

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

### Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

# Meccanica statistica di gas quantistici intrappolati in una configurazione toroidale

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureando Tommaso Tonolo

Anno Accademico 2018/2019

#### SOMMARIO

Questo lavoro di tesi si propone di analizzare un semplice sistema di bosoni non interagenti, approfondendo le leggi della meccanica statistica quantistica e in particolare il fenomeno del condensato di Bose-Einstein.

La configurazione sulla quale è vincolato a stare il sistema di bosoni considerato è una circonferenza. In particolare si analizza la possibilità di condensazione su un sistema unidimensionale, studiandone le caratteristiche fondamentali come la temperatura critica e la frazione di condensato. Si cerca poi di estendere lo studio ad un sistema di particelle vincolate a muoversi su una superficie toroidale, impostando l'equazione di Schrödinger per ricavare una formula di quantizzazione dell'energia per questa configurazione.

# Indice

Introduzione	1
1 Statistica di Bose-Einstein         1.1 Ensemble Grancanonico         1.1.1 Potenziale chimico         1.2 Condensato di Bose-Einstein         1.3 Condensato in 1D e 2D	<b>3</b> 3 5 5 7
2       Condensato su una circonferenza         2.1       La circonferenza come configurazione di confinamento         2.2       Quantizzazione         2.3       Temperatura critica         2.3.1       Calcolo con metodi numerici	9 10 12
3 Superficie toroidale       1         3.1 Coordinate toroidali       1         3.2 Equazione di Schrödinger       1	.7 17 19
Conclusioni 2 Bibliografia 2	21 23

## Introduzione

Nel 1924 il fisico indiano S. N. Bose mandò ad Einstein un articolo, che non era riuscito a pubblicare, riguardante la statistica dei fotoni e la derivazione della formula di radiazione di corpo nero di Planck. Lo studio di Bose si basava su considerazioni statistiche di tipo quantistico e non faceva alcun riferimento alla fisica classica. Einstein rimase impressionato da tale lavoro e lo fece pubblicare nella rivista scientifica tedesca Zeitschrift für Physik. Il 1924 segna pertanto la nascita della statistica di Bose-Einstein.

Successivamente Einstein approfondì ed integrò il lavoro di Bose e dalla collaborazione tra i due scienziati nacque il concetto di gas di Bose. Tale gas è formato da particelle identiche con spin intero, i bosoni, la cui distribuzione statistica è descritta dalla statistica di Bose-Einstein. Una delle caratteristiche più interessanti dei bosoni, che includono tra di essi anche i fotoni, è la possibilità di condividere in numero arbitrario uno stesso stato quantistico. Proprio questo aspetto li distingue dai fermioni, i quali invece obbediscono al principio di esclusione di Pauli.

Il lavoro congiunto di Einstein e Bose prediceva che, raggiungendo temperature estremamente basse, molto vicine allo zero assoluto, era possibile produrre un nuovo stato di materia che seguiva le regole della meccanica quantistica. A questo stato venne dato il nome di *Bose-Einstein condensate*. Lo stato di condensato è strettamente collegato alla possibilità dei bosoni di occupare lo stesso livello energeti-co. Quando infatti si raggiungono temperature bassissime, al di sotto di una temperatura critica, una frazione non trascurabile di atomi bosonici è portata a *condensare* nello stato quantico accessibile più basso, manifestando effetti anche su scala macroscopica.

Trattando le particelle dal punto di vista quantistico, queste possono essere considerate pacchetti d'onda caratterizzati da una determinata lunghezza d'onda che dipende dalla temperatura. Il punto in cui gli effetti quantistici diventano importanti corrisponde al punto in cui la lunghezza d'onda è dello stesso ordine della separazione interatomica. Il raggiungimento di una tale lunghezza d'onda comporta la sovrapposizone dei pacchetti e la formazione di un condensato di particelle indistinguibili tra di loro.

La scoperta dello stato di condensato fu fondamentale per lo studio della materia. Una delle applicazioni più importanti è il suo legame con la superfluidità, aspetto che venne messo in luce per la prima volta dal fisico teorico Fritz London nel 1938.

Dopo il successo dei lavori di Bose e Einstein pubblicati tra il 1924 e il 1925, nei successivi settant'anni si provò, senza successo, a riprodurre lo stato di condensato, predetto dalla teoria ma mai osservato in natura. Le difficoltà sperimentali con le quali ci si scontrava erano soprattutto legate al raggiungimento di temperature prossime allo zero assoluto oltre che alla realizzazione dei sistemi di confinamento.

Solo nel 1995 Eric Cornell e Carl Wieman produssero il primo condensato di Bose-Einstein alla University of Colorado, lavoro che li portò a vincere nel 2001 il premio Nobel per la Fisica. L'esperimento fu poco dopo seguito da altri studi condotti da W. Ketterle, Cornell e Wieman al MIT.

Nell'esperimento del 1995 Cornell e Wieman produssero il primo condensato per atomi di  ${}^{87}Rb$  confinati mediante campi magnetici e raffreddati fino a 170 nK per evaporazione e tale condensato fu preservato per più di 15 secondi ([1]). I tre segnali principali della presenza della condensazione di Bose-Einstein furono:

- (i) Un picco stretto centrato a velocità zero nella distribuzione di velocità termica .
- (ii) L'aumento improvviso all'abbassarsi della temperatura della frazione di atomi appartenenti a questo picco.
- (iii) Una distribuzione di velocità non termica e anisotropica dello stato di energia minima della trappola magnetica in contrasto con la distribuzione di velocità termica e isotropica osservata per la frazione non condensata.

In tempi ancora più recenti sono stati elaborati esperimenti che favorissero maggiormente le condizioni per la formazione di un condensato. In particolare uno degli ostacoli maggiori è la presenza del campo gravitazionale terrestre che impedisce una permanenza del condensato per tempi estesi.

In tal direzione l'esperimento MAIUS 1 del 2017 ha portato un sistema di atomi di <sup>87</sup>Rb ultrafreddi a bordo di un razzo in condizioni di microgravità ([4]). Anche la NASA ha lavorato a una serie di esperimenti simili utilizzando campioni di <sup>87</sup>Rb, <sup>39</sup>K e <sup>41</sup>K nel Cold Atom Lab a bordo dell'ISS (International Space Station) [6].

Per un continuo affinamento delle tecniche di produzione di condensati e per uno sviluppo dei modelli teorici conosciuti, vengono tutt'ora studiati numerosi modelli di sistemi, che possono variare in forma e dimensione. Questi ultimi in particolare analizzano il comportamento dei bosoni e la possibilità o meno, sotto particolari condizioni, della formazione del condensato di Bose-Einstein.

In tale ottica si colloca questo lavoro di tesi, che si prefigge di studiare un sistema di particelle bosoniche non interagenti vincolate a muoversi su una circonferenza. Il confinamento studiato è quindi unidimensionale e semplifica la configurazione ad anello (o toro) per la quale sono stati compiuti vari esperimenti. Si faccia riferimento per esempio allo studio di N. Murray e collaboratori su un condensato di Bose-Einstein in una trappola toroidale di potenziale ([13]).

Questa tesi è organizzata come segue. Nel primo capitolo si introducono le nozioni fondamentali dell'ensemble grancanonico e si enuncia uno dei risultati fondamentali che deriva da esse, il condensato Bose-Einstein. Il capitolo 2 verterà sullo studio del condensato di Bose-Einstein su una circonferenza. Si andranno così ad analizzare temperatura critica e frazione di condensato del sistema attraverso metodi di calcolo numerico (l'ambiente di calcolo utilizzato è Mathematica). Infine nell'ultimo capitolo si imposterà lo stesso studio del capitolo precedente esaminando però una configurazione di superficie toroidale, più realistica ma più complicata da analizzare.

### Capitolo 1

### Statistica di Bose-Einstein

I bosoni sono particelle che seguono la statistica di Bose-Einstein e hanno spin intero. Essi compongono una delle due classi fondamentali di particelle, l'altra è costituita dai fermioni.

Una delle proprietà fondamentali dei bosoni è che la loro statistica non dà limitazioni sul numero di occupazione di uno stato quantico. Questo vuol dire che i bosoni, a differenza dei fermioni che seguono il principio di esclusione di Pauli, possono trovarsi in numero indefinitamente elevato nello stesso stato energetico.

In meccanica quantistica, quando l'evoluzione temporale delle funzioni d'onda di due particelle identiche porta alla sovrapposizione dei loro *supporti* spaziali, non c'è modo di sapere, anche se i supporti ritornano disgiunti, a quale di essi corrisponda ciascuna particella.

Una delle conseguenze più importanti dell'indistinguibilità è che i valori medi di osservabili in stati che differiscono per scambio di particelle identiche devono avere lo stesso valore.

In particolare la statistica di Bose-Einstein implica che, quando due bosoni della stessa specie vengono scambiati, la funzione d'onda del sistema non cambia. Per sistemi composti da molte particelle le differenze tra statistica bosonica e fermionica si notano solo per grandi densità di particelle. Altrimenti, a basse densità, entrambe le statistiche sono ben approssimate dalla statistica classica di Maxwell-Boltzmann.

Infatti è solo per grandi densità che le funzioni d'onda delle particelle si sovrappongono. In questo caso le particelle sono indistinguibili e gli effetti quantistici diventano importanti.

Una delle proprietà più interessanti dei bosoni è che a basse temperature questi possono addensarsi nello stesso stato energetico. Questa caratteristica dà origine ad uno speciale stato di materia che è il condensato di Bose-Einstein e di cui si parlerà in seguito.

La statistica di Bose-Einstein fu introdotta dal fisico indiano Bose nel 1924 per i fotoni e generalizzata agli atomi da Einstein nel 1924-25 .

Per questa statistica il numero di aspettazione di particelle nell'i-esimo stato di energia  $\mathcal{E}_i$  è

$$n_i(\mathcal{E}_i) = \frac{g_i}{e^{(\mathcal{E}_i - \mu)/k_B T} - 1},$$
(1.1)

dove  $g_i$  è la degenerazione dell'i-esimo livello energetico,  $\mu$  il potenziale chimico,  $k_B$  la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta.

#### 1.1 Ensemble Grancanonico

L'ensemble grancanonico consiste in un sistema in grado di scambiare energia e particelle con l'esterno ma in cui la temperatura T e il potenziale chimico  $\mu$  sono fissati. Si può pensare come modello a un sistema a contatto con un serbatoio che mantiene la temperatura costante ed è invece sorgente di energia e particelle.

Considerando un sistema non interagente, le particelle che occupano un singolo stato energetico formano un sottoinsieme del sistema termodinamico totale. Si può considerare ognuno di questi sottosistemi come un *ensemble grancanonico* indipendente.

Inizialmente si analizzerà quindi un sistema di particelle di medesima energia per poi generalizzare al caso in cui le particelle si dispongono su diversi livelli energetici.

Per lo studio degli insiemi grancanonici serve costruire una funzione di partizione grancanonica  $\mathcal{Z}([8])$ .

Considerando uno stato di energia fissata E si avrà

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{M} e^{N(\mu-\mathcal{E})/k_B T}$$
(1.2)

dove M è il massimo numero di occupazione possibile per uno stato. Mentre per i fermioni il numero di occupazione può essere o 1 o 0, i bosoni possono occupare in numero indefinito un singolo stato energetico.

Quindi l'equazione (1.2) diventa

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{N(\mu-\mathcal{E})/k_B T} = \sum_{N=0}^{\infty} [e^{(\mu-\mathcal{E})/k_B T}]^N \stackrel{=}{=} \frac{1}{1 - e^{(\mu-\mathcal{E})/k_B T}}$$
(1.3)

dove nel passaggio (a) si è utilizzato il fatto che la serie è una serie geometrica di ragione  $q = e^{(\mu - \mathcal{E})/k_B T}$ . Poichè  $\mu \leq \mathcal{E}$ , si avrà  $0 \leq q \leq 1$  e la serie convergerà a  $\frac{1}{1-q}$ .

Il numero medio di particelle  $\langle N \rangle$  per il dato stato di particella singola di energia  $\mathcal{E}$  è dato da

$$\langle N \rangle = k_B T \frac{1}{\mathcal{Z}} \left( \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \mu} \right)_{V,T} = \frac{1}{e^{(\mathcal{E} - \mu)/k_B T} - 1}$$
(1.4)

Quella che è appena stata descritta è la funzione di partizione grancanonica  $\mathcal{Z}$  di un sistema di N particelle che occupano lo stesso stato energetico.

Si analizzerà ora un sistema grancanonico bosonico in cui le particelle si dispongono su diversi livelli energetici. Indicando con  $n_i$  i numeri di occupazione, la funzione di partizione è definita come (si veda [8])

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\{n_i\}} \prod_i e^{-\beta n_i \varepsilon_i}$$
(1.5)

dove  $z = e^{\beta\mu}$  prende il nome di fugacità con  $\beta = 1/k_B T$ .

In particolare  ${\mathcal Z}$  può anche essere scritta come

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_i\}} \prod_i e^{-\beta n_i(\varepsilon_i - \mu)}$$
(1.6)

da cui è più facile notare la corrispondenza con l'espressione in (1.3).

Ritornando a (1.5) e imponendo la condizione  $\sum_{i} n_{i} = N$ , cioè che la somma dei numeri di occupazione di ciascun livello energetico sia uguale al numero totale di particelle, si ottiene con semplici passaggi (per dettagli si veda [8])

$$\mathcal{Z} = \prod_{i} \sum_{\{n_i\}} (ze^{-\beta \mathcal{E}_i})^{n_i} \tag{1.7}$$

La sommatoria che compare è diversa a seconda della famiglia di particelle: per i fermioni gli  $n_i$  possono essere solo 0 o 1, per i bosoni invece i numeri di occupazione sono tutti i numeri naturali. In questo secondo caso si ottiene una serie geometrica la cui condizione di convergenza è  $z \leq 1$  che implica  $\mu \leq 0$  in quanto  $z = e^{\beta\mu}$ .

Per i bosoni quindi la funzione grancanonica sarà

$$\mathcal{Z} = \prod_{i} \frac{1}{1 - z e^{-\beta \mathcal{E}_i}}.$$
(1.8)

Si possono da qui studiare le grandezze termodinamiche del sistema utilizzando le regole dell'*ensemble* grancanonico [8].

$$\langle N \rangle = z \frac{\partial}{\partial z} ln \mathcal{Z} = \sum_{i} z \frac{e^{-\beta \mathcal{E}_{i}}}{1 + z e^{-\beta \mathcal{E}_{i}}} = \sum_{i} \frac{1}{e^{\beta (\mathcal{E}_{i} - \mu)} - 1} = \sum_{i} \langle N_{i} \rangle , \qquad (1.9)$$

$$\frac{PV}{k_BT} = ln\mathcal{Z} = -\sum_i ln(1 - ze^{-\beta\mathcal{E}_i}).$$
(1.10)

#### 1.1.1 Potenziale chimico

Nella costruzione dell'ensemble grancanonico viene introdotto il potenziale chimico

$$\mu = \frac{\partial A}{\partial N} \tag{1.11}$$

dove A è l'energia libera di Helmholtz che dipende dall'energia interna  $E_{int}$ , la temperatura T e l'entropia S attraverso l'equazione  $A = E_{int} - TS$ .

Le particelle tendono a muoversi da un potenziale chimico più alto ad uno più basso. Per questo il potenziale chimico è equivalente a un qualunque potenziale *fisico* come per esempio quello gravitazionale.

In particolare, nel momento in cui si hanno due sistemi all'equilibrio diffusivo tra di loro, deve verificarsi che il potenziale chimico è lo stesso per ciascun sistema. Questo è in analogia con la temperatura che risulta uguale tra due sottosistemi tra i quali è possibile uno scambio di energia.

Attraverso semplici passaggi ([3]) dovuti al fatto che l'energia libera di Helmholtz è funzione di grandezze estensive ed è essa stessa estensiva, si arriva a definire un altro potenziale termodinamico, il potenziale di Gibbs:

$$G = \mu N = A + PV \tag{1.12}$$

### 1.2 Condensato di Bose-Einstein

Le sommatorie che compaiono nelle equazioni (1.9) e (1.10) risultano poco pratiche e si vorrebbe poter scrivere espressioni più esplicite.

Per fare ciò si passa al limite termodinamico, per il quale  $V, N \to \infty$ . Procedendo poi in approssimazione semiclassica si sostituisce la sommatoria con un integrale.

Nelle equazioni (1.9) e (1.10) le serie divergono nel limite  $z \to 1$ , perchè diverge il singolo termine corrispondente a  $\mathcal{E}_i = 0$ , di conseguenza questo termine può essere importante quanto l'intera somma. Si isola quindi in entrambe le equazioni il termine corrispondente a  $\mathcal{E}_i = 0$  e nel resto si sostituiscono gli integrali alle sommatorie.

Si ottengono le seguenti equazioni di stato ([8]).

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{g_{5/2}(z)}{\Lambda^3} - \frac{\ln(1-z)}{V}$$
(1.13)

$$\frac{1}{v} = \frac{g_{3/2}(z)}{\Lambda^3} + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z}.$$
(1.14)

Si ricorda che nelle equazioni (1.13) e (1.14) si definiscono la classe di funzioni  $g_q(z)$ , il volume specifico v e la lunghezza d'onda termica  $\Lambda$  nel seguente modo:

$$g_q(z) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^q} \tag{1.15}$$

$$\frac{1}{v} := \frac{\langle N \rangle}{V} \tag{1.16}$$

$$\frac{1}{\Lambda} := \sqrt{\frac{2m\pi k_B T}{h^2}}.$$
(1.17)

Per i bosoni si ha  $z \leq 1$ . La serie  $g_{3/2}(z)$  arriva in z=1 con derivata infinita ma in questo punto converge ed assume il valore  $g_{3/2}(1) = 2.612...$ 

Fissando la temperatura, ossia la lunghezza d'onda termica, e il volume specifico, il rapporto  $\frac{\Lambda^3}{v}$  è costante. In particolare

$$\frac{\Lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) + \frac{\Lambda^3}{V}(\frac{z}{1-z})$$
(1.18)

Si nota che nel caso in cui  $\frac{\Lambda^3}{v} > g_{3/2}(1)$  la funzione  $g_{3/2}(z)$  non basta da sola per ottenere  $\frac{\Lambda^3}{v}$ . Il contributo mancante sarà dato dal secondo termine dell'equazione (1.18) che, ricordando che  $\langle n_0 \rangle = \frac{z}{1-z}$ , descrive la densità media dello stato fondamentale. Questo significa che, per certi valori di temperatura e volume specifico, il numero di occupazione dello stato energetico fondamentale diventa finito ([14]).

Nel limite termodinamico quindi, in cui  $V \to \infty$ , una frazione considerevole di particelle, confrontabile con il numero totale di particelle, occupa lo stato quantico fondamentale e si parla di *condensato* di Bose-Einstein.

La condizione per avere condensato è quindi  $\frac{\Lambda^3}{v} > g_{3/2}(1)$  e in particolare, a volume specifico v fissato, si può definire una lunghezza d'onda termica critica tale per cui

$$\frac{\Lambda_c^3}{v} = g_{3/2}(1) \tag{1.19}$$

alla quale è chiaramente associata una temperatura critica

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{1}{vg_{3/2}(1)}\right)^{2/3}.$$
(1.20)

Per  $T < T_c$  si avrà condensazione.

Allo stesso modo, fissata questa volta la temperatura, si otterrà una densità critica di volume

$$v_c = \frac{\Lambda^3}{g_{3/2}(1)}.$$
 (1.21)

Si potrà avere condensato solo se  $v < v_c$ .

Si definisce la frazione di condensato come

$$f_c = \frac{\langle n_0 \rangle}{\langle N \rangle}.\tag{1.22}$$

Ricordando che  $\langle n_0 \rangle = \frac{z}{1-z}$  e  $\langle N \rangle = \frac{V}{v}$  si ottengono due espressioni per  $f_c$ , (1.23) e (1.24), a seconda che si fissino rispettivamente la densità di volume v o la temperatura del sistema.

$$\frac{\langle n_0 \rangle}{\langle N \rangle} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \tag{1.23}$$

$$\frac{\langle n_0 \rangle}{\langle N \rangle} = 1 - \left(\frac{v}{v_c}\right). \tag{1.24}$$

Dall'equazione (1.23) si nota che, idealmente, ad una temperatura pari allo zero assoluto, tutte le particelle dovrebbero occupare il ground state.

### 1.3 Condensato per sistemi unidimensionali e bidimensionali

A differenza del caso tridimensionale, se la dimensione è inferiore a 3 la formazione di ordine a lungo raggio (long-range order LRO), nozione importante per le transizioni di fase in 3D, è proibita dal teorema di Mermin-Wagner ([11]). Non ci si aspetta quindi la possibilità di condensazione di Bose-Einstein per sistemi bidimensionali o unidimensionali.

Nonostante ciò, sono stati recentemente effettuati esperimenti che contraddicono l'impossibilità di formazione di condensati per basse dimensioni. Questo è un comportamento inaspettato dovuto alla non uniformità del sistema causata dai potenziali di confinamento esterni e in particolare alla limitatezza dei sistemi presenti in natura. Le predizioni teoriche per sistemi omogenei vanno quindi adattate alle caratteristiche reali dei sistemi realizzati in laboratorio.

Sono molti gli esperimenti che provano la possibilità di condensazione in una o due dimensioni. Tra questi lo studio condotto da A. Posazhennikova di gas bosonici bidimensionali in presenza di interazioni repulsive deboli. Questo studio ha dimostrato la possibilità di condensazione anche in un gas bidimensionale ([15]).

Un altro esempio è lo studio dei modi di eccitazione di Lieb (predetti da Elliot Lieb cinquant'anni fa) e studiati in un condensato di Bose-Einstein unidimensionale da A. D. Jackson e G. M. Kavoulakis ([9]).

M. Tomchenko ha poi studiato la condensazione di Bose-Einstein per un sistema unidimensionale periodico di particelle con interazione repulsiva ([16]). Il suo lavoro conferma che l'occupazione macroscopica dello stato di particella singola (che corrisponde a un condensato) per un sistema unidimensionale è possibile poichè in natura tutti i sistemi sono finiti.

Quello che quindi sembra una violazione del teorema di Mermin-Wagner è in realtà solo dovuto al fatto che il teorema stesso si basa sull'ipotesi che l'estensione e il numero di particelle del sistema siano infinite e questa non è soddisfatta nella realtà.

### Capitolo 2

# Condensato di Bose-Einstein su una circonferenza

In questo capitolo verrà studiato un sistema di atomi bosonici ultrafreddi allo stato gassoso disposti su una circonferenza.

Per prima cosa si risolverà l'equazione di Schrödinger con l'intento di ricavare un'espressione per la quantizzazione dell'energia. Successivamente, seguendo le regole dell'ensemble grancanonico per il caso bosonico (si veda (1.9)), si scriverà il numero totale di particelle del sistema come somma sugli autovalori dell'energia. Da qui infine si ricaveranno, tramite calcolo numerico, espressioni per la temperatura critica  $T_c$  e la frazione di condensato  $\frac{N_0}{N}$  definite nella sezione 1.2.

Nello svolgere questi passaggi sono state seguite le idee contenute nell'articolo di L. Salasnich e A. Tononi ([17]), adattandole al caso considerato.

Questa configurazione può essere considerata come una semplificazione del caso reale della configurazione toroidale. Sperimentalmente infatti non è possibile la realizzazione di sistemi perfettamente unidimensionali. Lo studio di una tale configurazione sarà solo impostato nel capitolo 3 poichè presenterà complicazioni già nel primo punto dell'analisi, cioè nella risoluzione dell'equazione di Schrödinger e nella ricerca di un'espressione per la quantizzazione dell'energia.

### 2.1 La circonferenza come configurazione di confinamento

Si consideri una circonferenza di raggio R in  $\mathbb{R}^3$  centrata nell'origine e giacente sul piano xy.

Come si nota in Figura 2.1, una tale circonferenza (in rosso nel disegno) è l'intersezione del piano xy con una superficie cilindrica  $S_c$  di raggio R e asse l'asse z. La sua equazione è quindi

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$
(2.1)

In particolare un sistema di particelle su  $\mathbb{R}^3$  vincolate a stare su una generica circonferenza di raggio R sul piano xy è soggetto ad un potenziale armonico del tipo

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^{2}(R - \sqrt{x^{2} + y^{2}})^{2} + \frac{1}{2}m\omega_{z}^{2}z^{2}$$
(2.2)

che si annulla per  $\sqrt{x^2 + y^2} = R$  e z=0. In particolare il primo termine costituisce un potenziale armonico di pulsazione  $\omega_{\perp}$  che tende a confinare le particelle sulla superficie  $S_c$ , mentre il secondo di pulsazione  $\omega_z$  sul piano xy.



Figura 2.1: Circonferenza come intersezione di superficie cilindrica e piano.

Per quantificare l'importanza di questo confinamento bisogna prendere in considerazione l'energia termica  $k_B T$  e l'energia caratteristica  $\frac{\hbar^2}{2mR^2}$ , la cui origine sarà spiegata più avanti, e confrontarle con le energie caratteristiche dell'oscillatore armonico quantistico  $\hbar\omega_{\perp} = \hbar\omega_z$ . Sotta la accumzioni

Sotto le assunzioni

$$\frac{\hbar^2}{2mR^2} \ll \hbar\omega_\perp \quad \frac{\hbar^2}{2mR^2} \ll \hbar\omega_z \tag{2.3}$$

$$k_B T \ll \hbar \omega_\perp \quad k_B T \ll \hbar \omega_z, \tag{2.4}$$

la configurazione di confinamento è effettivamente un anello unidimensionale.

All'aumentare invece della temperatura o per raggi molto piccoli, gli effetti di non perfetto confinamento diventano rilevanti. In questo modo si può avere un *crossover dimensionale* lungo due diverse direzioni, quella radiale e quella dell'asse z. L'anello unidimensionale tende infatti a trasformarsi in una corona circolare al diminuire di  $\omega_{\perp}$  e in una superficie cilindrica di altezza diversa da zero all'abbassarsi di  $\omega_z$ .

#### 2.2 Equazione di Schrödinger e quantizzazione dell'energia

Una particella soggetta ad un potenziale  $U(\vec{r})=U(x, y, z)$  è descritta, nello spazio tridimensionale, dalla funzione d'onda  $\psi(\vec{r})$  che soddisfa l'equazione stazionaria di Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = \mathcal{E}\psi(\vec{r}).$$
(2.5)

Si considerino verificate le condizioni precedentemente discusse ((2.3) e (2.4)) sui rapporti tra energia termica e caratteristica e potenziale di confinamento. Ci si trova quindi nel caso in cui la particella è vincolata a muoversi su una circonferenza di raggio R nel piano xy. Poichè il raggio R di una circonferenza centrata all'origine sul piano è proprio  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , con  $x \in y$  coordinate dei punti della circonferenza, il primo termine del potenziale U(x, y, z) dell'espressione (2.2) si annulla.

Ipotizziamo invece la possibilità di una piccola oscillazione delle particelle lungo l'asse z. Rimane

quindi il termine del potenziale armonico di confinamento sul piano xy. In tal caso, definendo  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ , si ha un potenziale

$$U(\vec{r}) = U(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 \text{ se } r = R\\ +\infty \text{ se } r \neq R \end{cases}$$
(2.6)

L'equazione (2.5) diventa quindi

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2\right]\psi(\vec{r}) = \mathcal{E}\psi(\vec{r}).$$
(2.7)

Si suppone di rappresentare la funzione d'onda a variabili separabili (x,y) e (z), cioè  $\psi(\vec{r}) = \tilde{\psi}(x,y)\psi_3(z)$ . A  $\tilde{\psi}(x,y)$  associamo l'autovalore  $\tilde{\mathcal{E}}$  e a  $\psi_3(z)$  l'autovalore  $\mathcal{E}_3$  tali per cui

$$\mathcal{E} = \mathcal{E} + \mathcal{E}_3$$

Dalla (2.7) si ottiene quindi

$$\psi_3(z)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\tilde{\psi}(x,y)\right] + \tilde{\psi}(x,y)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_3(z)\right] + \tilde{\psi}(x,y)(\frac{1}{2}m\omega^2 z^2)\psi_3(z) = (\tilde{\mathcal{E}} + \mathcal{E}_3)\tilde{\psi}(x,y)\psi_3(z)$$

$$(2.8)$$

Dividendo tutto per  $\tilde{\psi}(x,y)\psi_3(z)$ 

$$\frac{1}{\tilde{\psi}(x,y)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{\psi}(x,y)\right]+\frac{1}{\psi_3(z)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_3(z)\right]+\frac{1}{2}m\omega^2 z^2=(\tilde{\varepsilon}+\varepsilon_3).$$
(2.9)

Da qui si ottengono due diverse equazioni di Schrödinger, una con autovalore  $\tilde{\mathcal{E}}$  e l'altra con  $\mathcal{E}_3$ :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \tilde{\psi}(x, y) = \tilde{\mathcal{E}} \tilde{\psi}(x, y) \\ (-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 z^2) \psi_3(z) = \mathcal{E}_3 \psi_3(z) \end{cases}$$
(2.10)

Per la seconda equazione del sistema (2.10) è stato considerato lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico di autofunzione ([10])

$$\psi_3(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2l_H^2}}}{\pi^{1/4} l_H^{1/2}},\tag{2.11}$$

e il relativo autovalore all'energia  $\mathcal{E}_3 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ . Nell'espressione (2.11) si definisce  $l_H := \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ .

Si procede ora alla risoluzione della prima equazione del sistema (2.10).

Data la formula del Laplaciano in coordinate polari ([2])

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$
(2.12)

la prima equazione di Schrödinger del sistema (2.10) diventa

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\tilde{\psi}(\rho,\theta) = \tilde{\varepsilon}\tilde{\psi}(\rho,\theta)$$
(2.13)

che con $\rho=R$ fissato corrisponde all'equazione nella sola variabile $\theta$ 

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\tilde{\psi}(\theta) = \tilde{\mathcal{E}}\tilde{\psi}(\theta).$$
(2.14)

Una soluzione generica di (2.14) è

$$\tilde{\psi}(\theta) = \psi_0 \left(A e^{i \sqrt{\frac{2mR^2 \tilde{\varepsilon}}{\hbar^2}}\theta} + B e^{-i \sqrt{\frac{2mR^2 \tilde{\varepsilon}}{\hbar^2}}\theta}\right).$$
(2.15)

Si richiede poi la condizione di periodicità  $\tilde{\psi}(0) = 1 \stackrel{!}{=} \tilde{\psi}(2k\pi)$  con  $k \in \mathbb{Z}$  propria di una particella che si muove su una circonferenza. Questa porta ad imporre:

$$\sqrt{\frac{2mR^2\tilde{\mathcal{E}}}{\hbar^2}} \stackrel{!}{=} n, \quad \operatorname{con} n \in \mathbb{N}.$$
(2.16)

I possibili autovalori dell'equazione (2.14) dipendono quindi dal numero quantico  $n \in \mathbb{N}$  e si scrivono come

$$\tilde{\mathcal{E}}_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2}.\tag{2.17}$$

Sostituendo n in (2.15) si ottengono le autofunzioni di autovalore  $\mathcal{E}_n$ 

$$\tilde{\psi}_n(\theta) = \psi_0(Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}) \quad \operatorname{con} n \in \mathbb{N}.$$
(2.18)

Dunque l'energia di una particella vincolata a muoversi su una circonferenza risulta quantizzata dal numero quantico n secondo l'espressione:

$$\mathcal{E}_n = \tilde{\mathcal{E}}_n + \mathcal{E}_3 = \frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2} + \frac{1}{2}\hbar\omega.$$
 (2.19)

Se si indica con N il numero totale di particelle e con  $N_n$  il numero di particelle con energia  $\mathcal{E}_n$ , si trova

$$N = \sum_{n=0}^{+\infty} N_n.$$
 (2.20)

Considerando la statistica di Bose-Einstein e in particolare l'equazione (1.9) della sezione dell'*ensemble* grancanonico

$$N = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{(\epsilon_n - \mu)/(k_B T)} - 1},$$
(2.21)

con  $\mu$  potenziale chimico del sistema.

#### 2.3 Temperatura critica e frazione di condensato

In questa sezione si studieranno gli andamenti di temperatura critica e frazione di condensato definite nella sezione 1.2.

Si può riscrivere l'espressione (2.21), isolando il termine  $N_0 = \frac{1}{e^{(\epsilon_0 - \mu)/(k_B T)} - 1}$ , come

$$N = N_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{(\epsilon_n - \mu)/(k_B T)} - 1}.$$
(2.22)

 $N_0$  rappresenta il numero di bosoni nel condensato, ossia nello stato di energia minima  $\mathcal{E}_0$ .

Le equazioni (2.21) e (2.22) hanno significato solo per  $\mu \leq \mathcal{E}_0$  che è la condizione per la quale i numeri di occupazione di tutti i livelli energetici sono positivi. Se  $\mu = \mathcal{E}_0$  si possono analizzare le caratteristiche del sistema sotto le ipotesi di condensazione di Bose-Einstein.

Nell'ipotesi  $\mu = \mathcal{E}_0$ , dalla (2.22) si ottiene

$$N = N_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2}\right)/(k_B T)} - 1}.$$
(2.23)

Da questa equazione si può calcolare la temperatura critica  $T_c$  sopra la quale il numero  $N_0$  di bosoni nel condensato è nullo. Imponendo infatti  $N_0 = 0$  per  $T = T_c$  si ottiene la relazione:

$$N = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2}\right)/(k_B T_c)} - 1},$$
(2.24)

che descrive il numero di particelle che occupano gli stati energetici.

Una delle tecniche spesso utilizzate per studiare espressioni come la (2.24) è l'approssimazione semiclassica che permette di sostituire un integrale alla sommatoria. In questo modo, andando a risolvere l'integrale trovandone una primitiva, è possibile compiere uno studio analitico del problema.

Nel caso dell'anello però, purtroppo, l'approssimazione semi-classica non rende possibile la risoluzione analitica del problema.

Sostituendo infatti in (2.24) la sommatoria con l'integrale,  $\sum_{1}^{+\infty} \to \int_{1}^{+\infty}$ , si ottiene

$$N = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2}\right)/(k_B T_c)} - 1} dn.$$
 (2.25)

La funzione integranda non è integrabile elementarmente, cioè non si riesce a trovare esplicitamente la primitiva di tale integrale.

Il passaggio all'integrale non semplifica quindi la risoluzione del problema e non permette di trovare un'espressione diretta che leghi N a  $T_c$ .

Si è quindi ritenuto più corretto lavorare sull'equazione (2.24) con la sommatoria, utilizzando il calcolo numerico.

Anche nel caso della riduzione a integrale, si sarebbero dovuti comunque utilizzare metodi numerici di risoluzione e introdurre quindi un doppio errore sistematico (quello dovuto all'approssimazione semiclassica e quello dovuto all'approssimazione numerica).

#### 2.3.1 Calcolo con metodi numerici

Scrivendo l'equazione (2.24) in funzione della densità lineare di particelle  $\lambda := \frac{N}{2\pi R}$  si trova

$$2\pi R\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2}\right)/(k_B T_c)} - 1}.$$
(2.26)

Si definiscono due nuove variabili

$$\tilde{R} := R\lambda = \frac{N}{2\pi},\tag{2.27}$$

$$\tilde{T}_c := k_B T_c / \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m}.$$
(2.28)

Sostituendo (2.27) e (2.28) nell'equazione (2.26) si arriva a

$$\tilde{R} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{n^2}{\bar{T}_c \bar{R}^2}\right)} - 1}.$$
(2.29)

Per trovare la dipendenza di  $\tilde{T}_c$  da  $\tilde{R}$  si definisce  $\alpha := \tilde{T}_c \tilde{R}^2$  e si imposta un sistema parametrico di  $\tilde{T}_c$  e  $\tilde{R}$  al variare di  $\alpha$ 

$$\begin{cases} \tilde{R}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{(\frac{n^2}{\alpha})} - 1} \\ \tilde{T}_c(\alpha) = \frac{\alpha}{\tilde{R}(\alpha)^2} \end{cases}$$
(2.30)

In questo modo, fissato  $\bar{\alpha}$ , si ottiene una coppia di valori  $(\tilde{R}(\bar{\alpha}), \tilde{T}_c(\bar{\alpha}))$  che può essere rappresentata sul piano cartesiano.

L'andamento della temperatura critica riscalata in funzione di  $\lambda R$  è rappresentato nel grafico 2.2.



Figura 2.2: Temperatura critica, riscalata con l'energia  $\frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m}$ , del condensato di Bose-Einstein su una circonferenza in termini di  $\tilde{R} = \lambda R$  dove R è il raggio della circonferenza.

Come ci si aspetta, per densità lineare di particelle fissata la temperatura critica  $T_c$  tende a zero se il raggio R della circonferenza sulla quale sono disposte le particelle tende a infinito.

È però possibile, per ogni valore finito di R, trovare una temperatura critica  $T_c$  finita corrispondente, sotto la quale è presente condensato, come è stato spiegato nella sezione 1.2.

È poi stata calcolata la frazione di condensato  $\frac{N_0}{N}$  (si veda l'equazione (1.22)) per temperature inferiori alla temperatura critica.

Riprendendo l'equazione (2.23) e dividendo per N si ottiene

$$1 = \frac{N_0}{N} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2}\right)/(k_B T)} - 1},$$
(2.31)

 $da \ cui$ 

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2}\right)/(k_B T)} - 1}.$$
(2.32)

Riscrivendo N nel termine di destra attraverso l'espressione dipendente dalla temperatura critica trovata in (1.13), si ricava:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2}\right)/(k_B T)} - 1}}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2}\right)/(k_B T_c)} - 1}}.$$
(2.33)

Si vorrebbe ora poter scrivere l'equazione (2.33) in funzione delle due variabili precedentemente definite  $\tilde{R} \equiv R\lambda$  e  $\tilde{T}_c \equiv k_B T_c / \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m}$ .

I passaggi per esplicitare tali variabili sono semplici ma vengono riportati per completezza.

$$\frac{N_{0}}{N} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^{2}n^{2}}{2mR^{2}}\right)/(k_{B}T)} - 1}}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^{2}n^{2}}{2mR^{2}}\right)/(k_{B}T_{c})} - 1}} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^{2}n^{2}}{2mR^{2}}\right)/(k_{B}T_{c})} - 1}}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^{2}n^{2}}{2mR^{2}}\right)/(k_{B}T_{c})} - 1}} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^{2}n^{2}\lambda^{2}}{2mR^{2}\lambda^{2}}\right)/(k_{B}T_{c})} - 1}} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^{2}n^{2}\lambda^{2}}{2mR^{2}\lambda^{2}}\right)/(k_{B}T_{c})} - 1}}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^{2}n^{2}\lambda^{2}}{2mR^{2}\lambda^{2}}\right)/(k_{B}T_{c})} - 1}} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^{2}n^{2}\lambda^{2}}{2mR^{2}\lambda^{2}}\right)/(k_{B}T_{c})} - 1}}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^{2}n^{2}\lambda^{2}}{2mR^{2}\lambda^{2}}\right)/(k_{B}T_{c})} - 1}} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^{2}n^{2}\lambda^{2}}{2mR^{2}\lambda^{2}}\right)/(k_{B}T_{c})} - 1}}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^{2}n^{2}\lambda^{2}}{2mR^{2}\lambda^{2}}\right)/(k_{B}T_{c})} - 1}}} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^{2}n^{2}\lambda^{2}}{2mR^{2}\lambda^{2}}\right)/(k_{B}T_{c})} - 1}}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar^{2}n^{2}\lambda^{2}}{2mR^{2}\lambda^{2}}\right)/(k_{B}T_{c})} - 1}}}$$

dove si sono opportunamente moltiplicati gli argomenti delle sommatorie per  $\frac{T_c}{T_c}$  e  $\frac{\lambda^2}{\lambda^2}$ .

A questo punto si possono individuare negli esponenti delle sommatorie le variabili (2.27) e (2.28). Sostituendo quindi  $\tilde{R}$  a  $R\lambda$  e  $\tilde{T}_c$  a  $k_B T_c / \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m}$  si ottiene l'espressione cercata

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{n^2}{\tilde{T}_c \tilde{R}^2 \frac{T}{T_c}}\right)}}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{n^2}{\tilde{T}_c \tilde{R}^2}\right)} - 1}}.$$
(2.35)

Nel grafico seguente è raffigurato l'andamento della frazione di condensato  $\frac{N_0}{N}$  in funzione della temperatura riscalata  $\frac{T}{T_c}$ , per diversi valori fissati di  $\tilde{R} = \lambda R$ .

Si noti che dal grafico 2.2 si può ricavare un valore di  $\tilde{T}_c$  per ogni  $\tilde{R} > 0$ . Dunque, per ogni valore fissato di  $\tilde{R}$  nel grafico 2.3, è fissata anche la  $\tilde{T}_c$  corrispondente.



Figura 2.3: Frazione di condensato  $\frac{N_0}{N}$  di bosoni non interagenti disposti su una circonferenza in termini della temperatura riscalata  $\frac{T}{T_c}$ 

In figura 2.3 è rappresentato l'andamento della frazione di condensato  $\frac{N_0}{N}$  in funzione di  $\frac{T}{T_c}$  per diversi valori del parametro  $\tilde{R} = \lambda R$ . Sperimentalmente si può variare  $\tilde{R}$  semplicemente cambiando il numero totale di particelle N o il raggio R ad una densità lineare fissata  $\lambda$ .

### Capitolo 3

# La superficie toroidale come configurazione di confinamento

Il problema affrontato nelle sezioni precedenti riguardante bosoni vincolati a stare sulla circonferenza è una *semplificazione* del caso reale. Infatti sperimentalmente non si possono creare sistemi perfettamente unidimensionali. Per uno studio più completo e realistico della condensazione di Bose-Einstein su un anello risulta interessante analizzare come configurazione una superficie toroidale.

Per studiare il *Bose-Einstein Condensate* si devono seguire gli stessi passaggi utilizzati nelle sezioni precedenti.

In particolare si deve risolvere l'equazione di Scrhödinger del sistema e trovare la quantizzazione dell'energia. In questo capitolo ci si propone di impostare il problema e di evidenziarne le difficoltà di risoluzione.

### 3.1 Coordinate toroidali

Il toro è un solido ottenuto dalla rotazione di un cerchio di raggio r attorno ad un asse che appartiene allo stesso piano del cerchio ma disgiunto da esso (Figura 3.1).

Supponendo che il cerchio di raggio r stia su un piano parallelo all'asse z e ruoti attorno all'asse z, l'equazione cartesiana della superficie toroidale è

$$(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2, \tag{3.1}$$

dove R (indicato in Figura 3.1) indica il *raggio di rotazione*, cioè la distanza del centro del cerchio di raggio r dall'asse di rotazione.

La rappresentazione parametrica più immediata della superficie toroidale è quella descritta da

 $\left\{ \begin{array}{l} x(p,t)=(R+r\cos p)\cos t\\ y(p,t)=(R+r\cos p)\sin t\\ z(p,t)=r\sin p \end{array} \right.$ 



Figura 3.1: Toro

con p e t che variano tra 0 e  $2\pi$ . Guardando la figura si nota che facendo variare p, a t fissato, si ottengono i punti della circonferenza di una sezione del toro.

Fissando invece p e variando t si ottengono le circonferenze che giacciono sulla superficie toroidale, il cui piano di appartenenza è perpendicolare all'asse di rotazione.

Il sistema di coordinate che verrà considerato sarà però un altro, più adatto per la risoluzione dell'equazione di Schrödinger. Per ottenere il sistema di coordinate richiesto bisogna fare uso delle coordinate bipolari del piano.

Le coordinate bipolari formano un sistema di coordinate bidimensionale.



Figura 3.2: Coordinate bipolari

Si veda la figura (3.2). Il sistema si basa sull'individuazione di due fuochi  $F_1 \in F_2$ . Per descrivere la posizione di un generico punto P si utilizza la coordinata  $\sigma$ , definita come l'angolo  $F_1 \hat{P} F_2 \in \tau = ln \frac{d_1}{d_2}$  con  $d_1 \in d_2$  che sono le distanze del punto P rispettivamente da  $F_1 \in F_2$ .

Si suppone che nel sistema cartesiano le coordinate dei fuochi siano (-a, 0) e (0, a). Allora le coordinate bipolari parametrizzano così le coordinate cartesiane ([7]):

$$\begin{cases} x = a \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \\ y = a \frac{\sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma} \end{cases}$$
(3.2)

Il sistema di coordinate che viene considerato per descrivere la superficie toroidale nello spazio 3-D si basa sulla rotazione delle coordinate bipolari attorno all'asse che separa i due fuochi. Le coordinate toroidali ( $\sigma, \tau, \phi$ ) sono definite in questo modo ([12]):

$$\begin{cases} x = a \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \cos \phi \\ y = a \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \sin \phi \\ z = a \frac{\sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma} \end{cases}$$
(3.3)

e gli intervalli sui quali variano sono  $-\pi < \sigma \le \pi$ ,  $\tau > 0$  e  $0 \le \phi < 2\pi$ . Ad ogni valore della variabile  $\tau = T$  corrisponde una superficie toroidale.

Infatti scrivendo  $R \in r$  in coordinate toroidali si ottiene

$$R = a \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau},\tag{3.4}$$

$$r = \frac{a}{\sinh \tau}.$$
(3.5)

Una volta fissato  $\tau = T$ , i due raggi sono quindi determinati. Inoltre R e r definiscono univocamente il toro, a meno di traslazioni nello spazio tridimensionale.

Si possono poi sostituire le espressioni (3.3) , (3.4) e (3.5) nell'equazione (3.1) in modo da verificar ne l'uguaglianza

$$\left(a\frac{\cosh\tau}{\sinh\tau} - a\frac{\sinh\tau}{\cosh\tau - \cos\sigma}\right)^2 + \frac{a^2\sin^2\sigma}{(\cosh\tau - \cos\sigma)^2} = \frac{a^2}{\sinh^2\tau}.$$
(3.6)

Sviluppando il quadrato e ponendo tutto a comune denominatore si ottiene

$$\frac{\cosh^2 \tau + \cos^2 \sigma - 2\cosh \tau \cos \sigma + \sinh^2 \tau - 2\cosh^2 \tau + 2\cosh \tau \cos \sigma + \sin^2 \sigma}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2} = 0.$$
(3.7)

Utilizzando le proprietà di sin, cos, sinh e cosh, si nota che l'uguaglianza è verificata.

#### 3.2 Equazione di Schrödinger e quantizzazione dell'energia

Con conti abbastanza complessi si può dimostrare che l'operatore Laplaciano in coordinate toroidali ([12]) si scrive come

$$\nabla^2 f = \frac{(\cosh \tau - \cos \sigma)^3}{a^2 \sinh \tau} \left[ \sinh \tau \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{\cosh \tau - \cos \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{\sinh \tau (\cosh \tau - \cos \sigma)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right].$$
(3.8)

Si può quindi provare a risolvere l'equazione di Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\tau,\phi,\sigma)\right]\psi(\tau,\phi,\sigma) = E\psi(\tau,\phi,\sigma),\tag{3.9}$$

dove

$$U(\tau, \phi, \sigma) = \begin{cases} 0 \text{ se } \tau = T \\ +\infty \text{ altrove} \end{cases}$$
(3.10)

che è la condizione affinche le particelle siano vincolate a muoversi sulla superficie toroidale con  $\tau = T$ .

L'operatore Laplaciano è notevolmente semplificato dal fatto che  $\tau$  è costante sulla superficie di un toro, e questo significa che il termine con le derivate parziali rispetto a  $\tau$  si annulla. Inoltre si considera una funzione d'onda fattorizzabile

$$\psi(T,\phi,\sigma) = \hat{\psi}(\phi)\psi(\sigma) \tag{3.11}$$

(si ricordi che T è fissato). La (3.9) diventa quindi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(\cosh T - \cos \sigma)^3}{a^2 \sinh T} [\hat{\psi} \sinh T \frac{\partial}{\partial \sigma} (\frac{1}{\cosh T - \cos \sigma} \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \sigma}) + \frac{\widetilde{\psi}}{\sinh T (\cosh T - \cos \sigma)} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \phi^2}] = E\hat{\psi}\widetilde{\psi}.$$
(3.12)

Dividendo entrambi i membri per  $\hat{\psi}\widetilde{\psi}$ e con passaggi successivi si arriva a

$$\left[\frac{(\cosh T - \cos \sigma)}{\widetilde{\psi}} \sinh T \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{\cosh T - \cos \sigma} \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \sigma}\right) + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{Ea^2 \sinh T}{(\cosh T - \cos \sigma)^2} + \frac{1}{\widehat{\psi} \sinh T} \frac{\partial^2 \widehat{\psi}}{\partial \phi^2}\right] = 0. \quad (3.13)$$

Si nota che i primi due addendi dipendono da  $\sigma$  e non da  $\phi$  mentre il terzo dipende solo da  $\phi$ . Quindi se si deriva rispetto a  $\sigma$  o rispetto a  $\phi$  si trova che, rispettivamente, la somma dei primi due addendi (A) e il terzo termine (B) sono costanti. Inoltre, dato che A + B = 0, se  $A = k^2$  allora  $B = -k^2.$ 

Si può quindi dividere in due l'equazione di Schrödinger. In particolare per il termine dipendente da  $\phi$  si ottiene

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \phi^2} = -k^2 \sinh T \hat{\psi}, \qquad (3.14)$$

da cui si ricava facilmente

$$\hat{\psi}(\phi) = A e^{ik\sqrt{\sinh T}\phi} + B e^{-ik\sqrt{\sinh T}\phi}.$$
(3.15)

 $(\sqrt{\sinh T}$  è ben definita poichè  $\tau \ge 0$ ).

Per il primo termine invece il procedimento è più complicato. Si arriva infatti ad avere un'equazione differenziale del tipo

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{c(T,\sigma)}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\sigma}\right) - \left(\frac{2mEa^2}{\hbar^2 c(T,\sigma)^3} + \frac{k^2}{c(T,\sigma)\sinh T}\right)\widetilde{\psi} = 0.$$
(3.16)

dove è stata definita la funzione  $c(T, \sigma) := \cosh T - \cos \sigma$ . Si ricordi che nel dominio di definizione delle variabili vale sempre  $c(T, \sigma) \neq 0$ .

Sviluppando la prima derivata in (3.16) si ottiene

$$\frac{1}{c(T,\sigma)}\frac{\partial^2 \widetilde{\psi}}{\partial \sigma^2} + \left(\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{1}{c(T,\sigma)}\right)\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \sigma} - \left(\frac{2mEa^2}{\hbar^2 c(T,\sigma)^3} + \frac{k^2}{c(T,\sigma)\sinh T}\right)\widetilde{\psi} = 0.$$
(3.17)

Tale equazione è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea con coefficienti che dipendono da  $\sigma$  attraverso le potenze di  $c(T, \sigma)$  e le sue derivate rispetto a  $\sigma$ .

Se riusciamo a trovare due soluzioni linearmente indipendenti  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , allora tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono del tipo

$$\widetilde{\psi} = C_1 \widetilde{\psi}_1 + C_2 \widetilde{\psi}_2, \tag{3.18}$$

con  $C_1$  e  $C_2$  costanti arbitrarie. Per capire se due soluzioni sono linearmente indipendenti in un intervallo I si calcola il Wronskiano, cioè il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\psi}_1(\sigma) & \widetilde{\psi}_2(\sigma) \\ \widetilde{\psi}'_1(\sigma) & \widetilde{\psi}'_2(\sigma) \end{bmatrix}.$$

Se il determinante di tale matrice è diverso da zero per ogni  $\sigma \in I$  allora le due funzioni  $\psi_1$  e  $\tilde{\psi}_2$  sono linearmente indipendenti e generano l'integrale generale dell'equazione (3.18). Per ulteriori approfondimenti si veda [5].

Si vorrebbe seguire lo stesso procedimento della sezione 3.2, cioè trovare le autofunzioni per l'equazione (3.12) e successivamente la quantizzazione dell'energia del sistema, per poi inserirla all'interno delle formule della Meccanica Statistica di Bose-Einstein (1.9) e (1.10).

Tuttavia questo non è possibile poichè l'equazione (3.17) non è risolvibile. Pertanto non si possono trovare soluzioni all'equazione di Schrödinger (3.13) e quindi ricavare un'espressione analitica per l'energia quantizzata.

## Conclusioni

In questo lavoro di tesi sono state inizialmente descritte le proprietà della meccanica statistica di gas quantistici, concentrandosi sul caso dell'*ensemble grancanonico* e in particolare su sistemi di atomi bosonici.

La statistica di Bose-Einstein comporta come risultato fondamentale un nuovo stato di materia, il condensato di Bose-Einstein. Si è dunque approfondita l'origine di tale transizione di fase, analizzandola nello spazio tridimensionale. Poichè sperimentalmente si verifica la possibilità di condensazione anche per sistemi di dimensione inferiore (1D e 2D), è stato studiato un sistema di bosoni non interagenti su una circonferenza. Applicando al sistema le regole basilari della meccanica quantistica e utilizzando le formule della statistica di Bose-Einstein, si sono ricavati gli andamenti di temperatura critica e frazione di condensato del sistema.

Successivamente si è provato ad analizzare un sistema di particelle quantistiche vincolate a muoversi su una superficie toroidale. Tale analisi è stata introdotta con l'intento di avvicinarsi al caso reale, poichè nella realtà non è possibile realizzare un sistema puramente unidimensionale. È stato individuato un opportuno sistema di coordinate per descrivere la superficie toroidale, con il quale si è impostata l'equazione di Schrödinger del sistema.

Desidero ringraziare il professor Luca Salasnich per la straordinaria e costante disponibilità con cui mi ha seguito in questo percorso di tesi.

## Bibliografia

- M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(5221):198–201, 1995.
- [2] G. Arfken. Mathematical Methods for Physicists. Academic Press, 1985.
- [3] P. Atkins and J. De Paula. *Chimica Fisica*. Zanichelli, 2004.
- [4] D. Becker, M. D. Lachmann, S. T. Seidel, H. Ahlers, A. N. Dinkelaker, J. Grosse, O. Hellmig, H. Müntinga, V. Schkolnik, T. Wendrich, et al. Space-borne bose–einstein condensation for precision interferometry. *Nature*, 562(7727):391, 2018.
- [5] M. Bramanti, C. D. Pagani, and S. Salsa. Analisi matematica 2. Zanichelli, 2009.
- [6] E. R. Elliott, M. C. Krutzik, J. R. Williams, R. J. Thompson, and D. C. Aveline. Nasa's cold atom lab (cal): system development and ground test status. *npj Microgravity*, 4(1):16, 2018.
- M. Hazewinkel. Bipolar coordinates, Encyclopedia of Mathematics. Springer Science+Business Media B.V. / Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [8] K. Huang. Statistical Mechanics. John Wiley Sons, 1963.
- [9] A. Jackson and G. Kavoulakis. Lieb mode in a quasi-one-dimensional boseeinstein condensate of atoms. *Physical review letters*, 89(7):070403, 2002.
- [10] K. Konishi and G. Paffuti. Meccanica Quantistica: Nuova introduzione. Pisa University Press, 2012.
- [11] N. D. Mermin and H. Wagner. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or two-dimensional isotropic heisenberg models. *Physical Review Letters*, 17(22):1133, 1966.
- [12] P. Moon and D. E. Spencer. Field theory handbook: including coordinate systems, differential equations and their solutions. Springer, 2012.

- [13] N. Murray, M. Krygier, M. Edwards, K. Wright, G. Campbell, and C. W. Clark. Probing the circulation of ring-shaped bose-einstein condensates. *Physical Review A*, 88(5):053615, 2013.
- [14] L. Pitaevskii and S. Stringari. Bose-Einstein Condensation. Clarendon Press, 2003.
- [15] A. Posazhennikova. Colloquium: Weakly interacting, dilute bose gases in 2d. Reviews of modern physics, 78(4):1111, 2006.
- [16] M. Tomchenko. Bose–einstein condensation in a one-dimensional system of interacting bosons. *Journal of Low Temperature Physics*, 182(5-6):170–184, 2016.
- [17] A. Tononi and L. Salasnich. Bose-einstein condensation on the surface of a sphere. 2019.