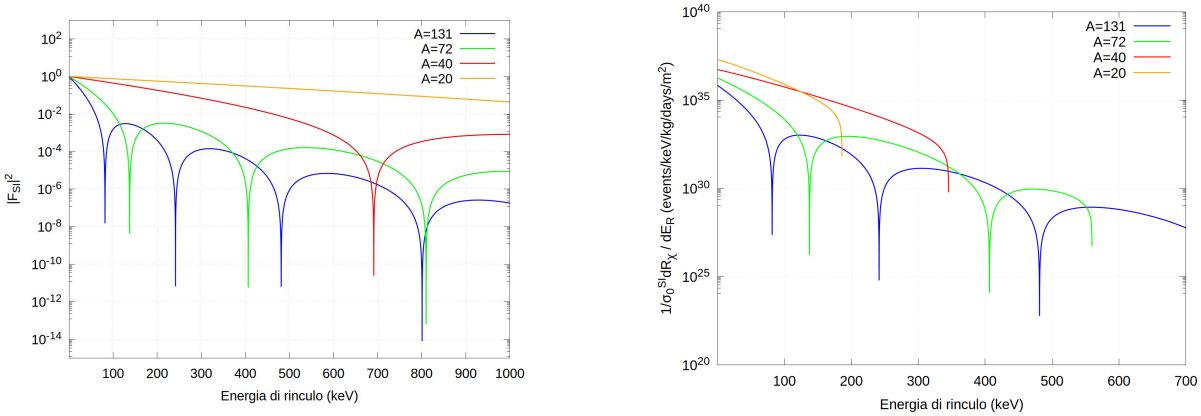


Figura 7: A sinistra, plot del fattore di forma nucleare SI per alcuni valori tipici di A. A destra, plot del tasso di interazioni differenziale su σ_0^{SI} al variare dell'enegria di rinculo nucleare, per diversi numeri di massa atomici.

dove $s \approx 1\, fm$ rappresenta lo spessore della pelle nucleare e R_1 è dato dalla formula, presa da [18]:

$$R_1 \equiv \sqrt{c^2 + \frac{7}{3}\pi^2 a^2 - 5s^2} \quad \text{con} \quad c = (1.23 \cdot A^{1/3} - 0.60)\, fm \quad \text{e} \quad a = 0.52\, fm \tag{46}$$

Il fattore di forma nucleare SI viene mostrato in figura 7, per diversi numeri di massa atomica. Per quanto riguarda infine σ_0^{SI}, sezione d'urto WIMP-nucleo a zero momento trasferito, la forma che in letteratura viene più utilizzata è:

$$\sigma_0^{SI} = \frac{4\mu_{\chi N}}{\pi}[Z f_p + (A - Z) f_n]^2 \approx \frac{4\mu_{\chi N}}{\pi} f^2 A^2 \tag{47}$$

in cui abbiamo assunto $f_p \approx f_n \approx f$, per conservazione dell'isospin.
Inserendo queste ultime informazioni nella formula 40, otteniamo un tasso di interazioni WIMP-nucleo dato da:

$$\frac{dR_\chi}{dE_R}(E_R, t) \approx \frac{\rho_\odot}{m_\chi} \frac{\sigma_0^{SI}\, F_{SI}^2(E_R)}{2\mu_{\chi N}^2}\, \eta(E_R, t) \quad \text{dove} \quad \eta(E_R, t) \equiv \int_{v\, >\, v_{min}(E_R)} \frac{d\mathbf{v}}{v}\, f_\oplus(\mathbf{v}, t) \quad . \tag{48}$$

La dipendenza da t del tasso di interazioni differenziale, come mostra questa formula, è interamente contenuta nella $\eta(E_R, t)$ e, più precisamente, nella funzione di distribuzione delle velocità, nel modo mostrato dalla formula 24. Questa dipendenza viene momentaneamente ignorata, approssimando $v_\oplus(t) \approx v_\odot$, dato che, come vedremo nella prossima sezione, essa porta a correzioni di $O(1\,\% - 10\,\%)$. In questo modo il rate differenziale risulta:

$$\frac{dR_\chi}{dE_R}(E_R) \approx \frac{\rho_\odot}{m_\chi} \frac{\sigma_0^{SI}\, F_{SI}^2(E_R)}{2\mu_{\chi N}^2} \int_{v\, >\, v_{min}(E_R)} \frac{d\mathbf{v}}{v}\, f\left(\sqrt{v^2 + v_\odot^2 + 2v\, v_\odot \cos\theta}\,\right) \tag{49}$$

Per fornire ora una stima del rate differenziale in funzione dell'energia di rinculo, è necessario innanzitutto proporre dei valori ragionevoli di tutte le costanti che compaiono. Da alcuni anni la collaborazione XENON ha sviluppato una serie di esperimenti alla ricerca di scattering WIMP-nucleo con bersaglio a xenon liquido, contribuendo notevolmente alla determinazione delle curve di esclusione della sezione d'urto WIMP-nucleone. Supporremo dunque di seguito che il tasso

di interazioni che stiamo calcolando sia quello associato allo scattering WIMP-Xenon.
Come prima cosa, consideriamo una massa per un'ipotetica WIMP di $m_\chi \approx 500\,GeV$. In secondo luogo, per quanto affermato, $m_N = m_{Xe} \approx 131\,GeV$, $A = A_{Xe} = 131$ e $R_1 = R_{1,Xe} \approx 6.06\,fm$. Con i valori delle masse della WIMP e del nucleo è possibile calcolare la massa ridotta del sistema; questa risulta essere $\mu_{\chi N} \approx 103.8\,GeV$.
Passiamo ora ai valori astrofisici che compaiono all'interno dell'equazione 48, questi risultano: $\rho_\odot$ e $\eta(E_R)$ e con essa v_{esc}, v_0 e $f_\oplus(v)$. In accordo con quanto detto nel capitolo 2, abbiamo $\rho_\odot \approx 0.4\,GeV/cm^3$, $f_\oplus(\mathbf{v}) \approx f(|\mathbf{v} + \mathbf{v}_\odot|)$ (dove f è quella definita nell'equazione 17), $v_{esc} \approx 544\,km/s$ e $v_0 \approx 220\,km/s$.
Per calcolare $\eta(E_R)$ è necessaria, come prima cosa, una stima di N, fattore di normalizzazione di $f(v)$. Dunque poniamo:

$$1 = \int d\mathbf{v}\, f(v) = f(v) = \frac{1}{N}\int d\mathbf{v}\,\Theta(v_{\rm esc} - v)\, e^{-v^2/v_0^2} = \frac{4\pi}{N}\int_0^{v_{esc}} dv\, v^2 e^{-(v/v_0)^2} \quad . \tag{50}$$

Definendo poi $x \equiv v/v_0$, integrando per parti e portando il fattore di normalizzazione a sinistra otteniamo:

$$N = 2\pi v_o^3[-xe^{-x^2}|_0^{v_{esc}/v_0} + \int_0^{v_{esc}/v_0} dx\, e^{-x^2}\ ] = \pi^{3/2} v_0^3[\ erf(\frac{v_{esc}}{v_0}) - \frac{2\,v_{esc}}{\sqrt{\pi}\,v_0} e^{-(v_{esc}/v_0)^2}\ ]\ . \tag{51}$$

Calcoliamo quindi $\eta(E_R)$. Se, come anticipato, ignoriamo la sua dipendenza temporale, otteniamo che $f_\oplus(\mathbf{v}, t) \approx f(\sqrt{v^2 + v_\odot^2 + 2vv_\odot\cos\theta}\,)$ e quindi $\eta(E_R)$ risulta:

$$\begin{aligned}\eta(E_R) &= \int_{v\,>\,v_{min}(E_R)} \frac{d\mathbf{v}}{v}\, f_\oplus(\mathbf{v}, t) \approx \frac{1}{N}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \int_{v_{min}}^{v_{esc}+v_\odot} dv\, v\ e^{-(v^2+v_\odot^2+2vv_\odot\cos\theta)/v_0^2} \\ &= \frac{\pi v_0^2}{v_\odot\, N}\int_{v_{min}}^{v_{esc}+v_\odot} dv\,[e^{-(v-v_\odot)^2/v_0^2} - e^{-(v+v_\odot)^2/v_0^2}]\end{aligned} \tag{52}$$

Separando gli integrali e ponendo questa volta $x \equiv (v - v_\odot)/v_0$ e $y \equiv (v + v_\odot)/v_0$ troviamo:

$$\eta(E_R) \approx \frac{\pi\, v_0^3}{v_\odot\, N}\left[\int_{(v_{min}-v_\odot)/v_0}^{v_{esc}/v_0} dx\, e^{-x^2} - \int_{(v_{min}+v_\odot)/v_0}^{(v_{esc}+2v_\odot)/v_0} dy\, e^{-y^2}\right] \tag{53}$$

$$\eta(E_R) \approx \frac{\pi^{3/2}\, v_0^3}{v_\odot\, N}[erf(\frac{v_{esc}}{v_0}) - erf(\frac{v_{min}(E_R) - v_\odot}{v_0}) - erf(\frac{v_{esc} + 2v_\odot}{v_0}) + erf(\frac{v_{min}(E_R) + v_\odot}{v_0})]\ .$$

La funzione ottenuta inserendo questo risultato nell'equazione 47 è graficata in figura 7. E' importante precisare che i valori astrofisici utilizzati per questo calcolo sono soggetti a grandi incertezze sperimentali. Nel capitolo 4 verrà approfondito questo fatto, presentando dei metodi per rimuovere le incertezze astrofisiche dagli esperimenti di rivelazione diretta.

3.4 Dipendenza temporale del tasso di interazioni

Nella stima del tasso di interazioni differenziale della sezione precedente abbiamo trascurato il moto della Terra attorno al Sole. Questa approssimazione ci ha permesso di calcolare facilmente il rate differenziale, al prezzo però di perdere gli effetti di tale moto sugli esperimenti di rivelazione diretta. La rivoluzione della Terra comporta infatti una dipendenza temporale del tasso di interazioni. In questa sezione verrà mostrato un metodo per tener conto di questo effetto, con il fine di formulare previsioni più realistiche del numero di interazioni WIMP-nucleo.

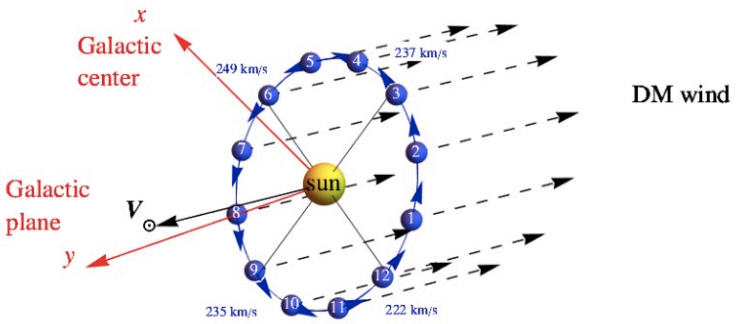


Figura 8: Rappresentazione schematica del vento di WIMP generato, al variare dei mesi (rappresentati con i pallini blu), nel rivelatore a causa del moto del Sole e della Terra rispetto all'alone di DM a riposo nel SDR della Via Lattea; figura di [2].

Innanzitutto, come mostrato nella sezione 2.4, la distribuzione di velocità delle WIMP è fortemente determinata dal moto del Sole nella Via Lattea. Quest'ultimo crea infatti, nel laboratorio, il cosiddetto *vento di WIMP*, nel senso che comporta un valore più elevato della velocità media della DM. In aggiunta, il moto di rivoluzione della Terra porta il rivelatore a trovarsi per metà dell'anno *controvento* e per l'altra metà *sottovento*; ciò è mostrato in figura 8. L'entità di questo effetto è determinata dall'angolo θ compreso tra la direzione del moto del Sole e il vettore ortogonale al piano di rivoluzione della Terra. Il seno di questo angolo è pari al parametro b, presentato nella sezione 2.4. Quando b è pari a zero l'effetto risulta completamente trascurabile. All'aumentare dell'angolo, la dipendenza temporale del tasso di interazioni diviene sempre più evidente, fino ad un massimo ottenuto per $\theta = \pi/2$. Quello che succede è che il moto del Sole nella Via Lattea risulta sul piano della galassia e nella direzione della costellazione del Cigno [17]. Il piano dell'orbita terrestre si è osservato non essere allineato con tale direzione, con un angolo $\theta \approx \pi/6$ e quindi $b \approx 1/2$. Ciò porta, per quanto affermato, ad una modulazione annuale del tasso di interazioni. L'entità di questo effetto può essere, quindi, presa come:

$$\xi \equiv \frac{b\, V_\oplus}{v_\odot} \approx 0.064 \approx 6\,\% \quad . \tag{54}$$

Ora, dato che la modulazione del rate deve avere un periodo fissato di un anno, il rate differenziale può essere espanso in serie di Fourier, al fine di trovare per quest'ultimo una dipendenza esplicita da t. Così facendo si ottiene allora:

$$\frac{dR_\chi}{dE_R}(E_R, t) = A_0(E_R) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(E_R) \cos n\omega(t - t_c) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(E_R) \sin n\omega(t - t_c) \tag{55}$$

dove $\omega = 2\pi/yr$ e t_c è quello definito nell'equazione 23. Per le considerazioni esposte in questa sezione, t_c corrisponde al momento in cui il rivelatore raggiunge la velocità massima rispetto all'alone di WIMP. L'assunzione di una distribuzione di velocità, nel SDR galattico, isotropa comporta che $B_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Considerando poi, ragionevolmente, che $f_\oplus(\mathbf{v}, t)$ vari lentamente quando la variazione di $\mathbf{v}$ è $\delta\mathbf{v} \sim V_\oplus$, si trova che $A_1 \gg A_{n\geq 2}$. Per quanto detto, il rate differenziale si riduce alla forma:

$$\frac{dR_\chi}{dE_R}(E_R, t) \approx A_0(E_R) + A_1(E_R) \cos\omega(t - t_c) \quad \text{dove} \quad A_0(E_R) = \frac{dR_\chi}{dE_R}(E_R) \quad . \tag{56}$$

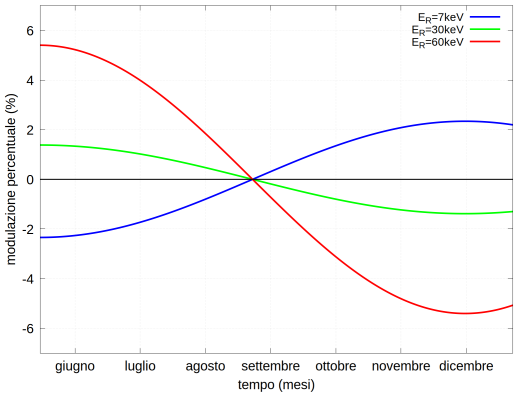


Figura 9: Plot delle modulazioni percentuali al variare di t per diverse energie di rinculo fissate.

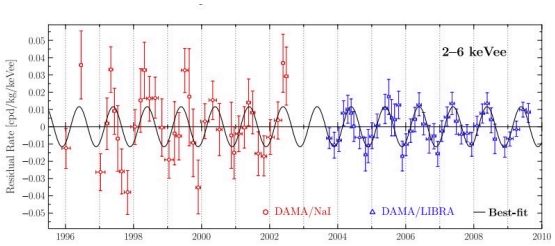


Figura 10: Il tasso residuo misurato da DAMA/NaI, dal 1995 al 2002, e da DAMA/LIBRA, dal 2003 al 2010, nell'intervallo di energia $2 - 6\,keVee$, corrispondenti ad energie di rinculo di $\approx 30keV$, grafico preso da [19].

La quantità $A_1(E_R)$ è detta ampiezza di modulazione e può essere presa, come mostrato in [19], come:

$$A_1(E_R) \approx \frac{1}{2}\left[\frac{dR_\chi}{dE_R}(E_R, t_c) - \frac{dR_\chi}{dE_R}(E_R, t_c + \frac{T}{2})\right] \quad . \tag{57}$$

Da questa forma di $A_1(E_R)$ segue che per piccole E_R il rate differenziale raggiunge il suo minimo a t_c, mentre per grandi E_R è massimizzato in t_c. Per apprezzare questo effetto definiamo la seguente grandezza:

$$\Delta\eta_\%(t) \equiv \frac{\frac{dR_\chi}{dE_R}(E_R, t) - \frac{dR_\chi}{dE_R}(E_R)}{\frac{dR_\chi}{dE_R}(E_R)} \quad . \tag{58}$$

Questa prende il nome di modulazione percentuale del rate differenziale. Grazie al fatto che la dipendenza temporale del rate è interamente contenuta nel valore medio della velocità inversa, la modulazione percentuale può essere scritta come:

$$\Delta\eta_\%(t) = \frac{\eta(E_R, t) - \eta(E_R)}{\eta(E_R)} \tag{59}$$

dove $\eta(E_R, t)$ è stato assunto pari all' $\eta(E_R)$, calcolato nell'equazione 53, in cui al posto di $v_\odot$ si è inserita la $v_\oplus(t)$. In figura 9 sono plottate le modulazioni percentuali alle fissate energie di rinculo di $7\,keV$, $30\,keV$ e $60\,keV$. Come precedentemente affermato, si può notare che il massimo della modulazione percentuale è raggiunto a t_c, per alte E_R, oppure a $t_c + T/2$, per basse E_R.
Il progetto DAMA ai Laboratori Nazionali del Gran Sasso dell'INFN ha studiato, dal 1995 al 2010, proprio la modulazione annuale del rate differenziale. Nelle misure, per i primi sette anni è stato utilizzato un bersaglio di $\approx 100\,kg$ di ioduro di sodio (DAMA-NaI), mentre per i secondi sette, con DAMA-LIBRA, la massa del bersaglio è aumentata a $\approx 250\,kg$. L'esposizione cumulativa raccolta, considerando i sette cicli annuali di DAMA/NaI e quelli di DAMA/LIBRA, è quindi di $1.33\,t\,yr$. I dati raccolti sono presentati in figura 10. Con queste ricerche, DAMA ha confermato la presenza di un segnale che soddisfa tutti i requisiti della marcatura per la DM indipendente dai modelli della modulazione annuale. Come sottolinea [19], due possibili masse delle WIMP incidenti possono riprodurre la modulazione osservata: $m_\chi \approx 10\,GeV$ (dove dominano i rinculi del sodio) e $m_\chi \approx 80\,GeV$ (dove dominano i rinculi dello iodio). Tuttavia, soprattutto per quanto riguarda $m_\chi \approx 80\,GeV$, i risultati dell'esperimento DAMA sono incompatibili con le curve di esclusione sulla sezione d'urto SI imposte dalla maggior parte degli esperimenti recenti.

4 Incertezze astrofisiche

Nel capitolo 3 abbiamo derivato il tasso di interazioni differenziale associato allo scattering WIMP-nucleo. Per fornire poi un ragionevole andamento di questa quantità, abbiamo dovuto assegnare un valore ai vari parametri da cui quest'ultima dipende. Quello che succede però, soprattutto per quanto riguarda le grandezze astrofisiche, è che le stime sperimentali di questi parametri sono tuttora soggette a grandi incertezze. In questo capitolo, seguendo l'articolo [18], analizzeremo dunque come il variare dei valori scelti per queste grandezze, all'interno dei limiti imposti sperimentalmente, porti a differenti previsioni, nel campo della rivelazione diretta.
Innanzitutto, a partire dalla sezione d'urto SI a zero momento trasferito data dall'equazione 47, definiamo la sezione d'urto dello scattering WIMP-neutrone come segue:

$$\sigma_{n\chi} \equiv \left(\frac{\mu_{n\chi}}{\mu_{\chi N}}\right)^2 \sigma_0^{SI} \frac{f_n^2}{[Z f_p + (A-Z) f_n]^2} \approx \left(\frac{\mu_{n\chi}}{\mu_{\chi N}}\right)^2 \frac{\sigma_0^{SI}}{A^2} \quad . \tag{60}$$

L'assunzione di $f_p \approx f_n \approx f$, motivata nella sezione precedente, ci permette di affermare che $\sigma_{n\chi}$ rappresenta in generale la sezione d'urto WIMP-nucleone.

In questa sezione, mostreremo dunque come la variazione dei diversi parametri astrofisici impatti sulle curve di esclusione di $\sigma_{n\chi}$, ovvero le curve, al variare della massa particellare delle WIMPs, che rappresentano i limiti superiori alla sezione d'urto WIMP-nucleone. Inoltre, indicato con $i \in \mathbb{N}$ il determinato pacchetto di valori astrofisici $(v_{esc,i}, v_{0,i}, \rho_{\odot,i})$, definiamo la variazione frazionaria della sezione d'urto WIMP-nucleone come segue:

$$\left(\frac{\Delta\sigma_{n\chi}}{\sigma_{n\chi}}\right)_i^j \equiv \frac{\sigma_{n\chi}(j) - \sigma_{n\chi}(i)}{\sigma_{n\chi}(i)} \quad . \tag{61}$$

Utilizzeremo questa grandezza per quantificare l'effetto della variazione dei parametri astrofisici.

4.1 Velocità di fuga galattica

Nel capitolo 2 abbiamo assegnato alla velocità di fuga galattica il valore $v_{esc} = 544\,km/s$. Tuttavia, in letteratura questo è solo un valore di riferimento; per quanto riguarda il suo valore esatto, le stime odierne sono ancora molto imprecise. Le osservazioni di RAVE [20] hanno determinato, con confidenza del 90 %, un range per la velocità di fuga di $498\,km/s < v_{esc} < 608\,km/s$. Quello che succede però è che, anche variando v_{esc} nell'intero intervallo, le curve di esclusione non si modificano di molto nel caso di scattering elastico. Cerchiamo di capire il perché. Dall'equazione 28, in cui v_{min} rappresenta la velocità minima delle WIMP nel laboratorio per ottenere l'energia di rinculo E_R, possiamo affermare che se la variazione di qualche parametro astrofisico lascia invariato il numero di particelle che arrivano al target con una velocità maggiore di v_{min} allora la variazione non impatterà neanche sulle curve di esclusione. In linea di principio, aumentare (diminuire) v_{esc} dovrebbe comportare un valore maggiore (minore) della velocità media delle WIMPs nel laboratorio e, per quanto affermato, una conseguente variazione delle curve di esclusione. Nel caso di scattering elastico però, v_{esc} si trova ben lontana da v_{min} e questo comporta che una variazione della velocità di fuga galattica agisca solo sulle code della distribuzione di MB, non modificando significativamente il valore medio della velocità delle WIMPs. Diversamente succede nel caso di scattering inelastico; in questo caso, infatti, v_{min} è data dall'equazione:

$$v_{min} = \frac{1}{\sqrt{2 m_N E_R}} \left[\frac{m_N E_R}{\mu_{\chi N}} + \delta\right] \quad , \tag{62}$$

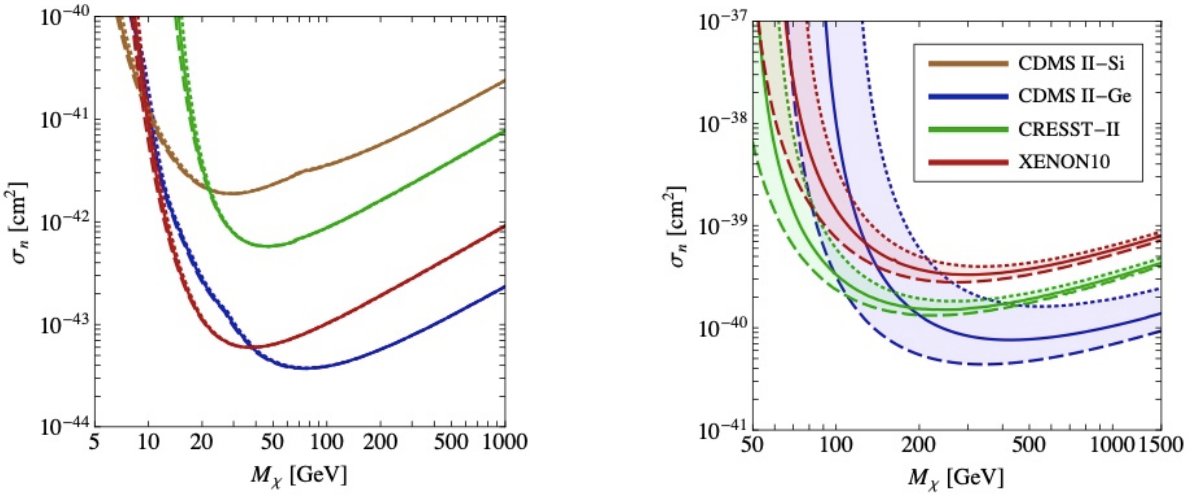


Figura 11: Curve di esclusione di $\sigma_{n\chi}$ al variare della velocità di fuga galattica, a sinistra nel caso elastico, a destra in quello inelastico (con $\delta = 130\,keV$). Per la linea continua $v_{esc} = 544\,km/s$, per quella tratteggiata $v_{esc} = 608\,km/s$ e per quella punteggiata $v_{esc} = 498\,km/s$. Curve realizzate da [18] sulla base degli esperimenti: CDMS *II* - Si ($A = 28$), CDMS *II* - Ge ($A = 72$), XENON10 ($A = 131$) e CRESST - *II* ($A = 184$).

dove δ rappresenta la differenza di massa tra la WIMP incidente e quella uscente. Scegliendo un tipico valore che si trova in letteratura di $\delta = 100\,keV$ per uno scattering WIMP-Xenon con $m_\chi = 500\,GeV$ e $E_R = 25\,keV$, si trova $v_{min} \approx 490\,km/s$. Per lo scattering inelastico dunque v_{min} è molto più vicina a v_{esc} e quindi una variazione della velocità di fuga porta ad effetti più evidenti. Questa differenza tra i due casi è apprezzabile in figura 11.

4.2 Velocità circolare del Sole

A differenza della velocità di fuga galattica, la velocità circolare del Sole determina la forma funzionale della distribuzione di MB. Questo per due principali motivi. Il primo è che v_0, come spiegato nella sezione 2.4, è legata alla dispersione delle velocità σ, presentata nell'equazione 7, tramite la relazione $\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}v_0$. Aumentare (diminuire) v_0 comporta quindi un aumento (diminuzione) del range di velocità accessibili alle WIMPs. Il secondo motivo è che la velocità di rotazione del Sole, essendo la componente predominante della velocità della Terra rispetto al GC, è quella che caratterizza maggiormente il vento di WIMP, trattato nella sezione 3.4. Di conseguenza il picco della gaussiana delle velocità trasla in maniera evidente al variare di v_0.
Conoscere precisamente la velocità di rotazione del Sole permette quindi di marginare notevolmente l'incertezza astrofisica presente nelle curve di esclusione di $\sigma_{n\chi}$. Quello che succede però è che v_0 può essere determinata in modi diversi che, ad oggi, restituiscono valori che si discostano leggermente da quello finora utilizzato di $v_0 = 220\,km/s$.
Una delle metodologie prevede la misura della grandezza $v_{\odot,y}/R_\odot$. Il rapporto tra la velocità rotazionale complessiva del Sole nel SDR galattico e la sua distanza dal GC è stato determinato con discreta precisione dalle osservazioni del moto proprio apparente di $SgrA^*$ [2]:

$$\frac{\mathbf{v}_\odot \cdot \hat{\mathbf{y}}}{R_\odot} = \frac{v_0 + v_{\odot,pec,y}}{R_\odot} = (30.2 \pm 0.2)\,km/s/kpc \tag{63}$$

[2] $SgrA^*$, Sagittarius A^*, è il buco nero supermassiccio che si trova nella costellazione del Sagittario, nel GC.

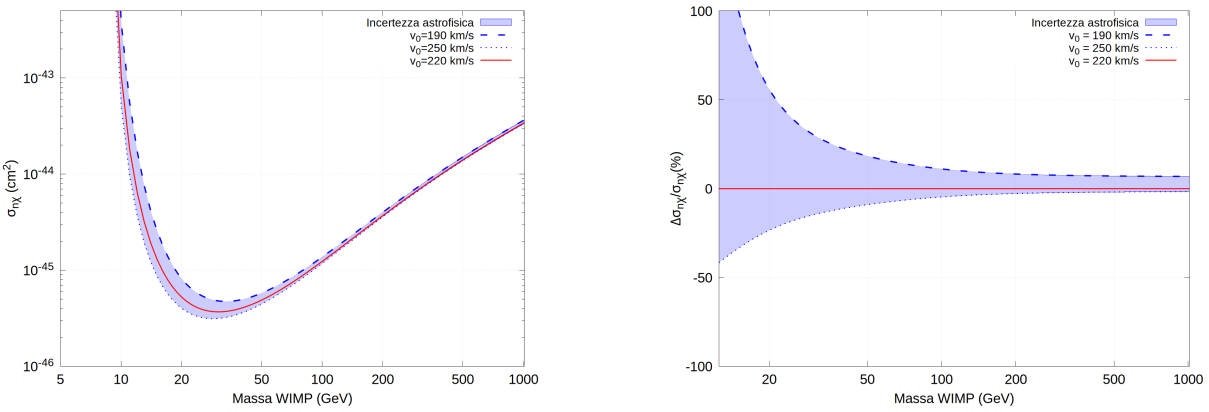


Figura 12: A sinistra, le curve di esclusione della sezione d'urto WIMP-nucleone basate sui risultati dell'esperimento XENONnT (2023) [21]. A destra, la variazione frazionaria di $\sigma_{n\chi}$ rispetto al valore di riferimento calcolato a $v_0 = 220\,km/s$. Nelle tre curve varia v_0 e rimangono fissati i parametri astrofici $v_{esc} = 544\,km/s$ e $\rho_\odot = 0.3\,GeV/cm^3$.

Sfortunatamente però per $R_\odot$ non abbiamo ancora un valore definitivo. Due stime di riferimento sono $R_\odot = (8.33 \pm 0.35)\,kpc$ [22] e $R_\odot = (8.4 \pm 0.4)\,kpc$ [23]; se consideriamo la componente trasversale della velocità peculiare presentata nell'equazione 21, otteniamo, per le differenti stime, rispettivamente $v_0 = (239 \pm 11)\,km/s$ e $v_0 = (242 \pm 12)\,km/s$. Questa tecnica però risulta solo una tra le tante utilizzate per misurare v_0. Ad esempio, Paul J. McMillan e James J. Binney, in [16], utilizzano un'analisi di verosimiglianza sulle misurazioni della parallasse del moto proprio e della velocità lungo la linea di vista di 18 maser in regioni di formazione stellare ad alta massa, col fine di determinare i parametri che caratterizzano la Via Lattea. Tra questi, i due astronomi presentano la seguente stima della velocità di rotazione del Sole: $v_0 = (225 \pm 29)\,km/s$. Per quanto detto, per questo parametro astrofisico si può ragionevolmente scegliere un range di valori consentiti di: $190\,km/s < v_0 < 250\,km/s$. In figura 12 sono presentate le curve di esclusione per tre differenti valori di v_0: $190\,km/s$, $220\,km/s$ e $250\,km/s$. Come si può apprezzare dal grafico, la variazione di v_0 porta a significativi spostamenti delle curve di esclusione, soprattutto per masse delle WIMP $< 50\,GeV$.

4.3 Distribuzione locale della DM

Rispetto agli altri parametri astrofisici, tutti contenuti all'interno di $\eta(E_R)$, la distribuzione locale di DM entra direttamente nel rate differenziale. Questo comporta una semplice proporzionalità inversa con la sezione d'urto WIMP-nucleone. Sfortunatamente però $\rho_\odot$ è anche il parametro astrofisico meno conosciuto. Il valore di riferimento è $\rho_\odot \approx 0.3\,GeV/cm^3$, con un errore percentuale del 25%-30%. A causa della sua relazione con $\sigma_{n\chi}$, l'errore su $\rho_\odot$ si traduce direttamente in un'incertezza percentuale simile su $\sigma_{n\chi}$, influenzando in egual modo tutti gli esperimenti.
Come approfondito nella sezione 2.3, uno dei mezzi più potenti per studiare la densità locale di DM della galassia sono le simulazioni numeriche. Quest'ultime ci hanno permesso di trovare dei plausibili profili di densità che descrivono interamente l'alone di DM. Ora, se poniamo $\rho_\odot = \rho(R_\odot)$, per un qualche profilo $\rho(r)$, e calcoliamo v_0 tramite l'equazione 63, si crea una correlazione tra v_0 e $\rho_\odot$, dovuta al fatto che entrambe dipendono dalla scelta di $R_\odot$. Se conside-

riamo, ad esempio, il profilo NFW, con i parametri r_s e ρ_s presentati in tabella 4, denominando con k il rapporto $v_{\odot,y}/R_\odot$ otteniamo:

$$\rho_\odot = \rho_{NFW}(R_\odot) = \frac{\rho_s}{\frac{R_\odot}{r_s}[1+\frac{R_\odot}{r_s}]^2} \quad \Rightarrow \quad \rho_\odot v_{\odot,y}[1+\frac{v_{\odot,y}}{k\,r_s}]^2 = \rho_s\, r_s\, k \quad . \tag{64}$$

Differenziando quest'equazione, posto $\rho_s\, r_s\, k =$ costante, troviamo una relazione tra la variazione di v_0 e quella di $\rho_\odot$:

$$\frac{\Delta\rho_\odot}{\rho_\odot} = -\frac{\Delta v_0}{v_{\odot,y}}\frac{1+3\frac{v_{\odot,y}}{k\,r_s}}{1+\frac{v_{\odot,y}}{k\,r_s}} = -\frac{\Delta v_0}{k\,R_\odot}\frac{1+3\frac{R_\odot}{r_s}}{1+\frac{R_\odot}{r_s}} \quad . \tag{65}$$

Prendendo ora i valori di riferimento $k = 30.2\,km/s/kpc$ e $R_\odot = 8.3\,kpc$ troviamo che da una variazione di $\Delta R_\odot = \pm 1\,kpc$, per l'equazione 63, segue un $\Delta v_0 \approx \pm 30\,km/s$ e, dalla formula appena ricavata, una variazione percentuale $\Delta\rho_\odot/\rho_\odot \approx \mp 20\%$. Svolgendo il medesimo calcolo per i profili di densità Einasto e Burkert, troviamo, rispettivamente, le seguenti relazioni:

$$\frac{\Delta\rho_\odot}{\rho_\odot} = -\frac{\Delta v_0}{k}\frac{R_\odot^{\alpha_{Ein}-1}}{r_s^{\alpha_{Ein}}} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta\rho_\odot}{\rho_\odot} = -\frac{\Delta v_0}{k}\frac{r_s^2+3R_\odot^2+2r_sR_\odot}{[r_s^2+R_\odot^2][r_s+R_\odot]} \quad , \tag{66}$$

dove assumiamo $\alpha_{Ein} \approx 0.17$, in accordo con quanto affermato nella sezione 2.3. Utilizzando gli stessi valori di k e $R_\odot$ scelti per il profilo NFW, troviamo le seguenti variazioni percentuali:

$$\Delta v_0 = \pm 30\,km/s \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\Delta\rho_\odot}{\rho_\odot}\right)_{Ein} \approx \mp 11\% \quad \text{e} \quad \left(\frac{\Delta\rho_\odot}{\rho_\odot}\right)_{Bur} \approx \mp 14.4\% \quad . \tag{67}$$

Da questi risultati comprendiamo che la correlazione tra v_0 e $\rho_\odot$ varia a seconda del profilo che scegliamo di usare per descrivere la distribuzione della DM nella galassia. Ciò sottolinea l'importanza di proseguire nello sviluppo di simulazioni numeriche più avanzate che ci permettano, quantomeno, di escludere i profili meno realistici.

4.4 Distribuzione delle velocità

Finora, col fine di fornire degli ordini di grandezza plausibili per $\eta(E_R)$, abbiamo assunto che l'alone galattico di DM segua una distribuzione di velocità di MB. Confrontando questo semplice modello con le simulazioni numeriche, però, ci si accorge che le reali distribuzioni non sono perfettamente rappresentate. La ricerca di Kuhlen et al. (2010) [24] ha portato alla seguente distribuzione, caratterizzata dal fatto che il taglio in corrispondenza di v_{esc} è più graduale e che, per $k \longrightarrow 0$, tende alla MB:

$$f(v) = N_k[e^{(v_{esc}^2-v^2)/(kv_0^2)}-1]^k\,\Theta(v_{\rm esc}-v) \quad \text{con} \quad k \in [1.5, 3.5] \quad . \tag{68}$$

Nell'articolo si analizzano due simulazioni cosmologiche di N-body per la DM fredda, Via Lactea II e GHALOs, rispettivamente con aloni composti da 400 milioni e 1.1 miliardi di particelle di massa $m_p = 4100 \cdot M_\odot$ e $m_p = 2300 \cdot M_\odot$, comprese all'interno di un raggio viriale di $r_{vir} = 309\,kpc$ e $r_{vir} = 352\,kpc$.
Ora, come calcolato con l'equazione 18, la dispersione di velocità della MB è pari a $\sigma = \sqrt{3/2}\,v_0 \approx 270\,km/s$. Tuttavia, negli aloni di Via Lactea II e GHALOs si trovano rapporti $v_c/v_0 < 1$ che portano a delle dispersioni di velocità rispettivamente di $\sigma = 173\,km/s$ e $\sigma = 225\,km/s$. Il motivo di questa discrepanza è che le simulazioni proposte non includono la materia barionica. Questo perché simulare le interazioni barioniche per un'intera galassia richiede una grande potenza di calcolo e comporta un'elevata complessità computazionale.

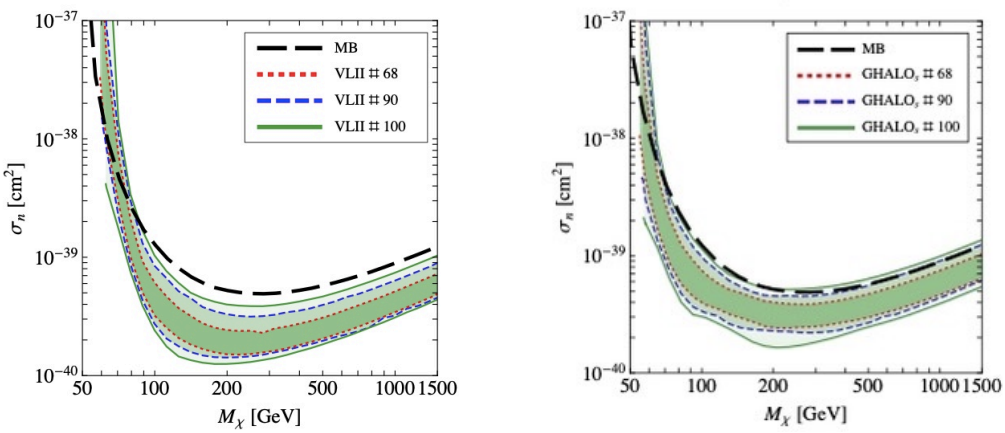


Figura 13: Confronto tra le curve di esclusione derivate da una MB e quelle derivate dalle simulazioni numeriche nel caso di scattering inelastico (con $\delta \approx 130\,keV$), a sinistra dalle simulazioni di Via Lactea II e a destra da quelle di GHALO. I restanti parametri astrofisici sono fissati a: $\rho_\odot = 0.3\,GeV/cm^3$, $\mathbf{v}_\odot = (10.0, 220 + 5.25, 7.17)\,km/s$, $v_{esc} = 550\,km/s$, per Via Lactea II, e $v_{esc} = 586\,km/s$, per GHALOs. Figure relative all'esperimento CRESST-II prese da [18].

L'aggiunta dei barioni, in linea di principio, dovrebbe portare a un disco barionico sul piano galattico che renderebbe più profondo il potenziale gravitazionale; ciò aumenterebbe la velocità circolare locale fino a $\approx 220 km/s$ e porterebbe così la dispersione di velocità delle particelle di DM a un valore maggiore.
Il confronto tra le curve di esclusione dell'SHM e quelle ricavate con le simulazioni numeriche è, per quanto detto, ancora troppo prematuro. Nell'articolo [18], dunque, vengono presentati i confronti tra le curve di esclusione delle simulazioni e quelle associate a una MB con dispersione di velocità di $\sigma = 225\,km/s$. I grafici sono stati realizzati estraendo la distribuzione di velocità per cento sfere di raggio $1.5\,kpc$ e $1\,kpc$, rispettivamente per Via Lactea II e GHALOs, centrate a una distanza di $8.5\,kpc$ dal centro galattico. Per dare una stima di quali siano le curve tipiche nel caso inelastico, mostrate in figura 13, si sono tracciati i limiti escludendo cinque e sedici sezioni d'urto massime e minime per ogni massa, rispettivamente come bande blu tratteggiate e rosse punteggiate. Come ci si potrebbe aspettare, la variazione delle curve di esclusione nel caso inelastico è risultata molto più evidente rispetto a quella del caso elastico e le curve derivate dalle simulazioni presentano alcune differenze, specialmente dovute al fatto che in quelle di GHALOs si trovano alcune irregolarità. Come nel caso elastico, i limiti derivati dalla MB sono più conservativi rispetto a quelli ottenuti dalle simulazioni.
Un ultimo interessante fenomeno che deve essere preso in considerazione per determinare l'esatta forma funzionale della distribuzione di velocità dell'alone di DM è quello dei flussi di DM. Come descritto in [2], la nostra galassia è in continua evoluzione nel tempo. Essa infatti sta attirando gravitazionalmente le galassie nane vicine e, con esse, anche i loro aloni di DM. Questo fenomeno genera dei flussi di DM che attraversano la galassia in diverse direzioni. Essendo direzionali e freddi, essi possono modificare significativamente la distribuzione delle velocità di DM rispetto a quella di MB o quelle delle simulazioni che non tengono conto di questo processo. Denominando con ρ_f (tipicamente $\approx 0.1\%$ di $\rho_\odot$) e v_f la densità locale e la velocità del flusso di DM, una possibile forma funzionale della distribuzione di velocità dell'alone galattico attraversato dal flusso risulta:

$$\tilde{f}(v) = \left(1 - \frac{\rho_\mathrm{f}}{\rho_\odot}\right) f(v) + \left(\frac{\rho_\mathrm{f}}{\rho_\odot}\right) f_\mathrm{f}(v_\mathrm{f}) \quad . \tag{69}$$

5 Conclusioni

Gli esperimenti di rivelazione diretta della DM condotti in laboratori sotterranei sono largamente influenzati dalla distribuzione della DM nella Via Lattea, sia spaziale che delle velocità. I parametri astrofisici che determinano tali profili sono però ancora sconosciuti. Ciò porta alla presenza di consistenti incertezze sulle curve di esclusione della sezione d'urto WIMP-nucleone. Per uno scattering elastico, abbiamo trovato che una variazione dei parametri v_{esc} e v_0 lascia pressoché invariate le curve di esclusione per masse della WIMP incidente di $m_\chi > 50\,GeV$, mentre comporta delle significative traslazioni orizzontali di quest'ultime per masse della WIMP inferiori. Nel caso di scattering inelastico, invece, la traslazione delle curve di esclusione si verifica per qualsiasi massa della WIMP. La più grande incertezza, tuttavia, deriva dal valore della densità locale di DM. La variazione di quest'ultima porta a traslazioni verticali delle curve di esclusione, per qualsiasi massa della WIMP incidente, sia nel caso elastico che in quello inelastico. Le incertezze astrofisiche risultano, dunque, un grande scoglio da superare per poter determinare la sezione d'urto tra la DM e la materia barionica. Dare una stima di questa quantità sarebbe un passo fondamentale verso la comprensione della natura della DM. Risulta quindi indispensabile trovare delle tecniche per eliminare queste incertezze.
Nell'articolo [25] vengono proposte alcune metodologie atte a questo fine. Gli autori sostengono di poter sviluppare un metodo per mappare il segnale osservato in un esperimento in un tasso di eventi previsto in un altro, eliminando così qualsiasi incertezza legata all'astrofisica. Confronti diretti sono possibili, però, solo quando lo spazio delle velocità esplorato dai diversi esperimenti si sovrappone. Un determinato esperimento di rivelazione diretta è, in questo modo, classificato in base al range energetico $[E_{low}, E_{high}]$ che osserva. Questo intervallo di energia corrisponde, secondo la formula 28, a un intervallo di velocità $[v_{min}^{low}, v_{min}^{high}]$. Dunque, se due esperimenti condividono parte del range di velocità appena presentato, possono essere confrontati.
Supponiamo quindi di avere due esperimenti, con target T_1 e T_2 di massa rispettivamente M_1 e M_2. Dalla formula 27 otteniamo la seguente relazione tra il primo e il secondo range energetico:

$$[E_{low,2}, E_{high,2}] = \left(\frac{\mu_{\chi N_2}}{\mu_{\chi N_1}}\right)^2 \frac{m_{N,1}}{m_{N,2}} [E_{low,1}, E_{high,1}] \quad . \tag{70}$$

Sotto la condizione di sovrapposizione dei range di velocità, se l'esperimento 1 ha misurato il tasso di interazioni dello scattering DM-T_1, $dR_{\chi,1}/dE_R$, tale misura può essere utilizzata per prevedere il rate dell'esperimento 2. Invertendo, infatti, la formula 40, è possibile determinare, con i dati dell'esperimento 1, il valore medio della velocità inversa:

$$\eta(E_R, t) = \frac{m_\chi}{\rho_\odot} \frac{2\mu_{\chi N,1}^2}{F_{SI,1}^2(E_R)\sigma_{0,1}^{SI}} \frac{dR_{\chi,1}}{dE_R}(E_R, t) \quad . \tag{71}$$

Questa stima può dunque essere utilizzata per fornire una previsione su $dR_{\chi,2}/dE_R$:

$$\frac{dR_{\chi,2}}{dE_R}(E_{R,2}, t) = \frac{\sigma_{0,2}^{SI}}{\sigma_{0,1}^{SI}} \frac{F_{SI,2}^2(E_{R,2})}{F_{SI,1}^2((\frac{\mu_{\chi N_1}}{\mu_{\chi N_2}})^2 \frac{m_{N,2}}{m_{N,1}} E_{R,2})} \frac{\mu_{\chi N,1}^2}{\mu_{\chi N,2}^2} \frac{dR_{\chi,1}}{dE_R}((\frac{\mu_{\chi N_1}}{\mu_{\chi N_2}})^2 \frac{m_{N,2}}{m_{N,1}} E_{R,2}, t) \quad . \tag{72}$$

Ecco che, tramite questo ragionamento, è possibile rimuovere qualsiasi parametro astrofisico presente nel rate differenziale e, con esso, la relativa incertezza.

Bibliografia

[1] J. H. Oort. *Astron. Inst. Netherlands*, page 285, 1932.

[2] Marco Cirelli et al., 2024.

[3] F. Zwicky. *General Relativity and Gravitation*, 1933.

[4] F. Zwicky. *Astrophysical Journal*, 86:217, 1937.

[5] E. Holmberg. *Astrophysical Journal*, 92:200, 1940.

[6] H. W. Babcock. *Lick Observatory Bulletin*, 19:41, 1939.

[7] V. C. Rubin and W. K. Jr. Ford. *Astrophysical Journal*, 159:379, 1970.

[8] M. S. Roberts and R. N. Whitehurst. *Astrophysical Journal*, 201:327, 1975.

[9] Carignan et al. *Astrophysical Journal*, 641:L109, 2006.

[10] K. C. Freeman. *Astrophysical Journal*, 160:811, 1970.

[11] A. Bosma. PhD thesis, Groningen Univ., 1978. (PhD Thesis).

[12] S. M. Faber and J. S. Gallagher. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 17:135, 1979.

[13] M. Tegmark and M. Zaldarriaga. *Physical Review D*, 66:103508, 2002.

[14] T. Lin. *arXiv*, 2019.

[15] N. Aghanim et al. page 15, 2018.

[16] P. J. McMillan and J. J. Binney. *arXiv preprint*, 2009.

[17] Jodi Cooley. *SciPost Physics Lecture Notes*, May 2022.

[18] Christopher McCabe. *Physical Review D*, 82(2), July 2010.

[19] Mariangela Lisanti et al. *Reviews of Modern Physics*, 85(4):1561–1581, November 2013.

[20] Smith et al. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 379(2):755–772, August 2007.

[21] Aprile et al. *Phys. Rev. Lett.*, 131:041003, Jul 2023.

[22] A. Ghez et al. *The Astrophysical Journal*, 689:1044–1062, 2008.

[23] S. Gillessen et al. *The Astrophysical Journal*, 692:1075–1109, 2009.

[24] Kuhlen et al. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, (02):030, 2010.

[25] Patrick J. Fox, Jia Liu, and Neal Weiner. *Physical Review D*, 83(10), May 2011.

[26] G. Bertone and D. Hooper. *Reviews of Modern Physics*, 90(4):3–10, 2018.