



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTA' DI SCIENZE STATISTICHE
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED
ECONOMICHE

TESI DI LAUREA

VALUTAZIONI DI OPZIONI PER MODELLI CON RITARDI O
CON VOLATILITA' VARIABILE

Relatore: Ch.mo Prof. Giovanni Battista Di Masi

Laureanda: Michela Schiavon
Matricola: 439882

ANNO ACCADEMICO 2003-2004

0. INDICE

| | |
|---|----|
| 0. Indice..... | 1 |
| 1. Introduzione..... | 2 |
| 2. Modello con volatilità costante..... | 6 |
| 2.1 Teoria di Black & Scholes..... | 6 |
| 2.1.1 Teorema di Cameron-Martin-Girsanov..... | 8 |
| 2.1.2 Teorema di rappresentazione delle martingale..... | 8 |
| 2.2 Formalizzazione della teoria..... | 9 |
| 2.3 Opzione call europea..... | 10 |
| 3. Modelli con volatilità non costante..... | 13 |
| 3.1 Volatilità livello-dipendente..... | 13 |
| 3.1.1 Modello di Cox & Ross..... | 14 |
| 3.1.2 Modello di Geske..... | 15 |
| 3.2 Volatilità stocastica attraverso SDE..... | 18 |
| 3.2.1 Modello di Scott..... | 19 |
| 3.3 Modelli GARCH..... | 22 |
| 4. Modello completo con volatilità stocastica..... | 27 |
| 4.1 Introduzione notazione..... | 27 |
| 4.2 Prezzatura opzione call europea..... | 29 |
| 5. Esempificazione del nuovo modello..... | 32 |
| 6. Conclusioni..... | 42 |
| 7. Bibliografia..... | 46 |

1. INTRODUZIONE

Il mondo della finanza si presenta spesso come un mondo difficile da comprendere ai non addetti ai lavori per l'incomprensibilità dei termini, le regole astruse ed in particolar modo le formule matematiche indecifrabili. Tuttavia tra le equazioni utilizzate in quest'ambito ne esiste una più alla portata di "tutti": la teoria delle opzioni o teoria di Black & Scholes (1973), che ha portato notevoli vantaggi, ma non solo.

Innanzitutto un'opzione è una garanzia che dà il diritto, e non l'obbligo, di comprare o vendere un asset, soggetto a certe condizioni, in uno specifico periodo di tempo. In particolar modo la teoria di Black & Scholes si focalizzò su "opzioni Europee" cioè opzioni che possono essere esercitate solo ad uno specifico termine futuro. Il prezzo che è pagato per l'asset quando l'opzione viene esercitata è chiamato prezzo d'esercizio o strike price; l'ultimo giorno nel quale l'opzione può darsi che venga esercitata è detto "data di scadenza" o "data di maturità". Il più semplice tipo d'opzione è quello che dà il diritto di comprare una singola azione dello stock comune. Quando lo stock price è molto più grande del prezzo d'esercizio, l'opzione sarà quasi sicuramente esercitata, il valore corrente dell'opzione sarà approssimativamente uguale al prezzo dello stock meno il prezzo del bond con cedola (pure discount bond) che matura alla stessa data dell'opzione, con valore pari allo strike price dell'opzione. D'altro canto se il prezzo dello stock è molto più piccolo del prezzo d'esercizio, alla scadenza l'opzione sicuramente non verrà esercitata. Inoltre se la data di scadenza dell'opzione è molto lontana nel futuro allora il prezzo del bond che paga il prezzo d'esercizio alla data di scadenza sarà molto basso e il valore dell'opzione sarà approssimativamente

uguale al prezzo dello stock. Viceversa se la data di scadenza è molto vicina il valore dell'opzione sarà approssimativamente uguale allo stock price meno il prezzo d'esercizio.

In particolar modo la volatilità fu un punto cruciale da cui si svilupparono tutta una serie di studi ad opera di diversi autori fino a tempi più recenti.

Secondo la teoria di Black & Scholes la volatilità era considerata un parametro costante, ma successive analisi empiriche di volatilità di titoli hanno messo in luce la possibilità che questa potesse essere non-costante; questa tesi veniva anche avvalorata dal fatto che in presenza di volatilità costante i prezzi derivati fossero inconsistenti. Le teorie proposte possono essere viste distribuirsi secondo due filoni principali; il primo filone rappresentato da Cox e Ross (1976), Geske (1979), Rubinstein (1983) e più recentemente Bensoussan e altri (1994) in cui si descrive il prezzo del titolo come una diffusione con volatilità che dipende dai livelli. Il secondo filone, esemplificato da Johnson e Shanno (1987), Scott (1987), Hull e White (1987,1988) e Wiggins (1987) definisce la volatilità come una diffusione autonoma guidata da un secondo moto Browniano.

Più recentemente è stato formulato un nuovo approccio ad opera di Hobson e Rogers (1998), in cui è incluso il modello del primo filone ma ci sono anche alcune caratteristiche del secondo; la volatilità è non-costante, ma è un fattore endogeno, cioè definito in termini del comportamento passato del prezzo del titolo. Rispetto a modelli con volatilità stocastica però il mercato rimane completo¹, e in contrasto con modelli dipendenti dai livelli è possibile specificare un singolo e semplice modello all'interno del nuovo approccio che oltre il tempo mostra la presenza di smiles e skew con differenti direzioni.

¹ Per mercato completo si intende un mercato in cui ogni claim è in grado di coprirsi da rischi eccessivi.

L'effetto smile può essere definito attraverso l'esistenza di due caratteristiche nella distribuzione a scadenza che i prezzi dell'attività sottostante possono assumere, questi sono la presenza di code pesanti (fat tails) e l'esistenza di asimmetrie (skew). La presenza di skew sta ad indicare che le probabilità associate ad un rialzo o ad un ribasso nelle quotazioni dell'attività sottostante non sono uguali; ad esempio uno skew positivo si produce se la probabilità associata ad un rialzo delle quotazioni è maggiore rispetto a quella di un ribasso, mentre si verifica l'opposto nel caso di skew negativo. Lo skew spiega il diverso valore che assume la volatilità implicita a seconda del livello degli strike.

Un effetto naturale del modello è quello di far sì che la volatilità sia auto-rinforzante; fintanto che la volatilità è definita in termini del passato dell'asset price avrà un'alta precisione anche in presenza di ampi movimenti nel passato recente.

Questo è designato a riflettere le percezioni del mondo reale della volatilità del mercato, in particolar modo se i professionisti confrontano la volatilità storica con la volatilità implicita.

Sono state rilevate poi anche delle similarità tra la classe di modelli con volatilità stocastica e i modelli ARCH e GARCH, favoriti dagli econometrici per lo studio delle serie temporali finanziarie. Questi modelli sono formulati a tempo discreto e postulano un processo del logaritmo dei prezzi per lo stock che ha varianza condizionale dipendente in un set di esogene e variabili endogene ritardate e residui del passato.

Si andrà quindi a dare uno sguardo a questi modelli cercando di mettere in rilievo come e perché a partire dalla formula di Black & Scholes per la prezzatura dell'opzione call i diversi studiosi hanno introdotto queste innovazioni. Inoltre si andrà a vedere un esempio pratico attraverso una soluzione numerica dell'equazione differenziale parziale dell'option pricing per il modello di Hobson e Rogers, che ha evidenziato la presenza di smiles e skew, e per fare

un confronto in modo più semplice, rispetto al caso analitico, con il modello di Black & Scholes.

2. MODELLO CON VOLATILITA' COSTANTE

2.1 TEORIA DI BLACK-SCHOLES

Il contributo di Black-Scholes allo sviluppo della teoria e della pratica finanziaria è stato un punto di svolta in quanto il loro modello di formulazione del prezzo per le opzioni su azioni di tipo europeo ha influenzato le metodologie di definizione del prezzo di qualsiasi strumento finanziario.

L'obiettivo del modello è quello di valutare al tempo t il prezzo di un'opzione call di tipo europeo avente scadenza in T , con prezzo d'esercizio pari a K , su di un'azione di valore S , nell'ambito di un mercato in cui sono presenti oltre ad attività rischiose, quali le azioni, attività prive di rischio quali i bond, il cui tasso di rendimento risk-free è pari ad r .

Alla base della teoria di Black & Scholes per derivare la formula del valore di un'opzione in termini del prezzo dello stock sono state assunte "condizioni ideali" nel mercato per lo stock e per l'opzione; queste condizioni sono:

- Il tasso d'interesse nel breve periodo è noto ed è costante nel tempo;
- Lo stock price segue un moto browniano² attraverso il tempo, produce una distribuzione log-normale per lo stock price;

² Un processo W_t si dice moto browniano, o processo di Wiener, se soddisfa alle seguenti proprietà:

1. $V_0 = 0$ q.c.,
2. $W_t - W_s \perp \mathfrak{F}_s$ con $0 \leq s \leq t$, cioè l'incremento che subisce il processo è indipendente dalla storia passata,
3. $(W_t - W_s) \approx N(0, ts)$;

- Lo stock non paga dividendi o altre distribuzioni;
- L'opzione è "europea", cioè che può essere esercitata solo alla scadenza;
- Non ci sono costi di transazione nel comprare o vendere lo stock o l'opzione;
- E' possibile prendere a prestito anche piccole frazioni di opzioni;
- È possibile vendere allo scoperto.

Sotto queste condizioni il valore dell'opzione dipenderà solo dal prezzo dello stock, dal tempo e dalle variabili che sono prese costanti.

Black-Scholes sono partiti da un mercato che comprende:

- un titolo rischioso che si evolve come un moto browniano geometrico,

che soddisfa cioè la seguente relazione:

$$S_t = S_0 \exp(\sigma w_t + \mu_t) \quad \text{con } S_0 = \text{valore iniziale};$$

- un titolo non rischioso che evolve con tasso d'interesse costante:

$$B_t = B_0 \exp(rt) \quad \text{con } B_0 = 1.$$

Dove:

r è il tasso d'interesse non rischioso,

σ è la volatilità dello stock che è nota e costante,

μ è il drift dello stock.

Per un claim X arbitrario, nota la scadenza T , sono andati a vedere la strategia di replicazione (ϕ_t, ψ_t) ³. Questa strategia è stata sviluppata in 3 passi:

1. trovare una misura Q sotto la quale S_t è una martingala, attraverso il teorema di Cameron-Martin-Girsanov;
2. formulare il processo $E_t = E_Q(X | \mathfrak{F}_t)$;

³ ϕ_t = unità di titolo rischioso al tempo t e ψ_t = unità di titolo non rischioso al tempo t .

3. trovare un processo prevedibile ϕ_t tale che $dE_t = \phi_t dS_t$,
attraverso il teorema di rappresentazione delle martingale.

2.1.1 Teorema di Cameron-Martin-Girsanov

Sia W_t un P-moto browniano e sia γ_s un processo tale che:

$$E_p \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_s^2 ds \right) \right] < +\infty$$

Sia Q la misura di probabilità definita da:

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left[- \int_0^T \gamma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_s^2 ds \right]$$

Allora $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ è un Q-moto Browniano.

2.1.2 Teorema di rappresentazione delle Martingale

Si suppone che E_t sia un processo Q-martingala, dove la volatilità σ_t soddisfa la condizione addizionale che è sempre diversa da zero con probabilità 1.

Poi se Z_t è un'altra Q-martingala, allora esiste un processo ϕ , \mathfrak{F} prevedibile tale che:

$$\int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 dt < +\infty \quad \text{con probabilità 1,}$$

e Z può essere scritto come:

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \phi_s dE_s.$$

Inoltre ϕ è essenzialmente unico.

2.2 FORMALIZZAZIONE DELLA TEORIA

Lo stock scontato con tasso d'interesse diverso da zero è $Z_t = B_t^{-1} S_t$, il claim scontato è $B_T^{-1} X$ e l'equazione differenziale stocastica per Z_t è:

$$dZ_t = Z_t \left(\sigma dW_t + \left(\mu - r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt \right)$$

Passo 1:

Per rendere Z_t una martingala si richiama il teorema di Cameron-Martin-Girsanov, bisogna quindi eliminare la presenza del drift sotto una certa misura Q ; si pone γ_t un processo con valore costante

$$\gamma = \left(\mu - r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) / \sigma \text{ tale che } \tilde{W}_t = W_t + \gamma t \text{ è un}$$

Q -moto browniano. Sostituendo l'equazione differenziale stocastica diviene:

$$dZ_t = \sigma Z_t d\tilde{W}_t.$$

Quindi, sotto la misura Q , Z_t è senza drift ed è una martingala.

Passo 2:

Occorre un processo che raggiunga il claim scontato e sia anche una Q -martingala.

Provvede a ciò il valore atteso condizionale, cioè formando il processo $E_t = E_Q(B_T^{-1} X | \mathfrak{F}_t)$.

Passo 3:

Il prezzo dello stock scontato è una Q-martingala, e così è il processo di valore atteso condizionale del claim scontato E_t . Il teorema di rappresentazione delle martingale dà un ϕ_t previsibile tale che

$$dE_t = \phi_t dZ_t.$$

La strategia di replicazione è:

- Tenere ϕ_t unità di stock al tempo t,
- Tenere $\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$ unità di obbligazioni al tempo t.

Il valore V_t del portafoglio è dato da:

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = B_t E_t = B_t E_Q(B_T^{-1} X | \mathfrak{F}_t) = e^{-r(T-t)} E_Q(X | \mathfrak{F}_t)$$

2.3 OPZIONI CALL EUROPEE

Per prezzare un'opzione call, il diritto ma non l'obbligo a comprare un'unità di stock per una predeterminata quantità ad una particolare data, detta T con K lo strike price dell'opzione e claim $X = (S_T - K)^+$ si deve in primo luogo trovare V_0 , il valore della strategia di replicazione al tempo zero, e quindi:

$$V_0 = \exp(-rt) E_Q((S_T - K)^+)$$

dove Q è la misura di martingala per $B_t^{-1} S_t$.

Per trovare questo si guarda al processo di S_t scritto in termini del

Q-moto browniano \tilde{W}_t , si ha che $S_t = S_0 \exp\left(\sigma \tilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2\right) t\right)$,

così la distribuzione marginale per S_T è data da un'esponenziale

che si distribuisce come una normale con media $\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2\right) T$ e

varianza $\sigma^2 T$. Se si prende Z come una normale $N\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T\right)$ si può scrivere S_T come $S_0 \exp(Z + rT)$ e il claim come $e^{-rT} E\left((S_0 \exp(Z + rT) - K)^+\right)$ che equivale a scrivere che:

$$V_0(S_0, T) = S_0 \Phi\left(\frac{\log \frac{S_0}{k} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT} \Phi\left(\frac{\log \frac{S_0}{k} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

che è la log-normal call formula, con Φ funzione di ripartizione di una normale standard.

La formula di Black & Scholes non solo fornisce il prezzo del contratto, ma anche la strategia, infatti si può facilmente vedere che confrontando il prezzo, che è funzione dell'orizzonte temporale e del tempo iniziale: $V(S_t, T-t)$, e il portafoglio con ϕ_t titoli rischiosi e ψ_t titoli non rischiosi: $\phi_t S_t + \psi_t B_t$, si ottiene:

$$\phi_t = \Phi\left(\frac{\log \frac{S_t}{k} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

e

$$\psi_t = -ke^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{\log \frac{S_t}{k} - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

I fattori che influenzano il prezzo dell'opzione sono: r, σ, T, S_0 ; in particolar modo la molla che probabilmente ha fatto scattare gli approfondimenti di altri studiosi sta nel fatto che σ a seconda che sia prossimo a zero, o prossimo all'infinito implica o un

comportamento assolutamente non rischioso o un comportamento altamente rischioso spingendo l'acquirente ad avere atteggiamenti completamente differenti a seconda della situazione; da qui l'esigenza di considerare la volatilità come un parametro variabile e non costante.

3. MODELLI CON VOLATILITA' NON COSTANTE

La varianza dei profitti dello stock ha giocato e gioca un ruolo molto importante negli studi finanziari . Molti studiosi hanno sviluppato metodi per migliorare l'accuratezza delle stime della varianza, da valori passati del profitto dello stock, a option prices per recuperare stime correnti. Questo lavoro è stato motivato dal fatto che la volatilità dello stock price sembrava cambiare oltre il tempo e che questi cambiamenti non fossero completamente predicibili. Il modello di Black-Scholes considera i profitti dello stock distribuiti log-normalmente con varianza costante; questi altri modelli invece ammettono che la varianza possa variare in dipendenza da altre variabili, come lo stock price o il valore dell'impresa.

Si andranno quindi a vedere alcuni modelli che mostrano la varianza con specificazioni differenti; in particolar modo si andranno a vedere modelli sviluppati con stime della varianza che dipendono da valori storici dello stock return data, ed altri che hanno utilizzato l'option price per determinare stime correnti.

3.1 VOLATILITA' LIVELLO-DIPENDENTE

Black-Scholes nel loro modello derivarono la seguente formula per l'option pricing, sotto la condizione che i profitti dello stock price fossero distribuiti log-normalmente:

$$dS = S(\mu dt + \sigma dz) \quad (1)$$

con σ nota e costante e z moto browniano.

3.1.1 Modello di Cox e Ross

Cox e Ross (1976) nella loro Elasticità costante della varianza (CEV) a differenza di Black-Scholes non considerarono una distribuzione log-normale con varianza costante, ma una volatilità della seguente forma: $\sigma_s(x) = \alpha x^{-(1-\alpha)}$ e conseguentemente l'equazione differenziale risultante è :

$$dS = \mu S dt + \sigma S^{\alpha/2} dz \quad (2)$$

con α fattore d'elasticità ($0 \leq \alpha \leq 2$).

Se si considera $\alpha = 2$ si ritorna al caso limite di log-normalità e la varianza non è funzione dello stock price.

Per la prezzatura di un'opzione call con scadenza T e strike price K, considerando un portafoglio senza rischio che consiste dell'opzione call dello stock e patrimonio contante, trovarono che il valore $V = V(S_t, T - t)$ dell'opzione call è ottenuta dalla soluzione della seguente equazione:

$$0 = rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV - \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} (S \sigma_s)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \quad (3)$$

con condizione di bond:

$$V(S, 0) = (S - K)^+ \quad (4)$$

Beckers (1980) osservando la classe dei modelli CEV di Cox e Ross e comparando la soluzione ottenuta con quella del modello log-normale di Black-Scholes rilevò che i prezzi d'opzione per il CEV erano più alti per opzioni in-the-money e at-the-money e più bassi per opzioni out-of-the-money rispetto alle rispettive opzioni ottenute con la formula di Black-Scholes. Inoltre rilevò una relazione inversa tra il livello dello stock price e la sua volatilità.

3.1.2 Modello di Geske

Nel loro articolo Black-Scholes avevano rilevato che la maggior parte delle società (corporate liabilities) possono essere viste come options. Geske (1979) a sua volta suggerì quindi che la formula per valutare il valore di un'opzione call, V , può essere derivata come una funzione del valore di un'impresa, A , se lo stock dell'impresa, S , può essere visto come un'opzione nel valore dell'impresa che presenta debiti. Rispetto alla formula di Black-Scholes, che assume che la varianza sia costante, il modello d'opzione composta proposto da Geske non considera la varianza costante ma dipendente nei livelli dello stock price o più precisamente dipendente dal valore dell'impresa. Se il valore dell'impresa è dato da un moto browniano esponenziale allora lo stock price è dato dalla formula di Black-Scholes con il set dello strike uguale al valore del debito, D , e la scadenza uguale alla data di scadenza del debito, T_D .

TEOREMA:

Si assume che gli investitori siano insaziabili, che il mercato sia perfetto e competitivo, che il tasso d'interesse sia noto e costante nel tempo, che l'operazione di commercio avvenga continuativamente nel tempo, che l'impresa non abbia da sborsare denaro, che cambiamenti nel valore dell'impresa seguano l'andamento di un random walk a tempo continuo con varianza proporzionale al quadrato del valore dell'impresa e gli investitori concordino questa varianza σ_A^2 , quindi l'opzione call europea è espressa come segue:

$$V = AN_2\left(h + \sigma_A\sqrt{\tau_1}, K + \sigma_A\sqrt{\tau_2}; \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right) - De^{-r\tau_2}N_2\left(h, K; \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right) - Ke^{-r\tau_1}N_1(h)$$

(5)

dove:

$$h = \frac{\ln(A/\bar{A}) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)\tau_1}{\sigma_A\sqrt{\tau_1}}$$

$$K = \frac{\ln(A/D) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)\tau_2}{\sigma_A\sqrt{\tau_2}}$$

dove \bar{A} è il valore di A tale che:

$$S_{\tau-K} = AN_1(K + \sigma_A\sqrt{\tau}) - De^{-r\tau}N_1(K) - K = 0 \text{ dove}$$

$$\tau = T - t^*,$$

e la notazione non specificata precedentemente sta ad indicare:

V= valore corrente dell'opzione call

$N_2(\cdot)$ = funzione di distribuzione normale bivariata cumulativa con

h e K come limiti dell'integrale e $\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}$ come coefficiente di correlazione, dove $\tau_1 = t^* - t$ e $\tau_2 = T - t$.

(Per la dimostrazione rif. Appendice dell'articolo "The valuation of coupon options" di Geske da Journal of Financial Economics).

La formula introdotta nel teorema precedente ha le caratteristiche desiderabili della formula di Black-Scholes, ed in particolar modo la non dipendenza dagli asset dell'impresa.

La volatilità dello stock price è quindi:

$$\sigma_S \equiv \sigma_A \frac{A_t}{S_t} \frac{\partial S_t}{\partial A} = \sigma_A \frac{A_t}{\partial A} \Phi \left(\frac{\log\left(\frac{A_t}{D}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)(T_D - t)}{\sigma_A\sqrt{T_D - t}} \right) > \sigma_A \quad (6)$$

Il valore dell'opzione nel modello di Geske è data dalla soluzione (5) con la nuova specificazione di σ_S , (6). Si assume sempre la condizione di essere in presenza di un mercato perfetto e competitivo come per il precedente modello di Black-Scholes e

come per quest'ultimo anche per Geske una copertura senza rischi può essere creata e mantenuta con due garanzie, che nel suo caso specifico sono l'impresa e l'opzione call.

La condizione per cui l'opzione call alla data di scadenza viene esercitata o meno dipende non dallo stock dell'impresa, S , al tempo T , la scadenza, ma da A , il valore dell'impresa e quindi $V = \max(0, S_T - K)$, con $S_T = \max(0, A_T - D)$. Quindi mentre il modello di Black-Scholes assume che la varianza del profitto dello stock non è funzione dello stock price, nel modello di Geske la varianza del profitto nello stock è inversamente correlata con lo stock price; quando lo stock price diminuisce (cresce) la proporzione di debito dell'impresa cresce (diminuisce) e questo aumento (diminuzione) del rischio è riflessa da una crescita (diminuzione) nella varianza dei profitti dello stock.

Nel modello di opzione composta la varianza dello stock è funzione dello stock price e questo porta ad una influenza tra tutte le variabili presenti nel modello che determinano il prezzo dello stock, incluso T_D , la data di scadenza del debito; è stato rilevato che quando la data di scadenza dell'opzione nello stock diminuisce, la vita dello stock, come un'opzione nel valore dell'impresa, è anch'esso in diminuzione, questa diminuzione di S causa una crescita nella proporzione di debito dell'impresa, accrescendo la rischiosità del profitto nello stock dell'azienda.

Se $D=0$ o $T_D = \infty$ la formula collassa nell'usuale formula di Black-Scholes.

Rubinstein (1985) analizzò il prezzo d'opzione per vedere se c'era una sistematica variazione della volatilità implicita con lo strike. Per uno dei periodi presi in considerazione trovò che la volatilità implicita veramente diminuiva se l'opzione si spostava out-of-the-money, e in un periodo più tardi la volatilità implicita aumentava quando lo strike aumentava.

Quindi si può rilevare che i modelli con volatilità livello-dipendete di Cox e Ross e Geske sono incapaci di spiegare cambiamenti della volatilità oltre il tempo, per un effetto asimmetrico della volatilità implicita (skew), in quanto vincolata dall'andamento di altre variabili presenti nei modelli.

3.2 VOLATILITA' STOCASTICA ATTRAVERSO EQUAZIONE DIFFERENZIALE STOCASTICA (SDE)

Nella classe di modelli con volatilità stocastica, la volatilità non è adattata alla filtrazione generata dal moto Browniano che guida il processo di asset price.

Il modello seguente è dovuto a Hull & White (1987) Hoffmann et al (1993) e considera un modello Markoviano più generale che contiene il modello di Hull & White come caso speciale.

LEMMA:

Si suppone che, in un mondo neutrale al rischio, lo stock price S e la sua varianza istantanea σ^2 seguono il processo stocastico seguente:

$$dS = rSdt + \sigma Sdz_1 \quad (a)$$

$$d\sigma^2 = \alpha\sigma^2 dt + \xi\sigma^2 dz_2 \quad (b)$$

dove r , il tasso d'interesse, è assunto costante, α e ξ sono indipendenti da S , e z_1 e z_2 sono processi di Weiner indipendenti.

La varianza media, oltre l'intervallo di tempo $[0, T]$, è definita da:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t) dt. \quad (c)$$

Dati (a), (b) e (c) la distribuzione di $\log\{S(T)/S(0)\}$ condizionata sotto $\bar{\sigma}^2$ è normale con media $rT - \bar{\sigma}^2 T / 2$ e varianza $\bar{\sigma}^2 T$.

Se σ^2 è stocastico ci sono un'infinità di path che danno la stessa varianza media $\bar{\sigma}^2$, ma tutti questi path producono alla fine la stessa distribuzione dello stock price, che è log-normale.

Ciò che è stato rilevato attraverso questo modello è che in confronto con il modello di Black-Scholes la volatilità è incorrelata con lo stock price, l'option price si abbassa in relazione al prezzo di Black-Scholes per opzioni near-the-money; un risultato interessante è che opzioni a più lungo termine hanno una più bassa volatilità implicita rispetto ad opzioni a più breve termine quando il prezzo ottenuto da Black-Scholes sovrapprezza l'opzione.

Quando la volatilità è positivamente correlata con lo stock price, l'option price presenta un errore in relazione al prezzo di Black-Scholes che tende al declino al decrescere dello stock price.

Crescite di prezzi riducono la volatilità al punto che è improbabile che possano risultare stock price molto alti.

3.2.1 Modello di Scott

Scott ha elaborato un modello econometrico per la stima dei parametri del processo diffusivo di tipo mean-reverting che descrive la legge temporale della volatilità.

Lo scopo è sempre quello di prezzare un'opzione call europea con data di scadenza T e strike price K e ci si pone nel caso in cui non si devono pagare dividendi. Scott prese in considerazione un portafoglio che comprendeva un bond non rischioso, l'asset e 2 opzioni call con differenti scadenze. Il processo stocastico per lo stock price è il seguente:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz_1 \quad (7)$$

$$d\sigma = \beta(\bar{\sigma} - \sigma)dt + \gamma dz_2 \quad (8)$$

dove z_1 e z_2 sono due moti browniani distinti.

Si sta assumendo che i parametri di volatilità istantanea per lo stock price sono processi random mean-reverting.

Se $\beta = 0$ allora σ è un random walk e la varianza non condizionata per lo stock return è infinita. Il parametro σ è distribuito normalmente.

Un'opzione call è quindi funzione di tre parametri $V(S_t, \sigma_t, T-t)$ con l'assunzione che il tasso d'interesse non rischioso è costante. L'introduzione di una varianza random introduce alcune complicazioni. Questo il motivo per cui Scott ha considerato un portafoglio con 2 opzioni call e lo stock con differenti scadenze, perché un portafoglio dinamico con una sola opzione e uno stock non sono sufficienti a creare strategie d'investimento non rischiose, in quanto l'equazione differenziale stocastica per l'opzione contiene 2 fonti di incertezza z_1 e z_2 .

Quindi si assume l'esistenza della funzione di option pricing $V(S, \sigma, T-t)$ e si utilizza il lemma di Itô⁴ per derivare l'equazione differenziale stocastica:

$$dV = \left[V_1 \alpha S + V_2 \beta (\bar{\sigma} - \sigma) - V_3 + \frac{1}{2} V_{11} \sigma^2 S^2 + V_{12} \rho \gamma \sigma S + \frac{1}{2} V_{22} \gamma^2 \right] dt + V_1 \sigma S dz_1 + V_2 \gamma dz_2 \quad (9)$$

con ρ la correlazione istantanea tra z_1 e z_2 , e i pedici di V stanno ad indicare le derivate parziali.

⁴ Si suppone di avere un processo che ammette differenziali di Itô:

$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$; sia $f(x)$ una funzione reale di var. reali che ammette derivata prima e seconda continua ($f(x) \in C^2$) $f(x_t)$ ammette differenziale stocastico: $df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) (dX_t)^2$ dire che f ammette differenziale stocastico significa che:

$$f(x_t) - f(x_0) = \int_0^t \left[f'(x_s) \mu_s + \frac{1}{2} f''(x_s) \sigma_s^2 \right] ds + \int_0^t f'(x_s) \sigma_s dW_s$$

La funzione di option pricing $V \equiv V(S_t, V_t, T - t)$ deve soddisfare alla seguente relazione:

$$-V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + \rho \delta \sigma^3 S V_{S\sigma^2} + \frac{1}{2}\delta^2 \sigma^4 V - V + rSV_S = bV_V$$

soggetto a condizione di bond $V(S, \sigma^2, 0) = (S - K)^+$ con $b \equiv b(S_t, \sigma_t^2, t)$.

Poiché la funzione b non può essere dedotta solo dalle considerazioni di arbitraggio, conseguentemente non c'è un'unica funzione di option pricing. Da ciò alcuni autori poiché non c'è un prezzo unico per le opzioni, hanno suggerito scelte particolari.

Quando $\rho = 0$ la scelta $b = -\gamma V$ corrisponde a fissare il prezzo di mercato del rischio pari a zero.

Stein & Stein (1991) come interesse primario ebbero quello di generare una formula per l'option pricing che fosse appropriata al caso in cui la volatilità segua un processo stocastico autoregressivo. Non c'è correlazione tra i 2 moti browniani e vi è presenza di smiles nella volatilità.

Wiggins (1997) a differenza dei modelli proposti da Cox, Geske e Rubinstein suggerì che la volatilità non necessariamente dovesse essere perfettamente correlata con lo stock price. L'esistenza di una correlazione negativa tra l'asset e la volatilità portò a rilevare che la volatilità implicita poteva essere più alta per opzioni in-the-money che per opzioni out-of-the-money.

Poiché le opzioni possono essere usate per coprirsi da rischi contro gli shocks della varianza, i loro valori dipenderanno da movimenti intertemporali di copertura. Se i movimenti della volatilità sono correlati negativamente con gli stock returns, per valori della call option out-of-the-money, decrescono in relazione a valori in-the-money, e aumentano se i movimenti della volatilità sono correlati positivamente con gli stock returns.

Sia Wiggins che Scott trovarono che, considerando un'ampia gamma di strike, prezzi d'opzione ottenuti da modelli con volatilità

stocastica provvedono ad un adattamento superiore ai prezzi di mercato se comparati con prezzi d'opzione ottenuti da modelli con volatilità costante.

I modelli con volatilità stocastica sono incompleti in quanto non si può a lungo replicare perfettamente il pay off di una tipica derivazione attraverso una strategia dinamica di trading nello stock e alcuni asset non rischiosi.

3.3 MODELLI GARCH

Il modello GARCH (eteroschedasticità condizionale autoregressiva generalizzata) è un modello utilizzato per serie temporali con volatilità non-costante a tempo discreto. Il modello di option pricing che termina con l'eteroschedasticità include il modello di elasticità costante della varianza di Cox, il modello di diffusione a salti di Merton (modello a tempo discreto), il modello d'opzione composto di Geske e il modello displace-diffusion di Rubinstein. Hull & White (1987) proposero un modello diffuso bivariato per l'option pricing nell'asset con volatilità stocastica; nel loro modello, un processo esogeno è assunto governare l'evoluzione della volatilità dell'asset. Altri modelli d'opzione con volatilità stocastica simili a quello di Hull & White sono quelli di Johnson e Shanno (1987), Scott (1987), Wiggins (1987) e Stein e Stein (1991). I modelli di diffusione bivariata richiedono forti condizioni più di quelle di non arbitraggio.

Il modello di option pricing Garch ha 3 caratteristiche distintive:

1. il Garch option price è una funzione del premio al rischio dell'asset price;
2. il modello è non-Markoviano;
3. il modello può spiegare alcuni sistematici errori associati al modello di Black-Scholes.

Per un GARCH(1,1), dato il processo di logaritmo dei prezzi Z_t e σ_t varianza condizionale si ha genericamente una formulazione del tipo:

$$Z_t = Z_{t-1} + \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t \quad (10)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2 \quad (11)$$

dove ε_t sono variabili random i.i.d. con media zero e varianza 1.

Più genericamente i modelli GARCH permettono a σ_t di essere una funzione arbitraria della varianza condizionale passata e dei residui passati.

Mentre i modelli GARCH possono catturare proprietà qualitative essenziali di un processo di asset price, sono invece inadatti per un'eventuale option replicator salvo nel caso più semplice binomiale, quindi un'esatta replicazione non è fattibile a tempo discreto.

Però in generale non c'è un corrispettivo modello GARCH a tempo continuo.

Recentemente una nuova classe di modelli Weak Arch sono stati proposti da Drost e Nijman (1993). Per modelli Weak Arch si intende che: $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ è definita essere generata da un processo Weak Garch(p,q) se ψ , A(L) e B(L) possono essere scelti tali che:

- $P[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots] = 0$
- $P[\varepsilon_t^2 | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots] = h_t$,

dove $P[X_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots]$ denota la miglior predizione lineare di X_t in termini di $1, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots$ i.e.

$$E[X_t - P[X_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots]] \varepsilon_{t-1}^r = 0 \text{ per } i \geq 1 \text{ e } r=0,1,2,\dots$$

Questi modelli hanno la proprietà che se un processo Weak Arch, che è a tempo discreto, è saggiato ad intervalli regolari allora il processo che ne risulta è ancora un Weak Arch, a tempo continuo. Duan (1995) sotto l'assunzione di utilità dell'investitore è stato

capace di derivare un unico prezzo per l'opzione. Duan considera un'economia a tempo discreto, X_t è l'asset price al tempo t .

DEFINIZIONE: Una misura dei prezzi Q è detta soddisfare la relazione locale di valutazione di rischio neutrale (LRNVR) se la misura Q è reciprocamente e assolutamente continua con rispetto alla misura P , $X_t / X_{t-1} | \phi_{t-1}$ distribuita normalmente, sotto la misura Q , $E_Q(X_t / X_{t-1} | \phi_{t-1}) = e^r$ e $Var_Q(\ln(X_t / X_{t-1}) | \phi_{t-1}) = Var_P(\ln(X_t / X_{t-1}) | \phi_{t-1})$ quasi certamente con rispetto della misura P .

TEOREMA: Il LRNVR implica che la prezzatura sotto la misura Q è:

$$\ln \frac{X_t}{X_{t-1}} = r - \frac{1}{2} h_t + \xi_t$$

dove $\xi_t | \phi_{t-1} \approx N(0, h_t)$

$$e \quad h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\xi_{t-i} - \lambda \sqrt{h_{t-i}})^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}.$$

(Per la dimostrazione si veda l'appendice dell'articolo di Duan "The Garch option pricing model" nel Mathematical Finance.)

Questo teorema implica che per un Garch(p,q) il processo rimane intatto con rispetto alla locale neutralità al rischio, mentre il processo di varianza sempre sotto l'assunzione di misura neutrale al rischio non segue un modello Garch.

Quindi la varianza condizionale è una funzione lineare della distribuzione quadrata del passato e la varianza condizionale passata. Chiaramente con h_t e ϕ_t predicibile. Per la condizione di stazionarietà della covarianza per un Garch(p,q) si assume che

$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$ e il processo di asset price scontato $e^{-rt} X_t$ è una

Q martingala.

COROLLARIO: Un'opzione call europea con prezzo d'esercizio K

e scadenza T ad un generico periodo t è specificata nel seguente modo:

$$V_t = e^{-(T-t)r} E_Q[\max(X_T - K, 0) | \phi_t]. \quad (12)$$

In particolar modo un Garch(1,1) è una sostanziale semplificazione dell'informazione in quanto il modello riflette lo stato dell'asset price in due dimensioni: il livello del prezzo e la volatilità condizionale.

Confrontando quest'ultimo modello specificato con il noto modello di Black-Scholes si nota che il processo omoschedastico usato da Black-Scholes è un caso speciale del processo Garch, ma l'interpretazione è molto più complessa. Per introdurre le problematiche del modello di Black-Scholes si introduce il seguente teorema che mostra come un corretto uso della locale neutralità al rischio possa alterare alcune caratteristiche del processo Garch:

TEOREMA: Sotto la misura di pricing Q, se $|\lambda| < \sqrt{(1 - \alpha_1 - \beta_1) / \alpha_1}$

allora:

1. la varianza stazionaria di ξ_t uguaglia $\alpha_0 [1 - (1 + \lambda^2)\alpha_1 - \beta_1]^{-1}$;
2. ξ_t è leptocurtica;
3. $Cov_Q(\xi_t / \sqrt{h_t}, h_{t+1}) = -2\lambda\alpha_0\alpha_1 [1 - (1 + \lambda^2)\alpha_1 - \beta_1]^{-1}$

(per la dimostrazione si veda l'appendice dell'articolo citato in precedenza).

Dal teorema si evince che la varianza condizionale è correlata negativamente (positivamente) con i ritardi dell'asset return se il premio al rischio λ è positivo (negativo). L'option price di Black-Scholes nella struttura Garch è interpretato usando una incorretta assunzione di omoschedasticità e di conseguenza una deviazione

standard non condizionale per il processo di asset return neutrale al rischio.

Le differenze tra il Garch option price ed il corrispettivo modello di Black-Scholes può essere vista usando 2 differenti livelli della volatilità dell'asset.

L'iniziale varianza condizionale per il processo Garch non può essere uguale alla varianza non condizionale σ^2 . Anche se la varianza condizionale iniziale è collocata nella varianza non condizionale del processo originale di asset return, la locale neutralità al rischio implica che la varianza condizionale sotto la misura di prezzo Q tornerà ad una varianza non condizionale più alta di σ^2 . Poiché la varianza condizionale è correlata negativamente (positivamente) con i ritardi dell'asset return il comportamento ritornato è differente da quello usualmente associato al modello Garch standard. L'option price del modello Garch sarà più alta della corrispondente per il modello di Black-Scholes.

Quindi il modello di option price Garch ha molti aspetti desiderabili e presenta una reale possibilità di correzione dell'errore di pricing associato al modello di Black-Scholes.

4. MODELLO COMPLETO CON VOLATILITA' STOCASTICA

Hobson e Rogers (1998) hanno definito una nuova classe di modelli di prezzi a partire da quanto avevano cercato di proporre precedentemente altri studiosi.

Ciò che caratterizza questi nuovi modelli è la specificazione della volatilità istantanea in termini di momenti del logaritmo del prezzo storico pesati esponenzialmente. Questa caratteristica introduce un effetto di feedback nel processo di volatilità: shock presenti nei prezzi passati provocano una maggiore incertezza futura.

4.1 INTRODUZIONE DELLA NOTAZIONE

Si definisce il processo del logaritmo del prezzo scontato Z_t :

$$Z_t = \log(S_t e^{-rt}). \quad (13)$$

Si definisce inoltre la funzione offset di ordine m:

$$G_t^{(m)} = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} (Z_t - Z_{t-u})^m du \quad (14)$$

che si può interpretare come una misura di quanto il prezzo al tempo t si discosti da tutto il suo passato.

La costante λ è un parametro che descrive il tasso a cui l'informazione passata è stata scontata.

Assunzione 1: Z_t risolve l'equazione differenziale stocastica

$$dZ_t = \sigma(G_t^{(1)}, \dots, G_t^{(n)}) dB_t + \mu(G_t^{(1)}, \dots, G_t^{(n)}) dt \quad (15)$$

dove $\sigma(\cdot)$ e $\mu(\cdot)$ sono funzioni lipschitziane⁵ e $\sigma(\cdot)$ è strettamente positiva.

Osservazione 1: Più generalmente è possibile ammettere che $\sigma(\cdot)$ è una funzione anche del livello di prezzo S_t . Così il modello può essere esteso ad includere la classe dei processi di volatilità dipendente nei livelli come un caso speciale.

Osservazione 2: La chiave caratteristica da sottolineare a questo primo stadio è che non viene introdotto un nuovo moto Browniano nello specificare il processo del prezzo.

Questo implica che il modello produce un unico option price senza la necessità di specificare il mercato dei prezzi per il rischio.

Lemma1: $(Z_t, G_t^{(1)}, \dots, G_t^{(m)})$ forma un processo di Markov. I processi offset $G^{(m)}$ soddisfano all'equazione differenziale stocastica:

$$dG_t^{(m)} = mG_t^{(m-1)} dZ_t + \frac{m(m-1)}{2} G_t^{(m-2)} d\langle Z \rangle_t - \lambda G_t^{(m)} dt .$$

(16)

Finché le funzioni σ e μ sono assunte essere lipschitziane è garantita l'esistenza e l'unicità di una soluzione non esplosiva.

Infatti la definizione di equazioni differenziali stocastiche localmente lipschitziane è data in questo teorema dove viene usata la notazione: $f_t^* \equiv \sup\{|f(s)| : s \leq t\}$,

⁵ Una funzione $f : \mathfrak{R} \supseteq X \rightarrow \mathfrak{R}$ si dice lipschitziana in X se \exists una costante $L \geq 0$ tale che : $|f(X) - f(Y)| \leq L|X - Y| \quad \forall X, Y \in \mathfrak{R}$.

TEOREMA:

Si suppone che il coefficiente σ e b nell'equazione differenziale stocastica è tale che per ciascun N c'è un K_N tale che:

$$|\sigma(s, x) - \sigma(s, y)| \leq K_N (x - y)_s^*$$

$$|b(s, x) - b(s, y)| \leq K_N (x - y)_s^*$$

dove $x_s^* \vee y_s^* \leq N$ e $0 \leq s \leq N$. Si suppone inoltre che per ciascuna costante $T > 0$ ci sono alcune V_T tali che, per $0 \leq s \leq T$:

$$|\sigma(s, x)| + |b(s, x)| \leq V_T (1 + x_s^*),$$

con equazione differenziale stocastica:

$$X_t = \xi + \int_0^t \sigma(s, x) dB_s + \int_0^t b(s, x) ds.$$

4.2 PREZZATURA OPZIONE CALL EUROPEA

Lo scopo è prezzare un claim contingente europeo con esercizio dato T e pay off $X = f(S_T)$.

Per semplicità Hobson e Rogers hanno assunto che m fosse pari a 1 nell'equazione (16) così che la volatilità dipendesse solo nel primo ordine a $G^{(1)}$.

Si può notare che (15) collassa a:

$$dG_t = dZ_t - \lambda G_t dt \quad (17)$$

e che si può combinare (15) e (16) per concludere che G è una diffusione autonoma che soddisfa l'equazione differenziale stocastica:

$$dG_t = \sigma(G_t) dB_t + (\mu(G_t) - \lambda G_t) dt. \quad (18)$$

Si può notare che G_t è adattato alla filtrazione \mathfrak{F}_t di B .

Definito $\theta(s) = \frac{1}{2}\sigma(s) + \{\mu(s)/\sigma(s)\}$, si consideri il processo

$\tilde{B}_t \equiv B_t + \int_0^t \theta(S_u) du$, che risulta essere un moto Browniano sotto

la nuova misura \tilde{P} specificata in \mathfrak{F}_t da:

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \exp\left\{-\int_0^t \theta(S_u) dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \theta(S_u)^2 du\right\}. \quad (19)$$

(Per dimostrazione si veda l'appendice dell'articolo "Complete models with Stochastic volatility" di Hobson e Rogers)

Se si assume che queste condizioni sono soddisfatte allora si può scrivere:

$$dG_t = \sigma(G_t) d\tilde{B}_t - \left(\frac{1}{2}\sigma(G_t)^2 + \lambda G_t\right) dt \quad (20)$$

dove \tilde{B} è un \tilde{P} moto browniano.

Quindi sotto \tilde{P} il processo scontato del prezzo $e^{-rt}S_t$ è una martingala, e si può applicare la teoria di Harrison e Kreps (1979) e Harrison e Pliska (1981) per concludere che il prezzo dell'opzione può essere scritto :

$$V(S_t, G_t, T-t) = e^{-r(T-t)} \tilde{E}[f(S_t) | \mathfrak{F}_t] \quad (21)$$

soggetto alle condizioni di integrabilità in $f(\cdot)$. Il teorema di rappresentazione delle martingale implica che il claim contingente può essere replicato usando una strategia previsiva.

V soddisfa l'equazione alle derivate parziali:

$$0 = \left(r_S V_S - rV - \lambda_G V_G - V_t\right) + \left(-\frac{1}{2}V_G + \frac{1}{2}S^2 V_{SS} + \frac{1}{2}V_{GG} + S V_{GS}\right) \sigma(G)^2 \quad (22)$$

soggetto alla condizione finale:

$$V(S, G, 0) = f(S). \quad (23)$$

Si nota che se la volatilità dello stock è costante così che $d\langle Z \rangle_t / dt \equiv \sigma(S_t)^2 = \sigma^2$ e f dipende solamente da P e t si ricava:

$$0 = r_p f_p - rf - f_t + \frac{1}{2} \sigma_p^2 f_{pp}$$

che è l'equazione differenziale stocastica standard per l'option price di Black-Scholes.

5. ESEMPLIFICAZIONE DEL NUOVO MODELLO

In questo capitolo si vuol calcolare l'option price risolvendo numericamente l'equazione differenziale parziale (22) soggetta alla condizione di bond (23). Questo per facilitare una comparazione con il modello di Black-Scholes ed inoltre perché una soluzione numerica è necessaria per ricavare alcune proprietà che attraverso una soluzione analitica sarebbe troppo complesso ottenere.

L'esempio si basa sul prezzare un'opzione call europea con tasso d'interesse r che verrà posto pari a zero e $\sigma(G) = \eta\sqrt{1 + \varepsilon G^2}^N$ con valori di N ampi e costanti.

L'intuizione che si spera di catturare con questo modello è che se il prezzo corrente differisce molto dalla media passata, allora conseguentemente la volatilità sarà alta.

Basando $\sigma(G)^2$ sul quadrato di G , con coefficiente lineare diverso da zero, poi è possibile modellare il mercato in cui le variazioni della volatilità sono correlate con i cambiamenti del prezzo. Per esempio è possibile costruire un modello in cui la volatilità è più alta quando il logaritmo del prezzo corrente si trova sotto la media passata rispetto a quando è sopra la media passata, per uno stesso ammontare.

Se la specificazione della volatilità è rimpiazzata da $\sigma(G) = \eta\sqrt{1 + \varepsilon G^2}$ allora la diffusione G potrebbe esplodere con probabilità positiva sotto la misura di prezzo candidata \tilde{P} .

La formula di valutazione dell'opzione diventa una funzione del prezzo corrente S_t , dell'offset corrente G_t , del tempo $(T - t)$, e dei parametri K , lo strike price, η , ε e λ .

Inizialmente si pone $K=1$, e usando le trasformazioni $S \equiv e^Z$, $U \equiv Z - G$ si semplifica il problema di prezzatura dell'opzione per

risolvere $V \equiv V(Z_t, U_t, T-t) \equiv V(Z_t, U_t, T-t; \sigma, \varepsilon, \lambda)$, dove V soddisfa l'equazione differenziale parziale:

$$V_t = \frac{1}{2} \sigma (z-u)^2 [V_{zz} - V_z] + \lambda (z-u) V_u \quad (24)$$

soggetto alla condizione di bond:

$$V(Z, U, 0) = (e^Z - 1)^+ \quad (25)$$

Finché la soluzione numerica di (24) soggetto a (25) è calcolato oltre le regioni finite delle variabili z e u , la scelta di N non influisce sulla soluzione di V . Inoltre, per garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione è meglio risolvere (24) soggetto alla condizione di bond $V(Z, U, 0) = (1 - e^Z)^+$.

Il prezzo della call può poi essere dedotto usando la put-call parity. Adesso V dà il prezzo della call, con strike fissato pari a 1, come una funzione dell'asset price al tempo 0, ma ciò è un semplice esercizio usando una riduzione per poi calcolare il prezzo $\tilde{V} = \tilde{V}(K, G, T)$ di una call con strike arbitrario assumendo che il prezzo iniziale soddisfi la relazione $S_0 = 1$.

Si denota attraverso $V_{BS}(\sigma)$ il prezzo dell'opzione ottenuta attraverso la formula di Black-Scholes definito come segue:

$$V_{BS}(\sigma) = \Phi\left[\frac{-\ln K + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}}\right] - K \Phi\left[\frac{-\ln K - \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}}\right] \quad (26)$$

Poi si definisce un modello di volatilità implicita:

$$\sigma_{BS}(K, G, T) = V_{BS}^{-1}(\tilde{V}(K, G, T))$$

La definizione di $\sigma_{BS}(K, G, T)$, funzione in the moneyness dell'opzione, sostituita nella formula di Black-Scholes (26) insieme allo strike K e la data di scadenza dà il prezzo d'esercizio calcolato. La volatilità implicita provvede ad una conveniente misura per esprimere il prezzo derivato di sicurezza in un linguaggio che può essere applicato attraverso differenti pay off di sicurezza.

Per cominciare è stato fissato $T=0.25$, la figura 1 mostra la volatilità implicita calcolata come una funzione del primo ordine dell'offset G_0 e lo strike K , e in cui i parametri hanno valore: $\eta = 0.2$, $\varepsilon = 5$ e $\lambda = 5$.

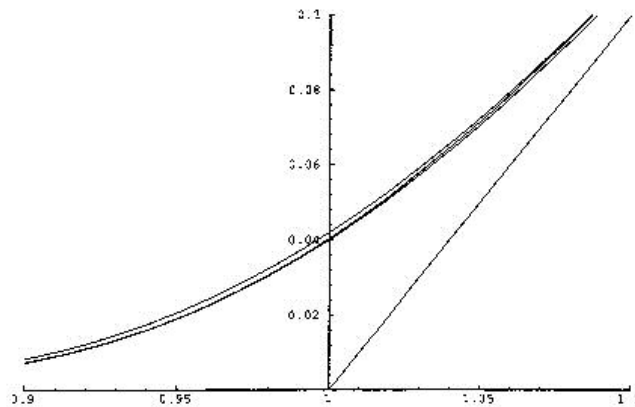


Fig. 1 : Funzione di prezzo di una call europea per un'opzione con $T=0.25$ e $K=1$; la curva più alta è ottenuta attraverso la formula di Black-Scholes con volatilità pari a 0.21, mentre la curva più bassa è sempre ottenuta con la formula di Black-Scholes con volatilità pari a 0.2, quella centrale invece rappresenta la funzione di prezzo ottenuta con il modello proposto con $\eta = 0.2$, $\varepsilon = 5$, $\lambda = 5$ e $G_0=0.1$.

L'immediata conclusione è che la presenza di una volatilità non-costante ha l'effetto di un aumento della volatilità implicita, e che questo effetto è più forte quando l'iniziale offset è diverso da zero, e l'opzione non è at-the-money.

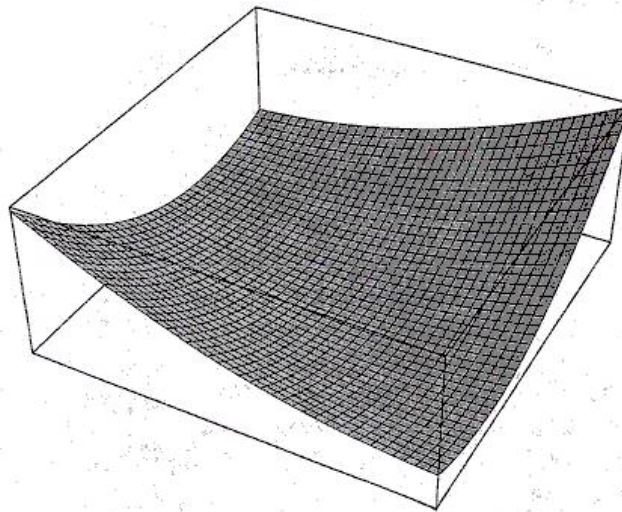


Fig.2: La superficie della volatilità: è una funzione del valore Iniziale dell'offset, qui compreso tra -0.2 e 0.2 , visto da sinistra a destra, e il logaritmo dello strike, che varia tra -0.2 (in the money) e 0.2 (out of the money) dal primo piano in fondo. La scala verticale indica il range della volatilità implicita che varia tra 0.2 e 0.218 .

Si può anche trattare una famiglia di opzioni con differente grado di in-the-moneyness o in corrispondenza con differenti strike, questo è interessante per valutare le intersezioni della superficie della volatilità implicita.

Ciascuna intersezione corrisponde ad un valore differente di G_0 . In principio, con il beneficio dei dati storici, il valore di G_0 era osservabile così che l'option trader conosceva quale dei possibili regimi per G_0 descriveva la situazione corrente. In pratica può essere che l'option trader userà i prezzi delle opzioni correnti per dedurre il valore di G_0 .

Per tutti i valori di G_0 la volatilità implicita è una funzione convessa dello strike. Inoltre gli effetti di skew sono chiaramente visibili : lo smile ha uno skew positivo per valori positivi di G_0 e uno skew negativo quando il corrente log-price si trova sotto la media passata. Questo è in accordo con un'intuitiva comprensione del comportamento del processo di asset.

Si considera la situazione in cui si ha un'opzione out-of-the-money con valore iniziale di offset $G_0 > 0$. Dato che lo strike price è raggiunto dopo l'esercizio, l'offset a questo tempo sarà sempre positivo, e avrà ampiezza pari a G_0 . La volatilità sarà poi abbastanza alta, gonfiando l'option price. Se adesso si considera la possibilità che G_0 possa essere più piccolo, e diventare addirittura negativo, si vede che diventa più difficile per il prezzo dell'asset raggiungere lo strike prima dell'esercizio, fintanto che la volatilità diventa più piccola. Poi se S_0 non è abbastanza ampio, una volta che il prezzo raggiunge lo strike, S sarà prossimo allo zero; la volatilità istantanea sarà poi bassa e così il prezzo dell'opzione sarà ridotto. Sicuramente se S_0 tenderà ad allargarsi S sarà ancora ampio quando il prezzo d'esercizio è raggiunto, e così il prezzo d'opzione sarà di nuovo più ampio. Questo dà una spiegazione qualitativa delle curve viste in figura 3.

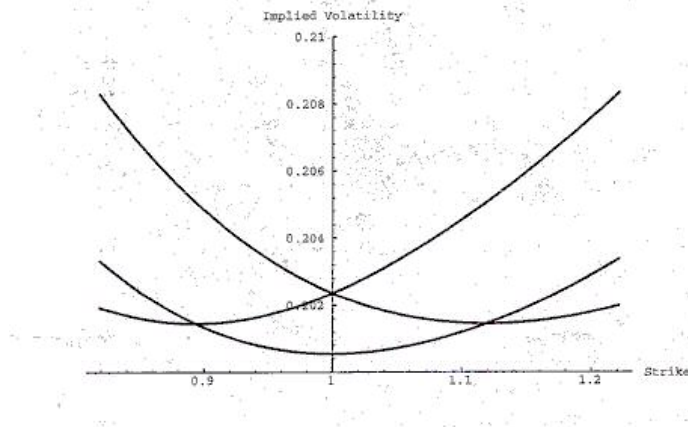


Fig. 3: Le tre curve sono state ricavate imponendo ad S_0 di assumere i valori -0.1, 0 e 0.1 rispettivamente; in tutti i casi si può notare la presenza di smiles e skew che varia al variare del valore iniziale dell'offset.

L'analisi è stata concentrata in opzioni con $T=0.25$. Adesso questa condizione viene rilasciata. Le figure 4 e 5 mostrano il plot della volatilità implicita come una funzione sia di T che dello strike. I 2 grafici corrispondono a due differenti valori iniziali dell'offset. Un'osservazione immediata è che la grandezza dello skew e smiles decresce col tempo. In entrambi i plot si possono notare intersezioni tra lo strike costante e la volatilità implicita che aumenta col tempo, e intersezioni in cui decresce col tempo. Entrambe queste osservazioni sono corollario del fatto che la volatilità implicita è una misura della media della volatilità istantanea oltre la durata dell'opzione, e questo mediamente porta ad effetti leviganti (smoothing).

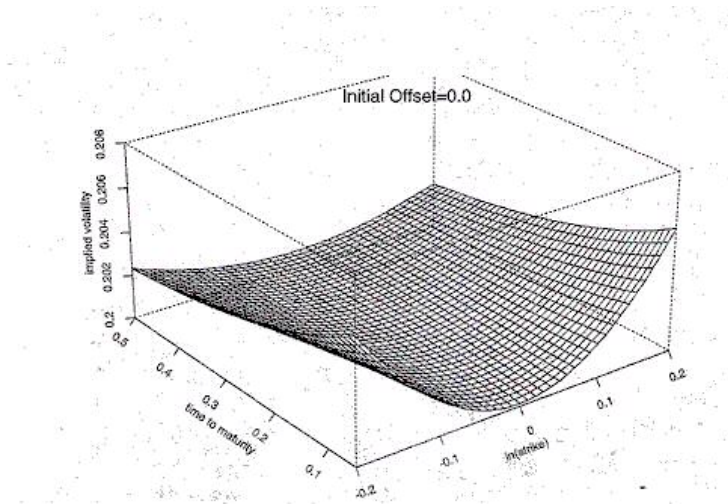


Fig. 4: Struttura della volatilità: volatilità implicita come funzione del logaritmo dello strike e del tempo T dell'opzione, con valore iniziale dell'offset $G_0 = 0.0$.

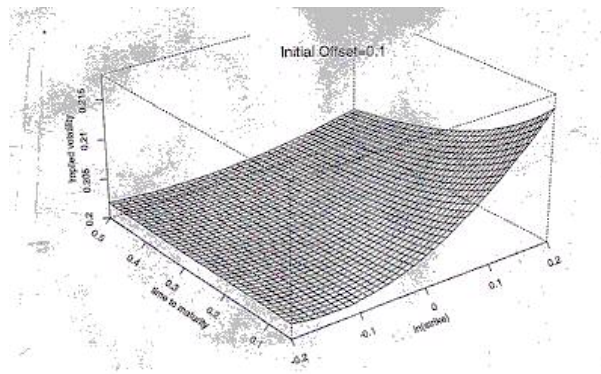


Fig. 5: Struttura della volatilità: volatilità implicita come funzione del logaritmo dello strike e del tempo T dell'opzione, con valore iniziale dell'offset $G_0 = 0.1$.

Per completare la discussione di questo esempio numerico si considera la sensibilità della volatilità implicita per cambiamenti dei parametri del modello.

C'è una forte similarità qualitativa tra la famiglia degli smiles per ogni paio di parametri (ε, λ) come illustrato in figura 6 e 7. La scelta dei parametri è vista colpire la grandezza degli smiles; la taglia dello smile è direttamente correlata a ε ed è inversamente correlata con λ . La prima di queste relazioni è immediata per come è formalizzata la volatilità; la spiegazione della seconda osservazione è che ampi valori di λ sono associati a volatilità più basse. Tipicamente questo farà sì che il valore della funzione di offset G_t decresca, conseguentemente riducendo la volatilità per

come è stata definita all'inizio del capitolo. Quindi la natura della dipendenza in entrambi i parametri ε e λ deriva dalla particolare specificazione dinamica per il processo dei prezzi.

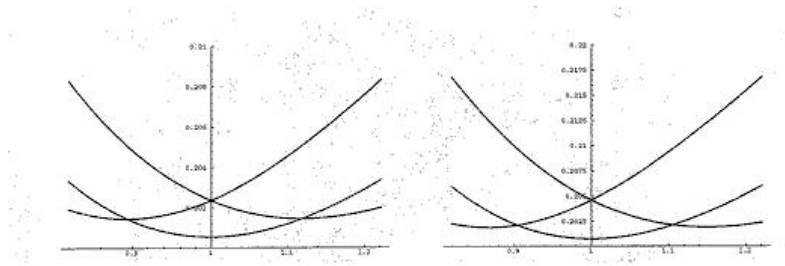


Fig. 6: Sezione di smiles : in ogni plot compaiono 3 funzioni di volatilità con smiles poiché si considerano tre differenti valori iniziali dell'offset: $G_0 = -0.1, 0, 0.1$, il parametro ε assume valore 5 in entrambi i casi mentre λ assume valore 5 per il grafico a sinistra e 1 per quello a destra.

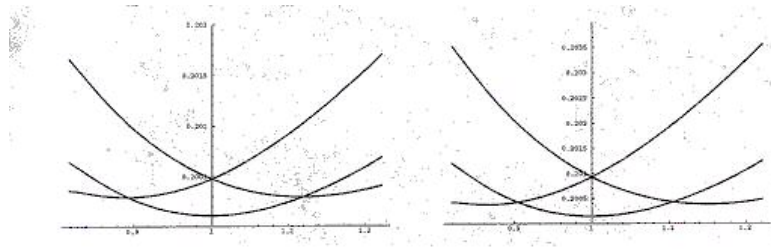


Fig. 7: Sezione di smiles : in ogni plot compaiono 3 funzioni di volatilità con smiles poiché si considerano tre differenti valori iniziali dell'offset: $G_0 = -0.1, 0, 0.1$, il parametro ε assume valore 1 in entrambi i casi mentre λ assume ε valore 5 per il grafico a sinistra e 1 per quello a destra.

Infine si fanno alcune osservazioni riguardanti la forma dell'option price $V \equiv V(Z, U, T)$. Se $\sigma(G)$ è una funzione regolare poi è facile verificare attraverso l'equazione differenziale parziale (24) e la condizione di bond (25) che:

$$V(z, u, t) = e^z V(-z, -u, t) + (e^z - 1).$$

Questa proprietà è condivisa con la formula di Black-Scholes $V_{BS}(z, t)$:

$$V_{BS}(z, t) = e^z V_{BS}(-z, t) + (e^z - 1)$$

dove V_{BS} è considerata come una funzione del corrente logaritmo dei prezzi z , e del tempo t , assumendo lo strike pari a 1.

6. CONCLUSIONI

L'analisi svolta su una serie di formule, modelli e ideologie che si sono sviluppate a partire dal 1973 è stata fatta al fine di far un excursus su quello che è stato analizzato negli anni per trovare una buona soluzione, in ambito finanziario, per la prezzatura di opzioni call europee. Importante è la data 1973 perché è l'anno in cui si sviluppò ad opera di Black-Scholes una formulazione che è stata definita innovativa e di facile utilizzo, ma come in tutte le cose c'è stato uno studio approfondito su codesta formula che ha portato a svariate critiche, modifiche e nuovi assunti.

Ciò che si è voluto sottolineare è stato il rifiuto dell'assunzione di una volatilità costante.

A partire da questo, inizialmente si sono viste due differenti tipologie di modelli che sono stati introdotti assumendo che, diversamente da Black-Scholes, la volatilità fosse non-costante. Il primo filone di modelli vede una volatilità dipendere da livelli passati, mentre il secondo vede la volatilità seguire un secondo moto browniano indipendente dal primo. I due nuovi modelli sono molto differenti tra loro, ma ugualmente entrambi sono ancora incompleti per una spiegazione accurata di ciò che comporta una stima ed una spiegazione del mercato dei prezzi delle opzioni.

Il modello di Cox e Ross, modello di elasticità costante della varianza, presenta la varianza come funzione dello stock price, e rientra nel caso di modelli livello dipendente; Beckers (1980) osservando la classe dei modelli CEV e comparando la loro soluzione con la soluzione ottenuta con quella del modello log-normale di Black-Scholes notò come i prezzi d'opzione per il CEV erano sicuramente più efficienti rispetto a quelli ottenuti con la formula di Black-Scholes ed inoltre rilevò una relazione inversa tra il livello dello stock price e la sua volatilità.

Il modello d'opzione composta proposto da Geske invece considera sempre una varianza non-costante e livello-dipendente, ma differentemente dal modello CEV in questo si ha una dipendenza nel valore dell'impresa; ed anche in questo caso è stata evidenziata una relazione inversa tra la varianza e lo stock price.

Comunque si può concludere che i modelli con volatilità livello-dipendete di Cox e Ross e Geske sono incapaci di spiegare cambiamenti della volatilità oltre il tempo in quanto vincolata dall'andamento di altre variabili presenti nei modelli, dello stock price per uno e del valore d'impresa e conseguentemente anche il debito per l'altro.

Per i modelli con volatilità spiegata da un secondo moto browniano si è visto che Scott ha elaborato un modello econometrico per la stima dei parametri del processo diffusivo di tipo mean-reverting che descrive la legge temporale della volatilità. L'introduzione di una varianza random introduce alcune complicazioni e questo ha portato a considerare un portafoglio con 2 opzioni call e lo stock con differenti scadenze per contrastare le 2 fonti d'incertezza presenti nel modello che fanno sì che non sia possibile costruire strategie d'investimento non rischiose.

Wiggins (1997) a differenza dei modelli proposti da Cox, Geske e Rubinstein suggerì che la volatilità non necessariamente dovesse essere perfettamente correlata con lo stock price. L'esistenza di una correlazione negativa tra l'asset e la volatilità portò a rilevare che la volatilità implicita poteva essere più alta per opzioni in-the-money che per opzioni out-of-the-money.

Poiché le opzioni possono essere usate per coprirsi da rischi contro gli shocks della varianza, i loro valori dipenderanno da movimenti intertemporali di copertura. Se i movimenti della volatilità sono correlati negativamente con gli stock returns per valori dell'opzione call out-of-the-money decrescono in relazione a valori in-the-

money e aumentano se i movimenti della volatilità sono correlati positivamente con gli stock returns.

Sia Wiggins che Scott trovarono, come visto precedentemente nei modelli livello dipendenti, che prezzi d'opzione ottenuti da modelli con volatilità stocastica provvedono ad un adattamento superiore ai prezzi di mercato se comparati con prezzi d'opzione ottenuti da modelli con volatilità costante, ma tutto ciò non era ancora sufficiente.

A tal proposito lo studio più recente che è stato sviluppato è quello ad opera di Hobson e Rogers che hanno apportato delle migliorie pur mantenendo alcune caratteristiche di entrambi i modelli precedenti. Le migliorie che sono state cercate sono motivate da un desiderio di avere un modello che soddisfa a 2 criteri: in primo luogo la volatilità istantanea dev'essere correlata con la recente storia del processo dei prezzi e in secondo luogo attraverso il meccanismo di replicazione delle opzioni ci saranno prezzi del claim preferiti-indipendenti.

Rispetto a modelli visti in passato il nuovo modello non è governato da un secondo moto browniano, ed è stata introdotta una nuova funzione detta di offset che esprime la dipendenza del prezzo dell'opzione dal passato più recente. La nuova classe di modelli completi con volatilità stocastica propone una connessione casuale tra i movimenti dell'asset price corrente e la volatilità futura. In contrasto con i modelli di volatilità livello-dipendenti, la volatilità dipende unicamente dal processo di asset price. La classe dei modelli di volatilità livello-dipendente può essere visto come un caso speciale della nuova classe di modelli completi con volatilità stocastica.

Smiles e skews nella volatilità implicita delle opzioni sono fenomeni comuni, come è stato rilevato nell'esempio. In particolare si è potuto vedere che c'è uno skew negativo se e solo se l'asset price è sotto il suo recente valor medio.

Ciascun modello di volatilità ha la potenza di descrivere e spiegare entrambi: gli smiles nella volatilità implicita e i cambiamenti dinamici di questi smiles oltre il tempo.

7. BIBLIOGRAFIA

1. Baxter, M. and Rennie, A. (1998) *Financial calculus*, Cambridge, University press, pp. 63-91.
2. Beckers, S. (1980) “The Costant Elasticity of Variance Model and its implications for option pricing”, *The Journal of Finance*, 35, 3, pp. 661-673.
3. Black, F. and Scholes, M. (1974) “ The pricing of options and corporate liabilitie”, *Journal of Political Economy*, 87, pp. 637-659.
4. Duan, J. C. (1995) “The Garch option pricing model”, *Mathematical Finance*, 5, 1, pp. 13-32.
5. Geske, R. (1979) “The valuation of compound options”, *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 63-81.
6. Hobson, D. G. and Rogers, L. C. G. (1998) “Complete Models with Stochastic Volatility”, *Mathematical Finance*, 8, pp. 27-48.
7. Hull, J. And White, A. (1988) “The pricing of options on assets with stochastic volatilities”, *Journal of Finance*, 42, pp. 281-300.
8. Johnson, H. and Shanno, D. (1987) “Option pricing when the variance is changing”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, pp. 143-151.
9. Rogers, L.C.G. and Williams, D. (1987) *Diffusions, Markov processes, and martingales*, Vol. 2, Cambridge, Mathematical Library, pp.128-136.
10. Rubinstein, M. (1983) “Displaced diffusion option pricing”, *The Journal of Finance*, 38, 1, pp. 213-217.
11. Scott, L.O. (1987) “Option pricing when the variance changes randomly: theory, estimation and an application”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, pp. 419-438.

12. Stein, E. M. and Stein, J. C. (1991) "Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach", *Review of Financial studies*, 4, pp. 727-752.
13. Wiggins, J. B. (1987) "Option values under stochastic volatility", *Journal of Financial Economics*, 19, pp. 351-372.