

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Lifting e generazione di disuguaglianze
per il politopo delle matrici “Consecutive Ones”**

Lifted inequalities for the polytope of Consecutive-Ones matrices

Candidato:

Francesco Zaccaria

Matricola 1080800

Relatore:

Prof. Luigi De Giovanni

Indice

Sommario	1
1 Introduzione e presentazione del problema	5
1.1 Problemi di sequenziamento	5
1.1.1 Minimization of Open Stacks Problem (MOSP)	6
1.1.2 Gate Matrix Layout Problem (GMLP)	7
1.2 Formulazioni e matrici “Consecutive Ones”	8
2 Elementi di Programmazione Lineare e strumenti	13
2.1 Cenni sui grafi	13
2.2 Le matrici “Consecutive Ones”	16
2.3 Cenni di geometria della programmazione lineare	19
2.4 Lifting	23
2.4.1 Interpretazione geometrica del lifting nello spazio polare	25
2.4.2 Ordinamenti delle variabili nel lifting sequenziale	28
2.5 PORTA e analisi delle faccette di una sezione	30
3 Aspetti poliedrali e procedure	33
3.1 Teorema di struttura per le matrici C1P	34
3.1.1 Proprietà degli uni consecutivi su un grafo	34
3.1.2 Minori di Tucker e teorema di struttura	36
3.1.3 Una prima formulazione per il vincolo C1P	39
3.2 Il politopo degli uni consecutivi	41
3.2.1 Proprietà del politopo $P_{C1}^{m,n}$	41
3.2.2 Formulazione con faccette per il vincolo C1P	43
3.3 Procedure	46
4 Lifting e generazione di faccette	57
4.1 Lifting per il politopo C1P	58
4.1.1 Specializzazione del lifting sequenziale al politopo C1P	58
4.1.2 Esempio: il minore M_{IV}	60
4.2 Sezioni di partenza per faccette note	67
4.2.1 Condizioni algebriche generali	68

4.2.2	Esempio: la disuguaglianza VI	73
5	Lifting e procedure	77
5.1	Proprietà dei coefficienti del lifting	78
5.2	Lifting e configurazioni iniziali	80
5.2.1	Classificazione delle configurazioni non C1P	80
5.2.2	Configurazioni e disuguaglianze di partenza	87
5.3	Configurazioni e sequenze di lifting	90
5.3.1	La configurazione di partenza I_k	90
5.3.2	Le configurazioni di partenza $\overline{III}_{s,d,l}$ e $\overline{IV}_{s,d,l}$	98
5.3.3	Le configurazioni di partenza $\overline{V}_{u,f,g,l}$ e $VI_{u,f,g,l}$	102
5.3.4	Le configurazioni di partenza $VII_{l,s,u,f,g}$ e $VIII_{l,s,d,u,f,g}$	106
6	Applicazione ed estensioni del lifting	111
6.1	Sequenze di lifting per la Procedura 4 sul minore M_{IV}	112
6.2	Le faccette del politopo $P_{C1}^{4,4}$	115
7	Conclusioni e sviluppi futuri	127
	Riferimenti bibliografici	131
	Ringraziamenti	135

Sommario

Lo studio sviluppato in questa tesi muove dall'esigenza di dare una formulazione matematica ad alcuni problemi di sequenziamento ottimale che emergono in diversi ambiti applicativi, quali ad esempio la pianificazione della produzione, l'industria del taglio e la progettazione di circuiti elettronici. In tali situazioni si presenta spesso l'esigenza di trovare una permutazione ottimale di schemi, quali ad esempio ordini di un prodotto, schemi di taglio, porte in un circuito elettronico, al fine di minimizzare un'opportuna funzione obiettivo di costo: tali problemi vengono denominati *pattern sequencing problems*.

Nel Capitolo 1 prenderemo in considerazione due importanti esempi di problemi di sequenziamento: il *Minimization of Open Stacks Problem (MOSP)* e il *Gate Matrix Layout Problem (GMLP)*. Il MOSP emerge nell'ambito dell'industria del taglio, nella quale si verifica di dover tagliare dei grandi pannelli di materiale primo (quali legno, vetro, carta) secondo degli schemi (*pattern*) predefiniti. Una volta eseguito il taglio, i vari pezzi vengono impilati in pile (*stack*) che raccolgono tutti gli elementi dello stesso tipo ricavati dai diversi pannelli. Si noti che, una volta stabilita la sequenza di taglio, pezzi dello stesso tipo possono essere presenti in pannelli tagliati in momenti diversi. Le pile, per evitare costi di spostamento in magazzino, vengono posizionate nei pressi della zona di taglio fino al termine del processo, o almeno fino a che l'ultimo pezzo dello stesso tipo sia stato ricavato dai pannelli. Spesso lo spazio di lavoro a disposizione risulta limitato, e di conseguenza sorge la necessità di minimizzare, per motivi logistici o di sicurezza, o per evitare possibili danni ai pezzi prodotti, il numero di pile simultaneamente aperte. Oppure, nel caso in cui il numero di pile utilizzabili abbia un limite superiore stabilito a priori dal layout degli stabilimenti, si cerca di scegliere una sequenza di schemi di taglio che minimizzi il tempo totale di presenza delle pile nei pressi delle macchine, cercando di ridurre l'intervallo di tempo definito dai momenti in cui il primo e l'ultimo pezzo di un certo tipo vengono prodotti.

Il secondo problema descritto, quello denominato GMLP, è equivalente al MOSP e si presenta nella progettazione di circuiti elettronici attraverso la tecnologia VLSI (Very Large Scale Integration), la quale prevede una elevata integrazione di transistor ed altri elementi circuitali all'interno di un singolo chip. In molti casi, la realizzazione di un circuito

con questa tecnologia prevede di connettere fra loro varie porte (*gates*) di struttura predefinita contenenti un certo numero di transistor. Per collegare fra di loro i transistor delle porte si utilizzano delle reti (*nets*) di filo metallico, disposto perpendicolarmente alle porte stesse in maniera da creare circuiti logici sulle colonne (le porte) e le righe (le reti) del circuito. Anche in questo caso l'obiettivo è quello di minimizzare una funzione di costo, nello specifico il numero totale di unità di filo metallico utilizzate per la effettuare i collegamenti oppure, nel caso in cui tali unità siano soggette ad upper bound per ogni riga, il numero di reti parallele che si sovrappongono nella connessione di ogni porta: le reti parallele, infatti, non possono essere sovrapposte e il loro numero definisce la superficie necessaria, e quindi il livello di integrazione.

I due problemi presentati possono essere modellati utilizzando variabili decisionali binarie di una matrice, associata alla configurazione scelta per i vari pattern, e formulati in termini di programmazione lineare intera. In letteratura, si è osservato come la definizione dei problemi possa essere messa in relazione con la proprietà dei pattern di ammettere una permutazione la quale renda consecutivi gli elementi presenti negli schemi: ad esempio, la definizione di una sequenza di schemi di taglio che permette di produrre ciascun tipo pezzi senza interruzioni fa in modo che le relative pile rimangano aperte per il minimo intervallo di tempo. In termini matriciali ciò si traduce nella definizione di matrici binarie che godano della cosiddetta “*proprietà degli uni consecutivi*” (o siano C1P). Una matrice binaria si dice C1P se esiste una permutazione delle sue colonne tale che gli uni di ogni riga appaiano consecutivamente. La relazione fra questa proprietà e la formulazione dei problemi di sequenziamento fornisce un'importante motivazione per cercare di dare una caratterizzazione del vincolo “la matrice X è C1P” in termini di disuguaglianze lineari: individuare opportune disequazioni che permettano di definire lo spazio delle matrici binarie che verificano la proprietà degli uni consecutivi permette infatti di ottenere formulazioni stringenti (e quindi potenzialmente efficienti dal punto di vista computazionale) dell'insieme ammissibile dei problemi MOSP e GMLP.

A tale scopo forniremo nel Capitolo 2 una serie di richiami ad elementi di teoria dei grafi che risulteranno utili nel seguito della trattazione: in particolare si introdurrà il concetto di *tripla asteroidale* di vertici in un grafo. La definizione di tripla asteroidale viene sfruttata in letteratura per fornire la principale caratterizzazione di una classe di grafi detti *grafi intervallo*, ovvero i grafi che rappresentano le intersezioni di un insieme di intervalli nella retta reale. Tali grafi sono correlati alla proprietà degli uni consecutivi, e questo legame è stato sfruttato da Tucker in [26] per fornire una caratterizzazione generale delle matrici C1P, la quale fa uso del concetto di tripla asteroidale escludendone la presenza in grafi bipartiti associati in maniera opportuna alle matrici binarie in esame. Nel Capitolo 2 verranno poi richiamati alcuni fondamentali risultati di geo-

metria della programmazione lineare, e soprattutto verrà presentato lo strumento principale di questa tesi: la nozione di *lifting* di una disuguaglianza lineare, valida per un insieme 0-1. L'iterazione dell'operazione di *lifting* permette di definire un algoritmo di *lifting sequenziale* il quale, a partire da disuguaglianze valide per particolari sezioni dell'insieme 0-1 in oggetto, restituisce disuguaglianze valide per l'intero insieme binario. Infine verranno date delle informazioni riguardo al software PORTA, che verrà utilizzato per analizzare le disequazioni oggetto della procedura di *lifting* definita in questa tesi.

Nel Capitolo 3 si seguirà inizialmente l'esposizione di Tucker in [26], nella quale si dimostra come, sfruttando la caratterizzazione che lega matrici C1P a grafi bipartiti privi di triple asteroidali in uno dei due sottoinsiemi di vertici, sia possibile ottenere un teorema per la caratterizzazione strutturale di tali grafi. Tale teorema strutturale si può poi convertire nel suo analogo matriciale il quale descrive le matrici C1P vietandone particolari minori, chiamati *minori di Tucker*. Si passerà poi a studiare gli aspetti poliedrali dell'involuppo convesso generato dalle matrici binarie che godono della proprietà degli uni consecutivi, seguendo il lavoro di Oswald e Reinelt in [19]. Tale approccio permetterà di ottenere una formulazione per il politopo C1P, ottenendo in particolar modo una descrizione tramite disuguaglianze definenti faccette. Le disequazioni ottenute in [19] sono state studiate prima da Brentegani in [4] e poi da Festa in [11] al fine di fornirne una genesi grafica, ossia delle procedure basate sui grafi associati alle matrici binarie. Anche queste procedure, che hanno permesso di derivare ulteriori classi di faccette per il politopo C1P, saranno descritte nel Capitolo 3. In particolare si analizzeranno due procedure le quali generano le disuguaglianze cercando di escludere una o molteplici triple asteroidali nel grafo bipartito di partenza.

Nel Capitolo 4 si introduce il primo contributo di questa tesi: traendo spunto dalle procedure per la definizione di disuguaglianze valide per il politopo C1P, si individueranno delle caratteristiche comuni fra queste ultime e l'algoritmo di *lifting sequenziale*. Si comincerà specializzando il processo di *lifting* al caso dell'insieme binario delle matrici C1P: in particolare si osserverà come il calcolo dei nuovi coefficienti nelle iterazioni della sequenza possa essere interpretato in maniera grafica. Eseguendo nei dettagli il *lifting sequenziale* su di un esempio specifico si cercheranno di analizzare le due possibili scelte che determinano le disuguaglianze risultanti dall'algoritmo, ovvero la disuguaglianza che inizializza la sequenza dei *lifting*, e l'ordine delle variabili secondo il quale eseguire le varie iterazioni. Ci si concentrerà inizialmente sul primo dei due problemi, al fine di individuare delle disuguaglianze definenti faccette per sezioni di partenza: a partire da tali disequazioni le proprietà della procedura di *lifting* garantiscono di ottenere delle faccette per il politopo delle matrici consecutive ones. In particolare, analizzeremo il caso in cui le disuguaglianze di partenza per il *lifting* derivano da considerazioni gra-

fiche su particolari configurazioni di matrici non C1P, scelte in modo che i coefficienti delle disuguaglianze assumano coefficienti di valore unitario nella sezione considerata.

In seguito al Capitolo 5, che costituisce il principale contributo originale della tesi, si passerà ad analizzare, oltre alla configurazione grafica di partenza, anche la scelta dell'ordinamento con il quale eseguire la sequenza di lifting sulle variabili della disequazione. Innanzitutto si restringeranno a priori i possibili valori che possono assumere i coefficienti fissati nelle disuguaglianze dal lifting sequenziale, analizzando gli aspetti grafici dell'algoritmo sul politopo C1P e il ruolo degli ordinamenti nella sequenza di lifting. Si giungerà a questo punto al risultato centrale della tesi: traendo ispirazione dalle caratteristiche comuni fra lifting sequenziale e procedure note per la formulazione di disuguaglianze valide per le matrici C1P, si dimostrerà come, sotto opportune condizioni, questi procedimenti sono esattamente equivalenti ad un lifting. A tale scopo, si classificheranno in maniera generale tutte le possibili configurazioni di tre cammini che rendono una tripla di nodi colonna asteroidale in un grafo bipartito, riottenendo fra i casi particolari le generalizzazioni dei minori di Tucker. Si procederà quindi ad analizzare separatamente per ogni classe di configurazione iniziale i risultati del lifting sequenziale, studiandone la *versione grafica*: in questo modo si otterranno le condizioni da imporre affinché le procedure coincidano con un lifting. L'importanza teorica e applicativa di questo risultato risiede nel fatto che, nei casi in cui una tale identificazione è possibile, le procedure erediteranno le proprietà generali del lifting, e in questo modo si potranno ottenere direttamente informazioni sulla validità delle disuguaglianze indotte e sulla dimensione delle facce che esse inducono per il politopo C1P.

Nel Capitolo 6 si verificheranno i risultati ottenuti per lifting e procedure su una particolare configurazione iniziale, esplicitando gli ordinamenti utilizzati e controllandone le condizioni. Traendo spunto dall'analisi eseguita nel corso della trattazione, si cercherà di estendere l'applicazione del lifting anche a disuguaglianze iniziali di tipo diverso da quelle correlate a configurazioni non C1P nella maniera sopra accennata (ad esempio non necessariamente a coefficienti unitari). In particolare, esamineremo tutte le classi di faccette che descrivono il problema C1P per la dimensione 4×4 . Lo studio in questo caso utilizzerà sia i risultati dimostrati nella trattazione riguardo alle proprietà delle disuguaglianze di partenza per il lifting, sia strumenti computazionali come un codice C++ che generi opportune sezioni iniziali ed il software PORTA per lo studio delle dimensioni delle facce ottenute.

L'estensione trattata al Capitolo 6 fornirà degli spunti per alcuni possibili sviluppi futuri, suggeriti al Capitolo 7.

Capitolo 1

Introduzione e presentazione del problema

In questo capitolo presenteremo due problemi applicativi che emergono nell'ambito della pianificazione della produzione, che possono essere formulati in maniera equivalente fra di loro traducendoli in un problema di sequenziamento. Nell'ambito dell'industria del taglio si definisce il *Minimization of Open Stacks Problem (MOSP)* come il problema della scelta della sequenza di produzione ottimale di schemi di taglio definiti, in maniera da minimizzare lo spazio occupato nei pressi dell'area di lavoro; nella progettazione dei circuiti elettronici si riscontra invece un problema con analoghe caratteristiche detto *Gate Matrix Layout Problem (GMLP)*, il quale consiste nella connessione di porzioni di circuito predefinite in maniera da minimizzare la lunghezza delle reti di connessione.

Vedremo come questi due problemi, fra loro equivalenti, siano stati in letteratura formalizzati in termini di programmazione lineare intera. Inoltre osserveremo come la loro formulazione sia connessa alla *proprietà degli uni consecutivi*, o C1P, sulle matrici binarie, ovvero la possibilità di ottenere dalla permutazione di colonne sequenze di uni consecutivi su ogni riga. Tale legame fornisce una motivazione applicativa per lo studio della proprietà C1P, che verrà svolto in questa tesi.

1.1 Problemi di sequenziamento

In molti ambiti produttivi, come ad esempio nella pianificazione della produzione o nella progettazione di circuiti elettrici, emerge il problema determinare una permutazione di schemi (*pattern*), che possono rappresentare ad esempio ordinamenti di prodotti o disposizioni di porte in un circuito, in modo da minimizzare una funzione obiettivo di costo. Questo genere di problemi di sequenziamento vengono denominati *pattern sequencing problems*

In questa classe di problemi diamo una breve descrizione di due di essi, che risultano fra loro equivalenti, la cui formulazione ispira la scelta di matrici binarie aventi una particolare proprietà detta degli uni consecutivi, che studieremo nel seguito della tesi.

1.1.1 Minimization of Open Stacks Problem (MOSP)

Il problema Minimization of Open Stacks Problem (MOSP) si presenta nell'ambito dell'industria del taglio (*cutting stock environment*), nella quale oggetti diversi ottenuti da schemi di taglio predefiniti (*pattern*), come ad esempio pannelli di legno, tubi di acciaio etc., vengono impilati secondo pile (*stack*). Ogni stack viene aperto non appena viene prodotto un nuovo oggetto e rimane nei pressi della macchina durante tutto il processo di taglio di quel tipo di oggetto. Infine lo stack viene rimosso al fine di liberare lo spazio per la pila di un nuovo tipo di oggetto.

Un primo problema che sorge è spesso la limitazione dello spazio di lavoro intorno alla macchina, abbinata a costi di spostamento in magazzino del materiale: è dunque conveniente minimizzare il numero di pile simultaneamente aperte, denominato in letteratura come *Maximum number of Open Stacks (MOS)*.

Si può anche presentare il caso in cui il numero di stack utilizzabili abbia a priori un limite per motivi logistici: in tal caso è vantaggioso minimizzare il tempo totale di apertura delle pile, chiamato *Time of Open Stacks (TOS)*, con il vincolo di mantenere il massimo numero di pile simultaneamente aperte sempre al di sotto del limite imposto per tutta la durata del processo di taglio.

Entrambi questi problemi si possono risolvere trovando una sequenza ottimale per processare i vari pattern; è dunque possibile definire il seguente problema.

Problema 1 (Minimization of Open Stacks Problem (MOSP)). Si definisce Minimization of Open Stacks Problem (MOSP) il problema di trovare una permutazione di pattern che minimizzi il massimo numero di pile simultaneamente aperte durante il processo di taglio (MOS).

Si può anche formulare una variante del Problema 1 nella quale si cerchi una permutazione dei pattern che minimizzi il TOS, con un eventuale vincolo sul MOS; la scelta di minimizzare il MOS oppure il TOS non è però equivalente, come dimostrato in [16].

Il Problema 1 può essere applicato in vari campi e presenta una serie di formulazioni equivalenti, tra le quali descriviamo di seguito il *Gate Matrix Layout Problem*, che emerge nel campo del *VLSI Circuit Design*.

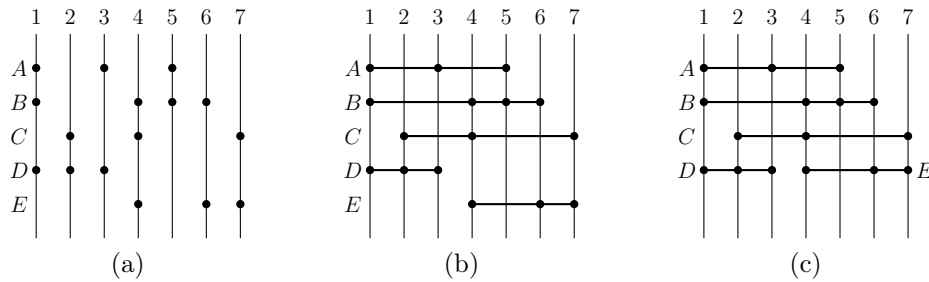


Figura 1.1: Esempio di gate matrix con 7 porte e 5 reti: posizione dei transistor sulle porte (a), connessione dei transistor tramite fili metallici (b) e tracce necessarie (c).

1.1.2 Gate Matrix Layout Problem (GMLP)

Nella progettazione di alcune tipologie di circuiti elettronici con la tecnologia *VLSI* [27] i pattern sono costituiti da sequenze di porte, o gates, da connettere per formare circuiti, con un'elevata integrazione di transistor ed elementi circuitali in ogni singolo chip. Il problema *Gate Matrix Layout Problem (GMLP)* consiste nel cercare una permutazione della disposizione delle porte che minimizzi i costi di connessione, sotto restrizioni sull'area del circuito.

Più specificatamente, il problema consiste nel realizzare un circuito elettronico VLSI con n porte (*gates*) da connettere avendo a disposizione m reti (*nets*): si possono descrivere le porte come fili verticali e le reti come fili orizzontali. Per realizzare il circuito sono richieste delle connessioni, ottenute collegando tra loro dei transistor (situati all'intersezione fra fili verticali e orizzontali) che siano allineati orizzontalmente, tramite dei fili metallici. Un esempio di questa situazione, tratto da [7], è illustrato in Figura 1.1: in questa istanza si hanno sette porte da mettere in comunicazione attraverso cinque reti, le quali collegano i transistor evidenziati agli incroci. Per eseguire il collegamento può risultare necessario intersecare altre porte prive di transistor nella rete: tale esigenza dipende dalla sequenza scelta per le porte stesse.

In questo contesto un primo obiettivo che si vuole ottenere è quello di minimizzare la lunghezza totale del filo metallico utilizzato per collegare i transistor, in modo da ridurre il costo di connessione: tale funzione obiettivo è equivalente al TOS precedentemente introdotto per il problema MOSP. Un altro aspetto applicativo da tenere in considerazione è il fatto che, dopo aver collegato i transistor, si hanno delle sovrapposizioni dei fili su ciascuna porta: il massimo numero di tali sovrapposizioni è detto il numero di tracce necessarie a connettere tutto il circuito. Al fine di limitare l'area del circuito, per motivi di miniaturizzazione, si considera allora come vincolo un upper bound al numero di tracce necessarie, la quale è equivalente al MOS introdotto nel Problema 1.

Anche in questo problema, come nel MOSP, il valore della funzione

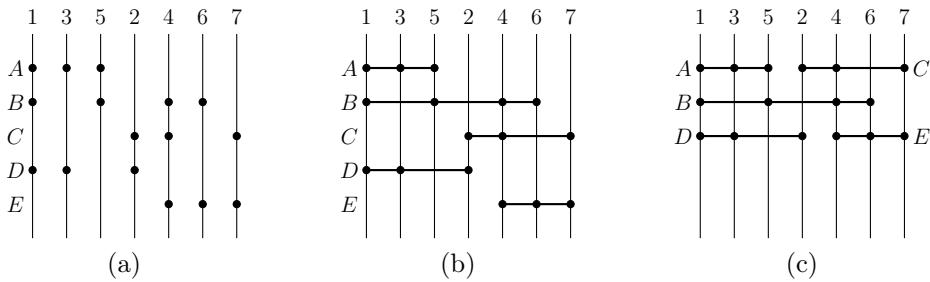


Figura 1.2: Configurazione gate matrix ottenuta dalla sequenza di porte (1, 3, 5, 2, 4, 6, 7), per la quale sono sufficienti 15 unità di filo e 3 tracce, e che quindi migliora quella in Figura 1.1.

obiettivo e la validità dei vincoli dipendono dalla scelta di una sequenza di pattern, in questo caso rappresentati dalle porte. In Figura 1.2, tratta da [7], è illustrata una configurazione di gate matrix con una sequenza che rende TOS e MOS rispettivamente pari a 15 e 3, migliore dunque di quella in Figura 1.1 che invece restituisce due valori superiori, rispettivamente 19 e 4.

Definiamo allora il problema come segue.

Problema 2 (Gate Matrix Layout Problem (GMLP)). Si definisce Gate Matrix Layout Problem (GMLP) il problema di trovare una permutazione di n porte in una configurazione gate matrix che minimizzi il costo totale di connessione (TOS), assicurando che il numero di tracce richieste (MOS) non sia maggiore di una data soglia, determinata dai vincoli sull'area del circuito.

Anche in questo caso come nel problema MOSP la minimizzazione del MOS, che si potrebbe volere per motivi di efficienza, non è equivalente a quella del TOS [16].

Possiamo invece stabilire l'equivalenza del Problema 2 GMLP con la variante del MOSP definita in precedenza, avente come funzione obiettivo il TOS e un vincolo sul MOS, facendo corrispondere le porte agli schemi di taglio, le reti alle tipologie di pezzi da ottenere e i fili all'apertura delle pile relative a ciascun pezzo. Come abbiamo visto si ottiene che il TOS corrisponde rispettivamente nel MOSP al tempo totale in cui le varie pile rimangono aperte e nel GMLP alla lunghezza totale del filo, mentre il MOS corrisponde rispettivamente al massimo numero di pile simultaneamente aperte durante l'intero processo di taglio o al numero di tracce necessarie.

1.2 Formulazioni e matrici “Consecutive Ones”

Una volta definiti i Problemi 1 e 2 si vuole darne una formulazione in termini di programmazione intera. In letteratura un primo approccio viene

fornito da Baptiste in [1], utilizzando variabili decisionali binarie e con varie condizioni lineari che traducono i vincoli definiti per il problema. Nel seguito presenteremo invece una formulazione alternativa introdotta da De Giovanni *et al.* in [7], la quale permette di non considerare esplicitamente la permutazione degli schemi di taglio grazie all'utilizzo di un particolare vincolo sulle matrici binarie, basato sulla proprietà degli uni consecutivi.

Rappresentiamo innanzitutto un'istanza del MOSP con m oggetti da tagliare (o equivalentemente reti per il GMLP) e n schemi di taglio (o equivalentemente porte per il GMLP) mediante una matrice $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ detta *production matrix*, costituita da m righe associate agli oggetti e n colonne associate ai pattern di taglio, e con $A(i, j) = 1$ se e solo se lo schema di taglio j contiene l'oggetto i . Una sequenza degli n pattern può essere rappresentata dalla permutazione $\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, dove $\phi(j)$ rappresenta l'ordine dello schema di taglio nel processo (o equivalentemente la posizione della porta j nella configurazione per il GMLP). A partire dalla production matrix A si costruisce quindi la cosiddetta *stack matrix* \tilde{A}_ϕ , permutando le colonne di A secondo l'ordine dato da ϕ ottenendo la matrice A_ϕ e sostituendo poi ogni 0 di A_ϕ che si trovi fra due 1 nella stessa riga con un entrata 1. Con tale costruzione si ha allora $\tilde{A}_\phi(i, j) = 1$ se e solo se la pila relativa all'oggetto i è aperta durante il taglio dello schema j nell'ordine ϕ (o equivalentemente il filo della rete i interseca la porta j con la configurazione ϕ).

Come esempio si ha che la production matrix associata alla gate matrix in Figura 1.1 è

$$A = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

e con la sequenza $\phi_1 := (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ si ha

$$A_{\phi_1} = A, \quad \tilde{A}_{\phi_1} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{matrix}$$

mentre con la sequenza $\phi_2 := (1, 3, 5, 2, 4, 6, 7)$, illustrata in Figura 1.2,

si ha

$$A_{\phi_2} = \begin{matrix} & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 7 \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \tilde{A}_{\phi_2} = \begin{matrix} & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 7 \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

A questo punto possiamo formalizzare le funzioni obiettivo del problema. Per quanto riguarda il TOS si tratta, ricordando il problema GMLP, del numero totale di unità di filo utilizzate per connettere le porte nel circuito; poiché il numero di unità di filo necessarie per ogni rete i è rappresentato nella stack matrix dal numero di uni presenti nell' i -esima riga di \tilde{A}_ϕ meno uno, considerando tutte le m reti si ha:

$$TOS_\phi := \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{A}_\phi(i, j) \right) - m.$$

Analogamente il MOS, nel problema GMLP, è dato dal numero di tracce necessarie, rappresentato nella stack matrix come massimo numero di uni che appaiono in ciascuna colonna di \tilde{A}_ϕ , da cui:

$$MOS_\phi := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m \tilde{A}_\phi(i, j).$$

Nell'esempio in Figura 1.1 con la sequenza ϕ_1 risulta allora

$$TOS_{\phi_1} = 19, \quad MOS_{\phi_1} = 4,$$

mentre nell'esempio in Figura 1.2 con la sequenza ϕ_2 si hanno i valori migliori

$$TOS_{\phi_2} = 15, \quad MOS_{\phi_2} = 3.$$

Infine definiamo il parametro $\lambda \in \mathbb{Z}_{>0}$ come upper bound sul MOS, che nel problema GMLP rappresenta il massimo numero tracce da utilizzare, da non superare al fine di non eccedere i limiti sulla dimensione del circuito.

Osservazione 1.2.1. Notiamo a questo punto che le funzioni obiettivo dei Problemi 1 e 2 sono influenzate da come la permutazione ϕ scelta per i pattern raggruppa le entrate pari a 1 in ciascuna riga: infatti nella scrittura del TOS e del MOS abbiamo utilizzato la definizione della stack matrix \tilde{A}_ϕ , la quale trasforma alcune delle entrate 0 in modo da avere sequenze di uni consecutivi su ogni riga.

Dall'osservazione precedente si ha che per una possibile formulazione dei problemi di MOSP e GMLP è utile rimpiazzare la stack matrix con la seguente proprietà, che dovrà valere come vincolo sulle matrici binarie prese come incognite.

Definizione 1.2.2. Una matrice 0-1 X gode della *proprietà degli uni consecutivi sulle righe* (scriveremo X è C1P) se le colonne di X possono essere permutate in modo tale da ottenere una matrice C1P esatta, ovvero una matrice binaria in cui gli uni di ogni riga appaiano consecutivamente.

Possiamo allora, nelle notazioni introdotte sinora e con la nuova nozione della proprietà degli uni consecutivi, formalizzare i Problemi 1 e 2 in termini di Programmazione Lineare Intera (PLI), ottenendo le seguenti formulazioni introdotte in [7].

MOSP, formulazione PLI: dati una production matrix $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$, si chiede di risolvere:

$$\min \quad \lambda \quad (1.1)$$

$$\text{soggetto a} \quad X \text{ è C1P} \quad (1.2)$$

$$X(i, j) \geq A(i, j) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\} \quad (1.3)$$

$$\lambda \geq \sum_{i=1}^m X(i, j) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (1.4)$$

$$X \in \{0, 1\}^{m \times n} \quad (1.5)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \quad (1.6)$$

GMLP, formulazione PLI: dati una production matrix $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ e un limite superiore intero e positivo $\lambda \in \mathbb{Z}_{>0}$ al numero delle tracce disponibili, si chiede di risolvere:

$$\min \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X(i, j) - m \quad (1.7)$$

$$\text{soggetto a} \quad X \text{ è C1P} \quad (1.8)$$

$$X(i, j) \geq A(i, j) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\} \quad (1.9)$$

$$\sum_{i=1}^m X(i, j) \leq \lambda \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (1.10)$$

$$X \in \{0, 1\}^{m \times n} \quad (1.11)$$

Nel prosieguo della tesi l’obiettivo sarà allora quello di dare una formulazione del vincolo “la matrice (binaria) X è C1P”, che emerge nelle formulazioni precedenti in (1.2) e (1.8), tramite disuguaglianze lineari. Ottenendo disuguaglianze sempre più stringenti si potranno così fornire formulazioni di programmazione lineare intera sempre più strette per i problemi MOSP e GMLP, e di conseguenza più efficienti nella descrizione del politopi definiti dai vincoli (1.2)-(1.6) e (1.8)-(1.11).

12 *CAPITOLO 1. INTRODUZIONE E PRESENTAZIONE DEL PROBLEMA*

Capitolo 2

Elementi di Programmazione Lineare e strumenti

In questo capitolo riportiamo gli strumenti matematici che verranno utilizzati nel prosieguo della trattazione. Richiameremo innanzitutto alcune nozioni di teoria dei grafi, soffermandoci in particolare sui grafi bipartiti e sulla definizione di tripla asteroidale, che verrà utilizzata in seguito per dare una caratterizzazione delle matrici “consecutive ones”. Riassumeremo poi alcuni risultati presenti in letteratura riguardanti particolari tipi di grafi detti grafi intervallo e il loro legame con le triple asteroidali e la proprietà degli uni consecutivi; da tale legame si può ottenere una dimostrazione della caratterizzazione delle matrici “consecutive ones” alternativa a quella fornita da Tucker. Ricorderemo in seguito alcuni argomenti di teoria della programmazione lineare che verranno utilizzati nello studio poliedrale del problema. Definiremo quindi lo strumento centrale di programmazione lineare intera del quale faremo uso in questa tesi: il concetto di *lifting* di una disequazione lineare, di cui ricorderemo le proprietà principali, che verrà utilizzato per lo studio delle disuguaglianze valide di un politopo 0-1. Infine forniremo qualche informazione riguardo al software PORTA, che verrà utilizzato per dimostrare che alcune disuguaglianze definiscono faccette, e sul codice creato per definire sezioni del politopo delle matrici “consecutive ones”.

2.1 Cenni sui grafi

Richiamiamo innanzitutto alcune definizioni sui grafi non orientati che utilizzeremo nel seguito, tratte da [2] e [10].

Definizione 2.1.1. Un *grafo* (*non orientato*) è una coppia ordinata di insiemi, $G = (V, E)$, dove $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme finito di elementi detti *nodì* o *vertici* ed $E = \{e_1, \dots, e_m\} \subseteq V \times V$ è un insieme di coppie (non ordinate) di nodi detti *spigoli* o *archi*.

Nel prosieguo della trattazione utilizzeremo sempre grafi non orientati del tipo $G = (V, E)$, ed esprimeremo l'insieme di spigoli E attraverso una relazione simmetrica di adiacenza A definita su $V \times V$ e tale che, per $u, v \in V$, si abbia uAv se e solo se lo spigolo $(u, v) \in E$; indicheremo quindi il grafo $G = (V, E)$ con $G = (V, A)$, tramite la relazione di adiacenza.

Definizione 2.1.2. Un *grafo bipartito* è un grafo $G = (V, A)$ in cui l'insieme dei vertici V può essere partizionato in due sottoinsiemi disgiunti $V_1 \subseteq V$ e $V_2 \subseteq V$, $V = V_1 \cup V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, tali che ogni vertice di V_1 è collegato solo a vertici di V_2 e viceversa, ossia A è una relazione di adiacenza simmetrica definita su $V_1 \times V_2$. Denoteremo un grafo di questo tipo con la terna $G = (V_1, V_2, A)$.

Definizione 2.1.3. Dato un grafo $G = (V, A)$, si dice *sottografo* di G un grafo $G' = (V', A')$ in cui $V' \subseteq V$ e A' è la restrizione di A su $V' \times V'$, indicata con $A|_{V'}$.

In particolare, quando $G = (V_1, V_2, A)$ è un grafo bipartito, ogni suo *sottografo* $G' = (V'_1, V'_2, A')$ è costituito da due sottoinsiemi $V'_1 \subseteq V_1$ e $V'_2 \subseteq V_2$ e dalla restrizione A' di A su $V'_1 \times V'_2$, e dunque sarà bipartito.

Definizione 2.1.4. Dato un grafo $G = (V, A)$ e presi due suoi vertici $x, y \in V$, un *cammino* da x a y è una sequenza di vertici $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ in V ove $v_0 = x$ e $v_k = y$, e tale che si abbia v_iAv_{i+1} per ogni $0 \leq i \leq k-1$. Il numero di spigoli di cui il cammino P si compone è detto *lunghezza del cammino*, e lo denoteremo con $|P|$. Si dice *ciclo* un cammino chiuso, nel quale $v_0 = v_k$.

Osservazione 2.1.5. Talvolta, se x, y, z, t sono quattro vertici di un grafo G , P_1 un cammino di G da x a y e P_2 un cammino di G da z a t , denoteremo con (x, P_1, y, z, P_2, t) il cammino (o circuito, se tAx) ottenuto percorrendo il cammino P_1 da x a y , poi passando per z , e percorrendo infine P_2 sino a t . Se $y = z$, scriveremo (x, P_1, y, P_2, t) e utilizzeremo tutte le varianti ovvie di questa notazione.

Il concetto base che servirà a caratterizzare le matrici “consecutive ones” è la seguente nozione di tripla asteroidale.

Definizione 2.1.6. Tre vertici x, y, z in un grafo G formano una *tripla asteroidale* di G se per ciascuna loro coppia esiste un cammino P in G che ne congiunge i nodi tale che nessun vertice di P è adiacente al terzo vertice.

In Figura 2.1 è mostrato un esempio tratto da [4] di grafo contenente una tripla asteroidale, evidenziata in rosso. Si osserva che i nodi a, d, h formano una tripla che è asteroidale: infatti esistono il cammino (a, f, e, d) da a a d in cui nessun nodo è adiacente al nodo h , il cammino (d, c, h) da d ad h in cui nessun nodo è adiacente al nodo a ed il cammino (h, b, a) da h ad a in cui nessun nodo è adiacente al nodo d .

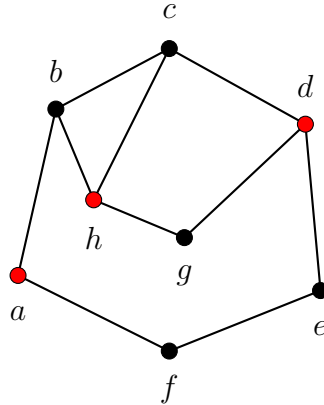


Figura 2.1: Esempio di grafo contenente la tripla asteroidale a, h, d , [4].

Definizione 2.1.7. Dato un grafo $G = (V, A)$ e presi x e y due suoi vertici, si dice *distanza* tra x e y in G la lunghezza del cammino più corto in G che li congiunge e viene indicata con $d(x, y)$. Si dice invece *diametro* di G la distanza massima fra una qualsiasi coppia di vertici in G . In particolare, se $G = (V_1, V_2, A)$ è un grafo bipartito, definiamo $\delta(G)$, il V_2 -diametro di G , come

$$\delta(G) := \sup_{x, y \in V_2} d(x, y).$$

Se $x, y \in V_2$ e $d(x, y) = \delta(G)$ allora x e y sono detti V_2 -punti diametro di G . Si osservi che il V_2 -diametro è sempre pari, dal momento che è la distanza d tra vertici di V_2 . Analogamente si possono definire il V_1 -diametro di G e i V_1 -punti diametro di G .

Definizione 2.1.8. Un grafo $G = (V, A)$ si dice *connesso* se ogni coppia di vertici è collegata da (almeno) un cammino in G . In generale, dato un grafo $G = (V, A)$, i vertici possono essere partizionati in k sottoinsiemi disgiunti V_1, \dots, V_k tali che $(V_i, A|_{V_i})$ è un grafo connesso per ogni $i = 1, \dots, k$, mentre non lo sono i grafi $(V_i \cup \{v\}, A_{V_i \cup \{v\}})$ per ogni $v \notin V_i$. I sottografi $(V_i, A|_{V_i})$ sono detti *componenti connesse* di G e un grafo è connesso se e solo se ha un'unica componente connessa.

Ricordiamo inoltre due metodi generali per rappresentare algebricamente un grafo tramite matrici binarie: la *matrice di adiacenza* e la *matrice di incidenza*.

Definizione 2.1.9. Dato un grafo (orientato o non orientato) $G = (V, E)$ con $|V| = n$, si dice *matrice di adiacenza* di G la matrice quadrata $M \in \{0, 1\}^{n \times n}$ in cui l'entrata $M(i, j)$ è 1 se l'arco $(i, j) \in E$ e 0 altrimenti.

Nel caso di grafi non orientati la matrice di adiacenza è simmetrica perché (i, j) e (j, i) sono lo stesso arco.

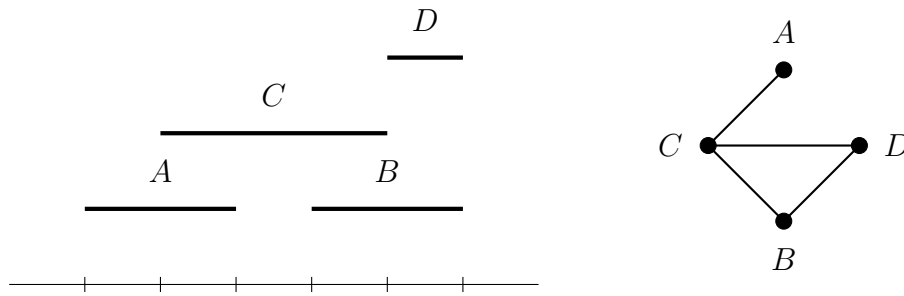


Figura 2.2: Esempio di grafo intervallo, [4].

Definizione 2.1.10. Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ con $|V| = n$ e $|E| = m$, si dice *matrice di incidenza* di G la matrice quadrata $M \in \{0, 1\}^{n \times m}$ in cui l'entrata $M(i, j)$ è 1 se il j -esimo arco del grafo incide sul nodo i e 0 altrimenti.

Nella matrice di incidenza ogni colonna ha esattamente due entrate pari a 1, in corrispondenza delle righe della matrice relative ai due nodi estremi dell'arco associato alla colonna stessa.

Infine riportiamo la definizione di un particolare tipo di grafi detti *grafi intervallo*, che come vedremo sono collegati alle matrici “consecutive ones”.

Definizione 2.1.11. Un *grafo intervallo* è un grafo non orientato in cui ad ogni nodo v è associato un intervallo reale $I_v \subseteq \mathbb{R}$, ed esiste lo spigolo (v, u) se e solo se $I_v \cap I_u \neq \emptyset$.

In Figura 2.2 è mostrato un esempio di grafo intervallo tratto da [4] con la rappresentazione ad intervalli reali ad esso associati.

2.2 Le matrici “Consecutive Ones”

Descriviamo ora i risultati legati alle matrici “consecutive ones”. Iniziamo col richiamare la Definizione 1.2.2 della proprietà degli uni consecutivi, già data al Capitolo 1.

Definizione 2.2.1. Una matrice- $\{0, 1\}$ X gode della *proprietà degli uni consecutivi sulle righe* (scriveremo X è C1P) se le colonne di X possono essere permutate in modo tale da ottenere una matrice C1P esatta, ovvero una matrice binaria in cui gli uni di ogni riga appaiano consecutivamente.

Osservazione 2.2.2. La *proprietà degli uni consecutivi sulle colonne* si ottiene dualmente invertendo i ruoli di righe e colonne, ovvero: diremo che una matrice- $\{0, 1\}$ M gode della *proprietà degli uni consecutivi sulle colonne* se le righe di X possono essere permutate in modo tale che in ogni

colonna gli uni occorrano consecutivamente. Con questa convenzione, tutti i risultati ottenuti e trattati nel prosieguo risultano validi anche per la consecutività degli uni sulle colonne.

Come vedremo al Capitolo 3 Tucker in [26] fornisce una caratterizzazione delle matrici C1P servendosi di grafi bipartiti e di alcune delle loro triple asteroidali. La proprietà matriciale degli uni consecutivi era già stata studiata in precedenza relativamente ai grafi intervallo, ai quali è strettamente correlata.

Fulkerson e Gross hanno studiato in [12] la proprietà degli uni consecutivi, dimostrando il seguente teorema.

Teorema 2.2.3 (Fulkerson e Gross). *G è un grafo intervallo se e solo se la matrice di incidenza delle clique dominanti gode della proprietà degli uni consecutivi sulle colonne.*

Un risultato simile è ottenuto da Roberts in [22] e [23].

Teorema 2.2.4 (Roberts). *G è un grafo intervallo proprio (proprio nel senso che nessun intervallo ne contiene un altro) se e solo se la rispettiva matrice di adiacenza aumentata (ove aumentata significa che essa ha uni aggiuntivi sulla diagonale principale) gode della proprietà degli uni consecutivi sulle colonne.*

Altri risultati e generalizzazioni sui grafi intervallo, riguardanti ad esempio i grafi di intervalli circolari, sono presenti nei lavori di Klee [14], Tucker [25] e Ryser [24], con alcune applicazioni presentate in [18].

La prima caratterizzazione dei grafi intervallo basata sul concetto di tripla asteroidale, introdotto con la Definizione 2.1.6, viene dato da Lekkerkerker e Boland in [15] con il seguente Teorema.

Teorema 2.2.5 (Lekkerkerker e Boland, [15]). *G è un grafo intervallo se e solo se esso non contiene triple asteroidali e circuiti primitivi (ovvero circuiti privi di corde) di lunghezza maggiore o uguale a 4.*

In seguito gli autori derivano una lista di sottografi minimali, ciascuno con una tripla asteroidale o un circuito primitivo di lunghezza maggiore o uguale a 4, che costituisce un teorema strutturale per i grafi intervallo in virtù del Teorema 2.2.5.

Anticipiamo ora la caratterizzazione delle matrici “consecutive ones” data da Tucker in [26], basata anch’essa sull’esclusione di triple asteroidali, in un particolare grafo bipartito associato alla matrice in esame.

Per ottenere tale risultato anticipiamo una definizione di corrispondenza biunivoca fra matrici binarie e grafi bipartiti, la quale verrà ripresa e utilizzata al Capitolo 3.

Definizione 2.2.6. Data una matrice $M \in \{0, 1\}^{m \times n}$ ad essa si può associare in maniera unica un grafo bipartito $G(V_1, V_2, A)$ ponendo $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ e definendo la relazione simmetrica di adiacenza su $V_1 \times V_2$ come:

$$x_i A y_j \Leftrightarrow M(i, j) = 1 \quad \forall x_i \in V_1, y_j \in V_2.$$

Teorema 2.2.7 (Tucker). *Una matrice $M \in \{0, 1\}^{m \times n}$ è C1P se e solo se nel grafo bipartito $G(V_1, V_2, A)$ ad essa associato secondo la corrispondenza introdotta con la Definizione 2.2.6 l'insieme V_2 non contiene triple asteroidali di G .*

La dimostrazione di tale teorema fornita da Tucker in [26] fa uso di un ragionamento grafico diretto, che descriveremo meglio nel Capitolo 3; si ha però che è possibile ottenere tale risultato sfruttando le relazioni che intercorrono fra la proprietà “consecutive ones” e i grafi intervallo, evidenziate dai teoremi precedenti, ottenendo la seguente dimostrazione.

Dimostrazione del Teorema di Tucker mediante l'uso dei grafi intervallo. Dal Teorema 2.2.3 si ha che la matrice di incidenza M delle clique dominanti di un grafo G gode della proprietà degli uni consecutivi sulle colonne se e solo se G è un grafo intervallo: associando alla matrice di incidenza M un grafo bipartito secondo la Definizione 2.2.6, risulta allora che la proprietà C1P equivale per ogni matrice al fatto che il grafo bipartito ad essa associato sia il grafo delle clique di un grafo intervallo.

A questo punto possiamo applicare il Teorema 2.2.5, il quale caratterizza un grafo intervallo G come un grafo non contenente triple asteroidali e circuiti primitivi (ovvero circuiti privi di corde) di lunghezza maggiore o uguale a 4. Per la catena di equivalenze si ha allora che la proprietà C1P per una matrice M equivale al fatto che il grafo bipartito associato a M secondo la Definizione 2.2.6 sia il grafo delle clique di un grafo non contenente triple asteroidali e circuiti primitivi di lunghezza maggiore o uguale a 4. Se riusciamo a dimostrare che l'assenza di triple asteroidali e circuiti primitivi di lunghezza maggiore o uguale a 4 in un grafo G equivale all'assenza di triple asteroidali sull'insieme dei nodi colonna nel grafo bipartito associato alla matrice di incidenza delle clique dominanti di G , allora otteniamo la tesi. Infatti in tal caso la catena di equivalenze dimostra l'enunciato per matrici binarie M qualsiasi, dalle quali si può sempre costruire un grafo G del quale M sia matrice di incidenza delle clique dominanti.

Notiamo allora che:

(\Rightarrow) se un grafo G non contiene triple asteroidali, allora necessariamente il grafo bipartito associato alla matrice di incidenza delle clique dominanti di G non potrà contenere triple asteroidali sull'insieme dei nodi colonna, poiché questi ultimi sono per definizione in corrispondenza con i vertici di G ;

(\Leftarrow) se un grafo bipartito associato alla matrice di incidenza delle clique dominanti di G non contiene triple asteroidali sull'insieme dei nodi colonna allora le uniche triple asteroidali che potrà contenere G saranno quelle per le quali almeno due vertici della tripla appartengono alla stessa clique massimale. Questo induce però circuiti primitivi di lunghezza almeno 4, vietati per ipotesi: di conseguenza G non potrà contenere triple asteroidali, come voluto.

Abbiamo allora ultimato la catena di equivalenze che dimostra l'enunciato. \square

Concludiamo con il seguente risultato algoritmico.

Osservazione 2.2.8 (Booth e Lueker, [3]). Data una matrice $X \in \{0, 1\}^{m \times n}$, è possibile determinare se X è C1P in tempo lineare $O(n+m)$.

Infatti Booth e Lueker mostrano in [3] come si può testare se una matrice $\{0, 1\}$ gode della proprietà degli uni consecutivi, se un grafo è un grafo intervallo e la planarità di un grafo utilizzando uno stesso algoritmo basato su una apposita struttura dati detta PQ-tree. In particolare, se $X \in \{0, 1\}^{m \times n}$ è C1P, una rappresentazione di tutte le permutazioni delle colonne che trasformano X in modo che gli uni appaiano consecutivamente può essere trovata in tempo $O(n+m)$ attraverso l'algoritmo PQ-tree.

In seguito utilizzeremo l'algoritmo PQ-tree per verificare efficientemente quali matrici di particolari sottoinsiemi godano della proprietà C1P, come spiegato alla Sezione 2.5.

2.3 Cenni di geometria della programmazione lineare

Richiamiamo ora alcuni elementi di geometria della programmazione lineare che serviranno per meglio comprendere il lavoro di Oswald e Reinelt riportato al Capitolo 3 e in seguito per analizzare alcune proprietà poliedrali del problema delle matrici "consecutive ones". I risultati che seguono sono tratti da [6].

Definizione 2.3.1. Un *iperpiano* in \mathbb{R}^n è un insieme della forma $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = \beta\}$, dove a è un vettore non nullo in \mathbb{R}^n e $\beta \in \mathbb{R}$.

Un *semispazio chiuso* in \mathbb{R}^n è un insieme della forma $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq \beta\}$, dove a è un vettore non nullo in \mathbb{R}^n e $\beta \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.3.2. Un *poliedro* in \mathbb{R}^n è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi. Alternativamente, un poliedro è un insieme che può essere scritto nella forma $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^- x = b^-, A^< x \leq b^<\}$ per qualche $A^- \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b^- \in \mathbb{R}^k$, $A^< \in \mathbb{R}^{(m-k) \times n}$, $b^< \in \mathbb{R}^{m-k}$.

Pertanto, la regione ammissibile di un problema di programmazione lineare è un poliedro.

Richiamiamo inoltre alcune nozioni sulle combinazioni di vettori.

Definizione 2.3.3. Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è una *combinazione lineare* dei vettori $x^1, \dots, x^q \in \mathbb{R}^n$ se esistono degli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ tali che

$$x = \sum_{j=1}^q \lambda_j x^j.$$

Definizione 2.3.4. Un sottoinsieme L di \mathbb{R}^n è un *sottospazio lineare* se L è chiuso rispetto alle combinazioni lineari, cioè ogni combinazione lineare di vettori in L appartiene a L .

Definizione 2.3.5. I vettori $x^1, \dots, x^q \in \mathbb{R}^n$ si dicono *linearmente indipendenti* se gli unici scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ che soddisfano $\sum_{j=1}^q \lambda_j x^j = 0$ sono $\lambda_1 = \dots = \lambda_q = 0$.

Definizione 2.3.6. Una *base* di uno spazio lineare L è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti in L . Tutte le basi hanno la stessa cardinalità e questa cardinalità è detta *dimensione* di L .

Definizione 2.3.7. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è una *combinazione affine* dei punti $x^1, \dots, x^q \in \mathbb{R}^n$ se esistono degli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ tali che

$$x = \sum_{j=1}^q \lambda_j x^j, \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^q \lambda_j = 1.$$

Definizione 2.3.8. Un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n è un *sottospazio affine* se A è chiuso rispetto alle combinazioni affini. Equivalentemente, un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n è un *sottospazio affine* se e solo se per ogni $a, b \in A$, la retta che passa per a e b è interamente contenuta in A .

Dunque i sottospazi lineari sono esattamente i sottospazi affini contenenti l'origine.

Definizione 2.3.9. I punti $x^0, x^1, \dots, x^q \in \mathbb{R}^n$ si dicono *affinemente indipendenti* se, dati $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_{j=0}^q \lambda_j x^j = 0$ e $\sum_{j=0}^q \lambda_j = 0$, segue che $\lambda_0, \lambda_1 = \dots = \lambda_q = 0$. Equivalentemente $x^0, x^1, \dots, x^q \in \mathbb{R}^n$ sono *affinemente indipendenti* se e solo se nessun punto in x^0, x^1, \dots, x^q può essere scritto come combinazione affine degli altri.

Definizione 2.3.10. La *dimensione* di un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$, denotata con $\dim(S)$, è il massimo numero di punti affinemente indipendenti in S meno uno. Si osservi $\dim(\emptyset) = -1$. Una *base* di un sottospazio affine A è un insieme di punti affinemente indipendenti $x^0, x^1, \dots, x^q \in A$, dove $q = \dim(A)$.

Definizione 2.3.11. Il più piccolo spazio affine che contiene un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *inviluppo affine* di S ed è denotato con $aff(S)$. Si osservi che $dim(S) = dim(aff(S))$.

Definizione 2.3.12. Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è *convesso* se, per ogni coppia di punti $x, y \in C$, il segmento $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ di estremi x, y è contenuto in C .

Definizione 2.3.13. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è una *combinazione convessa* dei punti $x^1, \dots, x^q \in \mathbb{R}^n$ se esistono degli scalari non negativi $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ tali che

$$x = \sum_{j=1}^q \lambda_j x^j, \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^q \lambda_j = 1.$$

Definizione 2.3.14. Dato un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$, l'*inviluppo convesso* di S , denotato con $conv(S)$, è l'insieme di tutti i punti $x \in \mathbb{R}^n$ che sono combinazione convessa di sottoinsiemi finiti di punti in S , cioè

$$conv(S) = \left\{ \sum_{j=1}^q \lambda_j x^j \mid x^1, \dots, x^q \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0, \sum_{j=1}^q \lambda_j = 1 \right\}.$$

Definizione 2.3.15. Un sottoinsieme $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ è un *politopo* se Q è l'inviluppo convesso di un insieme finito di vettori in \mathbb{R}^n .

Un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ ha dimensione k se e solo se esiste un sistema $Ax = b$ di equazioni tali che $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ e $rank(A) = n - k$.

Un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ ha dimensione k se e solo se esistono $k + 1$ punti affinementemente indipendenti in S .

Definizione 2.3.16. Un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice avere *dimensione piena* se $dim(P) = n$.

Riportiamo ora alcune nozioni su disuguaglianze valide, facce e faccette di un poliedro.

Definizione 2.3.17. Una disuguaglianza $cx \leq \delta$ è *valida* per l'insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ se $cx \leq \delta$ è soddisfatta da ogni punto in P .

Definizione 2.3.18. Una disuguaglianza $cx \leq \delta$ che appartiene al sistema $Ax \leq b$ è una *disuguaglianza ridondante* di $Ax \leq b$ se $cx \leq \delta$ è una disuguaglianza valida per il sistema $\bar{A}x \leq \bar{b}$ ottenuto da $Ax \leq b$ rimuovendo $cx \leq \delta$.

Definizione 2.3.19. Sia $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ un poliedro. Una *faccia* di P è un insieme della forma $F := P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid cx \leq \delta\}$ dove $cx \leq \delta$ è una disuguaglianza valida per P . Diremo che la disuguaglianza $cx \leq \delta$ *definisce* la faccia F .

Osservazione 2.3.20. Si ha che \emptyset e P sono sempre facce di P , essendo definite rispettivamente dalle disuguaglianze $0 \leq -1$ e $0 \leq 1$.

Definizione 2.3.21. Una faccia di P è detta *propria* se non è vuota ed è contenuta propriamente in P . Facce proprie massimali di P sono dette *facce*. Quindi ogni faccia diversa da P è contenuta in una faccia.

Proposizione 2.3.22. Sia P un poliedro e F una faccia di P . Allora $\dim(F) = \dim(P) - 1$ se e solo se F è una faccia.

Proposizione 2.3.23. Sia $P := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ un poliedro. Ogni disuguaglianza di $Ax \leq b$ che definisce una faccia di dimensione minore di $\dim(P) - 1$ è ridondante nella descrizione di P . Inoltre, per ogni faccia F di P , esattamente una delle disuguaglianze di $Ax \leq b$ che definisce F è necessaria nella descrizione di P .

Dato un poliedro $P := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ possiamo partizionare le disuguaglianze definenti P selezionando le *disuguaglianze implicite*, ovvero quelle sempre soddisfatte ad uguaglianza, dalle altre, quindi:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | A^=x = b^=, A^<x \leq b^<\}.$$

Siano $a^i x = b_i, \forall i \in I^=$ le equazioni di $A^=x = b^=$, e $a^i x \leq b_i, \forall i \in I^<$ le disuguaglianze di $A^<x \leq b^<$.

Teorema 2.3.24. Sia $P := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ un poliedro. Assumiamo che $A^<x \leq b^<$ non contenga disuguaglianze ridondanti per $Ax \leq b$. Allora P ha $|I^<|$ facce distinte, che denoteremo come $F_i := \{x \in \mathbb{R}^n | a^i x = b_i\}$ per $i \in I^<$.

Definizione 2.3.25. Sia $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro non vuoto. Un sistema di equazioni e disuguaglianze $A^=x = b^=, A^<x \leq b^<$ è una *rappresentazione minimale* di P se $P = \{x \in \mathbb{R}^n | A^=x = b^=, A^<x \leq b^<\}$ e i sistemi $A^=x = b^=, A^<x \leq b^<$ non contengono nessuna equazione o disequazione ridondante.

La rappresentazione minimale di un poliedro è essenzialmente unica, nel senso stabilito dal seguente teorema.

Teorema 2.3.26. Sia $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro non vuoto. Siano $A^=x = b^=, A^<x \leq b^<$ e $C^=x = d^=, C^<x \leq d^<$ due rappresentazioni minimali di P . Valgono le seguenti proposizioni:

- i) i sistemi $A^=x = b^=$ e $C^=x = d^=$ hanno lo stesso numero $n - \dim(P)$ di equazioni e ogni equazione $c^i x = d_i$ di $C^=x = d^=$ è della forma $(uA^=x) = ub^=$ per un qualche vettore u ;

ii) i sistemi $A^<x \leq b^<$ e $C^<x \leq d^<$ hanno lo stesso numero di disequazioni, pari al numero di faccette di P , e, a meno di permutazioni degli indici delle disuguaglianze, ogni disequazione $c^i x \leq d_i$ di $C^<x \leq d^<$ è della forma $(\lambda a^i + uA^=x) \leq \lambda b_i + ub^=$ per un qualche scalare $\lambda > 0$ e un qualche vettore u , dove $a^i x \leq b_i$ è una disuguaglianza di $A^<x \leq b^<$.

Corollario 2.3.27. *Sia $P\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ un poliedro a dimensione piena e assumiamo che $Ax \leq b$ non contenga disuguaglianze ridondanti. Allora $Ax \leq b$ è unicamente definito a meno di moltiplicazione delle disuguaglianze per uno scalare positivo.*

Di conseguenza se P è a dimensione piena, allora P possiede un'unica descrizione minimale $P\{x \in \mathbb{R}^n | a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$ in cui ogni disuguaglianza è unica a meno di moltiplicazione per uno scalare positivo; ogni disuguaglianza $a_i^T x \leq b_i$ è necessaria (rimuovendone una qualunque dalla descrizione otterremmo un poliedro diverso da P) e ogni disuguaglianza valida per P che non sia un multiplo positivo di una delle $a_i^T x \leq b_i$ è ridondante (può essere ottenuta come combinazione lineare a coefficienti non negativi di disuguaglianze valide).

Possiamo caratterizzare le disuguaglianze necessarie equivalentemente in un altro modo: se P ha dimensione piena, una disuguaglianza valida è necessaria per la descrizione di P se e solo se essa definisce una faccetta di P .

Dal momento che il politopo relativo al problema delle matrici “consecutive ones” si dimostrerà avere dimensione piena, i risultati appena esposti verranno utilizzati e forniranno una motivazione fondamentale per la ricerca di faccette di tale politopo.

2.4 Lifting

Introduciamo ora la nozione di lifting, propria della programmazione lineare, come introdotta in [6]. Tale definizione, con le relative applicazioni nella definizione di disuguaglianze valide per il problema delle matrici “consecutive ones”, è lo strumento centrale della tesi.

Si consideri un insieme intero misto $S := \{x \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{R}_+^p : Ax \leq b\}$. Dato un sottoinsieme C di $N := \{1, \dots, n+p\}$ e una disuguaglianza valida $\sum_{j \in C} \alpha_j x_j \leq \beta$ per $\text{conv}(S) \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+p} : x_j = 0, j \in N \setminus C\}$, una disuguaglianza $\sum_{j=1}^{n+p} \alpha_j x_j \leq \beta$ è chiamata un *lifting* di $\sum_{j \in C} \alpha_j x_j \leq \beta$ se è valida per $\text{conv}(S)$. Nel seguito ci limiteremo al caso in cui $S \subseteq \{0, 1\}^n$, e dunque in particolare con $p = 0$, cioè considereremo un insieme lineare intero puro con variabili binarie.

Proposizione 2.4.1. [6] Si consideri un insieme $S \subseteq \{0, 1\}^n$ tale che $S \cap \{x : x_n = 1\} \neq \emptyset$, e sia $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \leq \beta$ una disuguaglianza valida per $S \cap \{x : x_n = 0\}$. Allora

$$\alpha_n := \beta - \max \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i : x \in S, x_n = 1 \right\} \quad (2.1)$$

è il più grande coefficiente tale che $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i + \alpha_n x_n \leq \beta$ sia valida per S .

Inoltre, se $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \leq \beta$ definisce una faccia d -dimensionale di $\text{conv}(S) \cap \{x : x_n = 0\}$, allora $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq \beta$ definisce una faccia di $\text{conv}(S)$ di dimensione almeno $d + 1$.

Lifting Sequenziale. Si consideri un insieme $S := \{x \in \{0, 1\}^n : Ax \leq b\}$. La Proposizione 2.4.1 suggerisce il seguente modo di iterare il lifting di una disuguaglianza $\sum_{j \in C} \alpha_j x_j \leq \beta$, valida per $\text{conv}(S) \cap \{x : x_j = 0, j \in N \setminus C\}$, per ottenere una disuguaglianza $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \leq \beta$, valida per $\text{conv}(S)$.

Algoritmo 1 (Lifting Sequenziale). Sia data una disuguaglianza $\sum_{j \in C} \alpha_j x_j \leq \beta$, con coefficienti aventi indici in un insieme $C \subseteq N$:

1. Scegliere un ordinamento j_1, \dots, j_l degli indici in $N \setminus C$. Sia $C_0 := C$ e $C_h := C_{h-1} \cup \{j_h\}$ per $h = 1, \dots, l$.

2. Per $h = 1, \dots, l$:

- fissare:

$$\alpha_{j_h} := \beta - \max \left\{ \sum_{j \in C_{h-1}} \alpha_j x_j : x \in S, x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C_h, x_{j_h} = 1 \right\}. \quad (2.2)$$

e iterare.

Per la Proposizione 2.4.1 se la disuguaglianza $\sum_{j \in C} \alpha_j x_j \leq \beta$ definisce una faccetta per $\text{conv}(S) \cap \{x : x_j = 0, j \in N \setminus C\}$ allora la disuguaglianza $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \leq \beta$ ottenuta in questo modo definisce una faccetta di $\text{conv}(S)$.

La procedura ricorsiva appena descritta viene chiamata *lifting sequenziale*.

Si noti che l'applicazione di tale algoritmo è corretta solo se (2.2) è ammissibile. Un modo per garantirlo è quello seguito in [6], dove si impone l'ipotesi che $\dim(S) = n$ e che A sia una matrice non negativa. L'assunzione $A \geq 0$ implica che, per ogni $\bar{x} \in S$ si abbia $\{x \in \{0, 1\}^n : x \leq \bar{x}\} \subseteq S$. Ciò, unitamente al fatto che S abbia dimensione piena, ovvero $\dim(S) = n$, garantisce che (2.2) sia ammissibile.

La definizione di lifting sequenziale presenta due possibili scelte da compiere per determinare la procedura: in primo luogo inizializzare l'algoritmo una disuguaglianza di partenza, con i relativi coefficienti fissati e il termine noto che non viene modificato nelle varie iterazioni dell'Algoritmo 1. In secondo luogo stabilire un ordinamento j_1, \dots, j_l degli indici in $N \setminus C$ sui quali eseguire il lifting ad ogni iterazione: l'importanza di questa seconda scelta è dovuta soprattutto alla seguente osservazione.

Osservazione 2.4.2. Differenti ordinamenti di indici in $N \setminus C$ generano in generale differenti disuguaglianze lifting; in caso di particolari simmetrie del problema si può però ottenere la stessa disuguaglianza con diverse sequenze di indici.

Osserviamo inoltre che tramite il lifting sequenziale non è in generale possibile ottenere qualsiasi faccia di un politopo a partire da una sezione in dimensione più bassa, come dimostrato di seguito.

Osservazione 2.4.3. Non tutte le possibili disuguaglianze lifting sono ottenibili tramite la procedura sequenziale, come illustrato dal seguente esempio.

Esempio 2.4.4. Si consideri l'insieme knapsack

$$\begin{aligned} 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 6x_6 + 6x_7 &\leq 22 \\ x_j &\in \{0, 1\} \text{ per } j = 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

Come disequazione da elevare si consideri $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$, la quale è una disuguaglianza minimal cover per l'insieme degli indici $C := \{1, 2, 3, 4\}$.

A partire da tale disequazione non è possibile ottenere

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 0.5x_5 + 0.5x_6 + 0.5x_7 \leq 3,$$

la quale si dimostra essere una disuguaglianza valida e che definisce una faccetta per l'insieme knapsack: in questo caso infatti i coefficienti di lifting sono frazionari, e dunque non ottenibili dal programma lineare (2.2).

2.4.1 Interpretazione geometrica del lifting nello spazio polare

In [17] si fornisce un'interpretazione geometrica del lifting sequenziale, rappresentando nello spazio duale quali faccette di $\text{conv}(S)$ sono ottenibili applicando la procedura a una disuguaglianza $\sum_{j \in C} \alpha_j x_j \leq \beta$ definente una faccetta di $\text{conv}(S) \cap \{x : x_j = 0, j \in N \setminus C\}$. Tale rappresentazione illustra geometricamente quali facce sono ottenibili dall'Algoritmo 1 a partire da una fissata disuguaglianza di partenza, e quali faccette non

sono invece il risultato di un lifting sequenziale per nessuna disequazione di partenza o ordinamento delle variabili.

Per avere una rappresentazione grafica è necessario considerare il processo di lifting nello spazio dei poliedri polari.

Definizione 2.4.5. Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice *polare* di S l'insieme:

$$S^* := \{y \in \mathbb{R}^n : yx \leq 1 \forall x \in S\} \quad (2.3)$$

Dalla definizione di polare specializzata al caso in cui S è un politopo il cui interno contiene l'origine si hanno le seguenti proprietà.

Teorema 2.4.6. [6] Dati $a^1, \dots, a^m \in \mathbb{R}^n$, sia $P := \{y \in \mathbb{R}^n : a^i y \leq 1 \forall i = 1, \dots, m\}$ e $Q := \text{conv}(0, a^1, \dots, a^m)$. Allora $P^* = Q$ e $Q^* = P$.

Corollario 2.4.7. [6] Sia $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un politopo il cui interno contiene l'origine. Allora si ha che:

- i) $P^{**} = P$;
- ii) P è anch'esso un politopo il cui interno contiene l'origine;
- iii) $\text{aff}(P^*)$ è il complemento ortogonale di $\text{lin}(P)$; in particolare $\dim(P^*) = n - \dim(P)$.

Ai fini dell'interpretazione geometrica del lifting sequenziale si utilizza il seguente risultato, che mette in corrispondenza le facce di un politopo con quelle del suo polare.

Proposizione 2.4.8. [21] Dato un politopo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ il cui interno contiene l'origine allora le d -facce di A sono in biiezione con le $(n - d - 1)$ -facce del polare P^* . La corrispondenza è la seguente: se $Y = \text{aff}(F)$ è il sottospazio d -dimensionale che determina la d -faccia F di A allora il sottospazio $(n - d - 1)$ -dimensionale $Y^* = \text{aff}(F^*)$ che determina la corrispondente $(n - d - 1)$ -faccia F^* di A^* è dato da:

$$Y^* = \bigcap_{x \in Y} \{y \in \mathbb{R}^n : yx = 1\},$$

cioè è l'intersezione degli iperpiani polari dei punti di Y .

Consideriamo allora un singolo lifting nello spazio di S^* , il polare dell'insieme $S \subseteq \{0, 1\}^n$ del cui involucro convesso si vogliono trovare le faccette.

Proposizione 2.4.9 (Lifting - Versione polare [17]). Se $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \leq \beta$ è una disuguaglianza valida per $S \cap \{x : x_n = 0\}$, il lifting di tale disequazione può essere descritto tramite il problema di ottimizzazione 1-dimensionale nello spazio di S^* :

$$\max\{\alpha : (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) + \alpha(0, \dots, 0, 1) \in S^*\}. \quad (2.4)$$

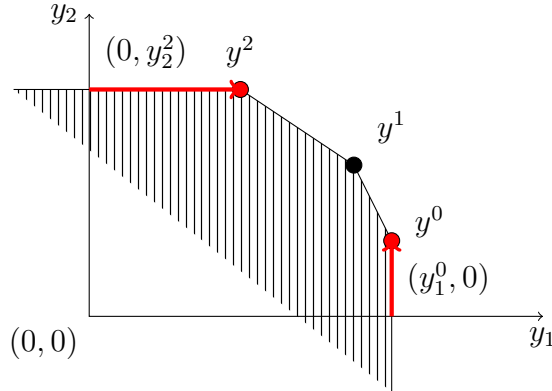


Figura 2.3: Esempio di lifting nello spazio di S^* per $n = 2$: le frecce illustrano il lifting a partire da diverse disuguaglianze iniziali.

Analizziamo la geometria di tale problema per l'esempio con $n = 2$, illustrato in Figura 2.3.

Esempio 2.4.10. Supponiamo che S^* abbia tre punti estremi (y^0, y^1, y^2) . Se $y_1^0 > \max\{y_1^1, y_1^2\}$ abbiamo che $y_1^0 x_1 \leq 1$ fornisce una faccetta di $\text{conv}(S \cap \{x : x_2 = 0\})$. Allora il lifting è equivalente a muoversi da $(y_1^0, 0)$ nella direzione $(0, 1)$ per ottenere il punto estremo y^0 di S^* o, equivalentemente, la faccetta di $\text{conv}(S)$ definita da $y_1^0 x_1 + y_2^0 x_2 \leq 1$. Analogamente, eseguendo un lifting da $y_2^2 x_2 \leq 1$ otteniamo la faccetta di $\text{conv}(S)$ definita da $y_1^2 x_1 + y_2^2 x_2 \leq 1$. Possiamo anche notare che non c'è modo di generare la faccetta di $\text{conv}(S)$ definita da $y_1^1 x_1 + y_2^1 x_2 \leq 1$ attraverso il lifting.

Interpretando il lifting sequenziale in maniera geometrica, si supponga di avere come disuguaglianza di partenza quella banale $0 \leq 1$. Eseguendo il lifting sequenziale con l'ordinamento $(2, 1)$ si ottiene la faccetta di $\text{conv}(S)$ corrispondente al punto estremo y^2 di S^* , mentre con l'ordinamento $(1, 2)$ si ottiene la faccetta corrispondente al punto estremo y^0 . Nessun ordinamento fornisce dunque il punto y^1 .

Osservazione 2.4.11. Un risultato di tale interpretazione geometrica è dunque fornire un altro controesempio, oltre a quello dell'Esempio 2.4.4, di faccetta di un politopo 0-1 non ottenibile tramite lifting sequenziale, con ogni possibile ordinamento o facce delle sezioni di partenza. Per opportune scelte delle sezioni e per un numero di iterazioni di lifting minore o uguale a 2 le faccette possono però essere ottenute sequenzialmente, come illustrato in [29].

2.4.2 Ordinamenti delle variabili nel lifting sequenziale

Come notato nell'Osservazione 2.4.2 la scelta della sequenza con la quale eseguire il lifting determina i coefficienti restituiti dalla procedura. Da tale legame è possibile ottenere delle limitazioni a priori sui valori di tali coefficienti, a seconda dell'iterazione alla quale vengono fissati nella sequenza.

Proposizione 2.4.12. [17] *Sia $N \setminus C = \{1, \dots, l\}$ e si esegua il lifting sequenziale, con l'ordinamento $(j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_k, \dots, j_l)$, della disuguaglianza*

$$\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq \beta,$$

ottenendo la disequazione:

$$\sum_{j \in N \setminus C} \alpha_j x_j + \sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq \beta.$$

Allora per ogni ordinamento $(j'_1, j'_2, \dots, j'_{k-1}, j'_k, \dots, j'_l)$ con $j'_h = j_h \quad \forall h = 1, \dots, k-1$ la disequazione risultante dal lifting sequenziale:

$$\sum_{j \in N \setminus C} \alpha'_j x_j + \sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq \beta$$

è tale che $\alpha'_{j_k} \leq \alpha_{j_k}$.

Dimostrazione. Dal momento che $(j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_k, \dots, j_l)$ e $(j'_1, j'_2, \dots, j'_{k-1}, j'_k, \dots, j'_l)$ sono due ordinamenti dello stesso insieme $N \setminus C = \{1, \dots, l\}$, e che per ipotesi $j'_h = j_h \quad \forall h = 1, \dots, k-1$, si deve avere che $j_k = j'_s$ per qualche $s > k$. Allora risulta:

$$\begin{aligned} \alpha_{j_k} &= \beta - \max \left\{ \sum_{h=1}^{k-1} \alpha_{j_h} x_{j_h} + \sum_{i \in C} \alpha_i x_i : x \in S, x_{j_h} = 0 \quad \forall h > k, x_{j_k} = 1 \right\} \\ &= \beta - \max \left\{ \sum_{h=1}^{k-1} \alpha_{j_h} x_{j_h} + \sum_{i \in C} \alpha_i x_i : x \in S, x_{j'_h} = 0 \quad \forall k \leq h \leq l \text{ e } h \neq s, x_{j'_s} = 1 \right\} \\ &\geq \beta - \max \left\{ \sum_{h=1}^{k-1} \alpha_{j_h} x_{j_h} + \sum_{i \in C} \alpha_i x_i + \sum_{h=k}^{s-1} \alpha'_{j'_h} x_{j'_h} : x \in S, x_{j'_h} = 0 \quad \forall h > s, x_{j'_s} = 1 \right\} \\ &= \alpha'_{j_k}, \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che per ipotesi $j'_h = j_h \quad \forall h = 1, \dots, k-1$, dunque il lifting sequenziale con i due ordinamenti rimane uguale fino all'iterazione $k-1$ -esima. \square

Dalla proposizione precedente si può ottenere come conseguenza il seguente corollario:

Corollario 2.4.13. *Nella notazione della Proposizione 2.4.12, eseguendo il lifting sequenziale delle variabili $N \setminus C$ di una disequazione, si ha che il coefficiente della variabile di indice $j \in N \setminus C$ è monotono decrescente rispetto all'ordine con cui viene fissato dalla sequenza, ovvero:*

$$\alpha_j^1 \geq \alpha_j^2 \geq \cdots \geq \alpha_j^l,$$

dove α_j^k è il coefficiente α_j calcolato con l'ordinamento

$$(j_1^k, j_2^k, \dots, j_{k-1}^k, j, j_{k+1}^k, \dots, j_l^k),$$

con l'indice j in posizione k -esima e $j_h^{k'} = j_h \quad \forall h = 1, \dots, k' - 1 \not\leq k - 1$, cioè con i primi indici determinati dai $k - 1$ ordinamenti precedenti che danno α_j^h con $h = 1, \dots, k - 1$.

In particolare il valore minimo di α_j si ottiene eseguendo il lifting della variabile x_j per ultimo e il valore massimo eseguendo il lifting per primo nella sequenza.

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 2.4.12, considerando per ogni coppia di posizioni consecutive k e $k + 1$ gli ordinamenti:

$$(j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_k, j_{k+1}, \dots, j_l) \equiv (j_1^k, j_2^k, \dots, j_{k-1}^k, j_k^k = j, j_{k+1}^k, \dots, j_l^k),$$

$$(j'_1, j'_2, \dots, j'_{k-1}, j'_k, j'_{k+1}, \dots, j'_l) \equiv (j_1^{k+1}, j_2^{k+1}, \dots, j_{k-1}^{k+1}, j_k^{k+1} = j, \dots, j_l^{k+1})$$

con $j_k^k = j_{k+1}^{k+1} = j$ e $j'_h = j_h \quad \forall h = 1, \dots, k - 1$ per costruzione.

In particolare considerando $k = l$ si ha che il coefficiente α_j^l della variabile x_j ottenuto eseguendo tale lifting per ultimo è il minimo tra i coefficienti della variabile ottenuti da *qualsiasi* ordinamento; viceversa per $k = 1$ si avrà il valore massimo. \square

Si è notato nell'Osservazione 2.4.2 che in caso di particolari simmetrie del problema si può ottenere la stessa disuguaglianza con diverse sequenze di indici di $N \setminus C$. Nel caso in cui la *funzione di lifting* goda della proprietà superadditiva si ha un risultato ancora più forte, ovvero che i coefficienti ottenuti dal lifting sequenziale sono gli stessi indipendentemente dall'ordinamento scelto: definiamo allora la funzione di lifting analogamente a quanto fatto in [6].

Definizione 2.4.14. Assumiamo, nelle notazioni introdotte all'inizio della sezione, che $A \geq 0$ e $\dim(S) = n$, da cui $b \geq 0$. Sia a^j la j -esima colonna della matrice A e sia:

$$\sum_{j \in C} \alpha_j x_j \leq \beta \tag{2.5}$$

una disequazione valida per l'insieme di partenza $S \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0, j \in N \setminus C\}$. Si dice *funzione di lifting* della disuguaglianza (2.5) la funzione $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$\begin{aligned} f(z) &:= \beta - \max \sum_{i \in C} \alpha_i x_i \\ \sum_{i \in C} a^i x_i &\leq b - z \\ x_i &\in \{0, 1\} \quad \forall i \in C. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Definizione 2.4.15. Una funzione $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ è *superadditiva* se:

$$g(u + v) \geq g(u) + g(v) \quad \forall u, v \in U \text{ tali che } u + v \in U.$$

Possiamo allora enunciare la proprietà di indipendenza sequenziale del lifting, come presentata in [6] e approfondita per il caso particolare dei problemi knapsack e di flusso in [13].

Teorema 2.4.16. [6] Sia $g : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione superadditiva tale che $g \leq f$. Allora $\sum_{j \in C} \alpha_j x_j + \sum_{j \in N \setminus C} g(a^j) x_j \leq \beta$ è una disuguaglianza valida per S . In particolare, se f è superadditiva, allora la disuguaglianza $\sum_{j \in C} \alpha_j x_j + \sum_{j \in N \setminus C} f(a^j) x_j \leq \beta$ è l'unico lifting di $\sum_{j \in C} \alpha_j x_j \leq \beta$.

2.5 PORTA e analisi delle faccette di una sezione

Nel seguito della trattazione risulterà utile eseguire delle verifiche computazionali sulle dimensioni delle facce, indotte da determinate disuguaglianze, di politopi 0-1 definiti dall'involuppo convesso di un insieme di punti binari.

Ricordiamo che, come riportato ad esempio in [21] o in [6], un poliedro può essere descritto in due modi:

- con una *vertex description* $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$, cioè come l'involuppo convesso di un insieme finito di punti $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ sommato eventualmente all'involuppo conico di un insieme di raggi $E = \{e_1, \dots, e_h\}$, come segue dal Teorema di Minkowsky-Weyl per i poliedri [6];
- con una *halfspace description* $P = \{x | Ax \leq b\}$, cioè come un sistema di equazioni e disequazioni lineari.

Per eseguire le verifiche volute sui poliedri, passando da una descrizione all'altra, si utilizzerà PORTA [5], *Polyhedron Representation Transformation Algorithm*, il quale è una collezione di routines sviluppate da Christof e Löbel per analizzare la formulazione di poliedri. I comandi del software che verranno utilizzati sono:

- traf** : permette di trasformare una descrizione del poliedro nell'altra, fornendo un sistema non ridondante, cioè dando tutti i vertici e i raggi estremi nel caso della vertex description oppure tutte e sole le faccette del poliedro nel caso della halfspace description;
- dim** : calcola la dimensione di un poliedro, utilizzando l'algoritmo di eliminazione di Gauss;
- fctp** : verifica se una disuguaglianza data in input definisce una faccetta per un dato poliedro, facendo uso del comando **dim**.

In particolare ai Capitoli 4, 5 e 6 si vorrà verificare se delle determinate disuguaglianze definiscono faccette per sezioni del politopo delle matrici consecutive ones. A tale scopo si utilizzerà prima un codice scritto in C++ per elencare, senza ripetizioni, tutti i vertici della sezione ottenuta intersecando tale politopo con opportuni iperpiani: tale codice genera tutte le possibili matrici binarie appartenenti agli iperpiani dati e quindi utilizza alcune librerie che implementano l'algoritmo PQ-tree, il quale controlla in maniera efficiente se ciascuna di queste matrici goda della proprietà degli uni consecutivi. In secondo luogo si utilizzerà il comando **traf** di PORTA per ottenere una halfspace description del poliedro che ne elenchi le faccette; fra queste si cercherà poi la disuguaglianza data, eventualmente controllando la sua presenza con il comando **traf**.

Capitolo 3

Aspetti poliedrali del problema degli uni consecutivi e procedure per la formulazione di disuguaglianze valide

Il problema di esprimere tramite disuguaglianze lineari il vincolo C1P, utile per dare formulazioni convenienti nelle applicazioni introdotte al Capitolo 1, può essere affrontato adottando un approccio grafico.

In questo capitolo inizieremo col richiamare l'approccio grafico presentato da Tucker in [26], che fornisce una caratterizzazione delle matrici C1P stabilendo una corrispondenza con i grafi bipartiti privi di triple asteroidali in uno dei due sottoinsiemi di vertici. Da tale caratterizzazione si ottiene poi un teorema di struttura per i grafi che, convertito nel suo omologo matriciale, fornisce una prima formulazione lineare per il vincolo "la matrice X è C1P".

In seguito si passerà a considerare l'aspetto poliedrale del problema degli uni consecutivi, il quale permetterà di ottenere una formulazione più stringente per il politopo delle matrici C1P, seguendo l'esposizione di Oswald e Reinelt in [19] corretta e approfondita da Brentegani in [4], che pone le basi per un'interpretazione delle disuguaglianze in termini di grafi bipartiti associati da Tucker (mediante la Definizione 2.2.6) alle matrici 0-1 (genesi grafica delle disuguaglianze).

Traendo spunto dalla genesi grafica delle disuguaglianze definenti faccette, proposta da Brentegani [4] e generalizzata da Festa [11], formalizzeremo infine le procedure introdotte in [8] attraverso le quali si possono ottenere disuguaglianze valide per il problema degli uni consecutivi a partire da una configurazione grafica di partenza corrispondente a una matrice non C1P. In particolar modo ci si concentrerà sulle Procedure 3 e 4, le quali si concentrano rispettivamente su una e su tutte le possibili triple asteroidali presenti nella configurazione grafica: vedremo al Capitolo 5 come sarà possibile ricondurre questi due procedimenti ad istanze di un

più generale algoritmo di lifting, le cui proprietà permettono di ottenere maggiori informazioni sulle disuguaglianze che le procedure restituiscono.

3.1 Teorema di struttura per le matrici C1P

Nel seguito, seguendo l'esposizione di [26], definiremo una corrispondenza biunivoca tra matrici binarie e grafi bipartiti, la quale permette di convertire la proprietà matriciale degli uni consecutivi sulle righe in una caratterizzazione del grafo bipartito associato alla matrice, il quale non deve contenere triple asteroidali nell'insieme dei nodi associati alle colonne. Escludendo dei grafi minimali che violano tale condizione è possibile allora fornire un teorema di struttura che descriva come sia composto un grafo bipartito e la corrispondente matrice binaria affinché sia soddisfatta la proprietà degli uni consecutivi. Infine da tale risultato strutturale è possibile ottenere una prima formulazione per il vincolo "la matrice X è C1P".

3.1.1 Proprietà degli uni consecutivi su un grafo

Data una matrice $M \in \{0, 1\}^{m \times n}$ possiamo associare ad M un grafo bipartito non orientato $G = (V_1, V_2, A)$ in cui V_1 e V_2 sono i due insiemi di vertici corrispondenti rispettivamente alle righe e alle colonne di M , $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$, ed A è la relazione simmetrica di adiacenza definita su $V_1 \times V_2$ tale che, per $x_i \in V_1$ e $y_j \in V_2$, si ha $x_i A y_j$ se e solo se $M(i, j) = 1$. Viceversa, dato un grafo bipartito non orientato $G = (V_1, V_2, A)$ con $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$, possiamo associarvi una matrice $M \in \{0, 1\}^{m \times n}$ le cui righe corrispondono ai vertici di V_1 e le colonne ai vertici di V_2 , e nella quale $M(i, j) = 1$ se e solo se per i corrispondenti vertici $x_i \in V_1$ e $y_j \in V_2$ si ha $x_i A y_j$, ed $M(i, j) = 0$ altrimenti.

Grazie a questa biiezione tra matrici binarie e grafi bipartiti non orientati possiamo descrivere la proprietà degli uni consecutivi sulle righe di una matrice attraverso lo studio del grafo bipartito ad essa associato.

Osservazione 3.1.1 (Notazione). Nelle rappresentazioni dei grafi bipartiti $G = (V_1, V_2, A)$ associati a matrici $M \in \{0, 1\}^{m \times n}$ con la relazione appena descritta i vertici di V_1 corrispondono alle righe di M , mentre i vertici di V_2 corrispondono alle colonne di M . In base a tale associazione ci si riferirà agli insiemi di vertici V_1 e V_2 rispettivamente con le diciture *nodì riga* e *nodì colonna* di G , e nelle rappresentazioni grafiche i primi verranno illustrati con cerchietti pieni mentre i secondi con cerchietti vuoti.

Osservazione 3.1.2. Come caso particolare si potrebbe avere che il grafo bipartito associato a una matrice- $\{0, 1\}$ M sia non connesso; se ciò accade

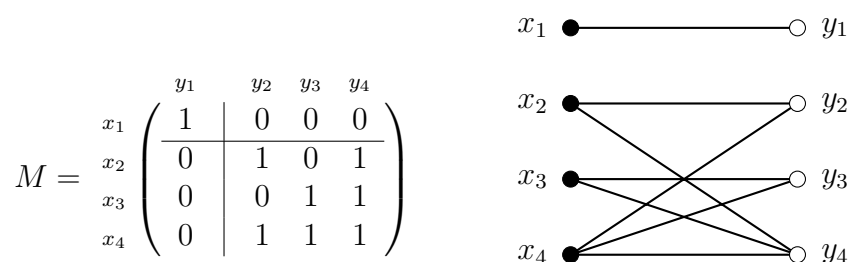


Figura 3.1: Esempio di matrice- $\{0, 1\}$ con grafo bipartito associato non connesso, [4].

allora la matrice M può essere ricondotta tramite permutazioni di righe e/o colonne alla matrice a blocchi

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Un esempio di tale situazione, tratto da [4], è riportato in Figura 3.1.

Nel caso di matrici con questa struttura a blocchi, con grafi corrispondenti non connessi, i risultati mostrati di seguito sono comunque validi purché le ipotesi siano soddisfatte dalle sottomatrici A e B , ovvero da tutte le componenti connesse del grafo.

Grazie all'equivalenza appena definita Tucker converte la proprietà matriciale degli uni consecutivi sulle righe in una corrispondente proprietà grafica; in [26] tale risultato è ottenuto per la proprietà degli uni consecutivi sulle colonne, ma grazie all'Osservazione 2.2.2 è possibile trasporre simmetricamente la formulazione originale.

La seguente definizione fornisce la proprietà grafica corrispondente a quella matriciale degli uni consecutivi sulle righe.

Definizione 3.1.3. [26] Sia $G = (V_1, V_2, A)$ un grafo bipartito non orientato. Definiamo V_2 -*arrangiamento consecutivo* di G un ordinamento dei vertici di V_2 tale che, per ogni $x \in V_1$, il vicinato $N(x) = \{y \in V_2 | xAy\}$ del nodo x sia un insieme consecutivo di vertici in V_2 (o $N(x) = \emptyset$).

La proprietà degli uni consecutivi sulle righe può essere allora convertita graficamente con la seguente proposizione.

Proposizione 3.1.4. Una matrice- $\{0, 1\}$ M è C1P se e solo se il corrispondente grafo bipartito non orientato ammette un V_2 -arrangiamento consecutivo.

Un esempio, tratto da [4], della conversione così stabilita si ha per la matrice M e il corrispondente grafo riportati in Figura 3.1. Si nota come nella riga x_2 gli uni non sono consecutivi e che, equivalentemente, $N(x_2) = \{y_2, y_4\}$ non è un insieme consecutivo di vertici in V_2 . Tuttavia, permutando i vertici di V_2 secondo la sequenza $\phi = (y_1, y_3, y_4, y_2)$

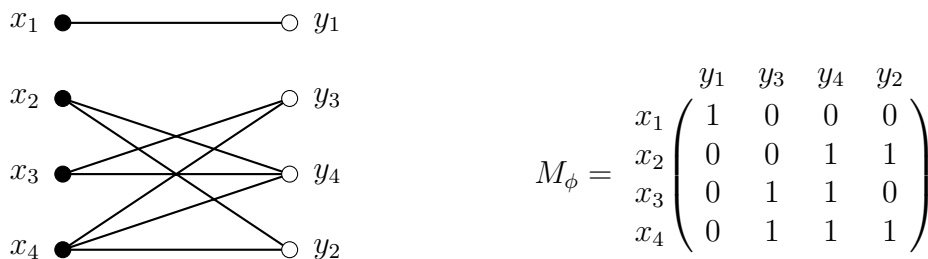


Figura 3.2: Grafo bipartito con V_2 -arrangiamento consecutivo $\phi = (y_1, y_3, y_4, y_2)$ e matrice CIP esatta corrispondente, [4].

otteniamo il grafo in Figura 3.2, nel quale il vicinato di ciascun nodo di V_1 è consecutivo, e dal quale, ritornando alla forma matriciale, possiamo vedere che gli uni nella matrice M_ϕ (con le colonne di M permutate secondo ϕ) appaiono consecutivi su ciascuna riga, e dunque M gode della proprietà degli uni consecutivi sulle righe.

Possiamo allora enunciare il risultato che caratterizza i grafi contenenti arrangiamenti consecutivi, facente uso della nozione di tripla asteroidale.

Teorema 3.1.5. [26] *Un grafo bipartito non orientato $G = (V_1, V_2, A)$ ammette un V_2 -arrangiamento consecutivo se e solo se V_2 non contiene triple asteroidali di G .*

3.1.2 Minori di Tucker e teorema di struttura

Una volta caratterizzati i grafi contenenti un V_2 -arrangiamento consecutivo come quelli contenenti triple asteroidali di nodi colonna, Tucker deriva una lista di sottografi bipartiti non orientati, connessi e minimali, ciascuno con una tripla asteroidale nell'insieme di nodi colonna. Chiameremo questi grafi, riportati in Figura 3.3 con le triple asteroidali evidenziate in rosso, I_k, II_k, III_k con $k \geq 1$ e IV, V .

Osservazione 3.1.6. [4] Notiamo che nella lista data in Figura 3.3 sono inclusi anche grafi simili al grafo II_k nei quali sono presenti solo alcuni archi (u, b_i) o (v, b_i) per qualche $1 \leq i \leq k$, in quanto in tali grafi sarà presente un sottografo del tipo $I_{k'}$ o $II_{k'}$ per un certo $k' < k$. Si osservi inoltre che con questa lista sono considerati anche i grafi simili al grafo III_k nei quali sia presente soltanto uno degli archi $(b_1, t), (b_2, t), \dots, (b_k, t)$, dal momento che questi grafi contengono un sottografo del tipo III_1 .

Dalla lista di sottografi minimali contenenti triple asteroidali si ottiene il seguente risultato.

Teorema 3.1.7. [26] *Dato un grafo bipartito non orientato $G = (V_1, V_2, A)$, V_2 non contiene triple asteroidali di G se e solo se G non contiene nessuno dei sottografi bipartiti e non orientati I_k, II_k, III_k con $k \geq 1$ e IV, V .*

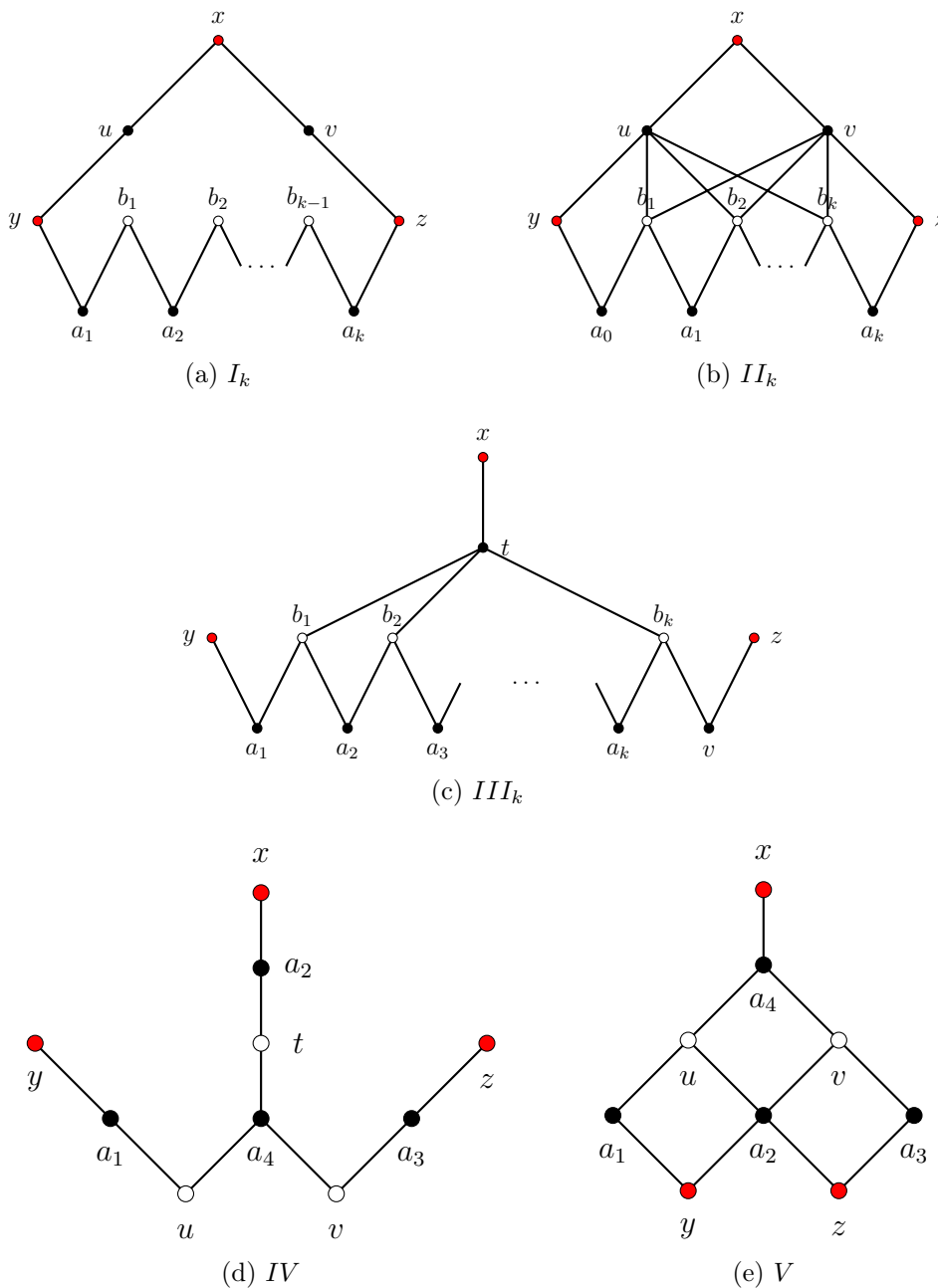


Figura 3.3: Lista di grafi minimali contenenti una tripla asteroidale x, y, z nell'insieme di nodi colonna.

$$\begin{array}{c}
M_{I_k} = \begin{array}{c} y \quad b_1 \quad \dots \quad b_{k-1} \quad z \quad x \\ a_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & & \\ a_k & & & 1 & 1 & \\ v & & & & 1 & 1 \\ u & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \\
M_{II_k} = \begin{array}{c} y \quad b_1 \quad \dots \quad b_k \quad z \quad x \\ a_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & 0 \\ & 1 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_k & & & 1 & 1 & 0 \\ v & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ u & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \\
M_{III_k} = \begin{array}{c} y \quad b_1 \quad \dots \quad b_k \quad z \quad x \\ a_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ a_k & & & 1 & 1 & 0 \\ v & & & & 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \\
M_{IV} = \begin{array}{c} y \quad u \quad x \quad t \quad z \quad v \\ a_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ a_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{array} \\
M_V = \begin{array}{c} u \quad y \quad z \quad v \quad x \\ a_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ a_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{array}
\end{array}$$

Figura 3.4: I cinque minori di Tucker M_{I_k} , M_{II_k} , M_{III_k} , M_{IV} , M_V .

Utilizzando i grafi minimali di Tucker nella caratterizzazione fornita nel Teorema 3.1.5 è possibile ottenere il seguente teorema strutturale per i grafi bipartiti aventi un V_2 -arrangiamento consecutivo.

Corollario 3.1.8. [26] *Un grafo bipartito $G = (V_1, V_2, A)$ ha un V_2 -arrangiamento consecutivo se e solo se G non contiene nessuno dei sottografi bipartiti I_k , II_k , III_k con $k \geq 1$ e IV , V .*

A questo punto riformuliamo il Corollario 3.1.8 in termini di matrici binarie, per ottenere il corrispondente teorema di struttura per le matrici C1P.

Siano M_{I_k} , M_{II_k} , M_{III_k} , M_{IV} , M_V le matrici $\{0, 1\}$, di dimensioni rispettivamente $(k+2, k+2)$, $(k+3, k+3)$, $(k+2, k+3)$, $(4, 6)$, $(4, 5)$, associate ai grafi bipartiti di Tucker elencati in Figura 3.3. Tali matrici sono dette *minori di Tucker*: sono illustrate in Figura 3.4 con le corrispondenze fra colonne e righe delle matrici e vertici associati nei grafi.

Definizione 3.1.9. Si dice *configurazione* di una matrice M di dimensione $m \times n$ l'insieme delle matrici $m \times n$ ottenibili da M permutandone le righe e le colonne.

Possiamo allora convertire il Corollario 3.1.8 nel seguente teorema di struttura per matrici binarie C1P.

Teorema 3.1.10. [26] *Una matrice $M \in \{0, 1\}^{m \times n}$ gode della proprietà degli uni consecutivi sulle righe se e solo se nessuna sottomatrice di M è un membro delle configurazioni di $M_{I_k}, M_{II_k}, M_{III_k}, M_{IV}, M_V$.*

Osservazione 3.1.11. [4] Dalla definizione dei grafi I_k, II_k, III_k abbiamo $k \leq 1$, e poiché tali grafi sono da intendersi come sottografi del grafo bipartito di partenza $G = (V_1, V_2, A)$ (o, equivalentemente, i minori $M_{I_k}, M_{II_k}, M_{III_k}, M_{IV}, M_V$ sono da intendersi come sottomatrici della matrice $M \in \{0, 1\}^{m \times n}$ di partenza), si ha che $k \leq \min\{n-2, m-2\}$ per I_k ed M_{I_k} , $k \leq \min\{n-3, m-3\}$ per II_k ed M_{II_k} e $k \leq \min\{n-3, m-2\}$ per III_k ed M_{III_k} .

Tuttavia i bound appena specificati su k possono essere trascurati per il seguente risultato.

Teorema 3.1.12. [4] *Una matrice- $\{0, 1\}$ è C1P se e solo se lo è la matrice ottenuta duplicando una riga.*

Una matrice- $\{0, 1\}$ è C1P se e solo se lo è la matrice ottenuta duplicando una colonna.

Segue inoltre dall'enunciato precedente il corollario

Corollario 3.1.13. [4] *Una matrice- $\{0, 1\}$ A è C1P se e solo se lo è ogni matrice ottenuta da A replicando un numero arbitrario di righe e/o colonne.*

Equivalentemente per i grafi bipartiti vale il seguente risultato.

Corollario 3.1.14. [4] *Un grafo bipartito $G = (V_1, V_2, A)$ ha un V_2 -arrangiamento consecutivo se e solo se il grafo $G' = (V'_1, V'_2, A')$, ottenuta da G replicando un numero arbitrario di nodi riga e/o colonna e gli spigoli ad essi adiacenti, ammette un V'_2 -arrangiamento consecutivo.*

3.1.3 Una prima formulazione per il vincolo C1P

Ci concentriamo ora sull'obiettivo di formalizzare il vincolo "la matrice X è C1P" tramite disuguaglianze lineari.

Come abbiamo visto nel Teorema 3.1.10 una matrice $M \in \{0, 1\}^{m \times n}$ gode della proprietà degli uni consecutivi sulle righe se e solo se non è possibile permutare le righe e/o le colonne di M in modo tale da ottenere come sottomatrice uno dei cinque minori di Tucker $M_{I_k}, M_{II_k}, M_{III_k}, M_{IV}, M_V$. Tale risultato permetterà di ottenere una prima formulazione per il vincolo C1P.

Introduciamo intanto delle notazioni appropriate.

Osservazione 3.1.15 (Notazioni). Data una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e presi due sottoinsiemi I, J ordinati degli insiemi degli indici di righe e colonne rispettivamente, denotiamo con M_{IJ} il *minore* di M definito dai sottoinsiemi ordinati I e J , ovvero la sottomatrice di M formata dalle righe con indici in I , prese nell'ordine stabilito da I , e dalle colonne con indici in J , prese nell'ordine stabilito da J .

Indicheremo inoltre con $[M]^{p,q}$ l'insieme di tutti i minori di M di dimensione $p \times q$ (ovvero tutti i membri delle configurazioni delle sottomatrici di M di dimensione $p \times q$).

Infine date due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ denoteremo con $A \circ B$ il *prodotto interno* di A per B :

$$A \circ B := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij}.$$

Definendo con $\tilde{M}_{I_k}, \tilde{M}_{II_k}, \tilde{M}_{III_k}, \tilde{M}_{IV}, \tilde{M}_V$ le matrici ottenute rispettivamente da $M_{I_k}, M_{II_k}, M_{III_k}, M_{IV}, M_V$ sostituendo le entrate 0 con -1, allora una prima formulazione per il vincolo "la matrice X è C1P " in termini di disequazioni lineari è data da:

$$\tilde{M}_{I_k} \circ X_{IJ} \leq 2k + 3 \quad \forall X_{IJ} \in [X]^{k+2, k+2} \text{ e } \forall k \geq 1 \quad (3.1)$$

$$\tilde{M}_{II_k} \circ X_{IJ} \leq 4k + 5 \quad \forall X_{IJ} \in [X]^{k+3, k+3} \text{ e } \forall k \geq 1 \quad (3.2)$$

$$\tilde{M}_{III_k} \circ X_{IJ} \leq 3k + 2 \quad \forall X_{IJ} \in [X]^{k+2, k+3} \text{ e } \forall k \geq 1 \quad (3.3)$$

$$\tilde{M}_{IV} \circ X_{IJ} \leq 8 \quad \forall X_{IJ} \in [X]^{4,6} \quad (3.4)$$

$$\tilde{M}_V \circ X_{IJ} \leq 10 \quad \forall X_{IJ} \in [X]^{4,5} \quad (3.5)$$

$$X \in \{0, 1\}^{m \times n}.$$

La validità delle disuguaglianze in questa formulazione segue dal fatto che esse escludono tutte e sole le matrici di Tucker come possibili sottomatrici di X .

Si verifica infatti che ogni matrice di Tucker viola una delle disuguaglianze 3.1-3.5:

i) $\tilde{M}_{I_k} \circ M_{I_k} = 2k + 4 > 2k + 3;$

ii) $\tilde{M}_{II_k} \circ M_{II_k} = 4k + 6 > 4k + 5;$

iii) $\tilde{M}_{III_k} \circ M_{III_k} = 3k + 3 > 3k + 2;$

iv) $\tilde{M}_{IV} \circ M_{IV} = 9 > 8;$

v) $\tilde{M}_V \circ M_V = 11 > 10.$

Si ha invece che tutte le altre matrici- $\{0, 1\}$ di dimensioni compatibili con il prodotto interno verificano le disuguaglianze 3.1-3.5. Infatti per qualsiasi matrice- $\{0, 1\}$ M non di Tucker esisterà un minore di Tucker M_{Tucker}

tale che M ha delle entrate 1 in corrispondenza di alcune posizioni 0 di M_{Tucker} e/o M ha delle entrate 0 in corrispondenza di alcune posizioni 1 di M_{Tucker} , altrimenti si avrebbe $M = M_{Tucker}$. Ma allora per ciascuna di queste posizioni differenti (i, j) tali che $|M(i, j) - M_{Tucker}(i, j)| = 1$ il membro sinistro della disequazione corrispondente a M_{Tucker} decresce di 1 rispetto al massimo possibile, pari al numero di entrate 1 in M_{Tucker} , rispettando così la disuguaglianza.

3.2 Il politopo degli uni consecutivi

Seguendo l'esposizione di Oswald e Reinelt in [19] vediamo come lo studio degli aspetti poliedrali del problema degli uni consecutivi permetta di ottenere disuguaglianze più stringenti per formulare il vincolo "X è C1P" in termini lineari. In particolare si ottengono quattro classi di disuguaglianze, delle quali la quarta è risultato di una correzione apportata da Brentegani in [4], che a differenza delle disuguaglianze di Tucker 3.1-3.5 definiscono faccette per il politopo degli uni consecutivi; esse inoltre escludono i minori di Tucker.

Definizione 3.2.1. [19] Si definisce *politopo degli uni consecutivi* relativo alle matrici di m righe e n colonne, denotato con $P_{C1}^{m,n}$, il politopo formato dall'involuppo convesso di tutte le matrici di dimensione $m \times n$ che godono della proprietà degli uni consecutivi sulle righe, ovvero:

$$P_{C1}^{m,n} := \text{conv}\{M \in \{0, 1\}^{m \times n} | M \text{ è C1P}\}$$

Osservazione 3.2.2 (Notazione). Gli elementi di $P_{C1}^{m,n}$ corrispondono a matrici di dimensione $m \times n$, ma per studiare il problema dal punto di vista poliedrale sarà conveniente intenderli come vettori $m \cdot n$ -dimensionali delle relative entrate. Un generico elemento $x \in P_{C1}^{m,n}$ sarà allora interpretato, a seconda del caso, come una matrice $m \times n$

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

oppure come il vettore

$$x = (x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}).$$

3.2.1 Proprietà del politopo $P_{C1}^{m,n}$

Dimostriamo innanzitutto due fondamentali proprietà del politopo degli uni consecutivi.

Proposizione 3.2.3. [19] Il politopo degli uni consecutivi $P_{C1}^{m,n}$ ha dimensione piena $m \cdot n$.

Dimostrazione. Per definizione basta verificare l'esistenza di $m \cdot n + 1$ matrici C1P affinemente indipendenti. Tali matrici sono ad esempio i vettori della base affine canonica di $\mathbb{R}^{m \times n}$, visti come matrici $m \cdot n$, ovvero la matrice nulla e per ogni $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ la matrice avente tutte entrate 0 eccetto l'entrata ij pari a 1. \square

La seconda proprietà richiede la seguente definizione preliminare.

Definizione 3.2.4. [19] Data una disuguaglianza $a^T x \leq a_0$ valida per $P_{C_1}^{m,n}$ e posti $m' \geq m$ e $n' \geq n$ si dice che una disuguaglianza $\bar{a}^T x \leq a_0$, valida per $P_{C_1}^{m',n'}$, è ottenuta da $a^T x \leq a_0$ attraverso un *lifting triviale* se

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i \leq m \text{ e } j \leq n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Teorema 3.2.5. [19] Sia $a^T x \leq a_0$ una disuguaglianza che definisce una faccetta di $P_{C_1}^{m,n}$ e siano $m' \geq m$ e $n' \geq n$. Se $a^T x \leq a_0$ è *liftata* *trivialmente*, allora la disuguaglianza risultante definisce una faccetta di $P_{C_1}^{m',n'}$.

Dimostrazione. Sia $\bar{a}^T x \leq a_0$ la disuguaglianza ottenuta dal lifting triviale di $a^T x \leq a_0$. Dimostrare che $\bar{a}^T x \leq a_0$ definisce una faccetta F di $P_{C_1}^{m',n'}$ significa dimostrare che

$$\dim(F) = \dim(P_{C_1}^{m',n'} \cap \{x \in \mathbb{R}^{m' \times n'} \mid \bar{a}^T x = a_0\}) = \dim(P_{C_1}^{m',n'}) - 1 = m' \cdot n' - 1$$

ovvero verificare l'esistenza di $m' \cdot n'$ matrici C1P affinemente indipendenti che soddisfino $\bar{a}^T x = a_0$.

Consideriamo innanzitutto il caso $m' > m$ ed $n' = n$, supponendo senza perdita di generalità $m' = m + 1$. Sia \bar{x} una matrice di $P_{C_1}^{m,n}$ che soddisfa l'uguaglianza $a^T x = a_0$, ovvero appartiene alla faccetta di $P_{C_1}^{m,n}$ definita da $a^T x \leq a_0$. Definiamo la matrice \bar{x}_0 , ottenuta aggiungendo a \bar{x} una riga di zeri, e \bar{x}_j , $\forall j = 1, \dots, n$, ottenuta aggiungendo a \bar{x} una riga di zeri eccetto un 1 in corrispondenza della colonna j , ovvero:

$$\bar{x}_{kij} := \begin{cases} x_{ij} & i \leq m, j \leq n \\ 1 & i = m' = m + 1, j = k \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Le $n+1$ matrici così generate sono C1P, perché lo è \bar{x} , e soddisfano l'uguaglianza $\bar{a}^T x = a_0$, per la definizione di lifting triviale. Poiché per ipotesi $a^T x \leq a_0$ definisce una faccetta di $P_{C_1}^{m,n}$, si ha che esistono $m \cdot n$ matrici di $P_{C_1}^{m,n}$ affinemente indipendenti che soddisfano $a^T x = a_0$, e per ciascuna di queste con la costruzione precedente si possono ottenere $n + 1$ matrici

C1P che soddisfano $\bar{a}^T x = a_0$, delle quali $(m+1)n$ affinemente indipendenti: in questo modo resta provato che la disuguaglianza trivialmente liftata $\bar{a}^T x = a_0$ definisce una faccetta di $P_{C_1}^{m+1,n}$.

Analogamente si può ragionare per il caso $m' = m$ ed $n' > n$, supponendo senza perdita di generalità $n' = n+1$. Definiamo la matrice \tilde{x}_0 , ottenuta aggiungendo a \bar{x} una colonna di zeri, e \tilde{x}_i , $\forall i = 1, \dots, m$, ottenuta aggiungendo a \bar{x} una colonna di zeri eccetto un 1 in corrispondenza della riga i , ovvero:

$$\tilde{x}_{h_{ij}} := \begin{cases} x_{ij} & i \leq m, j \leq n \\ 1 & i = h, j = n' = n+1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Anche in questo caso le $m+1$ matrici così generate sono C1P, perché la colonna $(n+1)$ -esima può essere spostata in posizione appropriata, e soddisfano l'uguaglianza $\bar{a}^T x = a_0$, per la definizione di lifting triviale. Poiché per ipotesi $a^T x \leq a_0$ definisce una faccetta di $P_{C_1}^{m,n}$, si ha che esistono $m \cdot n$ matrici di $P_{C_1}^{m,n}$ affinemente indipendenti che soddisfano $a^T x = a_0$, e per ciascuna di queste con la costruzione precedente si possono ottenere $m+1$ matrici C1P che soddisfano $\bar{a}^T x = a_0$, delle quali $m(n+1)$ affinemente indipendenti: in questo modo resta provato che la disuguaglianza trivialmente liftata $\bar{a}^T x = a_0$ definisce una faccetta di $P_{C_1}^{m,n+1}$.

Iterando le due costruzioni precedenti si ottiene il risultato voluto. \square

Il teorema appena dimostrato afferma che, quando è possibile effettuare un lifting triviale, i politopi più grandi ereditano tutte le faccette dei politopi di dimensione inferiore. In particolare si possono considerare le disuguaglianze sulle variabili binarie $x_{ij} \geq 0$ e $x_{ij} \leq 1$ per ogni $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$; tali disuguaglianze sono per definizione valide per $P_{C_1}^{m,n}$, e applicando il teorema precedente si ottiene che definiscono faccette, come dimostrato nel seguente risultato.

Teorema 3.2.6. [19] Per ogni $m \geq 1, n \geq 1, 1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, le disuguaglianze $x_{ij} \geq 0$ e $x_{ij} \leq 1$ definiscono faccette di $P_{C_1}^{m,n}$.

Dimostrazione. Dal Teorema 3.2.5 si ha che per ottenere la tesi è sufficiente provare che le disuguaglianze $x_{ij} \geq 0$ e $x_{ij} \leq 1$ definiscono faccette di $P_{C_1}^{1,1}$, e questo segue dal fatto che $P_{C_1}^{1,1} = \text{conv}(0, 1)$. \square

3.2.2 Formulazione con faccette per il vincolo C1P

Una volta fornite le principali proprietà poliedrali del politopo $P_{C_1}^{m,n}$, Oswald e Reinelt introducono in [19] quattro classi di disuguaglianze che non solo escludono tutti i minori di Tucker, ma definiscono anche faccette di $P_{C_1}^{m,n}$ e quindi risultano più stringenti della formulazione di Tucker.

$$F_{1_k} = \begin{matrix} & y & b_1 & \dots & b_{k-1} & z & x \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ v \\ u \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & -1 \\ & 1 & 1 & & & & -1 \\ & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & 1 & 1 & & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$F_{2_k} = \begin{matrix} & y & b_1 & \dots & \dots & b_k & z & x \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ v \\ t \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & -1 & -1 \\ & 1 & 1 & & & & -1 & -1 \\ & & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$F_3 = \begin{matrix} & y & u & x & t & z & v \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad F_4 = \begin{matrix} & u & y & z & v & x \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Figura 3.5: Matrici dei coefficienti F_{1_k}, F_{2_k}, F_3 proposte da Oswald e Reinelt, e la matrice F_4 proposta da Brentegani.

L'ultima delle quattro classi di disuguaglianze di [19] viene corretta da Brentegani in [4], dal momento che la disuguaglianza originaria viene dimostrata non essere valida per $P_{C_1}^{m,n}$. In Figura 3.5 elenchiamo allora le matrici F_{1_k}, F_{2_k}, F_3 introdotte da Oswald e Reinelt, di dimensione rispettivamente $(k+2, k+2), (k+3, k+3), (4, 6)$ con $k \geq 1$ e le cui disuguaglianze indotte escludono i minori di Tucker di tipo $M_{I_k}, M_{II_k}, M_{III_k}, M_{IV}$, e la matrice F_4 introdotta da Brentegani, di dimensione $(4, 5)$ e la cui disuguaglianza indotta esclude il minore di Tucker M_V .

La dimostrazione del fatto che le matrici F_{1_k}, F_{2_k}, F_3 inducono disuguaglianze definenti faccette per $P_{C_1}^{m,n}$ viene fornita in maniera diretta in [19].

Teorema 3.2.7. [19] *Le disuguaglianze $F_{1_k} \circ x_{IJ} \leq 2k + 3, \forall k \geq 1$ e $\forall(k+2, k+2)$ -upla (I, J) definiscono faccette di $P_{C_1}^{m,n} \forall m \geq k+2, \forall n \geq k+2$.*

Teorema 3.2.8. [19] *Le disuguaglianze $F_{2_k} \circ x_{IJ} \leq 2k + 3, \forall k \geq 1$ e $\forall(k+2, k+3)$ -upla (I, J) definiscono faccette di $P_{C_1}^{m,n} \forall m \geq k+2, \forall n \geq k+3$.*

Teorema 3.2.9. [19] *Le disuguaglianze $F_3 \circ x_{IJ} \leq 8$, $\forall k \geq 1$ e $\forall(4, 6)$ -upla (I, J) definiscono faccette di $P_{C_1}^{m,n} \forall m \geq 4, \forall n \geq 6$.*

Inoltre in [4] si dimostra che anche la matrice F_4 induce disuguaglianze definenti faccette per $P_{C_1}^{m,n}$, con l'ausilio del software PORTA.

Teorema 3.2.10. [4] *Le disuguaglianze $F_4 \circ x_{IJ} \leq 8$, $\forall k \geq 1$ e $\forall(4, 5)$ -upla (I, J) definiscono faccette di $P_{C_1}^{m,n} \forall m \geq 4, \forall n \geq 5$.*

La genesi delle disuguaglianze indotte dalle matrici $F_{1_k}, F_{2_k}, F_3, F_4$ e il motivo della loro validità ha un fondamento grafico. In [4] si dimostra infatti che, a partire da sottoinsiemi di archi dei grafi di Tucker formati da tre cammini che rendono la tripla x, y, z asteroidale, si possono ottenere le matrici dei coefficienti $F = (f_i)$, $i = 1, \dots, m \cdot n$ fissando le entrate associate agli archi come segue:

- $f_i = 1$ per tutti gli archi i appartenenti ai cammini della configurazione;
- $f_i = -1$ per tutti gli archi i la cui presenza invalida l'asteroidalità della tripla x, y, z con i tre cammini iniziali;
- $f_i = 0$ per tutti i rimanenti archi i .

Formalizzeremo nella sezione successiva questo procedimento nella Procedura 3 e dimostreremo come la genesi grafica garantisca la validità della disuguaglianza indotta. Verificheremo inoltre nella Proposizione 3.3.5 come la definizione di queste disuguaglianze escluda sempre i minori associati alla configurazione iniziale: nel caso delle matrici dei coefficienti $F_{1_k}, F_{2_k}, F_3, F_4$, ottenute partendo da cammini di una tripla asteroidale x, y, z in un grafo di Tucker, risultano allora esclusi proprio i grafi $M_{I_k}, M_{II_k}, M_{III_k}, M_{IV}, M_V$, formati dai cammini scelti e dagli altri archi dei grafi di Tucker posti a 0 poiché che non eliminano l'asteroidalità di x, y, z con i tre cammini dati.

Osservazione 3.2.11. Si ha che gli archi dei grafi di Tucker non appartenenti ai cammini iniziali, essendo posti a 0, sono ininfluenti per il valore della disuguaglianza: di conseguenza le disuguaglianze indotte da $F_{1_k}, F_{2_k}, F_3, F_4$ escludono un insieme di matrici che include altri minori oltre a quelli di Tucker. Perciò le disuguaglianze 3.1-3.5 della formulazione di Tucker sono meno stringenti di quelle indotte dalle $F_{1_k}, F_{2_k}, F_3, F_4$, che definiscono faccette, e non possono dunque definire a loro volta facce massimali.

Seguendo questo metodo, è possibile generalizzare la scelta dei cammini della configurazione di partenza, senza necessariamente limitarsi agli

archi contenuti nei sottografi di Tucker: in [11] Festa applica la Procedura 3 a configurazioni ottenute dai grafi di Tucker rendendo arbitraria la lunghezza dei cammini che rendono asteoridale la tripla x, y, z . Si ottengono in questo modo le matrici dei coefficienti in Figura 3.6, che si dimostrano definire faccette per il politopo $P_{C1}^{m,n}$ in maniera analoga a quanto fatto in [19] per le $F_{1_k}, F_{2_k}, F_3, F_4$. Le matrici generalizzate $\overline{\overline{F}}_{1_{s,d,l}}, \overline{\overline{F}}_{2_{s,d,l}}, \overline{\overline{F}}_{3_{s,d,l}}, \overline{\overline{F}}_{4_{u,s,d,l}}$ così definite includono come casi particolari, per opportune scelte dei parametri u, s, d, l , rispettivamente le $F_{1_k}, F_{2_k}, F_3, F_4$.

Possiamo infine dare una formulazione più stringente per il vincolo “la matrice X è C1P”, composta solo da faccette del politopo $P_{C1}^{m,n}$:

$$F_{1_k} \circ X_{IJ} \leq 2k + 3 \quad \forall X_{IJ} \in [X]^{k+2, k+2} \text{ e } \forall k \geq 1 \quad (3.7)$$

$$F_{2_k} \circ X_{IJ} \leq 2k + 3 \quad \forall X_{IJ} \in [X]^{k+2, k+3} \text{ e } \forall k \geq 1 \quad (3.8)$$

$$F_3 \circ X_{IJ} \leq 8 \quad \forall X_{IJ} \in [X]^{4,6} \quad (3.9)$$

$$F_4 \circ X_{IJ} \leq 8 \quad \forall X_{IJ} \in [X]^{4,5} \quad (3.10)$$

$$X \in \{0, 1\}^{m \times n}.$$

Anche per questa formulazione si verifica infatti che ogni matrice di Tucker viola una delle disuguaglianze 3.7-3.10:

- i) $F_{1_k} \circ M_{I_k} = 2k + 4 > 2k + 3$;
- ii) $F_{1_{k+1}} \circ M_{II_k} = 2k + 6 > 2(k + 1) + 3$;
- iii) $F_{2_k} \circ M_{III_k} = 2k + 4 > 2k + 3$;
- iv) $F_3 \circ M_{IV} = 9 > 8$;
- v) $F_4 \circ M_V = 9 > 8$.

3.3 Procedure per la formulazione di disuguaglianze valide

Fino ad ora abbiamo ottenuto formulazioni valide per il vincolo “ X è C1P”, prima tramite la caratterizzazione delle matrici C1P fornita da Tucker in [26] e in seguito tramite le faccette introdotte da Oswald e Reinelt in [19], la cui genesi grafica è esplicitata da Brentegani in [4] e generalizzata da Festa in [11]. Cercheremo nel seguito di formalizzare i metodi adottati per ottenere tali formulazioni, definendo in tal modo delle procedure per la formulazione di disuguaglianze valide per il politopo $P_{C1}^{m,n}$ che siano sempre più generali, seguendo la linea espositiva di [8].

Per quanto riguarda le disuguaglianze (3.1)-(3.5), basate sulla caratterizzazione data in [26], possiamo notare che esse sono ottenute applicando la seguente procedura generale a partire dai minori di Tucker.

$$\overline{\overline{F}}_{1_{s,d,l}} = \begin{pmatrix} & y & b_1 & \dots & b_{s-1} & z & c_1 & \dots & \dots & c_{d-1} & x & e_1 & \dots & e_{l-1} \\ a_1 & \left(\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & & & & & & & & & -1 & & & \\ \vdots & 0 & 1 & 1 & & & & & & & -1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots & & & \\ a_s & 0 & & & 1 & 1 & & & & & -1 & & & \\ r_1 & -1 & & & & 1 & 1 & & & & 0 & & & \\ \vdots & -1 & & & & 0 & 1 & 1 & & & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & & & \\ \vdots & -1 & & & & 0 & & & 1 & 1 & 0 & & & \\ r_d & -1 & & & & 0 & & & & 1 & 1 & & & \\ t_1 & 0 & & & & -1 & & & & & 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & 0 & & & & -1 & & & & & & & 1 & 1 \\ t_l & 1 & & & & -1 & & & & & & & & 1 \end{array} \right) \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{F}}_{2_{s,d,l}} = \begin{pmatrix} & y & b_1 & \dots & b_{s-1} & z & c_1 & \dots & c_{d-1} & x & e_1 & \dots & e_{l-1} & w \\ a_1 & \left(\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & & & & -1 & & & & -1 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 1 & -1 & & & & -1 & & & & 0 \\ a_s & & & & 1 & -1 & & & & -1 & & & & 1 \\ r_1 & -1 & & & & 1 & 1 & & & -1 & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & -1 & & & & & & 1 & 1 & -1 & & & & 0 \\ r_d & -1 & & & & & & & 1 & -1 & & & & 1 \\ t_1 & -1 & & & & -1 & & & & 1 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -1 & & & & -1 & & & & & & 1 & 1 & 0 \\ t_l & 1 & & & & -1 & & & & & & & 1 & 1 \end{array} \right) \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{F}}_{3_{s,d,l}} = \begin{pmatrix} & y & b_1 & \dots & b_s & z & c_1 & \dots & c_d & x & e_1 & \dots & e_l \\ a_1 & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & & & -1 & & & & -1 & & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \vdots & & & & \\ a_s & 0 & & 1 & 1 & -1 & & & -1 & & & & \\ r_1 & -1 & & & 0 & 1 & 1 & & -1 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \\ r_d & -1 & & & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & & & & \\ t_1 & -1 & & & -1 & & 0 & 0 & 1 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ t_l & -1 & & & -1 & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ w & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{pmatrix}$$

$$\overline{F}_{4_{u,s,d,l}} = \begin{pmatrix} & \beta_1 & \dots & \beta_{u-1} & y & b_1 & \dots & b_s & z & c_1 & \dots & c_d & x & e_1 & \dots & e_l \\ \alpha_1 & 1 & & & & & & & 1 & & & & -1 & & & \\ \vdots & 1 & 1 & & & & & & 0 & & & & -1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ \alpha_u & & & 1 & 1 & & & & 0 & & & & -1 & & & \\ a_1 & & & & 1 & 1 & & & -1 & & & & 0 & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ a_s & & & & 0 & & 1 & 1 & -1 & & & & 0 & & & \\ r_1 & & & & -1 & & & 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 & & & \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ r_d & & & & -1 & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & & \\ t_1 & & & & -1 & & & & -1 & & 0 & 0 & 1 & 1 & & \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ t_l & & & & -1 & & & & -1 & & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ w & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 3.6: Matrici dei coefficienti $\overline{F}_{1_{s,d,l}}$, $\overline{F}_{2_{s,d,l}}$, $\overline{F}_{3_{s,d,l}}$, $\overline{F}_{4_{u,s,d,l}}$ definite da Festa.

Procedura 1. [8] Si consideri una configurazione di archi $K \subseteq \{ij : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ non C1P. Si fissino i coefficienti della matrice $F = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, associati agli archi del grafo bipartito completo $G = \{ij : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ contenente K , nel seguente modo:

1. si ponga per tutti gli archi di K $\alpha_{ij} = 1 \forall ij \in K$;
2. si ponga per tutti i rimanenti indici $\alpha_{ij} = -1 \forall ij \in G \setminus K$;
3. la disuguaglianza che si ottiene è:

$$F \circ X := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq |K| - 1. \quad (3.11)$$

Notiamo subito che le disuguaglianze 3.11 risultano sempre valide per costruzione.

Proposizione 3.3.1. [8] *La Procedura 1 genera disuguaglianze valide per il politopo $P_{C1}^{m,n}$*

Dimostrazione. Si ha che l'unica matrice \overline{M} con entrate binarie che viola la disuguaglianza 3.11 è quella che rende il termine di sinistra pari a $|K|$, ovvero:

$$\overline{M} = (\overline{m}_{ij}) := \begin{cases} 1 & ij \in K \\ 0 & ij \in G \setminus K. \end{cases}$$

Tale matrice \overline{M} è associata ad una configurazione non C1P per ipotesi: abbiamo allora dimostrato come l'unica matrice binaria che viola una disuguaglianza generata dalla Procedura 1 non appartenga a $P_{C1}^{m,n}$, da cui la validità. \square

Notiamo che se la configurazione di partenza K è uno dei minori di Tucker si ottiene una delle disuguaglianze della formulazione (3.1)-(3.5), che esclude tali matrici.

Le formulazioni valide per il politopo degli uni consecutivi sono necessariamente costituite da sistemi di disuguaglianze del tipo:

$$F \circ X \leq b, \text{ con } F \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}, X \in \{0, 1\}^{m \times n}$$

dove i punti binari che violano la condizione sono tutti associati a matrici non C1P. Abbiamo però visto che una matrice è non C1P se e solo se il grafo bipartito ad essa associato presenta tre vertici colonna che formano una tripla asteroidale, ossia contiene tre cammini che collegano ogni coppia di vertici della tripla senza essere adiacenti al terzo nodo. In particolare si ha il seguente risultato.

Teorema 3.3.2. [11] *Siano $x, y, z \in V_2$ tre nodi colonna in un grafo bipartito completo $\overline{G}(V_1, V_2, A)$, con V_1 insieme di nodi riga e V_2 insieme di nodi colonna, e $P_1, P_2, P_3 \subseteq G$ tre cammini rispettivamente da x a y , da y a z e da z a x che rendono la tripla x, y, z asteroidale. Si definisca $\mathcal{G}(P_1, P_2, P_3)$ l'insieme di tutti i grafi bipartiti non orientati nei quali i cammini P_1, P_2, P_3 dimostrano che x, y, z è una tripla asteroidale. Sia poi $F \circ X \leq b$ una disuguaglianza tale che, per ogni matrice $\overline{X} \in \{0, 1\}^{m \times n}$ con $m = |V_1|$ e $n = |V_2|$, valga l'implicazione:*

$$F \circ \overline{X} > b \Rightarrow G \in \mathcal{G}(P_1, P_2, P_3),$$

ove G è il grafo bipartito associato a \overline{X} . Allora ogni disuguaglianza

$$F \circ X_{IJ} \leq b \text{ con } X_{IJ} \in [X]^{m \times n}$$

è valida per $P_{C1}^{m',n'}$ per ogni $m' \geq m$ e $n' \geq n$.

Osservazione 3.3.3. Notiamo che il risultato precedente considera matrici di dimensioni $m' \geq m$ e $n' \geq n$ grazie al lifting triviale, e di conseguenza non è necessario specificare la dimensione del politopo in analisi, a patto che questa sia almeno pari a $m \times n$; ciò rimane vero anche nel caso in cui si prendano in considerazione faccette, a partire dalle quali un lifting triviale restituisce altre faccette.

Inoltre il Teorema 3.3.2 definisce disuguaglianze valide indipendentemente dall'ordinamento delle righe e delle colonne, in virtù della natura grafica della definizione di tripla asteroidale: nel prosieguo si tratteranno allora classi di disuguaglianze definite a meno di permutazioni di righe e colonne.

Si ha allora che affinché una disuguaglianza sia valida è sufficiente assicurare che ogni matrice binaria che la viola sia associata ad un grafo bipartito contenente tre cammini che definiscono una tripla asteroidale di nodi colonna. Utilizzando questo risultato è possibile allora migliorare le disuguaglianze (3.11), fissando a 0 i coefficienti associati agli archi della configurazione iniziale K che non appartengono ai tre cammini scelti, che definiscono la tripla asteroidale, e sottraendo il numero di tali archi al termine noto: dal momento che questi coefficienti erano posti a 1 nella Procedura 1 si otterranno in tal modo disuguaglianze più stringenti.

Procedura 2. [8] Si consideri una configurazione di archi $K \subseteq \{ij : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ non C1P. Si scelgano tre nodi colonna $x, y, z \in K$ e si fissino in K tre cammini $P_1, P_2, P_3 \subseteq K$ rispettivamente da x a y , da y a z e da z a x che rendono la tripla x, y, z asteroidale. Si fissino i coefficienti della matrice $F = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, associati agli archi del grafo bipartito completo $G = \{ij : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ contenente K , nel seguente modo:

1. si ponga per tutti gli archi che costituiscono i cammini scelti $\alpha_{ij} = 1 \forall ij \in P_1 \cup P_2 \cup P_3$;
2. si ponga per gli indici di K non appartenenti ai cammini fissati $\alpha_{ij} = 0 \forall ij \in K \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$;
3. si ponga per tutti i rimanenti indici $\alpha_{ij} = -1 \forall ij \in G \setminus K$;
4. la disuguaglianza che si ottiene è:

$$F \circ X := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq |P_1 \cup P_2 \cup P_3| - 1. \quad (3.12)$$

Anche in questo caso le disuguaglianze generate dalla procedura risultano sempre valide.

Proposizione 3.3.4. *La Procedura 2 genera disuguaglianze valide per il politopo $F_{C1}^{m,n}$*

Dimostrazione. Si ha che le uniche matrici \overline{M} con entrate binarie che violano la disuguaglianza 3.12 sono quelle che rendono il termine di sinistra pari a $|P_1 \cup P_2 \cup P_3|$, ovvero:

$$\overline{M} = (\overline{m}_{ij}) := \begin{cases} 1 & ij \in P_1 \cup P_2 \cup P_3 \\ 0 & ij \in G \setminus K \end{cases}$$

mentre le entrate in $K \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$ possono essere arbitrariamente 0 oppure 1. Il grafo bipartito associato alla matrice \overline{M} contiene i tre

cammini P_1, P_2, P_3 che rendono x, y, z una tripla asteroidale, oltre eventualmente ad altri archi appartenenti alla configurazione K non C1P che non influiscono sull'asteroidalità. Risulta allora che ogni matrice binaria che viola una disuguaglianza generata dalla Procedura 2 contiene la tripla x, y, z , la cui asteroidalità viene dimostrata dai cammini P_1, P_2, P_3 , e quindi non appartiene a $P_{C_1}^{m,n}$: questo dimostra la validità. \square

Notiamo che la Procedura 1 e la Procedura 2 coincidono nel caso in cui la configurazione iniziale coincida con l'unione dei tre cammini che rendono la tripla x, y, z asteroidale, mentre se $K \not\supseteq P_1 \cup P_2 \cup P_3$ differiscono nel fissare i coefficienti di $K \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$.

Seguendo lo stesso ragionamento che ha portato dalla Procedura 1 a definire la Procedura 2, si cerca nuovamente di portare a 0 alcuni dei coefficienti fissati a -1 dai procedimenti finora visti. In particolare si vogliono lasciare a -1 soltanto i coefficienti associati agli archi che invalidano l'asteroidalità della tripla x, y, z fissata nella Procedura 2, ossia gli archi che rendono uno dei cammini P_1, P_2, P_3 adiacenti al terzo vertice.

Procedura 3. [8] Si scelgano tre nodi colonna $x, y, z \in V_2$ in un grafo bipartito completo $\overline{G}(V_1, V_2, A)$, con V_1 insieme di nodi riga e V_2 insieme di nodi colonna. Si consideri la configurazione iniziale $C = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ data dall'unione di tre cammini $P_1, P_2, P_3 \subseteq G$ rispettivamente da x a y , da y a z e da z a x che rendono la tripla x, y, z asteroidale. Si fissino i coefficienti α_j , $j \in N$, associati agli archi del grafo bipartito completo $G = \overline{G}_{|C}(V_{1|C}, V_{2|C}, N)$ indotto dai vertici dei cammini dati, nel seguente modo:

1. si ponga $\alpha_i = +1 \forall i \in C$;
2. si ponga $\alpha_i = -1$ per tutti gli archi appartenenti all'insieme:

$$D := \{(a, b) : b \in \{x, y, z\}, a \in V_1 \cap P_k$$
 dove P_k è il cammino che congiunge i due nodi di $\{x, y, z\} \setminus \{b\}$;
3. si ponga $\alpha_i = 0 \forall i \in N \setminus \{C \cup D\}$;
4. la disuguaglianza che si ottiene è:

$$F \circ X := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq |C| - 1. \quad (3.13)$$

Notiamo che modificando la scelta dei tre cammini P_1, P_2, P_3 si possono ottenere diverse disuguaglianze 3.13.

Verifichiamo anzitutto che per come è definito l'algoritmo esso fornisce disuguaglianze valide.

Proposizione 3.3.5. *La Procedura 3 genera disuguaglianze valide per il politopo $P_{C_1}^{m,n}$ e che escludono il minore associato alla configurazione di partenza C .*

Dimostrazione. Per costruzione della matrice dei coefficienti F che induce la disuguaglianza ottenuta (3.13), il minore \overline{M} associato alla configurazione di partenza C ha $|C|$ entrate pari a $+1$ corrispondenti ai coefficienti $\alpha_i = +1 \forall i \in C$ e tutte le altre entrate nulle, dunque:

$$F \circ \overline{M} = \sum_{i \in C} 1 = |C| \not\geq |C| - 1$$

e viola la disuguaglianza.

Per quanto riguarda la validità, si ha che una matrice binaria M viola la disuguaglianza (3.13) se e solo se:

$$\begin{aligned} M_i &= 1 & \forall i \in C \\ M_i &= 0 & \forall j \in N \setminus C \text{ t.c. } \alpha_j = -1. \end{aligned}$$

Il grafo bipartito associato a tale matrice M sarà dunque così composto:

- conterrà il grafo bipartito associato a \overline{M} ;
- non conterrà nessuno degli archi associati alle entrate -1 di F ;
- potrà indifferentemente contenere o meno tutti gli altri archi, che saranno quelli aventi gli indici $N \setminus C$ per i quali $\alpha_j = 0$.

Un tale grafo contiene i cammini P_1, P_2, P_3 che rendono x, y, z tripla asteroidale in \overline{M} e non contiene nessuno degli archi in $N \setminus C$ che rendono uno dei tre cammini adiacenti al terzo vertice in G , perché se così fosse dovrebbe contenere almeno uno degli archi associati alle entrate -1 di F . Questo significa che in tale grafo è presente la tripla asteroidale x, y, z , e dunque la matrice M non è C1P. Riassumendo se una matrice viola la disuguaglianza (3.13) allora non sarà C1P, il che implica la validità di tale disuguaglianza, generata dalla procedura, per il politopo $P_{C_1}^{m,n}$. \square

Con la suddetta procedura si è data in [4] una genesi grafica delle disuguaglianze introdotte in [19], generalizzate poi da quelle introdotte in [11], sempre seguendo lo stesso procedimento. Infatti in [11] si dimostra come applicando la Procedura 3 alle configurazioni ottenute dai grafi associati ai minori di Tucker, anche rendendo arbitrarie le lunghezze dei cammini che congiungono i nodi della tripla asteroidale, si ottengono disuguaglianze definenti faccette. Nella fattispecie si prendono in considerazione le disequazioni indotte dalle matrici dei coefficienti $\overline{F}_{1_{s,d,l}}, \overline{F}_{2_{s,d,l}}, \overline{F}_{3_{s,d,l}}$ e $\overline{F}_{4_{u,s,d,l}}$, le quali sono una generalizzazione rispettivamente delle F_{1_k}, F_{2_k}, F_3 e F_4 , introdotte in [19] e la cui genesi grafica viene esposta in [4].

Si vorrebbe però comprendere il motivo della scelta di tali configurazioni iniziali fra tutte quelle non C1P: questo sarà chiarito al Capitolo 5, nel quale si mostrerà come la Procedura 3 sia riconducibile ad un lifting sequenziale scegliendo esattamente le configurazioni iniziali considerate [11].

Come osservato in [28] l'approccio della Procedura 3 è piuttosto conservativo: infatti da un lato tale algoritmo viene inizializzato scegliendo una particolare tripla asteroidale x, y, z di partenza, e dall'altro fra tali nodi colonna vengono selezionati tre precisi cammini che rendono asteroidale la tripla scelta. Di conseguenza, come notato nella Proposizione 3.3.5, le disuguaglianze generate dalla Procedura 3 escludono i vettori 0-1 associati alle matrici non C1P la cui asteroidalità nel grafo bipartito associato è provata dalla tripla x, y, z con i cammini scelti.

In generale però, affinché una disuguaglianza sia valida, è sufficiente che nel grafo associato ad una matrice che la viola esista una tripla asteroidale qualsiasi e i cui cammini non sono sempre univocamente determinati. La procedura che presentiamo di seguito è in questo senso una generalizzazione: essa infatti tiene in considerazione, nella generazione di disuguaglianze, la presenza di triple asteroidali alternative a quella iniziale.

Procedura 4. Si scelgano tre nodi colonna $x, y, z \in V_2$ in un grafo bipartito completo $\overline{G}(V_1, V_2, A)$, con V_1 insieme di nodi riga e V_2 insieme di nodi colonna. Si consideri la configurazione iniziale $C = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ data dall'unione di tre cammini $P_1, P_2, P_3 \subseteq G$ rispettivamente da x a y , da y a z e da z a x che rendono la tripla x, y, z asteroidale. Si fissino i coefficienti α'_j , $j \in N$, associati agli archi del grafo bipartito completo $G = \overline{G}_{|C}(V_{1|C}, V_{2|C}, N)$ indotto dai vertici dei cammini dati, nel seguente modo:

1. si ponga $\alpha'_i = +1 \forall i \in C$;
2. si considerino tutte le combinazioni $K \subseteq N \setminus C$ di k archi non fissati:
 - se non ci sono combinazioni, STOP.
 - se ci sono combinazioni, per ciascuna di esse:
 - se l'aggiunta di tutti gli archi della combinazione al grafo iniziale elimina la presenza di qualsiasi tripletta asteroidale, allora aggiungi il vincolo

$$\sum_{j \in K} \alpha_j \leq -1; \quad (3.14)$$

3. risolvere il problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max_{F|_{N \setminus C} = (\alpha_j)_{j \in N \setminus C}} \quad & \sum_{j \in N \setminus C} c_j \alpha_j & (3.15) \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{j \in K} \alpha_j \leq -1, \quad \forall K \subseteq N \setminus C \\ & \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in N \setminus C; \end{aligned}$$

con i pesi c_j assegnati a priori;

4. la disuguaglianza che si ottiene è:

$$F \circ X := \sum_{i=1}^n \alpha'_i x_i \leq |C| - 1. \quad (3.16)$$

Proposizione 3.3.6. *La Procedura 4 genera disuguaglianze che escludono il minore \overline{M} associato alla configurazione di partenza.*

Dimostrazione. Per costruzione della matrice dei coefficienti F che induce la disuguaglianza ottenuta (3.16), il minore associato alla configurazione di partenza \overline{M} ha $|C|$ entrate pari a $+1$ corrispondenti ai coefficienti $\alpha'_i = +1 \forall i \in C$ e tutte le altre entrate nulle, dunque:

$$F \circ \overline{M} = \sum_{i \in C} 1 = |C| \not\leq |C| - 1$$

e viola la disuguaglianza. □

Effettuiamo ora alcune osservazioni riguardanti i coefficienti ottenibili dalla Procedura 4.

Anzitutto osserviamo che, sebbene nel problema 3.15 gli α'_j , $j \in N \setminus C$ siano in generale nel dominio dei numeri reali, si possono restringere i valori dei coefficienti ai numeri interi senza perdita di generalità. Infatti il problema di massimizzazione della procedura è un programma lineare i cui vincoli definiscono faccette e quindi anche vertici razionali: poiché le soluzioni di base di tale problema sono situate nei vertici, esse saranno a coordinate in \mathbb{Q} e quindi in \mathbb{Z} a meno di moltiplicazione per uno scalare positivo.

In secondo luogo notiamo che per la caratterizzazione grafica che è stata data alla Procedura 4, fissando i coefficienti in base al ruolo degli archi corrispondenti nel grafo bipartito G , si possono individuare classi di disuguaglianze ottenibili dalla procedura con la medesima scelta della configurazione di partenza C .

Osservazione 3.3.7. a) Per ogni disuguaglianza (3.16) ottenuta dalla Procedura 4 si ha che permutando le righe e/o le colonne di F

si ottiene ancora una matrice che induce una disuguaglianza della stessa classe. Infatti basta permutare nello stesso modo le righe e/o le colonne delle variabili x_i e ripetere il ragionamento grafico della procedura sul grafo G , in quanto le permutazioni di righe e colonne non modificano il grafo bipartito associato ad una matrice binaria.

- b) Eseguendo diverse scelte dei pesi c_j nella funzione obiettivo di 3.15 si generano in generale diverse disuguaglianze, le quali rispettano però tutte gli stessi vincoli del tipo (3.14).

Rimangono a questo punto da chiarire due aspetti relativi alla Procedura 4 sopra esposta: in primo luogo si vorrebbe stabilire se le disuguaglianze 3.16 ottenute siano effettivamente valide per il politopo $P_{C_1}^{m,n}$. Nel caso in cui ci si restringa a considerare i punti $x \in \{0, 1\}^n$ per i quali $x_i = 1 \forall i \in C$ la validità delle disuguaglianze è garantita per costruzione, come dimostrato dalla seguente proposizione.

Proposizione 3.3.8. *Le disuguaglianze 3.16 sono valide per $P_C = P_{C_1}^{m,n} \cap \text{conv}(\{x \in \{0, 1\}^n : x_i = 1 \forall i \in C\})$, con C configurazione iniziale per la Procedura 4 che genera le disequazioni.*

Dimostrazione. I punti binari di $\text{conv}(\{x \in \{0, 1\}^n : x_i = 1 \forall i \in C\})$, che sono i vertici di tale politopo 0-1, sono raggruppabili in due insiemi, a seconda di quali altre coordinate oltre a quelle in C sono poste a 1:

- i punti $x \in P_C$ tali che $x_i = 1 \forall i \in K \subseteq N \setminus C$, con K combinazione di archi che aggiunti al grafo iniziale eliminano la presenza di qualsiasi tripletta asteroidale;
- i punti $x \in P_C$ tali che $x_i = 1 \forall i \in K' \subseteq N \setminus C$, con K' combinazione di archi che aggiunti al grafo iniziale non eliminano l'asteroidalità.

Si ha allora che i punti appartenenti al primo insieme appartengono a $P_{C_1}^{m,n}$ e dunque a P_C , mentre quelli del secondo insieme no.

Affinché le disuguaglianze 3.16 siano valide per P_C è sufficiente che tutti i punti del primo insieme le soddisfino, mentre quelli del secondo insieme possono indifferentemente essere validi o meno. Dalla definizione della Procedura 4 si ha che per ogni punto x del primo insieme vale:

$$F \circ X = \sum_{i=1}^n \alpha'_i x_i = |C| + \sum_{j \in K} \alpha'_j \leq |C| - 1,$$

ovvero la disuguaglianza risulta soddisfatta. \square

Nel caso in cui si considerino tutti i punti di $P_{C_1}^{m,n}$, e non solamente quelli con coordinate in C pari a 1, si ha che la validità della Procedura 4 non si può garantire come fatto nella proposizione precedente: infatti le combinazioni K' di archi che aggiunti al grafo iniziale non eliminano

l'asteroidalità potrebbero farlo nel caso in cui non fossero presenti alcuni degli archi di C , ovvero quando alcune coordinate in C sono pari a 0. Dal momento che tali combinazioni K' non sono tra quelle che forniscono le condizioni 3.14 nella Procedura 4, la somma dei coefficienti ad esse associati non è vincolata ad assumere un valore particolare, e quindi si ha che per i punti $x \in \{0, 1\}^n$ tali che $x_i = 1 \forall i \in K'$ non si può affermare a priori la validità di:

$$F \circ X = \sum_{i=1}^n \alpha'_i x_i \leq |C| - 1.$$

Se dalla definizione della Procedura 4 non è possibile stabilire in maniera diretta la validità delle disequazioni 3.16 vedremo nel Capitolo 5 un approccio più generale per risolvere tale problema; ricondurremo, per particolari istanze, la procedura ad un lifting a partire da opportune sezioni del politopo delle matrici C1P. Grazie a tale identificazione si potrà stabilire, per le configurazioni e gli ordinamenti considerati, la validità delle 3.16, grazie alle proprietà dell'algoritmo di lifting che genera sempre disuguaglianze valide, e ottenere informazioni sulla dimensione delle facce indotte da tali disequazioni sul politopo $P_{C_1}^{m,n}$.

In secondo luogo rimane da determinare se la Procedura 4 sia effettivamente una generalizzazione della Procedura 3, ovvero se a partire da una stessa configurazione iniziale C e per un'opportuna scelta dei pesi c_j le disuguaglianze 3.13 siano comprese fra le 3.16. Anche in questo caso si otterrà tale risultato come conseguenza dell'identificazione delle procedure note con casi particolari di lifting: nello specifico si vedrà che per configurazioni iniziali opportune la Procedura 3 si riconduce ad una particolare istanza di lifting sequenziale, che coincide a sua volta con la Procedura 4.

Capitolo 4

Lifting e generazione di faccette

Nel capitolo precedente sono state presentate varie classi di disuguaglianze che definiscono faccette per il politopo delle matrici consecutive ones. In particolare sono state considerate le disuguaglianze indotte dalle matrici $\bar{F}_{1_{s,d,l}}$, $\bar{F}_{2_{s,d,l}}$, $\bar{F}_{3_{s,d,l}}$ e $\bar{F}_{4_{u,s,d,l}}$, le quali sono una generalizzazione rispettivamente delle F_{1_k} , F_{2_k} , F_3 e F_4 , introdotte in [19] e la cui genesi grafica viene esposta in [4]. Si dimostra in [11] che tali disuguaglianze generalizzate (e di conseguenza anche i loro casi particolari) definiscono effettivamente facce massimali del politopo delle matrici consecutive ones. Si è notato però che tutte le suddette classi di disuguaglianze non bastano a descrivere completamente il politopo $P_{C_1}^{m,n}$ per dimensioni arbitrarie: ad esempio nell'elenco completo per il caso $m = 4$ e $n = 4$, tratto da [19], compaiono ulteriori 8 classi.

In questo capitolo introdurremo un nuovo metodo, molto generale, per ottenere faccette partendo da disuguaglianze definenti facce di politopi di dimensioni inferiori, e aggiungendo in maniera opportuna nuove variabili e relativi coefficienti tramite la procedura di lifting sequenziale introdotta al Capitolo 2. Si prenderanno in considerazione politopi di partenza che sono sezioni di $P_{C_1}^{m,n}$, ottenute intersecando tale poliedro con sottospazi del tipo $\{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0, j \in N \setminus C\}$, con $C \subseteq N = \{1, 2, \dots, n\}$ insieme di indici opportunamente scelto.

Nel seguito specializzeremo la procedura di lifting sequenziale al caso del politopo delle matrici consecutive ones, evidenziando in particolare come il calcolo dei nuovi coefficienti nelle iterazioni della sequenza possa essere interpretato in maniera grafica: questo ci permetterà, come vedremo nel dettaglio al Capitolo 5, di estrapolare dei legami fra gli ordinamenti delle variabili da aggiungere e i valori dei coefficienti nelle disequazioni ottenute.

Eseguiamo poi il lifting sequenziale su di un esempio specifico, nello svolgimento del quale si cercheranno di riconoscere delle caratteristiche generali al fine di analizzare le due possibili scelte che l'algoritmo lascia: anzitutto individuare delle disuguaglianze definenti faccette per sezioni di partenza, le quali dimostreremo porgere tutte, al termine della sequen-

za di lifting, disuguaglianze definenti faccette del politopo delle matrici consecutive ones. In secondo luogo riconoscere classi di equivalenza di ordinamenti che restituiscono la stessa disuguaglianza.

In questo capitolo ci concentreremo sul primo dei due problemi, mentre lo studio del secondo verrà sviluppato di seguito nel Capitolo 5. Cercheremo anzitutto di individuare dei criteri algebrici per stabilire quando la disuguaglianza di partenza del lifting sequenziale è una faccetta della sezione iniziale. Infine come applicazione si riotterrà, a partire da una disuguaglianza definente una faccetta per la sezione iniziale, una disequazione già nota come risultato di un lifting sequenziale.

4.1 Lifting per il politopo delle matrici consecutive ones

Abbiamo introdotto nel Capitolo precedente la nozione di lifting sequenziale per generici politopi 0-1. L'obiettivo è adesso quello di utilizzare tale tecnica con il politopo delle matrici consecutive ones, in modo da generare disuguaglianze che costituiscano faccette.

4.1.1 Specializzazione del lifting sequenziale al politopo C1P

Applicando la procedura di lifting sequenziale vista nel Capitolo 2 precedente al politopo $P_{C_1}^{m,n}$ delle matrici consecutive ones si possono generare disuguaglianze valide per tale politopo, se si parte da disequazioni in dimensione più bassa le quali siano valide per politopi del tipo:

$$Q_C = P_{C_1}^{m,n} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C\}, \quad (4.1)$$

ovvero per sezioni del politopo delle matrici consecutive ones eseguite con $l = |N \setminus C|$ iperpiani ciascuno dei quali pone a 0 una delle variabili con indice in $N \setminus C$.

Osservazione 4.1.1. In particolare si vorrebbe che anche le disuguaglianze di dimensione inferiore definiscano faccette per le sezioni (4.1). In tal caso infatti la Proposizione 2.4.1 garantisce che ogni singolo lifting della procedura sequenziale generi faccette nella dimensione aumentata, porgendo quindi al termine della sequenza facce massimali nella dimensione $m \times n$. La Proposizione 2.4.1 ammette però la possibilità che partendo da facce non massimali si possano ottenere al termine della sequenza delle faccette; infatti la Proposizione afferma che con ogni singolo lifting la dimensione della faccia indotta dalla disuguaglianza elevata cresce *almeno* di 1, quindi l'aumento può essere anche maggiore. Nel seguito vedremo che questo si verifica ad esempio nel caso della disuguaglianza F_4 .

A partire dalla disequazione iniziale $\sum_{j \in C} \alpha_j x_j \leq \beta$ i coefficienti delle dimensioni aggiunte sono dati, nel caso del problema degli uni consecutivi, da:

$$\alpha_{j_h} := \beta - \max \left\{ \sum_{j \in C_{h-1}} \alpha_j x_j : x \in P_{C_1}^{m,n}, x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C_h, x_{j_h} = 1 \right\}. \quad (4.2)$$

Nello specifico, ad ogni passo della sequenza vengono cercate fra tutte le matrici binarie di dimensione $m \times n$ tali che:

- le entrate con indici nell'insieme di partenza $C_0 = C$ e le $h - 1$ entrate i cui coefficienti α_j sono già stati ottenuti dalla sequenza fino alla corrente iterazione h -esima non vengono fissate, quindi possono valere 0 oppure 1;
- l'entrata h -esima viene fissata a 1;
- tutte le altre entrate, cioè quelle in $N \setminus C_h$, vengono fissate a 0,

quelle con la proprietà degli uni consecutivi sulle colonne che massimizzano la funzione obiettivo di (4.2), con coefficienti $\alpha_j, j \in C_{h-1} = C_0 \cup \{j_1, \dots, j_{h-1}\}$ che comprendono quelli fissati a priori in partenza (nell'insieme C_0) e quelli ottenuti fino all'iterazione corrente (nell'insieme $\{j_1, \dots, j_{h-1}\}$).

Notiamo che sebbene in generale non valga per il politopo $P_{C_1}^{m,n}$ l'ipotesi $A \geq 0$ fatta in [6] per garantire l'ammissibilità, in quanto le matrici F_{1_k}, F_{2_k}, F_3 e F_4 inducono faccette che contribuiscono alla descrizione minimale del politopo, è comunque sempre possibile eseguire il lifting sequenziale per le matrici consecutive ones. Difatti il massimo in (2.2) è sempre definito, poiché $\{x \in S \equiv P_{C_1}^{m,n}, x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C_h, x_{j_h} = 1\} \neq \emptyset$ dal momento che a tale insieme appartiene sempre almeno la matrice avente 1 nell'entrata j -esima e tutte le altre entrate nulle, la quale è C1P.

Osservazione 4.1.2 (Interpretazione grafica del lifting). Si è visto nel Capitolo 3 come in [26] si mostri che la ricerca di matrici consecutive ones può essere graficamente tradotta nella ricerca di grafi bipartiti privi di triple asteroidali colonna, dove la corrispondenza fra le matrici binarie e i grafi bipartiti è stabilita biunivocamente.

Possiamo allora adottare tale approccio grafico per tradurre la procedura di lifting sequenziale, che opera sulle disequazioni le cui variabili sono le entrate delle matrici binarie, in un algoritmo che prende in esame gli archi del grafo bipartito associato a tali matrici.

Algoritmo 2 (Lifting Sequenziale - Versione grafica). Sia data una disuguaglianza $\sum_{j \in C} \alpha_j x_j \leq \beta$, con coefficienti aventi indici in un insieme $C \subseteq N$:

1. Scegliere un ordinamento j_1, \dots, j_l degli archi associati ai coefficienti non ancora fissati nella disequazione di partenza, ovvero con indici in $N \setminus C$. Sia $C_0 := C$ e $C_h := C_{h-1} \cup \{j_h\}$ per $h = 1, \dots, l$.
2. Per $h = 1, \dots, l$:
 - cercare fra tutti i grafi bipartiti $G(V_1, V_2, A)$ con $|V_1| = m, |V_2| = n$ tali che:
 - gli archi dell'insieme di partenza $C_0 = C$ e gli $h - 1$ archi i cui coefficienti α_j sono già stati ottenuti dalla sequenza fino alla corrente iterazione h -esima non vengono fissati, quindi possono essere presenti oppure no in A ;
 - l'arco h -esimo è presente in A ;
 - tutti gli altri archi, cioè quelli di $N \setminus C_h$, non sono presenti, quelli privi di triple asteroidali di nodi colonna che massimizzino la funzione obiettivo:

$$\max = \sum_{j \in C_{h-1}} \alpha_j x_j; \quad (4.3)$$

- porre $\alpha_{j_h} := \beta - \max$ e iterare.

Tale approccio permette di eseguire il controllo sui grafi dell'assenza di triple asteroidali con ragionamenti grafici, a differenza della verifica della proprietà C1P la quale richiede di calcolare e controllare tutte le possibili permutazioni delle colonne una matrice. Il principale vantaggio che ne segue è che da tali ragionamenti sarà possibile estrapolare dei legami fra gli ordinamenti degli indici nella sequenza del lifting e i valori dei coefficienti delle disuguaglianze elevate, e che tali osservazioni saranno generalizzabili a dimensioni non fissate.

In particolare il risultato principale sarà cercare ordinamenti che restituiscono la stessa disuguaglianza al termine del lifting sequenziale. Lo studio di queste classi di equivalenza di sequenze verrà approfondito nel Capitolo 5.

4.1.2 Esempio: il minore M_{IV}

Dopo aver specializzato la procedura di lifting sequenziale al politopo delle matrici consecutive ones, prendiamo in considerazione l'applicazione di tale algoritmo ad un esempio specifico, quello del minore di Tucker M_{IV} illustrato in Figura 4.1.

Osservazione 4.1.3. Nello svolgimento di questo esempio si cercheranno di riconoscere delle caratteristiche generali al fine di analizzare le due possibili scelte che l'algoritmo di lifting sequenziale lascia:

- a) individuare delle disuguaglianze di partenza per la procedura definita faccette per le sezioni Q_C , le quali per la Proposizione 2.4.1 porgono tutte, al termine della sequenza di lifting, disuguaglianze definita faccette del politopo delle matrici consecutive ones;
- b) riconoscere delle classi di equivalenza di ordinamenti che restituiscono la stessa disuguaglianza, definita una faccetta, al termine del lifting sequenziale, partendo da una fissata configurazione C iniziale.

Consideriamo dunque il politopo $P_{C1}^{4,6}$, ovvero prendiamo in esame matrici aventi 4 righe e 6 colonne, le quali sono associate a grafi bipartiti con 4 nodi riga e 6 nodi colonna. Scegliamo come insieme C di partenza quello degli indici corrispondenti agli archi presenti nel minore di Tucker M_{IV} , illustrati in Figura 4.1, ovvero sia:

$$C = \{(a_2, x), (a_2, t), (a_4, t), (a_1, y), (a_1, u), (a_4, u), (a_3, z), (a_3, v), (a_4, v)\}$$

e fissiamo i relativi coefficienti nella disequazione di partenza a +1; il termine noto sarà invece pari a 8, e sarà lasciato inalterato dalla procedura. Stiamo quindi considerando come disuguaglianza di partenza:

$$\sum_{i \in C} x_i \leq 8, \quad (4.4)$$

che dovrà essere valida per la sezione:

$$Q_{IV} = P_{C1}^{4,6} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C\}, \quad N = \{1, \dots, 20\}. \quad (4.5)$$

La validità discende dal fatto che l'unica matrice 0-1 con le entrate di $N \setminus C$ fissate a 0 che viola (4.4) è proprio il minore di Tucker M_{IV} , in quanto $8 = |C| - 1$ e di conseguenza tutte le entrate di C dovranno essere pari a 1.

Prima di eseguire il lifting verifichiamo che la disuguaglianza di partenza definisca effettivamente una faccetta per la sezione iniziale. Lo dimostreremo in due modi: con un approccio computazionale, nel quale utilizzeremo il software PORTA, e con uno geometrico, che darà lo spunto per una generalizzazione nel seguito della trattazione.

Proposizione 4.1.4. *La disuguaglianza (4.4) definisce una faccetta per la sezione (4.5).*

Dimostrazione computazionale. Generando i vertici della sezione (4.5) e trasformando tramite il comando `traf` del software PORTA [5] la descrizione del loro involucro convesso in un sistema minimale di disequazioni, risulta che la disuguaglianza (4.4) rientra tra queste e dunque definisce una faccia di dimensione massimale per (4.5). \square

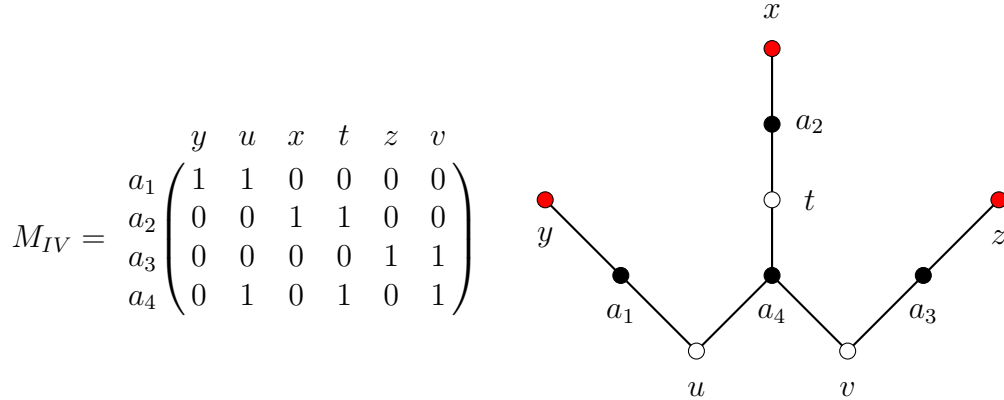


Figura 4.1: Il minore di Tucker M_{IV} e il grafo bipartito ad esso associato.

Dimostrazione geometrica. Si vogliono individuare $\dim(Q_{IV})$ punti appartenenti a:

$$F = Q_{IV} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in C} x_i = 8 \right\} \quad (4.6)$$

e affinementemente indipendenti, che provino dunque che la dimensione di tale faccia è esattamente $\dim(Q_{IV}) - 1$. Per quanto riguarda la determinazione dei punti, analizzando le coordinate non fissate a 0 dei vertici della sezione (cioè quelle con indici in C), si può osservare che tra queste sono presenti i vettori binari di dimensione 9 aventi un'entrata nulla e le altre a 1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tali punti sono affinementemente indipendenti, infatti sottraendo dai primi otto l'ultimo punto (quello con ultima coordinata nulla), si ottengono gli 8 vettori linearmente indipendenti:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre essi appartengono alla faccia (4.6) della sezione, in quanto soddisfano ad uguaglianza la disequazione (4.4) e appartengono alla sezione stessa (4.5): infatti le matrici aventi come entrate di indici C le coordinate di tali punti e le altre variabili fissate a 0 dalle equazioni degli iperpiani, godono tutte della proprietà degli uni consecutivi sulle righe. Questo si può dedurre per via grafica osservando i grafi bipartiti associati a tali matrici, ottenibili dal minore M_{IV} eliminando uno degli archi, e tutti privi di triple asteroidali di nodi colonna; per la caratterizzazione di Tucker [26] questo è equivalente al fatto che le matrici date siano C1P. \square

Una volta dimostrato che la disuguaglianza di partenza definisce una faccetta per la sezione scelta, è possibile applicare l'algoritmo di lifting sequenziale con la certezza che al termine della procedura si otterrà una faccetta per il politopo delle matrici consecutive ones, come garantito dalla Proposizione 2.4.1.

Fissata la sezione di partenza, rimane a questo punto la seconda scelta da operare nell'esecuzione dei lifting: quella di come ordinare gli indici in $N \setminus C$. Tale arbitrarietà può in generale essere fonte di una diversità nelle disequazioni restituite dalla procedura, e in effetti questo accade nel nostro esempio.

Scegliamo inizialmente come sequenza del lifting il seguente ordinamento degli indici di $N \setminus C$:

$$\begin{aligned} (j_1, \dots, j_l) = & ((a_1, t), (a_1, v), (a_2, u), (a_2, v), (a_3, t), (a_3, u), \\ & (a_4, y), (a_2, y), (a_3, y), (a_4, x), (a_1, x), (a_3, x), \\ & (a_4, z), (a_2, z), (a_1, z)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Eseguito il lifting sequenziale con tale ordine, i coefficienti α_{j_h} risultano:

$$(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_l}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1).$$

Infatti per calcolare il massimo osserviamo, utilizzando l'approccio grafico, che:

1. aggiungendo uno dei primi sei archi dell'ordinamento al grafo bipartito associato al minore di Tucker M_{IV} , e considerando eventualmente gli archi associati ai coefficienti 0 già calcolati dalla procedura, permane la presenza della tripla asteroidale x, y, z con i cammini specificati in [4]. Eliminando però un opportuno arco fra quelli del grafo di partenza, associati ai coefficienti 1 fissati a priori, si elimina ogni possibile tripla asteroidale colonna, e lo si fa ottenendo il massimo in (4.2). Dunque il coefficiente associato all'arco in analisi, il cui indice è quello dell'iterazione corrente dell'algoritmo, sarà uguale a:

$$\alpha_j = \beta - (|C| - 1) = |C| - 1 - (|C| - 1) = 8 - 8 = 0;$$

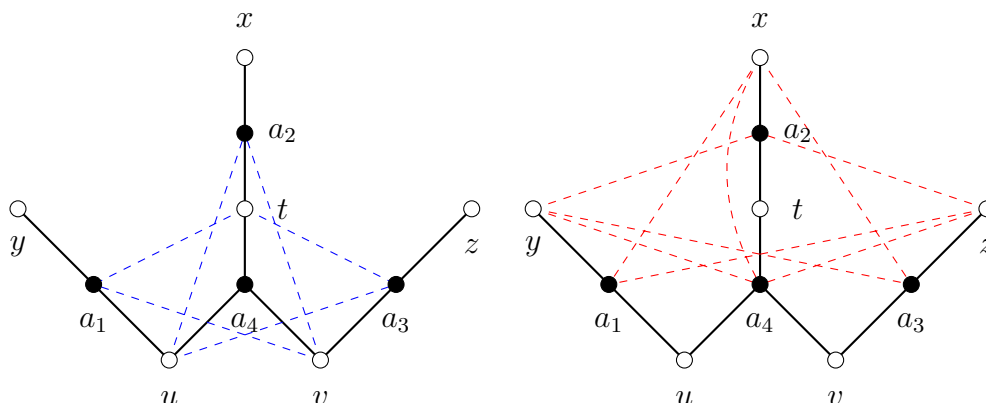


Figura 4.2: Il grafo bipartito associato ad M_{IV} nel quale sono evidenziati a sinistra con il tratteggio blu gli archi in corrispondenza delle entrate 0 di F_3 e a destra con il tratteggio rosso gli archi in corrispondenza delle entrate -1 di F_3 .

- aggiungendo uno degli ultimi nove archi dell'ordinamento al grafo bipartito associato al minore di Tucker M_{IV} , si può eliminare ogni possibile asteroidalità sulle colonne considerando un opportuno arco tra quelli associati ai coefficienti 0 già calcolati dalla procedura, e lo si fa ottenendo il massimo in (4.2). Dunque il coefficiente associato all'arco in analisi, il cui indice è quello dell'iterazione corrente dell'algoritmo, sarà uguale a:

$$\alpha_j = \beta - (|C| - 1) = |C| - 1 - (|C|) = 8 - 9 = -1.$$

In Figura 4.2 vengono evidenziati e distinti i due insiemi di archi associati ai coefficienti che la procedura determina, in modo da visualizzare la presenza o assenza di triple asteroidali a seconda della scelta di quali, fra gli archi dati a priori o già fissati nella sequenza di lifting, includere nel grafo. Notiamo a questo punto che la disequazione ottenuta con questa istanza dell'algoritmo è:

$$\begin{matrix} & y & u & x & t & z & v \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \circ x \leq 8, \end{matrix}$$

che è esattamente quella indotta dalla matrice F_3 .

Si vuole a questo punto controllare l'esito fornito dall'algoritmo cambiando l'ordinamento degli indici, per verificare se al termine di diverse sequenze di lifting si ottengono disuguaglianze, sempre definenti faccette, differenti da F_3 ed eventualmente individuare delle relazioni fra tali disequazioni.

Scegliamo ad esempio come nuova sequenza del lifting il seguente ordinamento degli indici di $N \setminus C$:

$$(j_1, \dots, j_l) = ((a_2, v), (a_3, t), (a_2, y), (a_3, y), (a_1, x), (a_1, z), \\ (a_2, u), (a_3, u), (a_1, t), (a_1, v), (a_4, y), (a_4, x), (a_3, x), (a_4, z), (a_2, z)). \quad (4.8)$$

Eseguendo il lifting sequenziale con tale ordine, i coefficienti α_{j_h} risultano:

$$(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_l}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1).$$

I valori sono anche in questo caso pari a 0 per i primi sei indici e a -1 per gli ultimi nove; infatti per calcolare il massimo possiamo eseguire gli stessi ragionamenti fatti sulla sequenza precedente, riutilizzando l'approccio grafico con archi diversi. La disuguaglianza risultante è quella indotta dalla matrice $F_{IV_3}^B$, ottenuta fra i risultati in [8].

Confrontando i coefficienti ottenuti nelle due istanze precedenti dell'algoritmo, notiamo due condizioni che risultano rispettate in entrambi i casi:

- a) i valori dei coefficienti sono tutti 0 oppure -1;
- b) i coefficienti associati agli archi che, aggiunti al grafo bipartito associato al minore di Tucker M_{IV} , eliminano ogni possibile tripla asteroidale colonna, sono pari a -1, così come la somma dei coefficienti relativi alle coppie di archi che, aggiunte allo stesso grafo, ne eliminano ogni asteroidalità sulle colonne.

Tali condizioni collimano con la Procedura 4 che abbiamo definito al Capitolo 3. Si può verificare, utilizzando i calcoli svolti in [8], che tale algoritmo applicato al minore di Tucker M_{IV} impone i seguenti vincoli

sulle entrate f_j della matrice che definisce la disuguaglianza:

$$f_{(a_4,y)} \leq -1 \quad (4.9)$$

$$f_{(a_4,x)} \leq -1 \quad (4.10)$$

$$f_{(a_4,z)} \leq -1 \quad (4.11)$$

$$f_{(a_1,x)} + f_{(a_1,t)} \leq -1 \quad (4.12)$$

$$f_{(a_1,x)} + f_{(a_2,u)} \leq -1 \quad (4.13)$$

$$f_{(a_1,t)} + f_{(a_2,y)} \leq -1 \quad (4.14)$$

$$f_{(a_1,z)} + f_{(a_1,v)} \leq -1 \quad (4.15)$$

$$f_{(a_1,z)} + f_{(a_3,u)} \leq -1 \quad (4.16)$$

$$f_{(a_1,v)} + f_{(a_3,y)} \leq -1 \quad (4.17)$$

$$f_{(a_2,y)} + f_{(a_2,u)} \leq -1 \quad (4.18)$$

$$f_{(a_2,z)} + f_{(a_2,v)} \leq -1 \quad (4.19)$$

$$f_{(a_2,z)} + f_{(a_3,t)} \leq -1 \quad (4.20)$$

$$f_{(a_2,v)} + f_{(a_3,x)} \leq -1 \quad (4.21)$$

$$f_{(a_3,y)} + f_{(a_3,u)} \leq -1 \quad (4.22)$$

$$f_{(a_3,x)} + f_{(a_3,t)} \leq -1, \quad (4.23)$$

dove (4.9)-(4.11) sono legati al primo gruppo di archi dell'osservazione e (4.12)-(4.23) al secondo; massimizzando poi la funzione obiettivo, data dalla somma opportunamente pesata delle entrate, si possono riottenere esattamente i coefficienti del lifting sequenziale con i vari ordinamenti.

Dal fatto che, *per questo esempio e con questo particolare ordinamento degli indici di $N \setminus C$* , il lifting sequenziale coincide con l'applicazione della Procedura 4 si possono trarre due conclusioni:

- dalle proprietà del lifting segue che, applicando la Procedura 4 alla disuguaglianza (4.4), che definisce una faccetta della sezione di partenza (4.5), la disequazione ottenuta definisce a sua volta una faccetta per il politopo delle matrici consecutive ones;
- viceversa dalla definizione della Procedura 4 segue che, applicando il lifting sequenziale a ordinamenti diversi, ma tali che le coppie di indici in (4.12)-(4.23) mantengano la stessa precedenza nella sequenza, si otterranno gli stessi coefficienti.

Un esempio di sequenza che mantiene le stesse precedenze nelle coppie di indici dell'ordinamento (4.8) è dato dal seguente ordinamento degli indici di $N \setminus C$:

$$(j_1, \dots, j_i) = ((a_4, z), (a_2, v), (a_3, t), (a_2, z), (a_2, y), (a_3, x), (a_3, y), (a_1, x), \\ (a_1, z), (a_2, u), (a_4, y), (a_1, v), (a_3, u), (a_1, t), (a_4, x)). \quad (4.24)$$

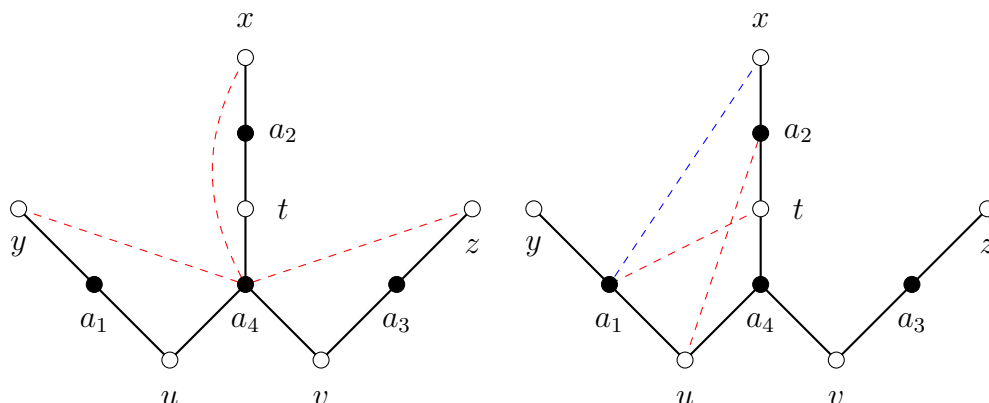


Figura 4.3: Il grafo bipartito associato ad M_{IV} nel quale sono evidenziati a sinistra con il tratteggio rosso gli archi con indici in (4.9)-(4.11) e a destra gli archi delle coppie con indici in (4.12),(4.13), con in blu quello posto a 0 nella disuguaglianza e in rosso i due posti a -1.

Coerentemente con quanto osservato dalla definizione della Procedura 4, tale ordinamento porge nuovamente al termine dell'algoritmo di lifting sequenziale la disuguaglianza indotta dalla matrice $F_{IV_3}^B$. Una visualizzazione del ruolo grafico differente degli archi nei vincoli (4.9)-(4.11) e (4.12)-(4.23) si ha in Figura 4.3: notiamo che tutti gli archi con indici in (4.9)-(4.11) vengono posti a -1 nella disuguaglianza indotta dalla matrice $F_{IV_3}^B$, mentre gli archi delle coppie con indici in (4.12),(4.13) sono posti a 0 nella disuguaglianza se hanno la precedenza nella sequenza, a -1 se invece hanno una posizione successiva nella sequenza.

Infine deduciamo da quanto osservato che ordinamenti nei quali vengono modificate le precedenze nelle coppie di indici in (4.12)-(4.23) originano disequazioni differenti. Le osservazioni stimolate dall'esempio proposto saranno ulteriormente generalizzate nel Capitolo 5, dove si definiranno delle condizioni per le quali il lifting sequenziale coincide con la Procedura 4 in [8], producendo le stesse disuguaglianze. Inoltre, il Capitolo 6 elencherà le altre possibili disuguaglianze ottenibili tramite il lifting sequenziale da diversi ordinamenti.

4.2 Determinazione di sezioni di partenza per faccette note

Fino a questo punto abbiamo definito la nozione di lifting sequenziale, per poi specializzare tale procedura al politopo delle matrici consecutive ones, con la garanzia di ottenere faccette di quest'ultimo se si verifica la condizione sufficiente di cominciare l'algoritmo da una disuguaglianza definente una faccetta della sezione di partenza. Abbiamo poi analizzato

l'applicazione di tale procedura su un'istanza di esempio, quella del minore di Tucker M_{IV} , ed esaminato le possibili disequazioni risultanti da diverse sequenze.

Problema 3. L'obiettivo nel prosieguo della trattazione sarà quello di, a partire da casi particolari di faccette già note, riconoscere delle caratteristiche generali al fine di analizzare le due possibili scelte lasciate dall'algoritmo di lifting sequenziale:

- a) individuare delle disuguaglianze definenti faccette per sezioni di partenza Q_C , le quali per la Proposizione 2.4.1 porgono tutte, al termine della sequenza di lifting, disuguaglianze definenti faccette del politopo delle matrici consecutive ones. Come applicazione si troveranno quelle faccette a partire dalle quali il lifting sequenziale fa riottenere disequazioni già note o ricavabili tramite procedure note;
- b) riconoscere fra le entrate di $N \setminus C$ classi di equivalenza di ordinamenti che restituiscono la stessa disuguaglianza, definente una faccetta, al termine del lifting sequenziale, partendo da una fissata configurazione C iniziale.

Nel resto di questo Capitolo ci concentreremo sul primo problema, mentre lo studio del secondo verrà sviluppato di seguito nel Capitolo 5. Cercheremo anzitutto di individuare dei criteri algebrici per stabilire quando la disuguaglianza di partenza del lifting sequenziale, che deve essere valida, è una faccetta della sezione iniziale.

4.2.1 Condizioni algebriche generali

Nella definizione data di lifting, la condizione necessaria iniziale è che la disequazione da elevare sia valida per la sezione di partenza. Come già osservato in 4.1.1, si vorrebbe che le disuguaglianze di dimensione inferiore non solo siano valide, ma definiscano anche faccette per le sezioni (4.1): in tal caso infatti la Proposizione 2.4.1 garantisce che il lifting sequenziale generi sempre faccette del politopo delle matrici consecutive ones, indipendentemente dall'ordinamento degli indici della procedura.

Osservando lo svolgimento dell'esempio in 4.1.2, che vogliamo generalizzare, vediamo che la dimostrazione del fatto che la disuguaglianza di partenza (4.4) sia valida e definisca una faccetta per la sezione (4.5) è stata eseguita in due modi:

- empiricamente, con l'ausilio del software PORTA;
- geometricamente, verificando la validità di (4.4) per la sezione e cercando di individuare $\dim(Q_{IV}) + 1$ punti affinemente indipendenti che appartengano alla faccia di (4.5) indotta dall'iperpiano di supporto di (4.4).

Cerchiamo di formalizzare in maniera più generale il punto di vista geometrico.

Validità

Notiamo come prima cosa che la validità della disuguaglianza di partenza (4.4) discende nell'esempio dal fatto che l'unica matrice con le entrate nulle in $N \setminus C$ che viola la disuguaglianza è M_{IV} , il quale essendo un minore di Tucker non è C1P, mentre tutte le matrici della sezione $Q_C = Q_{IV}$ soddisfano (4.4). Dunque il controllo non è stato eseguito per tutta la sezione, ma soltanto per i suoi punti interi (0-1): ciò in realtà può essere fatto senza perdita di generalità se tali punti interi sono vertici del politopo in analisi, come dimostrato dalla seguente proposizione tratta da [6].

Proposizione 4.2.1. [6] *Sia dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Una disequazione $ax \leq b$ è valida per $\text{conv}(S)$ se e solo se lo è per S .*

Dimostrazione. Segue dal fatto che, come dimostrato ad esempio in [6]:

$$\sup\{ax : x \in S\} = \sup\{ax : x \in \text{conv}(S)\}.$$

□

I punti binari esaminati nell'esempio sono vertici del politopo delle matrici consecutive ones, in quanto si tratta di un politopo 0-1; in generale non è però detto che sezionando un poliedro i vertici della sezione risultante siano tutti vertici del poliedro di partenza. Questo si verifica nel caso particolare dei politopi 0-1, come dimostrato dal seguente lemma.

Lemma 4.2.2. [6] *Sia dato $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e si consideri una disequazione $ax \leq b$ valida per X ed il suo iperpiano di supporto $H := \{x \in \mathbb{R}^n : ax = b\}$. Allora $\text{conv}(X) \cap H = \text{conv}(X \cap H)$*

Come dimostrato in [6], il risultato appena visto vale sotto l'ipotesi che la disuguaglianza $ax \leq b$ sia valida per X (e quindi anche per $\text{conv}(X)$). Se ci restringiamo al caso dei politopi 0-1, nei quali $X \subseteq \{0, 1\}^n$, e consideriamo come iperpiano $H \equiv H_j = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0\}$, allora la validità della disuguaglianza è sempre assicurata.

Iterando il risultato sui politopi 0-1 si ottiene il seguente corollario.

Corollario 4.2.3. *Tutti i vertici della sezione di un politopo 0-1 con un sottospazio del tipo $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0 \quad \forall j \in J \subseteq N\}$ sono anche vertici del poliedro di partenza. In particolare la sezione è anch'essa un politopo 0-1, quindi i vertici sono esattamente quelli del poliedro iniziale appartenenti al sottospazio dato.*

Dimostrazione. Il Lemma 4.2.2 dimostra il risultato per il caso $|J| = 1$. Osservando che:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0 \quad \forall j \in J \subseteq N\} = \bigcap_{j \in J \subseteq N} H_j$$

si può iterare il risultato per ogni singolo iperpiano H_j , dimostrandone la validità per il sottospazio dato dalla loro intersezione.

Poiché si è dimostrato che i vertici della sezione sono tutti nell'insieme dei vertici del poliedro di partenza, il quale è un politopo 0-1, allora segue che la sezione è involucro convesso dei suoi punti binari, cioè per definizione è anch'essa un politopo 0-1. Da ciò segue la seconda parte dell'enunciato. \square

Si può allora concludere che il controllo della validità, per la sezione iniziale, della disuguaglianza di partenza di un lifting può essere eseguito senza perdita di generalità sui soli punti binari della sezione stessa.

Osserviamo però che, volendo riottenere una disuguaglianza:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq \beta,$$

si dovrà necessariamente partire da una disequazione iniziale del lifting nella quale i coefficienti siano gli stessi α_i con $i \in C$, così come β : infatti i coefficienti iniziali ed il termine noto vengono lasciati inalterati dalla procedura di lifting. Notiamo allora che la validità per la sezione Q_C della disuguaglianza di partenza così determinata, che avevamo verificato nell'esempio particolare in 4.1.2, è in realtà un risultato generale, come enunciamo nel seguente teorema.

Teorema 4.2.4. *Data la disequazione $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq \beta$, valida per $P_{C_1}^{m,n}$, qualsiasi disuguaglianza ottenuta ponendo a zero i coefficienti con indici in $N \setminus C$ e mantenendo lo stesso termine noto, ovvero del tipo:*

$$\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq \beta, \tag{4.25}$$

sarà sempre valida per la sezione Q_C .

Dimostrazione. Segue direttamente dal fatto che i punti della sezione che violano la disequazione (4.25), dove i coefficienti in $N \setminus C$ sono 0, sono esattamente quelli con entrate in $N \setminus C$ nulle che violano la disequazione iniziale. \square

Condizione necessaria per le faccette

Siamo riusciti finora a dimostrare in maniera generale che, conoscendo una disequazione valida per il politopo delle matrici consecutive ones (in particolare cercheremo di riottenere faccette note), la disuguaglianza ottenuta fissando a zero i coefficienti con indici in un certo $C \setminus N$ è valida per la sezione Q_C .

Interessa ora determinare quali condizioni devono essere verificate affinché la disequazione di partenza della procedura di lifting sequenziale definisca effettivamente una faccetta per la sezione iniziale.

Guardando ancora all'esempio in 4.1.2, vediamo che tale dimostrazione è stata eseguita individuando $\dim(Q_{IV}) + 1$ punti affinemente indipendenti che appartengono alla faccia in esame, quella della sezione iniziale (4.5) indotta dall'iperpiano di supporto di (4.4). In particolare tali punti sono stati tutti trovati fra i vertici della sezione: infatti essi hanno tutte coordinate binarie, ed essendo Q_C un politopo 0-1 i suoi vertici sono per definizione tutti e soli i suoi punti interi binari. Questo risultato è in realtà valido per le facce di un politopo qualsiasi, come enunciato nella seguente proposizione, che discende direttamente dalla vertex description di un politopo (vedi [21]).

Proposizione 4.2.5. *Ogni faccia di dimensione k di un politopo è involuppo convesso di almeno $k + 1$ vertici affinemente indipendenti del politopo stesso.*

Dimostrazione. In ogni poliedro P si ha che lo spazio di linealità $\text{lin}(P)$ coincide con quello delle sue facce, come dimostrato ad esempio in [6]. Inoltre nel caso di un politopo, che è un poliedro limitato, ogni faccia è a sua volta un politopo limitato, ed in particolare puntato (cioè $\text{lin}(P) = \{0\}$). Dunque ogni faccia di un politopo si può descrivere come involuppo convesso di un numero finito di vertici, per il Teorema di Minkowsky-Weyl; fra questi in particolare ve ne devono essere almeno $k + 1$ di affinemente indipendenti, altrimenti la faccia avrebbe dimensione minore di k , contraddicendo l'ipotesi. \square

Specializzando la Proposizione 4.2.5 al caso di sezioni di politopi 0-1, si ha che i vertici di cui la faccia è involuppo convesso sono i vertici del poliedro di partenza appartenenti a tale faccia, come segue dal Corollario 4.2.3. Possiamo applicare quanto visto al politopo delle matrici consecutive ones, ottenendo che se $\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq \beta$ è una disuguaglianza che definisce una faccetta per la sezione Q_C , allora devono esistere $|C|$ vertici di $P_{C_1}^{m,n}$ che appartengano a tale faccetta:

$$F = Q_C \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq \beta \right\} \quad (4.26)$$

e siano affinemente indipendenti. Una prima conseguenza teorica molto utile di quanto dimostrato finora è la seguente osservazione sulla dimensione delle sezioni di partenza.

Osservazione 4.2.6. Dal fatto che i vertici della sezione Q_C sono tutti e soli i vertici di $P_{C_1}^{m,n}$ aventi coordinate con indici in $N \setminus C$ nulle, segue che Q_C avrà certamente dimensione piena $|C|$, poiché essa contiene sicuramente la matrice nulla \mathbb{O} e le $|C|$ matrici C1P aventi una sola delle entrate di indici in C pari a 1 e le altre a 0. Dunque si possono sempre trovare almeno $|C|$ punti affinemente indipendenti nella faccetta F della sezione.

Il fatto che la ricerca di punti affinemente indipendenti per le faccette delle sezioni Q_C si possa limitare ai vertici del politopo delle matrici consecutive ones permette di fare alcune riflessioni su come si devono configurare le disuguaglianze di partenza del lifting sequenziale affinché definiscano faccette. Per poter dimostrare che la faccia indotta da una disuguaglianza $\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq \beta$, valida per la sezione Q_C , contenga $|C|$ vertici di $P_{C_1}^{m,n}$ affinemente indipendenti deve necessariamente verificarsi la seguente condizione.

Criterio 1 (Condizione algebrica sui coefficienti). *Se una disuguaglianza $\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq \beta$ induce una faccetta per la sezione Q_C del politopo $P_{C_1}^{m,n}$, allora la somma dei coefficienti positivi della disuguaglianza deve essere strettamente maggiore del termine noto β .*

Dimostrazione. Se esistono $|C|$ vertici di $P_{C_1}^{m,n}$ appartenenti alla faccia di Q_C indotta dalla disuguaglianza (4.25):

$$\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq \beta,$$

è necessario che un tale numero di vettori binari soddisfi tale disequazione ad uguaglianza. Definendo $C_+ \subseteq C$ come il sottoinsieme degli indici dei coefficienti α_i positivi, si ha che:

$$\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq \sum_{i \in C_+} \alpha_i x_i$$

e l'uguaglianza si verifica solo quando si annullano le coordinate x_i con $i \in C_-$, dove $C_- \subseteq C$ è il sottoinsieme degli indici dei coefficienti α_i negativi. Dunque la somma delle entrate positive della sezione deve essere strettamente maggiore di β affinché (4.25) sia soddisfatta ad uguaglianza da più vertici. \square

L'interesse principale di questo criterio risiede nel poter effettuare un primo controllo per escludere quelle disuguaglianze che non inducono faccette per Q_C ; come già osservato in precedenza, cominciare la procedura

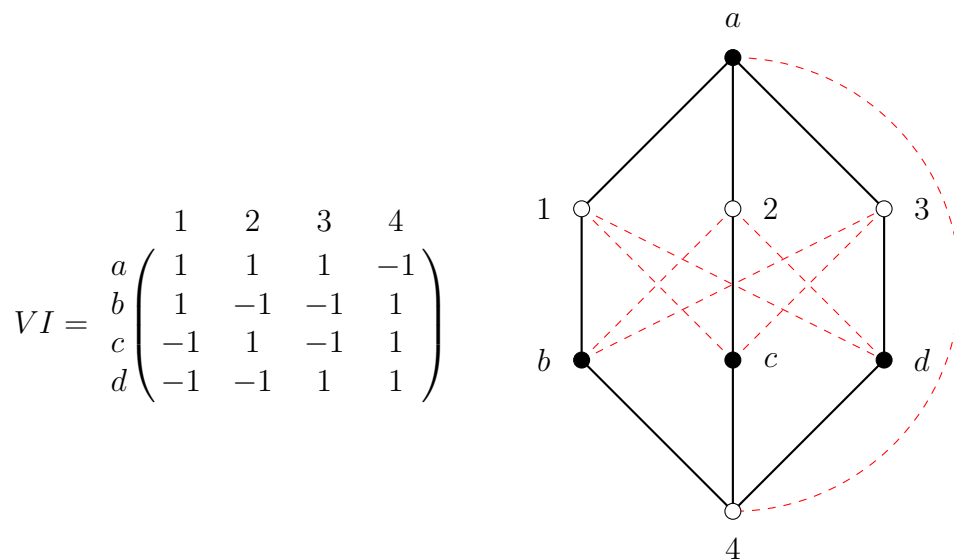


Figura 4.4: La disuguaglianza VI e il grafo bipartito ad essa associato alle sue entrate positive, nel quale sono tratteggiati in rosso gli archi associati alle entrate negative.

- per quanto riguarda la validità della disequazione (4.25) per la sezione Q_C , abbiamo dimostrato col Teorema 4.2.4 che essa è sempre assicurata, dunque non implica restrizioni nella scelta di C ;
- affinché la disuguaglianza (4.25) definisca una faccetta per Q_C la condizione necessaria data dal Criterio 1 impone che la somma coefficienti positivi della disuguaglianza sia strettamente maggiore del termine noto β .

Fra le possibili scelte di C che soddisfano il criterio algebrico sui coefficienti, decidiamo di considerare tutti gli indici di C_+ , ovvero:

$$C = C_+ = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 4), (c, 2), (c, 4), (d, 2), (d, 3)\}.$$

Si può verificare empiricamente, generando i vertici della sezione e con l'ausilio di PORTA come fatto nell'esempio in 4.1.2, che per tale scelta di indici la disuguaglianza (4.25) definisce una faccetta per la sezione iniziale. Notiamo dalla Figura 4.4 che si possono trovare, nel grafo bipartito associato alle entrate positive della disequazione, coppie di archi che rimosse eliminano ogni possibile tripla asteroidale colonna: questo suggerisce un'analogia con la ricerca dei punti svolta nell'esempio in 4.1.2. Tale analogia con la dimostrazione geometrica verrà approfondita al Capitolo 6.

Si ha dunque la certezza che eseguendo il lifting sequenziale da tale disequazione si otterrà una faccetta. Eseguendo i calcoli, con l'ausilio del

metodo grafico descritto per la specializzazione del lifting al politopo delle matrici consecutive ones, è possibile poi verificare che *per qualsiasi ordinamento degli indici di $N \setminus C$* il lifting sequenziale porge la disequazione (4.27), come voluto.

Capitolo 5

Lifting e procedure per la formulazione di disuguaglianze valide

Nel capitolo precedente abbiamo specializzato la procedura di lifting sequenziale al politopo delle matrici consecutive ones; in particolare abbiamo adottato un approccio basato su grafi nel calcolo dei coefficienti da aggiungere alla disequazione di partenza. Applicando poi la procedura ad una istanza particolare ci si è posto come obiettivo quello di riconoscere alcune caratteristiche generali del grafo associato alla configurazione di partenza, da mettere in relazione con le scelte da adottare nell'applicazione del lifting sequenziale inerenti:

- a) l'inizializzazione della procedura con una disuguaglianza valida per la sezione di partenza;
- b) la definizione della sequenza di lifting con un ordinamento degli indici relativi ai coefficienti da fissare.

Nell'analisi del primo dei due problemi si è cercato di individuare proprietà caratteristiche delle disuguaglianze di partenza che definiscono faccette per la sezione iniziale. In particolare si è dimostrato un criterio algebrico sui coefficienti fissati che vale se la disuguaglianza di partenza definisce una faccetta: tale condizione necessaria permette in generale di escludere disequazioni che non inducono faccette per le sezioni iniziali. Una volta fissata la disuguaglianza di partenza rimane la seconda possibilità di scelta offerta dal lifting sequenziale, ovvero in che ordine fissare i vari coefficienti che vengono calcolati dalle iterazioni della procedura. Nell'esempio in 4.1.2 sono stati svolti i calcoli dei coefficienti scegliendo tre possibili ordinamenti, e si è notato anzitutto che i coefficienti hanno assunto solo alcuni possibili valori interi: vedremo in questo capitolo come, sotto specifiche condizioni, siano limitati i possibili valori che possono assumere i coefficienti nel lifting sequenziale per il politopo delle matrici consecutive ones.

Un'altra osservazione interessante è che per tutte e tre le sequenze analizzate la disequazione restituita dal processo di lifting coincide con una disuguaglianza ottenibile tramite una delle procedure note presentate al Capitolo 3. Il risultato centrale di questo capitolo, sarà proprio dimostrare come le procedure generali 3 e 4 *per opportune configurazioni di partenza* siano dei lifting sequenziali, utilizzando sequenze aventi determinate caratteristiche comuni. Come vedremo nello specifico, tale fatto è conseguenza delle configurazioni di partenza su cui si applicano le procedure, in particolare delle proprietà degli archi nei grafi bipartiti associati a tali configurazioni. Da tale identificazione fra procedure e lifting, nei casi specificati, si potranno ricavare in maniera diretta alcune ulteriori proprietà riguardanti le disequazioni (3.13) e (3.16) risultanti dalle procedure: si vedrà che le (3.13) sono in realtà casi particolari delle (3.16), si garantirà la validità e si otterranno dei lower bound alle dimensioni delle facce indotte sul politopo delle matrici consecutive ones.

5.1 Proprietà generali dei coefficienti del lifting

La prima osservazione emersa eseguendo il lifting sequenziale nell'esempio in 4.1.2 con diversi ordinamenti è stata che i valori a cui sono stati fissati i coefficienti dalla procedura sono risultati in un ristretto sottoinsieme di interi.

L'interezza dei coefficienti segue dal fatto che inizializzando la procedura di lifting con una disequazione avente coefficienti e termine noto interi, allora la definizione (2.2) dell'iterazione h -esima dell'algoritmo nelle notazioni introdotte al Capitolo 2:

$$\alpha_{j_h} := \beta - \max \left\{ \sum_{j \in C_{h-1}} \alpha_j x_j : x \in S, x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C_h, x_{j_h} = 1 \right\}$$

fissa sempre valori interi.

Il fatto di restringersi a disuguaglianze iniziali con coefficienti e termine noto interi non è in realtà una perdita di generalità se l'obiettivo è quello di ottenere tramite il lifting sequenziale faccette del politopo delle matrici consecutive ones, che hanno equazione razionale come dimostra la seguente proposizione.

Proposizione 5.1.1. *I coefficienti e il termine noto delle disuguaglianze definiti faccette per il politopo delle matrici consecutive ones sono razionali, e dunque interi a meno di moltiplicazione della disuguaglianza per uno scalare.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che $P_{C_1}^{m,n}$ è un politopo 0-1, cioè per definizione un involucro convesso di punti binari, e quindi in particolare di

punti interi. Poiché abbiamo visto in 4.2.5 che le faccette di un politopo di dimensione k contengono almeno k vertici affinemente indipendenti, e tali vertici sono in questo caso interi, si ha dall'algebra lineare che l'iperpiano di supporto di tali faccette ha equazione cartesiana intera, a meno di moltiplicazione per uno scalare. \square

Una volta dimostrata l'interezza è possibile restringere ulteriormente l'insieme di valori che possono assumere i coefficienti con diverse sequenze di lifting, sfruttando il Corollario 2.4.13 che abbiamo dimostrato al Capitolo 2. Tale risultato, valido in generale per politopi 0-1, mostra come nel lifting sequenziale il coefficiente della variabile di indice $j \in N \setminus C$, da fissare dalla procedura, sia monotono crescente rispetto all'ordine con cui viene calcolato nella sequenza, ovvero:

$$\alpha_j^1 \geq \alpha_j^2 \geq \dots \geq \alpha_j^l,$$

dove α_j^k è il coefficiente α_j calcolato con l'ordinamento

$$(j_1^k, j_2^k, \dots, j_{k-1}^k, j, j_{k+1}^k, \dots, j_l^k),$$

con l'indice j in posizione k -esima e $j_h^{k'} = j_h \quad \forall h = 1, \dots, k' - 1 \not\leq k - 1$, cioè con i primi indici determinati dai $k - 1$ ordinamenti precedenti che danno α_j^h con $h = 1, \dots, k - 1$.

In particolare il valore minimo di α_j si ottiene eseguendo il lifting della variabile x_j per ultimo e il valore massimo eseguendo il lifting per primo nella sequenza.

Specializzando tale risultato al caso del politopo $P_{C_1}^{m,n}$, come fatto per tutta la procedura di lifting sequenziale, si può dare un'interpretazione grafica del Corollario 2.4.13 specifica per ogni arco associato a uno dei coefficienti da fissare con la procedura.

Corollario 5.1.2. *Eseguendo il lifting sequenziale nella versione grafica, ovvero l'Algoritmo 2 di cui manteniamo la notazione, si ha che il coefficiente della variabile associata all'arco di indice $j \in N \setminus C$ è monotono crescente rispetto all'ordine con cui viene calcolato nella sequenza, ovvero:*

$$\alpha_j^1 \geq \alpha_j^2 \geq \dots \geq \alpha_j^l,$$

dove α_j^k è il coefficiente α_j calcolato con l'ordinamento

$$(j_1^k, j_2^k, \dots, j_{k-1}^k, j, j_{k+1}^k, \dots, j_l^k),$$

con l'arco di indice j considerato in A all'iterazione k -esima e $j_h^{k'} = j_h \quad \forall h = 1, \dots, k' - 1 \not\leq k - 1$, cioè con gli archi che si possono includere in A per il calcolo del massimo determinati dai $k - 1$ ordinamenti precedenti che danno α_j^h con $h = 1, \dots, k - 1$.

In particolare il valore minimo di α_j si ottiene prendendo in considerazione nel calcolo del massimo l'arco di indice j per ultimo e il valore massimo considerandolo per primo nella sequenza.

Si ha allora che è possibile stabilire per ogni indice j un intervallo all'interno del quale si trovano i valori, interi per quanto dimostrato sopra, che possono assumere i coefficienti della variabile x_j eseguendo il lifting sequenziale per il politopo delle matrici consecutive ones. I valori possibili sono tutti gli interi:

$$I_j = [\alpha_j^l, \alpha_j^1] \cap \mathbb{Z}.$$

Notiamo come sia possibile determinare l'estremo superiore dell'intervallo α_j^1 eseguendo solamente il primo lifting della sequenza, nel quale viene considerato l'arco di indice j .

5.2 Lifting e configurazioni iniziali

Nell'esempio della Sezione 4.1.2 sono stati svolti i calcoli dei coefficienti ottenuti applicando il lifting sequenziale a partire dal minore di Tucker M_{IV} e scegliendo tre particolari ordinamenti, dei quali il primo restituisce come disequazione esattamente la disuguaglianza indotta dalla matrice F_3 introdotta in [4], mentre gli altri due restituiscono entrambi la disuguaglianza indotta dalla matrice $F_{IV_3}^B$ di [8], ottenibile applicando la Procedura 4 con opportune scelte dei pesi.

Si possono allora notare delle caratteristiche comuni fra le Procedure 3 e 4 e il lifting sequenziale applicato al minore di Tucker M_{IV} :

- a) i valori dei coefficienti ottenuti sono in entrambi i casi interi e compresi in un intervallo deducibile dall'inizializzazione dell'algoritmo;
- b) i coefficienti sono vincolati a rispettare determinate condizioni a seconda del ruolo grafico degli archi ad essi associati nel grafo IV .

Tali osservazioni suggeriscono una possibile identificazione fra il lifting sequenziale e le procedure viste, nel caso di configurazioni di partenza simili a quelle di Tucker. Nel seguito dimostreremo che la Procedura 3 coincide effettivamente con un lifting sequenziale per opportuni ordinamenti di $N \setminus C$ e partendo da una configurazione iniziale data da un minore di Tucker generalizzato. Inoltre vedremo come in tali casi la Procedura 3 sia un caso particolare della Procedura 4, e considereremo le proprietà a cui devono soddisfare gli ordinamenti del lifting sequenziale per giungere alle disuguaglianze (3.16) fornite dalla Procedura 4.

5.2.1 Classificazione delle configurazioni non C1P

Le Procedure presentate al Capitolo 3 sono tutte inizializzate da configurazioni iniziali non C1P, ovvero costituite da grafi contenenti almeno una tripla asteroidale; inoltre ai coefficienti associati agli archi di tali grafi

viene assegnato sempre valore unitario. Si vuole analizzare il risultato del lifting sequenziale applicato a disuguaglianze del tipo:

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1,$$

con C insieme di archi appartenenti a tre cammini che rendono una fissata tripla asteroidale, per controllare quali ordinamenti dei coefficienti $N \setminus C$ da fissare restituiscano disuguaglianze del tipo (3.13) o (3.16). A tale scopo risulta utile classificare le possibili configurazioni di tre cammini in una tripla asteroidale *minimali*, nel senso dell'inclusione, tra tutte quelle che rendono x, y, z asteroidale: diamo una caratterizzazione generale di tali grafi col seguente teorema.

Teorema 5.2.1. *Dati tre nodi colonna $x, y, z \in V_2$ in un grafo bipartito completo $\overline{G}(V_1, V_2, A)$, con V_1 insieme di nodi riga e V_2 insieme di nodi colonna, si consideri la configurazione iniziale $C = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ data dall'unione di tre cammini $P_1, P_2, P_3 \subseteq G$ rispettivamente da y a z , da z a x e da x a y che rendono la tripla x, y, z asteroidale e minimali per l'inclusione tra tutte le configurazioni che mantengono l'asteroidalità di questi nodi colonna. Allora tale configurazione sarà data dal grafo in Figura 5.1, per opportuni $l, s, d, u, f, g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ che soddisfano:*

$$l + f > 1 \tag{5.1}$$

$$l + g > 1 \tag{5.2}$$

$$s + f > 1 \tag{5.3}$$

$$s + u > 1 \tag{5.4}$$

$$d + g > 1 \tag{5.5}$$

$$d + u > 1, \tag{5.6}$$

con l, s, d rispettivamente le lunghezze del sottocammino di P_3 compreso fra x e w , del sottocammino di P_3 compreso fra y e p e del sottocammino di P_2 compreso fra z e q e f, u, g rispettivamente le lunghezze del sottocammino di P_3 compreso fra w e p , del sottocammino di P_1 compreso fra p e q e del sottocammino di P_2 compreso fra q e w .

Dimostrazione. Si consideri il cammino P_3 che congiunge x a y e il cammino P_2 che congiunge x a z . Relativamente ai vertici di tali cammini si possono verificare due casi:

- $P_3 \cap P_2 = \{x\}$, ovvero i due cammini hanno in comune il solo vertice x ;
- $P_3 \cap P_2 = \{x, w_1, \dots, w_h\}$, ovvero i due cammini hanno in comune altri vertici oltre a x .

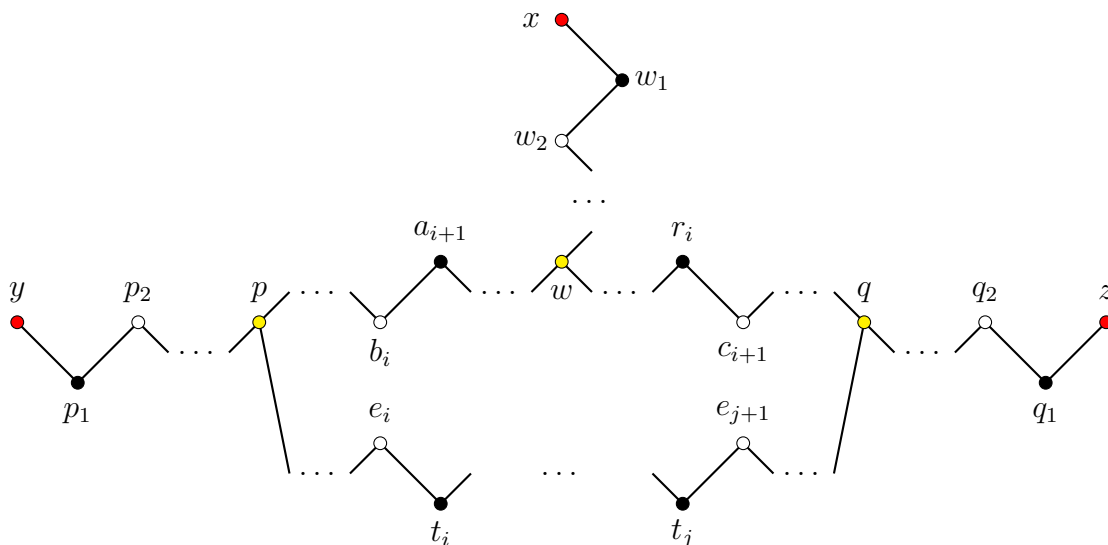


Figura 5.1: Configurazione minimale generale di tre cammini che rendono asteroidale la tripla x, y, z .

L'ipotesi di minimalità è sempre soddisfatta nel primo caso, mentre affinché lo sia nel secondo è necessario che i vertici x, w_1, \dots, w_h siano tutti consecutivi. Se per assurdo ciò non fosse vero si avrebbe:

$$P_2 = (x, Q_1, w_1, Q_2, w_2, \dots, Q_h, w_h),$$

con Q_1, Q_2, \dots, Q_h cammini disgiunti da P_3 ; ma allora sarebbe possibile costruire il cammino

$$P'_2 := (x, P_3^1, w_1, P_3^2, w_2, \dots, P_3^h, w_h),$$

con P_3^i sottocammino di P_3 compreso fra w_{i-1} e $w_i \forall i = 1, \dots, h$, ponendo $w_0 \equiv x$. Tale cammino porge una configurazione C' che rende asteroidale la tripla x, y, z e con un numero inferiore di archi rispetto a C , contraddicendo le ipotesi. Per ciascuno dei due casi visti ci si riconduce allora alla configurazione in Figura 5.2, con:

- nel caso $P_3 \cap P_2 = \{x\}$ si ha $l = 0$ e $w = x$;
- nel caso $P_3 \cap P_2 = \{x, w_1, \dots, w_l\}$, con i vertici x, w_1, \dots, w_l tutti consecutivi, si ha $l \geq 1$ e $w = w_l$.

Prendiamo ora in considerazione il cammino P_1 che congiunge y e z e il cammino P_3 . Di nuovo si possono verificare due casi relativamente ai vertici di tali cammini :

- $P_3 \cap P_1 = \{y\}$, ovvero i due cammini hanno in comune il solo vertice y ;

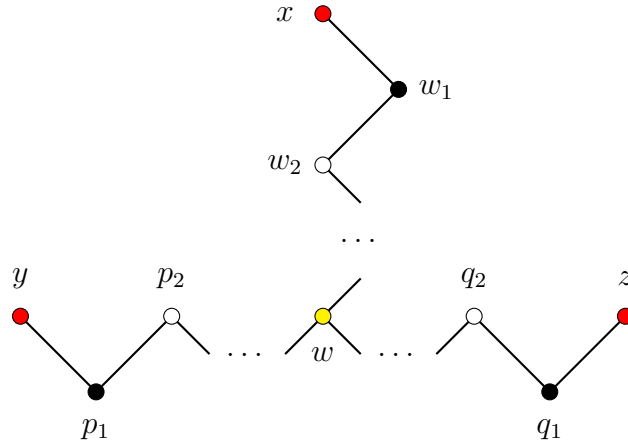


Figura 5.2: Configurazione minimale generale dei cammini P_3 , che congiunge x a y , e P_2 , che congiunge x a z .

- $P_3 \cap P_1 = \{y, p_1, \dots, p_h\}$, ovvero i due cammini hanno in comune altri vertici oltre a y .

Eseguendo lo stesso ragionamento svolto per la coppia di cammini P_3 e P_2 si ha anche in questo caso che l'ipotesi di minimalità è sempre soddisfatta nel primo caso, mentre affinché lo sia nel secondo è necessario che i vertici y, p_1, \dots, p_h siano tutti consecutivi. Per ciascuno dei due casi visti ci si riconduce allora alla configurazione in Figura 5.1, con:

- nel caso $P_3 \cap P_1 = \{y\}$ si ha $s = 0$ e $p = y$;
- nel caso $P_3 \cap P_1 = \{y, p_1, \dots, p_s\}$, con i vertici y, p_1, \dots, p_s tutti consecutivi, si ha $s \geq 1$ e $p = p_s$.

Notiamo che in Figura 5.1 il vertice p è successivo al vertice w nel cammino P_3 da x a y : questo si può assumere senza perdita di generalità, perché se nella costruzione precedente il vertice p ottenuto dall'intersezione di P_3 e P_1 fosse precedente a w in P_1 basterebbe scambiare w con p , mantenendo inalterati i parametri l ed s .

Ripetendo nuovamente con la coppia P_1 e P_2 il ragionamento seguito per la coppia P_3 e P_2 si può concludere in maniera simmetrica che la configurazione minimale $C = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ ottenuta considerando i tre cammini è quella in Figura 5.1, con:

- nel caso $P_1 \cap P_2 = \{z\}$ si ha $d = 0$ e $q = z$;
- nel caso $P_1 \cap P_2 = \{z, q_1, \dots, q_d\}$, con i vertici z, q_1, \dots, q_d tutti consecutivi, si ha $d \geq 1$ e $q = q_d$.

Siano ora f, u, g rispettivamente le lunghezze del sottocammino di P_3 compreso fra w e p , del sottocammino di P_1 compreso fra p e q e del sottocammino di P_2 compreso fra q e w .

Per definizione affinché la tripla x, y, z sia asteroidale è necessario che nessuno dei cammini P_1, P_2, P_3 fra due vertici della tripla sia adiacente al terzo nodo. Per quanto riguarda P_1 , non si possono verificare le condizioni:

$$\begin{aligned} l + f &\leq 1 \\ l + g &\leq 1 \end{aligned}$$

altrimenti il cammino sarebbe adiacente a x . Di conseguenza devono valere i vincoli (5.1), (5.2).

Ripetendo il ragionamento con il cammino P_2 e il nodo y si ottengono le condizioni (5.3), (5.4), mentre per il cammino P_3 e il nodo z si ottengono le condizioni (5.5), (5.6). \square

Ora che abbiamo a disposizione la caratterizzazione generale delle configurazioni minimali di tre cammini in una tripla asteroidale x, y, z , dove minimali è inteso nel senso dell'inclusione tra tutte quelle che rendono x, y, z asteroidale, notiamo dalla Figura 5.1 che esse si possono ricondurre a un numero ristretto di classi a seconda dei valori dei parametri $l, s, d, u, f, g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Inoltre tra queste classi sono presenti proprio i grafi bipartiti utilizzati in [11] per ottenere le faccette indotte dalle matrici $\overline{F}_{1_{s,d,l}}, \overline{F}_{2_{s,d,l}}, \overline{F}_{3_{s,d,l}}$ e $\overline{F}_{4_{u,s,d,l}}$, ovvero ottenuti a partire dai grafi associati ai minori di Tucker e rendendo arbitrarie le lunghezze dei cammini che rendono la tripla asteroidale. Diamo la classificazione completa nella seguente proposizione.

Teorema 5.2.2. *Sia $C = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ la configurazione, caratterizzata nel Teorema 5.2.1 per opportuni $l, s, d, u, f, g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ che soddisfano:*

$$\begin{aligned} l + f &> 1 \\ l + g &> 1 \\ s + f &> 1 \\ s + u &> 1 \\ d + g &> 1 \\ d + u &> 1. \end{aligned}$$

Allora al variare dei valori dei parametri l, s, d, u, f, g la configurazione C apparterrà ad una delle seguenti classi, illustrate nelle Figure 5.3 e 5.4:

1. la configurazione I_k : si tratta del grafo bipartito associato al minore di Tucker M_{I_k} ;
2. le configurazioni $\overline{III}_{s,d,l}$ o $\overline{IV}_{s,d,l}$, a seconda che il vertice w sia rispettivamente un nodo colonna, per $\overline{III}_{s,d,l}$, oppure riga, per $\overline{IV}_{s,d,l}$: si tratta di generalizzazioni dei grafi bipartiti associati ai minori di Tucker M_{III_k} e M_{IV} ;

3. le configurazioni $\bar{V}_{u,f,g,l}$ o $VI_{u,f,g,l}$, a seconda che il vertice w sia rispettivamente un nodo riga, per $\bar{V}_{u,f,g,l}$, oppure colonna, per $VI_{u,f,g,l}$: $\bar{V}_{u,f,g,l}$ è una generalizzazione del grafo bipartito associato al minore di Tucker M_V ;
4. la configurazione VII, per la quale non specifichiamo se i vertici w, p siano nodi riga o colonna;
5. la configurazione VIII, per la quale non specifichiamo se i vertici w, p, q siano nodi riga o colonna.

Dimostrazione. I parametri l, s, d, u, f, g della generica configurazione C si possono scegliere nei seguenti modi:

1. si può avere $l = s = d = 0$: in tal caso si ottiene $w = x, p = y, q = z$ e poiché devono valere le condizioni 5.1-5.6 del Teorema 5.2.1 risulta $u, f, g \geq 2$. Ci si è allora ricondotti al grafo bipartito associato al minore di Tucker M_{I_k} , con $k \geq 1$;
2. si può avere $u = f = g = 0$: in tal caso si ottiene $w = p = q$ e poiché devono valere le condizioni 5.1-5.6 del Teorema 5.2.1 risulta $s, d, l \geq 2$. Ci si è allora ricondotti a generalizzazioni dei grafi bipartiti associati ai minori di Tucker M_{III_k} e M_{IV} , con $k \geq 1$;
3. si può avere $s = d = 0$ e $l > 0$: in tal caso si ottiene $p = y, q = z$ e poiché devono valere le condizioni 5.1-5.6 del Teorema 5.2.1 risulta $u, f, g \geq 2$. Nel caso in cui w sia un nodo riga ci si è allora ricondotti a una generalizzazione del grafo bipartito associato al minore di Tucker M_V ;
4. si può avere $d = 0, l, s > 0$ e $f > 0$: in tal caso si ottiene $q = z$ e poiché devono valere le condizioni 5.1-5.6 del Teorema 5.2.1 risulta $u, g \geq 2$. Si noti che la proprietà $f > 0$ è necessaria affinché sia verificata la minimalità di C , che implicherebbe se $f = 0$ di ricadere nella stessa configurazione del caso $u = f = g = 0$;
5. si può avere $l, s, d > 0$ e $u, f, g > 0$: in tal caso la configurazione implica che valgano solo le condizioni 5.1-5.6 del Teorema 5.2.1. Si noti che la proprietà $u, f, g > 0$ è necessaria affinché sia verificata la minimalità di C , che implicherebbe se $u = 0$ o $f = 0$ o $g = 0$ di ricadere nella stessa configurazione del caso $u = f = g = 0$.

Eseguendo tutte le possibili scelte elencate sopra si sono ottenute le configurazioni dell'enunciato, come voluto. \square

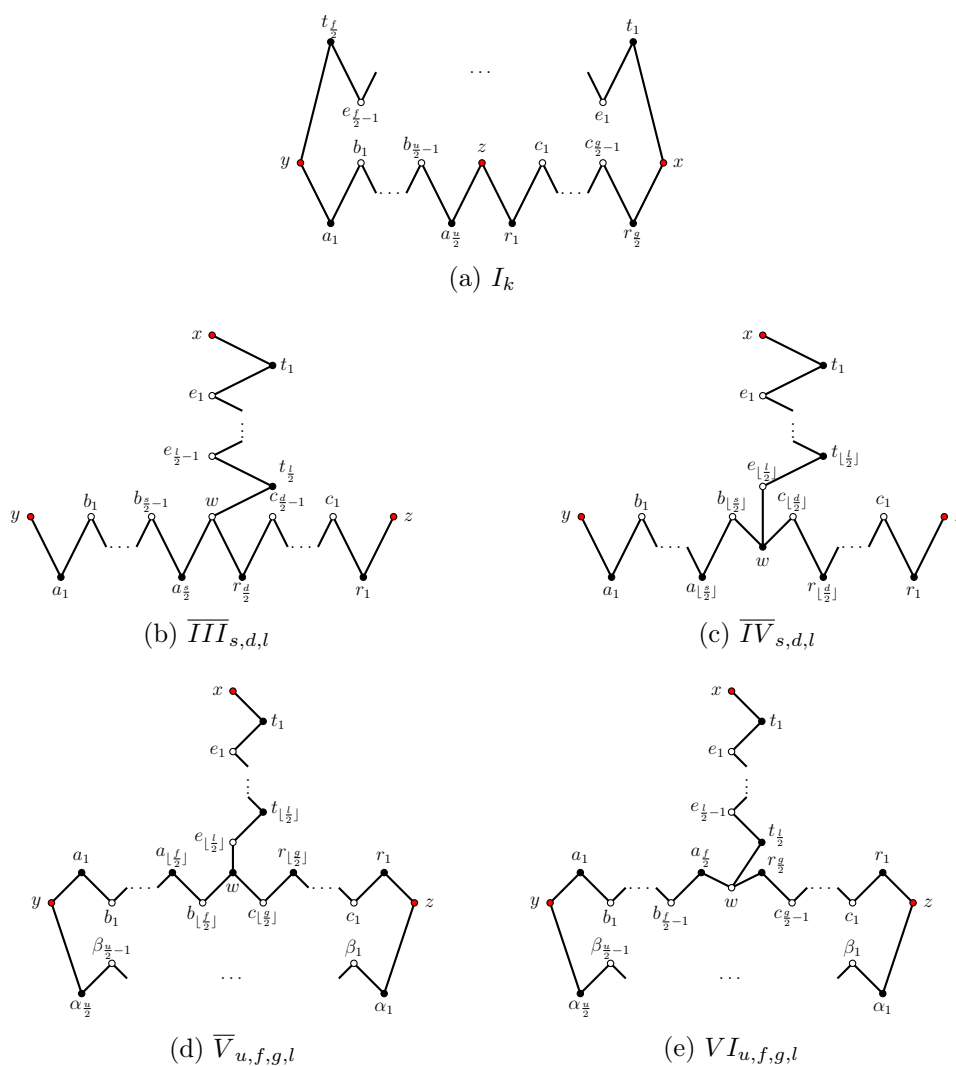


Figura 5.3: Configurazioni di tre cammini che rendono asteroidale la tripla x, y, z : i casi I_k , $\overline{III}_{s,d,l}$, $\overline{IV}_{s,d,l}$, $\overline{V}_{u,f,g,l}$ e $\overline{VI}_{u,f,g,l}$. Nei casi $\overline{III}_{s,d,l}$, $\overline{IV}_{s,d,l}$, $\overline{V}_{u,f,g,l}$ e $\overline{VI}_{u,f,g,l}$ si sono distinte le configurazioni in cui il vertice w è un nodo riga o colonna.

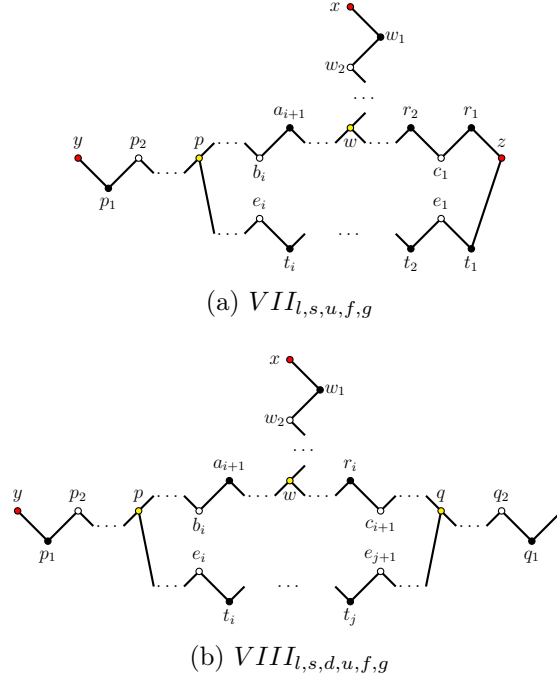


Figura 5.4: Configurazioni di tre cammini che rendono asteroidale la tripla x, y, z : i casi $VII_{l,s,u,f,g}$ e $VIII_{l,s,d,u,f,g}$.

5.2.2 Configurazioni e disuguaglianze di partenza

Abbiamo classificato nella sezione precedente le possibili configurazioni minimali $C = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ che possono assumere tre cammini P_1, P_2, P_3 che rendono asteroidale una fissata tripla di nodi colonna x, y, z . Tali configurazioni sono esattamente quelle che inizializzano le Procedure 3 e 4 presentate al Capitolo 3: esse pongono il termine noto a $|C| - 1$, assegnano valore 1 ai coefficienti $\alpha_i \forall i \in C$ e fissano i rimanenti coefficienti $\alpha_j \ j \in N \setminus C$ tenendo conto del ruolo degli archi ad essi associati rispetto alle triple asteroidali presenti nel grafo bipartito completo $G = \overline{G}_{|C}(V_{1|C}, V_{2|C}, N)$, indotto dai vertici dei cammini P_1, P_2, P_3 . L'obiettivo adesso è quello di applicare il lifting sequenziale alle disuguaglianze del tipo:

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1 \quad C = P_1 \cup P_2 \cup P_3, \quad (5.7)$$

con C una delle configurazioni classificate, per capire in quali casi il lifting restituisce una delle disuguaglianze (3.13) o (3.16) fornite rispettivamente dalle Procedure (3) e (4).

Prima di analizzare il processo di lifting si possono fare alcune considerazioni sulla validità e sulla dimensione delle facce indotte dalle disuguaglianze (5.7) sulle sezioni:

$$Q_C = P_{C1}^{m,n} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0 \ \forall j \in N \setminus C = P_1 \cup P_2 \cup P_3\}, \quad (5.8)$$

dove $|N| = nm$.

Nei casi in cui il lifting sequenziale coinciderà con le Procedure (3) o (4) da tali osservazioni si potranno ricavare alcune proprietà delle disuguaglianze (3.13),(3.16) garantite dalla definizione di lifting.

Anzitutto si può osservare che le disuguaglianze (5.7) sono sempre valide per le sezioni iniziali (5.8), e che dunque è possibile eseguire il lifting delle disequazioni (5.7) ottenendo disuguaglianze valide per $P_{C_1}^{m,n}$.

Proposizione 5.2.3. *La disuguaglianza*

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

è valida per il politopo

$$Q_C = P_{C_1}^{m,n} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C\},$$

con C configurazione iniziale non C1P e dove $|N| = nm$.

Dimostrazione. Essendo Q_C un politopo 0-1 per dimostrare la validità è sufficiente verificare che tutti i punti 0-1 che violano la disuguaglianza non appartengano a Q_C . Ma questo è sempre vero poiché l'unico vettore binario $x \in \{0, 1\}^{|C|}$ che viola

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

è il punto $\bar{x} = (1, \dots, 1)$ avente coordinate pari a 1. Dal momento che tale punto di $\{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C\}$ è associato al grafo C la cui configurazione è non C1P per ipotesi, segue che $\bar{x} \notin Q_C$, da cui la tesi. \square

Si è visto nella Proposizione 2.4.1 che eseguendo il lifting di una disuguaglianza definente una faccia di dimensione d di $P_{C_1}^{m,n}$ si ottiene una disuguaglianza definente una faccia di dimensione almeno $d + 1$ per il politopo $P_{C_1}^{m,n}$. Iterando l'osservazione per un lifting sequenziale di $l = |N \setminus C| = |N| - |C| = nm - |C|$ incognite si ottiene che partendo da una faccia di dimensione d per la sezione $Q_C = P_{C_1}^{m,n} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C\}$ allora si ottiene una faccia di dimensione almeno $d + l$ per $P_{C_1}^{m,n}$. In particolare se la disuguaglianza di partenza definisce una faccetta per la sezione iniziale Q_C la Proposizione 2.4.1 garantisce che la disequazione ottenuta dal lifting definirà una faccetta per $P_{C_1}^{m,n}$.

Proposizione 5.2.4. *La disuguaglianza*

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

definisce una faccetta per il politopo

$$Q_C = P_{C_1}^{m,n} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C\},$$

con C configurazione iniziale non C1P e dove $|N| = nm$, se e solo se eliminando uno qualsiasi degli archi di C la configurazione non contiene triple asteroidali.

Dimostrazione. Per dimostrare che una disuguaglianza (5.7) definisce una faccetta per Q_C si può procedere geometricamente, in maniera analoga a quanto fatto nell'esempio in 4.1.2, cercando $|C|$ punti affinemente indipendenti in:

$$F = Q_C \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in C} x_i = |C| - 1 \right\}$$

che quindi soddisfino ad uguaglianza (5.7). Per quanto visto nella Proposizione 4.2.5 si ha che tale ricerca si può limitare ai soli vertici della sezione Q_C , che sono esattamente i vertici di $P_{C_1}^{m,n}$ appartenenti a Q_C , come segue dal Corollario 4.2.3 applicabile ai politopi 0-1.

Per dimostrare che F è una faccetta di Q_C è allora sufficiente trovare $|C|$ punti binari, e quindi vertici, di $P_{C_1}^{m,n}$ che appartengano alla sezione Q_C , verifichino (5.7) ad uguaglianza e siano affinemente indipendenti: in particolare le coordinate in $N \setminus C$ sono fissate a 0, mentre sono da determinare quelle in C . Notiamo che gli unici vettori $x \in \{0, 1\}^{|C|}$ che soddisfano (5.7) ad uguaglianza sono quelli con una sola coordinata $i \in C$ nulla e le altre pari a 1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I vettori con tali coordinate in C e le altre nulle appartengono a F in quanto soddisfano (5.7) ad uguaglianza e appartengono a $P_{C_1}^{m,n}$: infatti per ipotesi eliminando uno qualsiasi degli archi di C la configurazione non contiene triple asteroidali. Tali vettori sono inoltre affinemente indipendenti perché lo sono i vettori:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ottenuti sottraendo dai primi $|C| - 1$ punti di $\{0, 1\}^{|C|}$ visti sopra l'ultimo.

Abbiamo dunque trovato i $|C|$ punti voluti e dimostrato che la dimensione di F è $|C| - 1$, come voluto. \square

Osservazione 5.2.5. Dalla Proposizione precedente segue che si ha la garanzia di ottenere una faccetta di $P_{C_1}^{m,n}$ eseguendo il lifting sequenziale a partire da una disequazione (5.7) solo nel caso in cui eliminando uno qualsiasi degli archi dalla configurazione iniziale non C1P C non si hanno triple asteroidali. In caso contrario la Proposizione 2.4.1 fornisce un lower bound alla dimensione della faccia di $P_{C_1}^{m,n}$ definita dalla disuguaglianza ottenuta dal lifting: tale valore è pari a $d+l$, dove d è la dimensione della faccia della sezione di partenza Q_C e $l = |N \setminus C| = |N| - |C| = nm - |C|$ è il numero di coefficienti fissati dalla sequenza di lifting.

5.3 Configurazioni e sequenze di lifting equivalenti

Abbiamo analizzato le disuguaglianze di partenza (5.7) con C configurazione minimale di tre cammini in una tripla asteroidale. Possiamo ora eseguire su tali disequazioni il lifting sequenziale e capire in che modo effettuare l'altra scelta che l'algoritmo lascia, quella dell'ordinamento delle variabili di indici in $N \setminus C$, in modo da ottenere le disuguaglianze (3.13) o (3.16) fornite rispettivamente dalle Procedure (3) e (4).

A tale scopo ricordiamo la versione grafica della procedura di lifting sequenziale che è stata data nell'Osservazione 4.1.2: in essa il calcolo dei coefficienti $\alpha_j j \in N \setminus C$ è legato al ruolo degli archi ad essi associati rispetto alle triple asteroidali presenti nel grafo bipartito completo $G = \overline{G}_{|C}(V_{1|C}, V_{2|C}, N)$. Il risultato del lifting dipende dunque dalla configurazione di partenza: per questo motivo nel seguito si analizzeranno i risultati della procedura, con determinati ordinamenti, separatamente per le diverse classi di configurazioni minimali elencate nel Teorema 5.2.2.

5.3.1 La configurazione di partenza I_k

Eseguiamo il lifting a partire dalla disuguaglianza:

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

con configurazione di partenza $C \equiv I_k$, data dalla prima classe di configurazioni del Teorema 5.2.2 per $u, f, g \geq 2$.

Cerchiamo di capire per quali ordinamenti delle variabili in $N \setminus C$ si ottiene una delle disuguaglianze (3.13) fornite dalla Procedura 3.

Notiamo anzitutto che la Procedura 3 fissa i coefficienti in $N \setminus C$ solamente ai possibili valori 0 o -1. In generale però eseguendo il lifting a

partire da un arco qualsiasi non si ottiene necessariamente uno di questi due valori: ad esempio consideriamo l'arco (t_i, z) in Figura 5.5 ed eseguiamo il primo lifting della sequenza per fissarne il relativo coefficiente $\alpha_{(t_i, z)}$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \alpha_{(t_i, z)} &= |C| - 1 - \max \left\{ \sum_{j \in C} x_j : x \in P_{C_1}^{m, n}, x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus (C \cup (t_i, z)), x_{(t_i, z)} = 1 \right\} \\ &= |C| - 1 - (|C| - 2) = 1, \end{aligned}$$

poiché il massimo numero di archi di C che si possono considerare affinché il grafo $G' = (V_1, V_2, A)$, $A \subseteq C \cup (t_i, z)$ non abbia triple asteroidali è $|C| - 2$; in questo caso basta eliminare gli spigoli (t_i, e_{i-1}) e $(a_{\frac{u}{2}}, z)$.

Da quanto appena visto si evince che affinché il lifting sequenziale a partire dalla configurazione $C \equiv I_k$ coincida con la Procedura 3 è necessario scegliere l'ordinamento in maniera opportuna; un tale ordinamento esiste per il seguente Teorema.

Teorema 5.3.1. *Applicare la Procedura 3 alla configurazione $C \equiv I_k$ equivale a eseguire un lifting sequenziale a partire dalla disuguaglianza:*

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

con ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ che rispetta i seguenti vincoli:

- ciascun indice $j \in D$, dei coefficienti che la Procedura 3 pone a -1, dovrà seguire nell'ordinamento tutti gli indici nell'insieme $K_j \subseteq N \setminus (C \cup D)$, dove K_j è una combinazione di archi in $N \setminus (C \cup D)$ che aggiunta al grafo $C \cup \{j\}$ elimina tutte le triple asteroidali;
- gli archi $(a, b) \in N \setminus (C \cup D)$ devono essere ordinati in maniera tale che $d(a, b)$ sia non decrescente nella sequenza.

Dimostrazione. Affinché i coefficienti fissati nelle iterazioni del lifting sequenziale siano solamente -1 o 0, come nella Procedura 3, è necessario che il valore del massimo nelle iterazioni del lifting sequenziale sia rispettivamente $|C|$ e $|C| - 1$. Inoltre, considerata una particolare tripla asteroidale x, y, z in C , i coefficienti che la Procedura 3 fissa a -1 sono quelli appartenenti all'insieme:

$$D := \{(a, b) : b \in \{x, y, z\}, a \in V_1 \cap P_k$$

dove P_k è il cammino che congiunge i due nodi di $\{x, y, z\} \setminus \{b\}$,

mentre tutti gli altri vengono posti a 0. Dunque un ordinamento del lifting che fornisca una disuguaglianza del tipo (3.13) deve soddisfare le seguenti condizioni:

- per quanto riguarda gli archi con indici $j \in D$ si dovrà avere alla corrispondente iterazione h -esima, nella quale si calcola il valore del relativo coefficiente, che:

$$\begin{aligned}\alpha_j &= -1 = |C| - 1 - |C| \\ &= |C| - 1 - \max \left\{ \sum_{j \in C_{h-1}} \alpha_j x_j : x \in P_{C_1}^{m,n}, x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C_h, x_{j_h} = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j \in C} x_j : x \in P_{C_1}^{m,n}, x_j = 1 \quad \forall j \in C, x_j = 0 \quad \forall j \in D \setminus \{j\}, x_j = 1 \right\},\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che tutti i coefficienti α_j $j \in N \setminus (C \cup D)$ non possono essere positivi affinché la disuguaglianza ottenuta coincida con quella fornita dalla Procedura 3;

- per quanto riguarda gli archi con indici $j \in N \setminus (C \cup D)$ si dovrà avere alla corrispondente iterazione h -esima, nella quale si calcola il valore del relativo coefficiente, che:

$$\begin{aligned}\alpha_j &= 0 = |C| - 1 - (|C| - 1) \\ &= |C| - 1 - \max \left\{ \sum_{j \in C_{h-1}} \alpha_j x_j : x \in P_{C_1}^{m,n}, x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C_h, x_{j_h} = 1 \right\}.\end{aligned}$$

Dalle condizioni precedenti si ricava che in ogni sequenza di lifting che restituisca le disuguaglianze (3.13) si hanno i seguenti vincoli sulle posizioni degli indici:

- ciascun indice $j \in D$ dovrà seguire nell'ordinamento tutti gli indici nell'insieme $K_j \subseteq N \setminus (C \cup D)$, dove K_j è una combinazione di archi in $N \setminus (C \cup D)$ che aggiunta al grafo $C \cup \{j\}$ elimina tutte le triple asteroidali;
- tutti gli indici in ciascun $K_j \subseteq N \setminus (C \cup D)$, $j \in D$ dovranno essere ordinati in maniera tale che $\alpha_k = 0 \quad \forall k \in K_j$.

Per quanto riguarda il primo dei due vincoli è necessario trovare per ogni $j \in D$ un'opportuna combinazione K_j di archi in $N \setminus (C \cup D)$ che aggiunta al grafo $C \cup \{j\}$ elimini tutte le triple asteroidali. Per la configurazione I_k tale scelta si può effettuare ponendo per ogni $j = (a, b) \in D$:

$$K_j = K_1 \cup K_2$$

con K_1 e K_2 così definiti:

- se $(a, b) = (a_i, x)$:

$$K_1 := K(\{a_1, \dots, a_i, t_1, \dots, t_{\frac{f}{2}}\}; \{y, b_1, \dots, b_{i-1}, e_1, \dots, e_{\frac{f}{2}-1}\})$$

$$\setminus \{(a_1, x), \dots, (a_i, x)\}$$

$$K_2 := K(\{a_i, \dots, a_{\frac{u}{2}}, r_1, \dots, r_{\frac{g}{2}}\}; \{z, b_i, \dots, b_{\frac{u}{2}-1}, c_1, \dots, c_{\frac{g}{2}-1}\})$$

$$\setminus \{(a_i, x), \dots, (a_{\frac{u}{2}}, x)\};$$

- se $(a, b) = (r_i, y)$:

$$\begin{aligned} K_1 &:= K(\{r_1, \dots, r_i, a_1, \dots, a_{\frac{u}{2}}\}; \{z, c_1, \dots, c_{i-1}, b_1, \dots, b_{\frac{u}{2}-1}\}) \\ &\quad \setminus \{(r_1, y), \dots, (r_i, y)\} \\ K_2 &:= K(\{r_i, \dots, r_{\frac{g}{2}}, t_1, \dots, t_{\frac{f}{2}}\}; \{x, c_i, \dots, c_{\frac{g}{2}-1}, e_1, \dots, e_{\frac{f}{2}-1}\}) \\ &\quad \setminus \{(r_i, y), \dots, (r_{\frac{g}{2}}, y)\}; \end{aligned}$$

- se $(a, b) = (t_i, z)$:

$$\begin{aligned} K_1 &:= K(\{t_1, \dots, t_i, r_1, \dots, r_{\frac{g}{2}}\}; \{x, e_1, \dots, e_{i-1}, c_1, \dots, c_{\frac{g}{2}-1}\}) \\ &\quad \setminus \{(t_1, z), \dots, (t_i, z)\} \\ K_2 &:= K(\{t_i, \dots, t_{\frac{f}{2}}, a_1, \dots, a_{\frac{u}{2}}\}; \{y, e_i, \dots, e_{\frac{f}{2}-1}, b_1, \dots, b_{\frac{u}{2}-1}\}) \\ &\quad \setminus \{(t_i, z), \dots, (t_{\frac{f}{2}}, z)\}, \end{aligned}$$

dove con $K(V_1; V_2)$ si intende il grafo bipartito completo indotto dagli insiemi di vertici V_1, V_2 , ovvero il grafo bipartito nel quale tutti i vertici in V_1 sono adiacenti a tutti i vertici in V_2 . Il ruolo della combinazione K_j rispetto all'arco j è illustrato in Figura 5.6.

Per quanto riguarda il secondo vincolo è invece necessario trovare per ogni K_j definito sopra una sequenza degli archi $k \in K_j$ tale che il lifting eseguito su di essi assegni ad ognuno il valore 0. Un tale ordinamento deve necessariamente avere come archi iniziali:

$$(a, b) = k \in K_j \text{ t.c. } d(a, b) = 3$$

poiché per tali archi si avrà

$$\begin{aligned} \alpha_k &= |C| - 1 - \max \left\{ \sum_{j \in C_{h-1}} \alpha_j x_j : x \in P_{C_1}^{m,n}, x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C_h, x_k = 1 \right\} \\ &= |C| - 1 - (|C| - 1) = 0, \end{aligned}$$

come voluto. Ordinando poi gli archi $(a, b) = k \in K_j$ in maniera tale che $d(a, b)$ sia non decrescente nella sequenza si ottengono sempre coefficienti α_k nulli, in quanto si possono considerare nel lifting tutti gli archi $(a', b') = k \in K_j$ t.c. $d(a', b') < d(a, b)$, perché precedenti nell'ordinamento: tale regola si estende dunque all'intero insieme $N \setminus (C \cup D)$, unione di tutti i K_j . Il ruolo degli archi $(a', b') = k \in K_j$ t.c. $d(a', b') < d(a, b)$ rispetto all'arco (a, b) è illustrato in Figura 5.5.

Abbiamo dunque dimostrato come i vincoli posti sugli ordinamenti possano essere sempre soddisfatti per una configurazione I_k , ottenendo sequenze di lifting che forniscono le stesse disuguaglianze ottenute dalla Procedura 3, come voluto. \square

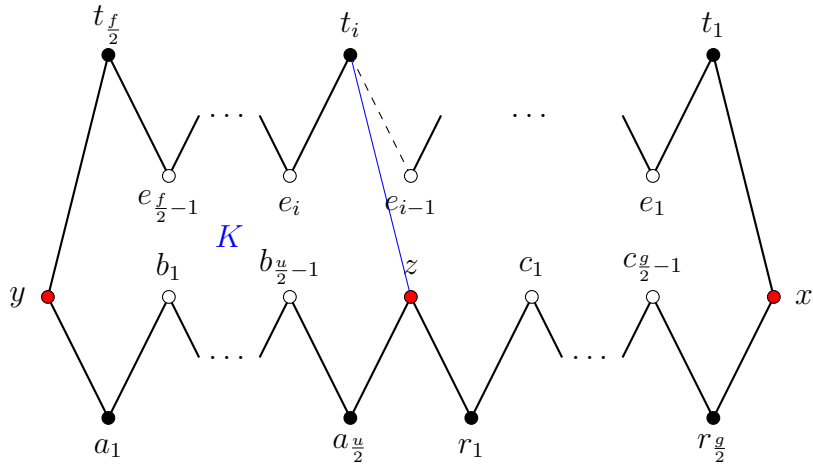


Figura 5.5: La configurazione ottenuta dal grafo I_k aggiungendo l'arco blu ed eliminando quello tratteggiato.

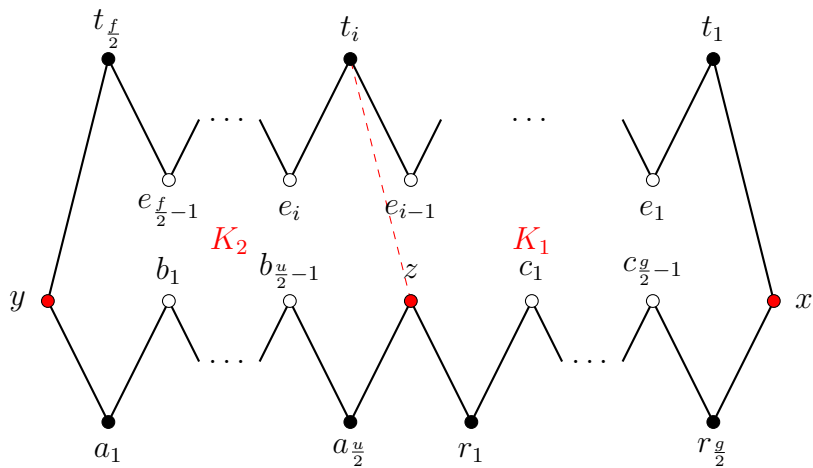


Figura 5.6: La configurazione I_k , con tratteggiato uno degli archi che la Procedura 3 pone a -1.

L'identificazione fra Procedura 3 e lifting porta come ulteriore risultato il fatto che per la configurazione iniziale $C \equiv I_k$ tale procedura è un caso particolare della Procedura 4.

Corollario 5.3.2. *La Procedura 3 applicata alla configurazione iniziale $C \equiv I_k$ è un caso particolare della Procedura 4, applicata allo stessa configurazione e con un opportuna scelta dei pesi c_j .*

Dimostrazione. Nel Teorema 5.3.1 si è dimostrato che la Procedura 3 applicata alla configurazione iniziale $C \equiv I_k$ coincide con un lifting sequenziale a partire dalla disequazione:

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

con ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ che rispetta i seguenti vincoli, che si dimostrano essere ammissibili:

- ciascun indice $j \in D$, dei coefficienti che la Procedura 3 pone a -1, dovrà seguire nell'ordinamento tutti gli indici nell'insieme $K_j \subseteq N \setminus (C \cup D)$, dove K_j è una combinazione di archi in $N \setminus (C \cup D)$ che aggiunta al grafo $C \cup \{j\}$ elimina tutte le triple asteroidali;
- gli archi $(a, b) \in N \setminus (C \cup D)$ devono essere ordinati in maniera tale che $d(a, b)$ sia non decrescente nella sequenza.

Notiamo a questo punto che le combinazioni K_j dei vincoli precedenti sono incluse tra le combinazioni K dei vincoli (3.14) stabiliti dalla Procedura 4: infatti gli insiemi di archi K_j aggiunti al grafo bipartito completo $G = \overline{G}_{|C}(V_{1|C}, V_{2|C}, N)$ eliminano la presenza di qualsiasi tripletta asteroidale. Per quanto riguarda i coefficienti delle combinazioni K rimanenti, diverse dalle K_j , si ha che anch'essi rispettano i vincoli (3.14): infatti fra gli archi di K è sempre presente almeno un elemento $j \in D$, per il quale $\alpha_j = -1$, ed essendo tutti i coefficienti fissati dalla Procedura 3 pari a 0 o -1 si ottiene

$$\sum_{j \in K} \alpha_j \leq -1.$$

Dunque scegliendo ordinamenti che soddisfino ai vincoli enunciati nel Teorema 5.3.1 sono verificati tutti i vincoli (3.14), e perciò la Procedura 4 coincide con lo stesso lifting sequenziale che equivale alla Procedura 3, da cui la tesi. \square

Si vorrebbero ora determinare le sequenze di lifting che applicate a partire da una configurazione iniziale $C \equiv I_k$ riconducano alla Procedura 4, senza necessariamente ricadere nel sottocaso della Procedura 3. In

generale la Procedura 4 può assegnare tutti i valori interi, diversi a seconda dei pesi nella funzione obiettivo in (3.15), che rispettano i vincoli (3.14); dal momento che i coefficienti di $N \setminus C$ non sono necessariamente fissati ai soli valori 0 e -1, come nella Procedura 3, non si può eseguire un ragionamento analogo a quello svolto nella dimostrazione del Teorema 5.3.1. Per determinare gli ordinamenti che rendono un lifting sequenziale equivalente alla Procedura 4 si prende in esame il generico vincolo (3.14):

$$\sum_{j \in K} \alpha_j \leq -1$$

con K combinazione di archi che aggiunti al grafo grafo bipartito completo $G = \overline{G}_{|C}(V_{1|C}, V_{2|C}, N)$ eliminano la presenza di qualsiasi tripletta asteroidale.

Teorema 5.3.3. *Applicare la Procedura 4 alla configurazione $C \equiv I_k$ equivale a eseguire un lifting sequenziale a partire dalla disuguaglianza:*

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

con ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ tale che si verifichino le seguenti condizioni:

- tutte le combinazioni K_{j_h} , dove $K_{j_h} \subseteq C_{h-1}$ è il sottoinsieme di archi la cui somma dei coefficienti massimizza la funzione obiettivo all'iterazione h -esima, devono contenere come sottoinsieme C ;
- l'ultimo coefficiente della sequenza per ogni combinazione $K_{j_h} \cup \{j_h\}$ deve venire fissato ad un valore non negativo.

Dimostrazione. Nel caso in cui la Procedura 4 coincida con un lifting si ha necessariamente che

$$\begin{aligned} \alpha_{j_h} &= |C| - 1 - \max \left\{ \sum_{j \in C_{h-1}} \alpha_j x_j : x \in P_{C_1}^{m,n}, x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C_h, x_{j_h} = 1 \right\} \\ &= |C| - 1 - \sum_{k \in K_{j_h}} \alpha_k, \end{aligned}$$

dove $K_{j_h} \subseteq C_{h-1}$ è il sottoinsieme di archi la cui somma dei coefficienti massimizza la funzione obiettivo all'iterazione h -esima del lifting. Dalla definizione di K_{j_h} segue che gli archi con indici in $K_{j_h} \cup \{j_h\}$ danno una configurazione priva di triple asteroidali colonna, poiché $\sum_{k \in K_{j_h}} \alpha_k = \sum_{j \in C_{h-1}} \alpha_j x'_j$ con:

$$x' = (x'_i)_{i \in N} := \begin{cases} x'_i = 1 & i \in K_{j_h} \cup \{j_h\} \\ x'_i = 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \in P_{C_1}^{m,n}$$

per la definizione del dominio della funzione obiettivo nel lifting.

Nel caso in cui $C \subseteq K_{j_h}$ si ha allora che l'insieme $(K_{j_h} \cup \{j_h\}) \setminus C$ è incluso fra le combinazioni K dei vincoli (3.14) generati dalla Procedura 4; in tale situazione i vincoli si possono così esplicitare:

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in K} \alpha_j \leq -1 &\Leftrightarrow -\sum_{j \in K} \alpha_j - 1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow -\left(\sum_{j \in K_{j_h} \cup \{j_h\}} \alpha_j - |C|\right) - 1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow |C| - 1 - \sum_{j \in K_{j_h} \cup \{j_h\}} \alpha_j \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 2\alpha_{j_h} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha_{j_h} \geq 0
\end{aligned}$$

dove la seconda equivalenza segue dal fatto che $K = (K_{j_h} \cup \{j_h\}) \setminus C$.

Abbiamo dunque dimostrato che per sequenze di lifting tali che tutte le combinazioni K_{j_h} contengano come sottoinsieme C e che l'ultimo coefficiente della sequenza per ogni combinazione K sia fissato ad un valore non negativo si ottengono le stesse disuguaglianze fornite dalla Procedura 4, come voluto. \square

Osservazione 5.3.4. Le condizioni esplicitate nel Teorema 5.3.3 sono di difficile implementazione, poiché richiedono una verifica a posteriori dei coefficienti ottenuti dal lifting sequenziale per un determinato ordinamento.

Se le condizioni poste dal Teorema 5.3.3 sono di difficile implementazione si ha però che nel caso in cui esse risultino verificate in un lifting sequenziale allora tale algoritmo è equivalente all'applicazione della Procedura 4. Da tale identificazione segue innanzitutto la garanzia che le disuguaglianze (3.16) fornite dalla Procedura 4 siano valide, poiché un processo di lifting inizializzato da una disuguaglianza valida per la sezione iniziale Q_C fornisce sempre una disuguaglianza valida per il politopo in esame, in questo caso $P_{C_1}^{m,n}$.

Inoltre le proprietà del lifting garantiscono che la Procedura 4 per la configurazione iniziale $C \equiv I_k$, se identificabile con un lifting nelle condizioni del Teorema 5.3.3, restituisce sempre faccette di $P_{C_1}^{m,n}$.

Corollario 5.3.5. *Se la Procedura 4 applicata alla configurazione I_k rispetta le condizioni del Teorema 5.3.3, allora le disuguaglianze (3.16) da essa fornite definiscono faccette di $P_{C_1}^{m,n}$.*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 2.4.1, eseguendo un lifting a partire da una faccia d -dimensionale della sezione iniziale Q_C si ottiene una faccia del politopo finale di dimensione almeno $d + l$, con $l := |N \setminus C|$; in

particolare eseguendo il lifting sequenziale di faccette si ottengono ancora faccette. Nel caso della configurazione iniziale $C \equiv I_k$ la Proposizione 5.2.4 introdotta in precedenza dimostra che la disuguaglianza di partenza $\sum_{i \in I_k} x_i \leq |C| - 1$ definisce una faccetta per la sezione iniziale: si può allora concludere che se la Procedura 4 applicata alla configurazione I_k è identificabile con un lifting, nelle condizioni del Teorema 5.3.3, si ottengono sempre disuguaglianze definenti faccette. \square

5.3.2 Le configurazioni di partenza $\overline{III}_{s,d,l}$ e $\overline{IV}_{s,d,l}$

Eseguiamo il lifting a partire dalla disuguaglianza:

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

con configurazioni di partenza $C \equiv \overline{III}_{s,d,l}$ e $C \equiv \overline{IV}_{s,d,l}$, date dalla seconda e terza classe di configurazioni del Teorema 5.2.2 per $s, d, l \geq 2$.

Cerchiamo anche in questo caso di capire per quali ordinamenti delle variabili in $N \setminus C$ si ottiene una delle disuguaglianze (3.13) fornite dalla Procedura 3, come fatto per il caso $C = I_k$.

Nuovamente affinché il lifting sequenziale a partire dalle configurazioni $C \equiv \overline{III}_{s,d,l}$ e $C \equiv \overline{IV}_{s,d,l}$ coincida con la Procedura 3 è necessario scegliere l'ordinamento in maniera opportuna; un tale ordinamento esiste per il seguente risultato, analogo del Teorema 5.3.1.

Teorema 5.3.6. *Applicare la Procedura 3 alle configurazioni $C \equiv \overline{III}_{s,d,l}$ e $C \equiv \overline{IV}_{s,d,l}$ equivale a eseguire un lifting sequenziale a partire dalla disuguaglianza:*

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

con ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ che rispetta i seguenti vincoli:

- ciascun indice $j \in D$, dei coefficienti che la Procedura 3 pone a -1, dovrà seguire nell'ordinamento tutti gli indici nell'insieme $K_j \subseteq N \setminus (C \cup D)$, dove K_j è una combinazione di archi in $N \setminus (C \cup D)$ che aggiunta al grafo $C \cup \{j\}$ elimina tutte le triple asteroidali;
- gli archi $(a, b) \in N \setminus (C \cup D)$ devono essere ordinati in maniera tale che $d(a, b)$ sia non decrescente nella sequenza.

Dimostrazione. Ripetendo lo stesso ragionamento seguito nel Teorema 5.3.1 si ricava anche in questo caso che in ogni sequenza di lifting che restituisca le disuguaglianze (3.13) si hanno i seguenti vincoli sulle posizioni degli indici:

- ciascun indice $j \in D$ dovrà seguire nell'ordinamento tutti gli indici nell'insieme $K_j \subseteq N \setminus (C \cup D)$, dove K_j è una combinazione di archi in $N \setminus (C \cup D)$ che aggiunta al grafo $C \cup \{j\}$ elimina tutte le triple asteroidali;

- tutti gli indici in ciascun $K_j \subseteq N \setminus (C \cup D)$, $j \in D$ dovranno essere ordinati in maniera tale che $\alpha_k = 0 \forall k \in K_j$.

Per quanto riguarda il primo dei due vincoli è necessario trovare per ogni $j \in D$ un'opportuna combinazione K_j di archi in $N \setminus (C \cup D)$ che aggiunta al grafo $C \cup \{j\}$ elimini tutte le triple asteroidali. Esplicitiamo tale scelta per la configurazione $C \equiv \overline{III}_{s,d,l}$, definendo K_j $j = (a, b) \in D$ nel seguente modo:

- se $(a, b) = (r_i, x)$:

$$K := K(\{r_i, \dots, r_{\frac{d}{2}}, t_1, \dots, t_{\frac{l}{2}}\}; \{x, w, c_i, \dots, c_{\frac{d}{2}-1}, e_1, \dots, e_{\frac{l}{2}-1}\}) \\ \setminus \{(r_i, x), \dots, (r_{\frac{d}{2}}, x)\}.$$

In maniera simmetrica si può ragionare per $(a, b) = (a_i, x)$, scambiando gli indici r, c rispettivamente con a, b ;

- se $(a, b) = (t_i, y)$:

$$K := K(\{t_i, \dots, t_{\frac{l}{2}}, a_1, \dots, a_{\frac{s}{2}}\}; \{y, w, e_i, \dots, e_{\frac{l}{2}-1}, b_1, \dots, b_{\frac{s}{2}-1}\}) \\ \setminus \{(t_i, y), \dots, (t_{\frac{l}{2}}, y)\}.$$

In maniera simmetrica si può ragionare per $(a, b) = (r_i, y)$, scambiando gli indici t, e rispettivamente con r, c ;

- se $(a, b) = (t_i, z)$:

$$K := K(\{t_i, \dots, t_{\frac{l}{2}}, r_1, \dots, r_{\frac{d}{2}}\}; \{z, w, e_i, \dots, e_{\frac{l}{2}-1}, c_1, \dots, c_{\frac{d}{2}-1}\}) \\ \setminus \{(t_i, z), \dots, (t_{\frac{l}{2}}, z)\}.$$

In maniera simmetrica si può ragionare per $(a, b) = (a_i, z)$, scambiando gli indici t, e rispettivamente con a, b ,

dove con $K(V_1; V_2)$ si intende il grafo bipartito completo indotto dagli insiemi di vertici V_1, V_2 , ovvero il grafo bipartito nel quale tutti i vertici in V_1 sono adiacenti a tutti i vertici in V_2 . Il ruolo della combinazione K_j rispetto all'arco j è illustrato in Figura 5.8.

Nel caso della configurazione $C \equiv \overline{IV}_{s,d,l}$ definiamo K_j nello stesso modo ma sostituendo i valori $\frac{l}{2}, \frac{l}{2} - 1, \frac{d}{2}, \frac{d}{2} - 1, \frac{s}{2} - 1, \frac{s}{2}$ rispettivamente con $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor, \lfloor \frac{s}{2} \rfloor, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor, \lfloor \frac{l}{2} \rfloor, \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$.

Per quanto riguarda il secondo vincolo è invece necessario trovare per ogni K_j definito sopra una sequenza degli archi $k \in K_j$ tale che il lifting eseguito su di essi assegni ad ognuno il valore 0. Anche in questo caso, come nel Teorema 5.3.1, ordinando gli archi $(a, b) = k \in K_j$ in maniera tale che $d(a, b)$ sia non decrescente nella sequenza si ottengono sempre coefficienti α_k nulli: tale regola si estende ancora all'intero insieme

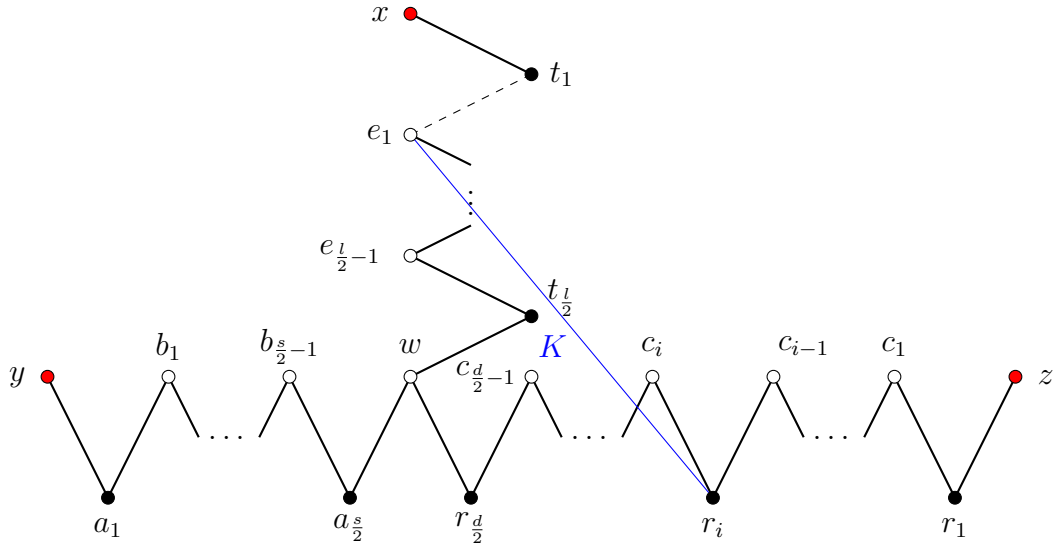


Figura 5.7: La configurazione ottenuta dal grafo $\overline{III}_{s,d,l}$ aggiungendo l'arco blu ed eliminando quello tratteggiato.

$N \setminus (C \cup D)$, unione di tutti i K_j . Il ruolo degli archi $(a', b') = k \in K_j$ t.c. $d(a', b') < d(a, b)$ rispetto all'arco (a, b) è illustrato in Figura 5.7.

Abbiamo nuovamente dimostrato come i vincoli posti sugli ordinamenti possano essere sempre soddisfatti per le configurazioni $\overline{III}_{s,d,l}$ e $\overline{IV}_{s,d,l}$, ottenendo sequenze di lifting che forniscono le stesse disuguaglianze ottenute dalla Procedura 3, come voluto. \square

Dall'identificazione fra Procedura 3 e lifting si può ricavare anche in questo caso che per le configurazioni iniziali $C \equiv \overline{III}_{s,d,l}$ e $C \equiv \overline{IV}_{s,d,l}$ tale procedura è un caso particolare della Procedura 4.

Corollario 5.3.7. *La Procedura 3 applicata alle configurazioni iniziali $C \equiv \overline{III}_{s,d,l}$ e $C \equiv \overline{IV}_{s,d,l}$ è un caso particolare della Procedura 4, applicata alle stesse configurazioni e con un opportuna scelta dei pesi c_j .*

Dimostrazione. La dimostrazione segue lo stesso ragionamento di quella del Corollario 5.3.2. \square

Si vorrebbero ora determinare le sequenze di lifting che applicate a partire da una configurazione iniziale $C \equiv \overline{III}_{s,d,l}$ o $C \equiv \overline{IV}_{s,d,l}$ riconducano alla Procedura 4, senza necessariamente ricadere nel sottocaso della Procedura 3. Anche in questo caso per determinare gli ordinamenti che rendono un lifting sequenziale equivalente alla Procedura 4 si prende in esame il generico vincolo (3.14):

$$\sum_{j \in K} \alpha_j \leq -1$$

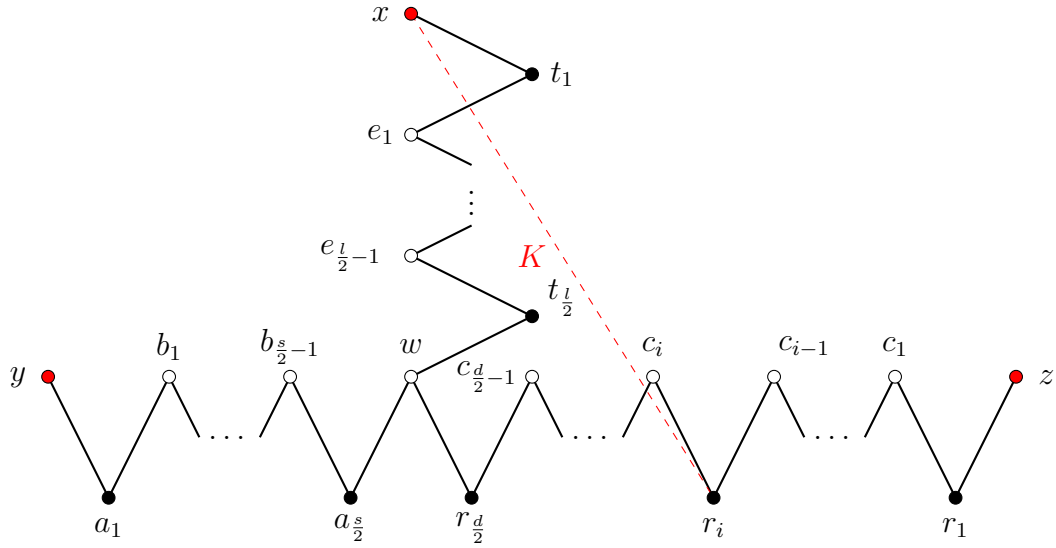


Figura 5.8: La configurazione $\overline{III}_{s,d,l}$, con tratteggiato uno degli archi che la Procedura 3 pone a -1.

con K combinazione di archi che aggiunti al grafo grafo bipartito completo $G = \overline{G}_{|C}(V_{1|C}, V_{2|C}, N)$ eliminano la presenza di qualsiasi tripletta asteroidale.

Teorema 5.3.8. *Applicare la Procedura 4 alla configurazione $C \equiv \overline{III}_{s,d,l}$ o $C \equiv \overline{IV}_{s,d,l}$ equivale a eseguire un lifting sequenziale a partire dalla disuguaglianza:*

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

con ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ tale che si verifichino le seguenti condizioni:

- tutte le combinazioni K_{j_h} , dove $K_{j_h} \subseteq C_{h-1}$ è il sottoinsieme di archi la cui somma dei coefficienti massimizza la funzione obiettivo all'iterazione h -esima, devono contenere come sottoinsieme C ;
- l'ultimo coefficiente della sequenza per ogni combinazione $K_{j_h} \cup \{j_h\}$ deve venire fissato ad un valore non negativo.

Dimostrazione. La dimostrazione segue lo stesso ragionamento di quella del Teorema 5.3.3. \square

Anche per le configurazioni $C \equiv \overline{III}_{s,d,l}$ e $C \equiv \overline{IV}_{s,d,l}$ vale l'Osservazione 5.3.4, ovvero le condizioni poste dal Teorema 5.3.8 sono di difficile implementazione, poiché richiedono una verifica a posteriori del lifting. Come notato per $C \equiv I_k$ si ha però che nel caso in cui esse risultino verificate in un lifting sequenziale allora tale algoritmo è equivalente all'applicazione della Procedura 4. Da tale identificazione segue anche per

le configurazioni in analisi la garanzia che le disuguaglianze (3.16) fornite dalla Procedura 4 siano valide.

Inoltre dalla Proposizione 2.4.1, eseguendo un lifting a partire da una faccia d -dimensionale della sezione iniziale Q_C si ottiene una faccia del politopo finale di dimensione almeno $d + l$, con $l := |N \setminus C|$; in particolare eseguendo il lifting sequenziale di faccette si ottengono ancora faccette. Nel caso delle configurazioni iniziali $C \equiv \overline{III}_{s,d,l}$ e $C \equiv \overline{IV}_{s,d,l}$ la Proposizione 5.2.4 introdotta in precedenza dimostra che la disuguaglianza di partenza $\sum_{i \in I_k} x_i \leq |C| - 1$ non definisce una faccetta per la sezione iniziale; si ha però che, nella dimostrazione della proposizione, i punti affinemente indipendenti appartenenti alla faccia indotta vengono ristretti a quelli associati ai grafi C1P ottenuti da C eliminando un solo arco. Si può allora concludere che la Procedura 4 applicata alle configurazioni $C \equiv \overline{III}_{s,d,l}$ e $C \equiv \overline{IV}_{s,d,l}$, se identificabile con un lifting nelle condizioni del Teorema 5.3.3, fornisce disuguaglianze definenti facce le cui dimensioni hanno come lower bound rispettivamente $5 + |N \setminus C|$ e $8 + |N \setminus C|$.

5.3.3 Le configurazioni di partenza $\overline{V}_{u,f,g,l}$ e $VI_{u,f,g,l}$

Eseguiamo il lifting a partire dalla disuguaglianza:

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

con configurazioni di partenza $\overline{V}_{u,f,g,l}$ e $VI_{u,f,g,l}$, date dalla terza e quarta classe di configurazioni del Teorema 5.2.2 per $u, f, g \geq 2$.

Cerchiamo anche in questo caso di capire per quali ordinamenti delle variabili in $N \setminus C$ si ottiene una delle disuguaglianze (3.13) fornite dalla Procedura 3.

Ancora una volta affinché il lifting sequenziale a partire dalle configurazioni $\overline{V}_{u,f,g,l}$ e $VI_{u,f,g,l}$ coincida con la Procedura 3 si dovrà scegliere l'ordinamento in maniera opportuna; un tale ordinamento esiste per il seguente risultato, analogo dei Teoremi 5.3.1 e 5.3.6.

Teorema 5.3.9. *Applicare la Procedura 3 alle configurazioni $\overline{V}_{u,f,g,l}$ e $VI_{u,f,g,l}$ equivale a eseguire un lifting sequenziale a partire dalla disuguaglianza:*

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

con ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ che rispetta i seguenti vincoli:

- ciascun indice $j \in D$, dei coefficienti che la Procedura 3 pone a -1, dovrà seguire nell'ordinamento tutti gli indici nell'insieme $K_j \subseteq N \setminus (C \cup D)$, dove K_j è una combinazione di archi in $N \setminus (C \cup D)$ che aggiunta al grafo $C \cup \{j\}$ elimina tutte le triple asteroidali;

- gli archi $(a, b) \in N \setminus (C \cup D)$ devono essere ordinati in maniera tale che $d(a, b)$ sia non decrescente nella sequenza.

Dimostrazione. Ripetendo ancora lo stesso ragionamento seguito nel Teorema 5.3.1 si ricava anche in questo caso che in ogni sequenza di lifting che restituisca le disuguaglianze (3.13) si hanno i seguenti vincoli sulle posizioni degli indici:

- ciascun indice $j \in D$ dovrà seguire nell'ordinamento tutti gli indici nell'insieme $K_j \subseteq N \setminus (C \cup D)$, dove K_j è una combinazione di archi in $N \setminus (C \cup D)$ che aggiunta al grafo $C \cup \{j\}$ elimina tutte le triple asteroidali;
- tutti gli indici in ciascun $K_j \subseteq N \setminus (C \cup D)$, $j \in D$ dovranno essere ordinati in maniera tale che $\alpha_k = 0 \forall k \in K_j$.

Per quanto riguarda il primo dei due vincoli troviamo anche in questo caso per ogni $j \in D$ un'opportuna combinazione K_j di archi in $N \setminus (C \cup D)$ che aggiunta al grafo $C \cup \{j\}$ elimini tutte le triple asteroidali. Esplicitiamo tale scelta per la configurazione $C \equiv \bar{V}_{u,f,g,l}$, ponendo per ogni $j = (a, b) \in D$:

$$K_j = K_1 \cup K_2$$

con K_1 e K_2 così definiti:

- se $(a, b) = (r_i, x)$:

$$\begin{aligned} K_1 &:= K(\{w, \alpha_1, \dots, \alpha_i, t_1, \dots, t_{\frac{l}{2}}, r_1, \dots, r_{\frac{g}{2}}\}; \\ &\quad \{x, z, \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, e_1, \dots, e_{\frac{l}{2}}, r_1, \dots, r_{\frac{g}{2}}\}) \setminus \{(\alpha_1, x), \dots, (\alpha_i, x)\} \\ K_2 &:= K(\{w, r_1, \dots, r_{\frac{g}{2}}, a_1, \dots, a_{\frac{f}{2}}, \alpha_1, \dots, \alpha_{\frac{u}{2}}\}; \\ &\quad \{y, z, c_1, \dots, c_{\frac{g}{2}}, b_1, \dots, b_{\frac{f}{2}}, \beta_1, \dots, \beta_{\frac{u}{2}-1}\}); \end{aligned}$$

- se $(a, b) = (t_i, y)$:

$$\begin{aligned} K_1 &:= K(\{w, t_i, \dots, t_{\frac{l}{2}}, a_1, \dots, a_{\frac{f}{2}}\}; \\ &\quad \{y, e_i, \dots, e_{\frac{l}{2}}, b_1, \dots, b_{\frac{f}{2}}\}) \setminus \{(t_i, y), \dots, (t_{\frac{l}{2}}, y)\} \\ K_2 &:= K(\{w, r_1, \dots, r_{\frac{g}{2}}, a_1, \dots, a_{\frac{f}{2}}, \alpha_1, \dots, \alpha_{\frac{u}{2}}\}; \\ &\quad \{y, z, c_1, \dots, c_{\frac{g}{2}}, b_1, \dots, b_{\frac{f}{2}}, \beta_1, \dots, \beta_{\frac{u}{2}-1}\}); \end{aligned}$$

Per $(a, b) = (r_i, y)$ ci si riconduce al caso della configurazione I_k ;

- se $(a, b) = (t_i, z)$:

$$\begin{aligned} K_1 &:= K(\{w, t_i, \dots, t_{\frac{l}{2}}, r_1, \dots, r_{\frac{g}{2}}\}; \\ &\quad \{z, e_i, \dots, e_{\frac{l}{2}}, c_1, \dots, c_{\frac{g}{2}}\}) \setminus \{(t_i, z), \dots, (t_{\frac{l}{2}}, z)\} \\ K_2 &:= K(\{w, r_1, \dots, r_{\frac{g}{2}}, a_1, \dots, a_{\frac{f}{2}}, \alpha_1, \dots, \alpha_{\frac{u}{2}}\}; \\ &\quad \{y, z, c_1, \dots, c_{\frac{g}{2}}, b_1, \dots, b_{\frac{f}{2}}, \beta_1, \dots, \beta_{\frac{u}{2}-1}\}); \end{aligned}$$

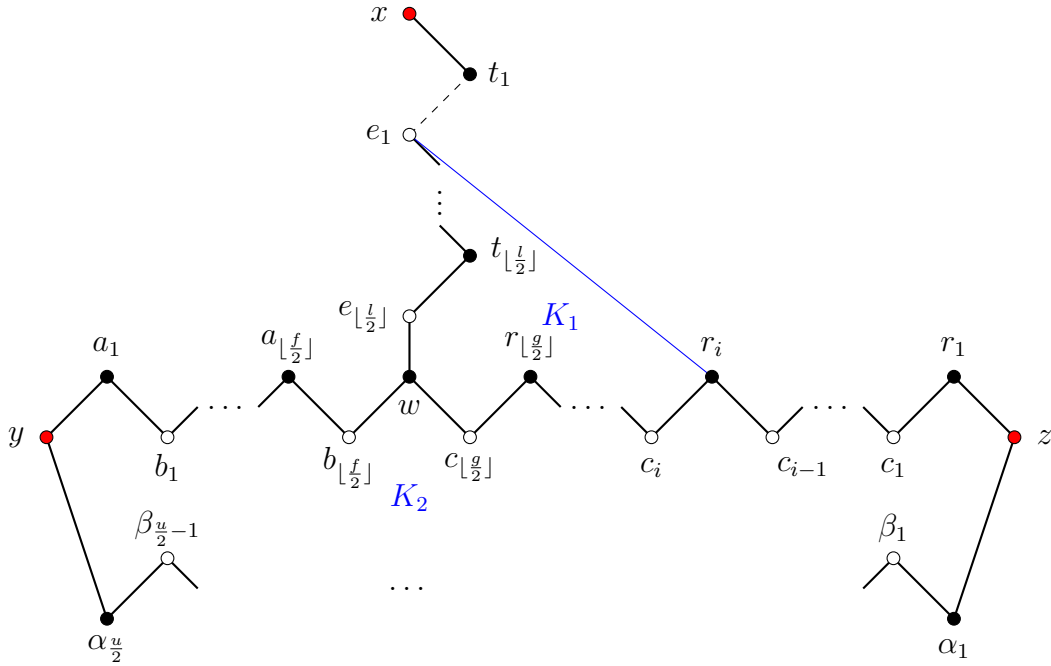


Figura 5.9: La configurazione ottenuta dal grafo $\bar{V}_{u,f,g,l}$ aggiungendo l'arco blu ed eliminando quello tratteggiato.

Per $(a, b) = (a_i, z)$ ci si riconduce al caso della configurazione I_k ,

dove con $K(V_1; V_2)$ si intende il grafo bipartito completo indotto dagli insiemi di vertici V_1, V_2 , ovvero il grafo bipartito nel quale tutti i vertici in V_1 sono adiacenti a tutti i vertici in V_2 . Il ruolo della combinazione K_j rispetto all'arco j è illustrato in Figura 5.10.

Nel caso della configurazione $C \equiv VI_{u,f,g,l}$ definiamo K_j nello stesso modo ma sostituendo i valori $[\frac{f}{2}], [\frac{g}{2}], [\frac{l}{2}]$ rispettivamente con $\frac{f}{2}, \frac{f}{2} - 1, \frac{g}{2}, \frac{g}{2} - 1, \frac{l}{2}, \frac{l}{2} - 1$.

Per quanto riguarda il secondo vincolo è invece necessario trovare per ogni K_j definito sopra una sequenza degli archi $k \in K_j$ tale che il lifting eseguito su di essi assegni ad ognuno il valore 0. Anche in questo caso, come nel Teorema 5.3.1, ordinando gli archi $(a, b) = k \in K_j$ in maniera tale che $d(a, b)$ sia non decrescente nella sequenza si ottengono sempre coefficienti α_k nulli: tale regola si estende ancora all'intero insieme $N \setminus (C \cup D)$, unione di tutti i K_j . Il ruolo degli archi $(a', b') = k \in K_j$ t.c. $d(a', b') < d(a, b)$ rispetto all'arco (a, b) è illustrato in Figura 5.9.

Abbiamo ancora una volta dimostrato come i vincoli posti sugli ordinamenti possano essere sempre soddisfatti per le configurazioni $\bar{V}_{u,f,g,l}$ e $VI_{u,f,g,l}$, ottenendo sequenze di lifting che forniscono le stesse disuguaglianze ottenute dalla Procedura 3, come voluto. \square

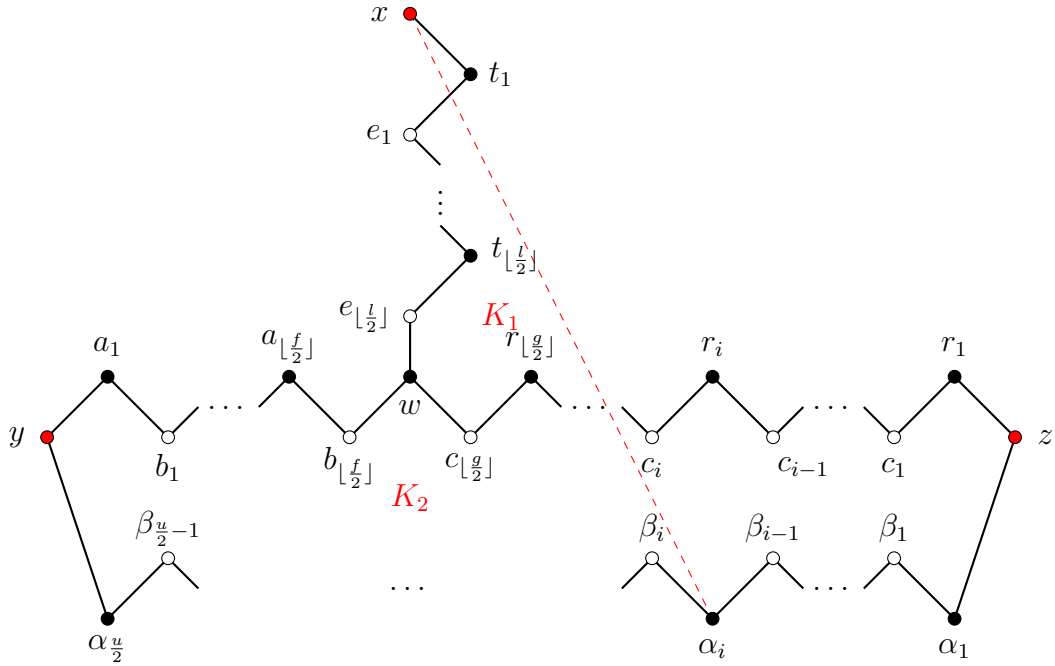


Figura 5.10: La configurazione $\bar{V}_{u,f,g,l}$, con tratteggiato uno degli archi che la Procedura 3 pone a -1.

Dall'identificazione fra Procedura 3 e lifting si può ricavare anche in questo caso che per le configurazioni iniziali $C \equiv \bar{V}_{u,f,g,l}$ e $C \equiv VI_{u,f,g,l}$ tale procedura è un caso particolare della Procedura 4.

Corollario 5.3.10. *La Procedura 3 applicata alle configurazioni iniziali $C \equiv \bar{V}_{u,f,g,l}$ e $C \equiv VI_{u,f,g,l}$ è un caso particolare della Procedura 4, applicata alle stesse configurazioni e con un opportuna scelta dei pesi c_j .*

Dimostrazione. La dimostrazione segue lo stesso ragionamento di quella del Corollario 5.3.2. \square

Si vorrebbero ora determinare le sequenze di lifting che applicate a partire da una configurazione iniziale $C \equiv \bar{V}_{u,f,g,l}$ o $C \equiv VI_{u,f,g,l}$ riconducano alla Procedura 4, senza necessariamente ricadere nel sottocaso della Procedura 3. Anche in questo caso per determinare gli ordinamenti che rendono un lifting sequenziale equivalente alla Procedura 4 si prende in esame il generico vincolo (3.14):

$$\sum_{j \in K} \alpha_j \leq -1$$

con K combinazione di archi che aggiunti al grafo bipartito completo $G = \bar{G}_{|C}(V_{1|C}, V_{2|C}, N)$ eliminano la presenza di qualsiasi tripletta asteroidale.

Teorema 5.3.11. *Applicare la Procedura 4 alla configurazione $C \equiv \bar{V}_{u,f,g,l}$ o $C \equiv VI_{u,f,g,l}$ equivale a eseguire un lifting sequenziale a partire dalla disuguaglianza:*

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

con ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ tale che si verifichino le seguenti condizioni:

- tutte le combinazioni K_{j_h} , dove $K_{j_h} \subseteq C_{h-1}$ è il sottoinsieme di archi la cui somma dei coefficienti massimizza la funzione obiettivo all'iterazione h -esima, devono contenere come sottoinsieme C ;
- l'ultimo coefficiente della sequenza per ogni combinazione $K_{j_h} \cup \{j_h\}$ deve venire fissato ad un valore non negativo.

Dimostrazione. La dimostrazione segue lo stesso ragionamento di quella del Teorema 5.3.3. □

Anche per le configurazioni $C \equiv \bar{V}_{u,f,g,l}$ e $C \equiv VI_{u,f,g,l}$ vale l'Osservazione 5.3.4, ovvero le condizioni del Teorema 5.3.8 rendono la Procedura 4 equivalente ad un lifting sequenziale. Da tale identificazione segue anche per le configurazioni in analisi la garanzia che le disuguaglianze (3.16) fornite dalla Procedura 4 siano valide.

Inoltre dalla Proposizione 2.4.1, eseguendo un lifting a partire da una faccia d -dimensionale della sezione iniziale Q_C si ottiene una faccia del politopo finale di dimensione almeno $d + l$, con $l := |N \setminus C|$; in particolare eseguendo il lifting sequenziale di faccette si ottengono ancora faccette. Nel caso delle configurazioni iniziali $C \equiv \bar{V}_{u,f,g,l}$ e $C \equiv VI_{u,f,g,l}$ la Proposizione 5.2.4 introdotta in precedenza dimostra che la disuguaglianza di partenza $\sum_{i \in I_k} x_i \leq |C| - 1$ non definisce una faccetta per la sezione iniziale; si ha però che, nella dimostrazione della proposizione, i punti affinemente indipendenti appartenenti alla faccia indotta vengono ristretti a quelli associati ai grafi C1P ottenuti da C eliminando un solo arco. Si può allora concludere che la Procedura 4 applicata alle configurazioni $C \equiv \bar{V}_{u,f,g,l}$ e $C \equiv VI_{u,f,g,l}$, se identificabile con un lifting nelle condizioni del Teorema 5.3.3, fornisce disuguaglianze definenti facce le cui dimensioni hanno come lower bound rispettivamente $5 + |N \setminus C|$ e $3 + |N \setminus C|$.

5.3.4 Le configurazioni di partenza $VII_{l,s,u,f,g}$ e $VIII_{l,s,d,u,f,g}$

Eseguiamo il lifting a partire dalla disuguaglianza:

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

con configurazioni di partenza $VII_{l,s,u,f,g}$ per $u, g \geq 2$ e $VIII_{l,s,d,u,f,g}$, date dalla settima e ottava classe di configurazioni del Teorema 5.2.2.

Cerchiamo anche in questo caso di capire se esistono degli ordinamenti delle variabili in $N \setminus C$ che permettano di ottenere una delle disuguaglianze (3.13) fornite dalla Procedura 3.

Ricordiamo che la Procedura 3 fissa i coefficienti in $N \setminus C$ solamente ai possibili valori 0 o -1: nella dimostrazione del Teorema 5.3.1 si verifica come per ottenere tali valori sia necessario porre i seguenti vincoli sulle posizioni degli indici:

- ciascun indice $j \in D$ dovrà seguire nell'ordinamento tutti gli indici nell'insieme $K_j \subseteq N \setminus (C \cup D)$, dove K_j è una combinazione di archi in $N \setminus (C \cup D)$ che aggiunta al grafo $C \cup \{j\}$ elimina tutte le triple asteroidali;
- tutti gli indici in ciascun $K_j \subseteq N \setminus (C \cup D)$, $j \in D$ dovranno essere ordinati in maniera tale che $\alpha_k = 0 \forall k \in K_j$.

Nella dimostrazione del Teorema 5.3.1 si mostra poi che nel secondo dei due vincoli è necessario scegliere come archi iniziali dell'ordinamento $(a, b) = k \in K_j$ t.c. $d(a, b) = 3$ e poiché nel caso delle configurazioni $VII_{l,s,u,f,g}$ e $VIII_{l,s,d,u,f,g}$ gli insiemi K_j che eliminano le triple asteroidali dal grafo devono necessariamente contenere gli archi aventi entrambi gli estremi nel ciclo

$$\begin{aligned} K_2 &:= (p, P_{p,w}, w, P_{w,q}, q, P_{q,p}, p) \\ &= (p, \dots, a_i, b_i, \dots, w, \dots, c_i, r_i, \dots, q, \dots, t_i, e_i, \dots, p) \end{aligned}$$

con $q \equiv z$ per la configurazione $VII_{l,s,u,f,g}$, si ha che gli archi iniziali dell'ordinamento dovranno essere gli

$$(a, b) = k \in K_2 \text{ t.c. } d(a, b) = 3.$$

Eseguendo il lifting a partire da uno di tali archi non si ottiene però come valore 0 o -1: consideriamo infatti gli archi (t_{i-1}, e_i) nelle Figure 5.11 e 5.12 ed eseguiamo il primo lifting della sequenza per fissarne i relativi coefficienti. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \alpha_{(t_{i-1}, e_i)} &= |C| - 1 \\ &\quad - \max \left\{ \sum_{j \in C} x_j : x \in P_{C_1}^{m,n}, x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus (C \cup (t_{i-1}, e_i)), x_{(t_{i-1}, e_i)} = 1 \right\} \\ &= |C| - 1 - (|C| - 2) = 1, \end{aligned}$$

poiché il massimo numero di archi di C che si possono considerare affinché il grafo $G' = (V_1, V_2, A)$, $A \subseteq C \cup (t_{i-1}, e_i)$ non abbia triple asteroidali è $|C| - 2$; in questo caso basta eliminare i due spigoli aventi estremi p e w (che possono essere nodi riga oppure colonna) appartenenti rispettivamente ai cammini congiungenti p a w e w a z .

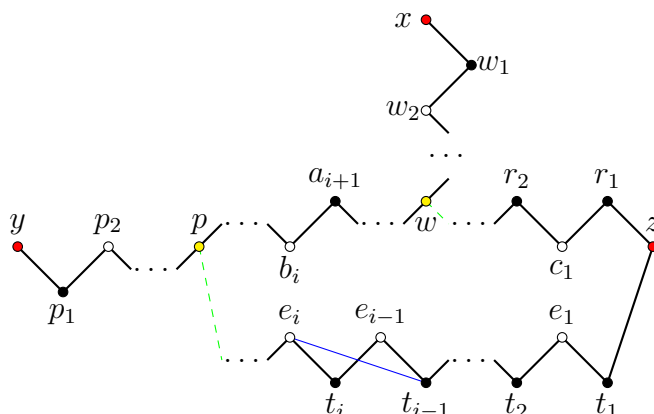


Figura 5.11: La configurazione ottenuta dal grafo $VII_{l,s,u,f,g}$ aggiungendo l'arco blu ed eliminando quelli tratteggiati in verde (adiacenti ai nodi p e w); i vertici p e w , in giallo, possono essere nodi riga oppure colonna.

Da quanto appena visto si può concludere che il lifting sequenziale a partire dalle configurazioni $C \equiv VII_{l,s,u,f,g}$ e $C \equiv VIII_{l,s,d,u,f,g}$ non coincide mai con la Procedura 3. Non vale allora per queste configurazioni un analogo del Teorema 5.3.1 e inoltre senza l'identificazione fornita da tale teorema non è possibile dimostrare che per le configurazioni iniziali $C \equiv VII_{l,s,u,f,g}$ e $C \equiv VIII_{l,s,d,u,f,g}$ la Procedura 3 è un caso particolare della Procedura 4.

Osservazione 5.3.12. Abbiamo verificato come, per le configurazioni $C \equiv VII_{l,s,u,f,g}$ e $C \equiv VIII_{l,s,d,u,f,g}$, non sia possibile dimostrare che la Procedura 3 sia un caso particolare della Procedura 4 utilizzando l'identificazione di entrambe procedure con un lifting sequenziale. In generale rimane però aperto il problema delle relazioni fra queste due procedure, le quali potrebbero dare risultati uguali pur non essendo equivalenti ad alcun lifting di disuguaglianze associate alle configurazioni iniziali $C \equiv VII_{l,s,u,f,g}$ e $C \equiv VIII_{l,s,d,u,f,g}$.

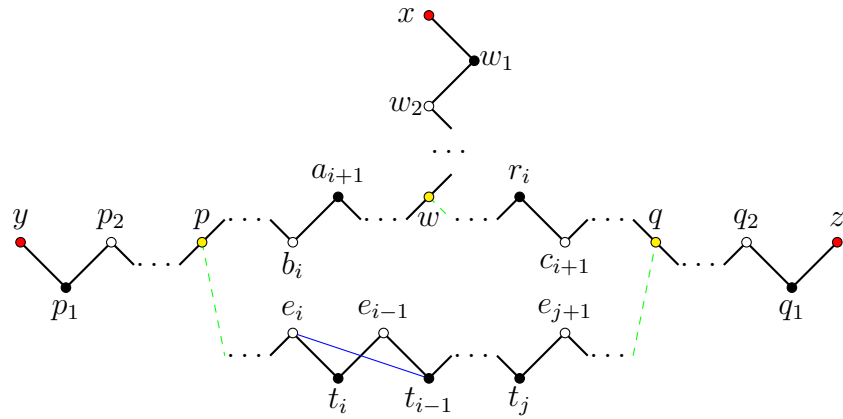


Figura 5.12: La configurazione ottenuta dal grafo $VIII_{l,s,d,u,f,g}$ aggiungendo l'arco blu ed eliminando quelli tratteggiati in verde (adiacenti ai nodi p, w e q); i vertici p, w e q , in giallo, possono essere nodi riga oppure colonna.

Capitolo 6

Esempi di applicazione e possibili estensioni delle procedure di lifting

Nel Capitolo 5 abbiamo dimostrato come le disuguaglianze ottenute dalle Procedure 3 e 4 siano, per opportune condizioni, il risultato di un lifting sequenziale con determinati ordinamenti. Più specificatamente, si è verificato come per le configurazioni $I_k, \overline{III}_{s,d,l}, \overline{IV}_{s,d,l}, \overline{V}_{u,f,g,l}$ e $VI_{u,f,g,l}$ la Procedura 3 coincida con un lifting sequenziale, per opportune scelte dell'ordinamento definite nei Teoremi 5.3.1, 5.3.6, 5.3.9. Si sono poi definite delle condizioni sugli ordinamenti dei lifting sequenziali che, se verificate, dimostrano come la Procedura 4 equivalga ad un opportuno lifting sequenziale. Tale identificazione garantisce in maniera diretta, grazie alle proprietà del lifting enunciate al Capitolo 2, la validità delle disuguaglianze ottenute e fornisce informazioni sulla dimensione delle facce del politopo $P_{C_1}^{m,n}$ da esse indotte. Nella prima parte di questo capitolo verificheremo come tale equivalenza fra Procedura 4 e lifting valga per il minore di Tucker M_{IV} , trovando i relativi ordinamenti delle variabili su cui eseguire il lifting.

Nella seconda parte del capitolo utilizzeremo i risultati esposti nei capitoli precedenti per dimostrare come le procedure di lifting definite possano essere utilizzate per superare le procedure note descritte in questa tesi e ottenere diverse classi di faccette per il politopo $P_{C_1}^{m,n}$. In particolare, partiremo dalla descrizione completa di $P_{C_1}^{4,4}$ riportata in [19], ed ottenuta con l'ausilio del software PORTA. La descrizione include 8 classi di disuguaglianze che non sono ottenibili con le procedure note, ma che, come vedremo, sono il risultato del lifting sequenziale descritto nel Capitolo 5. Tale risultato suggerisce la possibilità di generalizzare il lifting sequenziale anche a configurazioni di partenza diverse da quelle, con coefficienti unitari, analizzate nel Capitolo 5.

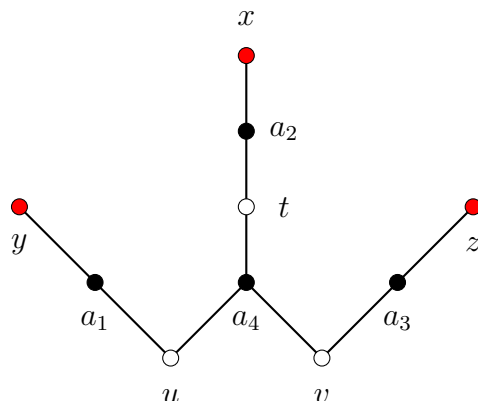


Figura 6.1: Il grafo bipartito associato al minore di Tucker M_{IV} .

6.1 Sequenze di lifting per la Procedura 4 sul minore M_{IV}

Applichiamo la Procedura 4 al minore di Tucker M_{IV} , seguendo i calcoli svolti in [8].

Consideriamo il grafo associato al minore di Tucker M_{IV} , mostrato in Figura 6.1. Per inizializzare la Procedura 4 è necessario scegliere tre cammini P_1, P_2, P_3 che rendano asteroidale la tripla di nodi colonna fissati x, y, z . Tale scelta è forzata per il grafo in considerazione, associato a M_{IV} ; si deve infatti avere:

$$\begin{aligned} P_1 &= (x, a_2, t, a_4, u, a_1, y) \\ P_2 &= (x, a_2, t, a_4, v, a_3, z) \\ P_3 &= (y, a_1, u, a_4, v, a_3, z). \end{aligned}$$

Agli archi di tali cammini la procedura assegna coefficiente 1.

A questo punto si cercano tutte le combinazioni $K \subseteq N \setminus C$ di k archi fra quelli non fissati la cui aggiunta al grafo iniziale, coincidente con $P_1 \cup P_2 \cup P_3$, elimina la presenza di qualsiasi tripletta asteroidale; per ognuna di tali combinazioni si considerano poi i vincoli (3.14):

$$\sum_{j \in K} \alpha_j \leq -1.$$

Utilizzando i risultati ottenuti in [8], abbiamo che per $|K| = 1$ i vincoli risultano:

$$\alpha_{(a_4, y)} \leq -1 \tag{6.1}$$

$$\alpha_{(a_4, x)} \leq -1 \tag{6.2}$$

$$\alpha_{(a_4, z)} \leq -1, \tag{6.3}$$

mentre per $|K| = 2$ si hanno:

$$\alpha_{(a_1,x)} + \alpha_{(a_1,t)} \leq -1 \quad (6.4)$$

$$\alpha_{(a_1,x)} + \alpha_{(a_2,u)} \leq -1 \quad (6.5)$$

$$\alpha_{(a_1,t)} + \alpha_{(a_2,y)} \leq -1 \quad (6.6)$$

$$\alpha_{(a_1,z)} + \alpha_{(a_1,v)} \leq -1 \quad (6.7)$$

$$\alpha_{(a_1,z)} + \alpha_{(a_3,u)} \leq -1 \quad (6.8)$$

$$\alpha_{(a_1,v)} + \alpha_{(a_3,y)} \leq -1 \quad (6.9)$$

$$\alpha_{(a_2,y)} + \alpha_{(a_2,u)} \leq -1 \quad (6.10)$$

$$\alpha_{(a_2,z)} + \alpha_{(a_2,v)} \leq -1 \quad (6.11)$$

$$\alpha_{(a_2,z)} + \alpha_{(a_3,t)} \leq -1 \quad (6.12)$$

$$\alpha_{(a_2,v)} + \alpha_{(a_3,x)} \leq -1 \quad (6.13)$$

$$\alpha_{(a_3,y)} + \alpha_{(a_3,u)} \leq -1 \quad (6.14)$$

$$\alpha_{(a_3,x)} + \alpha_{(a_3,t)} \leq -1. \quad (6.15)$$

Osserviamo a questo punto che è possibile risolvere il programma lineare (3.16) senza aggiungere gli vincoli (3.14): infatti per qualsiasi scelta dei pesi c_j nel programma lineare i vincoli per le combinazioni K con $|K| \leq 2$ dovranno essere sempre verificati, rendendo ridondanti tutti gli altri, aventi $|K| > 2$.

Risolvendo allora il problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} & \max_{F_{|N \setminus C|} = (\alpha_j)_{j \in N \setminus C}} \sum_{j \in N \setminus C} c_j \alpha_j & (6.16) \\ & \text{soggetto a} & (6.1) - (6.3) \\ & & (6.4) - (6.15) \\ & & \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in N \setminus C; \end{aligned}$$

e modificando i pesi c_j per $i = 1, \dots, 15$ si trovano otto soluzioni ottime per i vettori dei coefficienti α_j , $j \in N \setminus C$. Fissando i valori degli α_j , $j \in N \setminus C$ secondo queste otto soluzioni, si ottengono le matrici dei coefficienti elencate in Figura 6.2.

Notiamo, come si osserva in [8], che le matrici dei coefficienti $F_{IV_3}^B$, $F_{IV_5}^B$ e $F_{IV_8}^B$ sono equivalenti e dunque inducono la medesima classe di disuguaglianze; lo si può verificare tramite opportune permutazioni di righe e di colonne. Lo stesso vale per le matrici dei coefficienti $F_{IV_4}^B$, $F_{IV_6}^B$ e $F_{IV_7}^B$. Quindi in realtà le classi di disuguaglianze diverse sono quattro: $F_{IV_1}^B \circ X \leq 8$, $F_{IV_2}^B \circ X \leq 8$, $F_{IV_3}^B \circ X \leq 8$ e $F_{IV_4}^B \circ X \leq 8$. Si noti poi che $F_{IV_2}^B$ coincide con la matrice dei coefficienti F_{IV}^A generata dalla Procedura 3: in tal caso le Procedure 3 e 4 danno gli stessi risultati.

A questo punto passiamo ad eseguire il lifting sequenziale a partire dalla disequazione:

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1 = 8,$$

$$F_{IV_1}^B = \begin{matrix} & y & u & x & t & z & v \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(6.17)

$$F_{IV_2}^B = \begin{matrix} & y & u & x & t & z & v \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(6.18)

$$F_{IV_3}^B = \begin{matrix} & y & u & x & t & z & v \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(6.19)

$$F_{IV_4}^B = \begin{matrix} & y & u & x & t & z & v \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(6.20)

$$F_{IV_5}^B = \begin{matrix} & y & u & x & t & z & v \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(6.21)

$$F_{IV_6}^B = \begin{matrix} & y & u & x & t & z & v \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(6.22)

$$F_{IV_7}^B = \begin{matrix} & y & u & x & t & z & v \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(6.23)

$$F_{IV_8}^B = \begin{matrix} & y & u & x & t & z & v \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(6.24)

Figura 6.2: Le matrici dei coefficienti ottenute applicando la Procedura 4 al minore di Tucker M_{IV} .

con la configurazione iniziale $C = P_1 \cup P_2 \cup P_3$. Tale disuguaglianza definisce una faccetta per la sezione $Q_{IV} = P_{C1}^{4,6} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C\}$, $N = \{1, \dots, 24\}$. Utilizziamo gli ordinamenti delle variabili in $N \setminus C$ definiti da:

$$(j_1, \dots, j_l)_1 := ((a_1, x), (a_2, y), (a_1, t), (a_2, u), (a_1, z), (a_3, y), \quad (6.25)$$

$$(a_1, v), (a_3, u), (a_3, x), (a_2, z), (a_2, v), (a_3, t), \quad (6.26)$$

$$(a_4, y), (a_4, x), (a_4, z)) \quad (6.27)$$

$$(j_1, \dots, j_l)_2 := ((a_1, t), (a_1, v), (a_2, u), (a_2, v), (a_3, t), (a_3, u), \quad (6.28)$$

$$(a_4, y), (a_2, y), (a_3, y), (a_4, x), (a_1, x), (a_3, x), \quad (6.29)$$

$$(a_4, z), (a_2, z), (a_1, z)) \quad (6.30)$$

$$(j_1, \dots, j_l)_3 := ((a_2, v), (a_3, t), (a_2, y), (a_3, y), (a_1, x), (a_1, z), \quad (6.31)$$

$$(a_2, u), (a_3, u), (a_1, t), (a_1, v), (a_4, y), (a_4, x), \quad (6.32)$$

$$(a_3, x), (a_4, z), (a_2, z)) \quad (6.33)$$

$$(j_1, \dots, j_l)_4 := ((a_1, t), (a_2, u), (a_1, x), (a_2, y), (a_1, v), (a_3, u), \quad (6.34)$$

$$(a_1, z), (a_3, y), (a_3, x), (a_2, z), (a_2, v), (a_3, t), \quad (6.35)$$

$$(a_4, z), (a_2, z), (a_1, z)). \quad (6.36)$$

i quali soddisfano le condizioni enunciate nel Teorema 5.3.8, visto al Capitolo 5. Si ottiene che tali sequenze di lifting originano rispettivamente le disequazioni indotte dalle matrici dei coefficienti $F_{IV_1}^B, F_{IV_2}^B, F_{IV_3}^B, F_{IV_4}^B$ risultanti dalla Procedura 4, come previsto dal Teorema 5.3.8; essendo le rimanenti matrici equivalenti a una di queste quattro abbiamo allora dimostrato che la Procedura 4 applicata al minore di Tucker M_{IV} equivale ad un lifting sequenziale, per gli ordinamenti delle variabili visti.

Dall'identificazione fra Procedura 4 e lifting sequenziale per il minore M_{IV} si può ricavare, come abbiamo visto al Capitolo 5, che le disuguaglianze ottenute sono valide per il politopo $P_{C1}^{4,6}$. Inoltre dal momento che per la Proposizione 5.2.4 la disequazione di partenza definisce una faccetta per la sezione iniziale Q_{IV} , si ha dalla Proposizione 2.4.1 che tutte le disuguaglianze definiscono faccette. Quest'ultimo risultato era stato verificato in [8] soltanto computazionalmente, con l'ausilio del software PORTA; utilizzando invece le proprietà del lifting si è fornita una dimostrazione teorica generale.

6.2 Le faccette del politopo $P_{C1}^{4,4}$

Le disuguaglianze fornite dalle Procedure 3 e 4 che coincidono, per opportune condizioni, con un sequenza di lifting, non bastano in generale a fornire una descrizione completa del politopo $P_{C1}^{m,n}$: possiamo considerare come controesempio le classi di disuguaglianze che definiscono $P_{C1}^{4,4}$, presentate in [19] e riportate in Figura 6.3. Tali disuguaglianze sono da

intendersi rappresentanti della classi ottenute permutando le righe e/o le colonne delle matrici dei coefficienti F_i , come conseguenza del risultato visto al Capitolo 3 per il quale una matrice è C1P se e solo se lo è la matrice da essa ottenuta permutando un arbitrario numero di righe e/o di colonne.

Il primo insieme di faccette del politopo $P_{C_1}^{4,4}$ è quello indotto dai vincoli (6.37) e (6.38) sulle variabili: si è dimostrato nel Teorema 3.2.6 tali disequazioni sono risultato di un lifting triviale delle disuguaglianze

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ x &\leq 1 \end{aligned}$$

che inducono faccette del politopo $P_{C_1}^{1,1}$. Si ha però che per queste disequazioni di partenza, valide per la sezione iniziale

$$Q_{\{ij\}} = P_{C_1}^{4,4} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_h = 0 \ \forall h \neq ij\} = \text{conv}(0, 1) = P_{C_1}^{1,1}$$

il lifting triviale coincide con la procedura di lifting sequenziale definita nell'Algoritmo 1, come dimostrato nella seguente proposizione, che fornisce una dimostrazione, alternativa a quella presentata in [19], del fatto che le disuguaglianze banali sui bound delle variabili sono faccette di tutti i politopi $P_{C_1}^{m,n}$.

Proposizione 6.2.1. *Per ogni $m \geq 1, n \geq 1, 1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, le disuguaglianze $x_{ij} \geq 0$ e $x_{ij} \leq 1$, definenti faccette per $P_{C_1}^{m,n}$, sono ottenute tramite lifting sequenziale con sequenza arbitraria delle stesse disuguaglianze in \mathbb{R}^1 , definenti faccette per $P_{C_1}^{1,1}$.*

Dimostrazione. Consideriamo una delle disuguaglianze $x_{ij} \geq 0$ con $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ definenti faccette per $P_{C_1}^{1,1} = \text{conv}(\{0, 1\})$ e riscriviamole come $-x_{ij} \leq 0$. Si ha che per qualsiasi ordinamento delle variabili $N \setminus \{ij\} = \{11, 12, \dots, 1n, 21, 22, \dots, mn\} \setminus \{ij\}$ il lifting sequenziale porge:

$$\alpha_{j_h} = 0 - \max \left\{ \sum_{j \in C_{h-1}} \alpha_j x_j : x \in P_{C_1}^{m,n}, x_j = 0 \ \forall j \in N \setminus C_h, x_{j_h} = 1 \right\} = 0 - 0 = 0$$

poiché $\alpha_{ij} = -1$ e tutti i coefficienti α_{j_h} precedenti nella sequenza vengono posti a 0. Si ottiene dunque al termine del lifting sequenziale la stessa disequazione di partenza, liftata trivialmente, intesa nello spazio $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Allo stesso modo, considerando le disuguaglianze $x_{ij} \leq 1$ con $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ per $P_{C_1}^{1,1}$, per qualsiasi ordinamento delle variabili del lifting si ottiene:

$$\alpha_{j_h} = 1 - \max \left\{ \sum_{j \in C_{h-1}} \alpha_j x_j : x \in P_{C_1}^{m,n}, x_j = 0 \ \forall j \in N \setminus C_h, x_{j_h} = 1 \right\} = 1 - \alpha_{ij} = 1 - 1 = 0$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, 4 \quad (6.37)$$

$$x_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j = 1, \dots, 4 \quad (6.38)$$

$$F_{II} \circ x = F_{2_1} \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ x \leq 5 \quad (6.40)$$

$$F_{IV} \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ x \leq 7 \quad (6.42)$$

$$F_{VI} \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ x \leq 7 \quad (6.44)$$

$$F_{VIII} \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ x \leq 10 \quad (6.46)$$

$$F_X \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ x \leq 15 \quad (6.48)$$

$$F_I \circ x = F_{1_1} \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ x \leq 5 \quad (6.39)$$

$$F_{III} \circ x = F_{1_2} \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ x \leq 7 \quad (6.41)$$

$$F_V \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ x \leq 7 \quad (6.43)$$

$$F_{VII} \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ x \leq 8 \quad (6.45)$$

$$F_{IX} \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ x \leq 13 \quad (6.47)$$

$$F_{XI} \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ x \leq 15 \quad (6.49)$$

Figura 6.3: Le classi di disuguaglianze che forniscono una descrizione completa di $P_{C1}^{4,4}$.

e nuovamente il lifting porge la stessa disequazione di partenza intesa nello spazio $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Infine osserviamo che poiché le disuguaglianze di partenza definiscono faccette per la sezione iniziale

$$Q_{\{ij\}} = P_{C_1}^{4,4} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_h = 0 \ \forall h \neq ij\} = \text{conv}(0, 1) = P_{C_1}^{1,1}$$

allora per la Proposizione 2.4.1 esse stesse, riottenute dal lifting sequenziale, definiscono faccette per il politopo $P_{C_1}^{m,n}$. \square

Dunque le faccette $x_{ij} \geq 0$ e $x_{ij} \leq 1$ per $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ sono ottenibili tramite lifting sequenziale.

Notiamo inoltre che le matrici F_I, F_{II}, F_{III} che inducono le prime tre disuguaglianze (6.39)-(6.41) coincidono rispettivamente con le matrici $F_{1_1}, F_{2_1}, F_{1_2}$: tali matrici dei coefficienti sono quindi ottenute tramite la Procedura 3 a partire dalle configurazioni di Tucker I_1, I_2 e III_1 . Abbiamo dimostrato nel Capitolo 5 che applicare la Procedura 3 alle configurazioni iniziali I_k e $\overline{III}_{s,d,l}$ equivale ad effettuare un lifting sequenziale con uno degli ordinamenti che rispettano le condizioni rispettivamente dei Teoremi 5.3.1 e 5.3.6: possiamo allora concludere che le disuguaglianze (6.39)-(6.41) sono ottenibili tramite lifting.

Rimangono a questo punto le 8 classi di disuguaglianze (6.42)-(6.49), le quali non sono ottenibili tramite le Procedure 3 e 4. Possiamo prendere come controesempio la disuguaglianza (6.49): tale matrice dei coefficienti contiene entrate diverse da 0 e -1 (presenta i valori 2 e -2), dunque non può essere ricavata dalla Procedura 3, e la somma dei coefficienti della combinazione non C1P data da tutti gli archi è pari a $10 \neq -1$, dunque non soddisfa i vincoli della Procedura 4. Ci chiediamo se anche in questi casi sia possibile ottenere le disequazioni tramite lifting sequenziale, a partire da un sottoinsieme di indici C fissati a priori, con cardinalità più piccola possibile e in maniera da indurre faccette della sezione di partenza: in tal caso quindi si avrebbe che tutte le disuguaglianze che descrivono il politopo $P_{C_1}^{4,4}$ sono risultato di un lifting, risultato che non è valido in generale per un qualsiasi lifting sequenziale, come notato al Capitolo 2 nel quale è stato fornito l'Esempio 2.4.4.

Indichiamo con $\sum_{i=1}^{16} \alpha_i x_i \leq \beta$ la disuguaglianza ottenuta con il lifting, e con $\sum_{i=1}^{16} f_i x_i \leq \beta$ la disuguaglianza appartenente a una delle classi (6.42)-(6.49). Facciamo notare che dobbiamo avere come coefficienti $\alpha_i = f_i, i \in C$ nell'insieme di partenza per il lifting gli stessi coefficienti delle disuguaglianze (6.42)-(6.49), e il termine noto deve essere il medesimo: tali valori sono infatti lasciati inalterati dal processo di lifting. Dunque la validità di tali disuguaglianze discende dal Teorema 4.2.4 dimostrato al Capitolo 4. Per determinare l'insieme C a partire dalle diverse disuguaglianze terremo poi in considerazione il Criterio Algebrico 1, dimostrato sempre al Capitolo 4.

Disuguaglianza IV

Consideriamo la disuguaglianza (6.42) indotta dalla matrice F_{IV} :

$$F_{IV} \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ b & \\ c & \\ d & \end{matrix} \circ x \leq 7.$$

Cerchiamo ora di trovare un sottoinsieme di entrate α_i , $i \in C \subseteq N = \{1, \dots, 16\}$ della matrice dei coefficienti il quale definisca una faccetta per la sezione iniziale Q_C e abbia la cardinalità minima, in modo da lavorare su un politopo di partenza con dimensione (piena per quanto dimostrato nell'Osservazione 4.2.6) più bassa possibile.

Un tale sottoinsieme dovrà innanzitutto soddisfare al Criterio Algebrico 1 che abbiamo definito al Capitolo 3; in questo modo si può restringere la scelta del sottoinsieme C a poche alternative. A questo punto per ognuna delle possibili scelte di C si generano tutti i vertici della sezione e quindi si descrive l'involuppo convesso di tali vertici con un sistema minimale di disuguaglianze, ottenibile tramite il comando `traf` del software PORTA: fra le faccette della sezione così calcolate si cerca la disequazione avente come coefficienti le entrate della matrice iniziale con indici in C .

Per il Criterio Algebrico 1 sarà necessario esaminare insiemi C che contengano come sottoinsieme $C_+ = \{a1, a2, b1, b2, c1, c3, d1, d4\}$: infatti la somma dei coefficienti supera il termine noto 7 solo considerando tutti quelli positivi unitari.

Considerando innanzitutto $C := C_+$, non si ottiene una faccetta di Q_C per la Proposizione 5.2.4.

Si passa dunque a considerare insiemi del tipo

$$C \supsetneq C_+, \text{ t.c. } |C| \geq |C_+| = 9.$$

Analizzando tutti i possibili $C \supset C_+$, t.c. $|C| = 9$ ci si può limitare a considerare gli insiemi

$$\begin{aligned} C_1 &:= C_+ \cup \{a_3\} \\ C_2 &:= C_+ \cup \{a_4\} \\ C_3 &:= C_+ \cup \{c_2\} \\ C_4 &:= C_+ \cup \{c_4\} \end{aligned}$$

in quanto per la simmetria degli archi nel grafo bipartito associato ad F_{IV} , illustrato in Figura 6.4, si possono permutare gli indici delle righe e/o delle colonne di F_{IV} corrispondenti ad opportuni nodi riga e/o colonna del grafo per ottenere tutte le possibili sezioni di partenza. Generando tutti

i vertici delle sezioni definite dagli insiemi C_1, C_2, C_3, C_4 e descrivendo l'involuppo convesso di tali vertici tramite il comando `traf` del software PORTA, non si trova però fra le faccette la disequazione avente come coefficienti le entrate della matrice iniziale con indici rispettivamente in C_1, C_2, C_3, C_4 .

Si procede allora a considerare insiemi del tipo

$$C \supsetneq C_+, \text{ t.c. } |C| \geq |C_+| = 10.$$

Analizzando tutti i possibili $C \supset C_+$, t.c. $|C| = 10$ si può nuovamente sfruttare la simmetria degli archi nel grafo bipartito associato ad F_{IV} , illustrato in Figura 6.4, e limitarsi a considerare gli insiemi

$$\begin{aligned} C_5 &:= C_+ \cup \{a_3, b_4\} \\ C_6 &:= C_+ \cup \{a_3, a_4\} \\ C_7 &:= C_+ \cup \{a_3, c_2\} \\ C_8 &:= C_+ \cup \{a_3, c_4\} \\ C_9 &:= C_+ \cup \{a_4, b_3\} \\ C_{10} &:= C_+ \cup \{a_4, c_2\} \\ C_{11} &:= C_+ \cup \{a_4, c_4\} \\ C_{12} &:= C_+ \cup \{c_2, d_2\} \\ C_{13} &:= C_+ \cup \{c_2, c_4\} \\ C_{14} &:= C_+ \cup \{c_4, d_3\}. \end{aligned}$$

Generando tutti i vertici delle sezioni definite dagli insiemi C_5, \dots, C_{14} e descrivendo l'involuppo convesso di tali vertici tramite il comando `traf` del software PORTA, si ottiene che l'unica scelta dell'insieme C_i per la quale compare fra le faccette la disequazione avente come coefficienti le entrate della matrice iniziale con indici in C_i è quella dell'insieme C_5 .

Con questo modo di procedere si è verificato allora che l'insieme di partenza

$$C := C_5 = C_+ \cup \{a_3, b_4\} = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_4, c_1, c_3, d_1, d_4\}$$

fornisce la disuguaglianza

$$\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq 7,$$

la quale è valida e induce una faccetta per la sezione iniziale Q_C .

Eseguendo poi il lifting sequenziale con il metodo grafico per *qualsiasi* ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ si riottiene la disuguaglianza (6.42): infatti si può notare come il ruolo dei vari archi in $N \setminus C$ nel rimuovere la configurazione non C1P data da C non dipenda dall'ordinamento di $N \setminus C$. Si noti che la disuguaglianza (6.42) definisce effettivamente una faccetta dal momento che si è eseguito un lifting a partire da una faccia massimale di Q_C .

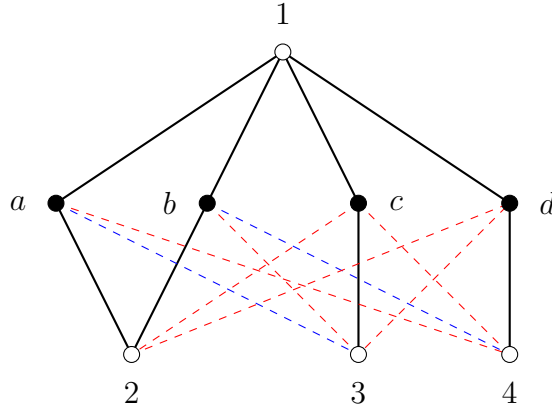


Figura 6.4: Il grafo bipartito associato ad F_{IV} nel quale sono evidenziati con il tratteggio gli archi con indici in $N \setminus C$, in blu quelli associati ai coefficienti 0 della matrice e in rosso quelli associati ai coefficienti -1.

Disuguaglianza V

Consideriamo la disuguaglianza (6.43) indotta dalla matrice F_V :

$$F_V \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ x \leq 7.$$

Eseguendo lo stesso ragionamento svolto per la disuguaglianza IV , richiamando il Criterio Algebrico 1 e con l'ausilio del software PORTA, si può individuare in questo caso come insieme di partenza di cardinalità minima $C \subseteq N = \{1, \dots, 16\}$

$$C := \{a1, a2, a3, b1, b2, b4, c2, c3, d2, d4\},$$

e considerando le entrate α_i , $i \in C$ della matrice dei coefficienti si definisce la disuguaglianza

$$\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq 7,$$

che è valida e induce una faccetta per la sezione iniziale Q_C .

Eseguendo come nel caso della disuguaglianza IV il lifting sequenziale con il metodo grafico, per un ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ che abbia come primo indice $d3$ e tutti gli altri successivamente in ordine *qualsiasi*, si riottiene la disuguaglianza (6.43); tale disuguaglianza effettivamente definisce una faccetta dal momento che si eseguito un lifting a partire da una faccia massimale di Q_C .

Disuguaglianza VI

Richiamiamo in questo caso il risultato già ottenuto nell'esempio al Capitolo 4. Consideriamo la disuguaglianza (6.44) indotta dalla matrice F_{VI} :

$$F_{VI} \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ b & & & & \\ c & & & & \\ d & & & & \end{matrix} \circ x \leq 7.$$

Eseguendo lo stesso ragionamento svolto per la disuguaglianza *IV*, richiamando il Criterio Algebrico 1 e con l'ausilio del software PORTA, si può individuare in questo caso come insieme di partenza di cardinalità minima $C \subseteq N = \{1, \dots, 16\}$

$$C := \{a1, a2, a3, b1, b4, c2, c4, d3, d4\},$$

e considerando le entrate α_i , $i \in C$ della matrice dei coefficienti si definisce la disuguaglianza

$$\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq 7,$$

che è valida e induce una faccetta per la sezione iniziale Q_C .

Eseguendo come nel caso della disuguaglianza *IV* il lifting sequenziale con il metodo grafico per *qualsiasi* ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ si riottiene la disuguaglianza (6.44); tale disuguaglianza effettivamente definisce una faccetta dal momento che si eseguito un lifting a partire da una faccia massimale di Q_C .

Disuguaglianza VII

Consideriamo la disuguaglianza (6.45) indotta dalla matrice F_{VII} :

$$F_{VII} \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ b & & & & \\ c & & & & \\ d & & & & \end{matrix} \circ x \leq 8$$

Eseguendo lo stesso ragionamento svolto per la disuguaglianza *IV*, richiamando il Criterio Algebrico 1 e con l'ausilio del software PORTA, si può individuare in questo caso come insieme di partenza di cardinalità minima $C \subseteq N = \{1, \dots, 16\}$

$$C := \{a1, a2, a3, b1, b2, b4, c1, c3, c4, d2, d3, d4\}$$

e considerando le entrate α_i , $i \in C$ della matrice dei coefficienti si definisce la disuguaglianza

$$\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq 8$$

che è valida e induce una faccetta per la sezione iniziale Q_C .

Eseguendo come nel caso della disuguaglianza IV il lifting sequenziale con il metodo grafico per *qualsiasi* ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ si riottiene la disuguaglianza (6.45); tale disuguaglianza effettivamente definisce una faccetta dal momento che si eseguito un lifting a partire da una faccia massimale di Q_C .

Disuguaglianza $VIII$

Consideriamo la disuguaglianza (6.46) indotta dalla matrice F_{VIII} :

$$F_{VIII} \circ x = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ x \leq 10$$

Eseguendo lo stesso ragionamento svolto per la disuguaglianza IV , richiamando il Criterio Algebrico 1 e con l'ausilio del software PORTA, si può individuare in questo caso come insieme di partenza di cardinalità minima $C \subseteq N = \{1, \dots, 16\}$

$$C := \{a1, a2, a3, b1, b2, b4, c1, c2, c3, c4, d1, d2, d3, d4\}$$

e considerando le entrate α_i , $i \in C$ della matrice dei coefficienti si definisce la disuguaglianza

$$\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq 10$$

che è valida e induce una faccetta per la sezione iniziale Q_C .

Eseguendo come nel caso della disuguaglianza IV il lifting sequenziale con il metodo grafico per *qualsiasi* ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ si riottiene la disuguaglianza (6.46); tale disuguaglianza effettivamente definisce una faccetta dal momento che si eseguito un lifting a partire da una faccia massimale di Q_C .

Disuguaglianza IX

Consideriamo la disuguaglianza (6.47) indotta dalla matrice F_{IX} :

$$F_{IX} \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & \left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ b & \\ c & \\ d & \end{matrix} \circ x \leq 13$$

Eseguendo lo stesso ragionamento svolto per la disuguaglianza IV, richiamando il Criterio Algebrico 1 e con l'ausilio del software PORTA, si può individuare in questo caso come insieme di partenza di cardinalità minima $C \subseteq N = \{1, \dots, 16\}$

$$C := \{a1, a2, a3, b1, b3, c1, c4, d2, d3, d4\}$$

e considerando le entrate α_i , $i \in C$ della matrice dei coefficienti si definisce la disuguaglianza

$$\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq 13$$

che è valida e induce una faccetta per la sezione iniziale Q_C .

Eseguendo come nel caso della disuguaglianza IV il lifting sequenziale con il metodo grafico per *qualsiasi* ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ si riottiene la disuguaglianza (6.47); tale disuguaglianza effettivamente definisce una faccetta dal momento che si eseguito un lifting a partire da una faccia massimale di Q_C .

Disuguaglianza X

Consideriamo la disuguaglianza (6.48) indotta dalla matrice F_X :

$$F_X \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & \left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ b & \\ c & \\ d & \end{matrix} \circ x \leq 15$$

Eseguendo lo stesso ragionamento svolto per la disuguaglianza IV, richiamando il Criterio Algebrico 1 e con l'ausilio del software PORTA, si può individuare in questo caso come insieme di partenza di cardinalità minima $C \subseteq N = \{1, \dots, 16\}$

$$C := \{a1, a2, a3, a4, b1, b2, b4, c1, c3, c4, d2, d3, d4\}$$

e considerando le entrate α_i , $i \in C$ della matrice dei coefficienti si definisce la disuguaglianza

$$\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq 15$$

che è valida e induce una faccetta per la sezione iniziale Q_C .

Eseguendo come nel caso della disuguaglianza IV il lifting sequenziale con il metodo grafico per *qualsiasi* ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ si riottiene la disuguaglianza (6.48); tale disuguaglianza effettivamente definisce una faccetta dal momento che si eseguito un lifting a partire da una faccia massimale di Q_C .

Disuguaglianza XI

Consideriamo la disuguaglianza (6.49) indotta dalla matrice F_{XI} :

$$F_{XI} \circ x = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ x \leq 15$$

Eseguendo lo stesso ragionamento svolto per la disuguaglianza IV , richiamando il Criterio Algebrico 1 e con l'ausilio del software PORTA, si può individuare in questo caso come insieme di partenza di cardinalità minima $C \subseteq N = \{1, \dots, 16\}$

$$C := \{a1, a2, a3, a4, b1, b4, c1, c2, c3, c4, d1, d3, d4\}$$

e considerando le entrate α_i , $i \in C$ della matrice dei coefficienti si definisce la disuguaglianza

$$\sum_{i \in C} \alpha_i x_i \leq 15$$

che è valida e induce una faccetta per la sezione iniziale Q_C .

Eseguendo come nel caso della disuguaglianza IV il lifting sequenziale con il metodo grafico per *qualsiasi* ordinamento delle variabili in $N \setminus C$ si riottiene la disuguaglianza (6.49); tale disuguaglianza effettivamente definisce una faccetta dal momento che si eseguito un lifting a partire da una faccia massimale di Q_C .

Capitolo 7

Conclusioni e sviluppi futuri

In questa tesi abbiamo preso in considerazione gli aspetti teorici derivanti da alcuni problemi di sequenziamento o *pattern sequencing problems*; in particolare abbiamo descritto i due problemi equivalenti *Minimization of Open Stacks Problem (MOSP)* e *Gate Matrix Layout Problem (GMLP)*.

Nella definizione di tali applicazioni si è considerato il ruolo svolto dalla proprietà *degli uni consecutivi (C1P)* sulle matrici 0-1, la cui formalizzazione in termini di Programmazione Lineare Intera (PLI) permette di modellare in maniera efficiente MOSP e GMLP.

Per esprimere il vincolo “ X è C1P” per una matrice $X \in \{0, 1\}^{m \times n}$ mediante disuguaglianze lineari si è dapprima descritta la caratterizzazione grafica fornita da Tucker in [26], la quale esclude la presenza di triple asteroidali in grafi bipartiti associati in maniera opportuna alle matrici binarie in esame. A partire da tale caratterizzazione, si è poi enunciato il teorema di struttura per le matrici C1P, che esclude i minori di Tucker come sottomatrici i cui grafi bipartiti associati presentano triplete asteroidali: in questo modo si è ottenuta una prima formulazione di PLI per il vincolo C1P. Si sono quindi dati i risultati della letteratura per l’analisi del poliedro associato alle matrici $m \times n$ C1P (il politopo $P_{C_1}^{m,n}$), presentando le proprietà principali del politopo $P_{C_1}^{m,n}$ e le faccette ottenute da Oswald e Reinelt in [19] e corrette da Brentegani in [4], oltre alle loro generalizzazioni fornite da Festa in [11].

Si sono quindi descritte nel dettaglio le procedure mediante le quali tali faccette possono essere generate graficamente, a partire da opportune configurazioni iniziali non C1P, in particolare descrivendo la differenza fra quelle che cercano di escludere una sola tripla asteroidale, e una procedura che invece tiene in considerazione molteplici triple possibili.

In particolare, abbiamo confrontato le procedure grafiche con l’algoritmo di lifting sequenziale, del quale si è data un’interpretazione grafica nel caso della specializzazione al politopo $P_{C_1}^{m,n}$. In questo modo sono emerse delle caratteristiche comuni.

Il nostro studio è partito dall’analisi delle procedure di lifting a partire da disuguaglianze valide ottenibili con considerazioni grafiche sull’e-

clusione di triplette asteroidali da particolari configurazioni non C1P, in modo che i coefficienti delle disuguaglianze assumano coefficienti di valore unitario nella sezione considerata. Sotto queste ipotesi, abbiamo definito un criterio algebrico che esprime una condizione necessaria affinché le stesse disuguaglianze definiscano faccette per le sezioni iniziali del politopo C1P. Si è poi ottenuto il risultato originale principale della tesi: eseguendo una classificazione completa delle possibili configurazioni che possono assumere tre cammini che rendono una fissata tripla di nodi colonna asteroidale in un grafo bipartito, si sono determinate per ogni classe di configurazioni grafiche iniziali i risultati del lifting sequenziale e, distinguendo i vari casi, si sono ottenute le condizioni sugli ordinamenti del lifting sotto le quali le procedure note e il lifting sequenziale danno gli stessi risultati. Quando si verifica tale identificazione fra i procedimenti, essa permette di sfruttare le proprietà note del lifting per descrivere meglio le facce definite dalle disuguaglianze risultanti dalle procedure. Si sono esplicitati gli ordinamenti che soddisfano le condizioni trovate eseguendo la verifica per il caso particolare del minore di Tucker M_{IV} .

In alcuni casi in cui le procedure note risultano equivalenti ad un lifting sequenziale si sono ottenuti, partendo da facce massimali delle sezioni iniziali e utilizzando le proprietà generali del lifting, delle faccette di $P_{C1}^{m,n}$, dimostrando così in modo alternativo e più elegante rispetto a [11] che alcune delle disuguaglianze ottenute dalle procedure note sono faccette. Nei casi invece in cui si è partiti da facce non massimali per le sezioni iniziali e utilizzando ancora le proprietà generali del lifting, si sono ottenuti soltanto dei limiti inferiori alle dimensioni delle facce risultanti. Si potrebbe allora analizzare quando, eseguendo il lifting, l'aumento della dimensione delle facce indotte dalle disuguaglianze sia strettamente maggiore di uno, come invece garantito dalla Proposizione 2.4.1. Analoga a tale problema è la possibilità che, applicando il lifting sequenziale a diverse disuguaglianze iniziali, si possano riottenere le stesse disequazioni: anche in questo caso si potrebbero analizzare le proprietà grafiche delle configurazioni iniziali al fine di individuarne le caratteristiche comuni.

Oltre ad eseguire il lifting su disuguaglianze iniziali a coefficienti unitari, correlate nella maniera vista a configurazioni non C1P, si è cercato di applicare l'algoritmo sequenziale anche a tipi diversi di disequazioni. Svolgendo i calcoli con l'ausilio del software PORTA per il caso del politopo $P_{C1}^{4,4}$ si è ottenuto che tutte le faccette che forniscono una descrizione completa del poliedro, trovate in [19], sono in realtà ottenibili eseguendo un lifting sequenziale a partire da opportune disuguaglianze definenti faccette per sezioni iniziali, che rispettano il criterio per le faccette di sezioni definito algebricamente in generale.

Da questo risultato si può considerare come possibile fronte di ricerca futuro uno studio dei risultati ottenuti applicando il lifting sequenziale a generiche disuguaglianze valide per le sezioni iniziali, che non siano necessariamente ottenibili da una configurazione C1P mediante l'assegnazione

di valori unitari ai coefficienti associati agli archi. Inoltre estendendo in tale modo la casistica considerata si possono ottenere ulteriori classi di disuguaglianze valide per il politopo $F_{C_1}^{m,n}$, non riconducibili a procedure note: sarebbe interessante per tali nuove classi trovare un metodo grafico generale per derivarle tramite il lifting sequenziale.

Riferimenti bibliografici

- [1] P. Baptiste, *Simple MIP Formulations to Minimize the Maximum Number of Open Stacks*, Proceedings of IJCAI'05 - Constraint Modelling Challenge 2005, 9–13 (2005)
- [2] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer (2008).
- [3] K.S. Booth, G.S. Lueker, *Testing for the Consecutive Ones Property, Interval Graphs, and Graph Planarity using PQ-Tree Algorithms*, Journal of Computer System Science, 13:335–379 (1976).
- [4] L. Brentegani, *Soluzione di problemi di sequenziamento con l'uso di matrici "consecutive ones"*, Tesi di Laurea Magistrale in Matematica (2011-2012).
- [5] T. Christof, A. Loebel, *Software and Data: PORTA Polyhedron Representation Transformation Algorithm*, disponibile presso <http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/PORTA/>, Heidelberg University, Discrete and Combinatorial Optimization.
- [6] M. Conforti, G. Cornuéjols, G. Zambelli, *Integer Programming*, Springer (2014).
- [7] L. De Giovanni, G. Massi, F. Pezzella, M.E. Pfetsch, G. Rinaldi, P. Ventura, *A heuristic and an exact method for the gate matrix connection cost minimization problem*, International Transaction in Operational Research, 20:627–643 (2013).
- [8] L. De Giovanni, L. Brentegani, *Procedure per la formulazione di disuguaglianze valide per il politopo degli uni consecutivi*, Report tecnico, Università di Padova (2013).
- [9] L. De Giovanni, *Notes on procedures to identify valid inequalities for the C1P polytope*, Report tecnico, Università di Padova (2014).
- [10] M. Di Summa, *Note di Teoria dei Grafi*, Dispense, Università di Padova

- [11] M. Festa, *Considerazioni sul politopo delle matrici “consecutive ones” e applicazioni a problemi di sequenziamento*, Tesi di Laurea Magistrale in Matematica (2012-2013).
- [12] D.R. Fulkerson, O.A. Gross, *Incidence matrices and interval graphs*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 15, No. 3 (1965).
- [13] Z. Gu, G.L. Nemhauser, M.W.P. Savelsbergh, *Sequence Independent Lifting in Mixed Integer Programming*, Georgia Institute of Technology, School of Industrial and Systems Engineering.
- [14] V. Klee, *What are the intersection graphs of arcs in a circle?*, Amer. Math. Monthly, (1969), 76:810–813.
- [15] C.E. Lekkerkerker, J.Ch. Boland, *Representation of finite graph by a set of intervals on the real line*, Fund. Math., 51:45–64 (1962).
- [16] A. Linhares, H.H. Yanasse, *Connections between cutting-pattern sequencing, VLSI design, and flexible machines*, Computers and Operation Research, 29:1759–1772 (2002).
- [17] G. Nemhauser, L. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, John Wiley and Sons, (1988).
- [18] D. Osmani, *Matrices with the consecutive ones property, interval graphs and their applications*, Master Thesis, University of Kaiserslautern (2001).
- [19] M. Oswald, G. Reinelt, *Polyhedral Aspects of the Consecutive Ones Problem*, COCOON, Computing and Combinatorics, Proceedings of the 5th Conference on Computing and Combinatorics (2000), 1858:373-382.
- [20] M. Oswald, G. Reinelt, *Computing Optimal Consecutive Ones Matrices*, The Sharpest Cut, The Impact of Manfred Padberg and His Work, Optimization, 173–184 (2004).
- [21] *Polar Duality, Polyhedra and Polytopes*, Dispense, Penn Engineering School of Engineering and Applied Science, University of Pennsylvania
- [22] F.S. Roberts, *Representations of Indifference Relations*, PhD thesis, Stanford University (1968).
- [23] F.S. Roberts, *Indifference Graphs*, Proof Techniques in Graph Theory, Proceedings of the Second Ann Arbor Graph Conference, Academic Press, New York (1969).

- [24] H. Ryser, *Combinatorial configurations*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 17:593 (1969).
- [25] A. Tucker, *Matrix characterizations of circular-arc graphs*, Pacific Journal of Mathematics, 38:2 (1971).
- [26] A. Tucker, *A structure theorem for the consecutive 1's property*, Journal of Combinatorial Theory Series B, 12:153-162 (1972).
- [27] L'enciclopedia libera Wikipedia, *Very large scale integration*, http://it.wikipedia.org/wiki/Very_large_scale_integration (2016).
- [28] G. Zarpellon, *Generazione di disuguaglianze valide per il politopo delle matrici "consecutive ones"*, Tesi di Laurea Magistrale in Matematica (2013-2014).
- [29] E. Zemel, *Lifting the facets of zero-one polytopes*, Mathematical Programming, 15:268-277 (1978).

Ringraziamenti

Un ringraziamento alla mia famiglia per il supporto.