UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

# CATEGORIE ABELIANE E TEOREMA DI IMMERSIONE

RELATORE:
PROF.SSA LUISA FIOROT

LAUREANDO: GIULIA BARTOCCI
MATRICOLA: 1232947

DATA 21/07/2022
ANNO ACCADEMICO 2021/2022

**Introduzione**

Nel 1945, nel loro articolo "General theory of natural equivalences" Eilenberg e MacLane misero le fondamenta della teoria delle categorie e dei funtori. All'inizio del secolo predominava lo studio degli oggetti matematici isolati, mentre negli ultimi decenni l'interesse si spostò verso l'analisi di tutte le mappe tra gli oggetti matematici e le loro classi. Questo nuovo punto di vista è espresso nella teoria delle categorie e dei funtori.

Infatti la teoria delle categorie e dei funtori riassume i concetti di oggetti e di mappa, derivanti da branche della matematica più antiche, e investiga quali di queste affermazioni algebriche e/o topologiche possano essere dimostrate in un ambiente astratto.

Nel primo capitolo si introducono preliminarmente le nozioni di categorie, trasformazioni naturali, funtori, limiti e prodotti. Nel capitolo successivo vengono definite categorie speciali con proprietà particolari che sono essenziali per mostrare due risultati fondamentali, presentati negli ultimi due capitoli: *il lemma di Yoneda*, che afferma che ogni categoria può essere considerata come una sottocategoria dei funtori contravarianti da essa stessa alla categoria di insiemi e *il teorema di immersione di Mitchell.* In particolare quest'ultimo afferma che ogni categoria abeliana piccola è equivalente ad una sottocategoria completa di $R-Mod$ per qualche anello $R$. Cio permette di pensare ad una categoria abeliana astratta come una categoria concreta di $R$ moduli, i cui oggetti sono insiemi e, di conseguenza, si hanno utili tecniche di dimostrazsione come, ad esempio, la caccia al diagramma. Le referenze pricipali di questa tesi sono il libro del professor Orsatti [4] e le note del professor Colpi [1].

# Contents

# 1 Categorie e funtori

## 1.1 Categorie

**Definizione 1.1.1.** Una categoria $\mathcal{C}$ è determinata dai seguenti dati e assiomi:

- Una classe $Ob\mathcal{C}$ di oggetti denotati con le lettere maiuscole A,B,..,X,Y.
- Per ogni coppia ordinata (X,Y) di oggetti in $\mathcal{C}$ è dato un insieme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ detto insieme dei morfismi di X in Y. Gli elementi di $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ sono denotati con $\alpha, \beta, .., f, g$. Se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ si scrive $f : X \to Y$ o $X \xrightarrow{f} Y$.
- Per ogni terna ordinata (X,Y,Z) di oggetti di $\mathcal{C}$ è data una legge di composizione

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$

  che associa ad ogni coppia di morfismi $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ il morfismo composto $g \circ f : X \to Z$.
- Se (X,Y) e (Z,T) sono coppie ordinate e distinte di oggetti di $\mathcal{C}$ allora

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,T) = \emptyset$$

- Se $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$, $Z \xrightarrow{h} W$ sono morfismi, allora $h(gf) = (hg)f$ (PROPRIETÀ ASSOCIATIVA).
- Per ogni $X \in Ob\mathcal{C}$ esiste un morfismo $\mathbf{1_X} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ detto identità di X, tale che per ogni $Y \xrightarrow{f} X$, $X \xrightarrow{g} Z$ si ha $\mathbf{1_X} \circ f = f, g \circ \mathbf{1_X} = g$. È ovvio che tale morfismo identico è univocamente determinato.

*Esempio* 1.1.2. L'ambito della matematica è pieno di strutture che possono essere considerate categorie. Per esempio:

- **Set** è la categoria degli insiemi, i cui oggetti sono insiemi e i cui morfismi sono mappe di insiemi;
- **Gr** è la categoria dei gruppi, che ha come oggetti i gruppi e come morfismi gli omomorfismi di gruppi;
- **Ab** è la categoria dei gruppi *abeliani*, la cui definizione è riportata nel sottocapitolo successivo. Ricordiamo che un gruppo $A$ è detto abeliano se $ab = ba$ per ogni $a, b \in A$. I gruppi abeliani insieme con gli omomorfismi di gruppi formano la categoria **Ab**;
- dato $k$ un campo, indichiamo con $\mathbf{Vect}_k$ le categorie degli spazi vettoriali su $k$ con morfismi le applicazioni lineari.

**Definizione 1.1.3.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria. La categoria $\mathcal{D}$ è sottocategoria di $\mathcal{C}$ se valgono le seguenti condizioni:

- $Ob\mathcal{D} \subseteq Ob\mathcal{C}$;
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ per ogni coppia (X,Y) di oggetti in $\mathcal{D}$;
- la composizione di morfismi in $\mathcal{D}$ è indotta dalla composizione di morfismi in $\mathcal{C}$;
- i morfismi identità in $\mathcal{C}$ sono morfismi identità anche in $\mathcal{D}$.

**Definizione 1.1.4.** Una sottocategoria $\mathcal{D}$ di una categoria $\mathcal{C}$ è detta *piena* se per ogni coppia (X,Y) di oggetti in $\mathcal{D}$ si ha $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

**Definizione 1.1.5.** Una *categoria piccola* è una categoria la cui classe di oggetti è un insieme.

**Definizione 1.1.6.** Indichiamo con $\mathcal{C}^{\mathrm{Op}}$ la *categoria duale* di $\mathcal{C}$, che ha le seguenti la catteristiche:

- gli oggetti di $\mathcal{C}^{\mathrm{Op}}$ sono esattamente gli oggetti di $\mathcal{C}$;
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{Op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$.

### 1.1.1 Oggetti speciali

Introduciamo inizialmente alcune definizioni basi riguardanti gli oggetti delle categorie. Sia X un oggetto di $\mathcal{C}$:

- L'oggetto X è un oggetto *iniziale* di $\mathcal{C}$ se per ogni oggetto Y di $\mathcal{C}$ è possible scrivere $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ come un singoletto.
- L'oggetto X è un oggetto $finale$ di $\mathcal{C}$ se per ogni oggetto Y di $\mathcal{C}$ è possibile scrivere $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ come un singoletto.
- L'oggetto X è un oggetto *nullo* se è sia iniziale che finale.

**Definizione 1.1.7.** Una famiglia $\{G_i\}_{i\in I}$ di oggetti (con $I$ un insieme) in una categoria $\mathcal{C}$ è chiamata *insieme di generatori* se per ogni coppia di morfismi $f,g : A \to B$ in $\mathcal{C}$, con $f \neq g$, esistono un $G_i$ e un morfismo $h : G_i \to A$ con $fh \neq gh$.

**Definizione 1.1.8.** Un oggetto $P \in \mathcal{C}$ si dice *generatore* di $\mathcal{C}$ se per ogni coppia di morfismi $X \xrightarrow{f} Y$, $X \xrightarrow{g} Y$ con $f \neq g$ esiste un morfismo $h : P \to X$ tale che $f \circ h \neq g \circ h$.

**Definizione 1.1.9.** Un oggetto $K \in \mathcal{C}$ si dice *cogeneratore* di $\mathcal{C}$ se per ogni coppia di morfismi $X \xrightarrow{f} Y$, $X \xrightarrow{g} Y$ con $f \neq g$ esiste un morfismo $h : Y \to K$ tale che $h \circ f \neq h \circ g$.

**Osservazione 1.1.10.** *$K$ è cogeneratore di $\mathcal{C}$ se e solo se $K$ è generatore di $\mathcal{C}^{Op}$.*

### 1.1.2 Morfismi

**Definizione 1.1.11.** Un morfismo $\mu : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ è detto *monomorfismo* se per ogni coppia $f, g$ si ha

$$Z \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{\mu} Y$$

con $\mu \circ f = \mu \circ g \Rightarrow f = g$.

**Definizione 1.1.12.** Un morfismo $\epsilon : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ è detto *epimorfismo* se per ogni coppia $f, g$ si ha

$$X \xrightarrow{\epsilon} Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z$$

con $f \circ \epsilon = g \circ \epsilon \Rightarrow f = g$.

**Definizione 1.1.13.** Il morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ è detto *isomorfismo* se esiste un morfismo $g : Y \to X$ tale che $f \circ g = \mathbf{1_Y}$ e $g \circ f = \mathbf{1_X}$.

## 1.2 Funtori

**Definizione 1.2.1.** Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie. Un funtore da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ consiste nei seguenti dati:

- una mappa $X \longmapsto F(X)$ che associa ad ogni oggetto $X$ di $\mathcal{C}$ un oggetto $F(X)$ di $\mathcal{D}$
- per ogni coppia $(X, Y)$ di oggetti di $\mathcal{C}$, una mappa

  $$F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

  tale che, se si scrive $F(f)$ omettendo il dominio e il codominio, $F(1_X) = 1_{F(X)}$ e $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

*Esempio* 1.2.2. Data $\mathcal{C}$ una categoria, un esempio è il funtore IDENTITÀ $\mathbf{1_X}$, che mappa $X \mapsto X$ e $f \mapsto f$.

**Definizione 1.2.3.** Usando le notazioni precendenti, un funtore si dice:

- FEDELE se tutte le applicazioni $F_{X,Y}$ sono iniettive;
- PIENO se tutte le applicazioni $F_{X,Y}$ sono suriettive;
- PIENAMENTE FEDELE se è pieno e fedele;
- DENSO o ESSENZIALMENTE SURIETTIVO se per ogni $Y \in \mathcal{D}$ esiste un oggetto $X \in \mathcal{C}$ tale che $F(X)$ sia isomorfo a Y.

**Osservazione 1.2.4.** *Un oggetto $G$ di $\mathcal{C}$ è generatore $\Longleftrightarrow$ il funtore* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G,-) : \mathcal{C} \to Set$ *è fedele.*

**Definizione 1.2.5.** Due categorie $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ sono *isomorfe* se esistono un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e un funtore $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tale che $F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F = 1_{\mathcal{C}}$.

Infine introduciamo la nozione di *morfismo* tra funtori:

**Definizione 1.2.6.** Siano $F, G$ due funtori da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$. Una *trasformazione naturale* $\alpha$ da un funtore $F$ a un funtore $G$ è un insieme di morfismi $\alpha_X : F(X) \to G(X)$ in $\mathcal{D}$, tale che per ogni $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

**Nota.** Indicheremo con $Nat[F, G]$ l'insieme delle trasformazioni naturali fra $F$ e $G$.

## 1.3 Limiti e prodotti

**Osservazione 1.3.1.** *Un insieme parzialmente ordinato $\Lambda$, (ovvero un insieme non vuoto su cui è possibile definire una relazione binaria che soddisfa le proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva) descrive una categoria i cui oggetti sono gli elementi di $\Lambda$ e* $\mathrm{Hom}(\lambda, \mu) \neq \emptyset$ *se e solo se $\lambda \leq \mu$, in tale caso* $\mathrm{Hom}(\lambda, \mu)$ *è un singoletto.*

Di conseguenza si definiscono le seguenti strutture:

**Definizione 1.3.2.** Un insieme si dice *diretto* se è parzialmente ordinato e filtrante crescente, cioè se per ogni $\lambda, \mu \in \Lambda$ esiste un elemento $\nu \in \Lambda$ tale che $\mu \leq \nu$ e $\lambda \leq \nu$.

**Definizione 1.3.3.** In una categoria $\mathcal{C}$ un *sistema diretto* è un funtore $D : \Lambda \to \mathcal{C}$ ove $\Lambda$ è un insime diretto, visto come categoria. Esso è costituito da:

- un insieme diretto di indici $\Lambda$
- una famiglia di oggetti $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$
- una famiglia di morfismi $X_\lambda \xrightarrow{f_{\lambda,\mu}} X_\mu$ con $\lambda \leq \mu$ tale che $f_{\lambda,\lambda} = \mathbf{1}_{X_\lambda}$ ed ogni volta che $\lambda \leq \mu \leq \nu$ il diagramma

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[rr, "f_{\lambda,\mu}"] \arrow[dr, "f_{\lambda,\nu}"'] & & X_\mu \arrow[dl, "f_{\mu,\nu}"] \\
& X_\nu &
\end{tikzcd}$$

risulta commutativo.

**Definizione 1.3.4.** Sia $((X_\lambda)_\lambda, (f_{\lambda,\mu})_{\lambda\leq\mu})$ con un sistema diretto in una categoria $\mathcal{C}$. Si dice *limite diretto* del sistema $D : \Lambda \to \mathcal{C}$ assegnato e si indica con $\varinjlim(X_\lambda, f_{\lambda,\mu})$ una coppia $(\varinjlim X_\lambda, (f_\lambda)_\lambda)$ ove $\varinjlim X_\lambda$ è un oggetto di $\mathcal{C}$ e $(f_\lambda)_\lambda$ è una famiglia di morfismi $f_\lambda : X_\lambda \to \varinjlim X_\lambda$ soddisfacenti le seguenti proprietà:

1 per ogni $\lambda, \mu \in \Lambda$ con $\lambda \leq \mu$ il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[rr, "f_{\lambda,\mu}"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & & X_\mu \arrow[dl, "f_\mu"] \\ & \varinjlim X_\lambda & \end{tikzcd}$$

2 Per ogni coppia $(Y, (g_\lambda)_\lambda)$ ove Y è un oggetto di $\mathcal{C}$ e $g_\lambda : X_\lambda \to Y$ sono morfismi in $\mathcal{C}$ che rendono commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[rr, "f_{\lambda,\mu}"] \arrow[dr, "g_\lambda"'] & & X_\mu \arrow[dl, "g_\mu"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

con $\lambda, \mu \in \Lambda$ e $\lambda \leq \mu$, esiste un unico morfismo $g = \varinjlim g_\lambda : \varinjlim X_\lambda \to Y$ che rende commutativi i diagrammi

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[rr, "f_\lambda"] \arrow[dr, "g_\lambda"'] & & \varinjlim X_\lambda \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

al variare di $\lambda \in \Lambda$.

**Definizione 1.3.5.** Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di oggetti di una categoria $\mathcal{C}$. Un *prodotto* della data famiglia è un oggetto $X \in \mathcal{C}$ insieme con una famiglia di morfismi $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ con la seguente proprietà universale: se $Y \in \mathcal{C}$ e se $f_\lambda : Y \to X_\lambda$ è una famiglia di morfismi in $\mathcal{C}$, allora esiste un unico morfismo $e : Y \to X$ tale che il diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & & X \arrow[dl, "\pi_\lambda"] \\ & X_\lambda & \end{tikzcd}$$

È ovvio che se esiste un prodotto di $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ esso è unico a meno di un unico isomorfismo.

Se X è prodotto di $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ scriviamo $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ e i morfismi $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ si chiamano PROIEZIONI CANONICHE.

Si può anche scrivere tale proprietà universale nel seguente modo:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) \simeq \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_\lambda)$$

**Definizione 1.3.6.** Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di oggetti di una catagoria $\mathcal{C}$. Un *coprodotto*, ovvero una *somma diretta* di $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ è un oggetto $X \in \mathcal{C}$ insieme con una famiglia di morfismi $\epsilon_\lambda : X_\lambda \to X$ con la seguente proprietà universale: per ogni famiglia di morfismi $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ esiste un unico morfismo $f : X \to Y$ tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[rr, "\epsilon_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Come nel caso del prodotto, anche in questo caso se esiste un coprodotto della famiglia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ esso è unico a meno di un unico isomorfismo.

Il coprodotto di $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si denota con $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ e i morfismi $\epsilon_\lambda : X_\lambda \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ si chiamano INIEZIONI CANONICHE.

La proprietà universale si può anche scrivere nel seguente modo:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, Y) \simeq \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\lambda, Y)$$

.

*Esempio* 1.3.7. Nella categoria **Set**:

- il coprodotto è l'unione disgiunta;
- il prodotto è il prodotto cartesiano;
- l'oggetto iniziale è $\emptyset$;
- l'oggetto finale è il singoletto $\{pt\}$.

*Esempio* 1.3.8. In **Top**, categoria degli spazi topologici con morfismi applicazioni continue:

- il coprodotto è l'unione disgiunta con la topologia unione;
- il prodotto è il prodotto cartesiano con la topologia prodotto;
- l'oggetto iniziale è $\emptyset$;
- l'oggetto finale è il singoletto $\{pt\}$.

# 2 Categorie abeliane

Si ricordi che un gruppo abeliano $(G, \cdot)$ è una struttura algebrica sull'insieme sostegno $G$, in cui l'operazione $\cdot$ è associativa, commutativa, ammette elemento neutro $1_G$ (che è unico) e ogni elemento $x$ ha inverso $x^{-1}$, che è unico.

## 2.1 Categorie preadditive ed additive

Iniziamo con il dare le seguenti definizioni:

**Definizione 2.1.1.** Una categoria $\mathcal{C}$ si dice *preadditiva* se per ogni coppia ordinata $(X, Y)$ di oggetti in $\mathcal{C}$ l'insieme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ è un gruppo abeliano e inoltre l'applicazione di composizione $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ è bilineare.

**Nota:** Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono categorie preadditive, un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ si dice additivo se per ogni $X, Y \in \mathcal{C}$ e per ogni $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ si ha $F(f + g) = F(f) + F(g)$.

*Esempio* 2.1.2. Ogni anello $(R, +, \cdot)$ può essere visto come una categoria preadditiva con un unico oggetto $\{pt\}$ e $\mathrm{Hom}(\{pt\}, \{pt\}) = R$.

**Definizione 2.1.3.** Assegnato un insieme finito di oggetti $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in una categoria preadditiva $\mathcal{C}$ si dice *biprodotto* di $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $\mathcal{C}$ una terna

$$(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, (\epsilon_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (\pi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$$

ove $\epsilon_\lambda : X_\lambda \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \quad \pi_\lambda : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ con le proprietà:

$$\pi_\lambda \circ \epsilon_\mu = \delta_{\lambda,\mu} \qquad \sum_{\lambda\in\Lambda} (\epsilon_\lambda \circ \pi_\lambda) = 1_{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda}$$

Se esso esiste è unico.

**Nota.** Useremo il simbolo $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}$ per i biprodotti.

**Definizione 2.1.4.** Una categoria $\mathcal{C}$ è detta *additiva* se

- è preadditiva;
- ha oggetto nullo $0_{\mathcal{C}}$ in $\mathcal{C}$ tale che $\forall X$ in $\mathcal{C}$ si ha

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0_{\mathcal{C}}, X) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, 0_{\mathcal{C}});$$

- ha biprodotti.

**Definizione 2.1.5.** Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie additive e sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore additivo.

Se $F$ è un funtore fedele e "iniettivo sugli oggetti" (cioè $F(C) = F(D)$ solo quando $C = D$) allora che dice che $F$ rappresenta *una immersione* della categoria $\mathcal{C}$ nella categoria $\mathcal{D}$.

Se inoltre $F$ è un funtore pieno, allora che dice che $F$ rappresenta *una immersione piena* della categoria $\mathcal{C}$ nella categoria $\mathcal{D}$.

**Nota:** Per il resto della tesi supporremo $\mathcal{C}$ categoria additiva.

## 2.2 Nuclei e conuclei

**Definizione 2.2.1.** Sia $f : A \to B$ un morfismo di $\mathcal{C}$. Un *nucleo* di f è un morfismo $i : \mathrm{Ker}(f) \to A$ tale che:

$$\forall X \xrightarrow{\alpha} A : f\alpha = 0 \quad \exists!\, \gamma : i\gamma = \alpha$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "\exists!\gamma"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \\
& \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \arrow[d] \\
& A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

**Proposizione 2.2.2.** *Tale proposizione mostra che se il nucleo di $f$ esiste esso è unico a meno di isomorfismo.*

*a) Ogni nucleo è un monomorfismo;*

*b) Due nuclei $i : \mathrm{Ker}(f) \to A$, $\alpha : X \to A$ di $f$ rappresentano lo stesso sottoggetto;*

*c) Se la categoria $\mathcal{C}$ ha nuclei, allora un morfismo è un monomorfismo se e solo se $\mathrm{Ker}(f) = 0$.*

***Dimostrazione.*** *a) Sia $\gamma : K \to X$ il nucleo del morfismo $f : X \to Y$ e dimostriamo che $\gamma$ è un monomorfismo.*

*Siano $\phi_i : L \to X$, $i \in \{1, 2\}$ due applicazioni tali che $\gamma\phi_1 = \gamma\phi_2$. Allora $\gamma(\phi_1 - \phi_2) = 0$ da cui $f(\gamma(\phi_1 - \phi_2)) = f \circ 0 = 0$ essendo $K$ il nucleo di $f$ esiste un'unica mappa $L \to K$ che composta con $\gamma$ dia 0. Sia la mappa nulla $L \xrightarrow{0} K$ che $L \xrightarrow{\phi_1 - \phi_2} K$ che soddisfa la richiesta, quindi $\phi_1 - \phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$.*

*b) Esiste un unico morfismo $\gamma : X \to \mathrm{Ker}(f)$ tale che $\alpha = i \circ \gamma$*

*Similmente esiste un unico morfismo $\gamma' : \mathrm{Ker}(f) \to X$ tale che $i = \alpha \circ \gamma'$.*

$$\begin{array}{ccc} Ker(f) & \xrightarrow{i} & A \\ {\scriptstyle\gamma'}\downarrow & \nearrow_{\alpha} & \\ X & & \end{array}$$

*Si ha $i = \alpha \circ \gamma'$, $\alpha = i \circ \gamma$ e quindi $i = i \circ \gamma \circ \gamma'$. Poichè $i$ è un monomorfismo si ha $1_{\mathrm{Ker}(f)} = \gamma \circ \gamma'$. Analogamente $1_X = \gamma' \circ \gamma$. Pertanto $\gamma$ è isomorfismo, il cui inverso è dato da $\gamma'$.*

*Per queste prorprietà di unicità possiamo parlare del nucleo si $f$ (se esiste) e lo indicheremo con* $\ker(f)$.

*c) Se $A \xrightarrow{f} B$ è un monomorfismo, sia $i : K \to A$ il nucleo di $f$. Sia $0 : K \to X$ il morfismo nullo, risulta $f \circ i = f \circ 0$ e poichè $f$ è mono si ha $i = 0$. Essendo per a) che ogni nucleo è monomorfismo si ha che $K = 0$.*

*Viceversa, supponiamo* $\mathrm{Ker}(f) = 0$ *e dimostriamo che $f$ è mono.*

*Sia $\alpha : X \to A$ un morfismo tale che $f \circ \alpha = 0$ con $i = 0 \to A$ nucleo di $f$. Si ha, considerando il diagramma commutativo della definizione precendente:*

$$\exists! \gamma : X \to \mathrm{Ker}(f) : \ \alpha = i \circ \gamma = 0 \circ \gamma = 0$$

. □

**Definizione 2.2.3.** Sia $f : A \to B$ un morfismo in $\mathcal{C}$. Un conucleo di $f$ è un morfismo $\pi : B \to \mathrm{Coker}(f)$ tale che:

$$\pi f = 0 \quad \forall B \xrightarrow{\beta} Y : \beta \circ f = 0 \quad \exists!\ \gamma : \gamma \circ \pi = \beta$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ 0 \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r, dashed, "\exists!\gamma"] & Y \end{tikzcd}$$

**Proposizione 2.2.4.** *Vale la proposizione duale:*

*a) ogni conucleo è epimorfismo;*

*b) Due conuclei $\pi : B \to C$, $\pi' : B \to C'$ del morfismo $f : X \to Y$ rappresentano lo stesso quoziente di $Y$. Tale proprietà di unicità permette di parlare del conucleo di un morfismo f, indicato, se esiste, con $Coker(f)$;*

*c) Un morfismo $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ è un epimorfismo se e solo se* $\mathrm{Coker}(f) = 0$.

**Proposizione 2.2.5.** *Sia $\gamma$ il nucleo (rispettivamente il conucleo) del morfismo $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ e si supponga che esista il* $\mathrm{Coker}(\gamma)$ *(risp.* $\mathrm{Ker}(\gamma)$*). Allora* $\gamma = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(\gamma))$ *(risp.* $\gamma = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(\gamma))$*).*

**Dimostrazione.** Sia $\xi : X \to C$ il conucleo di $\gamma$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\gamma"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi"'] & {} \\
K' \arrow[u, dashed, "\alpha"] \arrow[ur, dashed, "\gamma'"] & C \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Dobbiamo mostrare che $\gamma = \mathrm{Ker}(\xi)$. Si ha che $\xi \circ \gamma = 0$. Poichè $\xi$ è il conucleo di $\gamma$ e poichè $f \circ \gamma = 0$ esiste un unico morfismo $\beta : C \to Y$ che fattorizza $f$ con $\xi$. Sia ora $\gamma' : K' \to X$ tale che $\xi \circ \gamma' = 0$. Allora $0 = \beta \circ \xi \circ \gamma' = f \circ \gamma'$. Poichè $\gamma = \mathrm{Ker}(f)$, esiste un unico $\alpha : K' \to K$ tale che $\gamma' = \gamma \circ \alpha$. Dunque $\gamma = \mathrm{Ker}(\xi)$. □

**Nota.** Un monomorfismo $\mu$ si dice *regolare* se $\mu = \mathrm{Ker}(f)$ per qualche morfismo $f$.

**Nota.** Un epimorfismo $\epsilon$ si dice *regolare* se $\epsilon = \mathrm{Coker}(f)$ per qualche morfismo $f$.

**Definizione 2.2.6.** Sia $f : X \to Y$ un morfismo. Si definiscono l'**immagine** di $f$ come il nucleo del conucleo di $f$ e la **coimmagine** come il conucleo del nucleo di $f$.

**Osservazione 2.2.7.** *Definendo i morfismi naturali* $\pi' : X \to \mathrm{Coker}(\alpha)$ *(epimorfismo) e* $\beta : \mathrm{Ker}(\pi) \to Y$ *(monomorfismo) si ottiene:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, hook, "\alpha"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi'"] & Y \arrow[r, two heads, "\pi"] & \mathrm{Coker}(f) \\
& \mathrm{Coker}(\alpha) & \mathrm{Ker}(\pi) \arrow[u, hook, "\beta"] &
\end{tikzcd}$$

*Dunque* $\mathrm{CoIm}(f) = \mathrm{Coker}(\alpha)$ *mentre* $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(f)$. *Inoltre* $\pi'\alpha = 0$ *e* $f\alpha = 0$ *implicano che esiste un unico morfismo* $\gamma : \mathrm{Coker}(\alpha) \to Y$ *che rende commutativo il diagramma. Analogamente* $\pi\gamma\pi' = \pi f = 0$*, ma* $\pi'$ *è epi, quindi* $\exists!\ u : \mathrm{CoIm}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ *tale che* $\beta u = \gamma$*. Graficamente:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, hook, "\alpha"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi'"] & Y \arrow[r, two heads, "\pi"] & \mathrm{Coker}(f) \\
& \mathrm{CoIm}(f) \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[ur, "\exists!\gamma"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook, "\beta"] &
\end{tikzcd}$$

*È chiaro che* $\mathrm{CoIm}(f)$ *è quiziente del dominio, mentre* $\mathrm{Im}(f)$ *è sottoggetto del codominio.*

**Proposizione 2.2.8.** *Un morfismo che è sia mono regolare che epi regolare è isomorfismo.*

**Dimostrazione.** Sia $f : X \to Y$ mono ed epi regolare. Essendo mono regolare $\exists \phi : Y \to Z$ tale che $X = \mathrm{Ker}(\phi)$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "f"] & Y \arrow[r, "\phi"] & Z \\
& Y \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Poichè $\phi f = 0$ ed $f$ è anche epi regolare, si ha che $\phi = 0$.

Considerando morfismo identità $\mathbf{1_Y} : Y \to Y$ si ha $\phi \mathbf{1_Y} = 0\mathbf{1_Y} = 0$, dunque esiste un unico morfismo $g : Y \to X$ tale che $fg = \mathbf{1_Y}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "f"] & Y \arrow[r, "0"] & Z \\
& Y \arrow[u, "\mathbf{1_Y}"] \arrow[ul, dashed, "\exists ! g"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

D'altra parte essendo $f$ epiregolare esiste $\epsilon : W \to X$ tale che $f = \mathrm{Coker}(\epsilon)$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\epsilon"] & X \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d] & Y \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Poichè $f\epsilon = 0$ ed $f$ è anche mono regolare, si ha che $\epsilon = 0$.

Considerando il morfismo identità $\mathbf{1_X} : X \to X$ si ha $\mathbf{1_X}\epsilon = \mathbf{1_X}0 = 0$, dunque esiste un unico morfismo $g' : Y \to X$ tale che $g'f = \mathbf{1_X}$:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "0"] & X \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "\mathbf{1_X}"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\exists ! g'"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Abbiamo ottenuto che $fg = \mathbf{1_Y}$ e $g'f = \mathbf{1_X}$.

Di conseguenza $(g'f)g = g' \Rightarrow \mathbf{1_X}g = g' \Rightarrow g = g'$. $\square$

**Definizione 2.2.9.** Una categoria $\mathcal{C}$ è detta *normale* (rispettivamente *conormale*) se ogni monomorfismo è un nucleo (rispettivamente ogni epimorfismo è un conucleo).

**Definizione 2.2.10.** Una categoria $\mathcal{C}$ si definisce *esatta* se:

- ha un oggetto nullo;
- ogni morfismo ha sia nucleo che conucleo;
- $\mathcal{C}$ è normale e conormale;
- ogni morfismo $f$ si fattorizza come $f = \beta\alpha$, per qualche epimorfismo $\alpha$ e monomorfismo $\beta$.

## 2.3 Categorie abeliane

**Definizione 2.3.1.** Una categoria si dice *preabeliana* se è additiva ed esistono nuclei e conuclei.

**Definizione 2.3.2.** Una categoria additiva $\mathcal{C}$ si dice **abeliana** se soddisfa i due seguenti assiomi:

- tutti i morfismi ammettono nuclei e conuclei;
- Sia $f$ un morfismo in $\mathcal{C}$. Allora il morfismo canonico
$$f : \mathrm{CoIm}(f) \to \mathrm{Im}(f)$$
è un isomorfismo.

**Nota.** La categoria duale di una categoria abeliana è abeliana.

**Osservazione 2.3.3.** *Si può dimostrare che una* categoria abeliana *è una categoria additiva esatta con prodotti e coprodotti finiti.*

**Proposizione 2.3.4.** *Se $\mathcal{C}$ è una categoria abeliana e $f : X \to Y$, si ha:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads] & Y \\ & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

*Esempio* 2.3.5. Esempi di categorie abeliane sono:

1) la categoria dei gruppi abeliani;
2) la categoria dei gruppi abeliani finitamente generati;
3) la categoria degli spazi vettoriali finitamente generati.

**Definizione 2.3.6.** Definiamo ora le *CATEGORIE ABELIANE SPECIALI.* Una categoria abeliana $\mathcal{A}$ è:

- $(\mathbf{C}_1)$ se ha coprodotti ed il funtore $\coprod$ preserva monomorfismi, cioè per ogni famiglia di monomorfismi $\{f_i : A_1 \hookrightarrow B_i, i \in I\}$ il morfismo canonico $\coprod_{i\in I} f_i : \coprod_{i\in I} A_i \hookrightarrow \coprod_{i\in I} B_1$ è un monomorfismo;
- $(\mathbf{C}_2)$ se ha prodotti e coprodotti, e per ogni famiglia $\{A_i : i \in I\}$ di oggetti il morfismo canonico $\delta : \coprod_{i\in I} A_i \hookrightarrow \prod_{i\in I} A_1$ è un monomorfismo;
- $(\mathbf{C}_3)$ se è *cocompleto*, cioè se ammette limiti diretti, e se per ogni famiglia $\{A_i : i \in I\}$ di sottoggetti di $\mathcal{A}$ e per ogni sottoggetto B di $\mathcal{A}$ vale la seguente proprietà distributiva:
$$(\sum_{i\in I} A_i) \cap B = \sum_{i\in I}(A_i \cap B)$$

**Nota.** Le categorie dei gruppi abeliani finitamente generati non appartengono alle categorie abeliane speciali in quanto non ammettono tutti i coprodotti.

**Proposizione 2.3.7.** *Se $\mathcal{A}$ è $(\boldsymbol{C}_2)$ allora è anche $(\boldsymbol{C}_3)$.*

**Dimostrazione.** Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un sistema diretto. Il limite diretto è il conucleo della mappa

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \xrightarrow{\mathbf{1}-f_{\lambda,\mu}} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Quindi se $\mathcal{C}$ ha coprodotti e conuclei ha limiti diretti.

Il resto della dimostrazione segue dalla commutatività del seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\coprod_{i\in I} f_i"] \arrow[d, hook, "\delta_A"] & \coprod_{i\in I} B_i \arrow[d, hook, "\delta_B"] \\
\prod_{i\in I} A_i \arrow[r, hook, "\prod_{i\in I} f_i"] & \prod_{i\in I} B_i
\end{tikzcd}$$

□

**Proposizione 2.3.8.** *Se $\mathcal{A}$ è $(\boldsymbol{C}_3)$ allora è anche $(\boldsymbol{C}_2)$.*

**Dimostrazione.** Data un'arbitraria famiglia $\{A_i : i \in I\}$ di oggetti di $\mathcal{A}$, e considerando l'insieme $\phi(I)$ di tutti i sottoinsiemi finiti $\mathcal{F}$ di $\mathcal{I}$, la famiglia

$$\coprod_{i\in\mathcal{F}} A_i \hookrightarrow \prod_{i\in\mathcal{I}} A_i$$

è una famiglia di sottoggetti di $\prod_{i\in I} A_i$ e

$$\varinjlim_{F\in\phi(\mathcal{I})} \coprod_{i\in\mathcal{F}} A_i = \coprod_{i\in I} A_i$$

□

**Osservazione 2.3.9.** *Una categoria additiva può non essere abeliana. Un esempio è riportato qui di seguito.*

*Esempio* 2.3.10. Sia $\mathcal{C}$ una cateogoria che ha come oggetti i $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali con topologia lineare e $T_2$ e come morfismi le applicazioni lineari continue. Osserviamo innanzitutto che tale categoria è additiva, infatti per ogni coppia di oggetti $(V_1, V_2)$ in $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V_1, V_2)$ ammette struttura di gruppo:

- date $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ e $V_1 \xrightarrow{g} V_2$ applicazioni lineari e continue, la somma $f+g$ e la differenza $f-g$ sono ancora applicazioni lineari e continue;

- 0 è l'oggetto nullo;
- il biprodotto $V_1 \times V_2$ è il prodotto cartesiano di insiemi, dotato della topologia prodotto.

L'immersione di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ è un monomorfismo non regolare:

$$V \xrightarrow{f} \mathbb{Q} \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathbb{R}$$

infatti preso un elemento $v \in V$ si ha che $\alpha f(v) = 0 \Rightarrow f(v) = 0$.

Ma tale immersione è anche epimorfismo, infatti suppiniamo

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} V \ : \ f \circ \alpha = 0$$

allora $\mathbb{Q} \subseteq f^{-1}(\{0\})$ che è un chiuso perchè $f$ è continua e $V$ è $T_2$. Quindi

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \subseteq f^{-1}(\{0\}) \Rightarrow f = 0$$

Quindi $\alpha$ è epimorfismo.

Se fosse regolare dovrebbe esistere $f : \mathbb{R} \to V$ tale che $\alpha$ sia $\mathrm{Ker}(f)$, ma dovendo essere $f \circ \alpha = 0$ si avrebbe $f = 0$, il cui nucleo è $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e non $\alpha$.

### 2.3.1 R-moduli

Un esempio di categoria abeliana è la categoria dei moduli destri e sinistri su un anello $\mathbf{R}$ (vedi Proposizione 2.3.21).

Innanzitutto ricordiamo che un **anello** è una terna $(A, +, \cdot)$ ove A è un insieme, $+$ e $\cdot$ sono due operazioni binarie verificanti le seguenti proprioetà:

- $(Z, +)$ è un gruppo abeliano
- $(Z, \cdot)$ è un semigruppo, la moltiplicazione verifica cioè la proprietà associativa:
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \ \forall a, b, c \in Z$$
- proprietà distributive:
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \ \forall a, b, c \in Z$$
$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

Tutti gli anelli considerati nel seguito sono associativi con unità $1 \neq 0$.

**Osservazione 2.3.11.** *1 Ricordiamo che in un morfismo di anelli $f : A \to B$, $f$ è morfismo e manda l'unità di $A$ nell'unità di $B$;*

*2 Se $A$ è un sottoanello di $B$, l'unità di $A$ coincide con quella di $B$.*

**Definizione 2.3.12.** Siano $R$ un anello e $M$ un gruppo abeliano additivo. Si dice che $M$ è un R-modulo sinistro se è definita l'applicazione $R \times M \to M$ che manda $(r, x) \hookrightarrow rx$ tale che:

- $r(x + y) = rx + ry$
- $(r + s)x = rx + sx$
- $r(sx) = (rs)x$
- $1x = x$

ove $1, r, s, \in R$ e $x, y \in M$.

**Definizione 2.3.13.** Siano $M$ un R-modulo sinistro, $H$ un sottoinsieme di $M$. Si dice che $H$ è un sottomodulo di $M$ ($H \leq M$) se $H$ è un sottogruppo del gruppo additivo di $M$ e se $\forall x \in H$ e $r \in R$ si ha $rx \in H$.

**Osservazione 2.3.14.**
- *(0) e $M$ sono sottomoduli di $M$;*
- *Se $(H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia di sottomoduli di $M$, allora $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ è sottomodulo di $M$.*

**Definizione 2.3.15.** Dato $M$ un R-modulo, il sottomodulo di $M$ generato da $X$ ($< X >$) è l'intersezione di tutti i sottomoduli di $M$ contenti $X$.

- Se $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ è un insieme finito di m elementi, allora gli elementi di $< X >$ sono le combinazioni lineari a coefficienti in $R$ degli elementi $x_i$, ovvero $\sum_{i=1}^{m} x_i r_i = r_1 x_1 + r_2 x_2 + ... + r_m x_m$;
- Se X è infinito gli elementi di $< X >$ sono tutti e soli quelli della forma $\sum_{x=1}^{\infty} r_x x$ ove gli $r_x$ sono quasi tutti nulli;
- Se $X = \emptyset$ allora $< X >= 0$.

**Nota.** Il sottomodulo generato da $H \cup K$ è $H + K = \{x + y : x \in H, y \in K\}$ ove $H$ e $K$ sono sottomoduli di $M$.

**Definizione 2.3.16.** Siano $L$ e $M$ due R-moduli sinistri, $f : L \to M$ un'applicazione, $f$ si dice *morfismo di R-moduli* se $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(rx) = rf(x)$ per ogni $x, y \in L,\ r \in R$.

**Definizione 2.3.17.** Si indica con **R-Mod** la categoria che ha per oggetti gli R-moduli sinistri e come morfismi i morfismi di R-moduli.

Si indica con **R-mod** la sottocategoria piena di **R-Mod** i cui oggetti sono i moduli $M$ finitamente generati (ciò significa che $\exists n \in \mathbb{N}$ e un epimorfismo da $R^n \twoheadrightarrow M$ ).

**Osservazione 2.3.18.** *Dato $f : L \to M$ morfismo in R-Mod, si ha:*

- *Il NUCLEO come* $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in L : f(x) = 0\} \leq L$
- *L'IMMAGINE come* $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in L\} \leq M$

**Definizione 2.3.19.** Il *modulo quoziente* di M rispetto ad H ($M/H$), con $H \leq M$ è il modulo i cui elementi sono del tipo $x + H = \{x + h : h \in H\}$ dette *classi laterali* di M rispetto ad H la cui addizione è ben definita da $(x + H) + (y + H) = x + y + H$ ed inoltre si ha $r(x + H) = rx + H, r \in R$.

**Definizione 2.3.20.** Infine definiamo la *proiezione canonica* di M su M/H come $\rho : M \to M/H$ che associa $x \hookrightarrow x + H$, ove $x \in M$.

**Proposizione 2.3.21.** *La categoria degli R-Mod è abeliana.*

**Dimostrazione.** Per le prorpietà enunciate tale categoria è additiva. Dato $f : L \to M$ isomorfismo in $R - Mod$, poichè il $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in L : f(x) = 0\} \leq L$ possiamo affermare che tale categoria ammette nuclei.

Resta da dimostrare che $R - Mod$ ammette conuclei. Osservando che per come è definito $\mathrm{Coker}(f) = \frac{M}{\mathrm{Im}(f)}$ si ha:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, two heads] & \frac{M}{\mathrm{Im}(f)} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} l \arrow[r, mapsto] & f(l) \arrow[r, mapsto] & 0 \end{tikzcd}$$

Sia $g$ un'applicazione $M \xrightarrow{g} N$, allora basta mostrare che esiste un'unica applicazione $\gamma : \frac{M}{\mathrm{Im}(f)} \to N$:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g"] & \frac{M}{\mathrm{Im}(f)} \arrow[dl, dashed, "\exists! \gamma"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Concludo osservando che l'applicazione $\gamma$ che manda $[m] \mapsto g(m)$ è ben definita, infatti

$$[m] = [m+f(x)] \mapsto g(m+f(x)) = g(m)+g(f(x)) = g(m) \quad \textit{poichè } g(f(x)) = 0.$$

□

**Proposizione 2.3.22.** *Sia R anello commutativo. Se R-mod è sottocategoria abeliana di R-Mod, allora R è Noetheriano.*

**Dimostrazione.** Osservo che se I è un ideale finitamente generato anche $R/I$ è finitamente generato. Si ha $\forall I \trianglelefteq R$:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] & R \arrow[r, two heads] & R/I \end{tikzcd}$$

Di conseguenza $I \in R{-}mod$, che è proprio la definizione di ideale finitamente generato e poichè ciò vale per ogni ideale R è anello noetheriano.

□

## 2.4 Funtori esatti

Prima di untrodurre il concetto di funtore esatto occorre definire le successioni esatte e le successioni esatte e corte.

**Definizione 2.4.1.** Una successione di R-moduli e di morfismi R-lineari

$$... \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \longrightarrow ...$$

è *esatta* se $Im(f_n) = Ker(f_{n+1})$.

**Definizione 2.4.2.** La seguente successione:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

è detta *esatta corta* se $f$ è iniettiva, $g$ suriettiva e $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

**Definizione 2.4.3.** Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore additivo tra categorie abeliane. $F$ si dice *esatto a sinistra* se data la successione esatta in $\mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

allora la successione

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

è esatta in $\mathcal{D}$.

**Definizione 2.4.4.** Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore. $F$ si dice *esatto a destra* se data la successione esatta in $\mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

allora la successione

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

è esatta in $\mathcal{D}$.

*Esempio* 2.4.5. Diamo un esempio di funtore esatto a sinistro $S$. Il funtore covariante $\mathrm{Hom}_R(G, -) : R-Mod \to Ab$ è esatto a sinistra $\forall R-modulo\ G$. Infatti, consideriamo una successione esatta del tipo:

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\alpha} G_2 \xrightarrow{\beta} G_3 \longrightarrow 0$$

la seguente successione verifica l'esattezza

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(G, G_1) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_R(G, G_2) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_R(G, G_3)$$

$$\gamma \xrightarrow{\hspace{6em}} \alpha\gamma = f \xrightarrow{\hspace{6em}} \beta f = 0$$

Essendo $\alpha$ monomorfismo, se $\alpha^*(\gamma) = \alpha\gamma = 0$ allora $\gamma = 0$, quindi $\alpha^*$ è monomorfismo.

Se $\beta^*(f) = \beta f = 0$, per definizione di nucleo $\exists!\ \gamma : G \to G_1\ :\ \alpha\gamma = f$

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, dashed, "\exists!\gamma"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "0"] & \\ G_1 \arrow[r, "\alpha"'] & G_2 \arrow[r, "\beta"'] & G_3 \end{tikzcd}$$

**Definizione 2.4.6.** Un funtore si dice *esatto* se è esatto a destra e a sinistra.

**Definizione 2.4.7.** Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono categorie abeliane, allora il funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è *una immersione (pienamente fedele) esatta* se $F$ è una immersione pienamente fedele e se $F$ preserva l'esattezza delle successioni esatte brevi.

## 2.5 Oggetti proiettivi, iniettivi e categorie di Grothendieck

**Definizione 2.5.1.** Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana. Un oggetto P di $\mathcal{A}$ è *proiettivo* se il funtore covariante $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ è esatto.

Cioè se $P \in R - Mod$ è proiettivo, allora per ogni successione esatta $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ in $R - Mod$ la successione di gruppi abeliani

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P, L) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(P, N) \to 0$$

è esatta.

D'altra parte un oggetto E di $\mathcal{A}$ è *iniettivo* se il funtore contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, E) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ è esatto.

**Proposizione 2.5.2.** *Sia $P \in \mathcal{A}$. Le condizioni che seguono sono equivalenti:*

*a) $P$ è proiettivo;*

*b) per ogni epimorfismo $g :\ M \twoheadrightarrow N$ e per ogni morfismo $\phi : P \to N$ esiste un morfismo $\gamma : P \to M$ tale che $g\gamma = \phi$*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\phi"] \\ M \arrow[r, two heads, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

**Dimostrazione.** $(a) \Rightarrow (b)$ Data la successione esatta

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[d, "\gamma"] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[r, hook] & M \arrow[r, two heads, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

poichè $P$ è proiettivo si ha che anche la seguente successione è esatta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \mathrm{Ker}(g)) \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M) \arrow[r, two heads, "g^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, N) \arrow[r] & 0 \\ & & \gamma \arrow[r, mapsto] & \phi & \end{tikzcd}$$

Concludo osservando che $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M) \ni \phi = g\gamma$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Data una successione esatta corta

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

ricordiamo che la sequenza

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, L) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, N)$$

è esatta per Esempio 2.4.5.

Resta da dimostrare che $g^*$ è suriettiva, ma ciò deriva dal fatto che è epimorfismo. □

**Proposizione 2.5.3.** *Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana e $P$ proiettivo in $\mathcal{A}$. Allora $P$ è un generatore se e solo se* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, A) \neq 0$ *per ogni oggetto $A \neq 0$ di $\mathcal{A}$.*

**Dimostrazione.** Sia P un generatore. Se $A \neq 0$ allora esiste un morfismo $P \xrightarrow{f} A$ tale che $f = \mathbf{1_A} \circ f \neq 0 \circ f = 0$, quindi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, A) \neq 0$.

Viceversa, sia P un oggetto proiettivo e supponiamo che per ogni $A \neq 0$ in $\mathcal{A}$ si ha $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, A) \neq 0$. Mostriamo che P è un generatore. Siano $f, g : X \to Y$, con $f \neq g$, allora $\alpha = fg \neq 0$, quindi $\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$ in $\mathcal{A}$, perciò $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \mathrm{Im}\,\alpha) \neq 0$. Poichè P è proiettivo, cioè $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$ è esatto, abbiamo $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \alpha)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \mathrm{Im}\,\alpha) \neq 0$ e di conseguenza $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \alpha) \neq 0$. Graficamente:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, two heads] & B \\ & & \mathrm{Im}\,\alpha (\neq 0) \arrow[u, hook] \\ & P \arrow[uu, dashed, "\exists"'] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

□

Diremo che una categoria abeliana $\mathcal{A}$ ha *abbastanza oggetti proiettivi* se per ogni oggetto $A \in Ob\mathcal{A}$ esiste un oggetto proiettivo P e un epimorfismo $P \twoheadrightarrow A$. Analogamente, $\mathcal{A}$ ha *abbastanza oggetti iniettivi* se per ogni oggetto $A \in Ob\mathcal{A}$ esiste un oggetto iniettivo E e un monomorfismo $A \hookrightarrow E$.

### 2.5.1 Moduli proiettivi e iniettivi

Un modulo $P \in R - Mod$ è **proiettivo** se lo è come oggetto di $R - Mod$, in particolare per ogni epimorfismo $f : L \to M$ e per ogni morfismo $g : P \to M$ esiste un morfismo $h : P \to L$ tale che il diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ L \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

cioè $g = f \circ h$. Si verifica che:

- ogni modulo libero è proiettivo;
- addendi diretti e somme dirette di moduli proiettivi sono moduli proiettivi.

Un modulo $E \in R - Mod$ dicesi **iniettivo** se per ogni successione esatta $0 \to L \xrightarrow{f} M$ in $R - Mod$ ed ogni morfismo $g : L \to E$ esiste un morfismo $M \to E$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[dl, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

è commutativo.

Prima di procedere costruiamo alcuni esempi di moduli iniettivi e ricordiamo che un gruppo abeliano (cioè uno $\mathbb{Z} - modulo$) è iniettivo se e solo se esso è divisibile.

Sia $G$ un gruppo abeliano e consideriamo il gruppo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$. Tale gruppo diventa in modo naturale un $R$-modulo sinistro definendo il prodotto scalare $sf$ $(s \in R, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G))$ mediante la posizione

$$(sf)(r) = f(rs), r \in R.$$

**Proposizione 2.5.4.** *Sia $G$ un gruppo abeliano divisibile. Allora l'$R$-modulo sinistro* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ *è iniettivo.*

**Proposizione 2.5.5.** *Per ogni modulo $E \in R - Mod$ le condizioni che seguono sono equivalenti.*

*(a) $E$ è iniettivo.*

*(b) **Criterio di Baer:** per ogni ideale sinistro $I \leq R$ e per ogni $R$-morfismo $f : I \to E$, esiste un $R$-morfismo $g : R \to E$ che estende $f$. Di conseguenza $f$ è la moltiplicazione destra per un elemento di $E$.*

(c) *Per ogni monomorfismo $f : L \hookrightarrow M$ e per ogni morfismo $\alpha : L \to E$, esiste un morfismo $\beta : M \to E$ tale che $\alpha = \beta f$:*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[dl, dashed, "\exists \beta"] \\ E & \end{tikzcd}$$

**Dimostrazione.** $(a) \Leftrightarrow (c)$ Sappiamo che $g^*$ è iniettivo ed $\mathrm{Im}(g^*) = \mathrm{Ker}(f^*)$. Dalla definizione di modulo iniettivo segue che $f^*$ è un morfismo suriettivo se e solo se $E$ è un modulo iniettivo.

$(c) \Rightarrow (b)$ E' diretta conseguenza della definizione di modulo iniettivo.

$(b) \Rightarrow (c)$ Consideriamo in $R$-Mod il diagramma

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"] & L^* \arrow[r, hook] \arrow[dl, "g^*"] & M \\ E & & \end{tikzcd}$$

dove $(L^*, g^*)$ è una coppia massimale rispetto alle proprietà $L \leq L^* \leq M$, $g^*_{|L} = g$. Mostriamo che $L^* = M$ da cui poi seguirà la conclusione. Supponiamo per assurdo $L^* \neq M$ e sia $x \in M \setminus L^*$. Poniamo

$$I = \{r \in R : rx \in L^*\}.$$

$I$ è un ideale sinistro di $R$. Consideriamo l'$R$-morfismo $\mu : I \to E$ dato da $\mu(r) = g^*(rx), r \in I$. Per ipotesi $\mu$ si estende ad un $R$-morfismo $\nu : R \to E$. Definiamo l'applicazione

$$\psi : L^* + Rx \to E$$

ponendo:

$$\psi(y + rx) = g^*(y) + \nu(r), y \in L^*, r \in R.$$

$\psi$ è ben definita. Se infatti $y + rx = 0$ allora $y = -rx$ e pertanto $r \in I$. Da ciò segue:

$$\psi(y + rx) = g^*(y) + \mu(r) = g^*(y) + g^*(rx) = g^*(y + rx) = 0.$$

Infine $\psi$ è un morfismo che estende $g^*$. Poichè $L^* < L^* + Rx$, ASSURDO. $\square$

**Definizione 2.5.6.** Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana e assumiamo che $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ sia una famiglia di generatori. Un oggetto $A$ di $\mathcal{A}$ è *$\mathcal{U}$-finitamente generato*, se esiste un epimorfismo $\coprod_{j=1}^n U_{i_j} \twoheadrightarrow A$ con $n \in \mathbb{N}$ e $U_{i_j} \in \mathcal{U}$.

**Definizione 2.5.7.** Un oggetto $S$ di $\mathcal{A}$ è *piccolo*, o *compatto*, se per ogni morfismo

$$f : S \to \coprod_{i \in I} A_i$$

esiste un sottoinsieme finito $F$ di $I$ tale che $f$ si fattorizza come

$$f : S \longrightarrow \coprod_{i\in F} A_i \overset{\epsilon_F}{\hookrightarrow} \coprod_{i\in I} A_i$$

ove $\epsilon_F$ è un'immersione canonica.

**Osservazione 2.5.8.** *In $R - Mod$ ogni modulo finitamente generato è piccolo, ma il viceversa è generalmente falso.*

**Proposizione 2.5.9.** *Sia $M \in R - Mod$. Tale $M$ è piccolo se e solo se per ogni famiglia numerabile $\{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ di sottomoduli di $M$ tale che $M = \sum_{i\in\mathbb{N}} M_i$ esiste un $n_0$ tale che $M = \sum_{i\in\mathbb{N}}^{n_0} M_i$.*

### 2.5.2 Categorie di Grothendieck

**Definizione 2.5.10.** Una *categoria di Grothendieck* è una categoria abeliana $(\mathbf{C}_3)$ che ammette un di generatore.

**Osservazione 2.5.11.** *Si può dimostrare che ogni categoria di Grothendieck ha abbastanza iniettivi.*

Ricordiamo che una categoria si dice *localmente piccola* se la classe di sottoggetti di ogni oggetto A di $\mathcal{A}$ è un insieme.

**Definizione 2.5.12.** Data $\mathcal{C}$ una categoria di Grothendieck e $G$ un generatore di $\mathcal{C}$, un oggetto $X$ in $\mathcal{C}$ si dice finitamente generato se esiste un epimorfismo $G^n \twoheadrightarrow X$ con $n \in \mathbf{N}$.

**Proposizione 2.5.13.** *Una categoria di Grothendieck $\mathcal{G}$ è localmente piccola e ogni oggetto di $\mathcal{G}$ è il limite diretto dei suoi sottoggetti finitamente generati.*

**Definizione 2.5.14.** Sia $A$ un oggetto di una categoria abeliana $\mathcal{A}$, e sia $A_0 \hookrightarrow A$ un sottoggetto di $A$. Diremo che $A_0$ è *essenziale* in $A$, o che $A$ è un'*estensione essenziale* di $A_0$, scrivendo $A_0 \overset{ess}{\hookrightarrow} A$, se per ogni sottoggetto $A' \neq 0$ di $A$ abbiamo $A_0 \cap A' \neq 0$.

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, hook, "ess"] & A \\
0 \neq A_0 \cap A' \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & A' \neq 0 \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

**Proposizione 2.5.15.** *Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana e sia $A_0 \overset{i}{\hookrightarrow} A$ un sottoggetto di $A \in Ob\mathcal{A}$. $A_0$ è essenziale in $A$ se e solo se ogni morfismo $f : A \to B$ è un monomorfismo non appena $f_i : A_0 \to B$ è un monomorfismo.*

**Dimostrazione.** Dall'identità $\operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Ker} f \cap A_0$ e assumendo che $A_0$ sia essenziale in $A$ si ha immediatamente tale proprietà. Viceversa, assumiamo che $A_0$ non sia essenziale in $A$: allora esiste un sottoggetto $0 \neq A' \leq A$ tale che $A_0 \cap A = 0$. Considerando il morfismo composto

$$A_0 \overset{i}{\hookrightarrow} A \xrightarrow{\pi} A/A'$$

vediamo che $\operatorname{Ker}\ \pi i = A_0 \cap \operatorname{Ker}\ \pi = A_0 \cap A' = 0$, ma $\operatorname{Ker} \pi = A' \neq 0$, quindi $\pi$ non è un monomorfismo. □

**Definizione 2.5.16.** Data $\mathcal{A}$ una categoria abeliana, un oggetto iniettivo $E$ in $\mathcal{A}$ si dice *inviluppo iniettivo* di $\mathcal{A}$ e si denota con $E = E(A)$ se esiste un monomorfismo $A \hookrightarrow E$ tale che $A$ sia essenziale in $E$.

$\mathcal{A}$ ha *inviluppi iniettivi* se $\forall A \in \mathcal{A} \quad \exists E(A)$.

# 3 Lemma di Yoneda

**Proposizione 3.0.1.** *Data $\mathcal{A}$ categoria additiva, la categoria di funtori additivi* $\mathrm{Hom}(A, \mathcal{A}b)$ *è categoria abeliana.*

**Nota.** Per semplificare la notazione scriviamo $[A, -]$, al posto di $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -)$.

**Lemma di Yoneda**: Sia $\mathcal{A}$ una categoria piccola additiva, $\mathcal{A}b$ la categoria dei gruppi abeliani e $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ la categoria dei funtori additivi. Per ogni $A \in \mathcal{A}$ ed $\mathcal{F} \in Hom(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ c'è un isomorfismo di gruppi abeliani

$$\phi_{A,\mathcal{F}} : Nat([A, -], \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(A)$$

che è naturale sia in $A$ che in $\mathcal{F}$. Questo è definito nel seguente modo:

- $\phi_{A,\mathcal{F}}(\nu) := \nu_A(id_A)$ per ogni $\nu = (\nu_{\mathcal{B}})_{\mathcal{B} \in \mathcal{A}} \in Nat([A, -], \mathcal{F})$;
- $\phi^{-1}_{A,\mathcal{F}} := \nu^x$, per ogni $x \in \mathcal{F}(A)$, ove $\nu^x$ è la trasformazione naturale definita per ogni $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$, $\nu^x_B : [A, B] \to F(B)$, $\alpha \mapsto F(\alpha)(x)$.

**Lemma 3.0.2.** *Sia $\mathcal{A}$ una categoria piccola e additiva. Per ogni $A, B \in \mathcal{A}$ c'è un isomorfismo di gruppi abeliani*

$$Nat([A, -], [B, -]) \cong [B, A]$$

*che è naturale sia in $A$ che in $B$. Quindi il funtore*

$$\mathcal{A}^0 \hookrightarrow Hom(\mathcal{A}, \mathcal{A}b), \quad A \mapsto [A, -]$$

*è pienamente fedele.*

I funtori in $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ isomorfi a funtori della forma $[A, -]$, con $A \in \mathcal{A}$, sono detti **funtori rappresentabili**.

**Proposizione 3.0.3.** *Data una categoria piccola additiva $\mathcal{A}$, l' insieme dei funtori rappresentabili $([A, -])_{A \in \mathcal{A}}$ è un insieme di generatori piccoli proiettivi di $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$.*

**Dimostrazione.** Il funtore $[A, -]$ è un oggetto proiettivo in $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$: infatti, da ogni sequenza corta esatta $0 \to F \to G \to H \to 0$ di funtori additivi si ha, per definizione, una sequenza corta esatta

$$0 \to F(A) \to G(A) \to H(A) \to 0$$

in $\mathcal{A}b$. Per il lemma si ha che la sequenza corta esatta

$$0 \to Nat([A, -], F) \to Nat([A, -], G) \to Nat([A, -], H) \to 0$$

che prova che $[A,-]$ è un oggetto proiettivo in $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$. Inoltre per ogni funtore additivo $F \neq 0$ esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $0 \neq F(A) \simeq Nat([A,-], F)$. Per dimostrare che $([A,-])_{A\in\mathcal{A}}$ è un sistema di generatori proiettivi dalla proposizione precedente.

Infine, ogni funtore rappresentabile $[A,-]$ è piccolo, infatti per ogni famiglia $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di funtori additivi ci sono isomorfismi naturali in $\mathcal{A}b$

$$Nat([A,-], \coprod_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda) \simeq (\coprod_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda)(A) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda(A) \simeq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Nat([A,-], F_\lambda)$$

□

**Proposizione 3.0.4.** *Sia $\mathcal{A}$ additiva piccola. Il funtore $G = \coprod_{A\in\mathcal{A}}[A,-]$ è un generatore proiettivo in $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ e rappresenta una immersione di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}b$. Se, inoltre $\mathcal{A}$ è abeliana, allora $G$ è esatto a sinistra.*

**Dimostrazione.** Innanzitutto osserviamo che se $\{G_i | i \in I\}$ è un insieme di oggetti di $\mathcal{A}$ e se in $\mathcal{A}$ esiste il loro coprodotto $G = \coprod_{i\in I} G_i$, allora $\{G_i | i \in I\}$ è una famiglia di generatori se e solo se $\{G\}$ lo è.

Grazie anche alla proposizione precendente segue che $G$ è un generatore; inoltre $G$ è proiettivo in quanto coprodotto di oggetti proiettivi.

Il funtore $G$ è fedele, poichè per ogni morfismo $0 \neq \beta : B \to B'$ in $\mathcal{A}$ si ha che il morfismo $[B, \beta] : [B, B] \to [B, B']$ in $\mathcal{A}b$ è diverso da zero, e dunque $G(\beta) = \coprod_{A\in\mathcal{A}}[A, \beta] \neq 0$.

Inoltre $G$ è un'immersione, poichè se $B \neq B' \in \mathcal{A}$ risulta $G(B) \neq G(B') \in \mathcal{A}b$.

Infine se $\mathcal{A}$ è abeliana allora il funtore $G$ è esatto a sinistra poichè ogni $[A,-]$ è funtore esatto a sinistra ed il coprodottone preserva l'esattezza in $\mathcal{A}b$. □

**Proposizione 3.0.5.** *Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana piccola ed E un oggetto iniettivo di $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$. Allora E è un funtore esatto a destra.*

**Dimostrazione.** Sia $0 \to A' \to A \to A" \to 0$ una sequenza esatta corta in $\mathcal{A}$. Allora la successione di funtori

$$0 \to [A", -] \to [A, -] \to [A', -]$$

è esatta in $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$. Poichè E è un oggetti iniettivo di $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ segue che la sequenza

$$Nat([A', -], E) \to Nat([A, -], E) \to Nat([A", -], E) \to 0$$

è esatta in $\mathcal{A}b$. Dal lemma concludiamo che la successione

$$E(A') \to E(A) \to E(A") \to 0$$

è esatta in $\mathcal{A}b$. Ciò prova che E è esatto a destra. □

## 3.1 Aggiunzioni

**Definizione 3.1.1.** Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorie additive, e siano $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funtori additivi. Diremo che la $< F, G >$ è una *aggiunzione*, o che $F$ è *aggiunto sinistro* di $G$, o che $G$ è *aggiunto destro* di $F$, se per ogni $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ vi è un isomorfismo di gruppi abeliani

$$\phi_{A,B} : [F(A), B]_{\mathcal{B}} \to [A, G(B)]_{\mathcal{A}}$$

che è naturale in $A$ e in $B$.

**Osservazione 3.1.2.** *La naturalità in $A$ e in $B$ significa che assegnati comunque morfismi $f : A \to A'$ in $\mathcal{A}$ e $g : B \to B'$ in $\mathcal{B}$, risultano commutativi i seguenti diagrammi:*

$$\begin{array}{ccc} [F(A), B]_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\phi_{A,B}} & [A, G(B)]_{\mathcal{A}} \\ {\scriptstyle [F(A),g]_{\mathcal{B}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [A,G(g)]_{\mathcal{A}}} \\ [F(A), B']_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\phi_{A,B'}} & [A, G(B')]_{\mathcal{A}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} [F(A'), B]_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\phi_{A',B}} & [A', G(B)]_{\mathcal{A}} \\ {\scriptstyle [F(f),B]_{\mathcal{B}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [f,G(B)]_{\mathcal{A}}} \\ [F(A), B]_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\phi_{A,B}} & [A, G(B)]_{\mathcal{A}} \end{array}$$

*Se $F$ e $G$ costituiscono un'equivalenza di categorie, allora sia $< F, G >$ che $< G, F >$ sono coppie di funtori aggiunti.*

Per ogni assegnata aggiunzione $< F, G >$ con $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, e per ogni $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ restano definiti i morfismi

$$\sigma_A : A \to GF(A) \qquad \sigma := \phi_{A,F(A)}(1_{F(A)})$$

e

$$\rho_B : FG(B) \to B \qquad \rho_B := \phi^{-1}_{G(B),B}(1_{G(B)}.$$

Dalla naturalità in $A$ e in $B$ di $\phi_{A,B}$ discendono anche le trasformazioni:

$$\sigma = (\sigma_A)_{A \in \mathcal{A}} : 1_{\mathcal{A}} \to GF \quad e \quad \rho = (\rho_B)_{B \in \mathcal{B}} : FG \to 1_{\mathcal{B}}$$

sono trasformazioni naturali tra funtori, e sono chiamati, rispettivamente, *l'unità* $\sigma$ e *la counità* $\rho$ dell'aggiunzione. Quando sia $\sigma$ che $\rho$ sono isomorfismi di funtori diciamo che la coppia di funtori $(F, G)$ è una equivalenza di categorie tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

**Proposizione 3.1.3.** *Sia $\sigma : 1_{\mathcal{A}} \to GF$ l'unità e $\rho : FG \to 1_{\mathcal{B}}$ la counità di una coppia aggiunta $< F, G >$. Allora per ogni $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ i seguenti diagrammi*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(\sigma_A)"] \arrow[dr, "1_{F(A)}"'] & FGF(A) \arrow[d, "\rho_{F(A)}"] \\ & F(A) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G(B) \arrow[r, "\sigma_{G(B)}"] \arrow[dr, "1_{G(B)}"'] & GFG(B) \arrow[d, "G(\rho(B))"] \\ & G(B) \end{tikzcd}$$

*sono commutativi.*

**Proposizione 3.1.4.** *Siano $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ due funtori e siano $\sigma : 1_{\mathcal{A}} \to GF$ e $\rho : FG \to 1_{\mathcal{B}}$ trasformazioni naturali tali che i triangoli della proposizione precedente commutano. Allora per ogni $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, le seguenti*

$$\phi_{A,B} : [F(A), B]_{\mathcal{B}} \to [A, G(B)]_{\mathcal{A}}, \quad \phi_{A,B}(\beta) := G(\beta)\sigma_A \quad e \quad \phi^{-1}_{A,B}(\alpha) := \rho_B F(\alpha)$$

*definiscono un'aggiunzione $< F, G >$ tale che $\sigma$ e $\rho$ sono rispettivamente unità e counità.*

**Proposizione 3.1.5.** *Sia $< F, G >$ una coppia di funtori aggiunti, con $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Allora $G$ preserva i limiti di $\mathcal{B}$ e $F$ preserva i colimiti di $\mathcal{A}$.*

**Dimostrazione.** Dimostriamo che $G$ preserva i limiti di $\mathcal{B}$. Sia $L : I \to \mathcal{B}$ un funtore con $I$ categoria piccola, tale per cui $\varprojlim L$ esista in $\mathcal{B}$. Per l'aggiunzione, per un arbitrario oggetto $A \in \mathcal{A}$ abbiamo l'isomorfismo

$$\phi_{A,\varprojlim L} : [F(A), \varprojlim L]_{\mathcal{B}} \cong [A, G(\varprojlim L)]_{\mathcal{A}}.$$

Un morfismo $\alpha : F(A) \to \varprojlim L$ corrisponde ad una famiglia di morfismi $\alpha_i : F(A) \to L(i)$, con $i \in I$, che per naturalità dell'aggiunzione corrisponde ad una famiglia di morfismi $\phi_{A,L(i)}(\alpha_i) : A \to GL(i)$, con $i \in I$. Ciò significa che $G(\varprojlim L)$ soddisfa la proprietà universale che definisce il limite in $\mathcal{A}$ del funtore $\varprojlim GL$, e dunque mostra che $G(\varprojlim L) = \varprojlim GL$. La seconda parte della dimostrazione è duale alla prima. $\square$

Poichè prodotti e nuclei sono particolari limiti, e coprodotti e conuclei sono particolari colimiti otteniamo la seguente proposizione.

**Proposizione 3.1.6.** *Siano $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ due funtori additivi tra categorie abeliane, con $< F, G >$ aggiunzione. Allora $F$ preserva i coprodotti e i conuclei (in particolare è esatto a destra), mentre $G$ preserva prodotti e nuclei (in particolare è esatto a sinistra).*

# 4 Teorema di immersione di Mitchell

## 4.1 Sottocategorie di Giraud

Sia $\mathcal{G}$ una categoria di Grothendieck e $\mathcal{C}$ una sottocategoria piena di $\mathcal{G}$, cioè esiste un funtore inclusione $i : \mathcal{C} \hookrightarrow A$ che è un'immersione pienamente fedele.

**Definizione 4.1.1.** C è chiamata *sottocategoria coriflessiva* di $\mathcal{G}$ se esiste un funtore $l : \mathcal{G} \to \mathcal{C}$ tale che $< l, i >$ sia un'aggiunzione. In questo caso $l$ è chiamato funtore coriflessivo o localizzato.

In questo caso, omettendo $i$, per ogni $A \in \mathcal{G}$ e $C \in \mathcal{C}$ c'è un isomorfismo naturale

$$\phi_{A,C} : [lA, C]_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\simeq} [A, C]_{\mathcal{G}}$$

con unità $\sigma : 1_{\mathcal{G}} \to l$ definita ponendo, per ogni $A \in \mathcal{G}$

$$\sigma_A := \phi_{A,lA}(1_{lA}) : A \to lA.$$

Denotando con $\rho : l \to 1_{\mathcal{C}}$ la counità, dalla proposizione (1 della sottosezione) si ha, per ogni $C \in \mathcal{C}$, i diagrammi commutativi

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\sigma C"] \arrow[dr, "1_C"] \arrow[ddr, "\sigma C"'] & lC \arrow[d, "\rho C"'] \arrow[dd, bend left, "\exists !"] \\
& C \arrow[d, "\sigma C"'] \\
& lC
\end{tikzcd}$$

mostrano che $\rho_C$ è un isomorfismo con l'inverso $\sigma_C$ in modo che

$$lC \cong C \quad \forall C \in \mathcal{C}.$$

Applicando la proposizione (2) a questo caso, vediamo che per ogni $A \in \mathcal{G}$, $C \in \mathcal{C}$ e $f : A \to C$ esiste un unico morfismo $f : lA \to C$ tale che $f = \phi_{A,C}(f') := f'\sigma_A$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[dr, "\forall f"'] & lA \arrow[d, dotted, "\exists ! f"] \\
& C
\end{tikzcd}$$

e la proprietà della trasformazione naturale rappresentata nel diagramma $\sigma : 1_{\mathcal{G}} \to l$ rappresenta il fatto che l è una coriflessione.

**Definizione 4.1.2.** Una categoria abeliana $\mathcal{A}$ ha limiti induttivi arbitrari se e solo se ha arbitrari coprodotti. In questo caso chiameremo $\mathcal{A}$ una categoria *cocompleta*. Dualmente, $\mathcal{A}$ ha arbitrari limiti proiettivi se e solo se ha arbitrari prodotti, e in questo caso $\mathcal{A}$ è detta categoria *completa*.

**Proposizione 4.1.3.** *Sia $\mathcal{G}$ una categoria cocompleta di Grothendieck, e $\mathcal{C}$ una sottocategoria coriflessiva di $\mathcal{G}$. Allora $\mathcal{C}$ è completa e cocompleta, e per ogni funtore $L : I \to \mathcal{C}$ abbiamo un isomorfismo naturale*

$$\varprojlim_{\mathcal{C}} L \cong \varprojlim_{\mathcal{G}} iL \quad e \quad \varinjlim_{\mathcal{C}} \cong l(\varinjlim_{\mathcal{G}} iL)$$

**Definizione 4.1.4.** Sia $\mathcal{G}$ una categoria di Grothendieck, e $\mathcal{C}$ una sottocategoria piena di $\mathcal{G}$. Allora $\mathcal{C}$ è chiamata una sottocategoria di *Giraud* di $\mathcal{G}$ se $\mathcal{C}$ è una sottocategoria coriflessiva di $\mathcal{G}$ e il funtore localizzato l è esatto (a sinistra).

**Proposizione 4.1.5.** *Sia $\mathcal{C}$ una sottocategoria di Giraud di $\mathcal{G}$. Un oggetto $E$ di $\mathcal{C}$ è iniettivo in $\mathcal{C}$ se e solo se $E$ è un oggetto iniettivo in $\mathcal{G}$.*

**Dimostrazione.** Il funtore inclusione $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{G}$ è esatto a sinistra, da cui si ottiene che monomorfismi in $\mathcal{C}$ sono monomorfismi anche in $\mathcal{G}$. Ciò basta per dimostrare che ogni oggetto di $\mathcal{C}$ che è iniettivo in $\mathcal{G}$ è iniettivo anche in $\mathcal{C}$.

Viceversa, sia $E \in Ob\mathcal{C}$ iniettivo e proviamo che $E$ è iniettivo in $\mathcal{G}$. Sia $\alpha : A \hookrightarrow A'$ un monomorfismo in $\mathcal{G}$ e sia $f \in [A, E]_{\mathcal{G}}$. Abbiamo il seguente diagramma commutativo in $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, hook, "\alpha"] \arrow[dr, "\sigma_A"] \arrow[dd, "f"'] & & A' \arrow[dr, "\sigma_{A'}"] & \\
& lA \arrow[rr, hook, "l(\alpha)"] \arrow[dl, "\exists! f'"] & & lA' \arrow[dlll, "\exists f"", near start] \\
E & & &
\end{tikzcd}$$

ove l($\alpha$) è un monomorfismo dal fatto che $\alpha$ è un monomorfismo e $l$ è esatto. Essendo $E$ iniettivo in $\mathcal{C}$ esiste un morfismo $f$" che rende il triangolo inferiore del grafo commutativo. Inoltre $(f'\sigma_{A'})\alpha = f$ e questo prova che $E$ è iniettivo in $\mathcal{G}$.

□

## 4.2 Teorema

**Teorema 4.2.1.** ***Teorema di Mitchell**: Sia $\mathcal{C}$ una categoria abeliana cocompleta con un generatore proiettivo $U$, e sia $R = EndU$. Il funtore additivo*

$$[U, -] : \mathcal{C} \to Mod - R$$

*è un'immersione esatta. Inoltre essa è "piena quando ristretta ad oggetti finitamente generati", cioè se $A$ e $B$ sono U-finitamente generati allora $[U, -]$ induce un isomorfismo di gruppi $[A, B] \cong [[U, A], [U, B]]$.*

*Infine se $\mathcal{C}$ è una cateogoria di Grothendieck, allora $[U, -]$ è un'immersione piena.*

**Definizione 4.2.2.** Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana piccola, e sia $\mathcal{G} = \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ la categoria di Grothendieck completa dei funtori additivi da $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}b$.

Denotiamo con:

- $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ la sottocategoria piena di $\mathcal{G}$ costituita dai *monofuntori* (= funtori additivi che preservano i monomorfismi);
- $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ la sottocategoria piena di $\mathcal{G}$ costituita dai *funtori esatti a sinistra* (= funtori additivi che preservano i nuclei).

Cosicchè $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b) \leq \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b) \leq \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ è catena di sottocategorie piene.

**Lemma 4.2.3.** *Per ogni categoria abeliana piccola $\mathcal{A}$ la categoria $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ dei funtori esatti a sinistra è una sottocategoria di Giraud di* $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$*.*

**Proposizione 4.2.4.** *La posizione $A \mapsto [A, -]$ induce una immersione contravariante pienamente fedele ed esatta di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$.*

**Dimostrazione.** Dal lemma 3.0.2 discende che l'immersione contravariante $A \mapsto [A, -]$ è pienamente fedele di $\mathcal{A}$ in $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$, e quindi di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$. Resta da dimostrare perciò il fatto che aver ristretto tale funtore alla sottocategoria di Giraud $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ lo rende anche esatto a destra. Sia dunque

$$0 \to A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A" \to 0$$

una successione breve in $\mathcal{A}$. Vogliamo dimostrare che l'associata successione

$$0 \to [A", -] \xrightarrow{[\beta,-]} [A, -] \xrightarrow{[\alpha,-]} [A', -] \to 0$$

è esatta in $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$. Perciò osserviamo innanzitutto, che la successione $0 \to [A", -] \xrightarrow{[\beta,-]} [A, -] \xrightarrow{[\alpha,-]} [A', -] \to 0$ è a termini in $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ ed esatta in $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$, e quindi esatta anche in $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$, poichè la composizione del funtore di localizzazione con l'inclusione è esatta a sinistra.

Resta da dimostrare che la trasformazione naturale $[\alpha, -]$ è epimorfismo in $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$. Sia $C$ un cogeneratore iniettivo di $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$, e dimostriamo equivalentemente che il morfismo

$$Nat([\alpha, -], C) : Nat([A', -], C) \to Nat([A, -], C)$$

è un morfismo in $\mathcal{A}b$. Per il lemma di Yoneda abbiamo il diagramma commutativo in $\mathcal{A}b$

$$\begin{tikzcd} Nat([\alpha, -], C) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & Nat([A, -], C) \arrow[d, "\cong"] \\ C(A') \arrow[r, "C(\alpha)"] & C(A) \end{tikzcd}$$

che ci consente di concludere, dato che $C(\alpha)$ è un monomorfismo, essendo $\alpha$ un monomorfismo in $\mathcal{A}$ e $C \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ un funtore esatto a sinistra. $\square$

**Teorema 4.2.5.** ***(Teorema di immersione in moduli)***
*Ogni categoria abeliana piccola $\mathcal{A}$ ammette una immersione pienamente fedele ed esatta in $Mod - R$, per un opportuno anello $R$.*

**Dimostrazione.** Per la proposizione precedente vi è una immersione pienamente fedele ed esatta

$$\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)^{Op}.$$

La categoria $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)^{Op}$ è, in quanto duale di una categoria di Grothendieck completa, una categoria abeliana cocompleta con un generatore proiettivo $P$. Poichè $\mathcal{A}$, e dunque anche la sua immagine $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)^{Op}$, è una categoria piccola, esiste un generatore proiettivo $U = P^{\alpha}$, con $\alpha$ cardinale opportuno, tale che ogni oggetto nell'immagine di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)^{Op}$ sia finitamente $U$-generato. Dal teorema di Mitchell otteniamo quindi che, detto $R = End\, U$, il funtore

$$[U, -] : \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)^{Op} \hookrightarrow Mod - R$$

è una immersione esatta, la quale è anche piena tra gli oggetti finitamente $U$-generati di $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)^{Op}$, quindi in particolare tra gli oggetti immagine di oggetti di $\mathcal{A}$. Infine, la composizione delle due immersioni

$$\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)^{Op} \hookrightarrow Mod - R$$

fornisce l'immersione pienamente fedele ed esatta cercata. $\square$

**Teorema 4.2.6.** ***(Metateorema)****: Sia $\mathcal{A}$ una qualsiasi categoria abeliana. Se un teorema è della forma "p implica q", ove p è un'affermazione categoriale riguardante un diagramma in $\mathcal{A}$ su uno schema finito $\Sigma$ e q afferma che esistono un numero finito di morfismi aggiuntivi tra gli oggetti sopra i vertici disegnati sul diagramma in modo da fare qualche affermazione categorica vera sul diagramma esteso, e se il teorema è vero quando $\mathcal{A} = \mathcal{G}^{\mathbf{R}}$ per ogni anello $\mathbf{R}$, allora il teorema vale per qualsiasi categoria abeliana $\mathcal{A}$.*

## References


[1] R. Colpi, *Teoria delle categorie e applicazioni*, Scuola Galileiana di Studi Superiori - a.a. 2013/2014.

[2] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math.J.(2)9(1957),119-221.

[3] B. Mitchell, *Theory of categories*, Pure and Applied Mathematics Vol XVII Accademic Press, New York-London (1965).

[4] A. Orsatti, *Una introduzione alla teoria dei moduli*, Edizione Aracne, Roma (1995).