

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Magistrale in Matematica.

Integrability and the intersection theory of the moduli space of curves.

Relatore:
Prof. Paolo Rossi

Laureando: Alessandro Ferreri
Matricola: 2017867

Anno Accademico 2022/2023

23 Aprile 2023

Indice

1	Sistemi hamiltoniani integrabili infinito-dimensionali.	7
1.1	Spazio formale dei loop.	8
1.2	Algebra delle funzioni su \mathcal{L}	12
1.3	Gerarchie hamiltoniane integrabili.	17
2	Spazio dei moduli delle curve stabili e la sua struttura di orbifold.	23
2.1	Spazio dei moduli delle curve di genere g con n punti marcati.	24
2.2	Orbifold complesso liscio.	25
2.3	$\mathcal{M}_{g,n}$ come orbifold.	30
2.4	Compattificazione di Deligne-Mumford.	32
2.5	Un esempio di orbifold non banale: $\mathcal{M}_{1,1}$	35
3	Teoria di Chern-Weil per Orbifold.	43
3.1	Da varietà a orbivarietà.	44
3.2	Connessioni e curvatura per Orbibundle.	55
3.3	Invarianti di curvatura.	63
3.4	Classi di Chern.	66
3.5	Line orbibundle e divisori.	69
4	Coomologia di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.	73
4.1	Anello tautologico.	74
4.2	Classi tautologiche rilevanti.	76
4.3	Cohomological field theories.	83
5	Relazioni fra sistemi hamiltoniani integrabili e teoria delle intersezioni in $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.	89
5.1	Genere zero.	90
5.2	Genere arbitrario.	98
5.2.1	Preliminari geometrici.	98
5.2.2	Double ramification hierarchy.	105
5.3	Motivazioni per lo studio della gerarchia-DR.	112

Introduzione.

Lo spazio dei moduli delle curve di genere g con n punti marcati, indicato con $\mathcal{M}_{g,n}$, è un insieme topologico che classifica le superfici di Riemann compatte di genere g , a meno di biolomorfismi che preservino l'ordine dei punti marcati. Esso, e soprattutto la sua compattificazione, indicata con $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, sono stati e continuano ad essere oggetto di studio nell'ambito della geometria algebrica.

Come evidente dalla sua definizione, $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è un oggetto matematico molto astratto. Viceversa, la teoria dei sistemi integrabili infinito-dimensionali è, per il suo naturale legame con la fisica, un ambito con una connotazione più applicativa. In virtù di questa differenza, l'esistenza di una connessione fra queste due aree della matematica, all'apparenza così separate, genera spesso un certo stupore.

Il primo celebre ponte fra la teoria dei sistemi integrabili e la teoria delle intersezioni nello spazio dei moduli delle curve è sicuramente la congettura di Witten, del 1992, dimostrata poi da Kontsevich nel 1993. Witten suppose che una specifica funzione generatrice del numero di intersezioni fra alcune classi di coomologia di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ coincidesse con la tau-function associata alla soluzione topologica della gerarchia KdV: una funzione che codifica l'informazione sull'evoluzione delle hamiltoniane di un noto sistema integrabile infinito-dimensionale. La dimostrazione della congettura generò un certo clamore, e diede il via all'esplorazione dei legami fra l'anello di coomologia di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ ed i sistemi integrabili.

Il linguaggio delle *cohomological field theories* - o, più brevemente, delle *CohFT* - permette di inserire quanto dimostrato da Kontsevich in un contesto più generale. Dato un \mathbb{Q} -spazio vettoriale V , una cohomological field theory a valori in V è essenzialmente un sistema di tensori

$$c_{g,n} \in H^{2n}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \otimes V^{\otimes n}$$

che soddisfi uno specifico insieme di assiomi. Ad ogni CohFT è associata una funzione detta *potenziale*. Nel 2005 Dubrovin e Zhang introdussero quella che oggi prende il nome di gerarchia-DZ: essa è essenzialmente un modo di associare ad una cohomological field theory semisemplice un sistema integrabile infinito-dimensionale, che soddisfi una proprietà di simmetria, detta *tau-simmetria*. Tale costruzione gode della proprietà che la tau-function

della soluzione topologica della gerarchia ottenuta coincide sempre con il potenziale della CohFT da cui essa è generata. In questo nuovo linguaggio, la funzione generatrice oggetto della congettura di Witten è il potenziale della CohFT banale, e il risultato di Kontsevich dimostra che la gerarchia-DZ associata alla CohFT banale è esattamente la gerarchia KdV.

La costruzione di cui tratteremo in questa tesi, la *double ramification hierarchy*, o gerarchia-DR è, analogamente alla gerarchia-DZ, un modo per associare ad ogni CohFT un sistema integrabile tau-simmetrico. Essa è stata introdotta da Buryak nel 2015, e la sua relazione con la gerarchia-DZ è tutt'ora oggetto di studio e di congetture.

In particolare, a differenza della gerarchia-DZ, la gerarchia-DR non richiede l'ipotesi di semisemplicità sulla CohFT di partenza, e si presenta per questo come una costruzione più generale della precedente. Inoltre, essa dà sempre luogo ad un sistema hamiltoniano in forma standard. D'altro canto, però, non gode della proprietà che la tau-function della soluzione topologica della gerarchia prodotta coincide con il potenziale della CohFT da cui essa è generata.

L'obiettivo di questa tesi è introdurre la gerarchia-DR, assieme a tutto il materiale preliminare necessario a comprenderne la costruzione.

In particolare, nel primo capitolo introduciamo il formalismo dei sistemi hamiltoniani integrabili infinito-dimensionali. Nel secondo capitolo introduciamo lo spazio dei moduli delle curve, ed esponiamo brevemente la sua compattificazione e la sua struttura di *orbifold* - una generalizzazione della struttura di varietà dove le carte locali sono quozienti di aperti contraibili per l'azione di un gruppo finito.

Il terzo capitolo, che è un po' più tecnico dei precedenti, tratta della teoria di Chern-Weil per orbifold, ed introduce le classi di Chern per *orbibundle* - il corrispettivo per orbifold dei fibrati vettoriali lisci.

Nel quarto capitolo esponiamo alcuni strumenti centrali nello studio dell'anello di coomologia di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, fra cui le cohomological field theories. Quest'ultime saranno poi essenziali nel quinto capitolo, dove introdurremo finalmente la gerarchia-DR e ne dimostreremo la validità della costruzione la tau-simmetria.

Capitolo 1

Sistemi hamiltoniani integrabili infinito-dimensionali.

In questo capitolo introdurremo i sistemi hamiltoniani integrabili infinito-dimensionali ed alcune delle loro proprietà basilari. Essi sono uno specifico tipo di sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali.

Nella prima sezione daremo una breve introduzione alla teoria da un punto di vista variazionale, per poi passare, nella seconda sezione, ad un punto di vista algebrico, più consono agli scopi di questa tesi.

Il materiale presentato nella prima sezione è interamente tratto da [5], mentre il materiale presentato nelle sezioni successive è tratto da [7], [2] e [1].

1.1 Spazio formale dei loop.

Lo spazio delle fasi che intendiamo considerare è lo spazio delle mappe formali dal cerchio S^1 ad uno spazio affine n -dimensionale. Precisamente definiamo lo **spazio formale dei loop** come

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) := \{u : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^N\}.$$

Tali mappe sono dette "formali" in relazione allo spazio di funzioni che intendiamo considerare su \mathcal{L} . In effetti le mappe u andrebbero viste principalmente come uno strumento notazionale utile alla definizione della teoria che studieremo, che avverrà interamente al livello dello spazio delle funzioni. Tale spazio è quello dei funzionali locali della forma

$$F[u] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, u, u_1, u_2 \dots) dx$$

dove u_k rappresenta la k -esima derivata di u . Nel seguito, denoteremo con u_i^α la k -esima derivata dell' α -esima componente di u , per $\alpha = 1, \dots, n$. Nella formula precedente, f è un **polinomio differenziale**, ovvero una funzione polinomiale nelle variabili u_k^α per $k > 0$, che è una serie di potenze nelle variabili x e u_0^α . Il termine "formale" adottato nella definizione di \mathcal{L} si riferisce appunto al fatto che verrà trascurata la convergenza di tali serie di potenze.

Adottiamo la seguente notazione per la derivata totale in x :

$$\partial_x f := \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{\alpha, k} \frac{\partial f}{\partial u_k^\alpha} u_{k+1}^\alpha$$

Si noti che, se esiste un polinomio differenziale g tale che $\partial_x g = f$, si ha

$$F[u] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[u] dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_x g[u] dx = 0.$$

Parentesi di Poisson.

Lo spazio di funzioni di \mathcal{L} può essere dotato di una struttura di algebra di Poisson, ovvero di un'operazione binaria, bilineare, antisimmetrica, che soddisfi la regola di Leibnitz e l'identità di Jacobi. Precisamente tale operazione, detta **parentesi di Poisson**, assumerà la seguente forma

$$\{F, G\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta F}{\delta u^\alpha(x)} \{u^\alpha(x), u^\beta(y)\} \frac{\delta G}{\delta u^\beta(y)} dx dy$$

dove

- $F[u] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[u] dx$ e $G[u] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g[u] dx$ sono due funzionali locali su \mathcal{L} , relativi a due polinomi differenziali f e g .

- $\frac{\delta F}{\delta u^\alpha(x)} := \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \partial_x^s \frac{\partial f}{\partial u_s^\alpha}$,
- $\{u^\alpha(x), u^\beta(y)\} := \sum_{s=0}^{\infty} b_s^{\alpha\beta} \delta_y^{(s)}(x)$, dove $b_s^{\alpha\beta}$ sono opportuni polinomi differenziali e $\delta_y^{(s)}(x)$ rappresenta la derivata s -esima della distribuzione formale delta centrata in y , definita dalle seguenti proprietà

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[u] \delta_y^{(s)} dx := (-\partial_x)^s f[u] \Big|_{x=y}, \quad \delta_y(x) = \delta_0(x-y) = \delta_x(y).$$

Si noti che, dopo l'azione della funzione delta, l'integrale doppio nella definizione delle parentesi di Poisson si riduce ad un unico integrale, e questo rende evidente che il risultato dell'operazione è un funzionale locale della forma desiderata.

Ovviamente, imporre che le parentesi di Poisson siano antisimmetriche, e che rispettino la regola di Leibnitz e l'identità di Jacobi, impone delle restrizioni ai polinomi differenziali $b_s^{\alpha\beta}$, ma non le analizzeremo nel dettaglio.

Notiamo infine che, coerentemente con le espressioni precedenti, è possibile definire anche la parentesi di Poisson fra un polinomio differenziale f ed un funzionale locale G come

$$\{f, G\} := \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial u_s^\alpha} \partial_x^s \left(\{u^\alpha(x), u^\beta(y)\} \frac{\delta G}{\delta u^\beta(y)} \right) dy.$$

Il risultato di tale operazione, considerata l'azione delle funzioni $\delta_y(x)^{(s)} = (-1)^s \delta_x(y)^{(s)}$, è un polinomio differenziale.

Serie formale di Fourier.

Nelle sezioni successive descriveremo più precisamente i cambi di variabili che siamo disposti a considerare nello spazio delle fasi \mathcal{L} , ma vi è una trasformazione che è di particolare rilevanza per la teoria, e la presentiamo in questa sezione. Tale trasformazione rappresenta il passaggio dalla funzione u alla sua serie di Fourier formale. Nuovamente il termine "formale" si riferisce al fatto che, coerentemente con quanto fatto in precedenza, non intendiamo preoccuparci della convergenza della serie.

Precisamente, oltre all'insieme di variabili formali dato da $u_0, u_1, u_2 \dots$, intendiamo considerare un altro insieme di variabili formali, $\{p_k^\alpha\}_{k \in \mathbb{Z}, \alpha \leq N}$, che rappresentano i coefficiente della serie di Fourier di u :

$$u^\alpha(x) := p_0^\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^N (p_k^\alpha e^{ikx} + p_{-k}^\alpha e^{-ikx}).$$

La formula precedente, assieme alle sue derivate totali, va interpretata come un cambio di coordinate dalle variabili $\{p_k^\alpha\}_{k \in \mathbb{Z}, \alpha \leq N}$ alle variabili $u_0, u_1, u_2 \dots$.

Il cambio di coordinate inverso è descritto tramite i seguenti funzionali locali

$$p_k^\alpha := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^\alpha(x) e^{ikx} dx$$

Un generico funzionale $F[u]$ è descritto in queste variabili da un polinomio infinito nelle variabili $\{p_k^\alpha\}_{k \in \mathbb{Z}, \alpha \leq N}$. La funzione $\delta_y(x)$ è rappresentata dalla seguente serie

$$\delta_x(y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ik(x-y)}.$$

Dall'espressione precedente e dalle sue derivate è possibile calcolare il valore di $\{p_k^\alpha, p_h^\beta\}$.

Campi vettoriali hamiltoniani.

I campi vettoriali sullo spazio \mathcal{L} sono della seguente forma

$$a = a^0 \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\beta, k} a_k^\beta \frac{\partial}{\partial u_k^\beta}$$

e la loro azione su un generico funzionale locale $F[u] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[u] dx$ è definita da

$$a(F)[u] := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(f)[u] dx.$$

Il nostro studio si restringerà a campi vettoriali **evoluzionari**, ovvero tali che $a^0 = 0$ e $[a, \partial_x] = 0$. È possibile mostrare con un calcolo diretto che tali campi sono tutti della forma

$$a = \sum_{k, \beta} \partial_x^k a^\beta \frac{\partial}{\partial u_k^\beta}$$

per opportuni polinomi differenziali a^1, \dots, a^N . Nel caso in cui tali polinomi non dipendano esplicitamente dalla variabile x , ovvero nel caso in cui $\frac{\partial a^\beta}{\partial x} = 0$, il campo vettoriale è detto **invariante per traslazione**.

In linea con quanto accade nella teoria classica della meccanica hamiltoniana, dove un campo vettoriale X è detto hamiltoniano se esiste una funzione h tale che $X(f) = \{f, h\}$ per ogni funzione f , diamo la seguente definizione

Definizione 1 (Campo vettoriale hamiltoniano.). Un campo vettoriale evoluzionario $a = \sum_{k, \alpha} \partial_x^k a^\alpha \frac{\partial}{\partial u_k^\alpha}$ su \mathcal{L} si dice hamiltoniano se esiste un funzionale locale $H[u] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h[u] dx$ tale che

$$a^\alpha = \{u^\alpha, H\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{u^\alpha(x), u^\beta(y)\} \frac{\delta H}{\delta u^\beta(y)} dy.$$

Tale campo vettoriale viene detto campo vettoriale hamiltoniano di $H[u]$

Un campo vettoriale evolutivo può essere visto come un sistema di PDE per le funzioni u^α . Precisamente, consideriamo una curva in \mathcal{L} descritta dalla funzione $u = u(x, t)$. Indichiamo con u_t^α la derivata nella variabile t della componente α -esima di tale funzione. Dato un campo vettoriale evolutivo a come sopra definito, è ad esso associato il seguente sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali

$$u_t^\alpha = a^\alpha[u], \quad \alpha \leq N$$

In particolare nel caso in cui a sia il campo associato al funzionale hamiltoniano $H[u]$ definito come sopra, le equazioni hanno la seguente forma

$$u_t^\alpha(x, t) = \{u^\alpha, H\}[u(x, t)].$$

Chiameremo sistemi di PDE di questo tipo **sistemi hamiltoniani infinito-dimensionali** o **PDE hamiltoniane evolutive**.

Spazio formale dei loop esteso.

Al fine di avere una variabile formale in più, utile a tenere traccia del numero di derivate in x , adottiamo il seguente riscaldamento della variabile x e della variabile t :

$$x \mapsto \frac{x}{\epsilon}, \quad t \mapsto \frac{t}{\epsilon}.$$

Il limite $\epsilon \rightarrow 0$ è detto "long wavelength limit", in relazione al suo effetto sulle soluzioni delle PDE hamiltoniane. Coerentemente, anche la funzione δ viene riscalata come $\delta_y(x) \mapsto \frac{1}{\epsilon} \delta_y(x)$.

A seguito di tale riscaldamento, un generico funzionale locale assume la seguente forma, polinomiale in ϵ

$$F[u] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x, u, \dots, u_k) \epsilon^k \right) dx$$

dove, assegnando grado k alle variabili u_k^α , f_k ha grado k . Teoricamente, i polinomi differenziali, ovvero quelli all'interno della sommatoria della formula precedente, dovrebbero essere definitivamente nulli. Considereremo pertanto, invece che il solo spazio dei polinomi differenziali, lo **spazio dei polinomi differenziali esteso**, dove accettiamo polinomi differenziali della forma precedente, senza la condizione che i polinomi f_k siano definitivamente nulli. Da qui in poi ometteremo il termine "esteso" e ci riferiremo ad essi semplicemente come polinomi differenziali.

Una generica parentesi di Poisson, a seguito di questo riscaldamento, assume la forma

$$\{u^\alpha(x), u^\beta(y)\} = \frac{1}{\epsilon} h^{\alpha\beta}(u) \delta_y(x) + g^{\alpha\beta}(u) \delta_y'(x) + \sum_{\gamma=1}^n b_\gamma^{\alpha\beta}(u) u_1^\gamma \delta_y(x) + O(\epsilon).$$

Una parentesi in questa forma si dice di **tipo idrodinamico** se il termine $\frac{1}{\epsilon}$ scompare. Da qui in poi, considereremo solamente parentesi di tipo idrodinamico. In questo caso, vale il seguente

Teorema 1. *Sia*

$$\{u^\alpha(x), u^\beta(y)\} = g^{\alpha\beta}(u)\delta_y(x) + \sum_{\gamma=1}^n b_\gamma^{\alpha\beta}(u)u_1^\gamma \delta_y(x) + O(\epsilon).$$

una parentesi di Poisson di tipo idrodinamico, allora

(i) $g^{\alpha\beta}$ è simmetrica,

(ii) se $g^{\alpha\beta}$ è non degenere, allora è una metrica piatta e $\Gamma_\gamma^{\alpha\beta} = -\sum_{\mu=1}^n g^{\alpha\mu}b_{\mu\gamma}^\beta$ sono i suoi simboli di Christoffel.

Nel seguito tutte le parentesi che considereremo saranno del tipo (ii). In tale caso, in particolare, scegliendo delle coordinate piatte per la metrica $g^{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ viene mappato in una matrice costante $\eta^{\alpha\beta}$, mentre i termini $b_{\alpha\beta}^\gamma$ svaniscono. Nella prossima sezione vedremo che, ammettendo un insieme di cambi di coordinate più ampio, le trasformazioni di Miura, è possibile far svanire anche la coda $O(\epsilon)$, e tutte le parentesi di tipo idrodinamico assumeranno la forma standard

$$\{u^\alpha(x), u^\beta(y)\} = \eta^{\alpha\beta}\delta_y(x).$$

1.2 Algebra delle funzioni su \mathcal{L} .

In questa sezione analizzeremo l'algebra di Poisson dello spazio delle fasi esteso di \mathcal{L} più nel dettaglio, adottando un formalismo differente. In particolare, coerentemente con la scelta fatta di considerare solamente serie "formali", è opportuno adottare una descrizione dello spazio dei funzionali locali esteso di tipo algebrico, piuttosto che variazionale. Occupiamoci pertanto prima di tutto di tradurre quanto discusso nella sezione precedente in termini algebrici.

Nel seguito adotteremo la notazione della contrazione degli indici per tutti gli indici indicati con lettere greche. Inoltre scriveremo $*$ per indicare ad apice e pedice la presenza di qualsiasi indice ammissibile. Per esempio, al posto di $f(u, u_1, u_2 \dots)$ scriveremo semplicemente $f(u_*)$.

Definizione 2 (Funzionali locali e polinomi differenziali). Si consideri l'anello dei polinomi differenziali $\widehat{\mathcal{A}} = \mathbb{C}[[u_*^*]][u_{>0}^*][[\epsilon]]$ e si consideri il seguente operatore

$$\partial_x : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}, \quad \partial_x := \sum_{k=0}^{\infty} u_{k+1}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_k^\alpha}.$$

Definiamo lo spazio $\widehat{\Lambda}$ dei funzionali locali come il quoziente

$$\widehat{\Lambda} = \frac{\widehat{\mathcal{A}}}{\text{Im}\partial_x \oplus \mathbb{C}[[\epsilon]]}.$$

Dato un polinomio differenziale f , indicheremo la sua classe di equivalenza \bar{f} tramite il quoziente precedente come

$$\bar{f} = \int f dx.$$

Trasformazioni di Miura.

Il **gruppo delle trasformazioni di Miura** è l'insieme dei cambi di coordinate che intendiamo considerare sullo spazio $\widehat{\mathcal{A}}$. Definiamo su $\widehat{\mathcal{A}}$ e su $\widehat{\Lambda}$ la funzione grado deg come

$$deg(u_k^*) = k, \quad deg(\epsilon) = -1$$

ed indichiamo con $\widehat{\mathcal{A}}^{[k]}$ e con $\widehat{\Lambda}^{[k]}$ le parti di grado k dei rispettivi spazi.

Definizione 3 (Trasformazioni di Miura). Una trasformazione di Miura è un cambio di coordinate del tipo

$$v^\alpha = v^\alpha(u_*^*, \epsilon) \in \widehat{\mathcal{A}}^{[0]}, \quad \det\left(\frac{\partial v^*}{\partial u^*}\Big|_{\epsilon=0}\right) \neq 0.$$

Qualsiasi polinomio differenziale $f(u) \in \widehat{\mathcal{A}}$ può essere riscritto nelle coordinate v relative ad una trasformazione di Miura, e lo indicheremo con $f(v)$.

La definizione precedente rende evidente l'utilità del parametro ϵ , il cui esponente conta il numero di derivate in x presenti in v^α . In particolare, esso ci permette di invertire il precedente cambio di coordinate: per ogni v^α , è sufficiente risolvere la ODE $v^\alpha = v^\alpha(u_*^*, \epsilon)$ ordine per ordine in ϵ e si ottiene un polinomio differenziale $u^\alpha = u^\alpha(v_*^*, \epsilon)$. Alla luce di ciò, l'insieme delle trasformazioni di Miura forma effettivamente un gruppo rispetto alla composizione.

Struttura di Poisson.

L'insieme dei funzionali locali $\widehat{\Lambda}$ può essere dotato di una struttura di algebra di Poisson le cui parentesi sono della forma

$$\{\bar{f}, \bar{g}\}_K := \int \frac{\delta \bar{f}}{\delta u^\mu} K^{\mu\nu} \frac{\delta \bar{g}}{\delta u^\nu} dx, \quad K^{\nu\mu} = \sum_{j \geq 0} K_j^{\mu\nu} \partial_x^j, \quad K_j^{\mu\nu} \in \widehat{\mathcal{A}}^{[j+1]} \quad (1.1)$$

dove la derivata variazionale è il seguente operatore:

$$\frac{\delta}{\delta u^\mu} : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}, \quad \frac{\delta}{\delta u^\mu} = \sum_{k \geq 0} (-\partial_x^k) \frac{\partial}{\partial u_k^\mu}.$$

Nelle formule precedenti abbiamo confuso $\frac{\delta \bar{f}}{\delta u^\mu}$ con $\frac{\delta f}{\delta u^\mu}$. Tale confusione è legittimata dal fatto che, come spiegato in [14] è possibile mostrare con un calcolo diretto che

Lemma 1. *Dato un polinomio differenziale $f \in \widehat{\mathcal{A}}$, condizione necessaria e sufficiente affinché*

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} f = 0 \quad \forall \alpha = 1, \dots, n$$

è l'esistenza di un polinomio differenziale $g \in \widehat{\mathcal{A}}$ tale che

$$\partial_x g = f.$$

L'operatore $\frac{\delta}{\delta u^\mu}$ è pertanto ben definito sia come operatore su $\widehat{\mathcal{A}}$ che come operatore su $\widehat{\mathcal{A}}$. Per mantenere rigore formale sarebbe doveroso puntualizzare che, nella formula che esprime le parentesi di Poisson, $\frac{\delta \bar{f}}{\delta u^\mu}$ è da considerarsi un polinomio differenziale, dal momento che verrà poi quotientato tramite l'integrale. Tale puntualizzazione, però, risulta ridondante, dal momento che in termini di calcolo non vi è differenza, e pertanto continueremo ad adottare l'abuso di notazione precedentemente usato, indicando con $\frac{\delta \bar{f}}{\delta u^\mu}$ la derivata variazionale di \bar{f} , indipendentemente da dominio e codominio considerati, che saranno invece sempre deducibili dal contesto.

L'operatore K in 1.1, qualora rispettasse le restrizioni necessarie a rendere la parentesi precedente una parentesi di Poisson ¹, è detto **operatore hamiltoniano**.

E' possibile controllare con un calcolo diretto che la formula 1.1 con quella data nella sezione precedente per le parentesi di tipo idrodinamico, a seguito dell'azione della funzione δ . In particolare, coerentemente con il teorema 1 della sezione precedente, assumeremo sempre che la matrice $g^{\alpha\beta}$ tale che

$$K^{\alpha\beta}|_{\epsilon=0} = g^{\alpha\beta}(u_0) \partial_x + b_\gamma^{\alpha\beta}(u_0) u_1^\gamma$$

sia non degenere.

Analogamente a quanto abbiamo fatto nella sezione precedente, definiamo la parentesi di Poisson fra un polinomio differenziale e un funzionale come

$$\{f, \bar{g}\} := \sum_{s \geq 0} \frac{\partial f}{\partial u_s^\mu} \partial_x^s \left(K^{\mu\nu} \frac{\delta \bar{g}}{\delta u^\nu} \right).$$

¹Oververo un operatore bilineare, antisimmetrico, che rispetti la regola di Leibnitz e l'identità di Jacobi

Tale definizione è coerente con la precedente nel senso che il quoziente $\int \{f, \bar{g}\} dx$ assume la forma

$$\int \sum_{s \geq 0} \frac{\partial f}{\partial u_s^\mu} \partial_x^s \left(K^{\mu\nu} \frac{\delta \bar{g}}{\delta u^\nu} \right) dx = \int \left(\sum_{s \geq 0} (-\partial_x)^s \frac{\partial f}{\partial u_s^\mu} \right) K^{\mu\nu} \frac{\delta \bar{g}}{\delta u^\nu} dx = \{\bar{f}, \bar{g}\}$$

dove si è usata la formula di integrazione per parti $\int f \partial_x g dx = - \int \partial_x f g dx$ che, nel formalismo algebrico adottato in questa sezione, è semplicemente la relazione ottenuta quozientando la regola di Leibnitz $\partial_x(fg) = \partial_x f g + f \partial_x g$.

L'azione di una generica trasformazione di Miura $v = v(u_*^*, \epsilon)$ sulla parentesi di Poisson $\{\cdot, \cdot\}_K$ può essere espressa in termini dell'operatore hamiltoniano K . Indichiamo con K_u l'operatore originale, e con K_v l'operatore calcolato nelle nuove coordinate. Si ha

$$K_v^{\alpha\beta} = (L^*)_\mu^\alpha \circ K_u^{\mu\nu} \circ L_\nu^\beta$$

dove

$$(L^*)_\mu^\alpha = \sum_{s \geq 0} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u_s^\mu} \partial_x^s, \quad L_\nu^\beta = \sum_{s \geq 0} (-\partial_x)^s \circ \frac{\partial v^\beta}{\partial u_s^\nu}.$$

Vale il seguente

Teorema 2 (Forma standard delle Parentesi di Poisson). *Dato un operatore hamiltoniano K_u di tipo idrodinamico, ovvero tale che*

$$K^{\alpha\beta}|_{\epsilon=0} = g^{\alpha\beta}(u_0) \partial_x + b_\gamma^{\alpha\beta}(u_0) u_1^\gamma$$

e tale che la matrice $g^{\alpha\beta}(u_0)$ sia non degenere, esiste una trasformazione di Miura $v = v(u_*^*, \epsilon)$ tale che l'espressione di K nelle coordinate v sia della forma

$$K_v^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \partial_x, \quad \eta^{\mu\nu} \text{ costante, simmetrica e non degenere.}$$

Tale espressione è detta **forma standard**.

Il precedente teorema permette di restringere lo studio dell'algebra di Poisson dei funzionali locali al caso $K = \eta \partial_x$. Nel seguito considereremo solamente parentesi di Poisson di questo tipo.

Serie formale di Fourier.

Come discusso nella sezione precedente, i polinomi differenziali possono essere descritti anche tramite l'insieme di variabili $\{p_k^\alpha\}_{k \in \mathbb{Z}, \alpha \leq N}$ dato dai coefficienti della serie di Fourier di $u(x)$, ovvero soddisfacenti la relazione ²

$$u_j^\alpha = \sum_{k \in \mathbb{Z} \neq 0} (ik)^j p_k^\alpha e^{ikx}.$$

²L'assunzione che l'espansione in serie di Fourier di u sia priva di termine costante è formale, e non sarebbe perciò necessario giustificarla. Precisiamo comunque, però, che ciò corrisponde, nell'interpretazione variazionale dello spazio dei loop, ad una traslazione dell'origine nel codominio tale per cui $o^\alpha := \int_0^{2\pi} u^\alpha(x) dx = 0$, ovvero $u^\alpha(x) \mapsto u^\alpha - o^\alpha$.

In questo caso un generico polinomio differenziale di grado d assume la forma

$$f = \sum_{\substack{n,s \geq 0 \\ 1 \leq \alpha_i \leq N \\ k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}}} f_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; s}^{k_1, \dots, k_n} \epsilon^s p_{k_1}^{\alpha_1} \dots p_{k_n}^{\alpha_n} e^{i(\sum_{j=0}^n k_j)x}$$

dove i coefficienti $f_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; s}^{k_1, \dots, k_n}$ sono polinomi di grado $d+s$ nelle entrate k_1, \dots, k_n , e il funzionale locale f corrisponde al termine costante p_0 della serie di Fourier di f .

Alla luce di ciò, i funzionali locali posso essere interamente descritti in termini delle variabili p_k^α . Per formalizzare tale descrizione, adottiamo la notazione utilizzata in [1], ed indichiamo $\hat{T}_k(f)$ il k -esimo coefficiente della serie di Fourier associata ad un polinomio differenziale $f \in \hat{\mathcal{A}}$. Precisamente si ha

$$f|_{u^\alpha = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k^\alpha e^{ikx}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{T}_k(f) e^{ikx}.$$

Consideriamo in particolare il termine noto di tale espansione, $\hat{T}_0(f)$. Tale termine noto è sempre della forma

$$\hat{T}_0(f) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ 1 \leq \alpha_i \leq N \\ k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \\ k_1 + \dots + k_n = 0}} f_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(k_1, \dots, k_n) p_{k_1}^{\alpha_1} \dots p_{k_n}^{\alpha_n}$$

dove $f_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ sono polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}[[\epsilon]]$ il cui grado è limitato dall'alto (inferiore a quello di f). Sia $\hat{\mathcal{B}}^{pol} \subset \mathbb{C}[[p_*^*, \epsilon]]$ l'insieme di tali serie di potenze.

Si noti che $\hat{T}_0|_{\text{Im}(\partial_x)} = 0$, pertanto è ben definita una mappa, che indicheremo nuovamente con \hat{T}_0 ,

$$\hat{T}_0 : \hat{\Lambda} \longrightarrow \hat{\mathcal{B}}^{pol}.$$

Data una forma bilineare su \mathbb{C}^N simmetrica, non degenera $\eta = \sum_{i=1}^N \eta_{jk} e_i \otimes e_k^*$, dotiamo l'insieme $\hat{\mathcal{B}}^{pol}$ della seguente parentesi di Poisson

$$\{g, f\}_\eta = i \sum_{k \geq 1} k \frac{\partial g}{\partial p_k^\alpha} \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial p_{-k}^\beta} - \frac{\partial f}{\partial p_k^\alpha} \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial p_{-k}^\beta}.$$

Tale parentesi può essere interamente dedotta dalla più semplice

$$\{p_k^\alpha, p_j^\beta\}_\eta = ik \eta_{\alpha,\beta} \delta_{k+j,0}.$$

Introduciamo inoltre la funzione $\hat{Z} : \hat{\mathcal{B}}^{pol} \longrightarrow \mathbb{C}[[p_*^*, \epsilon]]$ che ad ogni $f \in \hat{\mathcal{B}}^{pol}$ della forma

$$f = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ 1 \leq \alpha_i \leq N}} \sum_{\substack{k_1 \dots k_n \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \\ k_1 + \dots + k_n = 0}} f_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(k_1, \dots, k_n) p_{k_1}^{\alpha_1} \dots p_{k_n}^{\alpha_n}.$$

associa lo stesso polinomio differenziale, con la rimozione del vincolo $k_i \neq 0$, ovvero

$$\hat{Z}(f) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ 1 \leq \alpha_i \leq N}} \sum_{\substack{k_1 \cdots k_n \in \mathbb{Z} \\ k_1 + \cdots + k_n = 0}} f_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(k_1, \dots, k_n) p_{k_1}^{\alpha_1} \cdots p_{k_n}^{\alpha_n}.$$

Riassumiamo con la seguente proposizione la relazione fra $(\hat{\mathcal{B}}^{pol}, \{\cdot, \cdot\}_\eta)$ e $(\hat{\Lambda}, \{\cdot, \cdot\}_{\eta \partial_x})$. I risultati enunciati e le relative dimostrazioni sono tutti contenuti in [1].

Proposizione 1. *Nella notazione precedente, si ha*

- \hat{T}_0 è suriettiva, e il suo nucleo è lo spazio generato dai funzionali del tipo $\int u_0^\alpha dx$ per $\alpha = 1, \dots, N$.
- La parentesi $\{\cdot, \cdot\}_{\eta \partial_x}$ è pull-back della parentesi $\{\cdot, \cdot\}_\eta$ tramite \hat{T}_0 , ovvero

$$\hat{T}_0(\{\bar{f}, \bar{g}\}_{\eta \partial_x}) = \{\hat{T}_0(\bar{f}), \hat{T}_0(\bar{g})\}_\eta, \quad \forall \bar{f}, \bar{g} \in \hat{\Lambda}$$

- La derivata in u_0^α di un funzionale locale $\bar{f} \in \hat{\Lambda}$ può essere espressa tramite la seguente formula

$$\hat{T}_0\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u_0^\alpha}\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{f} = \int u_0^\alpha dx \\ \left.\frac{\partial \hat{Z}(\hat{T}_0(\bar{f}))}{\partial p_0^\alpha}\right|_{p_0^*=0}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dalla prima istanza della proposizione precedente è evidente che è possibile definire una mappa

$$\hat{Q}: \mathcal{B}^{pol} \longrightarrow \hat{\Lambda}$$

che ad ogni serie $f \in \mathcal{B}^{pol}$ associa l'unico differenziale locale $\hat{Q}(f) = \int g dx$ tale che soddisfi alle seguenti due condizioni.

$$\hat{T}_0 \circ \hat{Q}(f) = f, \quad \left.\frac{\partial \hat{Q}(f)}{\partial u_0^\alpha}\right|_{u_0^*=0} = 0, \quad \forall \alpha = 1, \dots, N.$$

1.3 Gerarchie hamiltoniane integrabili.

Una gerarchia hamiltoniana integrabile è un sistema infinito di PDE hamiltoniane evoluzionarie che soddisfano una condizione di compatibilità fra le equazioni, detta **Poisson-commutatività**. Precisamente

Definizione 4 (Gerarchia hamiltoniana). Definiamo gerarchia integrabile, o sistema integrabile, un sistema infinito di PDE della forma

$$\partial_{t^d} u^\alpha = \{u^\alpha, \bar{h}_{\beta,d}\}_K = K^{\alpha\mu} \frac{\delta \bar{h}_{\beta,d}}{\delta u^\mu}, \quad \bar{h}_{\beta,d} \in \hat{\Lambda}^{[0]}$$

generato dalle hamiltoniane $\bar{h}_{\beta,d}$ per $\alpha = 1, \dots, n$ e $d = 0, 1, 2, \dots$, tali che siano a due a due Poisson commutative, ovvero

$$\{\bar{h}_{\alpha,p}, \bar{h}_{\beta,q}\}_K = 0, \quad \forall 1 \leq \alpha, \beta \leq n, p, q \geq 0$$

La definizione è analoga a quella di sistema integrabile nel caso finito dimensionale. La condizione di commutatività rispetto alle parentesi di Poisson esprime la compatibilità delle diverse equazioni. Una soluzione del sistema è rappresentata da una serie di potenze formale $u(x, t_*, \epsilon)$ nelle variabili x, t_* ed ϵ che soddisfi tutte le equazioni della gerarchia.

Tau-structure.

I sistemi hamiltoniani di cui ci occuperemo sono quelli che ammettono una **tau-structure**. Al fine di introdurre tale struttura, diamo delle definizioni preliminari:

Definizione 5 (Funzionale di Casimir). Dato un operatore hamiltoniano K , un funzionale $C \in \widehat{\Lambda}$ è di Casimir per K se

$$K^{\alpha\mu} \frac{\delta C}{\delta u^\mu} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Si noti che la condizione della definizione precedente è equivalente a

$$\{u^\alpha, C\}_K = 0, \quad \forall \alpha \leq n.$$

In particolare, analogamente a quanto accade nel caso finito-dimensionale, un funzionale di Casimir C soddisfa alla seguente condizione

$$\{F, C\}_K = 0, \quad \forall F \in \widehat{\Lambda}.$$

Dato un funzionale $H \in \widehat{\Lambda}$, diremo che un polinomio differenziale $h \in \widehat{\mathcal{A}}$ è una **densità** per H se

$$\bar{h} = \int h dx = H.$$

Si consideri ora un sistema integrabile

$$\partial_{t_d^\beta} u^\alpha = \{u^\alpha, H_{\beta,d}\}_K, \quad H_{\beta,d} \in \widehat{\Lambda}$$

e si assuma che l'hamiltoniana $H_{1,0}$ generi le traslazioni spaziali, ovvero

$$\partial_{t_1^0} u^\alpha = K^{\alpha\mu} \frac{\delta H_{1,0}}{\delta u^\mu} = u_1^\alpha$$

Chiameremo **tau-structure** per il sistema integrabile generato dalle hamiltoniane $H_{*,*}$ un insieme di polinomi differenziali

$$h_{\beta,q} \in \widehat{\mathcal{A}}^{[0]}, \quad \beta = 1, \dots, n, q = -1, 0, 1, \dots$$

tali che

- i) i funzionali $\bar{h}_{\beta,-1}$ per $\beta \leq n$ siano n funzionali di Casimir linearmente indipendenti,
- ii) $\forall \beta \leq n, d \geq 0$ il polinomio differenziale $h_{\beta,d}$ sia una densità per $H_{\beta,d}$,
- iii) $\{h_{\alpha,p-1}, \bar{h}_{\beta,q}\}_K = \{h_{\beta,q-1}, \bar{h}_{\alpha,p}\}_K, \quad \forall q, p \geq 0; \alpha, \beta \leq n$

La proprietà (iii) è detta di **tau-simmetria**. Nella letteratura spesso essa viene espressa come

$$\frac{\partial h_{\alpha,p-1}}{\partial t_p^\beta} = \frac{\partial h_{\beta,q-1}}{\partial t_q^\alpha}$$

dove si sottintende l'idea che derivare un polinomio differenziale in una variabile t_*^* sia equivalente a calcolarne la parentesi di Poisson contro l'hamiltoniana $H_{*,*} = \bar{h}_{*,*}$ corrispondente.

Un sistema integrabile assieme alla scelta di una tau-structure si dice **sistema integrabile tau-simmetrico**. L'esistenza di una tau-structure impone vincoli non banali alla gerarchia hamiltoniana. Non esploreremo nel dettaglio tali vincoli, ma diamo una condizione sufficiente per tale esistenza: si consideri un sistema hamiltoniano $(K, H_{*,*})$ come sopra descritto e si assuma che l'operatore hamiltoniano K sia in forma standard, ovvero $K = \eta \partial_x$, con η matrice complessa simmetrica, non degenere, costante. Allora

Proposizione 2. (*String relation*) Sia

$$\frac{\partial H_{\beta,q}}{\partial u_0^1} = \begin{cases} H_{\beta,q-1}, & \text{se } q \geq 1 \\ \int \theta_{\beta\mu} u^\mu dx, & \text{se } q = 0. \end{cases}$$

dove $[\theta_{\beta\mu}]_{\beta,\mu \leq n}$ è una matrice complessa non degenere, costante. Allora i polinomi differenziali

$$h_{\beta,q} := \frac{\delta H_{\beta,q+1}}{\delta u_0^1}, \quad \forall q \geq -1$$

sono una tau-structure per il sistema $(K, H_{*,*})$.

Dimostrazione. La dimostrazione può essere trovata in [2], ed è essenzialmente un calcolo diretto. \square

Tau-function.

Data una gerarchia hamiltoniana tau-simmetrica, e' possibile associare ad ogni sua soluzione una specifica funzione, che viene detta tau-function, o funzione tau. In questa sezione analizziamo la costruzione di tale funzione.

Si consideri la gerarchia generata dalle hamiltoniane $H_{*,*}$ della sezione precedente, relativamente all'operatore hamiltoniano K . Assumiamo nuovamente che $H_{1,0}$ generi le traslazioni spaziali ed assumiamo che i polinomi

$h_{\beta,q}$ per $\beta \leq n, q \geq -1$ formino una tau-structure per il sistema generato dalle $H_{*,*}$.

Per ogni $\alpha, \beta \leq n$, e $p, q \geq 0$ si ha

$$\int \frac{\partial h_{\alpha,p-1}}{\partial t_q^\beta} dx = \int \{h_{\alpha,p-1}, \bar{h}_{\beta,q}\}_K dx = \{\bar{h}_{\alpha,p-1}, \bar{h}_{\beta,q}\}_K = 0$$

dove l'ultima eguaglianza è dedotta dal fatto che $\bar{h}_{\alpha,p} = H_{\alpha,p}$, e le hamiltoniane $H_{*,*}$ commutano a due a due per ipotesi. Dall'equazione precedente si deduce che esiste un polinomio differenziale $\Omega_{\alpha,p;\beta,q}$ tale che

$$\partial_x \Omega_{\alpha,p;\beta,q} = \frac{\partial h_{\alpha,p-1}}{\partial t_q^\beta}$$

Dato che per definizione $h_{*,*} \in \widehat{\mathcal{A}}^{[0]}$, si ha $\frac{\partial h_{\alpha,p-1}}{\partial t_q^\beta} \in \widehat{\mathcal{A}}^{[1]}$, che è quindi privo di termine costante. Se si impone al polinomio differenziale $\Omega_{\alpha,p;\beta,q}$ la condizione aggiuntiva che

$$\Omega_{\alpha,p;\beta,q}|_{u_*^*} = 0$$

allora il polinomio è unico. Tale polinomio è detto **two-point correlation function** della tau-structure della gerarchia.

La condizione di tau-simmetria per la tau-structure si traduce nella seguente proprietà per $\Omega_{\alpha,p;\beta,q}$:

$$\Omega_{\alpha,p;\beta,q} = \Omega_{\beta,q;\alpha,p}$$

Si consideri ora una soluzione $\hat{u}^\alpha = \hat{u}^\alpha(x, t_*^*; \epsilon)$ della gerarchia. La proprietà di tau-simmetria garantisce l'esistenza di una serie formale di potenze $F \in \mathbb{C}[[t_*^*, \epsilon]]$ tale che

$$\Omega_{\alpha,p;\beta,q}(\hat{u}_0(x, t_*^*; \epsilon), \hat{u}_1(x, t_*^*; \epsilon), \dots) |_{x=0} = \frac{\partial^2 F}{\partial t_p^\alpha \partial t_q^\beta} \quad \forall \alpha, \beta \leq n; p, q \geq 0.$$

Chiameremo la funzione F **tau-function** della soluzione \hat{u} . Nella letteratura storicamente la funzione F è il logaritmo di quella che viene detta tau-function di \hat{u} , ma noi non adotteremo questa notazione.

Si noti che, dal momento che $H_{1,0}$ genera le traslazioni spaziali, si ha

$$\partial_x \Omega_{\alpha,p;1,0} = \frac{\partial h_{\alpha,p-1}}{\partial t_0^1} = \partial_x h_{\alpha,p-1}$$

da cui si deduce che $\exists C \in \mathbb{C}$ tale che

$$\Omega_{\alpha,p;1,0} = h_{\alpha,p-1} + C.$$

Si noti che nell'espressione precedente la presenza della costante C è in verità irrilevante, in quanto essa può essere sempre riassorbita nelle densità hamiltoniane senza che queste smettano di essere una tau-structure

della gerarchia. Il motivo di ciò risiede nel fatto che nella condizione di tau-simmetria le densità hamiltoniane compaiono sempre derivate, di conseguenza sommando loro delle costanti la tau-simmetria rimane valida, ed analogamente rimane vero che le densità sono un lift delle hamiltoniane della gerarchia, dal momento che le costanti spariscono a seguito della quozientazione per $\text{Im}(\partial_x)$.

D'altro canto la presenza della costante non è nemmeno di disturbo, dal momento che siamo tipicamente interessati più all'evoluzione delle densità hamiltoniane lungo le soluzioni che al loro valore. Sfruttando l'espressione precedente, infatti, si può ottenere la seguente relazione

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_p^\alpha \partial t_0^1} = \Omega_{\alpha,p;1,0}(\hat{u}_*(0, t_*^*; \epsilon)) = h_{\alpha,p-1}(\hat{u}_*(0, t_*^*; \epsilon)) + C.$$

Si noti che nell'espressione precedente, nonostante la presenza della condizione $x = 0$, è espressa l'evoluzione dell'hamiltoniana $h_{\alpha,p-1}$ lungo tutta la soluzione \hat{u} . Ciò è dovuto in particolare al fatto che il ruolo della variabile x è sostituito dalla variabile t_0^1 , dal momento che $H_{1,0}$ genera le traslazioni spaziali. La funzione F , pertanto, codifica l'informazione sull'evoluzione temporale delle densità hamiltoniane lungo la soluzione \hat{u} rispetto a tutti i tempi t_*^* .

Motivazioni.

Nella teoria dei sistemi hamiltoniani, le gerarchie tau-simmetriche giocano un ruolo piuttosto rilevante, dal momento che diversi sistemi sono descritti da una gerarchia tau-simmetrica. Uno fra tutti è la gerarchia KdV, la cui prima equazione è la celebre equazione di Korteg-de Vries che, nel formalismo introdotto in questa tesi, può essere scritta come

$$u_t = u_0 u_1 + \frac{\epsilon^2}{24} u_3$$

oppure, in termini della relativa hamiltoniana associata

$$\bar{h}_{KdV} = \int \left(\frac{u^3}{6} + \frac{\epsilon^2}{12} u_2 u_0 \right) dx.$$

Da un punto di vista matematico, la rilevanza di questa equazione risiede nel fatto che essa è oggetto della congettura di Witten, il quale fu il primo a supporre un legame fra la teoria delle intersezioni nello spazio dei moduli delle curve e i sistemi integrabili.

Precisamente, egli congetturò che il potenziale della CohFT banale, una funzione di natura geometrica che introdurremo nel seguito, coincidesse con la tau-function di una specifica soluzione della gerarchia KdV. La congettura

venne dimostrata un anno dopo, nel 1993, da Maxim Kontsevich, ed aprì le porte ad una nuova gamma di idee e metodologie per lo studio, da un lato, dei sistemi integrabili, dall'altro, della teoria delle intersezioni di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

Tutto il materiale contenuto in questa tesi, ed in particolare la gerarchia-DR esposta nell'ultimo capitolo, è, più o meno direttamente, una conseguenza dello straordinario impatto che la congettura di Witten ha avuto nel mondo matematico e fisico.

Capitolo 2

Spazio dei moduli delle curve stabili e la sua struttura di orbifold.

Lo spazio dei moduli delle curve stabili è essenzialmente (la compattificazione di) uno spazio classificatore per le superfici di Riemann compatte. Come vedremo, esso non può sempre essere dotato della struttura di varietà, e va invece introdotto come un *orbifold*: una generalizzazione di quest'ultima dove le carte locali sono, invece che semplici aperti, quozienti di aperti per un'azione olomorfa.

Introduciamo questi concetti nelle prime tre sezioni di questo capitolo, che sono quasi interamente tratte da [6], mentre nella quarta analizziamo un esempio non banale di orbifold: lo spazio dei moduli delle curve ellittiche.

2.1 Spazio dei moduli delle curve di genere g con n punti marcati.

In termini informali, lo spazio dei moduli delle curve di genere g è l'insieme delle classi di equivalenza delle varietà olomorfe, connesse, compatte, di dimensione (complessa) 1 e di genere g , rispetto alla relazione di equivalenza data dall'isomorfismo di varietà complesse. Tali varietà sono dette superfici di Riemann compatte. Per quanto concerne questa tesi, ci riferiremo a tali varietà con il termine "curve". Questo spazio dei moduli, che per ora è solamente un insieme, viene denotato con \mathcal{M}_g .

L'aggiunta di "n punti marcati" consiste nel dato aggiuntivo, per ogni curva C , di n punti distinti x_1, \dots, x_n appartenenti a C . Lo spazio dei moduli delle curve di genere g con n punti marcati consiste nelle classi di isomorfismo di suddette curve, dove due curve si considerano isomorfe se e solo se fra loro esiste un isomorfismo fra varietà complesse che preserva i punti marcati. Formalmente:

Definizione 6. Si assuma che $2 - 2g - n < 0$. Sia

$$\mathcal{M}_{g,n} = \{[(C, x_1, \dots, x_n)] : C \text{ è una curva, } x_i \in C, x_i \neq x_j \forall i, j \leq n\}$$

dove $[\cdot]$ rappresenta la classe di equivalenza rispetto alla seguente relazione: (C_1, x_1, \dots, x_n) è equivalente a (C_2, y_1, \dots, y_n) se e solo se esiste un biolomorfismo

$$F : C_1 \longrightarrow C_2$$

tale che

$$F(x_i) = F(y_i) \quad \forall i \leq n.$$

L'aggiunta dell'ipotesi che $2 - 2g - n < 0$, che attualmente può sembrare immotivata, è dovuta al fatto che il gruppo di automorfismi di una superficie di Riemann compatta di genere g con n punti marcati è finito se e solo se tale disuguaglianza è rispettata. E' possibile definire $\mathcal{M}_{g,n}$ come insieme anche quando tale disuguaglianza non è rispettata, ma non è possibile, in generale, dotarlo della struttura di orbifold, una generalizzazione della struttura di varietà che verrà introdotta nella prossima sezione.

Si noti infine che, nel caso $n = 0$, si ha $\mathcal{M}_{g,0} = \mathcal{M}_g$.

Esempio (Il caso $\mathcal{M}_{0,n}$). Il caso più semplice di spazio dei moduli delle curve è il caso $\mathcal{M}_{0,3}$. Ogni curva razionale di genere 0 con tre punti marcati può essere identificata (in maniera unica) con $(\mathbb{C}\mathbb{P}, 0, 1, \infty)$. Pertanto $\mathcal{M}_{0,3}$ è un punto.

Infatti il gruppo di automorfismi di $\mathbb{C}\mathbb{P}$, e di qualsiasi curva ad esso isomorfa, è

$$\text{PSL}(2, \mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) : ad - bc \neq 0 \right\}$$

considerato a meno della moltiplicazione per un numero complesso, la cui azione su $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}$ è

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Come è noto, dati tre punti $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}\mathbb{P}$, esiste un unico automorfismo di $\mathbb{C}\mathbb{P}$ che li mappa ordinatamente in $0, 1, \infty$, rappresentato dall'inversa della matrice le cui entrate soddisfano:

$$x_1 = \frac{b}{d}, \quad x_2 = \frac{a+b}{c+d}, \quad x_3 = \frac{a}{c}.$$

Se si aggiunge un punto marcato, considerando quindi $\mathcal{M}_{0,4}$, ogni curva può essere identificata (in maniera unica) con $(\mathbb{C}\mathbb{P}, 0, 1, \infty, t)$, dove $t \in \mathbb{C}\mathbb{P} \setminus \{0, 1, \infty\}$. Pertanto

$$\mathcal{M}_{0,4} = \{[(\mathbb{C}\mathbb{P}, 0, 1, \infty, t)] : t \in \mathbb{C}\mathbb{P} \setminus \{0, 1, \infty\}\} \simeq \mathbb{C}\mathbb{P} \setminus \{0, 1, \infty\}$$

dove l'isomorfismo è, oltre che insiemistico, anche topologico.

E' possibile generalizzare il precedente esempio ad un arbitrario $n > 3$ e mostrare che

$$\mathcal{M}_{0,n} \simeq \{(t_1, \dots, t_{n-3}) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-3} : t_i \in \mathbb{C}\mathbb{P} \setminus \{0, 1, \infty\}, t_i \neq t_j\}$$

Si noti infine che, per $n \geq 4$, $\mathcal{M}_{0,n}$ non è compatto.

2.2 Orbifold complesso liscio.

Come mostrato nella sezione precedente, $\mathcal{M}_{0,n}$ può essere dotato della struttura di varietà. Purtroppo, non è sempre questo il caso. Al fine di studiare il caso $\mathcal{M}_{g,n}$, occorre introdurre una generalizzazione di tale struttura.

Informalmente un orbifold, o orbi-varietà, è l'analogo di una varietà con la differenza che le carte locali sono isomorfismi fra aperti dello spazio e aperti di \mathbb{C}^n quozientati per un'azione di gruppo finita. Nel caso in cui tale azione sia quella banale, si ritrova la definizione di varietà. Precisamente:

Definizione 7. Sia X uno spazio topologico, si dice carta orbifold locale, o orbicarta locale, il dato di un aperto contraibile U di \mathbb{C}^n , un gruppo finito G che agisce tramite biomorfismi su U , un aperto V di X e un isomorfismo

$$\phi : U/G \longrightarrow V.$$

La situazione è riassunta dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} G \times U & \xrightarrow{\rho} & U & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ U & \longrightarrow & U/G & \xrightarrow{\phi} & V \end{array}$$

dove ρ è l'azione di gruppo e le doppie frecce indicano le proiezioni naturali del prodotto e del quoziente. Il quadrato commuta per definizione. Per la precisione, quella che abbiamo definito è un'orbicarta locale olomorfa, perchè questo è il caso che considereremo principalmente in questa tesi. Se l'azione di G è liscia e l'aperto U è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , si parla di orbicarta locale liscia.

Nel seguito, tali carte locali orbifold verranno sempre denominate orbicarte e, dove non generasse ambiguità, verranno indicate semplicemente con V o con $V \cong U/G$, piuttosto che con $\phi : U/G \rightarrow V$. Inoltre, diremo che U è un *sollevamento* di V , ed analogamente useremo il termine sollevamento per indicare l'antimmagine di un sottoinsieme di V in U tramite la mappa che realizza il quoziente per G .

E' possibile introdurre una relazione di ordine parziale fra orbicarte:

Definizione 8. Un'orbicarta

$$\phi : U/G \rightarrow V$$

si dice sotto-orbicarta di

$$\phi' : U'/G' \rightarrow V'$$

se V' è un sottoinsieme di V ed esistono un morfismo di gruppi $a : G' \rightarrow G$ e un embedding olomorfo $j : U' \rightarrow U$ tali che $\forall g \in G, x \in V$

- $j(g.x) = a(g).j(x)$,
- $\text{stab}_G x \simeq \text{stab}_{G'} j(x)$
- $\phi([x]_G) = \phi'([j(x)]_{G'})$

dove $g.$ e $a(g).$ indicano, rispettivamente, l'azione di g e di $a(g)$, mentre stab_G e $\text{stab}_{G'}$ indicano rispettivamente lo stabilizzatore in G ed in G' . Nell'ultima relazione $[\cdot]_G$ e $[\cdot]_{G'}$ indicano le classi di equivalenza indotte dall'azione di G e G' .

La situazione è riassunta dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 G \times U & \xrightarrow{\rho} & U & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 U & \xrightarrow{j} & U/G & \xrightarrow{\phi} & V \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 G' \times U' & \xrightarrow{\rho'} & U' & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 U' & \longrightarrow & U'/G' & \xrightarrow{\phi'} & V'
 \end{array}$$

(a,j)

Nel caso in oggetto di definizione scriveremo $V \leq V'$.

La nozione di orbicarta è più delicata di quella di carta locale per varietà, e non è pertanto possibile sperare di definire la compatibilità fra due orbicarte V e V' richiedendo l'esistenza di un'orbicarta su $V \cap V'$. Pertanto:

Definizione 9. Due orbicarte $V_1 \cong U_1/G_1$ e $V_2 \cong U_2/G_2$ si dicono compatibili se, per ogni $x \in V \cap V'$ esiste un'orbicarta V_x , contenente x , tale che

$$V_x \leq V_1, \quad V_x \leq V_2.$$

Alla luce di questa definizione, è possibile dare una definizione di orbivarietà complessa liscia:

Definizione 10. Una collezione di orbicarte olomorfe compatibili su uno spazio topologico X si dice atlante orbifold. Un atlante massimale - ovvero tale che non sia possibile aggiungervi nessuna orbicarta compatibile - è un'orbivarietà complessa liscia.

Un dato che sarà particolarmente utile nello studio degli spazi dei moduli delle curve è lo stabilizzatore di un punto, che rappresenterà il gruppo di automorfismi della curva rappresentata dal punto. I particolari requisiti richiesti nella definizione di orbifold ci permettono di darne una descrizione globale:

Definizione 11 (Stabilizzatore di un punto). Sia x un punto in un'orbivarietà complessa liscia X . Sia $\phi : U/G \rightarrow V_x$ un'orbicarta contenente x . Sia $u \in U$ tale che $\phi([u]_G) = x$. Definiamo stabilizzatore di x il seguente:

$$\mathbf{stab} \ x := \text{stab}_G \ u.$$

In virtù della nozione di compatibilità, la definizione non dipende dalla carta.

La definizione generale di morfismo fra orbivarietà fa emergere ulteriori difficoltà tecniche. Ci limitiamo per questo alla seguente

Definizione 12. Una mappa fra orbifold $f : X \rightarrow Y$ con fibre che siano varietà complesse è una mappa continua fra gli spazi topologici sottostanti, $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$, assieme alla scelta, per ogni $y \in Y$ di:

- un'orbicarta locale $\phi_y : U_y/G_y \rightarrow V_y$ contenente y ,
- una mappa olomorfa $F_y : U'_y \rightarrow U_y$, dove U'_y è un aperto di \mathbb{C}^n , ed ogni fibra di F_y è una varietà complessa,
- un'estensione dell'azione di G_y a U'_y che commuti con F_y :

$$\forall g \in G_y, \ x \in U'_y \quad F_y(g.x) = g.F_y(x)$$

- un isomorfismo ϕ'_y fra U'_y/G_y e un sotto-orbifold di X tale che

$$\phi_y \circ F = \hat{f} \circ \phi'_y$$

dove, in virtù del secondo punto, si può considerare F come una mappa fra le classi di equivalenza modulo G in U_y e U'_y .

La situazione è riassunta dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U'_y & \xrightarrow{F_y} & U_y \\
 & \swarrow & & & \searrow \\
 U'_y/G_y & & & \xrightarrow{F_y} & U_y/G_y \\
 & \searrow \phi'_y & & & \swarrow \phi_y \\
 & & \hat{X} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{Y}
 \end{array}$$

Esempi elementari di Orbifold.

Il più semplice esempio di orbifold, anche se banale, è una generica varietà complessa M . Essa è ricoperta da orbicarte locali $\phi : U \rightarrow V$, le stesse della struttura di varietà, sulle quali si introduce l'azione banale di $G := \{id\}$.

Nella definizione di orbifold non abbiamo richiesto che l'azione di gruppo sia efficace, ovvero siamo disposti ad accettare che anche elementi del gruppo G diversi dall'identità agiscano in maniera banale sull'insieme U . Diremo che un'orbicarta $\phi : U/G \rightarrow V$ è arricchita dell'azione banale di un gruppo G' quando considereremo l'orbicarta

$$\phi : U/G \times G' \rightarrow V$$

dove l'azione di $(g, g') \in G \times G'$ su $u \in U$ è

$$(g, g').u = g.u.$$

Diremo che un orbifold X è arricchito dell'azione banale di G' quando vorremo riferirci all'orbifold X' ottenuto arricchendo ogni sua orbicarta con G'

Diamo ora un esempio di orbicarta non banale:

Esempio (Cono orbifold). Sia $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ il disco unitario sul piano complesso. Sia $n \in \mathbb{N}$, si consideri l'azione di gruppo di $G := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ su \mathbb{D} data da

$$(g + n\mathbb{Z}).u = e^{\frac{g}{n}2\pi i}u, \quad u \in \mathbb{D}, g \in \mathbb{Z}.$$

Tale azione è ovviamente biolomorfa dato che, per ogni g , è solamente la moltiplicazione per un numero complesso. Inoltre, è semplice mostrare che tale azione ha un unico punto fisso, ovvero $0 \in \mathbb{D}$.

La mappa $\text{id} : U/G \rightarrow U/G$ è una carta locale orbifold per $C_n := U/G$. Tale insieme, da un punto di vista topologico, è un disco, ma va piuttosto immaginato come un cono, in quanto contiene un punto singolare, lo zero, dove lo stabilizzatore è non banale.

Si noti che non tutti i coni sono orbifold. Precisamente, lo sono solamente quelli il cui "angolo" è della forma $\frac{2\pi}{n}$ per $n \in \mathbb{Z}$ - se si considerasse infatti l'azione del gruppo generato da un vettore unitario che non sia radice dell'unità, si otterrebbe un gruppo ciclico di ordine infinito.

Si noti infine che due coni con angolo diverso non sono, in generale, isomorfi come orbifold. Non abbiamo dato una definizione precisa di cosa sia un isomorfismo fra orbifold, e non lo faremo qui. Intuitivamente basti pensare al fatto che per ogni punto abbiamo definito cosa sia il suo stabilizzatore, e che tale definizione è globale (non dipende dall'orbicarta). In una definizione coerente di isomorfismo fra orbifold, vorremmo che tale proprietà venisse preservata. Nel caso del cono lo stabilizzatore di ogni punto diverso da 0 è $\{0\}$. Lo stabilizzatore di $0 \in C_n$, invece, è

$$\text{stab}(0) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

pertanto due coni C_m e C_n tali che $n \neq m$ contengono punti con stabilizzatori differenti.

In generale, con un abuso di notazione, possiamo chiamare cono orbifold qualsiasi orbicarta locale con un unico punto con stabilizzatore non banale. Ad esempio è possibile generalizzare la costruzione precedente utilizzando, al posto di una rotazione, un qualsiasi endomorfismo biolomorfo periodico con un unico punto fisso. Precisamente:

Esempio (Cono orbifold generalizzato). Sia U un aperto contraibile di \mathbb{C} contenente 0 e sia $f : U \rightarrow U$ un biolomorfismo tale che

- $f(0) = 0$
- $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\forall u \in U, u \neq 0$ si ha $f^n(u) = u$, se e solo se $n|m$.

Dalla condizione precedente si deduce che $f^n = \text{id}_U$. Sia $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e sia l'azione di $m + n\mathbb{Z} \in G$ data da

$$(m + n\mathbb{Z}).u = f^m(u), \quad u \in U.$$

Allora $\text{id} : U/G \rightarrow U/G$ è un'orbicarta locale tale che $\text{stab}(u)$ è non banale se e solo se $u = 0$. Chiameremo oggetti di questo tipo f -coni di ordine n .

Come nel caso delle rotazioni, possiamo immaginare coni di diverso ordine come coni con un diverso "angolo". Invece, coni dello stesso ordine con diverse mappe f , vanno immaginati come coni con lo stesso "angolo", ma con "forma" differente.

2.3 $\mathcal{M}_{g,n}$ come orbifold.

Diremo che una mappa ologomorfa $p : \mathcal{C} \rightarrow B$ è una famiglia di superfici di Riemann di genere g con n punti marcati se ogni fibra di p è una superficie di Riemann liscia ed esistono n sezioni $s_i : B \rightarrow \mathcal{C}$ disgiunte, ovvero tali che

$$p \circ s_i = \text{id}, \quad s_i(x) \neq s_j(x), \quad \forall i \neq j, \quad x \in B, \quad i \leq n.$$

Le intersezioni delle sezioni con ogni fibra rappresentano i punti marcati all'interno della fibra.

Date due famiglie $p_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow B_1$ e $p_2 : \mathcal{C}_2 \rightarrow B_2$ di superfici di Riemann di genere g con n punti marcati e dato un sottoinsieme $B'_2 \subset B_2$ diremo che la restrizione di \mathcal{C}_2 a B'_2 è il pull-back di \mathcal{C}_1 se esiste un morfismo $\phi : B'_2 \rightarrow B_1$ tale che i seguenti due insiemi

$$\mathcal{C}_2|_{B'_2} := p_2^{-1}(B'_2), \quad \phi^* \mathcal{C}_1 := \{(b, c) \in B'_2 \times \mathcal{C}_2 : \phi(b) = p_1(c)\}$$

siano isomorfi.

Teorema 3. *Sia \mathcal{C} una superficie di Riemann di genere g con n punti marcati tale che $2 - 2g - n < 0$. Sia G il suo gruppo (finito) di automorfismi. Sia $N := 3g - 3 + n$.*

Esistono

1. *un aperto limitato semplicemente connesso $U \subset \mathbb{C}^N$;*
2. *una famiglia $p : \mathcal{C} \rightarrow U$ di superfici di Riemann di genere g con n punti marcati;*
3. *un'azione G su \mathbb{C} che discende ad un'azione di G su U e soddisfa alle seguenti condizioni:*
 - (a) *La fibra \mathcal{C}_0 sopra $0 \in \mathbb{C}^N$ è isomorfa a \mathcal{C} .*
 - (b) *L'azione di G preserva \mathcal{C}_0 e agisce su di esso come il suo gruppo di automorfismi.*
 - (c) *Per ogni famiglia $p : \mathcal{C}_B \rightarrow B$ di superfici di Riemann di genere g con n punti marcati tale che \mathcal{C}_b sia isomorfo a \mathcal{C}_0 per qualche $b \in B$, esiste un sottoinsieme $B' \subset B$ contenente b ed una mappa $\phi : B' \rightarrow U$, unica a meno di composizione con l'azione di G , tale che la restrizione di \mathcal{C}_B a B' sia il pull-back di \mathcal{C} tramite ϕ .*

Il teorema precedente permette di costruire la struttura di orbifold di $\mathcal{M}_{g,n}$. Precisamente, è possibile mostrare che le (immagini di) famiglie di superfici di Riemann di genere g con n punti marcati sono gli aperti U sui quali, quotizzando per l'azione di G , isomorfo al gruppo di simmetrie di una fibra, si ottengono insiemi omeomorfi agli aperti di $\mathcal{M}_{g,n}$. Pertanto il

teorema precedente descrive delle orbicarte locali per $\mathcal{M}_{g,n}$. Una conseguenza diretta del teorema è che lo stabilizzatore di un punto di $\mathcal{M}_{g,n}$ è il gruppo di automorfismi della curva da esso rappresentata.

In particolare il teorema descrive un'orbicarta locale centrata nella curva C , e il punto 1.c garantisce la compatibilità fra diverse orbicarte, in quanto garantisce l'esistenza di una sottorbicarta B' contenente il punto b e contenuta in B , e la condizione sul pull-back di ϕ permette di mostrare che è anche una sottorbicarta di U .

L'esistenza di un atlante massimale di orbicarte, come richiesto dalla nostra definizione di orbifold, non è dimostrata dal teorema. Questo è un particolare di cui non ci preoccupiamo, dal momento che è possibile mostrare che per ogni ricoprimento di orbicarte compatibili esiste un unico atlante massimale, analogamente a quanto si fa per varietà.

La curva universale

Il teorema 3 della sezione precedente, oltre a definire un atlante orbifold per $\mathcal{M}_{g,n}$, definisce anche un altro atlante orbifold, dato dall'insieme ricoperto dagli aperti \mathcal{C} . Denotiamo questo insieme con $\mathcal{C}_{g,n}$. Precisamente:

$$\mathcal{C}_{g,n} = \{(m, [x]_{G_m}) : m \in \mathcal{M}_{g,n}, x \in C_m\}$$

dove C_m è un qualsiasi rappresentante della classe di isomorfismo $m \in \mathcal{M}_{g,n}$, ovvero una curva di genere g con n punti marcati, e $G_m = \text{Sym}(C_m)$ è il suo gruppo (finito) di automorfismi.

In particolare, il teorema 3 definisce una mappa fra orbifold con fibre che sono varietà (nel senso della definizione 12), la cui rappresentazione locale sono le varie mappe $p : \mathcal{C} \rightarrow U$. Nuovamente, il fatto che gli insiemi \mathcal{C} ricoprano un orbifold non è scontato (in questo caso \mathcal{C} non è nemmeno una orbicarta, ma un sotto-orbifold), ed anche in questo caso la dimostrazione tecnica di questo fatto esula dagli scopi di questa tesi. Ciò su cui intendiamo concentrarci è la mappa p . Diamone quindi una descrizione tramite la seguente:

Definizione 13 (Curva Universale). Siano g ed n tali che $2 - 2g - n < 0$. Si definisce curva universale la mappa fra orbifold $p : \mathcal{C}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$, le cui fibre sono varietà, la cui sottostante mappa fra spazi topologici è

$$p : \mathcal{C}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}, \quad (m, [x]_{G_m}) \rightarrow m;$$

e la cui rappresentazione locale è, per ogni $[C] = m \in \mathcal{M}_{g,n}$, la seguente scelta:

- l'orbicarta centrata in m :

$$\phi_m : U_m/G_m \rightarrow V_m;$$

dove $U_m \in \mathbb{C}^{3g-3+n}$ è l'aperto del teorema 3 corrispondente alla curva C , G_m è il gruppo di simmetrie della curva C , V_m è un aperto opportuno di $\mathcal{M}_{g,n}$;

- La seguente mappa olomorfa

$$p_m : \mathcal{C}_m \longrightarrow U_m,$$

dove p_m e \mathcal{C}_m sono la mappa e l'aperto del teorema 3, corrispondenti alla curva C .

- L'estensione dell'azione di G_m a \mathcal{C}_m definita dal teorema 3, che commuta per definizione con p_m ;
- il seguente isomorfismo centrato in \mathcal{C}_m/G_m :

$$\phi'_m : \mathcal{C}_m/G_m \longrightarrow V'_m;$$

dove V'_m è un opportuno sotto orbifold di $\mathcal{C}_{g,n}$ contenente \mathcal{C}_m/G_m , ristretta a cui ϕ'_m è l'identità.

La situazione è riassunta dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathcal{C}_m & \xrightarrow{p_m} & U_m & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \mathcal{C}_m/G_m & \xrightarrow{\quad p_m \quad} & U_m/G_m & & \\
 & \searrow \phi'_m & & \swarrow \phi_m & \\
 & \mathcal{C}_{g,n} & \xrightarrow{p} & \mathcal{M}_{g,n} &
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 G_m = \text{Sym}(C), \\
 m = [C].
 \end{array}$$

2.4 Compattificazione di Deligne-Mumford.

Come visto nel caso $\mathcal{M}_{0,n}$, non è detto che lo spazio dei moduli delle curve sia compatto. In effetti, spesso non è questo il caso. Cominciamo studiando il caso $n = 4$.

Compattificazione di $\mathcal{M}_{0,4}$.

Considerando il caso $\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{CP} \setminus \{0, 1, \infty\}$, si può intuire che una sua compattificazione debba essere isomorfa a \mathbb{CP} . Per rendere concreta questa intuizione, occorre stabilire quali oggetti geometrici siano rappresentati dai tre punti $0, 1$ e ∞ . E' evidente che tali oggetti non potranno essere curve di genere 0 con 4 punti marcati, in quanto queste sono già contenute nelle classi di equivalenza di $\mathcal{M}_{0,4}$.

Prendiamo in analisi il punto 0. Nello spazio $\mathcal{M}_{0,4}$ esso rappresenta il seguente limite:

$$\delta_{23|14} := \lim_{t \rightarrow 0} [(\mathbb{CP}; 0, 1, \infty, t)].$$

Potrebbe sembrare che una semplice (ma fallimentare) soluzione sia accettare che le curve abbiano punti marcati coincidenti. Ci si rende facilmente conto che ciò porta a complicazioni indesiderate considerando, nel limite precedente, diverse curve rappresentanti le classi di equivalenza. Precisamente, se si considera per ogni punto del limite il seguente biolomorfismo

$$\phi_t(z) = \frac{z}{t}$$

il limite precedente è riscritto come

$$\lim_{t \rightarrow 0} [(\mathbb{CP}; 0, \frac{1}{t}, \infty, 1)].$$

Nel secondo limite si otterrebbe l'identificazione del secondo punto con il terzo, mentre nel primo limite si otterrebbe l'identificazione del quarto punto con il primo.

Per ovviare al problema, è possibile invece sostituire il punto $0 \in \mathbb{CP}$ con un'intera copia di \mathbb{CP} , e identificare i punti $1, \infty$ in questa seconda copia come primo e quarto punto marcato. La curva che si ottiene è una curva nodale, data da due copie di \mathbb{CP} identificate nei rispettivi zeri, i cui punti marcati sono, ordinatamente, l'uno della seconda copia, l'uno della prima, l'infinito della prima e l'infinito della seconda. Ovviamente, l'ordine fra le due copie non ha rilevanza, dal momento che esiste sempre un automorfismo che manda l'una nell'altra scambiando i punti marcati.

Formalmente, stiamo considerando (la classe di isomorfismo de) la seguente curva nodale

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{CP}^2 : xy = 0\}$$

i cui punti marcati sono $x_1 = (0, 1), x_2 = (1, 0), x_3 = (\infty, 0), x_4 = (0, \infty)$.

Si noti che un automorfismo di tale curva, per ragioni topologiche, deve lasciare fisso il punto nodale. Sia $\sigma(x, y) = (y, x)$ l'automorfismo che scambia l'ordine delle due sfere di Riemann, allora tutti gli automorfismi di C sono coppie di automorfismi di \mathbb{CP} che lasciano fissi 0, eventualmente composti con σ . Di conseguenza anche la posizione dei punti marcati è irrilevante dal punto di vista della classe di equivalenza. La caratteristica distintiva di (C, x_1, \dots, x_4) è l'ordine con cui i punti marcati sono separati dal nodo. Precisamente, essa è isomorfa a qualsiasi curva (C, y_1, \dots, y_4) tale che y_1 e y_4 appartengano ad una componente irriducibile diversa da quella a cui appartengono y_2 e y_3 . Per concludere, definiamo, analogamente a $\delta_{23|14}$

$$\delta_{12|34} := \lim_{t \rightarrow \infty} [(\mathbb{CP}; 0, 1, \infty, t)], \quad \delta_{24|13} := \lim_{t \rightarrow 1} [(\mathbb{CP}; 0, 1, \infty, t)].$$

Compattificazione di $\mathcal{M}_{g,n}$

Prima di generalizzare la costruzione fatta nella sezione precedente, dobbiamo dare una descrizione più precisa di quali saranno gli oggetti limite delle curve di genere g con n punti marcati. Diamo la seguente

Definizione 14 (Curva stabile). Definiamo curva stabile con n punti marcati qualsiasi curva algebrica complessa compatta C tale che

1. Le uniche singolarità di C sono nodi semplici,
2. i punti marcati di C sono distinti e non coincidono con i nodi,
3. la curva $(C; x_1, \dots, x_n)$ ha un numero finito di automorfismi.

A meno che non sia diversamente specificato, assumeremo che le curve stabili siano connesse.

Per una curva algebrica C avere un nodo semplice in $z \in C$ significa che, in un opportuno intorno di z , la curva è isomorfa, come varietà complessa, a due dischi con i centri identificati, o, più precisamente, alla curva complessa di equazione $xy = 0$ in \mathbb{C}^2 in un intorno di 0. Vi sono due modi di desingularizzare un nodo. Diremo che un nodo è **normalizzato** se i due dischi con i centri identificati vengono rimpiazzati da dischi disgiunti. Diremo che un nodo è **lisciato** se i due dischi vengono sostituiti da un cilindro. Il genere di una curva stabile è il genere della curva ottenuta lisciando tutti i suoi nodi.

Si noti che la normalizzazione di una curva stabile non è necessariamente una curva connessa. In particolare, la condizione 3 della definizione precedente può essere sostituita da: tutte le componenti connesse della normalizzazione di C hanno un numero finito di automorfismi, ovvero, per ognuna di esse, detti g ed n il genere ed il numero dei suoi "punti speciali" (nodi e punti marcati), vale $2 - 2g - n < 0$.

Diamo ora il seguente:

Teorema 4. *Esistono un orbifold complesso compatto liscio di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ di dimensione $3g - 2 + n$, un orbifold complesso compatto liscio $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$ di dimensione $3g - 3 + n$ e una mappa*

$$p : \overline{\mathcal{C}}_{g,n} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

tali che

- $\mathcal{M}_{g,n} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è un sotto-orbifold aperto e denso, $\mathcal{C}_{g,n} \subset \overline{\mathcal{C}}_{g,n}$ è la sua antimmagine tramite p ;
- le fibre di p sono curve stabili di genere g con n punti marcati;
- ogni curva stabile di genere g con n punti marcati è isomorfa ad esattamente una fibra di p ;

- lo stabilizzatore di un punto $m \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è isomorfo al gruppo di automorfismi della corrispondente curva stabile C_m .

Lo spazio $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è detto **compattificazione di Deligne-Mumford** di $\mathcal{M}_{g,n}$, la famiglia $p: \overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è detta **curva universale**.

2.5 Un esempio di orbifold non banale: $\mathcal{M}_{1,1}$.

Come abbiamo visto $\mathcal{M}_{0,n}$ ha una struttura di orbifold banale, ovvero è una varietà, in quanto il gruppo di automorfismi della sfera con più di 3 punti fissi è sempre quello banale. Al fine di illustrare un esempio dove la struttura di orbifold sia più ricca, consideriamo il caso di tori complessi con un punto marcato.

Descrizione insiemistica

A meno di isomorfismo, ogni struttura di superficie di Riemann sul toro è ottenuta quotando \mathbb{C} per un suo sottogruppo additivo $L \simeq \mathbb{Z}^2$, ovvero un reticolo di rango 2 (su \mathbb{R}^2).

Essendo \mathbb{C}/L il quoziente di due gruppi abeliani, esso è un gruppo abeliano. Inoltre, agisce transitivamente su se stesso per traslazione, pertanto la posizione del punto marcato in \mathbb{C}/L è irrilevante. Assumeremo quindi, senza perdita di generalità, che quest'ultimo sia sempre $0 + L \in \mathbb{C}/L$.

Dati due reticoli $L, L' \simeq \mathbb{Z}^2$, sono biolomorfe tutte le mappe fra \mathbb{C}/L e \mathbb{C}/L' del tipo

$$z + L \mapsto az + b + L'$$

Con $a \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, $b \in \mathbb{C}$ tali che $aL \subset L'$. Le mappe olomorfe che mandano $0 + L$ in $0 + L'$ devono soddisfare inoltre la condizione $b = 0$, e sono morfismi di gruppi abeliani.

Da quanto descritto, si deduce che $\mathcal{M}_{1,1}$ è isomorfo all'insieme dei reticoli in \mathbb{C} di rango 2, a meno della relazione di equivalenza data dalla moltiplicazione per un numero complesso non nullo. Indicheremo tale relazione con " \sim ".

Identifichiamo ogni reticolo $L \subset \mathbb{C}$ con la coppia dei suoi generatori, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Due basi (z_1, z_2) , (w_1, w_2) rappresentano lo stesso reticolo se e solo se esiste un cambio di base a coefficienti in \mathbb{Z} , invertibile, che manda ordinatamente l'una nell'altra; ovvero se e solo se esistono $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tali che

$$w_1 = az_1 + bz_2, \quad w_2 = cz_1 + dz_2, \quad ab - cd = \pm 1.$$

Tali generatori sono \mathbb{R} -linearmente indipendenti, e perciò non nulli. Si ha quindi

$$(z_1, z_2) \sim (z_1/z_2, 1) =: (\tau, 1)$$

Dato che $(\tau, 1)$ e $(-\tau, 1)$ generano lo stesso reticolo, assumeremo sempre, senza perdita di generalità, che $\tau \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$. Inoltre identificheremo ogni punto τ in \mathbb{H} con il reticolo $(\tau, 1)$ da esso rappresentato. Definiamo infine

$$\text{SL}(2, \mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) : ab - cd = 1 \right\}.$$

Possiamo dare la seguente

Proposizione 3. *Sia l'azione di $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ su \mathbb{H} data da*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Allora si ha

$$\mathcal{M}_{1,1} \simeq \mathbb{H}/\text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

Dimostrazione. Siano L ed L' due reticoli di rango 2. Essi sono rappresentati da due punti $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$. I due reticoli sono isomorfi se e solo se esiste un cambio di base invertibile a coefficienti in \mathbb{Z} che manda $(\tau, 1)$ in $(z_1, z_2) \sim (\tau', 1)$. Ciò equivale a richiedere che esistano $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\begin{cases} z_1 = a\tau + b \\ z_2 = c\tau + d \end{cases}, \quad z_1/z_2 = \tau', \quad ab - cd = 1$$

dove il determinante non può essere -1 perchè il vettore τ' appartiene al semipiano superiore per ipotesi, e pertanto il cambio di base preserva l'orientazione. \square

Si noti che, dal momento che $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ non ha cardinalità finita, l'isomorfismo sopra descritto non è una carta globale orbifold.

Descrizione topologica.

Al fine di studiare la struttura topologica di $\mathcal{M}_{1,1}$ occorre studiare l'azione di $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ su \mathbb{H} , ed è tutt'altro che semplice. Per questo motivo, ci avvaliamo della seguente proposizione. Per avere informazioni più precise in merito, è possibile consultare [\[23\]](#)

Proposizione 4. *Si considerino le seguenti matrici $S, T \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$*

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

S e TS generano moltiplicativamente $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Sia $F := \{z \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} \leq \text{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1\}$. Sia \mathcal{F} l'insieme F quotientato rispetto alla seguente relazione di equivalenza:

$$x \sim y \iff x, y \in \partial F, \quad |\text{Re}(x)| = |\text{Re}(y)|, \quad \text{Im}(x) = \text{Im}(y).$$

Allora si ha che

- \mathcal{F} è topologicamente isomorfo a $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$;
- $D := F \setminus \{z \in \partial F : \mathrm{Re}(z) < 0\}$ è il dominio fondamentale di $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, ovvero interseca ogni sua orbita in un solo punto.

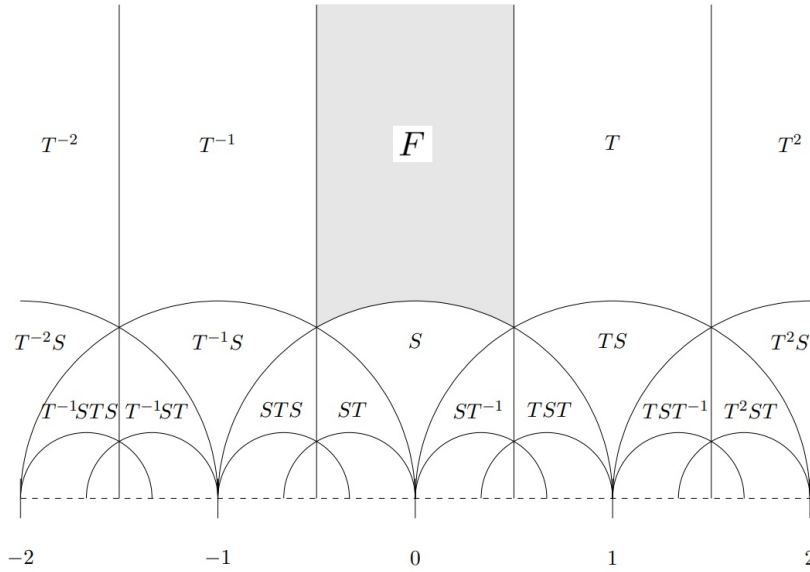


Figura 2.1: Il dominio fondamentale F e le sue immagini tramite le mappe T ed S . Questo disegno è tratto da [23].

Si noti che \mathcal{F} è semplicemente l'insieme F dove si è identificata la frontiera rispetto alla riflessione sull'asse immaginario. Da ciò si deduce inoltre che $\mathcal{M}_{1,1}$ è descritto topologicamente da una sfera privata di un punto, quello che in \mathbb{H} è il punto ad infinito.

Compattificazione.

Compattificando \mathcal{F} si ottiene $\overline{\mathcal{F}}$, topologicamente isomorfo ad una sfera, nonché topologicamente isomorfo a $\overline{\mathcal{M}}_{1,1}$. Precisamente, abbiamo aggiunto a $\mathcal{M}_{1,1}$ l'unica curva nodale di genere 1, ottenuta da una sfera con un punto marcato diverso da 0 e ∞ , identificando 0 e ∞ . Si noti che tale curva gode di un unico automorfismo non banale, dato da un automorfismo della sfera che tiene fisso il punto marcato e scambia 0 e ∞ .

Si noti inoltre che tale curva nodale è rappresentata in \mathbb{H} da $\tau = \infty$, ovvero dal reticolo L generato da $(1, \infty)$. Ovviamente, non ha senso considerare il quoziente \mathbb{C}/L , dato che L non è contenuto in \mathbb{C} . E' possibile però considerare il quoziente $\mathbb{C}\mathbb{P}/L$ e si ottiene proprio la curva desiderata.

Orbicarte locali.

Al fine di dare una descrizione della struttura di orbifold di $\mathcal{M}_{1,1}$, occorre studiare gli automorfismi dei singoli tori complessi. Lo facciamo con la seguente

Proposizione 5. *Sia $\tau \in \mathbb{H}$. Il gruppo di automorfismi del toro complesso rappresentato da τ è isomorfo a uno dei seguenti*

1. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, se esistono $n, m \in \mathbb{Z}$ tali che $n|m^2 + m + 1$ e che $\tau = \frac{2m+1}{2n} + \frac{i\sqrt{3}}{2n}$
2. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, se esistono $n, m \in \mathbb{Z}$ tali che $n|m^2 + 1$ e che $\tau = \frac{m}{n} + \frac{i}{n}$;
3. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nei casi restanti.

Dimostrazione. Ogni automorfismo del toro rappresentato da τ è a sua volta rappresentato da una matrice $M \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ tale che $M\tau = \tau$, ovvero esistono $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \tau, \quad ad - cb = 1.$$

Assumiamo $c = 0$. In questo caso vi sono due soluzioni banali date da $c = b = 0$ e $a = d = \pm 1$, ovvero dalla matrice identità e dalla sua opposta, pertanto per ogni τ il gruppo di automorfismi contiene una copia di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Assumiamo ora $c \neq 0$. Poniamo $\tau = A + iB$, allora dalla prima equazione si deducono le seguenti due equazioni per parte reale e parte immaginaria

$$\begin{cases} 2cA = a - d \\ cB^2 - cA^2 + (a - d)A + b = 0 \end{cases}$$

Dalla prima si deduce che $cA \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Sostituendo $(a - d)$ nella seconda equazione si può ottenere il seguente sistema

$$\begin{cases} a = d + 2cA \\ -b = c(A^2 + B^2) \end{cases}$$

Dalla quale si deduce che $|\tau|^2 \in \frac{1}{c}\mathbb{Z}$. Sostituendo infine a e $-b$ nell'equazione $ad - bc = 1$ si ottiene, dopo alcuni calcoli

$$(d + cA)^2 + (cB)^2 = 1$$

Da cui si deduce che entrambi i termini elevati al quadrato sono minori di uno. Dato che cA è semi intero, A può essere solamente della forma $\frac{-d}{c} \pm \frac{1}{2c}$ o della forma $\frac{-d}{c}$, e B in questi due casi è rispettivamente della forma $\frac{\sqrt{3}}{2c}$ o della forma $\frac{\pm 1}{c}$. Imponendo alle varie casistiche che $|\tau|^2 \in \frac{1}{c}\mathbb{Z}$ si ottengono le condizioni sulla divisibilità. A questo punto è possibile in entrambe le

casistiche scrivere le soluzioni M in funzione solamente di c e d e, elevandole rispettivamente alla seconda e alla terza, usando le relazioni già ricavate, si ottiene la matrice $-\mathbb{I}$.

Mostriamo il calcolo solo nel caso (2), che è meno laborioso: dai sistemi precedenti si può ricavare che $a = -d$. Si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(ad - bc) & b(d-d) \\ c(d-d) & -(ad - bc) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se ne deduce che M ha ordine 4 e che $\text{stab}(\tau) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ □

Indichiamo con ϕ_τ il generatore del gruppo di automorfismi del toro complesso rappresentato da τ . Come mostrato in precedenza, τ può avere ordine 6, 4 o 3. Indicheremo con $M_\tau \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ la matrice che rappresenta ϕ_τ , e con $\langle M_\tau \rangle$ il gruppo da essa generato.

Al fine di descrivere un atlante orbifold globale per $\mathcal{M}_{1,1}$ è sufficiente dare un atlante di orbicarte compatibili su una base di intorni della sua topologia. Nel nostro caso, è sufficiente considerare una base di intorni della topologia del dominio fondamentale D in \mathbb{H} , e le altre carte si ottengono componendo le precedenti con l'azione di $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

In particolare, per ogni punto $\tau \in D$ vorremmo trovare un filtro di intorni $I_\tau(\epsilon)$ in \mathbb{H} , con $\epsilon \in]0, \epsilon_\tau[$ tale che

- $I_\tau(\epsilon) \subset I_\tau(\epsilon'), \forall \epsilon \leq \epsilon'$,
- $I_\tau(\epsilon)$ sia contraibile,
- $I_\tau(\epsilon)$ sia $\langle M_\tau \rangle$ -stabile, ovvero

$$M_\tau u \in I_\tau(\epsilon) \quad \forall u \in I_\tau(\epsilon);$$

- $I_\tau(\epsilon)/\langle M_\tau \rangle \simeq \pi(U_\tau)$, dove $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ è la proiezione quoziente, ovvero

$$Mu = u', \quad M \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}), \quad u, u' \in I_\tau(\epsilon) \quad \implies \quad M \in \langle M_\tau \rangle$$

A priori non è scontato che un filtro di intorni di questo tipo esista. In verità è possibile dimostrare che, per un raggio sufficientemente piccolo, un tale filtro esiste e gli intorni sono unione finita di dischi connessi contenenti τ . In particolare, per ϵ_τ sufficientemente piccolo, è possibile prendere un disco di raggio $\epsilon < \epsilon_\tau$ centrato in τ ed unirlo alle sue immagini tramite le potenze di M_τ , che sono nuovamente dischi. Tale filtro rispetta tutte le richieste precedenti.

A questo punto la traslazione

$$U_\tau(\epsilon) := I_\tau(\epsilon) - \tau$$

è un filtro di intorni di $0 \in \mathbb{C}$. L'azione di M_τ su $U_\tau(\epsilon)$ si definisce nella maniera naturale come

$$\rho(M_\tau, u) := M_\tau(u + \tau) - \tau, \quad \forall u \in U_\tau(\epsilon).$$

Definendo

$$V_\tau(\epsilon) := \pi(I_\tau(\epsilon)) = I_\tau(\epsilon)/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

è possibile definire il seguente isomorfismo

$$t_\tau : U_\tau(\epsilon)/\langle M_\tau \rangle \longrightarrow V_\tau(\epsilon), \quad [u]_\rho \mapsto \pi(u + \tau) = [u + \tau]_{\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})}.$$

Le orbicarte locali hanno la seguente forma

$$\begin{array}{ccc} U_\tau(\epsilon) \times \langle M_\tau \rangle & \xrightarrow{\rho} & U_\tau(\epsilon) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_\tau(\epsilon) & \longrightarrow & U_\tau(\epsilon)/\langle M_\tau \rangle \xrightarrow{t_\tau} V_\tau(\epsilon) \end{array}$$

dove il diagramma è commutativo e le mappe suriettive sono le proiezioni sul primo componente del prodotto e sul quoziente.

Si deduce da un semplice calcolo diretto la seguente

Proposizione 6. *Sia $\tau \in D$. Allora*

1. se $\tau = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, allora $M_\tau = TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ed $\langle M_\tau \rangle$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$,
2. se $\tau = i$, allora $M_\tau = S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ed $\langle M_\tau \rangle$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,
3. $M_\tau = -\mathbb{I}$ nei casi restanti, ed $\langle M_\tau \rangle$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

E' inoltre possibile mostrare che anche per $\tau = \infty$ si ha $M_\tau = -\mathbb{I}$.

Si noti che i τ relativi al punto (1) e (2) sono semplicemente gli unici punti delle casistiche (1) e (2) della proposizione 5 appartenenti al dominio fondamentale D .

Si noti inoltre che in tutti i casi si ha $-\mathbb{I} \in \langle M_\tau \rangle$, ed in tutti i casi essa agisce banalmente su $I_\tau(\epsilon)$.

Conclusione

Da quanto discusso, $\overline{\mathcal{M}}_{1,1}$ è descritto topologicamente da una sfera, arricchita in ogni punto con l'azione banale del gruppo ciclico di ordine due, e con due punti particolari, su cui agiscono un gruppo di ordine 6 e uno di ordine 4.

Aggiungere un'azione banale su un punto di uno spazio topologico, sebbene cambi a tutti gli effetti la struttura orbifold dell'oggetto, non cambia davvero il modo in cui ce lo immaginiamo: esso, localmente, rimane isomorfo ad un aperto di \mathbb{C}^n , come una varietà. In questo senso l'azione banale di $-\mathbb{I}$ va intesa come una proprietà degli oggetti rappresentati dai singoli τ , ovvero la presenza di un automorfismo non banale per ogni toro complesso.

Per quanto riguarda i due punti speciali i e $\omega := \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, possiamo analizzare più precisamente la struttura locale attorno ad essi esplicitando ulteriormente le orbicarte locali. Negli opportuni intorno $U_\tau(\epsilon)$, $\tau = i, \omega$, l'azione delle matrici M_i ed M_ω è data, per $u \in U_\tau$, da

$$M_i.u := M_i(u + i) - i = \frac{-iu}{u + i}, \quad M_\omega.u := M_\omega(u + \omega) - \omega = \frac{u(1 - \omega)}{u + \omega}$$

Ponendo $f_\tau(u) = M_\tau.u$ otteniamo che i e ω sono le punte, rispettivamente, di un f_i -cono di ordine 2 e di un f_ω -cono di ordine 3. Entrambi i coni sono poi arricchiti dell'azione banale di $-\mathbb{I}$.

Capitolo 3

Teoria di Chern-Weil per Orbifold.

L'obiettivo di questa sezione è introdurre le classi di Chern per *orbibundle* lisci, ovvero il corrispettivo per gli orbifold dei fibrati vettoriali lisci per le varietà.

Le classi di Chern sono elementi dello spazio di coomologia, e sono essenzialmente un invariante topologico. Nel caso delle varietà, però, è possibile introdurre con una costruzione geometrico-differenziale tramite la coomologia di De Rham, ovvero l'omomorfismo di Chern-Weil. Nel caso degli orbifold, invece, vengono solitamente introdotte tramite l'uso di Lie-gruppoidi. Questo approccio, sebbene abbia il pregio di definire univocamente le classi di Chern per ogni tipo di orbibundle, ha il difetto di essere molto astratto.

Come spiegato in [13], pagina 47, è possibile generalizzare l'omomorfismo di Chern-Weil agli orbifold, qualora questi siano "efficaci", ovvero qualora nessun elemento dei gruppi locali agisca in maniera banale tranne l'identità.¹ Quando si considerano orbifold inefficaci, può accadere che gli orbibundle ivi definiti siano privi di un numero sufficiente di sezioni locali, e questo impedisce di definire globalmente delle connessioni su di essi, impedendo di fatto la definizione dell'omomorfismo di Chern-Weil.

Nelle pagine che seguono mostreremo che, allentando un po' la definizione di connessione, è possibile definire l'omomorfismo di Chern-Weil su una vasta gamma di orbibundle, ed in particolare su tutti quelli considerati in questa tesi.

Alcuni dei risultati contenuti in questo capitolo sono originali. In particolare, la prima sezione è essenzialmente una riformulazione nel formalismo adottato in questa tesi di risultati noti, e sono prevalentemente tratti da [24], [13], [10] e [22]. La seconda sezione, invece, contiene una definizione di connessione che è leggermente più generale di quella classica (data in [24]),

¹In particolare spiega come ciò sia possibile anche in un caso un po' più generale, ovvero quello di un *good orbibundle* su un orbifold inefficace.

e le dimostrazioni relative ad esistenza globale e locale di tali connessioni sono originali. Le ultime tre sezioni, relative ad invarianti di curvatura, classi di Chern, line orbibundle e divisori, sono semplicemente un adattamento di risultati classici per varietà (e per orbifold efficaci) alle connessioni precedentemente definite.

3.1 Da varietà a orbivarietà.

Molte delle strutture che si possono definire in ambito di varietà si generalizzano abbastanza agilmente alle orbivarietà. In particolare, tutte quelle strutture che hanno una definizione locale.

In questo capitolo indicheremo con X un'orbivarietà complessa liscia. Indicheremo inoltre con $V' \cong U'/G'$ una sua generica orbicarta, e con $V \cong U/G$ una generica sotto-orbicarta di V' . Indicheremo con $j : U \rightarrow U'$ l'embedding olomorfo di U in U' e con $a : G \rightarrow G'$ il morfismo di gruppi, come nella definizione di sotto-orbicarta.

Fibrati vettoriali

Diamo innanzitutto la seguente definizione classica

Definizione 15 (Fibrato vettoriale complesso). Sia $p : E \rightarrow B$ una mappa continua suriettiva fra spazi topologici. E si dice fibrato vettoriale complesso di rango n se $\forall b \in B$

- $p^{-1}(b)$ è uno spazio vettoriale complesso di dimensione n ,
- esiste una trivializzazione locale in un intorno aperto $U \subset B$ di b , ovvero un omeomorfismo $g : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow p^{-1}(U)$ tale che $\forall b' \in U$ la restrizione di g a $b' \times \mathbb{C}^n$ sia un isomorfismo lineare di spazi vettoriali tra \mathbb{C}^n e $p^{-1}(b')$

La definizione di fibrato vettoriale reale è del tutto analoga, con l'unica differenza che si sostituisce \mathbb{C} con \mathbb{R} . Nel seguito scriveremo semplicemente "fibrato vettoriale" quando vorremo riferirci indifferentemente a fibrati reali o complessi.

Un fibrato vettoriale reale (o complesso) si dice fibrato vettoriale \mathcal{C}^∞ (o olomorfo) se B è una varietà liscia (o complessa) ed E ammette una struttura di varietà liscia (o complessa) tale per cui le trivializzazioni locali sono \mathcal{C}^∞ (o biolomorfismi).

Possiamo generalizzare questa definizione di fibrato ad un'orbicarta

Definizione 16. Un fibrato vettoriale orbifold locale di rango n su un'orbicarta locale V è un fibrato vettoriale $p_V : E_V \rightarrow U$, assieme ad un'estensione ad E_V dell'azione di G su U che sia lineare e biiettiva sulle fibre.

Per brevità, nel seguito indicheremo i fibrati vettoriali orbifold locali anche con il termine **orbibundle locali**.

Un fibrato vettoriale si dice triviale se è possibile ricoprirlo con un'unica trivializzazione locale. Nel caso in cui il fibrato sia C^∞ , è possibile mostrare che esso è sempre triviale se lo spazio di base è contraibile ([18] corollario 4.8), come nel caso della definizione precedente. Gli orbibundle locali pertanto giocheranno per gli orbifold lisci il ruolo che le trivializzazioni giocano per le varietà.

Introduciamo prima la seguente

Notazione 1. *Dati due fibrati vettoriali $p : E \rightarrow B$ e $p' : E' \rightarrow B'$, una mappa fra fibrati è il dato di una mappa $f : B \rightarrow B'$ ed una mappa continua $F_f : E \rightarrow E'$ tale che il seguente diagramma commuti*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F_f} & E' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

e tale che la restrizione di F_f a $p^{-1}(b)$ sia lineare $\forall b \in B$. Se tale restrizione è sempre un isomorfismo, diremo che la mappa è biiettiva sulle fibre.

Diremo che la mappa F_f è un'estensione ad E della mappa f , e adotteremo, per qualsiasi mappa f fra le basi di due fibrati, la notazione F_f per indicare la sua estensione alle fibre.

Si noti che, dal momento che $E_V \cong V \times \mathbb{C}^n$ è contraibile, un orbibundle locale è essenzialmente un'orbicarta per l'aperto E_V/G che soddisfa a delle specifiche proprietà di linearità. Analogamente a quanto fatto per le orbicarte, quindi, diremo che E_V è un sotto-orbibundle di $E_{V'}$, e scriveremo $E_V \leq E_{V'}$, se j si estende ad una mappa fra fibrati $F_j : E_V \rightarrow E_{V'}$, biiettiva sulle fibre, che commuti con l'azione di gruppo, ovvero tale che

$$F_j(g.e) = a(g).F_j(e), \quad \forall e \in E_V.$$

Diamo la seguente

Definizione 17. Un sistema di orbibundle locali compatibili su X è il dato, per ogni orbicarta V di X , di un orbibundle locale E_V tale che per ogni sotto-orbicarta W di V l'orbibundle locale E_W sia un sotto-orbibundle di E_V .

Possiamo allora dare la seguente

Definizione 18 (Fibrato vettoriale orbifold). Un fibrato vettoriale orbifold di rango n su X , indicato con $p : E \rightarrow X$, è il dato di una mappa suriettiva e continua fra spazi topologici $p : \hat{E} \rightarrow \hat{X}$, dove \hat{X} indica lo spazio topologico sottostante X , tale che:

i) per ogni orbicarta $V \cong U/G$ di X esistano

1. un fibrato vettoriale orbifold locale $p_V : E_V \longrightarrow V$ di rango n ,
2. un isomorfismo fra $p^{-1}(V)$ e E_V ,

tali che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc}
 E_V & \xrightarrow{p_V} & U \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E_V/G & \xrightarrow{p} & U/G \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 p^{-1}(V) & \longrightarrow & V
 \end{array}$$

dove le prime mappe verticali sono la proiezione sul quoziente per l'azione di G , le seconde sono isomorfismi;

ii) i fibrati vettoriali locali $E_V/G \cong p^{-1}(V)$ siano un sistema di orbibundle locali compatibili su X .

Si noti che il sistema di orbibundle locali E_V è anche un ricoprimento di orbicarte compatibili di \hat{E} , e lo dota quindi di una struttura di orbifold, che indichiamo con E . Si noti inoltre che, scegliendo per ogni x un'orbicarta V_x che lo contenga, la mappa p della definizione precedente è una mappa fra orbifold, nel senso della definizione 12.

Un fibrato vettoriale orbifold si dice olomorfo (o C^∞) se E è un orbifold complesso (o reale) liscio e se gli orbibundle locali sono fibrati vettoriali olomorfi (o lisci). Per brevità, nel seguito indicheremo i fibrati vettoriali orbifold anche con il termine inglese **orbibundle**.

Mappe di transizione.

In questa sezione indichiamo con $V_\alpha \cong U_\alpha/G_\alpha$ e $V_\beta \cong U_\beta/G_\beta$ due orbicarte locali di orbifold reale liscio X tali che $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$. Sia E un orbibundle olomorfo su X e si consideri un'orbicarta locale $V \cong U/G$ tale che $V \leq V_\alpha$, $V \leq V_\beta$. Direttamente dalla definizione di compatibilità fra orbicarte e fibrati locali, si ha il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 E_{V_\alpha} & \xleftarrow{F_{j^\alpha}} & E_V & \xrightarrow{F_{j^\beta}} & E_{V_\beta} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 U_\alpha & \xleftarrow{j^\alpha} & U & \xrightarrow{j^\beta} & U_\beta \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 V_\alpha & \xleftarrow{\supset} & V & \xrightarrow{\subset} & V_\beta
 \end{array}$$

Definiamo **mappa di transizione locale** la seguente composizione

$$T_V : \text{Im}(F_{j^\alpha}) \subset E_{V_\alpha} \longrightarrow \text{Im}(F_{j^\beta}) \subset E_{V_\beta}, \quad T_V := F_{j^\beta} \circ F_{j^\alpha}^{-1}.$$

Tale mappa è ovviamente un diffeomorfismo. A differenza del caso delle varietà, tale mappa non è definita su (un sollevamento de) il fibrato vettoriale su tutta l'intersezione $V_\alpha \cap V_\beta$, ma questo problema può essere aggirato tramite partizioni dell'unità. Il vero problema, è che tale mappa non è unica, nemmeno localmente, nel senso che dipende dall'orbicarta locale scelta su V . Si ha però

Lemma 2. *Siano $V_i \cong U_i/G_i$, per $i = 1, 2$, due orbicarte locali tali che V_1 e V_2 siano lo stesso aperto V di \hat{X} e tali che*

$$V_i \leq V_\alpha, V_i \leq V_\beta,$$

e siano T_V^i , per $i = 1, 2$, le mappe di transizione ad esse rispettivamente associate. Si ha

i) *Esistono $g \in G_\alpha$ e $h \in G_\beta$ tali che*

$$h.T_V^2(e) = T_V^1(g.e)$$

per ogni e nel dominio di T_V^2 ,

ii) *se $\text{Im}(T_V^1) = \text{Im}(T_V^2)$, esiste $g \in G_\alpha$ tale che*

$$T_V^2(e) = T_V^1(g.e)$$

per ogni e nel dominio di $T_V^2(e)$.

Dimostrazione. La dimostrazione di (i) è una semplice conseguenza del fatto che $T_V^2(e)$ e $T_V^1(g.e)$ sono identificati nello stesso punto del fibrato topologico (non vettoriale) \hat{E} sottostante E , a seguito delle quotizzazioni tramite le azioni locali. Questo implica che per ogni e esistono g ed h che soddisfano all'equazione di (i) ma, dal momento che i gruppi locali sono finiti e le azioni sono olomorfe, tali g ed h sono unici su tutto il dominio di T_V^2 . La condizione $\text{Im}(T_V^1) = \text{Im}(T_V^2)$ implica che l'azione di h ristretta a $\text{Im}(T_V^1)$ sia un endomorfismo. Se h agisce in maniera banale su U_β l'equazione di (ii) è verificata. Si supponga che non sia questo il caso e si riscriva l'equazione come

$$T_V^2(e) = h^{-1}.T_V^1(g.e) = h^{-1}.F_{j_1^\beta} \circ F_{j_1^\alpha}^{-1}(g.e).$$

dove $j_1^x : U_1 \longrightarrow U_x$, per $x = \alpha, \beta$, è il morfismo che realizza la relazione di sottorbicarta. Dal momento che h^{-1} agisce in maniera non banale, deve esistere un elemento $h' \in G_1$ che produce su V_1 la stessa identificazione di h^{-1} , ovvero tale che

$$h^{-1}.F_{j_1^\beta}(\cdot) = F_{j_1^\beta}(h'.(\cdot)).$$

Per la definizione di sotto-orbicarta, esiste $h'' \in G_\alpha$ tale che

$$h'.F_{j_1^\alpha}^{-1}(\cdot) = F_{j_1^\alpha}^{-1}(h''.(\cdot))$$

da cui si ottiene

$$h^{-1}.F_{j_1^\beta} \circ F_{j_1^\alpha}^{-1}(g.e) = F_{j_1^\beta} \circ F_{j_1^\alpha}^{-1}(h''g.e).$$

□

Si noti che, nel lemma precedente, la condizione che V_1 e V_2 siano lo stesso aperto di \hat{X} è anche troppo restrittiva. In particolare, dal momento che la costruzione è locale, è sufficiente considerare due mappe di transizione T_{V_1} e T_{V_2} tali che $V_1 \cong U_1/G_1$ e $V_2 \cong U_2/G_2$ abbiano intersezione non banale. Infatti, per la definizione di compatibilità fra orbicarte, esse ammettono in un intorno di ogni punto della loro intersezione un'orbicarta $V \cong U/G$ tale che $V \leq V_1$ e $V \leq V_2$. A questo punto è possibile considerare i sollevamenti in U_1 ed U_2 di V , e le loro immagini tramite le rispettive mappe j_α^1 e j_α^2 che realizzano le relazioni di sotto-orbicarta $V_1 \leq V_\alpha$ e $V_2 \leq V_\alpha$. Le restrizioni delle mappe T_{V_1} e T_{V_2} a queste immagini sono mappe di transizione che soddisfano alle ipotesi del lemma precedente.

Un orbibundle è interamente descritto dal dato di un orbibundle locale per ogni orbicarta e dalle estensioni alle fibre delle relazioni di sotto-orbicarta. Analogamente a quanto accade per i fibrati vettoriali sulle varietà, vale, sotto opportune ipotesi di compatibilità, il viceversa.

Sia \mathcal{V} l'insieme di tutte le orbicarte di X , dato un sistema di orbibundle locali $\{E_V\}_{V \in \mathcal{V}}$ ed una scelta di un'estensione alle fibre delle mappe j che realizzano le relazioni di sotto-orbicarta, lo spazio topologico sottostante può essere definito come

$$\hat{E} = \frac{\bigcup_{V \in \mathcal{V}} E_V}{\sim}, \quad e_1 \sim e_2 \iff f(e_1) = f(e_2)$$

dove, se e_1 ed e_2 non appartengono allo stesso fibrato, f è una generica mappa F_j che estende la relazione di sotto-orbicarta, ed è l'azione di un elemento del gruppo locale se invece appartengono allo stesso fibrato. E' poi possibile costruire una mappa continua

$$p : \hat{E} \longrightarrow \hat{X}$$

definita da

$$p([e]_\sim) = [p_V(e)]_\sim, \quad \forall V \in \mathcal{V}, e \in E_V.$$

Tale costruzione può produrre delle identificazioni "indesiderate", a causa del fatto che le estensioni delle mappe j possono essere scelte in maniera incoerente, e produrre di conseguenza una mappa $p : \hat{E} \longrightarrow \hat{X}$ le cui fibre non sono isomorfe agli orbibundle locali. Condizione necessaria e sufficiente

affinché la costruzione sopra descritta produca effettivamente un orbibundle è la seguente:

$$\exists g \in G_3 : F_{j_{13}}(e) = g \cdot F_{j_{23}} \circ F_{j_{12}}(e) \quad (3.1)$$

per ogni scelta di tre orbicarte $V_i \cong U_i/G_i$ per $i = 1, 2, 3$ tali che $V_1 \leq V_2 \leq V_3$ e di relative mappe che realizzino le rispettive relazioni di sotto-orbicarta j_{12}, j_{23} e j_{13} .

Tale condizione è l'equivalente per orbibundle della **condizione di co-ciclico** per fibrati vettoriali lisci.

Il fatto che il dato di un sistema di orbibundle locali $\{E_V\}_{V \in \mathcal{V}}$, assieme ad una scelta di un'estensione alle fibre che realizzano le relazioni di sotto-orbicarta che soddisfino alla condizione 3.1 definisca effettivamente un orbibundle secondo la costruzione precedente è un risultato che viene dato da Satake in [24] per orbifold efficaci. Egli stesso nell'articolo non ne riporta la dimostrazione, dal momento che essa è essenzialmente identica a quella che si da per il caso analogo per fibrati vettoriali lisci su varietà. Anche nel caso di orbibundle inefficaci è possibile adottare l'ovvia generalizzazione della dimostrazione per l'analogo risultato per varietà, ma la omettiamo, dal momento che esula dagli scopi di questa tesi.

Nel seguito, alla luce di questa costruzione, descriveremo tutti gli orbibundle come il dato degli orbibundle locali e dell'estensione alle fibre delle mappe j . Il fatto che la condizione 3.1 sia rispettata sarà sempre chiaro dalla definizione.

Operazioni fra fibrati.

Prodotti tensori, somme dirette e duali possono essere definiti naturalmente su un orbibundle considerando le rispettive costruzioni sugli orbibundle locali, ed estendendo le azioni di gruppo locali e gli embedding che realizzano la relazione di sottorbicarta con, rispettivamente, prodotti tensori, somme dirette e inverse-trasposte delle estensioni alle fibre di tali mappe. Precisamente

Definizione 19. Sia X un'orbivarietà complessa liscia. Siano E e T due orbibundle su X .

Indichiamo con $V' \cong U'/G'$ una sua generica orbicarta di X , e con $V \cong U/G$ una generica sotto-orbicarta di V' . Indichiamo inoltre con $j : U \rightarrow U'$ l'embedding olomorfo di U in U' , come nella definizione di sotto-orbicarta.

Per distinguere le estensioni alle fibre F_j ed F_g della mappa j e dell'azione di gruppo di un generico elemento $g \in G$ rispetto a diversi fibrati, indichiamo il fibrato ad apice della mappa. Definiamo

- (Somma diretta) Indichiamo con $E \oplus T$ l'orbibundle definito da

$$(E \oplus T)_V := E_V \oplus E_T, \quad F_j^{E \oplus T} := F_j^E \oplus F_j^T, \quad F_g^{E \oplus T} := F_g^E \oplus F_g^T.$$

- (Prodotto tensore) Indichiamo con $E \otimes T$ l'orbibundle definito da

$$(E \otimes T)_V := E_V \otimes E_T, \quad F_j^{E \otimes T} := F_j^E \otimes F_j^T, \quad F_g^{E \otimes T} := F_g^E \otimes F_g^T.$$

- (Duale) Indichiamo con E^* l'orbibundle definito da

$$(E^*)_V := E_V^*, \quad F_j^{E^*} := (F_j^E)^{-*}, \quad F_g^{E^*} := (F_g^E)^{-*}.$$

dove con $^{-*}$ indichiamo l'inversa dell'applicazione aggiunta.

Sottolineiamo che le definizioni precedenti, che specificano semplicemente dei sistemi di orbibundle locali, definiscono effettivamente degli orbibundle.

Scegliendo due sistemi di riferimento locali $e := \{e_1, \dots, e_k\}$ e $t := \{t_1, \dots, t_h\}$ per i fibrati locali E_V e T_V possiamo descrivere più accuratamente le estensioni alle fibre sopra considerate. Lo facciamo in particolare per l'estensione alle fibre dell'azione di $g \in G$ (per la mappa j la costruzione è del tutto analoga). In particolare tale estensione è rappresentata da una matrice, che indicheremo nuovamente con F_g , con il fibrato corrispondente ad apice.

L'insieme $\{e_1, \dots, e_k, t_1, \dots, t_h\}$ è un sistema di riferimento locale per la somma diretta $(E \oplus T)_V$. In tale sistema di riferimento si ha

$$F_g^{E \oplus T} = \begin{pmatrix} F_g^E & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & F_g^T \end{pmatrix}.$$

Nel caso del prodotto tensore $(E \otimes T)_V$ un sistema di riferimento locale è dato da $\{e_i \otimes t_j\}_{i \leq k, j \leq h}$, e le sue sezioni, più che come vettori, vanno immaginate come matrici $k \times h$. Precisamente una sezione $s = \sum_{i,j} s_{ij} e_i \otimes e_j$ di $(E \otimes T)_V$ è rappresentata dalla matrice $S := [s_{ij}]_{i \leq k, j \leq h}$. Alla luce di questa interpretazione, l'azione di g su S è data da

$$g.S = F_g^E S (F_g^T)^\dagger$$

dove con † indichiamo la trasposta se il fibrato è reale, e la trasposta coniugata se è complesso.

Nel caso del fibrato duale E^* è possibile scegliere come sistema di riferimento locale quello duale ad e , che indichiamo con $e^* := \{e_i^*\}_{i \leq k}$. Tale sistema di riferimento è definito da

$$\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

l'azione di g sulle fibre di E^* è rappresentata localmente dalla moltiplicazione per la seguente matrice

$$F_g^{E^*} = (F_g^E)^{-\dagger}$$

dove con $^{-\dagger}$ intendiamo l'inversa della trasposta coniugata.

Sezioni e forme differenziali.

Per una varietà complessa M di dimensione n , si definisce il fibrato cotangente complesso come

$$T^*M := T_{\mathbb{R}}^*M \otimes \mathbb{C}$$

dove $T_{\mathbb{R}}^*M$ è il fibrato cotangente di M come varietà reale.

Siano $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ le coordinate locali reali di M , e siano $z_i = x_i + iy_i$ le sue coordinate complesse. È noto che le fibre di $T_{\mathbb{R}}^*M$ sono lo spazio vettoriale generato da $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i} \right\}_{i \leq n}$ su \mathbb{R} . Le fibre di T^*M sono lo spazio vettoriale su \mathbb{C} con gli stessi generatori. Poniamo

$$\frac{\partial}{\partial z_i} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i \frac{\partial}{\partial y_i} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + i \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$$

ovviamente anche $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right\}_{i \leq n}$ è una base, fibra per fibra, di $T_{\mathbb{C}}^*M$. Siano $T_{1,0}^*M$ e $T_{0,1}^*M$ i fibrati vettoriali complessi su M le cui fibre sono, rispettivamente, lo spazio vettoriale generato da $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_i} \right\}_{i \leq n}$ e lo spazio vettoriale generato da $\left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right\}_{i \leq n}$. Tali fibrati sono detti, rispettivamente, fibrato cotangente olomorfo e fibrato cotangente antiolomorfo. Si ha

$$T^*M = T_{1,0}^*M \oplus T_{0,1}^*M.$$

I pull-back di mappe olomorfe mantengono questa decomposizione. Ricordiamo infine che il differenziale esterno df di una mappa fra varietà complesse si decompone come somma dei differenziali olomorfo e antiolomorfo, indicati con ∂f e $\bar{\partial} f$. Precisamente:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i = \partial f + \bar{\partial} f$$

Se f è olomorfa si ha $\bar{\partial} f = 0$, che è una versione delle equazioni di Cauchy-Riemann.

Dato che l'azione di $g \in G$ su U è una mappa biolomorfa, il suo differenziale è in ogni punto una matrice invertibile, ed è quindi possibile definire i fibrati cotangenti sopra descritti estendendo l'azione alle fibre tramite push-forward.

Lo facciamo esplicitamente per il fibrato cotangente reale:

Definizione 20 (Fibrato cotangente reale orbifold). Sia X un orbifold complesso liscio. Il suo fibrato cotangente reale $T_{\mathbb{R}}^*X$ è il dato, per ogni orbicarta locale V , del fibrato cotangente reale di U , ovvero

$$(T_{\mathbb{R}}^*X)_V := T_{\mathbb{R}}^*U$$

Detta $\rho_g(z)$ l'azione olomorfa di $g \in G$ su $z \in U$, la sua azione $g.(z, \xi)$ su (z, ξ) è data da

$$g.(z, \xi) := (g.z, \xi d\rho_g|_z^{-1}).$$

L'estensione $F_j := Tj : T_{\mathbb{R}}^*U \rightarrow T_{\mathbb{R}}^*U'$ di $j : U \rightarrow U'$ è data da

$$(z, \xi) \mapsto (j(z), \xi dj|_z^{-1}).$$

Tale fibrato è ovviamente un orbibundle \mathcal{C}^∞ . Inoltre, è possibile definire in maniera analoga fibrato tangente e cotangente, olomorfo, antiolomorfo, complesso e reale, e si ritrovano le stesse relazioni che esistono per varietà, ovvero

$$T^*X = T_{\mathbb{R}}^*X \otimes \mathbb{C}, \quad T^*X = T_{1,0}^*X \oplus T_{0,1}^*X.$$

Per definire coerentemente le sezioni di un fibrato, non è sufficiente richiedere che siano il dato locale di sezioni del fibrato locale, ma è anche necessario che siano equivarianti rispetto all'azione di G estesa alle fibre. Precisamente

Definizione 21. Una sezione α di orbibundle $E \rightarrow X$ è il dato, per ogni orbicarta locale V , di una sezione $\alpha_V : U \rightarrow E_V$ tale che

$$\alpha_V(g.u) = F_g \alpha_V(u), \quad \alpha_{V'}(j(u)) = F_j \alpha_V(u), \quad \forall g \in G, u \in U.$$

Data una mappa fra fibrati vettoriali $(F_f, f) : (E, U) \rightarrow (E', U')$, biiettiva sulle fibre, è possibile definire il pull-back $f^*\alpha : U \rightarrow E$ tramite f di una sezione $\alpha : U' \rightarrow E'$ come

$$f^*\alpha(u) = F_f|_u^{-1} \alpha(f(u)).$$

Le condizioni della definizione precedente si possono quindi riscrivere come

$$g^*\alpha = \alpha, \quad j^*\alpha = \alpha,$$

dove g^* indica il pull-back rispetto all'azione di g . In questo senso possiamo definire le forme differenziali su un orbifold come nella seguente:

Definizione 22 (Forme differenziali orbifold). Una forma differenziale locale α su V è una forma differenziale G -invariante su U . Una forma differenziale su X è il dato, per ogni orbicarta V , di una forma differenziale locale α_V , compatibile rispetto alla relazione di sotto-orbicarta. Precisamente

$$\alpha_V = j^* \alpha_{V'}.$$

Si noti che la definizione precedente si può intendere anche per k -forme differenziali, ovvero sezioni del fibrato $\bigwedge^k T_{\mathbb{R}}^*$, dove il wedge-product è computato sulle singole orbicarte.

Una k -forma α si dice \mathcal{C}^∞ o olomorfa se lo sono le sue rappresentazioni locali α_V . A meno che non sia differentemente specificato, nel seguito daremo per scontato che ogni forma differenziale sia di classe \mathcal{C}^∞ .

Omologia e coomologia.

I gruppi di omologia e coomologia su \mathbb{Q} di un orbifold complesso liscio sono, per definizione, quelli dello spazio topologico sottostante, dove si adotta la seguente convenzione: sia Y un sotto-orbifold irriducibile di dimensione k di X , e siano, rispettivamente, \hat{Y} e \hat{X} gli spazi topologici sottostanti. Indichiamo con $H_k(X, \mathbb{Q})$ il gruppo di omologia orbifold di X e con $H_k(\hat{X}, \mathbb{Q})$ il gruppo di omologia simpliciale dello spazio topologico sottostante, ed indichiamo con $[\cdot]$ la classe di equivalenza del rispettivo gruppo di omologia. Si ha

$$[Y] := [Y]_{H_k(\hat{X}, \mathbb{Q})} = \frac{1}{m} [\hat{Y}]_{H_k(\hat{X}, \mathbb{Q})}$$

dove m è la cardinalità dello stabilizzatore di un punto generico di Y .

Per i gruppi di omologia e coomologia di un orbifold, vale la dualità di Poincaré. Precisamente

Teorema 5. *Per un orbifold liscio complesso compatto X di dimensione n esiste, per ogni $k \leq n$, un isomorfismo canonico*

$$PD : H^k(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_{n-k}(X, \mathbb{Q})$$

che viene detto **dualità di Poincaré**

Nel seguito indicheremo con PD sia la mappa precedentemente introdotta che la sua inversa. Inoltre, come è abitudine nel caso delle varietà, spesso la ometteremo.

I gruppi di omologia e coomologia di un orbifold a coefficienti in \mathbb{R} sono ottenuti, per definizione, estendendo il campo dei coefficienti dei gruppi in \mathbb{Q} ad \mathbb{R} . Precisamente

$$H_*(X, \mathbb{R}) := H_*(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}, \quad H^*(X, \mathbb{R}) := H^*(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}.$$

La dualità di Poincaré si estende ovviamente ai gruppi in \mathbb{R} .

Data una forma differenziale locale α_V su un'orbicarta V , il suo integrale contro una catena $C \subset V$ è

$$\int_C \alpha = \frac{1}{|G|} \int_{\pi^{-1} \circ \phi^{-1}(C)} \alpha$$

dove π è la proiezione quoziente da U a U/G .

Tramite partizioni dell'unità, è possibile definire l'integrazione su un generico sotto-orbifold Y di X , come spiegato, ad esempio, in [10].

Non è difficile mostrare che il differenziale di una forma G -invariante è ancora G -invariante, pertanto, analogamente a quanto si fa per varietà, è possibile definire una coomologia di De Rham per forme differenziali su un orbifold. Non entreremo nei dettagli di questa costruzione, ma citiamo semplicemente il seguente risultato.

Teorema 6. *Sia X un orbifold e sia $H_{dR}^*(X)$ il suo anello di coomologia di De Rham a coefficienti in \mathbb{R} . Sia invece $H^*(X, \mathbb{R})$ l'anello di coomologia simpliciale a coefficienti in \mathbb{R} . Si ha*

$$H_{dR}^*(X) \cong H^*(X, \mathbb{R}).$$

Sotto opportune ipotesi, data una mappa fra orbifold $f : X \rightarrow Y$, è possibile descrivere il pull-back di una classe di coomologia di Y in termini di una forma differenziale che la rappresenti. Ciò, ad esempio, può essere fatto nel caso della definizione 12 di mappa le cui fibre siano varietà, o nel caso di sezioni di un fibrato vettoriale, considerate come mappe dallo spazio di base al fibrato. Precisamente, il pull-back tramite f di una forma differenziale α su Y viene semplicemente computato sulle orbicarte locali, rispetto ad un sollevamento della mappa ad esse. Le condizioni di compatibilità imposte sulla mappa garantiscono che tale pull-back definisca nuovamente una forma differenziale.

Disponendo della dualità di Poincarè, il push forward di una classe di coomologia può essere definito tramite il push forward della sua classe di omologia duale. Anche in questo caso, però, sotto opportune ipotesi, esso può essere descritto in termini differenziali, tramite l'integrazione sulle fibre. Precisamente, nel caso della definizione 12, qualora la mappa $F : X \rightarrow Y$ sia suriettiva, ed ogni suo sollevamento F_y ad un'orbicarta V_y centrata in $y \in Y$ abbia fibre compatte ed orientabili, è possibile scegliere opportune coordinate locali $b_1, \dots, b_k, f_1, \dots, f_h$, dove b_i rappresentano le coordinate sulla base e f_i le coordinate sulla fibra, e definire, per una forma differenziale α su X

$$(F_*\alpha)_{V_y} := \left(\int_{F_y^{-1}(\mathbf{b})} \alpha(b_1, \dots, b_k, f_1, \dots, f_h) \wedge_{i=1}^h df_i \right) \wedge_{i=1}^k db_i.$$

Per essere precisi, la definizione precedente non è una descrizione completa di $F_*\alpha$: le orbicarte V_y sono la scelta, per ogni $y \in Y$, di un'orbicarta che lo contenga, e per questo ricoprono Y , ma non sono necessariamente *tutte* le orbicarte di Y . Tramite il lemma 2 e l'equivarianza delle sezioni locali, però, è possibile mostrare che, per definire una sezione di un orbibundle, è sufficiente definire una sezione locale su un ricoprimento localmente finito di quest'ultimo.

Ogniqualevolta si disponga della possibilità di rappresentare il push-forward tramite l'integrazione sulle fibre e le classi di coomologia tramite la dualità di Poincarè, si ha la seguente **formula di proiezione**

$$F_*(\alpha \wedge F^*\beta) = F_*\alpha \wedge \beta$$

dalla quale si deduce in particolare che

$$\int_X \alpha \wedge F^*\beta = \int_Y F_*\alpha \wedge \beta.$$

3.2 Connessioni e curvatura per Orbibundle.

Avendo a disposizione una definizione di forme differenziali su un orbifold, è possibile dare la definizione di connessione (e di curvatura ad essa associata) su fibrati orbifold lisci. Come vedremo nel seguito, però, diversamente da quanto accade per le varietà, per i fibrati orbifold non è garantita l'esistenza di tali connessioni, e saremo costretti a dare delle condizioni sufficienti sui fibrati per garantire tale esistenza.

Nel seguito assumeremo che $E \rightarrow X$ sia un orbibundle \mathcal{C}^∞ ,

Connessioni equivarianti.

Diamo la seguente notazione:

- Indichiamo con $\Omega_E^k(U)$ lo spazio delle k -forme differenziali su U a valori in E_V , ovvero sezioni \mathcal{C}^∞ del fibrato vettoriale locale $\bigwedge_{i=1}^k T_{\mathbb{R}}^*(U) \otimes E_V$.
- Indichiamo con $\Omega_E^k(V) \subset \Omega_E^k(U)$ lo spazio delle k -forme differenziali locali su U a valori in E_V equivarianti rispetto all'azione di G .

Si noti che l'inclusione $\Omega_E^k(V) \subset \Omega_E^k(U)$ in generale è stretta, in quanto le forme in $\Omega_E^k(V)$ sono G -equivarianti.

Per semplicità, indichiamo con g^* il pullback tramite l'azione di $g \in G$. Possiamo allora dare la seguente

Definizione 23 (Connessione equivariante). Dato un orbibundle liscio E su un orbifold X , una connessione equivariante D è il dato per ogni orbicarta V di un operatore lineare

$$D_V : \Omega_E^0(U) \rightarrow \Omega_E^1(U)$$

che soddisfi alla regola di Leibnitz, ovvero tale che

$$D_V(f\xi) = df \otimes \xi + f D_V(\xi), \quad \forall f \in \Omega^0(U), \xi \in \Omega_E^0(U).$$

e che soddisfi inoltre

$$(i) \quad D_V \circ g^* = g^* \circ D_V, \quad \forall g \in G,$$

$$(ii) \quad D_V \circ j^* = j^* \circ D_{V'},$$

per ogni mappa $j : U \rightarrow U'$ che realizza la relazione di sotto-orbicarta $V \leq V'$.

Sottolineiamo il fatto che, nella definizione precedente, i pull-back g^* e j^* sono da intendersi come pull-back di sezioni locali del fibrato $\bigwedge_{i=1}^p T_{\mathbb{R}}^*(X) \otimes E$, ottenuti come il prodotto tensore dei pull-back sulle forme differenziali e sulle sezioni del fibrato E .

Si noti che la condizione (i) della definizione garantisce che D_V mandi forme G -equivarianti in forme G -equivarianti, mentre la condizione (ii) garantisce che, per una forma globale $\xi := \{\xi_V \mid V \text{ è un'orbicarta}\}$, sia ben definita una forma globale

$$D\xi := \{D_V(\xi_V) \mid V \text{ è un'orbicarta}\}.$$

A questo punto è lecito chiedersi se non sarebbe stato sufficiente definire una connessione su un orbibundle, analogamente a quanto si fa per varietà, come un operatore globale $D : \Omega_E^0(X) \rightarrow \Omega_E^1(X)$ che soddisfi alla regola di Leibnitz. Nel caso delle varietà gli insiemi $\Omega_E^0(U)$ ed $\Omega_E^0(V)$ coincidono, dato che G è banale, e tutte le forme locali si estendono a forme globali tramite partizioni dell'unità, pertanto definizione globale e locale coincidono. Nel caso orbifold non è più così, come è evidenziato dal seguente

Esempio. Si consideri l'orbifold dato dall'orbicarta globale $U = \mathbb{C}$, dotata dell'azione banale di $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, e si consideri il fibrato $E = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ivi definito estendendo l'azione (banale) di $-1 + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ con la moltiplicazione per -1 sulla fibra. Questo fibrato non è dotato di sezioni G -equivarianti non nulle: data una sezione $\xi = (z, \beta(z))$, la G -equivarianza si esprime come

$$(z, \beta(z)) = (-1 + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).(z, \beta(z)) = (z, -\beta(z)), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

e ciò implica che $\beta(z) = -\beta(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Essendo E privo di sezioni G -equivarianti, si ha $\Omega_E^0(V) = 0$, mentre $\Omega_E^k(U) = \Omega_E^0(U) \cong \mathcal{O}(\mathbb{C})$. L'unica mappa da $\Omega_E^0(V)$ a $\Omega_E^1(V)$ che è possibile definire è $0 \mapsto 0$, mentre qualsiasi connessione $D : \Omega_E^0(U) \rightarrow \Omega_E^1(U)$, $D = d + \theta$ è G -invariante, in quanto

$$D(-\xi) = D((x, -d\beta(x) - \theta\beta(x))) = -D(\xi)$$

e definisce quindi una connessione equivariante.

Considerando l'orbicarta locale V , le forme f e ξ della definizione precedente sono rappresentate dalle seguenti forme su U

$$f_V(u), \quad \xi_V(u) = \sum_{i=1}^n \xi_i(u) \otimes e_i(u)$$

dove $\{e_i\}_{i \leq n}$ è un sistema di riferimento locale per E_V .² Si dice matrice della connessione D la matrice $\theta_V = [\theta_{ij}]_{i,j \leq n}$ data da

$$D_V(e_j) = \sum_{i=1}^n \theta_{ij} \otimes e_i.$$

²Tale sistema di riferimento è anche globale, perché E_V è un fibrato sopra U , che è un aperto contraibile, non è però un sistema di riferimento G -invariante.

La connessione D su una generica forma $\xi \in \Omega_E^0(X)$ si può quindi scrivere localmente come

$$D_V(\xi_V) = d\xi_V + \theta_V \xi_V,$$

dove il differenziale è computato coordinata per coordinata.

Adottando la notazione matriciale locale $D_V = d + \theta_V$, è possibile descrivere il comportamento della matrice θ_V rispetto ad un cambio di coordinate $e_k \mapsto e'_k$. Sia $A(u)$ la matrice di cambio di base e sia θ'_V la matrice della connessione D_V nella base $e' := \{e'_k\}_{k \leq n}$. La condizione che esprime il cambio di coordinate, è

$$(d + \theta_V)\xi_V = A^{-1}(d + \theta'_V)A\xi_V$$

Con un calcolo diretto, si ottiene la seguente equazione che lega le matrici θ e θ' :

$$\theta_V - A^{-1}\theta'_V A = A^{-1}dA$$

dove il differenziale è computato sulle entrate della matrice.

Con un calcolo analogo, è possibile esprimere la condizioni (i) della definizione precedente in forma matriciale. In particolare, denotiamo con F_g l'estensione dell'azione di un elemento $g \in G$ alle fibre di E_V . Inoltre, pull-back e differenziali sono, in queste formule, da considerarsi solo in relazione alle entrate delle matrici, e sono computati direttamente sulle stesse:

$$g^*\theta_V - (F_g)^{-1}(\theta_V)F_g = F_g^{-1}d(F_g), \quad \forall g \in G \quad (3.2)$$

Da queste equazioni è evidente che, anche solo localmente, non è scontato esista una connessione su ogni fibrato. Nel seguito analizzeremo questo problema nel dettaglio, stabilendo delle condizioni sufficienti a tale esistenza.

Esistenza globale di connessioni equivarianti.

Assumendo l'esistenza locale di connessioni equivarianti, è possibile dimostrarne l'esistenza globale in maniera analoga a quanto si fa per varietà, utilizzando il seguente

Lemma 3. *Siano $V_\alpha \cong U_\alpha/G_\alpha$ e $V_\beta \cong U_\beta/G_\beta$ due orbicarte locali di X tali che $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, e siano T_V^1 e T_V^2 due mappe di transizione locali da (un sottofibrato di) E_{V_α} a (un sottofibrato di) E_{V_β} associate allo stesso sottoinsieme $V \subset V_\alpha \cap V_\beta$, ma non necessariamente alla stessa orbicarta. Si assuma inoltre che*

$$\text{Im}(T_V^1) = \text{Im}(T_V^2).$$

Indichiamo con t_V^1 e t_V^2 le mappe fra gli spazi di base delle relative mappe fra fibrati T_V^1 e T_V^2 . In particolare, le consideriamo come isomorfismi, restringendone il codominio all'immagine,³ ed indichiamo con $(t_V^1)^{-1}$ e $(t_V^2)^{-1}$ le loro inverse come mappe fra fibrati, ovvero le mappe fra gli spazi di base

³Ricordiamo che che ciò è possibile perché esse sono sempre embedding olomorfi.

sottostanti le mappe $(T_V^1)^{-1}$ e $(T_V^2)^{-1}$ fra (opportune restrizioni de) i fibrati vettoriali E_{V_β} ed E_{V_α} .

Data una connessione equivariante D^α su U_α , si ha

$$(t_V^1)^{-*} \circ D^\alpha \circ (t_V^1)^* = (t_V^2)^{-*} \circ D^\alpha \circ (t_V^2)^*$$

dove con il simbolo $^{-*}$ ad apice indichiamo il pull-back tramite l'inversa.

Dimostrazione. Per il lemma 2 esiste $g \in G_\alpha$ tale che $T_V^2(\cdot) = T_V^1(F_g(\cdot))$. Indichiamo con g^* e g^{-*} il pull-back rispetto all'azione di g e di g^{-1} su U_α estesa alle fibre di E_{V_α} . Si ha

$$(t_V^2)^{-*} \circ D^\alpha \circ (t_V^2)^* = (t_V^1)^{-*} \circ (g)^{-*} \circ D^\alpha \circ (g)^* \circ (t_V^1)^* = (t_V^1)^{-*} \circ D^\alpha \circ (t_V^1)^*$$

dove l'ultima eguaglianza è diretta conseguenza della definizione di connessione equivariante. \square

Si noti che nel lemma precedente la condizione che V_1 e V_2 siano lo stesso aperto V di \hat{X} è fin troppo restrittiva. Precisamente, volendo lavorare localmente, è sufficiente che $V_1 \cap V_2$ sia non banale. Dalla compatibilità fra orbicarte si deduce che in un intorno di ogni punto di tale intersezione esiste un orbicarta V tale che $V \leq V_1, V_2$. Restrungendo le mappe di transizione a (un sollevamento di) tale orbicarta, si ottengono due mappe di transizione che soddisfano alle ipotesi del teorema. Tramite il precedente lemma è possibile quindi trasferire le connessioni da un'orbicarta all'altra in maniera univoca, ovvero indipendente dalla mappa di transizione scelta. Più precisamente, data una connessione equivariante D^α su un orbicarta V_α , essa induce un'unica connessione sull'orbicarta V_β in un sollevamento di $V_\alpha \cap V_\beta$ tramite la costruzione precedente. Questo ci permette di mostrare la seguente

Proposizione 7. *Sia X un orbifold complesso liscio e sia*

$$\{V_\alpha \cong U_\alpha/G_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

un suo ricoprimento di orbicarte localmente finito tale che ogni orbicarta ammetta una connessione locale G_α -equivariante D^α , allora X ammette una connessione equivariante.

Dimostrazione. Si consideri una partizione dell'unità ψ_α subordinata al ricoprimento. Sia $V \cong U/G$ una generica orbicarta di X . Dato che il ricoprimento è localmente finito, V interseca un numero finito di orbicarte V_α . Senza perdita di generalità, assumiamo che tali orbicarte siano quelle associate ad $\alpha = 1, \dots, n$. Per ogni $x \in U$ esiste un intorno $U_x \subset U$ che ammette per ogni $\alpha \leq n$ una mappa di transizione locale T_α definita da un sottoinsieme di U_α a U_x (tale intorno può essere facilmente ottenuto usando iterativamente la relazione di compatibilità sui vari intorni che realizzano la

compatibilità fra le orbicarte V e V_α). Indichiamo con t_α la mappa fra gli spazi di base sottostante la mappa fra fibrati T_α . In particolare, la consideriamo come un isomorfismo, restringendone il codominio all'immagine. La connessione D_V su U_x può essere definita come ⁴

$$D_V|_{U_x} := D_x = \sum_{\alpha=1}^n \psi_\alpha D_x^\alpha, \quad D_x^\alpha := (t_\alpha)^{-*} \circ D^\alpha \circ t_\alpha^*.$$

Per il lemma 3, tale definizione non dipende dalle mappe di transizione locali. Il fatto che D_x sia una connessione è una conseguenza del fatto che la somma convessa di connessioni è ancora una connessione.

Mostriamo che D_V è equivariante: sia $g \in G$, poniamo

$$y := g.x, \quad U_y := g.U_x, \quad \tilde{T}_\alpha := F_g \circ T_\alpha.$$

Indichiamo inoltre con \tilde{t}_α la mappa fra gli spazi di base sottostante la mappa fra fibrati \tilde{T}_α , ristretta come sempre nel codominio di modo che sia un isomorfismo. Si noti che questa, per definizione, è $g.t_\alpha$. Si noti inoltre che \tilde{T} è nuovamente una mappa di transizione da un aperto di U_α (lo stesso di T_α) e, questa volta, l'aperto U_y . Il motivo di ciò è semplicemente che l'azione di g può essere vista come un endomorfismo che realizza l'ovvia relazione di sotto-orbicarta $V \leq V$, e la relativa estensione alle fibre F_g è la mappa che realizza l'ovvia relazione di sotto-orbibundle $E_V \leq E_V$.

Indicando nuovamente con g^* il pull-back rispetto alla mappa fra fibrati F_g , otteniamo, direttamente dalla definizione, le seguenti due relazioni

$$\tilde{t}_\alpha^* = t_\alpha^* \circ g^*, \quad \tilde{t}_\alpha^{-*} = g^{-*} \circ t_\alpha^{-*}$$

dove la seconda è semplicemente l'inversa della prima. Applicando tali relazioni, si ottiene la seguente computazione locale

$$g^* \circ D_V = \sum_{\alpha=1}^n \psi_\alpha g^* \circ t_\alpha^{-*} \circ D_x^\alpha \circ t_\alpha^* = \sum_{\alpha=1}^n \psi_\alpha \tilde{t}_\alpha^{-*} \circ D_x^\alpha \circ \tilde{t}_\alpha^* \circ g^* = D_V \circ g^*$$

dove la prima e l'ultima uguaglianza sono una conseguenza del lemma 3, ovvero del fatto che la definizione locale di D_V non dipende dalle mappe di transizione scelte.

⁴Precisiamo che il fatto che questa definizione locale dia effettivamente adito ad una definizione globale di una connessione D_V su tutto U è una conseguenza del fatto che E_V è un fibrato vettoriale liscio, e pertanto, data una sezione locale $\xi \in \Omega_E(U)$, $D_V(\xi)$ può essere ottenuta, con un classico argomento di geometria differenziale, sommando tramite partizioni dell'unità le varie $D_x(\xi|_{U_x})$ per un ricoprimento localmente finito di U formato dagli aperti U_x . Il fatto che tale procedimento non dipenda dalla scelta del ricoprimento è precisamente ciò che è garantito dal lemma 3, dal momento che la definizione locale di D_V non dipende dalle mappe di transizione scelte e, dato un numero finito di mappe di transizione le cui immagini si intersechino, è sempre possibile, per la relazione di sotto-orbicarta, ottenere in un intorno di ogni punto una restrizione delle mappe di transizione che soddisfi alle ipotesi del lemma 3.

Data un'altra orbicarta $V' \cong U'/G'$ tale che $V \leq V'$, e detto j l'embedding olomorfo che realizza la relazione di sotto-orbicarta, occorre mostrare che

$$j^* \circ D_{V'} = D_V \circ j^*.$$

La dimostrazione di questo fatto è essenzialmente identica all'equivarianza. Precisamente si pone

$$y := j(x), \quad U_y := j(U_x), \quad \tilde{T}_\alpha := F_j \circ T_\alpha.$$

\tilde{T}_α è nuovamente una mappa di transizione, e la mappa fra spazi di base sottostante è nuovamente $\tilde{t}_\alpha := j \circ t_\alpha$. Si ottengono perciò le seguenti relazioni per i pull-back

$$\tilde{t}_\alpha^* = t_\alpha^* \circ j^*, \quad \tilde{t}_\alpha^{-*} = j^{-*} \circ t_\alpha^{-*}$$

da cui, con una computazione locale identica alla precedente, segue che $j^* \circ D_{V'} = D_V \circ j^*$. \square

La proposizione precedente riduce quindi il problema dell'esistenza di connessioni equivarianti al problema di esistenza locale, che analizziamo nella prossima sezione

Condizioni sufficienti all'esistenza locale di connessioni equivarianti.

E' possibile mostrare che esiste sempre una connessione quando l'azione locale sull'orbifold X è efficace, ovvero è priva di elementi diversi dall'identità del gruppo la cui azione è banale ([24], pagina 475). Tale dimostrazione si basa però sul fatto che, nel caso di orbibundle su orbifold efficaci, si dispone di un numero sufficiente di sezioni equivarianti. Più precisamente, per tutti i punti di X con stabilizzatore banale, esiste un sistema di riferimento locale formato solamente da sezioni G -equivarianti. Tali punti formano un insieme denso, dal momento che i gruppi locali sono finiti e le azioni olomorfe, e la costruzione locale di connessioni (equivarianti) può essere quindi svolta in maniera identica a quanto si fa per varietà. Tale argomento potrebbe essere generalizzato in maniera ovvia ad alcuni orbifold inefficaci, ovvero precisamente a quelli che ammettono un sistema di riferimento equivariante locale su un sottoinsieme denso dell'orbifold.

Purtroppo la maggior parte degli orbibundle considerati in questa tesi non rispettano questa proprietà, diamo quindi nel seguito alcune condizioni sull'orbifibrato E sufficienti all'esistenza locale

Definiamo, per ogni orbicarta $V \cong U/G$, il gruppo FG delle matrici di funzioni che esprimono l'azione sulle fibre di G :

$$FG := \{F_g(u) \mid g \in G\}.$$

Si noti che l'equazione (i) della sezione precedente ammette sempre una soluzione nel caso in cui il termine $F_g^{-1}dF_g$ sia nullo per ogni $g \in G$, infatti è sufficiente considerare una matrice θ di 1-forme G -equivarianti che commuti con FG , come ad esempio una matrice scalare. E' sempre questo il caso, se si assume che F_g commuti con dF_g , infatti, essendo FG un gruppo finito, esiste un intero k tale per cui

$$F_g^k = \mathbb{I},$$

allora, sotto l'ipotesi di commutatività, si ha

$$F_g^{-1}dF_g = F_g^{k-1}dF_g = \frac{1}{k}d(F_g^k) = \frac{1}{k}d(\mathbb{I}) = 0.$$

Se F_g gode di questa proprietà, diremo che F_g commuta con il suo differenziale. Abbiamo dimostrato che

Proposizione 8. *Sia (E_V, V, U, G) un orbundle locale. Se ogni elemento di FG commuta con il suo differenziale, V ammette (almeno) una connessione equivariante.*

Da queste proprietà è possibile dedurre diverse condizioni sufficienti per l'esistenza locale di una connessione. In particolare

Teorema 7. *Ogni orbundle locale E_V , complesso, olomorfo, di rango 1, ammette (almeno) una connessione equivariante.*

Dimostrazione. Dato che il fibrato è olomorfo, ogni elemento F_g del gruppo FG agisce sulle fibre come la moltiplicazione per un numero complesso, e pertanto può essere rappresentato localmente come una funzione olomorfa $F_g : U' \subset U \rightarrow \mathbb{C}$. Per funzioni in una variabile, si ha l'ovvia proprietà

$$F_g(u)dF_g(u) = dF_g(u)F_g(u) \quad \forall u \in U'$$

e per la proposizione precedente si conclude la dimostrazione. \square

Questo teorema è di particolare importanza perché, come nel caso delle varietà, i "line orbundle", ovvero i fibrati vettoriali complessi di rango 1, si comportano particolarmente bene in relazione alle classi di Chern.

Dalla proposizione 8 è anche possibile dedurre la seguente

Proposizione 9. *Sia (E_V, V, U, G) un orbundle olomorfo locale di rango complesso n . Si consideri FG come gruppo di matrici $n \times n$ a coefficienti complessi. Se FG è simultaneamente diagonalizzabile, allora E_V ammette una connessione equivariante.*

Dimostrazione. E' sufficiente notare che il differenziale di una matrice diagonale è ancora una matrice diagonale, pertanto, per ogni $F_g \in FG$, il prodotto fra matrici $F_g^{-1}dF_g$ è il prodotto fra gli elementi della diagonale, che sono tutte forme differenziali di una variabile complessa, pertanto si conclude come nella proposizione precedente. \square

La proposizione appena dimostrata, oltre a fornire un criterio utile di per sé, ci permette anche di stabilire che la somma di fibrati vettoriali olomorfi di rango complesso 1 ammette una connessione, in quanto l'azione di gruppo sulla somma di fibrati vettoriali è definita come la somma delle azioni di gruppo sugli addenti, e quindi è in forma diagonale. Tale risultato può anche essere visto come la conseguenza di un risultato più generale, ovvero

Teorema 8. *Siano (E_V, V, U, G) e (E'_V, V, U, G) due orbibundle locali C^∞ che ammettono una connessione equivariante. L'orbibundle locale $E_V \oplus E'_V$ ammette una connessione equivariante.*

Dimostrazione. Dette D e D' le connessioni, rispettivamente, di E_V ed E'_V , è sufficiente considerare la connessione $D'' := D \oplus D'$ definita da

$$D \oplus D'(\xi' \oplus \xi') = D(\xi) \oplus D'(\xi'), \quad \forall \xi \in \Omega_{E_V}^0, \quad \xi' \in \Omega_{E'_V}^0(U).$$

Si deduce che tale connessione è G -invariante da un banale calcolo diretto. \square

Con un semplice conto sulle dimensioni, invece, è possibile concludere che il prodotto tensore di fibrati vettoriali olomorfi di rango complesso 1 ammette connessione, dal momento che esso è a sua volta un fibrato vettoriale olomorfo di rango 1.

Curvatura di una connessione equivariante.

Imponendo la regola di Leibnitz, è possibile estendere per linearità D ad un operatore $\Omega_E^p(X) \rightarrow \Omega_E^{p+1}(X)$. Precisamente imponiamo che

$$D(\eta \otimes \xi) = d\eta \otimes \xi + (-1)^q \eta \wedge D\xi.$$

Possiamo allora dare la seguente

Definizione 24 (Curvatura). La curvatura Θ associata ad una connessione D su un fibrato vettoriale orbifold E è il dato, per ogni orbicarta $V \cong U/G$, del seguente operatore

$$\Theta_V := D_V^2 : \Omega_E^0(U) \rightarrow \Omega_E^2(U).$$

Si noti che, dalle analoghe proprietà di D si ottiene, con un calcolo diretto

- i) $\Theta_V \circ g^* = g^* \circ \Theta_V, \quad g \in G,$
- ii) $\Theta_V \circ j^* = j^* \circ \Theta_{V'},$

per ogni mappa $j : U \rightarrow U'$ che realizza la relazione di sotto-orbicarta $V \leq V'$.

Si noti inoltre che è possibile computare Θ_V in relazione ad un sistema di riferimento $\{e_i\}_{i \leq n}$ direttamente dall'espressione locale di D . Si ottiene, tramite un calcolo diretto, la seguente espressione locale

$$\Theta_V(\xi_V) = \sum_{i,j,k \leq n} (d\theta_{ij} + \theta_{ik} \wedge \theta_{kj}) \wedge \xi_j \otimes e_i$$

Dall'espressione precedente è evidente che Θ è rappresentata localmente dalla moltiplicazione per una matrice le cui entrate sono 2-forme differenziali.

Possiamo scrivere la matrice Θ_V che rappresenta localmente Θ come

$$\Theta_V = d\theta_V + \theta_V \wedge \theta_V$$

dove il differenziale è computato coordinata per coordinata, mentre il wedge-product è un prodotto fra matrici dove, al posto del normale prodotto fra entrate della matrice, si usa il wedge-product.

Dall'espressione locale di D rispetto al cambio di coordinate è possibile esplicitare, sempre con un calcolo diretto, il comportamento di Θ_V rispetto a tale cambio. Sia $A(u)$ la matrice di cambio di base e sia Θ'_V la matrice che esprime Θ nel nuovo sistema di riferimento. Si ha

$$\Theta'_V = A\Theta_V A^{-1}.$$

Analogamente, come fatto per le connessioni nella sezione precedente, è possibile esprimere le condizioni di commutatività (i) e (ii) sulle mappe j che realizzano la relazione di sotto orbicarta e sull'azione di un generico elemento $g \in G$ del gruppo locale in termini delle matrici F_j ed F_g che ne rappresentano l'estensione alle fibre. Da un calcolo diretto, si ha

$$\text{i) } g^*\Theta_V = F_g^{-1}\Theta_V F_g, \quad g \in G,$$

$$\text{ii) } j^*\Theta_{V'} = F_j^{-1}\Theta_V F_j,$$

dove i pull-back sono computati sulle entrate della matrice, e dove j è la mappa che realizza la relazione di sotto-orbicarta $V \leq V'$.

Le relazioni precedenti esprimono il fatto che Θ_V , $g^*\Theta_V$ e $j^*\Theta_{V'}$ sono matrici simili. Tali relazioni si riveleranno necessarie, nelle sezioni successive, ad introdurre l'omomorfismo di Chern-Weil.

3.3 Invarianti di curvatura.

L' omomorfismo di Chern-Weil è una mappa il cui codominio è il sottoinsieme dell'anello di coomologia formato dalle classi di grado pari. Il suo dominio, invece, è un particolare spazio di polinomi in più variabili. Prima di introdurre l'omomorfismo, perciò, diamo alcune informazioni su questo spazio di polinomi.

Polinomi invarianti.

Consideriamo lo spazio delle matrici $n \times n$ a coefficienti complessi, $M_{n \times n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$. Sia $P : M_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione polinomiale nelle entrate, omogenea, di grado k . Una tale funzione si dice invariante se

$$P(AMA^{-1}) = P(M), \quad \forall A \in GL(n, \mathbb{C}), M \in M_{n \times n}(\mathbb{C}).$$

E' evidente che somma e prodotto di polinomi invarianti è ancora un polinomio invariante. Possiamo quindi definire l'algebra dei polinomi invarianti in n^2 variabili, e la indichiamo con Φ_n .

Diamo la seguente

Definizione 25 (Polinomi invarianti fondamentali). Sia I_k l'insieme di tutti i sottoinsiemi I di $\{1, \dots, n\}$ di cardinalità k . Data $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $A = [A_{ij}]_{i,j \leq n}$, sia A_I la sottomatrice di A data da

$$A_I := [A_{ij}]_{i,j \in I}.$$

Si dice k -esimo polinomio invariante fondamentale il seguente

$$\sigma_k(A) := \sum_{I \in I_k} \det(A_I).$$

I polinomi invarianti fondamentali possono anche essere definiti implicitamente dalla seguente relazione

$$\det(A + t\mathbb{I}) = \sum_{i=0}^n \sigma_{n-i}(A)t^i.$$

Dal momento che il polinomio caratteristico di una matrice è invariante per cambio di base, anche i polinomi invarianti fondamentali lo sono.

E' possibile mostrare che ogni polinomio invariante (e in verità ogni serie di potenze invariante) si può esprimere come un polinomio (una serie di potenze) nei polinomi fondamentali. Tale risultato si trova, ad esempio, in [8], pagina 402. Si ottiene pertanto che

Proposizione 10. *L'algebra dei polinomi invarianti in n variabili, Φ_n , è generata su \mathbb{C} dai polinomi invarianti fondamentali. Precisamente*

$$\Phi_n = \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_n].$$

omomorfismo di Chern-Weil.

Consideriamo nuovamente la matrice di due forme Θ_V , rappresentazione locale, rispetto ad un sistema di riferimento su E_V , della curvatura Θ definita

su un orbibundle E . Dato un polinomio invariante $P \in \Phi_n$ è ben definita la seguente forma differenziale locale

$$P(\Theta_V)$$

dove il prodotto fra entrate della matrice è il wedge-product, commutativo perché tutte le forme considerate hanno grado pari.

Tale forma è indipendente dal sistema di riferimento, dal momento che il polinomio è invariante per cambi di base.

Riportiamo ora un risultato per varietà, la cui dimostrazione si può trovare in [8]

Teorema 9. *Sia M una varietà differenziale e sia Θ una curvatura su essa definita. Sia $P \in \Phi_n$ un polinomio invariante, allora*

1. $P(\Theta)$ è una ben definita 2-forma differenziale globale,
2. $dP(\Theta) = 0$,
3. La classe di coomologia di $P(\Theta)$ non dipende dalla scelta della curvatura Θ .

Ricordiamo che, localmente, un orbifold è a tutti gli effetti una varietà (l'aperto contraibile U), con l'unica restrizione che le forme differenziali globali ivi considerate sono quelle G -equivarianti. E' pertanto possibile concludere che anche per la forma differenziale locale $P(\Theta_V)$ vale

$$dP(\Theta_V) = 0.$$

Notiamo inoltre che il punto (3) del precedente teorema è equivalente a dire che, date due curvature Θ_1 e Θ_2 , esiste una 1-forma differenziale ν tale che

$$P(\Theta_1) - P(\Theta_2) = d\nu.$$

ed anche questo risultato rimane valido sulle orbicarte locali. Inoltre la forma ν , nel caso orbifold, è G -invariante se $P(\Theta_1)$ e $P(\Theta_2)$ lo sono, e definisce una forma differenziale globale se $P(\Theta_1)$ e $P(\Theta_2)$ definiscono una forma differenziale globale. Per generalizzare il teorema precedente ad un orbifold X è pertanto sufficiente mostrare che la valutazione del polinomio sulla curvatura definisce una forma differenziale globale su tutto X , G -invariante localmente. Precisamente, vorremmo mostrare che, date due orbicarte $(V, G, U), (V', U', G')$ tali che $V \leq V'$, detto $j : U \rightarrow U'$ l'embedding olomorfo che le lega, dette $\Theta_V = [\Theta_{ij}]_{i,j \leq n}$ e $\Theta_{V'} = [\Theta'_{ij}]_{i,j \leq n}$ le matrici di 2-forme che rappresentano la curvatura Θ nelle orbicarte locali, si abbiano le seguenti relazioni:

$$j^*P(\Theta_{V'}) = P(\Theta_V), \quad g^*P(\Theta_V) = P(\Theta_V), \quad \forall g \in G.$$

Si noti che il polinomio P si può scrivere come

$$P([x_{ij}]_{i,j \leq n}) = \sum_{\nu \in M_{n \times n}(\mathbb{N})} P_\nu \prod_{i,j \leq n} x_{ij}^{\nu_{ij}}$$

Con $P_\nu \in \mathbb{R}$ quasi tutti nulli. Allora si ha

$$j^*P(\Theta_{V'}) = j^* \left(\sum_{\nu} P_\nu \bigwedge_{i,j \leq n} (\Theta'_{ij})^{\nu_{ij}} \right) = \sum_{\nu} P_\nu \bigwedge_{i,j \leq n} (j^*\Theta'_{ij})^{\nu_{ij}},$$

da cui si deduce che

$$j^*P(\Theta_{V'}) = P(j^*\Theta_{V'}) = P(\Theta_V),$$

dove l'ultima uguaglianza è dedotta dal fatto che $j^*\Theta_{V'}$ e Θ_V sono matrici simili, come mostrato nella sezione precedente. Con ragionamento analogo si deduce anche che $g^*P(\Theta_V) = P(\Theta_V)$. Possiamo quindi concludere che $P(\Theta)$ è una 2-forma differenziale globale su X . Riassumiamo quanto detto con il seguente

Teorema 10. *Sia E un fibrato vettoriale orbifold di classe C^∞ , di rango n , su un orbifold X , e sia Θ una curvatura ivi definita. Per ogni $P \in \Phi_n$ si ha*

1. $P(\Theta)$ è una 2-forma differenziale orbifold globale,
2. $dP(\Theta) = 0$,
3. La classe di coomologia di $P(\Theta)$ non dipende dalla scelta di Θ .

Con il risultato precedente, abbiamo mostrato che esiste un omomorfismo di anelli

$$W : \Phi_n \longrightarrow H_{dR}^*(X, \mathbb{C}) \cong H^*(X, \mathbb{C}), \quad P \mapsto P(\Theta).$$

Tale omomorfismo è detto **omomorfismo di Chern-Weil**. Come discusso in precedenza, i generatori di Φ_n sono i polinomi invarianti fondamentali, pertanto l'intero omomorfismo è descritto dalle seguenti classi di coomologia

$$\sigma_k(\Theta) \in H^{2k}(X, \mathbb{C}).$$

Tali classi di coomologia sono dette **invarianti fondamentali di curvatura**. Nella prossima sezione vedremo come tali invarianti sono strettamente connessi alle classi di Chern.

3.4 Classi di Chern.

Per un fibrato vettoriale orbifold olomorfo E di rango n su un orbifold X , che ammetta una curvatura equivariante, è possibile definire le classi di Chern come

$$c_k(E) := \frac{\sigma_k(\Theta)}{(2\pi i)^k} \in H^{2k}(X, \mathbb{C}).$$

Si dice classe di Chern totale

$$c(E) := \sum_{i=0}^n c_i(E).$$

Nel caso delle varietà le classi di Chern sono essenzialmente un invariante topologico, e possono essere definite in maniera assiomatica per ogni fibrato vettoriale complesso. In questo caso, la definizione data in precedenza risulta come teorema quando ci si specializza al caso olomorfo. Si ha

Teorema 11. *Esiste un'unica famiglia di classi di coomologia $c_k(E)$ tali che $k \in \mathbb{N}$ e $p : E \rightarrow M$ è un fibrato vettoriale complesso di rango n , su una varietà M , che soddisfi alle seguenti proprietà*

1. $c_k(E) \in H^{2k}(M) \forall k \in \mathbb{N}$ e $c_0(E) = 1$,
2. dato un altro fibrato vettoriale E' su M , si ha $c(E \oplus E') = c(E) \cup c(E')$,
3. data una mappa fra fibrati $f : E \rightarrow E'$ si ha $f^* c_k(E') = c_k(f^* E)$,
4. La classe di Chern totale del fibrato tautologico di rango 1 su $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ è $1 - H$, dove H è il duale di Poincarè dell'iperpiano $\mathbb{C}\mathbb{P}^{k-1} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$.

Per quanto riguarda le asserzioni (1) e (2) non è difficile mostrare che esse si estendano al caso orbifold, sotto l'ipotesi dell'esistenza di una connessione equivariante. La prima è immediata, mentre la seconda è una conseguenza del fatto che, giustappoendo un sistema di riferimento per E e uno per E' , si ottiene una matrice di curvatura per $E \oplus E'$ a blocchi diagonali

$$\begin{pmatrix} \Theta_E & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Theta_{E'} \end{pmatrix}$$

e dato che la classe di Chern totale è $c(E) = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{(2\pi i)^k}$ essa è uguale alla valutazione in $\frac{1}{2\pi i}$ del polinomio caratteristico della matrice di curvatura. Se ne conclude che $c(E \oplus E')$ è uguale a

$$\det \begin{pmatrix} \Theta_E - \mathbb{I} \frac{1}{2\pi i} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Theta_{E'} - \mathbb{I} \frac{1}{2\pi i} \end{pmatrix} = \det \left(\Theta_E - \mathbb{I} \frac{1}{2\pi i} \right) \det \left(\Theta_{E'} - \mathbb{I} \frac{1}{2\pi i} \right) = c(E)c(E').$$

Per mostrare la validità dell'asserzione (3) occorrerebbe una definizione precisa di mappa fra orbifold e, come discusso nelle sezioni precedenti, questo può portare a diverse complicazioni. Qualsiasi definizione di mappa fra orbifold si adotti, però, risulta sempre possibile considerare dei sollevamenti a mappe lisce sulle singole orbicarte locali, che commutino con un morfismo fra le azioni di gruppo. Nel caso di una mappa fra orbifibrati, questo si riduce ad un sollevamento $f_{V_1, V_2} : E_{V_1} \rightarrow E_{V_2}$ ad una mappa fra fibrati liscia fra i singoli fibrati vettoriali locali, commutante con un morfismo $a : G_1 \rightarrow G_2$

fra le azioni di gruppo. A questo punto è possibile definire il pull-back del fibrato E' tramite f con i seguenti fibrati locali sulla base X dell'orbifibrato E ⁵:

$$(f^*E')_{V_1} = f_{V_1, V_2}^* E'_{V_2} := \{(x, e') \in U_1 \times E'_{V_2} \mid f_{V_1, V_2}(u) = \pi'(e')\}.$$

Dato un embedding olomorfo $j : U_1 \rightarrow U'_1$ che realizzi la relazione di sotto-orbicarta fra due orbicarte (V_1, U_1, G_1) e (V'_1, U'_1, G'_1) , questo si estende ad una mappa fra fibrati $Tj : (f^*E')_{V_1} \rightarrow (f^*E')_{V'_1}$ tramite la seguente relazione

$$Tj(x, e') = (j(x), Tj'(e'))$$

dove Tj' è l'estensione dell'embedding olomorfo che realizza la relazione di sottorbicarta fra V_2 e V'_2 , per un'orbicarta V'_2 su X' tale che $f(V'_1) \subset V'_2$. Analogamente, l'azione di $g \in G_1$ è estesa alle fibre con quella di $a(g) \in G_2$.

A questo punto, data una matrice di curvatura Θ' su E'_{V_2} , è possibile dedurre la proprietà (3) dalla seguente uguaglianza

$$f_{V_1, V_2}^* \sigma_k(\Theta') = \sigma_k([f_{V_1, V_2}^* \Theta'_{ij}]_{i, j \leq n}), \quad \forall k \leq n,$$

valida per tutti i polinomi a coefficienti costanti. In particolare ci si riduce a mostrare che un'opportuna sotto-matrice invertibile (massimale) della matrice $[f_{V_1, V_2}^* \Theta'_{ij}]_{i, j \leq n}$ definisce una curvatura su $(f^*E')_{V_1}$. Se si scelgono su E ed E' dei sistemi di riferimento locali tali che Tf assuma la forma standard

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_{rk(Tf)} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

tale matrice è $[f_{V_1, V_2}^* \Theta'_{ij}]_{i, j \leq rk(Tf)}$.

L'asserzione (4), infine, è completamente formulata in termini di varietà, e la sua validità per le classi costruite tramite gli invarianti di curvatura è un risultato classico.

Sottolineamo nuovamente che anche nel caso orbifold esiste una definizione topologica delle classi di Chern, che, sebbene abbia il pregio di non dipendere dall'esistenza di una connessione equivariante, ha il difetto di essere molto astratta. In particolare, interpretando gli orbifold come Lie-gruppoidi, è possibile associare ad ogni orbibundle un fibrato vettoriale topologico su uno spazio associato, ed importare le classi di Chern da quest'ultimo per mezzo di una mappa naturale ([13]). Tramite questa costruzione si ritrovano proprietà delle classi di Chern, valide per varietà, del teorema precedente.

Dal momento che considereremo sempre orbibundle olomorfi che ammettono una connessione, non è necessario entrare nei dettagli di questa costruzione, e la definizione data di classi di Chern sarà sufficiente agli scopi di questa tesi.

⁵E' in verità necessario aggiungere l'ipotesi che $f(V_1) \subset V_2$. Tale ipotesi non è verificata in generale per ogni coppia di orbicarte, ed in assenza di essa la costruzione diventa più delicata.

3.5 Line orbundle e divisori.

In questa sezione assumeremo che X sia un orbifold complesso liscio compatto.

Con il termine inglese *line orbundle* indichiamo gli orbundle olomorfi di rango (complesso) 1. Per la proposizione 7, tali orbundle ammettono sempre una connessione, e quindi le classi di Chern, secondo la costruzione della sezione precedente. In particolare, intendiamo concentrarci sulla prima classe di Chern, dal momento che le restanti sono tutte banali.

Nel caso delle varietà un divisore è definito come la somma formale di ipersuperfici analitiche irriducibili, dove per ipersuperficie analitica si intende una sottovarietà di codimensione 1 che può essere descritta localmente come l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa. Si consideri un'orbicarta locale $V \cong U/G$, diremo che $Y \subset U$ è una **ipersuperficie orbifold locale** se può essere descritta come l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa G -invariante.

Definizione 26. Un'ipersuperficie Y di un orbifold X è il dato di un sottoinsieme topologico $\hat{Y} \subset \hat{X}$ tale che, per ogni orbicarta $V \cong U/G$, il sollevamento di $\hat{Y} \cap V$ ad U sia un'ipersuperficie orbifold locale su U .

Un'ipersuperficie si dice irriducibile se non può essere scritta come unione di ipersuperfici non vuote, e se le funzioni locali che la rappresentano come luogo degli zeri hanno solo zeri semplici. Definiamo un **divisore** D come una somma formale di ipersuperfici irriducibili Y_α :

$$D = \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha Y_\alpha, \quad m_\alpha \in \mathbb{Z}.$$

Analogamente a quanto si fa per varietà, ad ogni ipersuperficie irriducibile Y su un orbifold X è possibile associare un line orbundle, che indichiamo con L_Y . Precisamente, si indichi con f_V la funzione G -invariante che descrive Y sull'orbicarta $U/G \cong V$. Si consideri su V il fibrato olomorfo triviale $E_V^Y := U \times \mathbb{C}$, e si estenda l'azione di G all'azione banale sulle fibre. L'estensione di una mappa $j : U \rightarrow U'$ che realizza la relazione di sotto-orbicarta fra V e $V' \cong U'/G'$, è definita con la seguente estensione alle fibre

$$F_j^Y(u) = \frac{f_{V'} \circ j(u)}{f_V(u)}, \quad \forall u \in U.$$

Si noti che la frazione precedentemente definita non è mai nulla perché i divisori di f_V ed $f_{V'} \circ j$ coincidono per definizione. Si noti inoltre che le mappe di transizione fra due orbicarte V e W sono tutte della forma f_W/f_V , e quindi quello sopra definito è effettivamente un orbundle. Si noti infine che l'orbundle L_Y è sempre dotato di una sezione olomorfa globale il cui luogo degli zeri è Y , data da

$$u \mapsto (u, f_V(u)).$$

Definizione 27. Sia $D = \sum_{i=1}^n m_i Y_i$ un divisore in X . Definiamo l'orbibundle associato ad un divisore come

$$L_D := \bigotimes_{i=1}^n L_{Y_i}^{\otimes m_i}$$

dove poniamo per definizione $L_Y^{\otimes -1} = L_Y^*$.

Si noti che il fibrato L_D è dotato di una sezione meromorfa globale, data dal prodotto (con molteplicità) delle funzioni che definiscono localmente i divisori Y_i . Il divisore associato a tale sezione (l'insieme degli zeri meno l'insieme dei poli, con le rispettive molteplicità) è D .

Si noti inoltre che la definizione precedente descrive un morfismo dal gruppo abeliano dei divisori al gruppo abeliano dei line orbibundle, considerato rispetto all'operazione di prodotto tensoriale, dove l'inversa è rappresentata dal duale, e l'unità dal fibrato triviale $X \times C$ dotato dell'azione triviale sulle fibre. In particolare tale morfismo suggerisce che il gruppo dei divisori vada considerato a meno di equivalenza lineare, ovvero a meno della somma di divisori di funzioni meromorfe globali su X , dal momento che tali divisori definiscono il fibrato triviale.

Analogamente al caso delle varietà, anche la prima classe di Chern costituisce un morfismo di gruppi abeliani, definito da dal gruppo dei line orbibundle al secondo gruppo di coomologia. Infatti

Proposizione 11. *Siano L_1 ed L_2 due line orbibundle su X si ha*

$$c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$$

Dimostrazione. E' sufficiente notare che, date due connessioni equivarianti D_1 e D_2 , rispettivamente, su L_1 ed L_2 , una connessione equivariante su $L_1 \otimes L_2$ è definita da

$$D_1 \otimes D_2(\xi_1 \otimes \xi_2) := D_1(\xi_1) \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes D_2(\xi_2)$$

per ogni sezione locale ξ_1 e ξ_2 . Con un calcolo diretto della prima classe di Chern si ottiene il risultato. \square

Sempre in analogia con il caso delle varietà, grazie alla proposizione precedente è possibile mostrare la seguente

Proposizione 12. *Dato un divisore D , la prima classe di Chern di L_D è*

$$c_1(L_D) = PD(D).$$

La dimostrazione della precedente proposizione è del tutto analoga a quella che si usa per varietà, che può essere trovata, ad esempio, in [8], pagina 141, proposizione 1. Gli unici aspetti globali, ovvero le uniche parti

della dimostrazione dove occorre fare attenzione nella generalizzazione al caso orbifold, risiedono nel fatto che c_1 e l'associazione di un orbibundle ad un divisore costituiscano un morfismo di gruppi abeliani. Da questo, la dimostrazione si riduce ad una computazione locale per un'ipersuperficie irriducibile. Nel caso orbifold, dal momento che localmente (su un aperto U) un iper-superficie orbifold Y è un'iper superficie nel senso delle varietà, è possibile utilizzare la stessa computazione.

Ciò in cui veramente differiscono i line orbibundle dai line bundle è il fatto che non è garantita l'esistenza di una sezione meromorfa globale non nulla. Questo è dovuto al fatto che, se i gruppi locali di X sono dotati di elementi che agiscono in maniera banale, e se tale azione viene estesa alle fibre in maniera non banale, le sezioni locali sono vincolate ad essere identicamente nulle. Chiameremo le fibre dove l'azione di gruppo è di questo tipo **fibre singolari** di X .

E' possibile mostrare che se X non ha fibre singolari ammette sempre una sezione meromorfa globale. La proposizione 11 suggerisce pertanto la seguente tecnica di desingularizzazione delle fibre

Proposizione 13. *Dato un line orbibundle L su X , esiste un intero non nullo k tale che $L^{\otimes k}$ ammette una sezione meromorfa globale non nulla.*

Dimostrazione. E' sufficiente notare che, essendo l'orbifold compatto ed i gruppi locali finiti, esiste un esponente k tale per cui F_g^k agisce come l'identità per ogni g in ogni gruppo locale G . Di conseguenza $L^{\otimes k}$ non ha fibre singolari. \square

Chiameremo l'intero k della proposizione precedente **esponente desingularizzante** di L .

La proposizione precedente dà un'esplicita tecnica di calcolo della prima classe di Chern di un line orbibundle. Precisamente:

Proposizione 14. *Si ha*

i) Dato un line orbibundle L su X che ammetta una sezione meromorfa globale s non nulla il cui divisore è D , si ha

$$c_1(L) = PD(D),$$

ii) dato un line orbibundle L su X arbitrario, la sua prima classe di chern è sempre della forma

$$c_1(L) = \frac{1}{k}PD(D)$$

dove k è un esponente desingularizzante, D è il divisore di una sezione meromorfa globale non nulla di $L^{\otimes k}$.

Dimostrazione. Per mostrare (i) è sufficiente notare che $L \otimes L_D^* = L \otimes L_{-D}$ ammette una sezione olomorfa globale mai nulla, data da $s \otimes d^{-1}$, dove d è la sezione meromorfa globale associata a L_D , pertanto $L \otimes L_{-D}$ è il fibrato triviale. Per quanto mostrato in precedenza, si ha

$$0 = c_1(L \otimes L_{-D}) = c_1(L) - PD(D).$$

Utilizzando la proposizione 13 si ottiene (ii) in maniera analoga. □

Capitolo 4

Coomologia di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

In questa sezione introduciamo alcuni strumenti utili allo studio dell'anello di coomologia di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Per quanto riguarda questa tesi, siamo particolarmente interessati ad introdurre le *cohomological field theories* e le loro proprietà, in quanto saranno al centro della costruzione della gerarchia-DR, introdotta nell'ultimo capitolo. Il materiale è quasi interamente tratto da [6] e [9].

4.1 Anello tautologico.

L'intero anello di coomologia di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è, in generale, molto complesso da studiare. Per questo se ne restringe lo studio ad un suo sotto-anello, che verrà detto anello tautologico. Tale sotto-anello può essere molto più piccolo dell'intero anello di coomologia, ma la maggior parte delle classi di coomologia geometricamente rilevanti ricadono al suo interno.

L'anello tautologico è essenzialmente l'insieme delle classi di coomologia che sono stabili rispetto ad alcune mappe particolari definite fra i vari $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ al variare di g ed n . Introduciamo quindi tali mappe.

Mappa di dimenticanza.

Siano $g, n, m \in \mathbb{N}$ tali che $2 - 2g - n < 0$. Consideriamo una curva stabile di genere g con $n + m$ punti marcati, $(C, x_1 \cdots x_{n+m})$. In generale non è detto che la curva ottenuta "dimenticando" gli ultimi m punti, ovvero $(C, x_1 \cdots x_n)$, sia una curva stabile. E' infatti possibile che alcune delle sue componenti irriducibili non abbiano un numero sufficiente di punti speciali (punti marcati e nodi). In particolare, ciò può accadere solo per componenti di genere 0. Infatti per tutte le componenti di genere maggiore è sufficiente un solo punto speciale, ovvero il nodo che le connette al resto della curva.

La curva $(C, x_1, \cdots x_n)$ può essere resa stabile contraendo ad un punto le sue componenti di genere 0 con al più due punti speciali. Se la componente contratta conteneva un punto marcato, il risultato di tale contrazione sarà un punto marcato. Questa operazione è detta stabilizzazione, e la indicheremo con

$$(C, x_1, \cdots x_n) \mapsto (\hat{C}, \hat{x}_1, \cdots \hat{x}_n).$$

Possiamo allora dare la seguente

Definizione 28 (Mappa di dimenticanza). Siano $g, n, m \in \mathbb{N}$ tali che $2 - 2g - n < 0$, e sia $I = \{i_1, \cdots i_n\} \subset \{1, \cdots n\}$, si dice mappa di dimenticanza di m punti la seguente

$$p : \overline{\mathcal{M}}_{g,m+n} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \quad [(C, x_{i_1} \cdots x_{i_m})] \mapsto [(\hat{C}, \hat{x}_1, \cdots \hat{x}_n)]$$

Solitamente, la mappa viene indicata con p indipendentemente da quali siano i valori di g, m ed n , e questo non genera confusione (I punti che vengono dimenticati invece saranno specificati di volta in volta). In questa tesi abbiamo indicato con p anche la mappa relativa alla curva universale. In questo caso la confusione è voluta, dato che è possibile mostrare l'esistenza di un isomorfismo fra $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$ e $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ tale che il seguente diagramma commuti

([6])

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{C}}_{g,n} & \xrightarrow{p} & \bar{\mathcal{M}}_{g,n} \\ \cong \uparrow & \nearrow p & \\ \bar{\mathcal{M}}_{g,n+1} & & \end{array}$$

Mappe di incollamento.

Siano ora $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tali che $n_1 + n_2 = n + 2$. Siano due curve stabili $(C_1, x_1, \dots, x_{n_1})$ e $(C_2, y_1, \dots, y_{n_2})$ con, rispettivamente, n_1 e n_2 punti marcati. La curva

$$C := \frac{C_1 \sqcup C_2}{\{x_{n_1} = x_{n_2}\}}$$

ottenuta identificando x_{n_1} e y_{n_2} è anche essa una curva stabile. In particolare, se conserviamo i punti marcati delle curve C_1 e C_2 , essa è una curva stabile con $n_1 + n_2 - 2 = n$ punti marcati. Non è chiaro però in che ordine questi punti vadano considerati, e ad una diversa scelta dell'ordine corrispondono diverse curve con punti marcati. E' ragionevole richiedere che l'ordine dei punti marcati delle due curve di partenza sia preservato, pertanto, con un abuso di notazione, indicheremo con x_1, \dots, y_{n_2-1} una qualsiasi permutazione dell'unione dei due insiemi di punti marcati che preservi l'ordine originale delle x e delle y .

Possiamo quindi dare la seguente

Definizione 29 (Mappa di incollamento di tipo separante). Siano $n_1, n_2, n, g \in \mathbb{N}$ tali che $n_1 + n_2 = n + 2$. La mappa di incollamento di tipo separante è la mappa

$$q : \bar{\mathcal{M}}_{g,n_1} \times \bar{\mathcal{M}}_{g,n_2} \longrightarrow \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$$

Definita dalla seguente associazione

$$\left([(C_1, x_1, \dots, x_{n_1})], [(C_2, y_1, \dots, y_{n_2})] \right) \mapsto [(C, x_1, \dots, y_{n_2-1})]$$

dove C è la curva ottenuta identificando x_{n_1} e y_{n_2} .

E' possibile definire un'altra mappa di incollamento, che agisca però su una sola curva (C, x_1, \dots, x_{n+2}) , incollandone gli ultimi due punti. Questo, oltre a diminuire di due il numero di punti marcati, aumenta di uno il genere. Diamo quindi la seguente

Definizione 30 (Mappa di incollamento di tipo non separante). Siano $g, n \in \mathbb{N}$ tali che $2 - 2g - n < 0$. Si dice mappa di incollamento di tipo non separante la seguente

$$q : \bar{\mathcal{M}}_{g-1,n+2} \longrightarrow \bar{\mathcal{M}}_{g,n}, \quad [(C, x_1, \dots, x_{n+2})] \mapsto (C', x_1, \dots, x_n)$$

dove C' è la curva ottenuta da C identificando x_{n+1} e x_{n+2} .

Anche in questo caso è possibile considerare mappe che incollano punti differenti dagli ultimi due, ma in questa tesi non sarà necessario.

Le due mappe di incollamento sono entrambe indicate con q , ma questo non genera ambiguità dal momento che i domini di definizione sono sempre differenti.

Famiglia di anelli tautologici.

L'anello tautologico di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è un sottoanello del suo anello di coomologia, stabile rispetto alle mappe di dimenticanza e incollamento. Tali mappe, però, sono definite fra diversi $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. E' conveniente perciò introdurre l'intera famiglia di anelli, al variare di g ed n .

Definizione 31. La famiglia minimale di sottoanelli

$$R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \subset H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$$

indicizzata in $g, n \in \mathbb{N}$ tali che $2 - 2g - n < 0$, che sia stabile tramite pull-back e push-forward di mappe di dimenticanza e di incollamento, è detta famiglia di anelli tautologici dello spazio dei moduli delle curve stabili.

Si noti che $1 \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ appartiene all'anello tautologico per definizione, in quanto $R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ è un sottoanello. Un primo esempio di classi tautologiche non banali sono quelle rappresentate, tramite dualità di Poincaré, da divisori contenuti in $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \setminus \mathcal{M}_{g,n}$, in quanto sono immagine tramite mappe di incollamento di diverse classi 1 al variare di g ed n .

4.2 Classi tautologiche rilevanti.

Vi sono diverse classi tautologiche che sono di interesse geometrico per lo studio di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Noi ci soffermeremo in particolare su due, che si riveleranno rilevanti per la costruzione della gerarchia-DR, ovvero le classi- ψ e le classi λ . Esse sono entrambe definite tramite le classi di Chern di due tipologie specifiche di fibrati, che possono essere introdotte tramite la definizione di **fibrato cotangente relativo**. Dopo aver definito la notazione che adotteremo in questa sezione, introdurremo tale fibrato.

Indicheremo con $p_m : \mathcal{C}_m \rightarrow U_m$ il sollevamento della curva universale $p : \overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ su una generica orbicarta centrata in $m \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, similmente a quanto fatto nella definizione 13. Per la precisione, la definizione 13 è relativa alla curva universale su $\mathcal{M}_{g,n}$, ma il teorema 4 ci garantisce l'esistenza di una struttura analoga anche per $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Inoltre, indicheremo con G_m il gruppo che agisce sull'orbicarta locale $\phi_m : U_m/G_m \rightarrow V_m \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Tale azione di gruppo si estende a \mathcal{C}_m , ed agisce sulla curva (C_m, x_1, \dots, x_n) , che rappresenta m , come il suo gruppo di simmetrie.

Come discusso nella sezione relativa alla curva universale, \mathcal{C}_m non è, in generale, un aperto adatto a costruire un'orbicarta locale per $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$. Ciò è dovuto al fatto che esso non è un aperto contraibile, ma trascureremo questo fatto (supponendo implicitamente, dove necessario, di esserci ristretti ad una sua opportuna componente contraibile). Indicheremo quindi con

$$\psi_m : \mathcal{C}_m/G_m \longrightarrow W_m \subset \overline{\mathcal{C}}_{g,n}$$

una generica orbicarta locale di $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$.

Fibrato cotangente relativo.

Sia $\Delta \subset \overline{\mathcal{C}}_{g,n}$ l'insieme dei nodi delle fibre singolari della curva universale. Su $\overline{\mathcal{C}}_{g,n} \setminus \Delta$ è possibile definire il fibrato cotangente le fibre di $\overline{\mathcal{C}}_{g,n} \setminus \Delta$. E' poi possibile estendere tale fibrato a tutto l'insieme $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$. Precisamente:

Definizione 32 (Fibrato cotangente relativo). Per ogni $m \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ consideriamo l'aperto $\tilde{\mathcal{C}}_m := \mathcal{C}_m \setminus \Delta$ centrato in C_m . Su tale aperto definiamo il seguente fibrato vettoriale locale

$$E_m := \bigcup_{x \in C \subset U_m} T_{\mathbb{R},x}^* C \subset T_{\mathbb{R}}^* U$$

ed estendiamo alle fibre l'azione ρ del gruppo G_m e tutte le mappe j che realizzano la relazione di sotto-orbicarta tramite la restrizione a E_m del loro differenziale.

Tale definizione dà una struttura di fibrato vettoriale orbifold olomorfo su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \setminus \Delta$. E' possibile estendere tale fibrato tutto l'aperto \mathcal{C}_m , ottenendo un fibrato vettoriale orbifold \mathcal{L} su $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$. Tale estensione è detta **fibrato cotangente relativo**.

In particolare, il gruppo G_m agisce su C_m come il suo gruppo di simmetria, quindi $E_m|_{C_m} = T_{\mathbb{R}}^* C_m$ e si ha

$$g.(x, \xi) = (g.x, \xi d\rho_g^{-1}) \quad \forall g \in G_m, x \in C_m, \xi \in T_{\mathbb{R},x}^* C_m.$$

Si noti che dalla definizione non è chiaro come sia fatta la fibra vettoriale sopra un punto nodale di una fibra singolare della curva universale. Darne una descrizione precisa non è negli scopi di questa tesi. Ci limiteremo a descrivere le sezioni locali del fibrato cotangente relativo.

Una sezione locale olomorfa di \mathcal{L} sull'aperto \mathcal{C}_m della definizione precedente è una mappa olomorfa $s : \mathcal{C}_m \longrightarrow E_m$ tale che, se composta con la naturale proiezione $\pi_m : E_m \longrightarrow C_m$, dia l'identità su C_m . Se consideriamo una fibra non nodale $C \subset U_m$, allora $s|_C$ è una 1-forma differenziale olomorfa su C , ovvero un differenziale abeliano. Per estensione, le restrizioni a C di sezioni olomorfe di E_m sono dette differenziali abeliani anche nel caso in cui C sia nodale. Ne diamo una descrizione con la seguente

Proposizione 15 (Differenziale abeliano). *Sia C una curva stabile. Si dice differenziale abeliano una 1-forma meromorfa α tale che*

- *gli unici poli di α sono ai nodi di C ,*
- *α ha solo poli semplici,*
- *i residui su rami differenti in un intorno di un nodo sono opposti.*

Lo spazio vettoriale dei differenziali abeliani su di una curva di genere g ha dimensione g . Ciò è vero sia per curve lisce che per curve stabili. E' pertanto possibile definire un fibrato vettoriale olomorfo su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, di rango g , tale che la fibra locale su un punto $m \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ sia lo spazio g dimensionale dei differenziali abeliani su una qualsiasi curva C_m rappresentata dalla classe di equivalenza di m . Tale fibrato prende il nome di **fibrato di Hodge**, precisamente

Definizione 33 (Fibrato di Hodge). Il fibrato di Hodge, indicato con \mathcal{H} è il dato, per ogni $m \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, del seguente fibrato locale \mathcal{H}_m sull'orbicarta relativa all'aperto U_m :

$$\mathcal{H}_m := \bigcup_{x \in U_m} \{s|_{C_x} \mid s \in \Gamma(E_m), p(C_x) = x\}$$

dove $\Gamma(E_m)$ è lo spazio delle sezioni olomorfe del fibrato vettoriale locale E_m .

L'azione di G_m viene estesa a \mathcal{H}_m tramite il push-forward dell'azione di G_m sulle sezioni di E_m . Precisamente, data una sezione $s \in \Gamma(E_m)$, l'azione di $g \in G_m$ su $s|_{C_x}$ è $(g_*s)|_{C_x}$. Le mappe j che realizzano la relazione di sotto-orbicarta vengono estese analogamente.

Classi ψ e classi λ .

Sia $s_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}_{g,n}$ la sezione della curva universale che a $m \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ associa (la classe di equivalenza de) l' i -esimo punto marcato in C_m . Definiamo, per ogni $i \leq n$, i seguenti orbibundle olomorfi su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$:

$$\mathcal{L}_i = s_i^* \mathcal{L}.$$

dove il pull-back è computato sui fibrati locali. Precisamente, considerato un sollevamento locale $(s_i)_m : U_m \rightarrow \mathcal{C}_m$ della mappa s_i , il fibrato locale di \mathcal{L}_i su U_m è definito come

$$(s_i)_m^* E_m = \{(x, \xi) \in U_m \times E_m \mid (s_i)_m(x) = p_m(\xi)\},$$

mentre l'azione di G_m e le mappe j che realizzano la relazione di sotto-orbicarta sono estese alle fibre tramite le mappe corrispondenti su E_m .

Si noti che tali fibrati hanno tutti rango 1. Sia $m \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ la classe di equivalenza della curva (C, x_1, \dots, x_n) , allora la fibra di \mathcal{L}_i sopra m è

$$T_{x_i}^* C.$$

Diamo le seguenti definizioni

Definizione 34 (Classi ψ e classi λ). Sia $i \leq n$. Si dice i -esima classe ψ la seguente

$$\psi_i := c_1(\mathcal{L}_i) = e(\mathcal{L}_i) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Z}) \subset H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}).$$

Sia $\mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ il fibrato di Hodge. Si dice i -esima classe di Hodge, o classe λ , la seguente

$$\lambda_i := c_i(\mathcal{H})$$

Si dice classe di Hodge totale la seguente

$$\Lambda(s) := \sum_{i=0}^n \lambda_i s^i.$$

dove s è un parametro complesso.

Si noti che le classi di Chern considerate sono ben definite secondo la costruzione data nel capitolo 3 relativa alle classi di Chern, perché tutti i fibrati considerati ammettono una connessione. In particolare i fibrati \mathcal{L}_i ammettono connessione perchè sono line orbibundle, mentre il fibrato di Hodge ammette connessione perchè l'azione di gruppo locale è diagonale sulle fibre, in quanto è la moltiplicazione, su ogni generatore dello spazio dei differenziali abeliani, per il differenziale dell'azione di gruppo sulla base, e rispetta quindi la condizione della proposizione 9.

Proprietà delle classi ψ : string equation.

In questa sezione studiamo un'importante relazione fra le classi- ψ , detta **string equation**, ovvero, escludendo i casi $g = 0, n = 2$ e $g = 1, n = 0$,

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n} = \sum_{j=0}^n \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \dots \psi_j^{d_j-1} \dots \psi_n^{d_n}.$$

Nel seguito indicheremo con $\mathcal{L}_j^{(n)}$ il pull-back tramite la sezione che identifica il j -esimo punto marcato del fibrato cotangente relativo su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, e con $\psi_j^{(n)}$ la sua prima classe di Chern. La relazione che intendiamo mostrare assume quindi la forma

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} (\psi_1^{(n+1)})^{d_1} \dots (\psi_n^{(n+1)})^{d_n} = \sum_{i=0}^n \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} (\psi_1^{(n)})^{d_1} \dots (\psi_i^{(n)})^{d_i-1} \dots (\psi_n^{(n)})^{d_n}$$

dove adottiamo la convezione che $(\psi_i^{(n)})^{-1} = 0$.

Indichiamo con $D_j \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ il divisore dato da tutte quelle curve nodali che hanno una componente irriducibile di genere zero contenente il j -esimo punto marcato e l' $(n+1)$ -esimo punto marcato.

Notiamo che la mappa di dimenticanza $p : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ che dimentica l'ultimo punto marcato agisce, sulle curve rappresentate da elementi di D_j , contraendo la componente irriducibile in cui j è contenuto. Tale mappa inoltre contrae anche le componenti che contengono solamente l' $(n+1)$ -esimo punto marcato e due punti nodali, ma di questo non sarà necessario preoccuparsi, dal momento che l'insieme di tali curve nello spazio dei moduli è di dimensione inferiore rispetto a D_j .

Diamo il seguente

Lemma 4. *Si consideri il pull-back $p^*\psi_j^{(n)}$ della j -esima classe- ψ tramite la mappa di dimenticanza. Si ha la seguente relazione*

$$\psi_j^{(n+1)} = p^*\psi_j^{(n)} + PD(D_j)$$

dove PD indica la dualità di Poincarè.

Dimostrazione. Si consideri una sezione locale mai nulla S sul fibrato cotangente relativo $\mathcal{L}^{(n)}$ di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Detta $s_j^{(n)}$ la sezione che identifica il j -esimo punto marcato, $s := (s_j^{(n)})^*S$ identifica una sezione locale mai nulla di $\mathcal{L}_j^{(n)}$.

Consideriamo la mappa $p_C : \mathcal{C}_{g,n+1} \rightarrow \mathcal{C}_{g,n}$ che dimentica l' $(n+1)$ -esimo punto marcato e contrae le componenti non stabili. Notiamo che il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{g,n+1} & \xrightarrow{p_C} & \overline{\mathcal{C}}_{g,n} \\ s_j^{(n+1)} \uparrow & & s_j^{(n)} \uparrow \\ \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} & \xrightarrow{p} & \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \end{array}$$

è commutativo, pertanto si può calcolare il pull-back tramite p di s , che la porta ad una sezione locale p^*s su $\mathcal{L}_j^{(n+1)}$, come

$$p^*s = p^*(s_j^{(n)})^*S = (s_j^{(n+1)})^*p_C^*S.$$

Dato che per le curve rappresentate da D_j la componente contenente il j -esimo punto marcato viene contratta dalla mappa p_C , è possibile dedurre che $(p_C^*S)|_{C_m}$ è una sezione locale nulla sulla componente che contiene il j -esimo punto marcato $\forall m \in D_j$. Precisamente ciò è dovuto al fatto che $p_C|_{C_m}$ è una mappa differenziale che contrae una componente irriducibile, e pertanto il pull-back di una forma differenziale, in questo caso la forma $S|_{p_C(C_m)}$, è una forma differenziale nulla su tale componente irriducibile. Se ne conclude che p^*s si annulla su D_j . Da un calcolo diretto in coordinate, è possibile dedurre che D_j è uno zero semplice di p^*s .

Il fatto che una sezione locale mai nulla sia portata dal pull-back tramite p ad una sezione locale con uno zero semplice su D_j implica che, a meno di considerare esponenti desingularizzanti per i fibrati, dato il divisore di una sezione meromorfa globale del line orbibundle $p^*\mathcal{L}_j^{(n)}$, per ottenere il divisore della sezione meromorfa globale di $\mathcal{L}_j^{(n+1)}$ che le corrisponde tramite pull-back, occorre somare il divisore D . Questo si traduce nella seguente relazione fra fibrati

$$\mathcal{L}_j^{(n+1)} \cong p^*\mathcal{L}_j^{(n)} \otimes L_{D_j},$$

che si traduce nella seguente relazione fra classi di Chern:

$$\psi_j^{(n+1)} = p^*\psi_j^{(n)} + PD(D).$$

□

Nel seguito, per alleggerire la notazione, ometteremo la dualità di Poincaré e, con un abuso di notazione, scriveremo $\psi_j^{(n)}$ per indicare $p^*\psi_j^{(n)}$.

Notiamo che il fibrato $\mathcal{L}_j^{(n+1)}$ è banale su D_j , in quanto il j -esimo punto marcato sulla curva universale sopra D_j giace sempre su un oggetto rigido, ovvero una sfera di Riemann con tre punti marcati. Pertanto si ha

$$\psi_j^{(n+1)} D_j = c_1(\mathcal{L}_j^{(n+1)}) D_j = c_1(\mathcal{L}_j^{(n+1)}|_D) = 0.$$

Da questo e dal lemma precedente si deduce che

$$(\psi_j^{(n+1)})^d = (\psi_j^{(n)} + D_j)(\psi_j^{(n+1)})^{d-1} = \psi_j^{(n)}(\psi_j^{(n+1)})^{d-1}$$

con la convenzione che $(\psi_j^{(n)})^{-1} = 0$. Applicando ricorsivamente tale relazione si ottiene

$$(\psi_j^{(n+1)})^d = (\psi_j^{(n)})^d + (\psi_j^{(n)})^{d-1} D_j.$$

Applicando tale relazione all'integrale

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} (\psi_1^{(n+1)})^{d_1} \dots (\psi_n^{(n+1)})^{d_n}$$

otteniamo

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \left((\psi_1^{(n)})^{d_1} + (\psi_1^{(n)})^{d_1-1} D_1 \right) \dots \left((\psi_n^{(n)})^{d_n} + (\psi_n^{(n)})^{d_n-1} D_n \right).$$

Notiamo che $D_j \cap D_i = \emptyset$ per $i \neq j$, per costruzione. Utilizzando tale relazione assieme a quella ricavata precedentemente si ottiene

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} (\psi_1^{(n)})^{d_1} \dots (\psi_n^{(n)})^{d_n} + \sum_{j=0}^n \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} (\psi_1^{(n)})^{d_1} \dots (\psi_j^{(n)})^{d_j-1} (\psi_n^{(n)})^{d_n} D_j.$$

Il primo integrale è nullo, perché l'integranda è il pull-back di una classe da uno spazio di dimensione inferiore. Per valutare il secondo integrale è sufficiente integrare la classe D_j lungo le fibre della mappa $p : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Ciò è equivalente a restringere il dominio di integrazione a D_j , che è isomorfo a $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, in quanto ad ogni curva stabile di genere g con n punti marcati ne corrisponde una ed una sola in D_j , ottenuta sostituendo il j -esimo punto marcato con una sfera di Riemann contenente i punti marcati j e $n+1$ ed un punto nodale che la connetta al resto della curva. Si ottiene infine la relazione desiderata, ovvero

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} (\psi_1^{(n+1)})^{d_1} \dots (\psi_n^{(n+1)})^{d_n} = \sum_{j=0}^n \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} (\psi_1^{(n)})^{d_1} \dots (\psi_j^{(n)})^{d_j-1} \dots (\psi_n^{(n)})^{d_n},$$

Per ogni $d_i \in \mathbb{N}$.

Concludiamo analizzando i casi $g=0, n=2$ e $g=1, n=0$. Per un semplice conto sulle dimensioni, gli unici integrali non nulli in questi casi sono

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}} 1 = 1 \quad \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \psi_1 = \frac{1}{24}.$$

Il primo integrale è banale, una dimostrazione del secondo si può trovare in [6].

La string equation permetta anche di mostrare la seguente

Proposizione 16. *Detta $p : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ la mappa che dimentica l'ultimo punto marcato, si ha*

$$p_*(\psi_i^{(n+1)})^d = (\psi_i^{(n)})^{d-1}$$

per ogni $d \geq 0$ e $i \leq n$.

Dimostrazione. Sia $c \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ un generico divisore. Dal lemma 4 e dalla formula di proiezione abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} p_*(\psi_i^{(n+1)})^d c &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} (\psi_i^{(n+1)})^d p^* c = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} (p^* \psi_i^{(n)} + D_i) p^* ((\psi_i^{(n)})^{d-1} c) \\ &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} p_*(p^* \psi_i^{(n)} + D_i) (\psi_i^{(n)})^{d-1} c = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} p_* \psi_i^{(n+1)} (\psi_i^{(n)})^{d-1} c. \end{aligned}$$

Pertanto la dimostrazione è ridotta a mostrare che $p_* \psi_i^{(n+1)} = 1$.

Si noti che, dal momento che p è una mappa fra orbifold, con fibre che sono varietà compatte e orientabili, suriettiva, p_* può essere rappresentata con l'integrazione sulle fibre. Si ha

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} p_* \psi_i^{(n+1)} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \int_{p^{-1}(\mathbf{x})} \psi_i^{(n+1)}(\mathbf{x}, \mathbf{f}) d\mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \psi_i^{(n+1)} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} 1$$

dove l'ultima equazione è dedotta dalla string equation, e da essa si conclude che $p_* \psi_i^{(n+1)}$ è la classe duale di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. \square

Proprietà delle classi λ

In questa sezione enunciamo alcune delle proprietà fondamentali delle classi λ e della classe di Hodge totale.

Indichiamo con λ_g la classe di Hodge di grado massimo su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Definiamo lo spazio dei moduli delle curve stabili **di tipo compatto**, di genere g , con n punti marcati come il sottoinsieme $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{ct}$ di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ dei rappresentanti di curve che contengono solamente nodi di tipo separante, ovvero tali che, a seguito della normalizzazione di uno dei nodi, la curva non sia più connessa. Si ha

Proposizione 17. λ_g è nulla su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \setminus \overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{ct}$.

Indichiamo con $\Lambda^{(g,n)}(s)$ la classe di Hodge totale su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

Proposizione 18. La classe di Hodge totale gode delle seguenti proprietà

- i) $\Lambda^{(g,n)}(s)$ è invariante rispetto all'azione di S_n su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ che permuta l'ordine dei punti marcati,
- ii) $\Lambda^{(0,3)}(s) = 1$,
- iii) $q^*\Lambda^{(g,n)}(s) = \Lambda^{(g-1,n+2)}(s)$, dove q è la mappa di incollamento di tipo non separante. Inoltre $\forall n_1, n_2$ tali che $n_1 + n_2 - 2 = n$ si ha $q^*\Lambda^{(g,n)}(s) = \Lambda^{(g_1,n_1)}(s)\Lambda^{(g_2,n_2)}(s)$, dove q è la mappa di incollamento di tipo separante.

Le proprietà precedenti, che possono sembrare arbitrarie, sono in verità figlie di una costruzione più generale, quella di *cohomological field theory*, che introdurremo nella prossima sezione. Per ora ci limitiamo a notare che esse inducono le seguenti proprietà per la classe λ_g :

Proposizione 19. Sia $\lambda_g^{(n)}$ la classe di hodge di grado massimo di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Si ha

- i) $\lambda_g^{(n)}$ è invariante rispetto all'azione di S_n su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ che permuta l'ordine dei punti marcati,
- ii) $\lambda_0^{(0,3)} = 1$,
- iii) $\forall n_1, n_2$ tali che $n_1 + n_2 - 2 = n$ si ha $q^*\lambda^{(g,n)} = \lambda^{(g_1,n_1)}\lambda^{(g_2,n_2)}$, dove q è la mappa di incollamento di tipo separante.

4.3 Cohomological field theories.

Sia $(V, \eta, \mathbf{1})$ una tripla formata da

- un \mathbb{Q} -spazio vettoriale V di dimensione N ,

- un vettore $\mathbf{1} \in V$,
- una 2-forma simmetrica non degenera $\eta = \sum_{j,k \leq N} \eta_{jk} e_j^* \otimes e_k^*$ su V ,

dove e_1, \dots, e_N indica la base canonica di V . Indichiamo con η^{jk} la matrice associata all'inversa di η . Allora

Definizione 35 (CohFT). Una cohomological field theory a valori in V è un sistema di tensori

$$c_{g,n} \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}) \otimes (V^*)^{\otimes n}, \quad 2 - 2g - n < 0,$$

che soddisfa ai seguenti assiomi.

- i) Ogni tensore $c_{g,n}$ è invariante rispetto all'azione del gruppo S_n delle permutazioni di n elementi su

$$H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \otimes (V^*)^{\otimes n}$$

ottenuta permutando simultaneamente gli n punti marcati $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ e gli n fattori V^* del prodotto tensore.

- ii) $\forall v_1, \dots, v_n \in V, 2g - 2 + n > 3$ vale

$$p^* c_{g,n}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = c_{g,n}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes \mathbf{1})$$

dove p è la mappa di dimenticanza. Inoltre vale

$$c_{0,3}(v_1 \otimes v_2 \otimes \mathbf{1}) = \eta(v_1, v_2).$$

- iii) $\forall v_1, \dots, v_n \in V$ vale

$$q^* c_{g,n}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \sum_{j,k \leq N} \eta^{jk} c_{g-1,n+2}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes e_j \otimes e_k)$$

dove q è la mappa di incollamento di tipo non separante. Inoltre $\forall n_1, n_2$ tali che $n_1 + n_2 = n$ vale

$$q^* c_{g,n}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \sum_{i,j \leq N} \eta^{ij} c_{g_1, n_1+1}(v_1 \otimes \dots \otimes v_{n_1} \otimes e_j) c_{g_2, n_2+1}(v_{n_1+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes e_k)$$

dove q è la mappa di incollamento di tipo separante.

Nel seguito, abbrevieremo cohomological field theory con l'acronimo CohFT.

Un sistema di tensori che soddisfa alla definizione precedente viene a volte detto CohFT con unità, mentre una CohFT senza unità è un sistema di tensori che soddisfa solo agli assiomi (i) e (iii). Inoltre si dice **CohFT parziale** un sistema di tensori che soddisfa a tutti gli assiomi eccetto la prima istanza di (iii), ovvero l'assioma relativo alla mappa di incollamento di tipo non separante.

Nel seguito, per indicare $c_{g,n}(v_1 \otimes \cdots v_n)$ scriveremo più semplicemente $c_{g,n}(v_1, \cdots v_n)$.

L'esempio più semplice di cohomological field theory è la CohFT banale, data da

$$V = \mathbb{Q}, \quad \eta(1, 1) = 1, \quad \mathbf{1} = 1, \quad c_{g,n}(v_1 \cdots v_n) = 1 \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}).$$

Un esempio non banale di CohFT è dato dalla classe di Hodge totale:

$$V = \mathbb{Q}, \quad \eta(1, 1) = 1, \quad \mathbf{1} = 1, \quad c_{g,n}(v_1 \cdots v_n) = \Lambda(s) \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}).$$

per $s \in \mathbb{C}$. Il fatto che sia effettivamente una CohFT può essere dedotto dalla proposizione 18.

L'esempio motivante la definizione precedente, invece, viene dalla teoria di Gromov-Witten di una varietà proiettiva non singolare X . In particolare si ha $V = H^*(X, \mathbb{Q})$, $\mathbf{1} = 1$ e η è la dualità di Poincaré. Per rispettare la nostra definizione di CohFT, i gruppi di coomologia di grado dispari di X devono essere nulli, in modo che η sia simmetrica.¹ In questo caso è possibile esprimere gli invarianti di Gromov-Witten (degli invarianti geometrici che hanno permesso di distinguere fra loro spazi prima non distinguibili) in termini di CohFT.

Semisemplicità.

Dato che $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è connesso, possiamo identificare $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$ con \mathbb{Q} . Una CohFT $c := (c_{g,n})_{2-2g-n < 0}$ definisce un prodotto quantico \bullet su V , tramite la seguente espressione implicita

$$\eta(v_1 \bullet v_2, v_3) = c_{0,3}(v_1, v_2, v_3).$$

E' possibile mostrare con un calcolo diretto che tale prodotto ha le seguenti proprietà:

1. è commutativo, per l'assioma (i) della definizione di CohFT,
2. $\mathbf{1}$ ne è l'identità, per la seconda istanza dell'assioma (ii) della definizione di CohFT,

¹E' in verità possibile formulare la definizione di Cohomological field theory in modo da includere anche varietà che non rispettino questa ipotesi, ma occorre sostituire lo spazio vettoriale V su \mathbb{Q} con uno spazio vettoriale gradato su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. In questa tesi non prenderemo questa strada.

3. è associativo, per l'assioma (iii) della definizione di CohFT.

Se ne conclude che $(V, \bullet, \mathbf{1})$ è una \mathbb{Q} -algebra commutativa.

Definizione 36 (Semisemplicità). Una CohFT c su $(V, \eta, \mathbf{1})$ si dice semisemplice se l'algebra $(V, \bullet, \mathbf{1})$ associata lo è. Precisamente, c è semisemplice se $V \otimes \mathbb{C}$ ammette una base $\{e_1, \dots, e_N\}$ di elementi idempotenti tali che

$$e_i \bullet e_j = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ e_j, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Le CohFT semisemplici sono una classe molto particolare di cohomological field theories perché è possibile determinarle completamente a partire dalla loro parte topologica. Questo risultato è quanto è contenuto nell'enunciato del teorema di Givental-Teleman. Tale risultato non è essenziale ai problemi trattati in questa tesi, ma è utile a capire la particolare centralità del ruolo delle CohFT semisemplici all'interno della teoria. Ne daremo pertanto solo una breve e superficiale trattazione nelle prossime sezioni.

Parte topologica.

Ricordiamo che $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$, come ogni anello di coomologia, è definito da

$$H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^k(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$$

dove, per $k > 3g - 3 + n$, i gruppi di coomologia sono tutti nulli. In particolare è ben definita la proiezione sul primo termine della somma, e la indicheremo con

$$[\cdot]^0 : H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}), \quad \omega \mapsto [\omega]^0.$$

E' possibile estendere in maniera naturale tale mappa ad una mappa da $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}) \otimes (V^*)^{\otimes n}$ a $H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}) \otimes (V^*)^{\otimes n} \subset H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}) \otimes (V^*)^{\otimes n}$ tramite

$$[c_{g,n}]^0(v_1, \dots, v_n) = [c_{g,n}(v_1, \dots, v_n)]^0, \quad \forall v_1, \dots, v_n \in V.$$

Se $c := (c_{g,n})_{2-2g-n>0}$ è una CohFT (semisemplice) su $(V, \eta, \mathbf{1})$, anche $[c]^0 := ([c_{g,n}]^0)_{2-2g-n>0}$ lo è, e viene denominata **parte topologica** di c . Vale il seguente

Lemma 5. *La parte topologica $[c]^0$ di una CohFT c è univocamente determinata dai coefficienti del prodotto quantico \bullet , ovvero*

$$\eta(e_i \bullet e_j, e_k) = c_{0,3}(e_i, e_j, e_k), \quad i, j, k \leq N.$$

La dimostrazione di questo lemma è una conseguenza del fatto che è sufficiente conoscere il valore di $[c]_{g,n}^0$ su un solo punto dello spazio dei moduli, dal momento che essa è un multiplo di $1 \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$. Scegliendo un punto $m \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ rappresentante una curva massimalmente degenere, ovvero con ogni componente isomorfa a $(\mathbb{C}\mathbb{P}, 0, 1, \infty)$, è possibile ricostruire $[c]_{g,n}^0|_m$ da $[c]_{0,3}^0|_m$ applicando ripetutamente l'assioma relativo alle mappe di incollamento. Dato che $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}$ è un punto, si ha inoltre che $[c]_{0,3}^0 = c_{0,3}$.

Classificazione di Givental-Teleman.

Sia $(V, \eta, \mathbf{1})$ uno spazio vettoriale complesso con unità, come definito precedentemente. Sia R la seguente serie di matrici

$$R(z) := \sum_{k=0}^{\infty} R_k z^k \in \mathbb{I} + z \operatorname{End}(V)[[z]]$$

tale che soddisfi alla seguente condizione simplettica

$$R(z)R^{ad}(-z)$$

dove R^{ad} è l'aggiunta di R rispetto alla metrica η .

E' possibile (ma molto laborioso) definire un'azione di R sull'insieme delle CohFT a valori in V . Per una trattazione precisa di tale definizione rimandiamo a [9]. Tale azione su una CohFT c verrà indicata con $R.c$. Possiamo dare il seguente

Teorema 12. *Sia c una CohFT semisemplice con unità a valori in $(V, \eta, \mathbf{1})$, e sia $[c]^0$ la sua parte topologica. Allora esiste un'unica serie di matrici*

$$R(z) := \sum_{k=0}^{\infty} R_k z^k \in (I) + z \operatorname{End}(V)[[z]], \quad R(z)R^{ad}(-z)$$

dove R^{ad} è l'aggiunta rispetto alla metrica η , tale che

$$c = R.[c]^0.$$

Questo risultato prende il nome di **Classificazione di Givental-Teleman**.

Si noti che esso riduce il problema di determinare una CohFT semisemplice, al problema di determinarne la sua parte topologica (solitamente facile da risolvere) e quello di determinarne la serie di matrici R (non sempre così facile). Un esempio di tale relazione è dato dalla seguente CohFT:

$$V = \mathbb{Q}, \quad \eta(1, 1) = 1, \quad \mathbf{1} = 1, \quad c_{g,n} = \Lambda(s) \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$$

dove $s \in \mathbb{C}$. In questo caso la parte topologica di c è

$$[c]^0 = 1 \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$$

e la serie di matrici R è data da

$$R(z) := \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} z^{2k-1}\right)$$

dove B_{2k} sono i numeri di Bernoulli.

Potenziale di una CohFT.

In questa sezione introduciamo una costruzione che, a prima vista, può sembrare arbitraria: il potenziale di una CohFT. Esso è essenzialmente una serie di potenze formale i cui coefficienti contengono l'informazione geometrica della CohFT, ovvero il numero d'intersezione della CohFT con le classi psi. L'utilità di tale funzione sarà chiara nell'ultimo capitolo quando avremo modo di esplicitare una sorprendente relazione, ancora oggetto di congettura, fra la coomologia dello spazio dei moduli delle curve stabili ed i sistemi integrabili.

Sia c una cohomological field theory a valori in $(V, \eta, \mathbf{1})$. Definiamo il **correlatore di genere g** di c come

$$\langle \tau_{d_1}(v_1) \cdots \tau_{d_n}(v_n) \rangle_g := \int_{\mathcal{M}_{g,n}} c_{g,n}(v_1 \cdots v_n) \prod_{k=1}^n \psi_k^{d_k}, \quad \forall v_1, \cdots, v_n \in V.$$

Sia $e_1, \cdots, e_n \in V$ una base di V definiamo $\forall g \geq 0$ le seguenti serie formali nelle variabili $t = \{t_d^\alpha\}_{d \in \mathbb{N}, \alpha \leq N}$.²

$$F_g(t) := \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ 2g-2+n \geq 0}} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 0 \\ 1 \leq \alpha_1 \cdots \alpha_n \leq N}} \langle \tau_{d_1}(e_{\alpha_1}) \cdots \tau_{d_n}(e_{\alpha_n}) \rangle_g \prod_{k=1}^n t_{d_k}^{\alpha_k}.$$

Definiamo infine il **potenziale** della CohFT c come la seguente serie formale nelle variabili t e nella variabile ϵ

$$\sum_{g \geq 0} \epsilon^{2g} F_g.$$

²Il termine "formali" in questo contesto si riferisce al fatto che non ci preoccuperemo del raggio di convergenza della serie.

Capitolo 5

Relazioni fra sistemi hamiltoniani integrabili e teoria delle intersezioni in $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

In questo capitolo introduciamo finalmente la *double ramification hierarchy*. Essa è essenzialmente un modo per associare ad ogni CohFT un sistema hamiltoniano integrabile tau-simmetrico.

In particolare nella prima sezione esponiamo la costruzione in genere zero, ovvero considerando solamente la parte topologica della CohFT, mentre nella seconda sezione esponiamo la costruzione in tutta generalità. Come si vedrà, le due costruzioni discendono essenzialmente dallo stesso ragionamento, sebbene nella seconda il contenuto geometrico sia molto più complesso. Il motivo per cui abbiamo scelto di esporle entrambe è che solo nel primo caso disponiamo di tutti gli strumenti necessari a svolgere ogni calcolo esplicitamente, mentre nel secondo dovremo fare uso di alcuni strumenti geometrici che saranno debitamente introdotti.

5.1 Genere zero.

In questa sezione introdurremo una tipologia di PDE hamiltoniane integrabili che possono essere associate alla parte topologica di una CohFT. Nel seguito assumeremo che $c := (c_{g,n})_{2-2g-n < 0}$ sia una cohomological field theory a valori in (V, η, e_1) , e che e_1, \dots, e_N sia una base di V . Definiamo i seguenti polinomi differenziali associati a c :

$$h_{\beta,d} := \sum_{\substack{n \geq 2, i \leq n \\ 1 \leq \alpha_i \leq N}} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{M}_{0,n+1}} \psi_1^d c_{0,n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \prod_{i=1}^n u_0^{\alpha_i}, \quad 1 \leq \beta \leq N, d \geq 0.$$

Ed indichiamo con $H_{\beta,d}$ i funzionali locali ad essi associati:

$$H_{\beta,d} := \int h_{\beta,d} dx, \quad 1 \leq \beta \leq N, d \geq 0.$$

Notiamo che tale costruzione dipende solo dalla parte di genere zero di c .

Notiamo inoltre che i funzionali locali dipendono solamente da u_0 , e non dalle sue derivate, e pertanto, al fine di alleggerire la notazione, indicheremo in questa sezione la variabile u_0 semplicemente con u .

La gerarchia hamiltoniana associata ai polinomi $h_{*,*}$ rispetto all'operatore hamiltoniano $\eta^{-1} \partial_x$, ovvero

$$\partial_{t^d} u_\alpha = \{u^\alpha, H_{\beta,d}\}_{\eta^{-1} \partial_x} = \eta^{\alpha\beta} \partial_x \frac{\delta H_{\beta,d}}{\delta u^\alpha}, \quad \forall 1 \leq \alpha, \beta \leq N, d \geq 0,$$

è priva di derivate nella variabile x successive alla prima. Questo costituisce ovviamente una forte restrizione alla gamma di sistemi che è possibile considerare. Tale restrizione è essenzialmente dovuta al fatto che stiamo considerando solamente la parte di genere zero di c .

Nel seguito mostreremo che non solamente la gerarchia hamiltoniana sopra definita è effettivamente una gerarchia, ovvero soddisfa alla condizione di Poisson-commutatività

$$\{H_{\alpha,p}, H_{\beta,q}\} = 0, \quad \forall 1 \leq \alpha, \beta \leq N, p, q \geq 0$$

ma che è anche tau-simmetrica.

Poisson-commutatività.

In questa sezione daremo una dimostrazione della Poisson-commutatività della gerarchia hamiltoniana precedentemente introdotta. Per facilitarne la lettura, la dimostrazione è stata suddivisa in tre lemmi.

Lemma 6. *La Poisson commutatività di una gerarchia $H_{*,*} = \int h_{*,*} dx$ tale che i polinomi differenziali $h_{*,*}$ non dipendano dalle derivate di u è equivalente alla seguente condizione:*

$$\frac{\partial^2 h_{\alpha,p}}{\partial u^\gamma \partial u^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\beta,q}}{\partial u^\nu \partial u^\delta} = \frac{\partial^2 h_{\alpha,p}}{\partial u^\delta \partial u^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\beta,q}}{\partial u^\nu \partial u^\gamma}$$

per ogni $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, N$ e $p, q \geq 0$.

Dimostrazione. Dal momento che le hamiltoniane $H_{*,*}$ dipendono solo dalla variabile u e non dalle sue derivate, è possibile esprimere la relazione di Poisson commutatività esplicitamente come

$$\{H_{\alpha,p}, H_{\beta,q}\} = \int \frac{\partial h_{\alpha,p}}{\partial u^\mu} \eta^{\mu\nu} \partial_x \frac{\partial h_{\beta,q}}{\partial u^\nu} dx = \int \frac{\partial h_{\alpha,p}}{\partial u^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\beta,q}}{\partial u^\nu \partial u^\delta} u_1^\delta dx = 0.$$

Dal lemma 1 sappiamo che l'integrale precedente è nullo se e solo se il polinomio differenziale integrando ha derivata variazionale nulla in tutte le direzioni. Impostiamo pertanto il seguente sistema di equazioni equivalenti alla Poisson commutatività

$$\frac{\delta}{\delta u^\gamma} \left(\frac{\partial h_{\alpha,p}}{\partial u^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\beta,q}}{\partial u^\nu \partial u^\delta} u_1^\delta \right) = 0, \quad \gamma = 1, \dots, N.$$

Dato che l'espressione fra le parentesi non contiene derivate di u superiori alla prima, la derivata variazionale assume la forma $\frac{\delta}{\delta u^\gamma} = \frac{\partial}{\partial u^\gamma} - \partial_x \frac{\partial}{\partial u_1^\gamma}$. Svolgendola si ottiene:

$$\frac{\partial^2 h_{\alpha,p}}{\partial u^\gamma \partial u^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\beta,q}}{\partial u^\nu \partial u^\delta} u_1^\delta + \frac{\partial h_{\alpha,p}}{\partial u^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^3 h_{\beta,q}}{\partial u^\mu \partial u^\gamma \partial u^\delta} u_1^\delta - \partial_x \left(\frac{\partial h_{\alpha,p}}{\partial u^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\beta,q}}{\partial u^\nu \partial u^\gamma} \right).$$

Notiamo che l'argomento della derivata ∂_x non contiene derivate di u , pertanto essa assume la forma $\partial_x = u_1^\delta \frac{\partial}{\partial u^\delta}$. Svolgendola si ottiene

$$\partial_x \left(\frac{\partial h_{\alpha,p}}{\partial u^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\beta,q}}{\partial u^\nu \partial u^\gamma} \right) = \frac{\partial^2 h_{\alpha,p}}{\partial u^\delta \partial u^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\beta,q}}{\partial u^\nu \partial u^\gamma} u_1^\delta + \frac{\partial h_{\alpha,p}}{\partial u^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^3 h_{\beta,q}}{\partial u^\nu \partial u^\gamma \partial u^\delta} u_1^\delta$$

Unendo le due espressioni le derivate parziali terze si cancellano, ed otteniamo la condizione desiderata. \square

La gerarchia che abbiamo in studio, come già evidenziato, soddisfa al lemma precedente. L'equazione del lemma esprime essenzialmente la simmetria negli indici γ e δ della seguente espressione

$$\frac{\partial^2 h_{\alpha,p}}{\partial u^\gamma \partial u^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\beta,q}}{\partial u^\nu \partial u^\delta}.$$

Per esplicitare l'espressione precedente, calcoliamo, direttamente dalla definizione, la derivata parziale seconda in u^γ e u^μ di $h_{\alpha,p}$:

$$\frac{\partial^2 h_{\alpha,p}}{\partial u^\gamma \partial u^\mu} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq n \\ j \neq k}} \sum_{\substack{i \leq n \\ i \neq j, k \\ 1 \leq \alpha_i \leq N}} \int_{\mathcal{M}_{0,n+1}} \psi_1^p c_{0,n+1}(e_\alpha, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \Big|_{\substack{\alpha_j = \gamma \\ \alpha_k = \mu}} \prod_{\substack{i \leq n \\ i \neq j, k}} u^{\alpha_i}.$$

Utilizzando il primo assioma della definizione di CohFT è possibile riordinare tutti i vettori del prodotto tensore a piacere senza cambiare la funzione integranda, ad eccezione del primo, a cui è associata una classe- ψ . Pertanto possiamo riscrivere l'espressione precedente come

$$\frac{\partial^2 h_{\alpha,p}}{\partial u^\gamma \partial u^\mu} = \sum_{\substack{n \geq 2 \\ 1 < i < n \\ 1 \leq \alpha_i \leq N}} \frac{n(n-1)}{n!} \int_{\mathcal{M}_{0,n+1}} \psi_1^p c_{0,n+1}(e_\alpha, e_\gamma, \otimes_{i=2}^{n-1} e_{\alpha_i}, e_\mu) \prod_{i=2}^{n-1} u^{\alpha_i}$$

semplificando la frazione e riscaldando n come $n \mapsto n+2$ otteniamo

$$\frac{\partial^2 h_{\alpha,p}}{\partial u^\gamma \partial u^\mu} = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ 1 < i < n \\ 1 \leq \alpha_i \leq N}} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{M}_{0,n+3}} \psi_1^p c_{0,n+3}(e_\alpha, e_\gamma, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}, e_\mu) \prod_{i=1}^n u^{\alpha_i}.$$

A questo punto possiamo valutare esplicitamente l'espressione $\frac{\partial^2 h_{\alpha,p}}{\partial u^\gamma \partial u^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\beta,q}}{\partial u^\nu \partial u^\delta}$ e discuterne la simmetria negli indici γ e δ . Dal calcolo diretto della suddetta espressione, otteniamo una serie formale nelle variabili u^* . Il coefficiente del monomio $\prod_{i=1}^n u_i^{\alpha_i}$, se lo si considera indipendentemente dall'ordine della moltiplicazione, è

$$\begin{aligned} & \sum \int_{\mathcal{M}_{0,n_1+3}} \psi_1^p c_{0,n_1+3}(e_\alpha, e_\gamma, \dots e_\mu) \eta^{\mu\nu} \int_{\mathcal{M}_{0,n_2+3}} \psi_1^q c_{0,n_2+3}(e_\beta, e_\delta, \dots e_\nu) = \\ & \sum \int_{\mathcal{M}_{0,n_1+3} \times \mathcal{M}_{0,n_2+3}} \eta^{\mu\nu} c_{0,n_1+3}(e_\alpha, e_\gamma, \dots e_\mu) c_{0,n_2+3}(e_\beta, e_\delta, \dots e_\nu) \pi_1^* \psi_1^p \pi_2^* \psi_1^q \end{aligned}$$

dove la sommatoria è su tutte le scelte di n_1 ed n_2 tali che $n_1 + n_2 = n$ e su tutte le scelte dei primi n_1 indici fra i vari $1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \leq N$.

I termini omissi nelle due CohFT sono, rispettivamente, $\otimes_{i=1}^{n_1} e_{\alpha_i}$ e $\otimes_{i=n_1+1}^{n_2} e_{\alpha_i}$. I simboli π_1^* e π_2^* indicano il pull-back tramite le naturali mappe di proiezione del prodotto $\mathcal{M}_{0,n_1+3} \times \mathcal{M}_{0,n_2+3}$. Tale pull-back viene solitamente omissa perché chiaro dal contesto, ed è il motivo per cui non compare davanti alle CohFT (che sono evidentemente distinte dalla presenza di diversi indici n_1 ed n_2). Lo abbiamo invece esplicitato davanti alle classi- ψ per evidenziarne la diversa provenienza.

L'assenza dei fattori $1/n_1!$ e $1/n_2!$ è dovuta al fatto che gli indici, nei primi due integrali, sono già stati riordinati tutti nella stessa maniera, ottenendo così, rispettivamente, $n_1!$ -volte e $n_2!$ -volte lo stesso integrale. A tali

riordinamenti corrisponde un riordinamento dei punti marcati, che non coinvolge però le classi ψ , perché non concerne i primi due punti dei rispettivi spazi.

Sia $n = n_1 + n_2$. Per $p = q = 0$ l'espressione precedente è, per il terzo assioma della definizione di CohFT, l'integrale di $c_{0,n+4}(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta, \dots)$ sul divisore $\delta_{13|24} \in \overline{\mathcal{M}}_{0,n+4}$ che rappresenta le curve ottenute incollando, tramite l'ultimo punto marcato, una curva di $\overline{\mathcal{M}}_{0,n_1+3}$ ed una curva di $\overline{\mathcal{M}}_{0,n_2+3}$, per qualsiasi scelta di n_1 ed n_2 e qualsiasi ordine degli ultimi n punti marcati. Tale divisore è precisamente il rappresentate di tutte quelle curve nodali di genere zero che contengono un nodo che separi i punti marcati 1 e 3 dai punti marcati 2 e 4. In effetti la situazione è simile anche in presenza delle classi- ψ , infatti

Lemma 7. *Nella notazione precedente, la somma*

$$\sum \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n_1+3} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,n_2+3}} \eta^{\mu\nu} c_{0,n_1+3}(e_\alpha, e_\gamma, \dots e_\mu) c_{0,n_2+3}(e_\beta, e_\delta, \dots e_\nu) \pi_1^* \psi_1^p \pi_2^* \psi_1^q$$

è equivalente all'integrale

$$\int_{\delta_{13|24}} c_{0,n+4}(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta, \otimes_{i=1}^n \alpha_i) \psi_1^p \psi_2^q.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è poco più che un'applicazione del pull-back tramite le corrette mappe di incollamento di tipo separante

$$q : \overline{\mathcal{M}}_{0,n_1+3} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,n_2+3} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n+4}.$$

Precisamente, per ogni scelta degli interi n_1 ed n_2 , consideriamo una mappa di incollamento q che manda i primi due punti marcati di $\overline{\mathcal{M}}_{0,n_1+3}$ nel primo e nel terzo di $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+4}$, ed i primi due punti marcati di $\overline{\mathcal{M}}_{0,n_2+3}$ nel secondo e nel quarto di $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+4}$. Tale riordinamento è permesso per il primo assioma della definizione di CohFT, e ad esso corrisponde un riordinamento dei punti marcati nell'integrale: le classi- ψ sono conseguentemente mandate nella prima e nella seconda classe- ψ . Precisamente

$$\pi_1^* \psi_1^{(n_1+3)} = q^* \psi_1^{(n+4)}, \quad \pi_2^* \psi_1^{(n_2+3)} = q^* \psi_2^{(n+4)},$$

dove il numero fra parentesi indica lo spazio di appartenenza. Come evidenziato in precedenza, dalla definizione di CohFT si ha

$$q^* c_{0,n+4}(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta, \dots) = \eta^{\mu\nu} c_{0,n_1+3}(e_\alpha, e_\gamma, \dots e_\mu) c_{0,n_2+3}(e_\beta, e_\delta, \dots e_\nu).$$

Infine l'immagine tramite q di $\overline{\mathcal{M}}_{0,n_1+3} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,n_2+3}$ è il sottoinsieme di $\delta_{13|24}$ che rappresenta le curve tali che un nodo separi i punti marcati 1, 3, 4, \dots $n_1 + 4$ dai restanti. Dal momento che la sommatoria è su tutte le scelte dei punti 4, \dots $n_1 + 4$, l'unione di tali sottoinsiemi è esattamente $\delta_{13|24}$. A questo punto è sufficiente suddividere il secondo integrale in relazione a tali sottoinsiemi, e considerare il pull-back tramite le varie mappe q . \square

Grazie al lemma precedente abbiamo ridotto la dimostrazione della Poisson-commutatività della gerarchia $H_{*,*}$ alla simmetria negli indici γ e δ del seguente integrale

$$\int_{\delta_{13|24}} c_{0,n+4}(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta, \dots) \psi_1^p \psi_2^q.$$

Infatti, mostrata tale simmetria, tutti i coefficienti della serie di potenze

$$\frac{\partial^2 h_{\alpha,p}}{\partial u^\gamma \partial u^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\beta,q}}{\partial u^\nu \partial u^\delta}$$

sarebbero simmetrici, e di conseguenza la serie stessa.

Un modo per riordinare gli indici dentro la CohFT è riordinare i punti marcati ad essi associati. Precisamente, se si scambia il terzo e il quarto punto marcato, si ha

$$c_{0,n+4}(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta, \dots) = c_{0,n+4}(e_\alpha, e_\beta, e_\delta, e_\gamma, \dots).$$

Il prezzo di questo scambio è, però, un corrispondente scambio dei punti marcati nel dominio di integrazione, che trasforma l'insieme $\delta_{13|24}$ nell'insieme $\delta_{14|23}$. Nel caso $n = 0$, come abbiamo visto nel secondo capitolo, tale trasformazione è irrilevante, infatti $\delta_{ij|kh}$ è sempre un punto e $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ è una sfera, pertanto i due divisori sono omologhi, e gli integrali equivalenti. Fortunatamente vale il seguente

Lemma 8. *Gli insiemi $\delta_{13|24}$ e $\delta_{14|23}$ rappresentano la stessa classe di omologia in $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Si consideri la mappa di dimenticanza

$$p : \overline{\mathcal{M}}_{0,n+4} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,4}$$

che dimentica gli ultimi n punti marcati e contrae le eventuali componenti irriducibili. Notiamo che $\delta_{14|23}^{(n+4)}, \delta_{13|24}^{(n+4)} \in \overline{\mathcal{M}}_{0,n+4}$ sono antimmagine tramite p di, rispettivamente $\delta_{14|23}^{(4)} \in \overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ e $\delta_{13|24}^{(4)} \in \overline{\mathcal{M}}_{0,4}$. Per mostrare la loro equivalenza omologica, mostreremo l'equivalenza coomologica delle rispettive classi duali.

Come già osservato in precedenza, $\delta_{14|23}^{(4)}$ e $\delta_{13|24}^{(4)}$ rappresentano la stessa classe di omologia in $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$, e di conseguenza la stessa classe di coomologia tramite dualità di Poincarè. Si ha

$$PD(\delta_{14|23}^{(4)}) = PD(\delta_{13|24}^{(4)}) \implies p^* PD(\delta_{14|23}^{(4)}) = p^* PD(\delta_{13|24}^{(4)}).$$

La dimostrazione pertanto si riduce a mostrare che

$$p^* PD(\delta_{14|23}^{(4)}) = PD(p^{-1}(\delta_{14|23}^{(4)})), \quad p^* PD(\delta_{13|24}^{(4)}) = PD(p^{-1}(\delta_{13|24}^{(4)}));$$

ma ciò è vero per ogni divisore, qualora la mappa p sia una mappa fra varietà con fibre compatte e orientate: dato un divisore $a \in \overline{\mathcal{M}}_{0,4}$, si consideri un generico divisore $c \in \overline{\mathcal{M}}_{0,n+4}$, si ha

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+4}} p^* PD(a) c = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+4}} PD(a) p_* c = \int_a p_* c$$

dove la prima eguaglianza è dedotta dalla formula di proiezione, e dove p_* rappresenta l'integrazione lungo le fibre. Precisamente, in opportune coordinate locali $x_1, \dots, x_4, f_1, \dots, f_n$, dove x_i rappresentano le coordinate sulla base e f_i le coordinate sulla fibra, si ha

$$p_* c = \int_{p^{-1}(\mathbf{x})} c \, d\mathbf{f} \, d\mathbf{x} := \left(\int_{p^{-1}(x)} c(x_1, \dots, x_4, f_1, \dots, f_n) \wedge_{i=1}^n df_i \right) \wedge_{i=1}^4 dx_i.$$

Inserendo l'ultima formula nella precedente, si ottiene

$$\int_a p_* c = \int_a \int_{p^{-1}(x)} c \, d\mathbf{f} \, d\mathbf{x} = \int_{p^{-1}(a)} c$$

da cui si conclude che $PD(p^{-1}(a)) = p^* PD(a)$. \square

Grazie al lemma precedente otteniamo la relazione di simmetria desiderata, ovvero

$$\int_{\delta_{13|24}} c_{0,n+4}(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta, \dots) \psi_1^p \psi_2^q = \int_{\delta_{13|24}} c_{0,n+4}(e_\alpha, e_\beta, e_\delta, e_\gamma, \dots) \psi_1^q \psi_2^p.$$

che dimostra la Poisson-commutatività delle hamiltoniane $H_{*,*}$, ovvero dimostra che esse formano una gerarchia hamiltoniana.

Tau-simmetria.

Per dimostrare che la gerarchia hamiltoniana formata dai funzionali $H_{*,*}$ è tau-simmetrica ci serviremo essenzialmente della proposizione 2. Per prima cosa, controlliamo che l'hamiltoniana $H_{1,0}$ generi le traslazioni spaziali, ovvero che la derivata

$$\partial_{t_0^1} u^\alpha = \eta^{\alpha\nu} \partial_x \frac{\delta h_{1,0}}{\delta u^\nu} = \eta^{\alpha\nu} \frac{\partial^2 h_{1,0}}{\partial u^\nu \partial u^\mu} u_1^\mu.$$

sia eguale a u_1^α .

Come mostrato nella sezione precedente, da un calcolo diretto si ottiene

$$\frac{\partial^2 h_{1,0}}{\partial u^\nu \partial u^\mu} = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq \alpha_i \leq N}} \frac{1}{n!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}} c_{0,n+3}(e_1, e_\gamma, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}, e_\mu) \prod_{i=1}^n u^{\alpha_i}.$$

Notiamo che per $n \geq 1$, dal secondo assioma della definizione di CohFT, si ha

$$c_{0,n+3}(e_1, e_\gamma, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}, e_\mu) = p^* c_{0,n+2}(e_\gamma, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}, e_\mu)$$

dove p è la mappa che dimentica il primo punto marcato. Dato che la forma che stiamo integrando è pull-back di una forma da uno spazio di dimensione inferiore, tale integrale è nullo. Si ha pertanto

$$\frac{\partial^2 h_{1,0}}{\partial u^\nu \partial u^\mu} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}} c_{0,3}(e_1, e_\nu, e_\mu) = \eta_{\nu\mu}$$

dove l'ultima eguaglianza è dedotta dalla definizione di CohFT. Se ne conclude che

$$\partial_{t_0^1} u^\alpha = \eta^{\alpha\nu} \frac{\partial^2 h_{1,0}}{\partial u^\nu \partial u^\mu} u_1^\mu = \eta^{\alpha\nu} \eta_{\nu\mu} u_1^\mu = u_1^\alpha$$

come desiderato.

Per utilizzare la proposizione 2, dobbiamo controllare che

$$\frac{\partial H_{\beta,q}}{\partial u^1} = \int \frac{\partial h_{\beta,q}}{\partial u^1} dx = \begin{cases} H_{\beta,q-1}, & \text{se } q \geq 1 \\ \int \theta_{\beta\mu} u^\mu dx, & \text{se } q = 0 \end{cases}$$

con $\theta_{\beta\mu}$ matrice complessa non degenera. Calcoliamo quindi $\frac{\partial h_{\beta,q}}{\partial u^1}$, in maniera analoga a quanto fatto in precedenza:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{\beta,q}}{\partial u^1} &= \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{\substack{i \leq n, i \neq j \\ 1 \leq \alpha_i \leq N}} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}} \psi_1^q c_{0,n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \Big|_{\alpha_j=1} \prod_{\substack{i \leq n \\ i \neq j}} u^{\alpha_i} \\ &= \sum_{n \geq 2} \frac{n}{n!} \sum_{\substack{i < n \\ 1 \leq \alpha_i \leq N}} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}} \psi_1^q c_{0,n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^{n-1} e_{\alpha_i}, e_1) \prod_{i < n} u^{\alpha_i} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{i \leq n \\ 1 \leq \alpha_i \leq N}} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+2}} \psi_1^q c_{0,n+2}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}, e_1) \prod_{i=1}^n u^{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Consideriamo dapprima il caso $p > 0$. Nell'ultimo integrale notiamo che, per $n \geq 1$, detta $p : \overline{\mathcal{M}}_{0,n+2} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ la mappa che dimentica l'ultimo punto, si ha

$$p^* c_{0,n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) = c_{0,n+2}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}, e_1).$$

Applicando poi la formula di proiezione si ottiene quindi

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+2}} \psi_1^q c_{0,n+2}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}, e_1) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}} p_* \psi_1^q c_{0,n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})$$

dove p_* è l'integrazione sulle fibre. Per $n = 0$ invece l'integrale è sempre nullo per una questione di dimensioni, ovvero per la presenza della classe ψ_1 . Dato che $p_*\psi_1 = \psi_1$, per la proposizione 16, si ottiene, per $q > 0$

$$\frac{\partial h_{\beta,q}}{\partial u^1} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{i \leq n \\ 1 \leq \alpha_i \leq N}} \int_{\mathcal{M}_{0,n}} \psi_1^{q-1} c_{0,n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \prod_{i=1}^n u^{\alpha_i} = h_{\beta,q-1}$$

ed integrando

$$\frac{\partial H_{\beta,q}}{\partial u^1} = H_{\beta,q-1}.$$

Consideriamo ora il caso $q = 0$. Per $n > 1$ gli integrali

$$\int_{\mathcal{M}_{0,n+2}} c_{0,n+2}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}, e_1) = \int_{\mathcal{M}_{0,n+2}} p^* c_{0,n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})$$

sono tutti nulli perché la classe integranda è pull-back da uno spazio di dimensione inferiore. Per $n = 1$, invece, si ha

$$\int_{\mathcal{M}_{0,3}} c_{0,3}(e_\beta, e_{\alpha_1}, e_1) = \eta_{\beta\alpha_1}$$

Se ne conclude che

$$\frac{\partial H_{\beta,q}}{\partial u^1} = \int \sum_{\nu=1}^N \eta_{\beta\nu} u^\nu dx = \sum_{\nu=1}^N \eta_{\beta\nu} \int u^\nu dx.$$

dove $\eta_{\beta\nu}$ è una matrice non degenere.

Siamo quindi nella condizione di applicare la proposizione 2. Se ne conclude che i polinomi differenziali

$$h'_{\beta,q-1} = \frac{\delta h_{\beta,q}}{\delta u^1}$$

formano una tau-structure per la gerarchia hamiltoniana in studio. Dal momento che $h_{*,*}$ non dipende dalle derivate di u , si ha $\frac{\delta h_{\beta,q}}{\delta u^1} = \frac{\partial h_{\beta,q}}{\partial u^1}$, e quindi la tau-structure assume la forma

$$h'_{\beta,q-1} = \begin{cases} h_{\beta,q-1}, & \text{se } q \geq 1 \\ \eta_{\beta\mu} u^\mu dx, & \text{se } q = 0. \end{cases}$$

5.2 Genere arbitrario.

La gerarchia hamiltoniana descritta nella sezione precedente non dipende dalle componenti di genere maggiore di 0 della CohFT a cui è associata. In questo senso, va intesa come una gerarchia hamiltoniana associata solamente alla parte topologica della CohFT. Il problema di generalizzare tale costruzione al genere arbitrario, è tutt'altro che banale, e lo prenderemo in analisi in questa sezione.

Nella prima parte introduciamo un oggetto geometrico di cui faremo largo uso, ovvero il *double ramification cycle* - ciclo di doppia ramificazione, in italiano, o più semplicemente ciclo-DR. Successivamente, diamo alcune proprietà di tale ciclo che saranno necessarie, nel seguito, alla costruzione della *double ramification hierarchy*, gerarchia di doppia ramificazione, che sarà la costruzione al centro dell'ultima sezione, di cui dimostreremo Poisson-commutatività e tau-simmetria.

5.2.1 Preliminari geometrici.

In questa sezione introduciamo gli oggetti geometrici che useremo per introdurre la gerarchia di doppia ramificazione. Tali oggetti sono per lo più di natura molto astratta, e di conseguenza ci accontenteremo, coerentemente con gli scopi di questa tesi, di introdurli in maniera discorsiva, evidenziandone le proprietà che ci saranno utili in seguito. Per una trattazione più precisa ed approfondita è possibile consultare [15] e [3], da cui è tratta la maggior parte del materiale qui esposto.

Spazio delle mappe stabili relative

Si consideri un vettore A a coefficienti in \mathbb{Z} di dimensione arbitraria $n \in \mathbb{N}$:

$$A = (a_1, \dots, a_n), \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad \forall i \leq n,$$

e si assuma che tale vettore soddisfi alla seguente condizione di bilanciamento

$$\sum_{i=0}^n a_i = 0.$$

Chiameremo vettori di questo tipo **vettori di dati di doppia ramificazione**, o, più semplicemente, vettori di doppia ramificazione.

Assumiamo inoltre che sia permesso il vettore vuoto, ovvero il vettore con $n = 0$ componenti.

Indichiamo con

$$\mathcal{M}_g(\mathbb{CP}^1, A)^\sim.$$

Lo spazio dei moduli delle mappe verso \mathbb{CP}^1 , di genere g e profilo di ramificazione A , ovvero l'insieme dei morfismi

$$f : C \longrightarrow \mathbb{CP}^1$$

dove C è una curva di genere g con n punti marcati, ed $A = (a_1, \dots, a_n)$ è il profilo di ramificazione di f , ovvero

- per ogni $a_i > 0$ la mappa f ha uno zero di ordine a_i all' i -esimo punto marcato,
- per ogni $a_i < 0$ la mappa f ha un polo di ordine $-a_i$ all' i -esimo punto marcato,
- la mappa f non ha ulteriori zeri o poli, e tutti gli i tali che $a_i = 0$ indicano semplici punti marcati della curva C .

Tale spazio va considerato a meno di riscalamento per numeri complessi non nulli della mappa f nello spazio di arrivo, e questo è il significato del \sim ad apice. Inoltre, le mappe sono da considerarsi a meno di isomorfismi sullo spazio di base che lascino invariata la mappa.

Lo spazio delle mappe verso \mathbb{CP}^1 ammette una compattificazione naturale, analoga alla compattificazione di Deligne-Mumford usata per definire $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. A seguito di tale compattificazione si ottiene lo spazio

$$\overline{\mathcal{M}}_g(\mathbb{CP}^1, A) \sim$$

detto spazio delle mappe stabili relative verso \mathbb{CP}^1 di genere g e con profilo di ramificazione A . I punti di tale spazio rappresentano morfismi del tipo

$$f : C \longrightarrow S$$

dove C è una curva algebrica complessa, compatta, di genere g , e con n punti marcati, mentre S è una catena di sfere \mathbb{CP}^1 , ovvero una curva di genere 0 ottenuta incollando copie di \mathbb{CP}^1 esclusivamente nei punti 0 e $+\infty$. All'interno della catena S , vengono detti 0 e ∞ lo 0 della prima copia di \mathbb{CP}^1 e l' ∞ dell'ultima. Siano x_1, \dots, x_n i punti marcati di C , le mappe f devono soddisfare

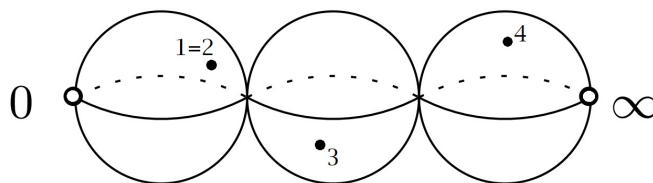
- $f^{-1}(0) = \sum_{a_i > 0} a_i x_i$,
- $f^{-1}(\infty) = \sum_{a_i < 0} a_i x_i$,
- l'antiimmagine di un nodo di S è unione di nodi di C ,
- l'antimmagine di ogni componente irriducibile di S contiene almeno una componente stabile di C , ovvero una curva che soddisfi $2\bar{g} - 2\bar{n} < 0$, dove \bar{g} è il genere di tale componente stabile ed \bar{n} il suo numero di punti speciali (nodi e punti marcati)
- se si considera la mappa indotta fra normalizzazioni di C ed S , il profilo di ramificazione in punti corrispondenti allo stesso nodo coincide.

Tali mappe vanno considerate a meno della relazione di equivalenza data dal riscalamento per numeri complessi non nulli sul codominio e da isomorfismi sul dominio che lascino invariata la mappa.

Spazio dei moduli di Losev-Manin.

Si consideri lo spazio dei moduli LM_n i cui punti rappresentano catene di sfere \mathbb{CP}^1 con $n + 2$ punti marcati. Di tali punti marcati, due saranno detti "bianchi", saranno indicati con 0 e ∞ e saranno posti, rispettivamente, sulla prima e sull'ultima sfera della catena. Tali punti non possono coincidere né con i nodi né fra di loro, mentre gli altri n punti, che sono detti "neri", non possono coincidere con i nodi, ma possono coincidere fra di loro. Le catene vanno considerate a meno di automorfismi che preservano l'ordine dei punti marcati. Tale spazio dei moduli è detto **spazio dei moduli di Losev-Manin**, e rappresenta una compattificazione, alternativa a quella di Deligne-Mumford, di $\mathcal{M}_{0,n+2}$.

Figura 5.1: Un generico elemento di LM_4 .



Sia $A = (a_1, \dots, a_n)$ un vettore di dati di doppia ramificazione, e sia n_0 il numero di coefficienti nulli $a_i = 0$. Data una mappa stabile relativa $f : C \rightarrow S$ di genere g con profilo di ramificazione A , essa definisce un ricoprimento ramificato di S . Sia r il numero di punti di ramificazione contenuti in C .

Se si considera l'azione di S_r su LM_{n_0+r} data dalla permutazione degli ultimi r punti marcati neri, esiste una mappa naturale

$$st : \overline{\mathcal{M}}_g(\mathbb{CP}^1, A)^\sim \rightarrow LM_{n_0+r}/S_r$$

che associa, ad ogni mappa $[f : C \rightarrow S] \in \overline{\mathcal{M}}_g(\mathbb{CP}^1, A)^\sim$, la catena S , i cui punti marcati bianchi sono 0 e $+\infty$, i cui primi n_0 punti marcati neri sono l'immagine tramite f dei punti marcati $x_i \in C$ tali che $a_i = 0$ ed i cui ultimi r punti marcati neri sono i punti di ramificazione del ricoprimento f .

Notiamo che è necessario considerare l'azione di permutazione di S_r , dal momento che i punti di ramificazione non sono numerati.

Double ramification cycle.

Lo spazio $\overline{\mathcal{M}}_g(\mathbb{CP}^1, A)^\sim$ è dotato di una naturale mappa di proiezione

$$\epsilon : \overline{\mathcal{M}}_g(\mathbb{CP}^1, A)^\sim \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

che associa ad $f : C \rightarrow S$ la stabilizzazione della curva C . Possiamo allora definire il ciclo di doppia ramificazione tramite la sua classe di coomologia duale come nella seguente

Definizione 37 (Ciclo di doppia ramificazione.). Dato un vettore di dati di ramificazione $A = (a_1, \dots, a_n)$, indichiamo con

$$DR_g(A) = DR_g(a_1, \dots, a_n) \in H^{2g}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$$

il push-forward tramite la mappa ϵ della classe virtuale $[\overline{\mathcal{M}}_g(\mathbb{CP}^1, A)]^{\sim virt}$ di $\overline{\mathcal{M}}_g(\mathbb{CP}^1, A)^{\sim}$. Tale classe di coomologia prende il nome di **classe di doppia ramificazione**, o, più semplicemente, classe-DR.

La classe di omologia duale a $DR_g(a_1, \dots, a_n)$ prende il nome di *double ramification cycle*- ciclo di doppia ramificazione, o, più semplicemente, ciclo-DR. Nel seguito, omettendo la dualità di Poicarè, indicheremo con lo stesso simbolo il ciclo di doppia ramificazione e la sua classe duale.

Non avendo dato, all'interno di questa tesi, una descrizione di cosa sia la classe virtuale, la precedente definizione risulta decisamente troppo poco chiara. Definire esplicitamente la classe virtuale, però, richiede l'utilizzo di strumenti di geometria algebrica che esulano dagli scopi di questa tesi. Pertanto, descriveremo il ciclo di doppia ramificazione enunciando alcune delle sue proprietà. Prima fra tutte, la seguente

Proposizione 20. *la restrizione di $DR_g(A)$ a $\mathcal{M}_{g,n}$ è l'insieme di quelle curve C tali che*

$$\mathcal{O}_C \cong \mathcal{O}_C\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)$$

dove x_1, \dots, x_n sono i punti marcati di C , ovvero quelle curve che ammettono una funzione olomorfa f tale che

$$\text{div}(f) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Inoltre, detta $\text{Adm}_g(A)$ la chiusura topologica in $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ di $DR_g(A)|_{\mathcal{M}_{g,n}}$, vale

$$DR_g(A) \subset \text{Adm}_g(A).$$

Se si considera la proposizione precedente come una definizione del ciclo-DR su $\mathcal{M}_{g,n}$, il ciclo $\text{Adm}_g(A)$ è la sua più ovvia compattificazione quando lo si vuole estendere a $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Il ciclo di doppia ramificazione va infatti considerato come la "corretta" compattificazione di $DR_g(A)|_{\mathcal{M}_{g,n}}$ in quanto, rispetto ad $\text{Adm}(A)$, gode in generale di migliori proprietà

In verità, per la gerarchia hamiltoniana che definiremo nel seguito, e per le relative proprietà che dimostreremo, anche $\text{Adm}(A)$ sarebbe sufficiente,

in quanto proprietà e dimostrazioni sono le stesse. Per rimanere fedeli alla letteratura in merito, però, abbiamo deciso di utilizzare comunque $DR(A)$, anche senza poterne dare una descrizione globale. Questa scelta è giustificata anche dalla seguente formula, che è solitamente detta **formula di Hain**.

Proposizione 21. *Sia $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{ct} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ l'insieme dei rappresentanti delle curve stabili di tipo compatto, ovvero quelle curve i cui nodi sono tutti di tipo separante. Dato un vettore di dati di ramificazione $A = (a_1, \dots, a_n)$, si ha*

$$DR_g(A)|_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{ct}} = \frac{1}{g!} \left(\sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} \sum_{h=0}^g \frac{1}{4} a_I \delta_h^I \right)^g$$

dove $a_I := \sum_{i=1}^n a_i$, mentre δ_h^I è $-\psi_i$ se $h = 0$ e $I = i$, e, nei casi restanti, è il duale del ciclo rappresentante le curve aventi una componente di genere h contenente esattamente i punti marcati $i \in I$, separata dal resto della curva da un nodo.

Dal momento che nel seguito $DR_g(A)$ comparirà sempre moltiplicata per la classe λ_g , e dal momento che quest'ultima è nulla al di fuori di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{ct}$, la formula di Hain descrive completamente, in relazione agli scopi di questa tesi, la classe $DR_g(A)$.

Notiamo che dalla formula precedente si deduce che $\lambda_g DR_g(a_1, \dots, a_n)$ è un polinomio simmetrico nelle entrate a_1, \dots, a_n di grado $2g$. Notiamo inoltre che da essa si deduce anche che $DR_0(A) = 1$, $\forall A = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo la sezione dando la seguente

Proposizione 22. *Si consideri lo spazio vettoriale infinito-dimensionale V su \mathbb{C} , dotato della base canonica $\{e_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, della metrica $\eta(e_j, e_k) = \delta_{j+k,0}$ e dell'unità e_0 . Allora*

$$c_{g,n}(e_{a_1}, \dots, e_{a_n}) := DR_g(a_1, \dots, a_n) \in H^{2g}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$$

è una CohFT parziale, ovvero valgono le seguenti proprietà

- i) $DR_g(a_1, \dots, a_n)$ è equivariante rispetto all'azione di S_n che permuta, su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, l'ordine dei punti marcati, e nell'argomento di DR_g l'ordine delle entrate.
- ii) Detta $p : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, per opportuni g ed n , la mappa che dimentica l'ultimo punto marcato, si ha

$$p^* DR_g(a_1, \dots, a_n) = DR_g(a_1, \dots, a_n, 0).$$

Inoltre:

$$DR(0, j, k) = \delta_{j+k,0}.$$

iii) Detta $q : \overline{\mathcal{M}}_{g_1, n_1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2, n_2} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g, n}$, per opportuni $g = g_1 + g_2$ e $n = n_1 + n_2 - 2$, la mappa di incollamento di tipo separante si ha

$$q^* DR_g(a_1, \dots, a_n) = DR_{g_1}(a_1, \dots, a_{n_1}, \mu) \delta_{\mu+\nu} DR_{g_2}(a_{n_1+1}, \dots, a_n, \nu).$$

Si noti che la proposizione precedente descrive la classe di doppia ramificazione come una CohFT parziale nel senso che essa rispetta tutti gli assiomi della definizione di CohFT ad eccezione del *loop axiom*, ovvero quello relativo alla mappa di incollamento di tipo non separante.

Equivalenza fra divisori.

Introduciamo ora un'equivalenza fra divisori che, nella dimostrazione della Poisson-commutatività della gerarchia-DR, servirà a generalizzare l'utilizzo che abbiamo fatto nel capitolo precedente dell'equivalenza fra i divisori $\delta_{14|23}$ e $\delta_{13|24}$ per dimostrare la Poisson-commutatività della gerarchia associata alla parte topologica di una CohFT.

Introduciamo innanzitutto il divisore

$$D_{01|2\infty} \subset LM_{n_0+r}$$

che rappresenta le catene di sfere formate da due componenti tali che il nodo separi i punti marcati 0 e 1 dai punti marcati 2 e ∞ . Consideriamo inoltre la sua simmetrizzazione in LM_{n_0+r}/S_r , e la indichiamo con $D_{01|2\infty}^{sym}$. Definiamo analogamente il divisore $D_{02|1\infty}^{sym}$. Si ha

Proposizione 23 ([15]). *I divisori $D_{01|2\infty}^{sym}$ e $D_{02|1\infty}^{sym}$ sono equivalenti in LM_{r+n_0} .*

Tale relazione è analoga alla relazione fra $\delta_{14|23}$ e $\delta_{13|24}$ del capitolo precedente, ma non è nello spazio corretto. Pertanto, vorremmo trasportarla su $\overline{\mathcal{M}}_{g, n}$.

Si noti che disponiamo delle seguenti mappe

$$LM_{n_0+r}/S_r \xleftarrow[st]{} \overline{\mathcal{M}}_g(\mathbb{CP}^1, A)^\sim \xrightarrow{\epsilon} \overline{\mathcal{M}}_{g, n}$$

definiamo allora

$$D_{1,2}^{g,A} := st_* q^* D_{01|2\infty}^{sym}, \quad D_{2,1}^{g,A} := st_* q^* D_{02|1\infty}^{sym}.$$

Diretta conseguenza della proposizione 23 è il seguente

Corollario 1. *I divisori $D_{1,2}^{g,A}$ e $D_{2,1}^{g,A}$ sono equivalenti in $\overline{\mathcal{M}}_{g, n}$.*

Per dare una formula esplicita per $D_{1,2}^{g,A}$ e $D_{2,1}^{g,A}$, dobbiamo prima introdurre la seguente notazione, che utilizzeremo anche nelle sezioni successive.

Notazione 2. Introduciamo la seguente notazione:

- Sia $A = (a_1, \dots, a_n)$ un vettore di dati di ramificazione e sia $K = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^d$. Con il simbolo $\sum_{I, J, g_1, g_2}^{g, n, K}$ intendiamo la sommatoria su tutte le scelte di una partizione $I \sqcup J = \{1, \dots, n\}$ e tutte le scelte di g_1 e g_2 tali che $|I| = n_1 > 0$, $|J| = n_2 > 0$, $n_1 + n_2 = n$, $g_1 + g_2 = g$, e

$$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^d k_i = 0.$$

- Sia $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{1, \dots, N\}$. Per ogni sottoinsieme di indici $I \subset \{1, \dots, n\}$, definiamo

$$A_I := (a_{i_1}, \dots, a_{i_{n_1}}), \quad e_I := \otimes_{i \in I} e_{\alpha_i},$$

dove $I = \{i_1, \dots, i_{n_1}\}$.

- Sia $K = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^d$, con $-K$ intendiamo $(-k_1, \dots, -k_d)$.

Definiamo il seguente divisore in $\overline{\mathcal{M}}_{g, n}$:

$$DR_{g_1}(0_\alpha, A, k_1, \dots, k_d) \boxtimes DR_{g_1}(0_\beta, A', -k_1, \dots, -k_d)$$

dove A e A' sono vettori di dati di doppia ramificazione di lunghezza, rispettivamente, n_1 ed n_2 e $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$.

Con tale notazione intendiamo indicare il ciclo in $\overline{\mathcal{M}}_{g, n}$ rappresentante le curve ottenute incollando negli ultimi d punti marcati le curve di $DR_{g_1}(0, A, k_1, \dots, k_d)$ con le curve di $DR_{g_1}(0, A', -k_1, \dots, -k_d)$. La notazione 0_α e 0_β si riferisce a dove la mappa di incollamento spedisca i primi punti marcati dei due cicli DR . Precisamente, il numero a pedice dello zero indica il punto marcato a cui esso corrisponde in $\overline{\mathcal{M}}_{g, n}$. I restanti punti marcati, quelli corrispondenti agli indici A_I e A_J , sono mandati ordinatamente in $\{1, \dots, n\}$, secondo la partizione $I \sqcup J = \{1, \dots, n\}$.

Affinché il divisore sopra definito sia effettivamente in $\overline{\mathcal{M}}_{g, n}$ occorre imporre le seguenti relazioni

$$n_1 + n_2 - 2 = n, \quad g_1 + g_2 + d - 1 = g.$$

Possiamo finalmente dare la seguente formula

Proposizione 24 ([3]). *Nella notazione precedente, si ha*

$$D_{\alpha, \beta}^{g, A} = \sum_{d=1}^{g+1} \sum_{K \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^d} \sum_{I, J, g_1, g_2}^{g-d+1, n, K} \frac{\prod_{k \in K} k}{d!} DR_{g_1}(0_\alpha, A_I, K) \boxtimes DR_{g_1}(0_\beta, A_J, -K)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$, $g \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{Z}^n$.

La formula precedente è molto complessa, ma a noi servirà in una sua versione fortemente semplificata. Si noti che in $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{ct}$ il divisore

$$DR_{g_1}(0_\alpha, A_I, k_1, \dots, k_d) \boxtimes DR_{g_1}(0_\beta, A_J, -k_1, \dots, k_d)$$

è nullo per $d \geq 1$, infatti la mappa di incollamento è di tipo separante solamente per $d = 1$. In questo caso la sommatoria in K ammette solamente termini di lunghezza 1, ovvero $K = (k)$, i generi g_1 e g_2 devono semplicemente sommare a g , e la partizione I, J della terza sommatoria deve soddisfare la condizione $k = \sum_{i \in I} a_i$. Pertanto, se si moltiplica l'uguaglianza precedente per λ_g , che è nulla al di fuori di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{ct}$, si ottiene il seguente

Corollario 2. *Nella notazione precedente, si ha*

$$\lambda_g D_{\alpha, \beta}^{g, A} = \sum_{k \geq 1} k \sum_{I, J, g_1, g_2}^{g, n, (k)} \lambda_g DR_{g_1}(0_\alpha, A_I, k) \boxtimes DR_{g_1}(0_\beta, A_J, -k)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$, $g \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{Z}^n$.

5.2.2 Double ramification hierarchy.

Nel seguito assumeremo che $c := (c_{g,n})_{2-2g-n > 0}$ sia una cohomological field theory a valori in (V, η, e_1) , e che e_1, \dots, e_N sia una base di V .

La gerarchia di doppia ramificazione si definisce più facilmente nelle variabili p_*^* . Precisamente, consideriamo i polinomi differenziali $g_{\alpha, d} \in \hat{\mathcal{B}}^{pol}$, per $\alpha \in \{1, \dots, N\}$ e $d \in \mathbb{N}$, definiti come

$$g_{\beta, d} := \sum_{\substack{g \geq 0 \\ n \geq 2}} \frac{(-\epsilon^2)^g}{n!} \sum_{\substack{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \\ a_1 + \dots + a_n = 0 \\ 1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \leq N}} \int_{DR_g(0, a_1, \dots, a_n)} \lambda_g \psi_1^d c_{g, n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \prod_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{\alpha_i}.$$

Sia

$$P_{\beta, d, \alpha_1, \dots, \alpha_n}^{g, a, \dots, a_n} = \int_{DR_g(0, a_1, \dots, a_n)} \lambda_g \psi_1^d c_{g, n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}).$$

Il fatto che $g_{\beta, d} \in \hat{\mathcal{B}}^{pol}$ è garantito dalla formula di Hain, in quanto i coefficienti $P_{\beta, d, \alpha_1, \dots, \alpha_n}^{g, a, \dots, a_n}$ sono tutti polinomi di grado $2g$. In termini delle variabili u_*^* le hamiltoniane della gerarchia di doppia ramificazione sono definite da

$$H_{\beta, p} := \hat{Q}(g_{\beta, p}).$$

Prende il nome di **double ramification hierarchy**, o gerarchia di doppia ramificazione, o, più semplicemente gerarchia-DR, il sistema infinito di

PDE associate alle hamiltoniane $H_{*,*}$ in relazione all'operatore hamiltoniano $\eta^{-1}\partial_x$, ovvero:

$$\partial_{t_d} u_\alpha = \{u^\alpha, H_{\beta,d}\}_{\eta^{-1}\partial_x} = \eta^{\alpha\beta} \partial_x \frac{\delta H_{\beta,d}}{\delta u^\alpha}, \quad \forall 1 \leq \alpha, \beta \leq N, \quad d \geq 0.$$

Notiamo che, per quanto riguarda la parte di genere $g = 0$, questa gerarchia coincide con quella costruita nella sezione precedente, infatti, dalla formula di Hain, si ha

$$P_{\beta,d,\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{0,a,\dots,a_n} = \int_{\mathcal{M}_{0,n+1}} \psi_1^d c_{g,n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}),$$

da cui si deduce

$$g_{\beta,d}|_{\epsilon=0} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \\ a_1 + \dots + a_n = 0 \\ 1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \leq N}} \int_{\mathcal{M}_{0,n+1}} \psi_1^d c_{0,n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i}$$

che è esattamente il termine noto della serie di Fourier formale associata al polinomio differenziale

$$h_{\beta,d} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \sum_{1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \leq N} \int_{\mathcal{M}_{0,n+1}} \psi_1^d c_{0,n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \prod_{i=1}^n u^{\alpha_i}.$$

Per quanto discusso, la gerarchia che nella sezione precedente abbiamo associato alla parte di genere zero di una CohFT si presenta come il limite per $\epsilon \rightarrow 0$ della gerarchia-DR, e le due coincidono se la CohFT considerata è nulla per $g > 0$.

Nelle sezioni che seguiranno dimostreremo Poisson-commutatività e tau-simmetria per le hamiltoniane $H_{*,*}$ in relazione all'operatore hamiltoniano $\eta^{-1}\partial_x$. Le due dimostrazioni seguiranno essenzialmente l'idea della dimostrazione nel caso $g = 0$.

Poisson-commutatività.

In questa sezione dimostriamo la Poisson-commutatività della gerarchia-DR. Per semplificare la lettura, abbiamo inserito la parte meno discorsiva della dimostrazione in un lemma.

Dal momento che le hamiltoniane $H_{*,*}$ sono definite come immagini tramite la mappa \hat{Q} dei polinomi differenziali $g_{*,*}$, dalla proposizione 1 la loro commutatività rispetto all'operatore $\eta^{-1}\partial_x$ è equivalente alla commutatività, in $\hat{\mathcal{B}}^{pol}$, dei polinomi differenziali $g_{*,*}$ rispetto alla parentesi $\{\cdot, \cdot\}_{\eta^{-1}}$. Precisamente, la compatibilità della gerarchia si riscrive come

$$\{g_{\alpha,p}, g_{\beta,q}\}_{\eta^{-1}} = \sum_{k \geq 1} ik \frac{\partial g_{\alpha,p}}{\partial p_k^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\beta,q}}{\partial p_{-k}^\nu} - ik \frac{\partial g_{\beta,q}}{\partial p_k^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\alpha,p}}{\partial p_{-k}^\nu} = 0.$$

Si noti che la precedente equazione esprime la simmetria negli indici (α, p) e (β, q) dell'espressione

$$\sum_{k \geq 1} k \frac{\partial g_{\alpha, p}}{\partial p_k^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\beta, q}}{\partial p_{-k}^\nu}.$$

L'espressione precedente è una serie di potenze nelle variabili $p_{\neq 0}^*$ e $-\epsilon^2$, ovvero una somma (infinita) di monomi del tipo $\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i} (-\epsilon)^{2g}$. Per semplicità, la descriveremo esplicitando i suoi coefficienti, che indichiamo con

$$\text{Coef}_{\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i} (-\epsilon)^{2g}} \left(\sum_{k \geq 1} k \frac{\partial g_{\alpha, p}}{\partial p_k^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\beta, q}}{\partial p_{-k}^\nu} \right)$$

dove il monomio a pedice è da intendersi a meno di riordinamento dei fattori.

Si ha

Lemma 9. *Nella notazione precedente, per ogni vettore di dati di ramificazione $A = (a_1, \dots, a_n)$, ogni $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{1, \dots, N\}$ ed ogni $g \geq 0$ si ha che il coefficiente*

$$\text{Coef}_{\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i} (-\epsilon)^{2g}} \left(\sum_{k \geq 1} k \frac{\partial g_{\alpha, p}}{\partial p_k^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\beta, q}}{\partial p_{-k}^\nu} \right)$$

è equivalente alla seguente espressione

$$\sum_{k \geq 1} k \sum_{I, J}^{g, n, (k)} \int_{DR_{g_1}(0_1, A_I, k) \boxtimes DR_{g_2}(0_2, A_J, -k)} \lambda_g \psi_1^p \psi_2^q c_{g, n+2}(e_\alpha, e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}).$$

dove abbiamo utilizzato la notazione 2 introdotta nella sezione precedente.

Dimostrazione. innanzitutto esplicitiamo $\frac{\partial g_{\alpha, p}}{\partial p_k^\mu}$. Con un calcolo diretto dalla definizione, riordinando opportunamente i punti marcati negli integrali ed applicando il cambio di indice $n-1 \mapsto n$, si ottiene

$$\sum_{\substack{g \geq 0 \\ n \geq 1}} \frac{(-\epsilon^2)^g}{n!} \sum_{\substack{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \\ a_1 + \dots + a_n = 0 \\ 1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \leq N}} \int_{DR_g(0, a_1, \dots, a_n, k)} \lambda_g \psi_1^d c_{g, n+2}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}, e_\mu) \prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i}.$$

A questo punto è possibile esplicitare $\frac{\partial g_{\alpha, p}}{\partial p_k^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\beta, q}}{\partial p_{-k}^\nu}$, e si ottiene una serie formale nelle variabili $p_{\neq 0}^*$ ed ϵ . In particolare, il coefficiente corrispondente al monomio $\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i} (-\epsilon^2)^g$, considerato indipendentemente dall'ordine dei fattori, è

$$\sum_{I, J}^{g, n, k} \int_{DR_{g_1}(0, A_I, k)} \lambda_{g_1} \psi_1^p c_{g, n+2}(e_\alpha, e_I, e_\mu) \eta^{\mu\nu} \int_{DR_{g_2}(0, A_J, k)} \lambda_{g_2} \psi_1^q c_{g, n+2}(e_\beta, e_J, e_\nu)$$

dove ricordiamo che con il simbolo $\sum_{I,J,g_1,g_2}^{g,n,(k)}$ intendiamo la sommatoria su tutte le scelte di una partizione $I \sqcup J = \{1, \dots, n\}$ e tutte le scelte di g_1 e g_2 tali che $|I| = n_1 > 0$, $|J| = n_2 > 0$, $n_1 + n_2 = n$, $g_1 + g_2 = g$, e $\sum_{i \in I} a_i = -\sum_{j \in J} a_j = k$.

L'assenza dei fattori $\frac{1}{n_1!}$ e $\frac{1}{n_2!}$ è dovuta al fatto che le n_1 coppie di indici $\{(a_i, \alpha_i)\}_{i \in I}$ e le n_2 coppie di indici $\{(a_j, \alpha_j)\}_{j \in J}$ sono già state riordinate tutte nella stessa maniera (riordinando i rispettivi punti marcati), in modo da ottenere, rispettivamente, la somma di $n_1!$ integrali uguali nel primo fattore e la somma di $n_2!$ integrali uguali nel secondo.

Il precedente prodotto di integrali può essere riscritto come un unico integrale sull'insieme prodotto

$$DR_{g_1}(0, A_I, k) \times DR_{g_2}(0, A_J, -k) \subset \overline{\mathcal{M}}_{g_1, n_1+2} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2, n_2+2}.$$

Facendo ciò, le classi integrande vengono trasformate applicando gli opportuni pull-back tramite le mappe naturali di proiezione π_1 e π_2 sul primo e sul secondo fattore del prodotto. Si ottiene la seguente classe integranda

$$\pi_1^*(\psi_1^p \lambda_{g_1}) \pi_2^*(\psi_1^q \lambda_{g_2}) \pi_1^* c_{g_1, n_1+2}(e_\alpha, e_I, e_\mu) \eta^{\mu\nu} \pi_2^* c_{g_2, n_2+2}(e_\beta, e_J, e_\nu).$$

Consideriamo ora la mappa di incollamento di tipo separante

$$q : \overline{\mathcal{M}}_{g_1, n_1+2} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2, n_2+2} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g, n+2}.$$

che manda il primo punto di $\overline{\mathcal{M}}_{g_1, n_1+2}$ nel primo punto di $\overline{\mathcal{M}}_{g, n+2}$, il primo punto di $\overline{\mathcal{M}}_{g_2, n_2+2}$ nel secondo punto di $\overline{\mathcal{M}}_{g, n+2}$, i restanti punti degli insiemi I e J ordinatamente in $\{1, \dots, n\}$, e che incolla le curve tramite l'ultimo punto marcato dei rispettivi spazi. Si hanno le seguenti relazioni

- $\pi_1^* c_{g_1, n_1+2}(e_\alpha, e_I, e_\mu) \eta^{\mu\nu} \pi_2^* c_{g_2, n_2+2}(e_\beta, e_J, e_\nu) = c_{g, n+2}(e_\alpha, e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})$, dedotta dalla definizione di CohFT, e dal fatto che i punti marcati I e J sono mandati ordinatamente in $\{1, \dots, n\}$,
- $q_* \pi_1^* \psi_1^p = \psi_1^p$ e $q_* \pi_2^* \psi_1^q = \psi_2^q$,
- $q(DR_{g_1}(0, A_I, k) \times DR_{g_2}(0, A_J, -k)) = DR_{g_1}(0, A_I, k) \boxtimes DR_{g_2}(0, A_J, -k)$ per definizione,
- $q_*(p_1^* \lambda_{g_1} p_2^* \lambda_{g_2}) = \lambda_g$ dedotta dalla proposizione 19.

Da tali relazioni si deduce che

$$\begin{aligned} & \sum_{I,J,g_1,g_2}^{g,n,(k)} \int_{DR_{g_1}(0, A_I, k)} \lambda_{g_1} \psi_1^p c_{g, n_1+2}(e_\alpha, e_I, e_\mu) \eta^{\mu\nu} \int_{DR_{g_2}(0, A_J, k)} \lambda_{g_2} \psi_1^q c_{g, n_2+2}(e_\beta, e_J, e_\nu) \\ &= \sum_{I,J,g_1,g_2}^{g,n,(k)} \int_{DR_{g_1}(0_1, A_I, k) \boxtimes DR_{g_2}(0_2, A_J, -k)} \lambda_g \psi_1^p \psi_2^q c_{g, n+2}(e_\alpha, e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}). \end{aligned}$$

□

Avendo a disposizione, dal lemma precedente, un'espressione esplicita per i coefficienti di $\sum_{k \geq 1} k \frac{\partial g_{\alpha,p}}{\partial p_k^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\beta,q}}{\partial p_{-k}^\nu}$, possiamo mostrarne la simmetria negli indici (α, p) e (β, q) direttamente da essi.

Nell'espressione del lemma precedente, portando la classe λ_g , tramite dualità di Poincarè, nel dominio di integrazione, si ottiene

$$\sum_{k \geq 1} k \sum_{I,J}^{g,n,(k)} \int_{\lambda_g DR_{g_1}(0_1, A_I, k) \boxtimes DR_{g_2}(0_2, A_J, -k)} \psi_1^p \psi_2^q c_{g,n+2}(e_\alpha, e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}).$$

A questo punto, dato che la classe integranda è la stessa per tutti gli integrali, è possibile sommare i domini di integrazione. Dal corollario 2 si ha

$$\sum_{k \geq 1} k \sum_{I,J,g_1,g_2}^{g,n,(k)} \lambda_g DR_{g_1}(0_1, A_I, k) \boxtimes DR_{g_2}(0_2, A_J, -k) \lambda_g = \lambda_g D_{1,2}^{g,A}.$$

Pertanto deduciamo la seguente espressione

$$\text{Coef}_{\prod_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{\alpha_i} (-\epsilon)^{2g}} \left(\sum_{k \geq 1} k \frac{\partial g_{\alpha,p}}{\partial p_k^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\beta,q}}{\partial p_{-k}^\nu} \right) = \int_{D_{1,2}^{g,A}} \lambda_g \psi_1^p \psi_2^q c_{g,n+2}(e_\alpha, e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}).$$

Per mostrare che tale espressione è simmetrica nelle coppie di indici (α, p) e (β, q) , è possibile scambiare i primi due punti marcati nel dominio di integrazione. Facendo ciò, si scambiano l'ordine di α e β nell'argomento della CohFT ed i punti associati alle classi-psi, come desiderato, ma si modifica anche il dominio di integrazione, ottenendo $D_{2,1}^{g,A}$ al posto di $D_{1,2}^{g,A}$. A questo punto è possibile utilizzare il corollario 1, che ci permette di sostituire nuovamente $D_{1,2}^{g,A}$ e $D_{2,1}^{g,A}$, ottenendo la simmetria desiderata. Precisamente

$$\begin{aligned} \text{Coef}_{\prod_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{\alpha_i} (-\epsilon)^{2g}} \left(\sum_{k \geq 1} k \frac{\partial g_{\alpha,p}}{\partial p_k^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\beta,q}}{\partial p_{-k}^\nu} \right) &= \int_{D_{1,2}^{g,A}} \lambda_g \psi_1^p \psi_2^q c_{g,n+2}(e_\alpha, e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) = \\ &= \int_{D_{1,2}^{g,A}} \lambda_g \psi_2^p \psi_1^q c_{g,n+2}(e_\beta, e_\alpha, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) = \text{Coef}_{\prod_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{\alpha_i} (-\epsilon)^{2g}} \left(\sum_{k \geq 1} k \frac{\partial g_{\beta,q}}{\partial p_k^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\alpha,p}}{\partial p_{-k}^\nu} \right), \end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$\{g_{\alpha,p}, g_{\beta,q}\}_{\eta^{-1}} = i \sum_{k \geq 1} k \frac{\partial g_{\alpha,p}}{\partial p_k^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\beta,q}}{\partial p_{-k}^\nu} - k \frac{\partial g_{\beta,q}}{\partial p_k^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\alpha,p}}{\partial p_{-k}^\nu} = 0$$

per ogni $\alpha, \beta \in \{1, \dots, N\}$, $p, q \geq 0$.

Tau-simmetria.

In questa sezione dimostriamo la tau-simmetria della gerarchia-DR. La dimostrazione si riduce essenzialmente all'applicazione della proposizione 2.

Controlliamo innanzitutto che l' hamiltoniana $H_{1,0}$ generi le traslazioni spaziali, ovvero che

$$\{u_0^\alpha, H_{1,0}\}_{\eta^{-1}} = u_1^\alpha.$$

Tale uguaglianza può essere ottenuta con un semplice calcolo diretto dal seguente

Lemma 10. *Si ha $H_{1,0} = \frac{1}{2} \int u_0^\alpha \eta_{\alpha\beta} u_0^\beta dx$*

Dimostrazione. Si consideri, per $2g - 2 + n > 0$, la mappa $p : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ che dimentica il primo punto marcato. Si hanno le seguenti relazione

- $DR_g(0, a_1, \dots, a_n) = p^* DR_g(, a_1, \dots, a_n)$ per la proposizione 22,
- $c_{g,n+1}(e_1, e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_n}) = p^* c_{g,n+1}(e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_n})$ dalla definizione di CohFT,
- $\lambda_g = p^* \lambda_g$ dalla proposizione 19

Pertanto per $\int_{DR_g(0, a_1, \dots, a_n)} \lambda_g c_{g,n+1}(e_1, e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_n}) = 0$, perché integrale del pull-back di una classe da uno spazio di dimensione inferiore.

Rimane il caso $g = 0, n = 2$, dove si ha

$$\int_{DR_0(0, a, -a)} c_{0,3}(e_1, e_\alpha, e_\beta) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}} c_{0,3}(e_1, e_\alpha, e_\beta) = \eta_{\alpha\beta}$$

dove la prima uguaglianza è dedotta dalla formula di Hain, la seconda dalla definizione di CohFT. Inserendo tale relazione nella definizione di $g_{1,0}$ si ottiene

$$g_{1,0} = \frac{1}{2} \sum_{a \geq 1} p_a^\alpha \eta_{\alpha\beta} p_{-a}^\beta = \frac{1}{2} \hat{T}_0 \left(\int u_0^\alpha \eta_{\alpha\beta} u_0^\beta dx \right) = \hat{T}_0(H_{1,0}).$$

□

Per utilizzare la proposizione 2 mostriamo che, analogamente a quando accade nel caso $g = 0$, per $\alpha = 1, \dots, N$ si ha

$$\frac{\partial H_{\alpha,d}}{\partial u_0^1} = \begin{cases} H_{\alpha,d-1}, & \text{se } d > 0, \\ \int \eta_{\alpha,\mu} u_0^\mu dx & \text{se } d = 0. \end{cases}$$

Per calcolare $\frac{\partial H_{\alpha,d}}{\partial u_0^1}$ utilizziamo nuovamente variabili p_* . Si ha il seguente

Lemma 11. Per ogni $\alpha = 1, \dots, N$ si ha

$$\hat{T}_0\left(\frac{\partial H_{\alpha,d}}{\partial u_0^1}\right) = \begin{cases} \hat{T}_0(H_{\alpha,d-1}), & \text{se } d > 0, \\ 0, & \text{se } d = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Dalla proposizione 1 si ha

$$\hat{T}_0\left(\frac{\partial H_{\alpha,d}}{\partial u_0^1}\right) = \frac{\partial \hat{Z}(\hat{T}_0(\partial H_{\alpha,d}))}{p_0^1} \Big|_{p_0^*=0} = \frac{\hat{Z}(g_{\alpha,d})}{\partial p_0^1} \Big|_{p_0^*=0}.$$

dove l'ultima disuguaglianza è diretta conseguenza della definizione della gerarchia-DR. Si ha

$$\hat{Z}(g_{\beta,d}) = \sum_{\substack{g \geq 0 \\ n \geq 2}} \frac{(-\epsilon^2)^g}{n!} \sum_{\substack{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \\ a_1 + \dots + a_n = 0 \\ 1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \leq N}} \int_{DR_g(0, a_1, \dots, a_n)} \lambda_g \psi_1^d c_{g,n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \prod_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{\alpha_i}.$$

Derivando l'espressione precedente in p_0^1 , riordinando i vettori argomento della CohFT e di DR assieme ai rispettivi punti marcati, imponendo il cambio di indice $n - 1 \mapsto n$, ponendo poi $p_0^* = 0$ si ottiene, con un calcolo diretto, la seguente espressione

$$\sum_{\substack{g \geq 0 \\ n \geq 2}} \frac{(-\epsilon^2)^g}{n!} \sum_{\substack{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \neq 0 \\ a_1 + \dots + a_n = 0 \\ 1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \leq N}} \int_{DR_g(0, a_1, \dots, a_n, 0)} \lambda_g \psi_1^d c_{g,n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}, e_1) \prod_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{\alpha_i}.$$

Si consideri ora la mappa $p : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ che dimentica l'ultimo punto marcato. Si hanno le seguenti relazioni

- $p_* \psi_1^d = \psi_1^{d-1}$, dalla proposizione 16, con la convenzione che $\psi_1^{-1} = 0$.
- $DR_g(0, a_1, \dots, a_n, 0) = p^* DR_g(0, a_1, \dots, a_n)$, dalla proposizione 22
- $c_{g,n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}, e_1) = p^* c_{g,n+1}(e_\beta, \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})$, dalla definizione di CohFT
- $p^* \lambda_g = \lambda_g$ dalla proposizione 19.

Da tali relazioni, applicando la formula di proiezione all'integrale precedente si ottiene il risultato del lemma. \square

Dal lemma precedente, assieme alla proposizione 1, deduciamo per ogni α che il funzionale locale $\frac{\partial H_{\alpha,d}}{\partial u_0^1} - H_{\alpha,d-1}$, per $d \geq 1$, e il funzionale locale $\frac{\partial H_{\alpha,0}}{\partial u_0^1}$ sono combinazioni lineari dei funzionali $\int u_0^\mu dx$ per $\mu = 1, \dots, N$.

Si consideri prima il caso $d > 0$. Si noti che l'integrale

$$\int_{DR_0(0,a,-a)} \psi_1^d c_{0,3}(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma)$$

è sempre nullo per la dimensione della classe integranda. Pertanto $H_{*,d}$ non contiene (l'integrale di) termini di grado due, da cui si deduce che

$$\frac{\partial H_{\alpha,d}}{\partial u_0^1} - H_{\alpha,d-1} = 0.$$

Consideriamo ora il caso $d = 0$. Da un calcolo diretto analogo a quello svolto nel lemma precedente si deduce che

$$\begin{aligned} H_{\alpha,0} &= \hat{Q} \left(\frac{1}{2} \sum_{a \geq 1} \int_{DR_0(0,a,-a)} c_{0,3}(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma) p_a^\alpha p_{-a}^\beta \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\int_{\mathcal{M}_{0,3}} c_{0,3}(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma) \right) u_0^\beta u_0^\gamma dx. \end{aligned}$$

Dal fatto che, indipendentemente dall'ordine dei vettori, $c_{0,3}(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma)|_{\gamma=1} = \eta_{\alpha\beta}$ si deduce, con un calcolo diretto, che

$$\frac{\partial H_{\alpha,0}}{\partial u_0^1} = \eta_{\alpha\beta} \int u_0^\alpha dx.$$

Siamo quindi nella condizione di applicare la proposizione 2, dalla quale deduciamo che

$$H_{\alpha,d-1}^{DR} := \frac{\delta H_{\alpha,0}}{\delta u_0^1}, \quad \alpha = 1, \dots, N, d \geq 0$$

è una tau-structure per la gerarchia-DZ.

5.3 Motivazioni per lo studio della gerarchia-DR.

Il materiale contenuto in questa sezione è essenzialmente una breve ed incompleta descrizione dello stato dell'arte nello studio della double ramification hierarchy. In particolare, ci concentreremo su quegli aspetti che possono essere discussi in termini del linguaggio introdotto in questa tesi. Le stesse informazioni possono essere trovate, in forma comunque discorsiva ma molto più approfondita, in [7].

Vi sono diversi motivi per introdurre e studiare la gerarchia-DR. E' innanzitutto interessante di per sé l'esistenza di una connessione diretta fra due ambiti, all'apparenza così separati, come la teoria delle intersezione nello spazio dei moduli delle curve stabili e i sistemi hamiltoniani integrabili.

Inoltre, vi sono diverse equazioni fisiche note che possono essere descritte come parte di una gerarchia-DR.

Vi è in verità un'altra metodologia, storicamente precedente a quella descritta in questa tesi, per costruire sistemi integrabili a partire da una cohomological field theory. Tale metodologia è dovuta a Dubrovin e Zhang, e le gerarchie così prodotte prendono il nome di **gerarchie-DZ**. A differenza della gerarchia di doppia ramificazione, però, la gerarchia-DZ può essere costruita solamente a partire da una CohFT semisemplice, e le parentesi di Poisson prodotte non sono, in generale, in forma standard.

In diversi casi semplici è stato provato che la gerarchia-DR e la gerarchia-DZ, prodotte dalla stessa CohFT, sono equivalenti a meno di una trasformazione di Miura. La validità generale di questo risultato, però, è ancora oggetto di congettura, e prende il nome di **weak DR/DZ conjecture**, congettura debole DR/DZ.

In particolare, è possibile formulare la congettura in termini più precisi considerando, nella gerarchia DR, la tau-function F^{DR} della *string solution*, ovvero quell'unica soluzione della gerarchia che ha come dato iniziale

$$u_{str}^\alpha(x, t, \epsilon)|_{t=0} = \delta_{1,\alpha}x.$$

Analogamente, nella gerarchia DZ (che non è in forma standard), è possibile considerare la tau-function F della *topological solution*, soluzione topologica, che nuovamente è quell'unica soluzione della gerarchia con dato iniziale

$$u_{top}^\alpha(x, t, \epsilon)|_{t=0} = \delta_{1,\alpha}x.$$

Per come è costruita la gerarchia-DZ, tale funzione F è sempre il potenziale della CohFT c a cui essa è associata, che ricordiamo essere

$$F = \sum_{g \geq 0} \epsilon^{2g} F_g$$

dove

$$F_g(t) := \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ 2g-2+n \geq 0}} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 0 \\ 1 \leq \alpha_1 \dots \alpha_n \leq N}} \langle \tau_{d_1}(e_{\alpha_1}) \cdots \tau_{d_n}(e_{\alpha_n}) \rangle_g \prod_{k=1}^n t_{d_k}^{\alpha_k}.$$

Le trasformazioni di Miura, agendo sulle coordinate del sistema, agiscono anche sulle soluzioni, e di conseguenza sulle tau-function ad esse associate. E' possibile mostrare che una formulazione equivalente della weak DR/DZ conjecture è:

Congettura 1. *Data una CohFT semisemplice, detto F il suo potenziale e F^{DR} la tau-function della gerarchia-DR ad essa associata, queste ultime coincidono a meno di una trasformazione di Miura.*

In particolare, la formulazione precedente della congettura, porta ad una naturale generalizzazione di quest'ultima, che prende il nome di **strong DR/DZ conjecture**, congettura DR/DZ forte, ovvero:

Congettura 2. *Data una CohFT arbitraria, detto F il suo potenziale e F^{DZ} la tau-function della gerarchia-DR ad essa associata, queste ultime coincidono a meno di una trasformazione di Miura.*

Vi sono diverse "evidenze" a favore della congettura 2, a partire dal fatto che anch'essa è stata dimostrata in una vasta gamma di casi semplici. Inoltre, tramite lo studio geometrico dei coefficienti di F^{DZ} , emergono dei vincoli per la trasformazione di Miura considerata, ed è possibile mostrare che esiste solamente una trasformazione che soddisfa a tali vincoli.

Una volta provata vera, la congettura 2 avrebbe diverse conseguenze interessanti sia per la teoria dei sistemi integrabili, che per quella delle intersezioni di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

innanzitutto la gerarchia-DR si presenterebbe in un certo senso come una "forma standard" della gerarchia-DZ. Inoltre, la gerarchia di doppia ramificazione è dotata di una naturale procedura di quantizzazione, e pertanto la validità della congettura offrirebbe un quantizzazione naturale per le gerarchie-DZ.

Nell'ambito della teoria delle intersezioni di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, invece, il confronto fra il contenuto geometrico dei coefficienti di F^{DZ} e quello dei correlatori della CohFT potrebbe produrre nuove relazioni nell'anello tautologico di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, aiutando in questo modo a comprenderne maggiormente la coomologia.

Bibliografia

- [1] BURYAK A., “*Double ramification cycles and integrable hierarchies*”, *Comm. Math. Phys.* 336 (2015), 1085–1107, arXiv:1403.1719.
- [2] BURYAK A., DUBROVIN B., GUÉRE J., ROSSI P., “*Tau-structure for the double ramification hierarchies*”, arXiv:1602.05423.
- [3] BURYAK A., SHADRIN S., SPITZ L., ZVONKINE D., “*Integrals of ψ -classes over double ramification cycles*”, *Amer. J. Math.* 137 (2015), 699–737, arXiv:1211.5273.
- [4] JANDA F., PANDHARIPANDE R., PIXTON A., ZVONKINE D., “*Double ramification cycles on the moduli spaces of curves*”, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* 125 (2017), 221–266, arXiv:1602.04705.
- [5] ROSSI P., “*Integrable systems and holomorphic curves*”, (2010), arXiv:0912.0451.
- [6] ZVONKINE D., “*An introduction to moduli spaces of curves and its intersection theory, Based on three lectures given at the Journées mathématiques de Glanon in July 2006*”, available at <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/sites/ifmaquette.ujf-grenoble.fr/files/ete2011-zvonkine.pdf>.
- [7] ROSSI P., “*Integrability, Quantization and Moduli Spaces of Curves*”, (2017) arXiv:1703.00232.
- [8] GRIFFITS P., HARRIS J., “*Principles of Algebraic Geometry*”, (1994), Wiley Interscience, New York.
- [9] PANDHARIPANDE R., “*Cohomological field theory calculations*”, (2017) arXiv:1703.00232.
- [10] CHEN W., RUAN Y., “*A New Cohomology Theory of Orbifold*”, (2001), arXiv:math/0004129.
- [11] CHEN W., RUAN Y., “*Orbifold Gromov-Witten Theory*”, (2001), arXiv:math/0103156.
- [12] CHEN W., RUAN Y., “*Orbifold Quantum Cohomology*”, (2000), arXiv:math/0005198.

- [13] ADEM A., LEIDA J., RUAN Y., “*Orbifolds and stringy topology*”, (2007), Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York.
- [14] DUBROVIN B., ZHANG Y., “*Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov - Witten invariants*”, (2008), arXiv:math/0108160.
- [15] LOSEV A., MANIN Y., “*New moduli spaces of pointed curves and pencils of flat connections*”, (2001), arXiv:math/0004129.
- [16] KANNAN S., “*Moduli of relative stable maps to P^1 : cut-and-paste invariants*”, (2022), arXiv:2202.05617.
- [17] RAHMAN A., “*Chern-Weil Theory*”, (2017), available at <https://math.uchicago.edu/~may/REU2017/REUPapers/Rahman.pdf>.
- [18] HUSEMOLLER D., “*Fiber bundles*”, 1994 Springer-Verlag New York, Inc; First edition published by McGraw-Hill, Inc., 1966 by Dale Husemoller.
- [19] NAKAHARA M., “*Geometry, Topology and Physics*”, 2003 Published by Institute of Physics Publishing.
- [20] WITTEN E., “*Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space*”, 1990, Surveys in differential geometry (1991) 243-310.
- [21] FINE J., “*Holomorphic line bundles*”, (2013), available at <https://joel.fine.web.ulb.be/preprints>.
- [22] FRANCISCO C., CARAMELLO J., “*Introduction to Orbifolds*”, (2022), arXiv:1909.08699.
- [23] CONRAD K., “ *$SL_2(\mathbb{Z})$* ”, (2022), available at [https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/SL\(2,Z\).pdf](https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/SL(2,Z).pdf)
- [24] SATAKE I., “*The Gauss-Bonnet Theorem for V -manifolds*”, (1957), Journal of Mathematical Society of Japan, Vol. 9, No. 4, October, 1957
- [25] SOLIMAN A., “*A beginners guide to modular curves*”, available at <http://math.uchicago.edu/~may/REU2021/REUPapers/Soliman.pdf>
- [26] BERNARD, K., “*On the de Rham cohomology of differential and algebraic stacks*”, Adv. Math. 198 (2005), no. 2, 583-622.
- [27] HARRIS J., MORRISON I., “*Moduli of curves*”, Grad. Texts in Math. 187, Springer-Verlag, New York 1998