

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Geometria e dinamica delle geodetiche dell'ellissoide

Relatore:
Francesco Fassò

Laureanda:
Giulia Lessio
Matricola:
1220214

ANNO ACCADEMICO 2022/2023

Indice

Introduzione	1
1 Coordinate ellittiche di Jacobi	3
1.1 Lagrangiana ed Hamiltoniana in coordinate ellittiche	6
2 Equazione di Hamilton-Jacobi	9
2.1 Completa integrabilità	9
2.2 Equazione di Hamilton-Jacobi ed integrabilità	10
2.3 Separazione delle variabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi	11
2.4 Separabilità nel caso delle geodetiche dell'ellissoide	12
3 Insiemi di livello degli integrali primi	15
3.1 Integrali primi	15
3.2 Ellissi principali	16
3.3 Indipendenza degli integrali primi	16
3.4 Disegni degli insiemi di livello	17
Appendice	21

Introduzione

La ricerca delle geodetiche di una superficie è un problema che interessa vari ambiti della matematica e può essere affrontato da molteplici punti di vista. Per questo motivo non esiste un'unica definizione di curva geodetica, ma definizioni equivalenti in base all'ambito in cui stiamo studiando il problema.

- Da un punto di vista variazionale le geodetiche sono, almeno localmente, le curve di minima lunghezza tra due punti di una superficie.
Sia Q una sottovarietà n dimensionale immersa in \mathbb{R}^m . Denotiamo con $l[\gamma]$ il funzionale lunghezza di una curva $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow Q$ definito da

$$l[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt \quad (1)$$

in cui $\|\cdot\|$ è la norma euclidea su \mathbb{R}^m . Fissati ora due punti $q_0, q_1 \in Q$, un intervallo $[t_0, t_1]$ e considerando l'insieme delle curve

$$\Gamma = \{\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow Q \mid \gamma(t_0) = q_0, \gamma(t_1) = q_1 \text{ con } q_0, q_1 \in Q\}$$

allora una geodetica di Q è una curva $\gamma \in \Gamma$ che minimizza il funzionale lunghezza $l[\gamma]$.

- Il problema di determinare la curva di minima lunghezza su una varietà si può formulare anche da un punto di vista meccanico considerando un punto di massa m vincolato a rimanere sulla superficie in assenza di forze attive.
La Lagrangiana o l'Hamiltoniana del sistema corrisponderanno dunque alla sola energia cinetica del punto, in quanto in assenza di forze attive l'energia potenziale è nulla.
Siano dati Q una varietà vincolare e un punto materiale vincolato a rimanere su di essa. Allora i moti del punto vincolato alla varietà, in assenza di forze attive, seguono le geodetiche della superficie.
- Passando ad un'interpretazione geometrica del problema le geodetiche di una superficie sono le curve la cui componente tangenziale dell'accelerazione è identicamente nulla.
Se infatti le forze attive del sistema sono identicamente nulle, l'unica forza agente sul punto vincolato alla superficie è la reazione vincolare la quale è costantemente perpendicolare al piano tangente alla superficie in ogni punto. Detta m la massa del punto, f la forza attiva e Φ la reazione vincolare, sapendo che

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + \Phi(x, \dot{x}, t)$$

e che nelle ipotesi sopra introdotte $f(x, \dot{x}, t) = 0$ allora la legge diventa

$$m\ddot{x} = \Phi(x, \dot{x}, t)$$

in cui notiamo quindi che l'accelerazione \ddot{x} dovrà essere ortogonale in ogni punto proprio perché lo è la reazione vincolare.

In questo lavoro di tesi ci occuperemo in particolare dell'interpretazione meccanica della ricerca delle geodetiche su un ellissoide triassiale ma, prima di arrivare a questa trattazione consideriamo uno dei casi più semplici da studiare ovvero quello di un punto vincolato a una sfera, in assenza di forze attive.

In questo caso, il problema può essere risolto facilmente in coordinate sferiche sfruttando le

simmetrie del sistema e usando come integrale primo il momento angolare per ridurre il sistema a un grado di libertà in meno. Lo studio del sistema ridotto e la sua ricostruzione al sistema originale sono semplici, e portano al risultato che le geodetiche della sfera sono i cerchi di raggio massimo.

Tuttavia, il problema diventa più complesso quando le simmetrie evidenti del sistema sono ridotte, come nel caso di un ellissoide.

Lo studio delle geodetiche di un ellissoide di rotazione è stato un problema molto studiato tra il XVIII e il XIX secolo. Clairaut (1753) riuscì a trovare un integrale primo per il flusso geodetico, sfruttando l'invarianza per rotazioni del sistema attorno all'asse di simmetria dell'ellissoide, riducendo così la risoluzione delle equazioni delle geodetiche alle quadrature (per maggiori informazioni si rimanda a [1]).

Nel caso di un ellissoide triassiale invece l'integrabilità non è affatto scontata: non è infatti una superficie di rotazione e quindi non possiede delle simmetrie geometricamente ovvie. Essendo però una superficie a curvatura non negativa l'ipotesi che fosse un sistema integrabile non venne abbandonata. Il primo a dimostrarne l'integrabilità fu Jacobi [2], il quale riuscì a mostrare che l'equazione di Hamilton-Jacobi del sistema, espressa in delle coordinate ellittiche da lui introdotte, è separabile e così risolse le equazioni del moto geodetico attraverso la risoluzione di integrali ellittici.

Weierstrass portò avanti il lavoro di Jacobi e generalizzò i risultati all'ellissoide n dimensionale riuscendo a dare una parametrizzazione delle geodetiche in termini di funzioni theta.

Una trattazione diversa del problema è quella offerta da Moser e si trova in [3] e successivamente da Knörrer. L'approccio di Moser non fu quello di considerare un sistema di coordinate locali sull'ellissoide, come fece Jacobi, ma di restringere lo spazio in cui lavorava alla varietà sulla quale è vincolato il punto. Riuscì a trovare una forte connessione tra il problema di ricerca delle geodetiche sull'ellissoide n dimensionale e il cosiddetto problema di Neumann sulla sfera, un altro problema integrabile che consiste in un punto dotato di massa, vincolato ad una sfera n dimensionale, in presenza di potenziale quadratico. Fu poi Knörrer a trovare le relazioni che legano gli integrali primi di questi due sistemi.

Nonostante queste diverse trattazioni del problema, in seguito ci occuperemo solo di quella proposta da Jacobi. Dopo la definizione e introduzione delle coordinate ellittiche ricavate da Jacobi studieremo la separabilità dell'equazione di Hamilton-Jacobi e, per conseguenza di questo, mostreremo l'integrabilità del sistema. In seguito forniremo delle immagini degli insiemi di livello degli integrali primi del sistema che mostreranno una foliazione in tori invarianti dello spazio delle fasi.

Capitolo 1

Coordinate ellittiche di Jacobi

Per risolvere il problema della ricerca delle geodetiche di un ellissoide triassiale Jacobi introdusse una parametrizzazione locale della superficie note come coordinate ellittiche. Fissiamo $a < b < c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e consideriamo l'ellissoide triassiale di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.1)$$

Per comprendere la parametrizzazione dell'ellissoide in coordinate ellittiche ricordiamo alcune proprietà delle *quadriche confocali*. $\forall \lambda < c^2$ e $\lambda \neq a^2, b^2$ l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1 \quad (1.2)$$

descrive una quadrica, precisamente:

- se $\lambda < a^2$ un ellissoide,
- se $a^2 < \lambda < b^2$ un iperboloide a una falda ,
- se $b^2 < \lambda < c^2$ un iperboloide a due falde.

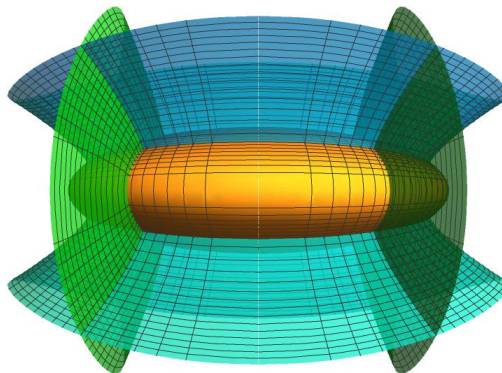


Figura 1.1: Quadriche confocali dei tre tipi

Queste quadriche sono tutte confocali, ovvero condividono gli stessi fuochi, e si intersecano ortogonalmente a due a due. Ogni tre quadriche di tipi diversi della famiglia (1.2), si intersecano esattamente in un punto di ogni ottante di \mathbb{R}^3 e quindi possiamo dedurre che è possibile usare i tre valori di λ come coordinate in ogni ottante. Questi tre valori, che chiamo (q_1, q_2, q_3) , si dicono *coordinate ellittiche*. Per parametrizzare un ellissoide si può quindi fissare un valore di $q_3 < a^2$, lasciando variare la coppia $(q_1, q_2) \in U := (a^2, b^2) \times (b^2, c^2)$. Precisiamo ora questa intuizione geometrica.

Proposizione 1.0.1. *Fissiamo $q_3 < a^2$. Per qualunque $(q_1, q_2) \in \bar{U}$ con $U = (a^2, b^2) \times (b^2, c^2)$, i punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che*

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2 - q_1)(a^2 - q_2)(a^2 - q_3)}{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)} := A_{q_3}(q_1, q_2) \\ y^2 &= \frac{(b^2 - q_1)(b^2 - q_2)(b^2 - q_3)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} := B_{q_3}(q_1, q_2) \\ z^2 &= \frac{(c^2 - q_1)(c^2 - q_2)(c^2 - q_3)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} := C_{q_3}(q_1, q_2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

appartengono all'ellissoide di equazione (1.2) con $\lambda = q_3$.

Dimostrazione. Sostituendo $A_{q_3}(q_1, q_2)$, $B_{q_3}(q_1, q_2)$ e $C_{q_3}(q_1, q_2)$ nel membro di sinistra dell'equazione (1.2) con $\lambda = q_3$ si trova

$$\frac{(a^2 - q_1)(a^2 - q_2)(a^2 - q_3)}{(a^2 - q_3)(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)} + \frac{(b^2 - q_1)(b^2 - q_2)(b^2 - q_3)}{(b^2 - q_3)(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} + \frac{(c^2 - q_1)(c^2 - q_2)(c^2 - q_3)}{(c^2 - q_3)(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}$$

che con facili conti si vede essere uguale a 1. □

Qualunque $q_3 < a^2$ denotiamo con \mathcal{E}_{q_3} l'ellissoide di equazione (1.2) con $\lambda = q_3$.

Notazione Per ogni $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ con $\sigma_i \in \{+, -\}$, denotiamo $E_\sigma^{q_3}$ l'ottante

$$E_\sigma^{q_3} = \{(x, y, z) \in \mathcal{E} \mid \operatorname{sgn}(x) = \sigma_1, \operatorname{sgn}(y) = \sigma_2, \operatorname{sgn}(z) = \sigma_3\}$$

dell'ellissoide \mathcal{E}_{q_3} .

In seguito lavoreremo spesso con l'ottante *positivo* $E_{+++}^{q_3}$.

Dimostriamo ora che (q_1, q_2) sono veramente un sistema di coordinate locali per ogni ottante dell'ellissoide.

Proposizione 1.0.2. *Sia $U = (a^2, b^2) \times (b^2, c^2)$. Per ogni $q_3 < a^2$ e ogni σ , la mappa*

$$\begin{aligned} J_\sigma^{q_3} : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (q_1, q_2) &\mapsto \left(\sigma_1 \sqrt{A_{q_3}(q_1, q_2)}, \sigma_2 \sqrt{B_{q_3}(q_1, q_2)}, \sigma_3 \sqrt{C_{q_3}(q_1, q_2)} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

è una parametrizzazione dell'ottante $E_\sigma^{q_3}$ dell'ellissoide \mathcal{E}_{q_3} .

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare i seguenti fatti.

1. $J_\sigma^{q_3}$ è \mathcal{C}^∞ in U .

Questo è ovvio essendo A, B, C delle funzioni \mathcal{C}^∞ e positive in U .

2. La matrice Jacobiana della parametrizzazione

$$\frac{\partial J_\sigma^{q_3}}{\partial(q_1, q_2)} = \begin{bmatrix} \frac{(a^2 - q_2)(a^2 - q_3)}{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)} & \frac{(b^2 - q_2)(b^2 - q_3)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} & \frac{(c^2 - q_2)(c^2 - q_3)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \\ \frac{(a^2 - q_1)(a^2 - q_3)}{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)} & \frac{(b^2 - q_1)(b^2 - q_3)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} & \frac{(c^2 - q_1)(c^2 - q_3)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \end{bmatrix}$$

ha rango 2 in ogni punto q .

Questo accade poiché il determinante del primo blocco è uguale a zero se e solo se $q_1 = q_2$. Infatti esso si annulla se e solo se

$$\frac{(a^2 - q_2)(b^2 - q_1)}{(a^2 - q_1)(b^2 - q_2)} = 1$$

e si verifica che questo avviene se e solo se $q_1 = q_2$ attraverso un conto diretto oppure ricordando che il birapporto di 4 numeri diversi è diverso da 1.

3. C'è una corrispondenza biunivoca tra U e \mathcal{E}^{q_3} .

La suriettività della parametrizzazione si vede in modo immediato.

Per dimostrare l'iniettività della parametrizzazione definiamo prima due funzioni

$$\begin{aligned} \phi_\sigma : V \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (q_1, q_2) &\mapsto \left((a^2 - q_1)(a^2 - q_2), (b^2 - q_1)(b^2 - q_2), (c^2 - q_1)(c^2 - q_2) \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{q_3} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(x \sqrt{\frac{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)}{(a^2 - q_3)}}, y \sqrt{\frac{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{(b^2 - q_3)}}, z \sqrt{\frac{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{(c^2 - q_3)}} \right) \end{aligned}$$

la cui composizione $\mathcal{D}_{q_3} \circ \phi_\sigma$ corrisponde alla mappa $J_\sigma^{q_3}$.

Tenendo conto del fatto che la composizione di funzioni iniettive è iniettiva, dato che \mathcal{D}_{q_3} è un diffeomorfismo, dobbiamo dimostrare solo l'iniettività di ϕ_σ .

Considerando due coppie di coordinate $(q_1, q_2), (Q_1, Q_2) \in U$ si ha $\phi_\sigma(q_1, q_2) = \phi_\sigma(Q_1, Q_2)$ se e solo se

$$\begin{cases} (a^2 - q_1)(a^2 - q_2) = (a^2 - Q_1)(a^2 - Q_2) \\ (b^2 - q_1)(b^2 - q_2) = (b^2 - Q_1)(b^2 - Q_2) \\ (c^2 - q_1)(c^2 - q_2) = (c^2 - Q_1)(c^2 - Q_2) \end{cases}$$

che semplificando le singole equazioni diventa

$$\begin{cases} a^2(q_1 + q_2) - q_1q_2 = a^2(Q_1 + Q_2) - Q_1Q_2 \\ b^2(q_1 + q_2) - q_1q_2 = b^2(Q_1 + Q_2) - Q_1Q_2 \\ c^2(q_1 + q_2) - q_1q_2 = c^2(Q_1 + Q_2) - Q_1Q_2 \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene

$$q_1 = Q_1 + Q_2 - q_2 \tag{1.5}$$

Inserendo questo risultato in una qualunque delle equazioni si trova un'equazione di secondo grado in q_2

$$q_2^2 - q_2(Q_1 + Q_2) + Q_1Q_2 = 0$$

la quale ha come soluzioni $q_2 = Q_1$ e $q_2 = Q_2$, ma la prima non è accettabile perchè gli intervalli di definizione di q_2 e Q_1 sono aperti disgiunti.

Quindi troviamo che $q_2 = Q_2$ e di conseguenza, dalla (1.5), $q_1 = Q_1$, dimostrando così che ϕ_σ è iniettiva.

□

1.1 Lagrangiana ed Hamiltoniana in coordinate ellittiche

Sappiamo che possiamo associare la ricerca delle geodetiche di una superficie ad un problema meccanico di un punto vincolato ad una superficie in assenza di forze attive. Avremo quindi una Lagrangiana che corrisponde all'energia cinetica del problema in cui consideriamo per semplicità un corpo di massa unitaria.

Consideriamo un sistema meccanico a n gradi di libertà, con varietà vincolare Q . Lo spazio delle configurazioni è il fibrato tangente. Per la formulazione lagrangiana dobbiamo introdurre delle coordinate locali $q = (q_1, \dots, q_n)$ sulla varietà Q , così da definire delle coordinate locali (q, \dot{q}) per il fibrato tangente. La Lagrangiana di un sistema con varietà vincolare Q è una funzione

$$\begin{aligned} L : TQ &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, \dot{q}) &\mapsto L(q, \dot{q}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Proposizione 1.1.1. *In coordinate ellittiche l'energia cinetica di un punto vincolato all'ellissoide \mathcal{E}_0 è*

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(q_2 - q_1) \left[A_1(q_1)\dot{q}_1^2 + A_2(q_2)\dot{q}_2^2 \right] \quad (1.7)$$

con

$$A_1(q_1) := \frac{1}{4} \frac{-q_1}{(a^2 - q_1)(b^2 - q_1)(c^2 - q_1)} \quad (1.8)$$

$$A_2(q_2) := \frac{1}{4} \frac{q_2}{(a^2 - q_2)(b^2 - q_2)(c^2 - q_2)} \quad (1.9)$$

Dimostrazione. Dimostriamo questo fatto considerando la parametrizzazione J_σ^0 nell'ottante positivo dell'ellissoide \mathcal{E}_0 . Calcoliamo l'atto di moto della parametrizzazione

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\sqrt{\frac{(a^2 - q_1)(a^2 - q_2)a^2}{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)}} (\dot{q}_2 q_1 - a^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)) + \dot{q}_1 q_2}{2(a^2 - q_1)(a^2 - q_2)} \\ \dot{y} &= \frac{\sqrt{\frac{(b^2 - q_1)(b^2 - q_2)b^2}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}} (\dot{q}_2 q_1 - b^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)) + \dot{q}_1 q_2}{2(b^2 - q_1)(b^2 - q_2)} \\ \dot{z} &= \frac{\sqrt{\frac{(c^2 - q_1)(c^2 - q_2)c^2}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}} (\dot{q}_2 q_1 - c^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)) + \dot{q}_1 q_2}{2(c^2 - q_1)(c^2 - q_2)} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Sapendo che l'energia cinetica in coordinate cartesiane ha la seguente forma

$$T(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

sostituendo l'atto di moto sopra calcolato e attuando qualche semplificazione arriviamo alla forma (1.7). \square

Il passaggio alla formulazione hamiltoniana avviene tramite la trasformazione di Legendre e richiede l'introduzione del fibrato cotangente.

Definizione 1.1.1 (Trasformazione di Legendre). *Siano $q = (q_1, \dots, q_n)$ le coordinate generalizzate di un sistema lagrangiano con Lagrangiana (1.6). La trasformazione di Legendre generata da L è la mappa*

$$\begin{aligned} \Lambda_L : TQ &\rightarrow T^*Q \\ (q, \dot{q}) &\mapsto \left(q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

in cui $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ sono i momenti coniugati alle coordinate q_i e T^*Q il fibrato cotangente alla varietà.

Proposizione 1.1.2. *La trasformazione di Legendre Λ_L coniuga le equazioni di Lagrange per una Lagrangiana L come in (1.6) al sistema di equazioni*

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

di Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H : T^*Q &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, p) &\mapsto H(q, p) \end{aligned}$$

definita da

$$H(q, p) := \left[\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q}) \right]_{\dot{q}(q,p)} \quad (1.12)$$

L'Hamiltoniana del problema scritta in funzione delle coordinate (q_1, q_2) e dei momenti coniugati $(p_1, p_2) = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right)$ è quindi, grazie alla relazione (1.12),

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \frac{1}{(q_2 - q_1)} \left[\frac{p_1^2}{A_1(q_1)} + \frac{p_2^2}{A_2(q_2)} \right] \quad (1.13)$$

Capitolo 2

Equazione di Hamilton-Jacobi

In questo capitolo considereremo un sistema hamiltoniano a n gradi di libertà con Hamiltoniana

$$H : D \subseteq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \\ (q, p) \mapsto H(q, p)$$

2.1 Completa integrabilità

Nella stesura di questa sezione ci si è basati su [4].

Diamo come prima cosa la definizione di sistema completamente integrabile.

Definizione 2.1.1 (Sistema completamente integrabile). *Un sistema hamiltoniano si dice completamente integrabile se esistono n integrali primi indipendenti J_1, \dots, J_n in mutua involuzione rispetto alle parentesi di Poisson.*

Ricordiamo che la *Parentesi di Poisson* di due funzioni differenziabili $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ è

$$\{f, g\} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (2.1)$$

e che gli integrali primi $J_1, \dots, J_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ sono in mutua involuzione rispetto alle parentesi di Poisson se

$$\{F_i, F_j\} = 0$$

$\forall i, j = 1, \dots, n$.

Osservazione 2.1.1. *Avere n integrali primi $J_1, \dots, J_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ indipendenti significa che, ovunque,*

$$rk \left(\frac{\partial(J_1, \dots, J_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \right) = n$$

Sotto queste ipotesi gli insiemi di livello di J_1, \dots, J_n sono sottovarietà differenziabili n dimensionali. La struttura dei sistemi hamiltoniani completamente integrabili è descritta dal *teorema di Liouville-Arnold*.

Teorema 2.1.1 (Liouville-Arnold). *Consideriamo un sistema con Hamiltoniana $H : D \rightarrow \mathbb{R}$, in cui $D \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ è un aperto munito delle coordinate (q, p) e supponiamo che esso sia completamente integrabile, con n integrali primi indipendenti J_1, \dots, J_n in involuzione mutua rispetto alle parentesi di Poisson.*

Supponiamo che gli insiemi di livello degli integrali

$$M_{\tilde{j}} = \{(q, p) \in D \mid J_i(q, p) = \tilde{j}_i, \quad i = 1, \dots, n\} \quad (2.2)$$

siano compatti e connessi Allora ciascun $M_{\tilde{j}}$ è diffeomorfo a \mathbb{T}^n e ha un intorno con coordinate canoniche $(I, \varphi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ nelle quali gli insiemi di livello di J_1, \dots, J_n sono $I = \text{costante}$ e l'Hamiltoniana è una funzione $\tilde{H}(I)$ delle sole I .

Abbiamo quindi che lo spazio delle fasi è foliato in tori invarianti di dimensione n . Inoltre il flusso su ciascuno di essi è coniugato a un flusso lineare su \mathbb{T}^n . Infatti nelle variabili (I, ϕ) (dette *variabili di azione ed angolo*) le equazioni del moto risultano essere, per $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}\dot{I}_i &= -\frac{\partial \tilde{H}(I)}{\partial \phi_i} = 0 \\ \dot{\phi}_i &= \frac{\partial \tilde{H}(I)}{\partial I_i}\end{aligned}$$

Queste equazioni mostrano che le azioni sono integrali primi del sistema mentre gli angoli avanzano linearmente sul toro con velocità costante $\omega(I) = \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial I_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I_n}\right)$. Essendo però gli angoli definiti modulo 2π , il moto degli angoli si avvolge su ciascun toro e risulta essere, per $n = 2$, una curva chiusa quando il rapporto $\frac{\omega_1(I_0)}{\omega_2(I_0)}$ è razionale e densa in \mathbb{T}^2 altrimenti.

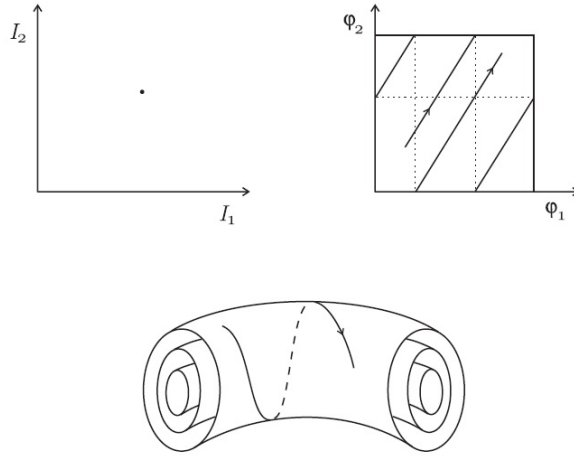


Figura 2.1: Moti sul toro

2.2 Equazione di Hamilton-Jacobi ed integrabilità

Il metodo di integrazione di Hamilton-Jacobi di un sistema Hamiltoniano canonico di rango $2n$ consiste nella determinazione di un cosiddetto integrale completo di una equazione differenziale alle derivate parziali in n variabili indipendenti, detta equazione di Hamilton-Jacobi.

Definizione 2.2.1 (Equazione di Hamilton-Jacobi). *Gli argomenti di questa parte si trovano in modo più esteso in [5].*

Sia $H(q, p)$ l'Hamiltoniana di un sistema. L'equazione di Hamilton-Jacobi (indipendente dal tempo) associata ad H è la seguente equazione alle derivate parziali

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}(q), \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}(q)\right) = E \quad (2.3)$$

in cui sono incognite la costante E e la funzione $W(q_1, \dots, q_n)$.

Definizione 2.2.2 (Integrale completo). *Si dice integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi ogni coppia di funzioni differenziabili*

$$(W(q, \alpha), E(\alpha)) \quad (2.4)$$

definita per $(q, \alpha) = (q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{A}$ con \mathcal{Q} e \mathcal{A} aperti di \mathbb{R}^n e tali che

- $\forall \alpha$ soddisfano l'equazione (2.3)

- $\forall q, \alpha$ soddisfano

$$\det \left(\frac{\partial^2 W(q, \alpha)}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right) \neq 0 \quad (2.5)$$

Tale W viene detta funzione caratteristica di Hamilton.

Possiamo vedere il forte legame tra la completa integrabilità di H e l'esistenza di un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi nel seguente teorema.

Teorema 2.2.1 (Hamilton-Jacobi). *Se esiste un integrale completo $(W(q, \tilde{p}), E(\tilde{p}))$ dell'equazione di Hamilton-Jacobi (2.3), allora la funzione W è localmente la funzione generatrice di una trasformazione canonica*

$$(q, p) \mapsto (\tilde{q}, \tilde{p}),$$

data implicitamente dal sistema

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial W(q, \tilde{p})}{\partial q_i} \\ \tilde{q}_i = \frac{\partial W(q, \tilde{p})}{\partial \tilde{p}_i} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

che coniuga il sistema di Hamiltoniana H al sistema di Hamiltoniana $E(\tilde{p})$.

Quindi le \tilde{p} sono integrali primi indipendenti e in mutua involuzione e il sistema risulta completamente integrabile.

2.3 Separazione delle variabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi

Un semplice caso in cui è possibile determinare un integrale completo è quello in cui l'equazione di Hamilton-Jacobi è *separabile* e tramite il cosiddetto procedimento di separazione delle variabili è possibile trovare una funzione caratteristica della forma

$$W(q, \alpha) = \sum_{i=1}^n W_i(q_i, \alpha) \quad (2.6)$$

Questo avviene in particolare per sistemi in cui l'energia cinetica e potenziale hanno una forma molto particolare. Nella seguente trattazione seguiamo [6].

Proposizione 2.3.1. *Se l'energia cinetica e potenziale associate di un sistema lagrangiano hanno la forma*

$$T = \frac{1}{2} b(q) \sum_{i=1}^n A_i(q_i) \dot{q}_i^2 \quad (2.7)$$

$$V = \frac{1}{b(q)} \sum_{i=1}^n V_i(q_i) \quad (2.8)$$

in cui $b(q) = \sum_{i=1}^n B_i(q_i)$ e A_i, B_i, V_i sono funzioni solo di q_i , allora l'equazione di Hamilton-Jacobi del corrispondente sistema hamiltoniano ammette un integrale completo con funzione caratteristica della forma (2.6).

Dimostrazione. Se l'energia cinetica hanno la forma (2.7) e (2.8) allora la Lagrangiana è

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} b(q) \sum_{i=1}^n A_i(q_i) \dot{q}_i^2 - \frac{1}{b(q)} \sum_{i=1}^n V_i(q_i)$$

e l'Hamiltoniana è

$$H(q, p) = \frac{1}{2b(q)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i^2}{A_i(q_i)} - V_i(q_i) \right)$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi risulta essere quindi

$$\frac{1}{2b(q)} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{1}{A_i(q_i)} \frac{\partial W}{\partial q_i}(q) \right)^2 - V_i(q_i) \right) = E$$

cioè

$$\sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{1}{A_i(q_i)} \frac{\partial W}{\partial q_i}(q) \right)^2 - V_i(q_i) - 2EB_i(q_i) \right) = 0 \quad (2.9)$$

Stiamo cercando una famiglia di soluzioni $(W(q, \alpha), E(\alpha))$ con

$$W(q, \alpha) = \sum_{i=1}^n W_i(q_i, \alpha)$$

$$E(\alpha) = \alpha_n$$

Si vede immediatamente che se ciascuna W_i è soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}(q_i, \alpha) \right)^2}{A_i(q_i)} - V_i(q_i) - 2EB_i(q_i) = \pi_i(\alpha) \quad (2.10)$$

con $\pi_1(\alpha) = \alpha_1, \dots, \pi_{n-1}(\alpha) = \alpha_{n-1}$ e $\pi_n(\alpha) = -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$, allora $(\sum_{i=1}^n W_i(q, \alpha), E(\alpha))$ è soluzione di (2.9). Quindi dalle (2.10) ricaviamo le W_i dipendenti solo da q_i

$$W_i(q_i, \alpha) = \int^{q_i} \sqrt{2A_i(q_i)(V_i(q_i) + EB_i(q_i) + \pi_i)} dq_i \quad (2.11)$$

la quale è ben definita e differenziabile se $V_i(q_i) + 2EB_i(q_i) + \pi_i > 0$.

Ci restringiamo quindi a (q, α) in un aperto nel quale $V_i(q_i) + 2EB_i(q_i) + \pi_i > 0$ risulti ovunque positivo. In questo modo per l'equazione (2.10), risulta diverso da zero anche $\frac{\partial W_i}{\partial q_i}$. Per dimostrare poi che W è effettivamente una funzione caratteristica per l'equazione di Hamilton-Jacobi dobbiamo controllare la condizione (2.5).

Notiamo che per le ipotesi appena assunte, ogni elemento $\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_j}$ risulta essere

$$\begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ A_i(q_i) \left(\frac{\partial W_i(q_i)}{\partial q_i} \right)^{-1} \neq 0 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (2.12)$$

e quindi la condizione (2.5) è soddisfatta. \square

2.4 Separabilità nel caso delle geodetiche dell'ellissoide

Dimostriamo ora che il problema del flusso geodetico sull'ellissoide triassiale è un problema con equazione di Hamilton-Jacobi separabile che ammette un integrale completo e perciò risulta completamente integrabile. La separabilità del sistema però non risulta evidente se non usando coordinate ellittiche.

Esempio di non separabilità dell'equazione di Hamilton-Jacobi

Possiamo notare che utilizzando il sistema di coordinate cartesiane (x, y) il semiellissoide ha la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \end{cases} \quad (2.13)$$

nella quale l'energia cinetica è

$$T(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{c^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} \left[\frac{(x\dot{x})^2}{a^4} + \frac{(y\dot{y})^2}{b^4} + \frac{2x\dot{x}y\dot{y}}{a^2b^2} \right] \right)$$

Notazione Per alleggerire le formule poniamo

$$\mathbf{C} = \frac{c^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

Per calcolare l'Hamiltoniana scriviamo prima i momenti coniugati

$$p_x = 2\dot{x} + \frac{2\mathbf{C}x\dot{x}}{a^4} + \frac{2\mathbf{C}y\dot{y}x}{a^2b^2}$$

$$p_y = 2\dot{y} + \frac{2\mathbf{C}y\dot{y}}{b^4} + \frac{2\mathbf{C}x\dot{x}y}{a^2b^2}$$

dai quali otteniamo

$$\dot{x}(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{C}x}{a^4} + \frac{\mathbf{C}x^2y^2}{a^4b^4}} \left(\frac{p_x}{2} - \frac{\mathbf{C}xy p_y}{2a^2b^2} \right)$$

$$\dot{y}(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{C}y}{b^4} + \frac{\mathbf{C}x^2y^2}{a^4b^4}} \left(\frac{p_y}{2} - \frac{\mathbf{C}xyp_x}{2a^2b^2} \right)$$

Calcolando l'Hamiltoniana tramite la trasformazione di Legendre (1.12) si vede subito che in queste coordinate non darà luogo a un'equazione di Hamilton-Jacobi separabile in quanto presenta termini misti funzione sia di x, p_x che di y, p_y che non sarà mai possibile riscrivere come somma di addendi in una sola delle variabili.

Mostriamo ora come invece il problema risulti separabile utilizzando le coordinate ellittiche introdotte da Jacobi.

Proposizione 2.4.1 (Jacobi). *La restrizione al fibrato cotangente $T^*\mathcal{E}_\sigma$ di ciascun ottante dell'Hamiltoniana (1.13) delle geodetiche di un ellissoide triassiale scritta in coordinate ellittiche è separabile.*

Dimostrazione. Questo segue direttamente dalla proposizione 2.3.1 con $n = 2$, $U = 0$, $b = q_1 - q_2$ e A_1, A_2 assumono le forme definite in (1.8) e (1.9). \square

Osservazione 2.4.1. *Svolgendo i calcoli si vede che, ponendo $E(\alpha) = \alpha_2$*

$$W_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2) = \sqrt{\frac{E(\alpha)}{2}} \int^{q_1} \sqrt{\frac{q_1(q_1 + \alpha_1)}{(a^2 - q_1)(b^2 - q_1)(c^2 - q_1)}} dq_1$$

$$W_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \sqrt{\frac{E(\alpha)}{2}} \int^{q_2} \sqrt{\frac{q_2(q_2 + \alpha_1)}{(a^2 - q_2)(b^2 - q_2)(c^2 - q_2)}} dq_2$$

da cui ricaviamo quindi la funzione caratteristica W dell'integrale completo

$$W(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \sqrt{\frac{E(\alpha)}{2}} \left[\int^{q_1} \sqrt{\frac{q_1(q_1 + \alpha_1)}{(a^2 - q_1)(b^2 - q_1)(c^2 - q_1)}} dq_1 + \int^{q_2} \sqrt{\frac{q_2(q_2 + \alpha_1)}{(a^2 - q_2)(b^2 - q_2)(c^2 - q_2)}} dq_2 \right] \quad (2.14)$$

Osservazione 2.4.2. *Per poter utilizzare l'integrale completo trovato come funzione generatrice di una trasformazione canonica che ci fornisca un sistema di coordinate in cui l'Hamiltoniana dipenda solo dai nuovi momenti, dobbiamo essere in grado di risolvere l'integrale che descrive la funzione W e questo richiede la teoria degli integrali ellittici.*

Essendo riusciti a trovare un integrale completo per il problema delle geodetiche dell'ellissoide abbiamo dimostrato anche l'esistenza di un ulteriore integrale primo oltre all'Hamiltoniana. Quindi abbiamo dimostrato che la restrizione a $T^*E_\sigma^3 \forall \sigma$, del flusso geodetico sull'ellissoide triassiale è un problema completamente integrabile.

Capitolo 3

Insiemi di livello degli integrali primi

D'ora in avanti adotteremo un diverso punto di vista rispetto ai capitoli precedenti: cercheremo di capire la geometria degli insiemi di livello degli integrali primi, ovvero i tori invarianti.

3.1 Integrali primi

Un integrale primo per il problema delle geodetiche dell'ellissoide triassiale è ovviamente l'energia mentre per l'altro si conoscono diverse versioni:

1. la prima, più classica, è dovuta a Joachimstal [7] ed è la restrizione a $T\mathcal{E}$ della funzione

$$I : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.1)$$
$$(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \mapsto \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) \left(\frac{\dot{x}^2}{a^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2} + \frac{\dot{z}^2}{c^2} \right)$$

2. la seconda si trova in [8] ed è, in coordinate ellittiche,

$$J(q, \dot{q}) = (q_2 - q_1) \left(q_2 A_1(q_1) \dot{q}_1^2 + q_1 A_2(q_2) \dot{q}_2^2 \right) \quad (3.2)$$

dove abbiamo definito A_1 e A_2 rispettivamente in (1.8) e (1.9).

Proposizione 3.1.1. *La funzione J è integrale primo del problema delle geodetiche dell'ellissoide.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione che J è integrale primo possiamo seguire due strade: in ambito lagrangiano, mostrare che la derivata rispetto al tempo di J calcolato nelle soluzioni delle equazioni di Lagrange è uguale a zero (si veda il punto 1 dell'appendice) oppure, passando al mondo hamiltoniano, J diventa $J^* = \frac{1}{(q_2 - q_1)} \left(\frac{q_1}{A_1} p_1^2 + \frac{q_2}{A_2} p_2^2 \right)$, e si verifica con un conto diretto che $\{H, J^*\} = 0$. □

Nel seguito di questo capitolo si riguarda $T\mathcal{E}$ immerso in \mathbb{R}^6 , come zero delle due funzioni di "vincolo"

$$F_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \quad (3.3)$$

$$F_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{2x\dot{x}}{a^2} + \frac{2y\dot{y}}{b^2} + \frac{2z\dot{z}}{c^2} \quad (3.4)$$

Corrispondentemente, consideriamo i due integrali primi

$$E|_{T\mathcal{E}} : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.5)$$

$$(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \mapsto \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (3.6)$$

ed $I|_{T\mathcal{E}}$ con I come in (3.1).

3.2 Ellissi principali

Innanzitutto verifichiamo che le tre ellissi principali dell'ellissoide, ovvero le ellissi ottenute dall'intersezione dell'ellissoide con i piani coordinati, siano geodetiche.

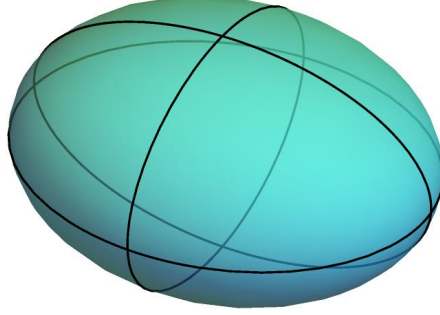


Figura 3.1: Ellissi principali sull'ellissoide

Proposizione 3.2.1. *Le ellissi principali sono geodetiche.*

Dimostrazione. Questo segue dalla caratterizzazione delle geodetiche come le curve che hanno accelerazione normale.

Alternativamente, si può utilizzare un argomento più dinamico. La Lagrangiana è invariante sotto il sollevamento tangente

$$\mathcal{D}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\mathcal{R}(x, y, z), \mathcal{R}'(x, y, z) \cdot (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}))$$

della restrizione a $T\mathcal{E}$ della riflessione

$$\mathcal{R}(x, y, z) = (x, y, -z)$$

in \mathbb{R}^3 .

Dunque per un noto risultato di meccanica Lagrangiana il campo vettoriale X delle geodetiche è \mathcal{D} -invariante, cioè

$$\mathcal{D}_*X = X$$

e

$$\phi_t^X \circ \mathcal{D} = \mathcal{D} \circ \phi_t^X \quad \forall t$$

Conseguentemente ϕ_t^X manda punti fissi di \mathcal{D} in punti fissi di \mathcal{D} . Preso $(\xi, \dot{\xi})$ punto fisso di \mathcal{D} , allora $\mathcal{D}(\xi, \dot{\xi}) = (\xi, \dot{\xi})$ e quindi

$$\mathcal{D}(\phi_t^X(\xi, \dot{\xi})) = \phi_t^X(\mathcal{D}(\xi, \dot{\xi})) = \phi_t^X(\xi, \dot{\xi})$$

Quindi i punti fissi di \mathcal{D} in $T\mathcal{E}$ sono i punti del fibrato tangente \mathcal{T} all'ellisse principale $z = 0$. \square

Dunque \mathcal{T} è invariante sotto il flusso geodetico, così come $\mathcal{T}_{\frac{1}{2}}$, il sottoinsieme di \mathcal{T} dove $E = \frac{1}{2}$. Siccome $\mathcal{T}_{\frac{1}{2}}$ è 1-dimensionale e connesso è un'orbita.

3.3 Indipendenza degli integrali primi

Genericamente, gli insiemi di livello degli integrali primi dovrebbero essere diffeomorfi a tori bidimensionali per il teorema di Liouville-Arnold, ma questo accade solo se questi insiemi sono regolari.

Bisognerebbe dunque determinare gli insiemi di livello singolari. Noi faremo un po' meno, mostrando che i fibrati tangenti alle ellissi principali sono insiemi di livello singolari.

Per determinare i punti singolari utilizzeremo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, il quale normalmente, in letteratura, è trattato per una sola funzione reale. La seguente versione, con due funzioni reali, si trova in [9].

Proposizione 3.3.1 (Moltiplicatori di Lagrange). *Se in un punto $\xi \in T\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^6$, cioè $F_1(\xi) = 0$ e $F_2(\xi) = 0$, l'equazione*

$$\lambda_1 \nabla E(\xi) + \lambda_2 \nabla I(\xi) + \lambda_3 \nabla F_1(\xi) + \lambda_4 \nabla F_2(\xi) = 0 \quad (3.7)$$

ha soluzione non banale $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0, 0, 0, 0)$, allora i gradienti delle restrizioni di E ed I a $T\mathcal{E}$ sono linearmente dipendenti, ovvero ξ è un punto singolare di $(E|_{T\mathcal{E}}, I|_{T\mathcal{E}}) : T\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Applichiamo ora la precedente proposizione al nostro problema.

Poniamo $i_1 = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)$ e $i_2 = \left(\frac{\dot{x}^2}{a^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2} + \frac{\dot{z}^2}{c^2}\right)$.

Calcoliamo i gradienti degli integrali primi e dei vincoli

$$\nabla E = (0, 0, 0, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\nabla I = \left(\frac{2xi_2}{a^4}, \frac{2yi_2}{b^4}, \frac{2zi_2}{c^4}, \frac{2\dot{x}i_1}{a^2}, \frac{2\dot{y}i_1}{b^2}, \frac{2\dot{z}i_1}{c^2}\right)$$

$$\nabla F_1 = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}, 0, 0, 0\right)$$

$$\nabla F_2 = \left(\frac{2\dot{x}}{a^2}, \frac{2\dot{y}}{b^2}, \frac{2\dot{z}}{c^2}, \frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$$

Il sistema (3.7) si riscrive come

$$\begin{cases} \lambda_2 \frac{2xi_2}{a^4} + \lambda_3 \frac{2x}{a^2} + \lambda_4 \frac{2\dot{x}}{a^2} = 0 \\ \lambda_2 \frac{2yi_2}{b^4} + \lambda_3 \frac{2y}{b^2} + \lambda_4 \frac{2\dot{y}}{b^2} = 0 \\ \lambda_2 \frac{2zi_2}{c^4} + \lambda_3 \frac{2z}{c^2} + \lambda_4 \frac{2\dot{z}}{c^2} = 0 \\ \lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \frac{2\dot{x}i_1}{a^2} + \lambda_4 \frac{2\dot{x}}{a^2} = 0 \\ \lambda_1 \dot{y} + \lambda_2 \frac{2\dot{y}i_1}{b^2} + \lambda_4 \frac{2\dot{y}}{b^2} = 0 \\ \lambda_1 \dot{z} + \lambda_2 \frac{2\dot{z}i_1}{c^2} + \lambda_4 \frac{2\dot{z}}{c^2} = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Quindi se il sistema (3.8) ha soluzioni non banali in un punto $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ zero di F_1 e F_2 , allora esso è punto singolare di $(E|_{T\mathcal{E}}, I|_{T\mathcal{E}})$.

Non troveremo tutti i punti ma ci limitiamo a controllare che i punti delle ellissi principali corrispondono a questa casistica. (Si veda il punto 2 dell'Appendice)

Osservazione 3.3.1. *Nell'ellissoide oltre ai punti delle ellissi principali, sono presenti altri punti con delle particolari proprietà, i cosiddetti punti ombelicali, i quali però risultano essere regolari.*

(Si veda il punto 3 dell'Appendice.)

3.4 Disegni degli insiemi di livello

In letteratura si trovano vari disegni delle geodetiche dell'ellissoide triassiale \mathcal{E} (presenti ad esempio in [10], nel capitolo 9, sezione 47).

Vorremmo invece qui rappresentare graficamente i tori invarianti in $T\mathcal{E}$, cosa che non risulta mai essere stata fatta. Per farlo, sfruttiamo il fatto che l'insieme di livello $\{E_S = \frac{1}{2}\}$ in $T\mathcal{E}$ è, come ora mostreremo, diffeomorfo a $SO(3)$, il quale, a sua volta, può essere rappresentato con il cosiddetto *modello a palla solida*: la palla unitaria in \mathbb{R}^3 con i punti antipodali sulla superficie identificati.

Questa procedura è ispirata da [11]; per altri esempi si vedano [12] e [13].

Per riuscire a disegnare gli insiemi di livello degli integrali primi si devono fare diversi passaggi. Il primo passo è quello di trasformare \mathcal{E} in $\mathbb{S}^2 = \{s \in \mathbb{R}^3 : \|s\| = 1\}$, sfera unitaria, tramite il cambio di coordinate

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (X, Y, Z) := \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c} \right) \end{aligned}$$

In queste nuove coordinate, $(s, v) = (X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ e definita la matrice diagonale

$$D := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

E ed I si riscrivono come

$$E_{\mathcal{S}}(s, v) = \frac{1}{2} (a^2 \dot{X}^2 + b^2 \dot{Y}^2 + c^2 \dot{Z}^2) = \frac{1}{2} \|Dv\|^2 \quad (3.9)$$

$$I_{\mathcal{S}}(s, v) = \left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} \right) (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) = \|D^{-1}s\|^2 \|v\|^2 \quad (3.10)$$

In questa situazione però non si possono disegnare i tori bidimensionali in quanto lo spazio $T\mathcal{E}$ ha dimensione 4.

Si può però farlo su

$$\left\{ E_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \right\} = \{(s, v) \in \mathbb{R}^6 : \|s\| = 1, \|Dv\| = 1, s \cdot v = 0\}$$

il quale è diffeomorfo a

$$T_1\mathbb{S}^2 = \{(s, v) \in \mathbb{R}^6 : \|s\| = 1, \|v\| = 1, s \cdot v = 0\}$$

il fibrato tangente unitario a \mathbb{S}^2 . Il diffeomorfismo che lega questi due spazi è

$$\begin{aligned} \left\{ E_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \right\} &\rightarrow T_1\mathbb{S}^2 \\ (s, v) &\mapsto \left(s, \frac{v}{\|v\|} \right) \end{aligned}$$

A sua volta, $T_1\mathbb{S}^2$ è anche diffeomorfo al gruppo delle rotazioni $SO(3)$ tramite la funzione

$$\begin{aligned} \mathbf{M} : T_1\mathbb{S}^2 &\rightarrow SO(3) \\ (s, v) &\mapsto R := (s, v, s \times v) \end{aligned} \quad (3.11)$$

in cui R è pensata come matrice di rotazione 3×3 , poichè le sue colonne sono ortonormali.

Infine il gruppo $SO(3)$ può essere rappresentato tramite il modello a palla solida: consideriamo infatti la palla unitaria B in \mathbb{R}^3 e B_p la palla unitaria con la relazione di equivalenza che identifica i punti antipodali sulla superficie, un qualunque punto $P = (P_1, P_2, P_3) \in B_p$ rappresenta una rotazione in \mathbb{R}^3 di asse il vettore $P - O$, dove O è il centro di B_p e di angolo $\|P - O\|\pi$.

Sapendo che una rotazione di angolo π equivale ad una rotazione di angolo $-\pi$ si capisce perché è necessario identificare i punti antipodali.

Esiste quindi una corrispondenza biunivoca tra $SO(3)$ e la palla solida poichè, presa una matrice di rotazione $R \in SO(3)$ di asse $x \in \mathbb{R}^3$ e angolo $\phi \in [0, \pi)$, si può associare, sulla palla solida, il punto ϕx .

Per poter rappresentare il gruppo $SO(3)$ nella palla solida è utile considerarne una parametrizzazione che evidenzi l'asse e l'angolo delle matrici di rotazione. Una scelta comoda è quella del rivestimento di ordine 2 di $SO(3)$ dato dal gruppo dei quaternioni unitari, ovvero $\mathbb{S}^3 = \{(u_0, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : u_0^2 + \|u\|^2 = 1\}$, tramite la *mappa dei parametri di Eulero*

$$\begin{aligned} \mathbf{E} : \mathbb{S}^3 &\rightarrow SO(3) \\ (u_0, u) &\mapsto 1 + 2u_0\hat{u} + 2\hat{u}^2 \end{aligned}$$

In dettaglio, si veda [11], il passaggio da $T_1\mathbb{S}^2$ alla palla solida, e viceversa, viene ottenuto tramite le catene di trasformazioni

$$T_1\mathbb{S}^2 \xrightarrow{\mathbf{M}} SO(3) \xrightarrow{\mathbf{Q}} \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\mathbf{B}} B \xrightarrow{p} B_p$$

dove \mathbf{M} è la funzione (3.11), e

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} : SO(3) &\rightarrow \mathbb{S}^3 \\ R &\mapsto (u, u_0) \end{aligned}$$

$$\text{è definita da } u_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\text{tr}(R) + 1} \text{ e } u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\text{sgn}(R_{32} - R_{23})\sqrt{R_{11} - R_{22} - R_{33} + 1} \\ \frac{1}{2}\text{sgn}(R_{13} - R_{31})\sqrt{R_{22} - R_{11} - R_{33} + 1} \\ \frac{1}{2}\text{sgn}(R_{21} - R_{12})\sqrt{R_{33} - R_{11} - R_{22} + 1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} : \mathbb{S}^3 &\rightarrow B \\ (u, u_0) &\mapsto \begin{cases} u & \text{se } u_0 = 0 \\ 0 & \text{se } u = 0 \\ \frac{2}{\pi}\text{sgn}(u_0)\arcsin(|u|)\frac{u}{|u|} & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

L'inversa è data da

$$B_p \xrightarrow{\mathbf{W}} \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\mathbf{E}} SO(3) \xrightarrow{\mathbf{M}^{-1}} T_1\mathbb{S}^2$$

dove \mathbf{M}^{-1} è l'inversa di (3.11), \mathbf{E} è la mappa di dei parametri di Eulero e

$$\begin{aligned} \mathbf{W} : B_p &\rightarrow \mathbb{S}^3 \\ P &\mapsto \left(\cos\left(\frac{\|P\|\pi}{2}\right), \frac{P}{\|P\|}\sin\left(\frac{\|P\|\pi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Provando a disegnare gli insiemi di livello ci accorgiamo che, sia in coordinate in $T_1\mathbb{S}^2$ che successivamente nella palla solida, quelli relativi alle ellissi principali maggiore e minore sono le quattro orbite periodiche attorno alle quali vediamo svilupparsi due famiglie di tori bidimensionali relativi a valori non singolari.

Notiamo che ogni insieme di livello è formato da due componenti connesse perché contiene moti che percorrono le geodetiche nei due versi. Di quello che contiene l'ellisse principale intermedia, il quale è di difficile visualizzazione, non forniamo facilmente un'immagine in quanto è instabile. Infatti le due orbite periodiche corrispondenti sono instabili e tale insieme di livello consiste della varietà stabili ed instabili, che hanno una struttura molto complicata (per un esempio in un altro sistema si veda [12]).

Osservazione 3.4.1. *Le immagini qui proposte degli insiemi di livello sono state ottenute su Mathematica con la funzione ContourPlot3D che ha permesso di disegnare gli insiemi di livello della funzione I_S .*

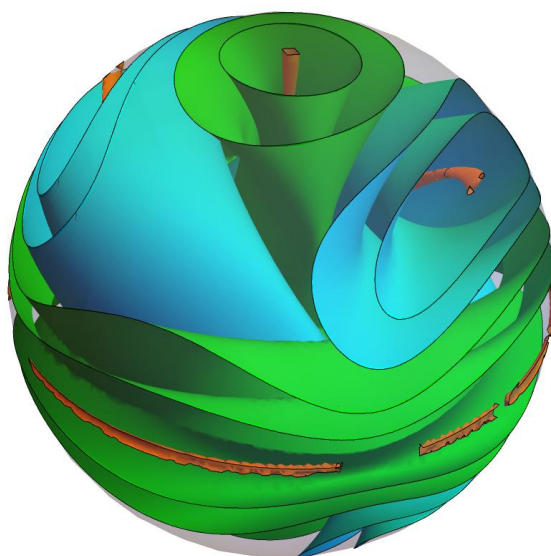


Figura 3.2: Foliatura in tori invarianti nella palla solida

Appendice

1. *Dimostrazione che la funzione F (3.2) è integrale primo.*

Dalla Lagrangiana che corrisponde all'energia cinetica del problema, calcoliamo allora come prima cosa le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E}{\partial q} = 0$$

che in coordinate ellittiche diventano

$$\begin{cases} A_1 \dot{q}_1^2 + A_2 \dot{q}_2^2 + (-q_1 + q_2) \dot{A}_1 \dot{q}_1^2 + 2A_1 \dot{q}_1 (-\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + 2A_1 (-q_1 + q_2) \ddot{q}_1 = 0 \\ A_1 \dot{q}_1^2 + A_2 \dot{q}_2^2 - (-q_1 + q_2) \dot{A}_2 \dot{q}_2^2 - 2A_2 \dot{q}_2 (-\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - 2A_2 (-q_1 + q_2) \ddot{q}_2 = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

dalle quali ricaviamo le relazioni

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \frac{-\left(A_1 \dot{q}_1^2 + A_2 \dot{q}_2^2 + (-q_1 + q_2) \dot{A}_1 \dot{q}_1^2 + 2A_1 \dot{q}_1 (-\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\right)}{2A_1 (-q_1 + q_2)} \\ \ddot{q}_2 = \frac{\left(A_1 \dot{q}_1^2 + A_2 \dot{q}_2^2 - (-q_1 + q_2) \dot{A}_2 \dot{q}_2^2 - 2A_2 \dot{q}_2 (-\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\right)}{2A_2 (-q_1 + q_2)} \end{cases} \quad (3.13)$$

Calcoliamo ora la derivata lungo le soluzioni di $F(q, \dot{q})$, lasciando indicate in modo implicito le derivate di A_i per semplificare la notazione

$$\begin{aligned} \frac{dF(q, \dot{q})}{dt} &= (-\dot{q}_1 + \dot{q}_2)(A_1 \dot{q}_1^2 \dot{q}_2 + A_2 \dot{q}_2^2 \dot{q}_1) \\ &+ (-q_1 + q_2)(q_2 \dot{A}_1 \dot{q}_1^3 + q_1 \dot{A}_2 \dot{q}_2^3 + A_1 \dot{q}_1^2 \dot{q}_2 + A_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2^2 + 2A_1 q_2 \dot{q}_1 \ddot{q}_1 + 2A_2 q_1 \dot{q}_2 \ddot{q}_2) \end{aligned}$$

sostituendo le relazioni (3.13) nella derivate temporali otteniamo

$$\begin{aligned} &(-\dot{q}_1 + \dot{q}_2)(A_1 \dot{q}_1^2 \dot{q}_2 + A_2 \dot{q}_2^2 \dot{q}_1) + (-q_1 + q_2) \left[q_2 \dot{A}_1 \dot{q}_1^3 + q_1 \dot{A}_2 \dot{q}_2^3 + A_1 \dot{q}_1^2 \dot{q}_2 + A_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2^2 \right. \\ &+ 2A_1 q_2 \dot{q}_1 \frac{-\left(A_1 \dot{q}_1^2 + A_2 \dot{q}_2^2 + (-q_1 + q_2) \dot{A}_1 \dot{q}_1^2 + 2A_1 \dot{q}_1 (-\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\right)}{2A_1 (-q_1 + q_2)} \\ &\left. + 2A_2 q_1 \dot{q}_2 \frac{\left(A_1 \dot{q}_1^2 + A_2 \dot{q}_2^2 - (-q_1 + q_2) \dot{A}_2 \dot{q}_2^2 - 2A_2 \dot{q}_2 (-\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\right)}{2A_2 (-q_1 + q_2)} \right] = 0 \end{aligned}$$

mostrando così che F è integrale primo del sistema.

2. *I punti delle ellissi principali danno soluzioni non banali al sistema (3.8).*

Inseriamo il punto $(a, 0, 0, 0, \dot{y}, 0)$ nel sistema (3.8) il quale diventa

$$\begin{cases} \frac{2\lambda_2 \dot{y}}{a^3} + \frac{2\lambda_3}{a} = 0 \\ \frac{2\lambda_4 \dot{y}}{b^2} = 0 \\ 0 = 0 \\ \frac{2\lambda_4}{a} = 0 \\ \dot{y}(\lambda_1 + \frac{2\lambda_2 \dot{y}}{b^2}) = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda e dalla quarta equazione otteniamo che $\lambda_4 = 0$ mentre dalla prima e dalla quinta troviamo delle relazioni tra le altre λ che portano a trovare una soluzione non banale come

$$\left(\frac{2}{\dot{y}^2}, -\frac{a^2 b^2}{\dot{y}^2}, 1, 0 \right)$$

Come si può notare i punti $(0, b, 0, 0, 0, \dot{z})$ e $(0, 0, c, \dot{x}, 0, 0)$ danno luogo a dei sistemi equivalenti a quello appena trovato e quindi forniranno anche essi soluzioni non banali.

3. *I punti ombelicali sono regolari*

I punti ombelicali sono quattro punti sull'ellissoide di coordinate

$$(x, y, z) = \left(\pm \frac{a\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{c^2 - a^2}}, 0, \pm \frac{c\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - a^2}} \right)$$

che hanno la caratteristica di essere punti ellittici nei quali la curvatura delle sezioni normali è costante e in tali punti la superficie è localmente sferica.

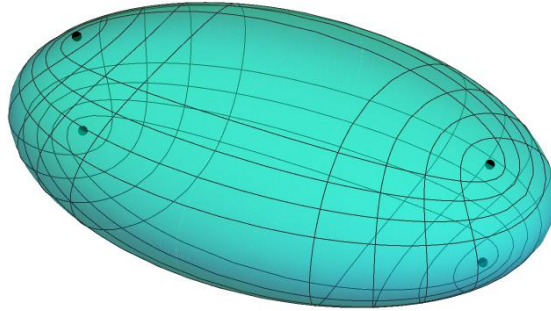


Figura 3.3: Punti ombelicali su un ellissoide triassiale

Essendo dei punti con delle particolari caratteristiche ci si potrebbe aspettare che si comportino come i punti delle ellissi principali.

Provando a svolgere i conti tramite il sistema (3.8), inserendo le coordinate del punto $((\mathcal{A}, 0, \mathcal{C}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \left(\frac{a\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{c^2 - a^2}}, 0, \frac{c\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \right)$ con velocità qualunque, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{2\lambda_2 \dot{y} \mathcal{A}}{a^4} + \frac{2\lambda_3 \mathcal{A}}{a^2} + \frac{2\lambda_4 \dot{x}}{a^2} = 0 \\ \frac{2\lambda_4 \dot{y}}{b^2} = 0 \\ \frac{2\lambda_2 \dot{y} \mathcal{C}}{c^4} + \frac{2\lambda_3 \mathcal{C}}{c^2} + \frac{2\lambda_4 \dot{z}}{c^2} = 0 \\ \lambda_1 \dot{x} + \frac{2\lambda_2 \dot{y} \dot{x}}{a^2} + \frac{2\lambda_4 \mathcal{A}}{a^2} = 0 \\ \lambda_1 \dot{y} + \frac{2\lambda_2 \dot{y} \dot{y}}{b^2} = 0 \\ \lambda_1 \dot{z} + \frac{2\lambda_2 \dot{y} \dot{z}}{c^2} + \frac{2\lambda_4 \mathcal{C}}{c^2} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo subito che $\lambda_4 = 0$ e quindi il sistema si semplifica diventando

$$\begin{cases} \frac{2\mathcal{A}}{a^2} \left(\frac{\lambda_2 i_2}{a^2} + \lambda_3 \right) = 0 \\ \lambda_4 = 0 \\ \frac{2\mathcal{C}}{c^2} \left(\frac{\lambda_2 i_2}{c^2} + \lambda_3 \right) = 0 \\ \dot{x} \left(\lambda_1 + \frac{2\lambda_2 i_1}{a^2} \right) = 0 \\ \dot{y} \left(\lambda_1 + \frac{2\lambda_2 i_1}{b^2} \right) = 0 \\ \dot{z} \left(\lambda_1 + \frac{2\lambda_2 i_1}{c^2} \right) = 0 \end{cases}$$

da cui si vede che l'unica soluzione possibile, qualunque sia la velocità, è $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 0, 0, 0)$.

Quindi i punti ombelicali sono punti regolari.

Bibliografia

- [1] C. Karney. Algorithms for geodesics. *Journal of Geodesy*, 87, 2013.
- [2] A. Clebsch. *Jacobi's Lectures on Dynamics: Delivered at the University of Königsberg in the Winter Semester 1842-1843*. (Springer, 2009).
- [3] J. Moser. *Integrable Hamiltonian systems and spectral theory*. (Springer, 1983).
- [4] G. Benettin. Appunti per il corso di meccanica analitica. <https://www.math.unipd.it/benettin/links-MA/ma-171004.pdf>.
- [5] F. Fassò. Notes on finite dimensional integrable hamiltonian systems. <https://www.math.unipd.it/fasso/research/papers/sc.pdf>.
- [6] T. Levi-Civita. *Lezioni di meccanica razionale: Vol. 2, Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà*. (Zanichelli, 1926).
- [7] V. Dragovich. On integrable potential perturbations of the jacobi problem for the geodesics on the ellipsoid. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 29(13):L317, 1996.
- [8] W. P. A. Klingenberg. *Riemannian geometry*, volume 1. (Walter de Gruyter, 2011).
- [9] L. Bates. An extension of lagrange multipliers. *Applicable Analysis*, 36(3-4), 1990.
- [10] V. I. Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. (Springer, 2013).
- [11] L. Bates and F. Fassò. The conjugate locus for the euler top, the axisymmetric case. In *International Mathematical Forum*, volume 2, pages 2109–2139, 2007.
- [12] M. Pretto. La trottola della veselova, un sistema anolonomo integrabile. <https://thesis.unipd.it/bitstream/20.500.12608/22788/1/Tesi/Matteo/Pretto.pdf>.
- [13] F. Fassò, L. C. García-Naranjo, and J. Montaldi. Integrability and dynamics of the n-dimensional symmetric veselova top. *Journal of Nonlinear Science*, 29(3):1205–1246, 2019.
- [14] C. M. Davison, H. R. Dullin, and A. V. Bolsinov. Geodesics on the ellipsoid and monodromy. *Journal of geometry and physics*, 57(12):2437–2454, 2007.