

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI INDUSTRIALI

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA

DELL'INNOVAZIONE DEL PRODOTTO

TESI DI LAUREA

MECCANICA DELL'INTAGLIO:

CONFRONTO TRA CRITERI DI FRATTURA IN MODO I E MODO MISTO

RELATORE: PROF. Paolo Lazzarin

LAUREANDO: Luca Marena

Matricola n. 1035670

ANNO ACCADEMICO 2012-2013

INDICE

INTRODUZIONE	1
1. Meccanica della frattura	3
1.1 Stato tensionale nell'intorno del difetto	3
1.2 Il fattore di intensificazione delle tensioni K_I	7
1.3 I modi.....	8
1.4 Tenacità a frattura K_c	9
1.5 Estensione della zona plastica – raggio plastico	10
1.6 Determinazione di K_c tramite prova di frattura.....	12
1.7 Prove di tenacità alla frattura.....	13
1.7.1 Tipi e proporzioni dei provini	13
1.7.2 Appoggi e afferraggi.....	15
1.7.3 Dimensioni dei provini	15
1.7.4 Formazione della cricca di fatica.....	15
1.7.5 Strumentazione	16
1.7.6 Interpretazione della prova.....	17
1.7.7 Calcolo di K_{Ic}	18
2. Teoria di Griffith: Crack theory	19
2.1 Approccio energetico	19
2.2 Relazioni tra energia di frattura e approccio basato sui campi di tensione.....	24

3. Teoria di D. Leguillon applicata a puro modo I	27
3.1 Resistenza o tenacità? Criterio per la nucleazione di una cricca all'apice di un intaglio	27
3.1.1 Criterio energetico	27
3.1.2 Criterio basato sulla resistenza	28
3.2 Iniziazione di una cricca all'apice di un intaglio.....	29
3.3 Lunghezza di iniziazione della cricca	31
3.4 Criterio per prevedere la nucleazione della cricca	33
3.5 Espressioni asintotiche accoppiate per la soluzione del problema singolare	35
3.6 Calcolo del fattore $K(\omega, \theta_0)$	37
3.7 Metodo numerico per il calcolo di K	38
3.8 Espressione finale del criterio	39
4. Metodo SED applicato a modo I puro	43
4.1 Teoria e ipotesi iniziali	43
4.2 Espressione finale del metodo	47
5. Confronto tra i due criteri in modo I puro	49
5.1 Sintesi delle espressioni finali dei due metodi	49
5.2 Confronto analitico.....	51
5.3 Confronto numerico	53
5.3.1 Calcolo del coefficiente di Leguillon	53
5.3.2 Calcolo del primo termine dell'espressione del SED.....	56
5.3.3 Confronto diretto tra i parametri	58
5.4 Confronto con i dati sperimentali	60

5.4.1	Analisi FEM per il calcolo degli N-SIF critici partendo dai dati sperimentali	60
5.4.2	Gomez and Elices	69
5.4.3	Carpinteri	73
5.4.4	Seweryn	75
6.	Teoria di D. Leguillon applicata a modo misto I+II	79
6.1	Introduzione.....	79
6.2	Estensione della teoria da modo I a modo misto.....	80
7.	Metodo SED applicato a modo misto I+II	89
7.1	Teoria.....	89
8.	Confronto tra i due criteri in modo misto I+II.....	93
8.1	Sintesi dei due criteri.....	93
8.1.1	SED.....	93
8.1.2	Leguillon.....	94
8.2	Confronto analitico.....	95
8.3	Confronto con i dati sperimentali.....	97
8.3.1	Analisi FEM per il calcolo degli N-SIF critici partendo dai dati sperimentali	97
8.3.2	Gòmez, Elices, Berto and Lazzarin (2009)	98
8.3.3	V-Notch brasilian disc	109
9.	Conclusioni.....	119
	Bibliografia.....	123

INTRODUZIONE

In questa trattazione verrà presentato in modo dettagliato il criterio di Leguillon che si propone di prevedere la resistenza statica di componenti intagliati per materiali che presentano un comportamento a rottura fragile (il materiale durante una prova di trazione dimostra un comportamento lineare elastico fino a rottura). Il metodo è stato formulato per la previsione di intagli con spigolo vivo (sharp-V-notches, raggio di raccordo all'apice pari a zero) sottoposti a due tipi di sollecitazioni, puro modo I (opening mode) e modo misto I+II (mixed mode).

Una volta presentato tale metodo verrà confrontato con il criterio del SED (Strain Energy Density), in un primo momento verranno confrontate le ipotesi di partenza e le espressioni finali ottenute, mentre in un secondo momento verranno confrontati i risultati ottenibili con i risultati sperimentali presenti in letteratura.

1. Meccanica della frattura

Spesso gli elementi strutturali sono soggetti a rotture improvvise per sollecitazioni statiche inferiori alla tensione di rottura del materiale senza che si verifichino deformazioni macroscopiche apprezzabili.

In molti casi la rottura inizia da una discontinuità (o difetto) del materiale, anche di piccole dimensioni, avente raggio di curvatura nullo alle estremità (frattura, cricca) che, in certe condizioni, si propaga a velocità elevata. Difetti iniziali possono essere: microporosità, inclusioni di sostanze estranee, profondi graffi superficiali, delaminazioni in materiali a strati.

I fattori da cui dipende il fenomeno sono: la dimensione del difetto, lo stato tensionale, le caratteristiche del materiale, la geometria dell'elemento nelle vicinanze del difetto e la temperatura.

La propagazione dei difetti con raggio di raccordo nullo è oggetto di studio della *meccanica della frattura lineare elastica* (LEFM, Linear Elastic Fracture Mechanics), che si basa sull'idealizzazione del materiale considerato come continuo, studiato mediante la teoria dell'elasticità lineare. Inoltre il problema viene studiato da un punto di vista macroscopico.

1.1 Stato tensionale nell'intorno del difetto

Il valore teorico della tensione ottenibile con la teoria dell'elasticità all'estremità di una discontinuità con raggio di raccordo nullo può essere derivata da quelle agente in corrispondenza di un foro ellittico. Si consideri la lastra indefinita caricata in uniformemente in fig. 1.1.

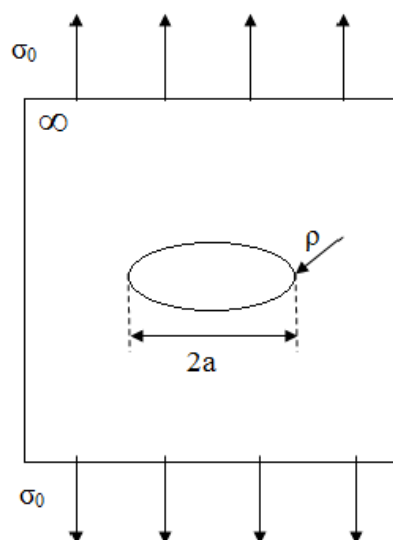


Figura 1.1 – Piastra infinita con intaglio ellittico soggetta a trazione uniforme a monte e a valle dell'intaglio.

Il fattore di concentrazione delle tensioni è dato dall'equazione (1.1), trattazione di Inglis^[1], dove:

- σ_{max} rappresenta la tensione massima all'apice dell'intaglio;
- σ_0 rappresenta la tensione costante applicata a monte e a valle dell'intaglio;
- a rappresenta la lunghezza dell'intaglio;
- ρ rappresenta il raggio di raccordo all'apice dell'intaglio.

$$k_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (1.1)$$

Per determinare la tensione all'estremità di una cricca trasversale è sufficiente fare tendere ρ a 0: si osserva che k_t tende all'infinito. In teoria questo fenomeno dovrebbe provocare la propagazione immediata a causa della progressiva rottura delle zone dove $\sigma > \sigma_r$. Tuttavia nei materiali reali il valore di tensione infinito non può essere raggiunto e sperimentale si osserva che essi possono resistere alla presenza di un difetto purchè la tensione σ_0 si mantenga sufficientemente bassa.

- Nei materiali duttili la zona sottoposta a tensioni più elevate subisce lo snervamento e le tensioni si mantengono a valori prossimi a σ_{sn} (tensione di snervamento del materiale); si verifica una redistribuzione delle tensioni in base alla quale, nelle zone limitrofe alla cricca, queste ultime risultano maggiori rispetto ai valori teorici, fig. 1.2;
- Nei materiali fragili si può creare una zona con alta densità di piccole fratture nelle vicinanze del difetto.

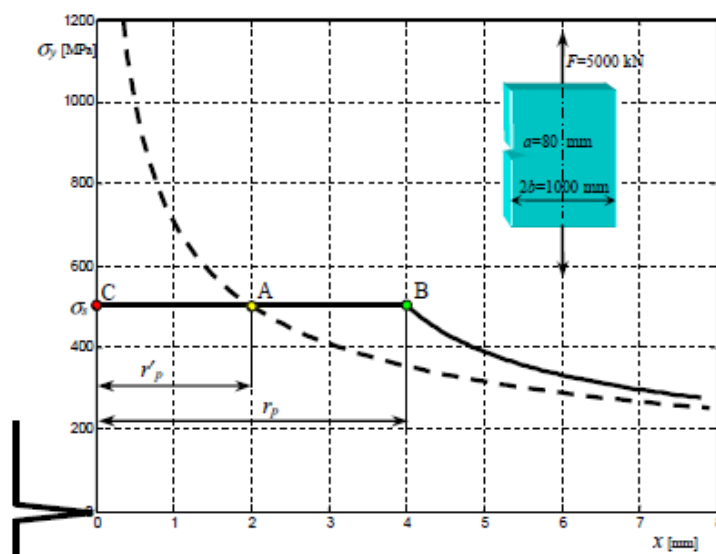


Figura 1.2– Tensioni teoriche (linea tratteggiata) e reali all'apice della frattura. r_p è l'estensione della zona plasticizzata.

In qualsiasi caso una relazione di verifica del tipo $k_t \cdot \sigma \leq \sigma_{lim}$ non può essere utilizzata, proprio perchè la tensione massima calcolata teoricamente è priva di significato. In particolare perde di significato il fattore di concentrazione delle tensioni k_t .

L'andamento delle tensioni cartesiane in prossimità dell'apice di una frattura è espresso dalle relazioni di Irwin^[2] (equazioni (1.2)), basate sulla teoria lineare elastica e scritte in coordinate polari secondo lo schema in fig. 1.3:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{cases} 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (1.3)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \text{ oppure}$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (1.4)$$

in caso di, rispettivamente, tensione piana e deformazione piana

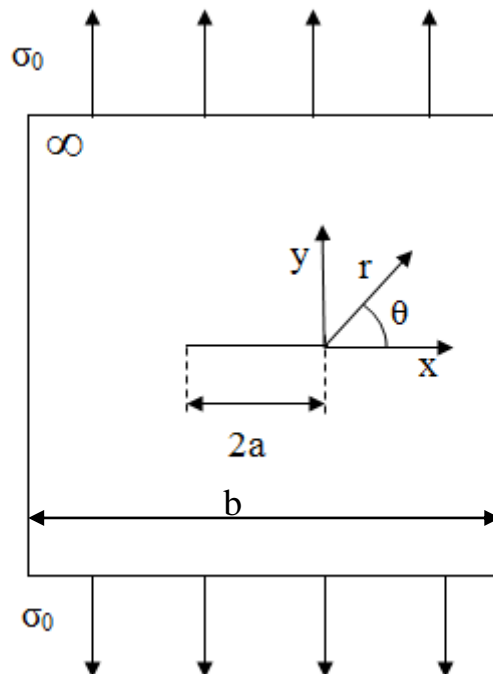


Figura 1.3 – Sistema di coordinate cartesiane e polari centrate sull'apice del difetto

Nelle quali K_I è il *fattore di intensificazione delle tensioni*, un valore costante (in una piccola porzione di materiale circa $a/10$) dipendente dalla geometria componente/difetto e dall'entità dello stato tensionale in assenza della frattura.

Nel caso di lastra sottile il materiale all'apice, soggetto ad ampie deformazioni è libero di contrarsi per effetto Poisson; in questo caso si ha uno stato di tensione piano con $\varepsilon_{zz} \neq 0$. Nel caso di lastra spessa, il materiale nelle vicinanze dell'apice, soggetto a tensioni più basse rispetto a quello in prossimità dell'apice stesso, si oppone alla contrazione di quest'ultimo e tende a generare uno stato di deformazione piano con $\varepsilon_{zz} = 0$.

Le relazioni (1.2) possono essere poste nella seguente forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (1.5)$$

Si noti che anche in queste equazioni se r tende a 0 le tensioni tendono all'infinito. Lungo la direzione orizzontale per $\theta = 0$ (l'asse x) le equazioni diventano:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \text{ oppure}$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (1.7)$$

Secondo queste espressioni la tensione normale tenderebbe a 0 per r tendente all'infinito, cosa non vera perchè essa dovrebbe tendere a σ_0 ; in pratica queste relazioni provengono da una serie di Taylor troncata i cui termini omissi devono essere particolarizzati a seconda dello stato tensionale effettivamente agente. Tali termini sono trascurabili in vicinanza dell'apice della frattura in quanto l'effetto prevalente sullo stato tensionale è quello della singolarità, le equazioni appena descritte (1.2 – 1.7) sono valide per $r/a \ll 1$, in particolare $r < a/10$.

1.2 Il fattore di intensificazione delle tensioni K_I

È importante notare che le tensioni espresse dalle equazioni (1.2 – 1.7) sono tutte proporzionali al fattore di intensificazione delle tensioni, mentre i termini rimanenti descrivono solo la variazione rispetto a r e θ . Si osserva che:

- l'andamento delle tensioni in prossimità di un difetto è indipendente dallo stato tensionale agente e dalla geometria dell'insieme componente-difetto;
- l'entità delle tensioni dipende ed è caratterizzata dal solo K_I .

K_I rappresenta il vero indice dell'intensità della tensione nell'intorno del difetto. Esso dipende:

- dallo stato tensionale che sarebbe presente nell'intorno del difetto in assenza del medesimo;
- dalla geometria dell'insieme elemento-difetto: geometria dell'elemento, posizione e orientazione del difetto;
- dalle dimensioni del difetto.

Si vedrà nel seguito che la verifica di un componente a frattura si effettua confrontando il valore di K_I , che caratterizza il campo tensionale, con il corrispondente valore critico relativo al materiale, a differenza del caso classico nel quale si confronta la tensione agente nel punto più sollecitato con la tensione ammissibile del materiale.

Nel caso il difetto abbia semi-ampiezza “ a ” molto piccola rispetto alla dimensione trasversale “ b ” della piastra in cui è presente e in posizione centrale, con tensione applicata a monte e a valle del difetto, il fattore K_I ^[3] può essere dalla seguente relazione:

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (1.8)$$

L'espressione generale del fattore di intensificazione delle tensioni in presenza di una cricca rimane valida anche in presenza di geometrie differenti e per stati tensionali non uniformi, ma rispetto all'espressione (1.8) viene aggiunto un termine ulteriore per tener conto di queste differenze:

$$K_I = \alpha \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (1.9)$$

Nella quale compare il fattore “ α ” un fattore adimensionale che dipende dal rapporto geometrico tra dimensione del difetto e dimensione della piastra e dipende anche dalla posizione del difetto

all'interno della piastra. In generale a parità di altre condizioni questo parametro aumenta con l'aumentare della dimensione del difetto.

Valori di K_I per vari casi pratici possono essere ottenuti mediante la teoria dell'elasticità, metodi numerici e metodi sperimentali. Nella pratica sono disponibili diagrammi e formule empiriche del parametro α al variare della dimensione della frattura per varie geometrie dell'elemento, tipo di sollecitazione e posizione della frattura, così come accade per il fattore di concentrazione delle tensioni k_t .

La tensione σ_0 nella definizione di K_I data nelle espressioni (1.8 – 1.9), è identificabile in modo univoco solo in alcuni casi come quello di piastre soggette a trazione uniforme a monte e a valle della frattura. In questo caso σ_0 coincide con la tensione che si avrebbe nell'elemento integro in corrispondenza del difetto. In presenza di stati tensionali non uniformi l'utilizzazione della tensione all'apice del difetto per il calcolo di K_I non è pratica, in quanto essa dovrebbe essere calcolata per ogni valore della semi-ampiezza della frattura a . Poichè il valore di α varia comunque al variare di a , risulta più semplice utilizzare come σ_0 il valore della tensione in un punto di riferimento caratteristico dello stato tensionale in assenza di difetto (es. il valore della tensione massima negli elementi soggetti a flessione, la pressione interna o la tensione circonferenziale al bordo interno nel caso di cilindri in pressione, ecc...) e il valore di α opportuno. I diagrammi e le formule di α fanno quindi riferimento al valore della tensione σ_0 in un punto specificato che, in generale, non è quello all'apice della frattura.

In molti casi viene fornito direttamente un valore numerico in funzione della posizione e della dimensione della frattura che deve essere moltiplicato per la tensione σ_0 agente nel punto del campo tensionale specificato.

1.3 I modi

Quanto fin qui riportato vale per carico normale al difetto cui corrisponde il cosiddetto modo I (primo o uno) di propagazione del difetto, cioè la frattura propaga dall'apice del difetto verso l'interno del materiale lungo la bisettrice del difetto stesso.

Esistono altre due situazioni di carico che provocano differenti modi di propagazione.

Il modo II dove un'azione tagliante tende a far scorrere l'una sull'altra le due facce della cricca sempre in direzione della sua bisettrice. Per ultimo il modo III dove un'azione torcente fa ruotare l'uno sull'altro i fianchi della cricca facendoli uscire dal piano della piastra stessa.

Per quanto riguarda la gravità dei tre modi possiamo certamente affermare che il modo I rappresenta il tipo di sollecitazione più critico poi in successione modo III e modo II.

In fig. 1.4 vengono rappresentati i tre tipi di sollecitazione.

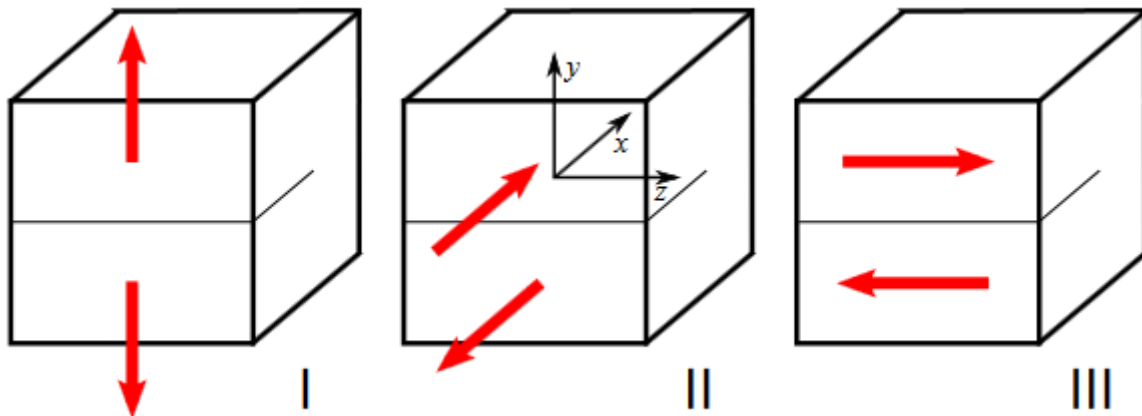


Figura 1.4 – Rappresentazione dei tre modi.

1.4 Tenacità a frattura K_c

Come già detto K_I è l'unico indice dell'intensità della della tensione nell'intorno del difetto per cui la verifica di resistenza viene effettuata mediante esso. In particolare si il seguente K_I critico:

- K_c : tenacità a frattura o valore critico del fattore di intensificazione delle tensioni o K critico.

K_c è una proprietà del materiale ottenibile sperimentalmente, indice della combinazione sforzo-difetto che provoca la propagazione instabile di quest'ultimo, cioè la frattura dell'elemento. Esso è riferito al Modo. Purtroppo questo valore non è indipendente dalla geometria del provino con cui viene ricavato, infatti esso dipende dalla dimensione dello spessore di tale provino. Fortunatamente questa dipendenza di annulla al raggiungimento di un determinato spessore del provino, cioè quando lo spessore del provino è sufficientemente grande da generare nell'intorno del difetto di uno stato piano di deformazione. Quando viene raggiunto tale stato tensionale il valore del K_c raggiunge un valore minimo costante, chiamato K_{Ic} .

La condizione di propagazione del difetto, con conseguente rottura di schianto del componente, si ha quando $K_I \geq K_c$ o K_{Ic} . Lo stato di deformazione piano risulta più pericoloso in quanto la zona limitrofa a quella plasticizzata è soggetta ad una tensione σ_{zz} negativa che da luogo ad uno stato tensionale più severo che rende più facile la propagazione dello snervamento. In conseguenza di ciò

si verifica che $K_{c,def. piana} < K_{c,ten. piana}$. Naturalmente un elemento è verificato a frattura sotto sollecitazione statica se $K_I < K_c$ o K_{Ic} .

Questo tipo di verifica è definito criterio di campo, in quanto viene confrontata una grandezza caratteristica dell'intero campo tensionale con il suo valore critico, a differenza dei criteri di punto, basati sull'utilizzazione del valore nel punto più sollecitato.

Imponendo l'uguaglianza tra il valore di K_I e K_c e utilizzando l'eq. (1.9) è possibile ottenere, per data lunghezza della cricca, il valore critico della tensione σ_c , viceversa, la lunghezza critica del difetto per la tensione assegnata.

$$\sigma_c = \frac{K_c}{\beta\sqrt{\pi a}} \quad (1.10)$$

$$a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_c}{\beta_c \sigma_0} \right)^2 \quad (1.11)$$

Da notare che il valore di β_c nella (1.11) dipende da a_c per cui il risultato esatto può essere ottenuto in modo iterativo.

1.5 Estensione della zona plastica – raggio plastico

L'estensione della zona plasticizzata lungo l'asse x , pari ad r_p , può essere stimata determinando, in primo luogo, la distanza dall'apice della frattura alla quale la tensione equivalente teorica, ottenuta con il criterio di Tresca o di von Mises, raggiunge il valore di snervamento. Lungo l'asse x le tensioni σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} , date rispettivamente dalle eq. (1.6 – 1.7), risultano principali e la tensione equivalente di Tresca nei due casi di tensione e deformazione piana è data, rispettivamente da:

$$\sigma_e = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (1.12)$$

$$\sigma_e = \sigma_{xx} - \sigma_{zz} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} (1 - 2\nu) \quad (1.13)$$

Imponendo l'uguaglianza tra $\sigma_{sn}e\sigma_e$ ed esplicitando rispetto ad r si ottiene:

$$r'_p = \left[\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}\sigma_{sn}} \right]^2 \quad (1.14)$$

$$r'_p = \left[\frac{K_I(1-2\nu)}{\sqrt{2\pi}\sigma_{sn}} \right]^2 \quad (1.15)$$

Il valore ottenuto, mostrato in fig. 1.2 relativamente al primo caso, non è pari all'estensione della zona plasticizzata, che risulta essere maggiore. Infatti, considerando lo spessore costante, la differenza tra la σ_{yy} teorica (eq. (1.6)) e la tensione di snervamento dà luogo ad una forza ad unità di spessore data dalla seguente espressione:

$$\Delta F = \int_0^{r'_p} \sigma_y dr - \sigma_s r'_p \quad (1.16)$$

Tale forza viene equilibrata da un incremento di tensione nelle zone limitrofe alla posizione r'_p che rende più ampia la zona soggetta allo snervamento. Una valutazione approssimata può essere effettuata uguagliando la forza ad unità di spessore agente in tutta la zona plasticizzata in direzione y , pari al prodotto $\sigma_s r'_p$, alla forza che sarebbe stata esercitata dalla tensione teorica σ_{yy} (eq. (1.6)) agente dall'apice della frattura sino a una distanza r'_p

$$\sigma_s r'_p \approx \int_0^{r'_p} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr \quad (1.17)$$

Introducendo al posto di r'_p nell'estremo superiore di integrazione della eq. (1.17) le espressioni (1.14 e 1.15), si ottengono due espressioni valide rispettivamente per i casi di stato piano di tensione e stato piano di deformazione. Tali due espressioni possono essere sintetizzate con:

$$r_p = \frac{K_I^2}{\alpha\pi\sigma_s^2} \quad (1.18)$$

Con $\alpha = 1$ e $\alpha = 3$, rispettivamente per i due casi citati. In fig. 1.2 è rappresentato solo il primo caso. Dalla eq. (1.18) risulta evidente che, a parità di tensioni, la zona plasticizzata risulta più estesa nel caso di stato piano di tensione (lastra sottile), e questo nonostante il fatto che lo stato di deformazione piano risulti comunque più pericoloso.

1.6 Determinazione di K_c tramite prova di frattura

Il valore di K_c si determina portando a rottura un provino di spessore t con difetto pre-esistente. Effettuando la prova si ottengono:

- P_c che rappresenta il carico che provoca la rottura del provino;
- $\sigma_c = P_c/A_c$ che rappresenta la tensione nominale che provoca la rottura;
- $K_c = \sigma_c (a\pi)^{1/2}$ che rappresenta il fattore critico di intensificazione delle tensioni (ponendo il fattore adimensionale $\alpha = 1$ in quanto la cricca è centrale e di piccole dimensioni rispetto alla larghezza della piastra).

Effettuando la prova per spessori della lastra crescenti si vede che il K_c si abbassa, come mostrato in fig. 1.5. Come visto precedentemente, in questo caso nel provino si tende ad uno stato di deformazione piana con $\sigma_{zz} > 0$ quanto più lo spessore del provino aumenta, che al confine della zona plasticizzata risulta essere più oneroso. Come K critico si assume il K_{Ic} per t tendente all'infinito.

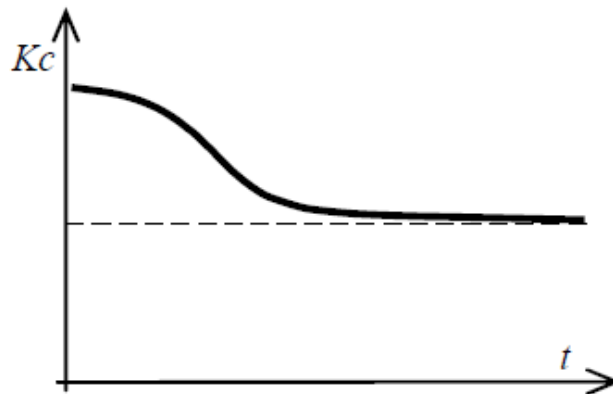


Figura 1.5 – Andamento qualitativo di K_c in funzione dello spessore t del provino.

Lo spessore minimo dei provini, affinché la prova avvenga in stato piano di deformazione, deve verificare la seguente disuguaglianza derivante da un best fitting di dati sperimentali:

$$t \geq 2.5 \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{sn}} \right)^2 \quad (1.19)$$

Le dimensioni e la geometria del provino, le modalità di esecuzione della prova e la valutazione dei risultati sono descritte da normative italiane e internazionali, che sono state poste per uniformare e determinare univocamente il valore esatto del K critico del materiale.

1.7 Prove di tenacità alla frattura

1.7.1 Tipi e proporzioni dei provini

Visto che i risultati della prova sono poco influenzati dalla forma del provino, le norme raccomandano due tipi di provino, molto diversi tra loro:

1. provini a flessione (a tre e quattro punti);
2. provini C. T. (compact tension)

Entrambi i tipi sono caratterizzati da un intaglio molto acuto, che funge da innesco per un'acricca di fatica, che viene fatta crescere in condizioni controllate di carico. Quando la lunghezza della cricca è quella desiderata il provino può essere sottoposto alla prova.

I provini a flessione fig. 1.6 sono grossolanamente simili ai provini per prova di resilienza; ma hanno due caratteristiche geometriche che li rendono inconfondibili: innanzitutto la presenza dell'intaglio acuto (mentre nei provini di resilienza è arrotondato) e soprattutto la presenza della cricca di fatica la cui profondità, rispetto alla faccia intagliata del provino, è indicata con a .

I provini C. T. fig. 1.7 hanno forma di parallelepipedo. Richiede meno materiale del provino di flessione, ma è più costoso per la necessità di lavorare i fori con precisione.

In fig. 1.8 vengono mostrati i particolari dei due intagli dei provini appena elencati.

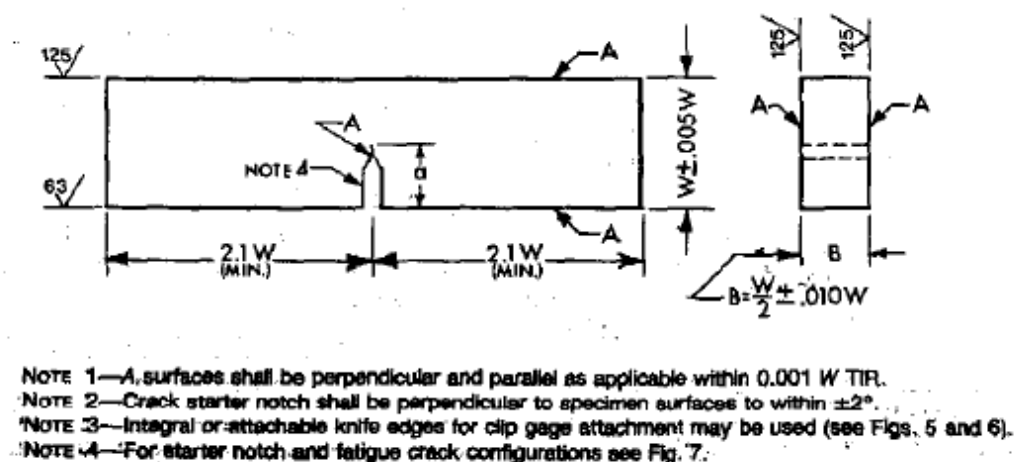
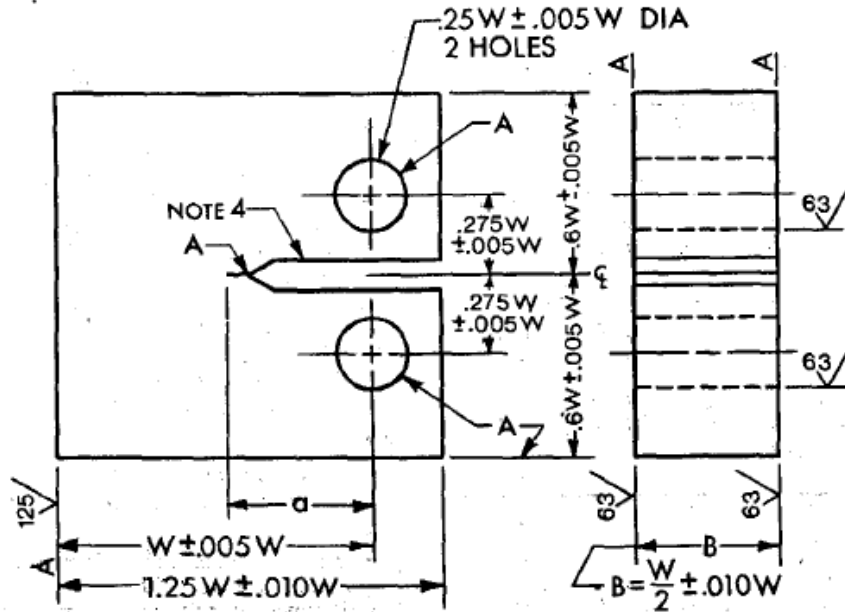
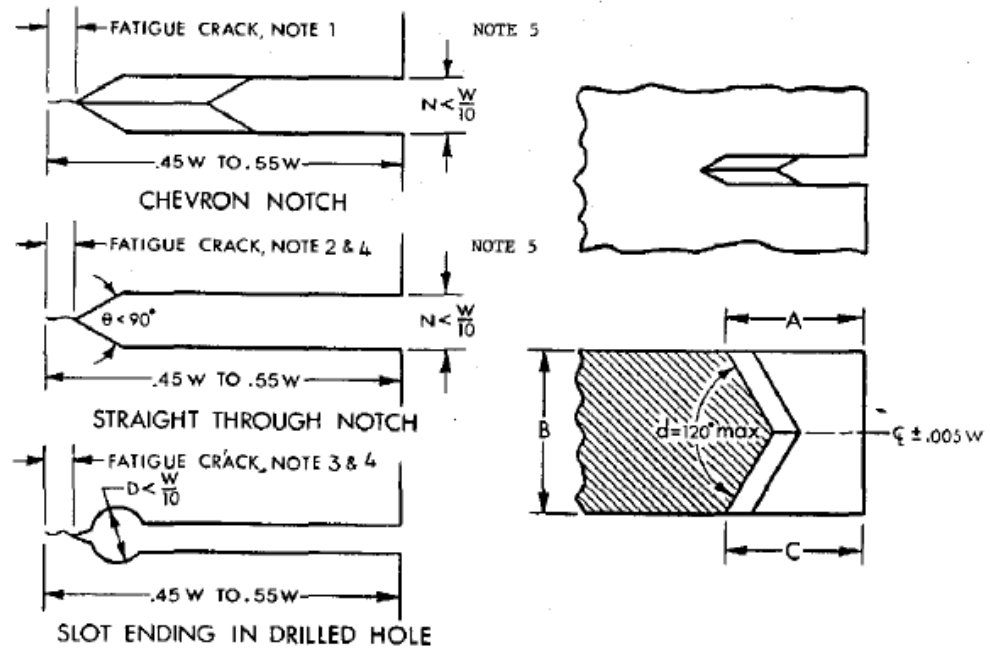


Figura 1.6 – Provino a flessione (tre o quattro punti).



- NOTE 1—A surfaces shall be perpendicular and parallel as applicable to within 0.002 W TIR.
 NOTE 2—The intersection of the crack starter notch tips with the two specimen surfaces shall be equally distant from the top and bottom edges of the specimen within 0.005 W.
 NOTE 3—Integral or attachable knife edges for clip gage attachment to the crack mouth may be used (see Fig. 5 and 6).
 NOTE 4—For starter notch and fatigue crack configuration see Fig. 7.

Figura 1.7 – Provino C.T.



(a) Starter Notches and Fatigue Cracks

- NOTE 1—For a chevron crack starter notch the fatigue crack shall emerge on both surfaces of the specimen.
 NOTE 2—Fatigue crack extension on each surface of the specimen containing a straight-through notch shall be at least 0.025 W or 0.050 in. (1.3 mm), whichever is larger.
 NOTE 3—Fatigue crack extension on each surface of the specimen from the stress raiser tipping the hole shall be at least 0.5 D or 0.050 in. (1.3 mm), whichever is larger.
 NOTE 4—Crack starter notch shall be perpendicular to the specimen surfaces and to the intended direction of crack propagation within ±2°.
 NOTE 5—Notch width N need not be less than 1/16 in. (1.6 mm).

(b) Detail of Chevron Notch

- NOTE 1—A = C within 0.010 W
 NOTE 2—Cutter tip angle 90° max
 NOTE 3—Radius at chevron notch bottom 0.010 in. (0.25 mm) max

Figura 1.8 – Particolari dell'intaglio nei provini di flessione e C.T.

1.7.2 Appoggi e afferraggi

Per ridurre al minimo l'attrito, le prove di flessione sono eseguite usando come appoggi rulli con o senza assi fissi. I diametri dei rulli e del punzone centrale dovrebbero essere compresi tra $W/2$ e W . Per le prove a trazione si usa un afferraggio a forcella chiudibile con un perno passante. Tra perno e fori occorre accoppiamento libero preciso.

1.7.3 Dimensioni dei provini

Il risultato della prova di K_{Ic} è considerato valido solo se la zona plastica all'apice della cricca è molto piccola e se le condizioni sono prossime a quelle di deformazione piana. La mancanza di tale

condizione è denunciata dalla configurazione obliqua delle superfici di frattura; se però queste si presentano ben piane e perpendicolari al carico, non è detto che la condizione di deformazione piana sia soddisfatta.

Vari autori hanno cercato una condizione sufficiente per la validità della prova. I risultati di queste ricerche sono stati condensati nelle prescrizioni delle norme ASTM E399 e BS 5447. Entrambe prescrivono che la lunghezza della cricca deve essere:

$$a \geq 2.5 \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{sn}} \right)^2 \quad (1.20)$$

Affinchè vicino al vertice della cricca lo stato tensionale sia sufficientemente prossimo a quello che si avrebbe in un materiale a comportamento lineare elastico. D'altronde sono sconsigliati valori a/W maggiori di 0.55, perchè oltre questo valore piccoli errori nella misura di a si traducono in forti errori di K_{Ic} . Il combinato disposto di queste due prescrizioni equivale a fissare un valore minimo di W .

1.7.4 Formazione della cricca di fatica

La formazione della cricca di fatica, fase essenziale nella preparazione del provino, deve seguire una ben precisa metodologia, per evitare che vi siano tensioni residue o plasticizzazioni all'apice della cricca:

1. la lunghezza della cricca per fatica non deve essere minore di 1.25 mm fermo restando il valore di a/W ;
2. la cricca deve essere piana, parallela al piano dell'intaglio e deve avere fronte rettilineo e parallelo al piano dell'intaglio (sono ammesse deviazioni non superiori a 5°). Purtroppo questa condizione può essere accertata solo dopo la rottura del provino.
3. il valore di ΔK durante la propagazione non deve essere minore di $0.9 K_{max}$. Ciò significa che la sollecitazione di fatica deve essere molto vicina alla condizione 'dallo zero' o addirittura alternata.
4. il valore di K_{max} durante il primo stadio della propagazione della cricca può porsi uguale a $0.75 K_{Ic}$. Durante lo stadio finale, intendendo per questo gli ultimi 1.25 mm di crescita della cricca, deve essere $K_{max} \leq 0.6 K_{Ic}$ (secondo la norma ASTM).

Tipicamente la formazione della cricca richiede almeno 50000 cicli di carico.

1.7.5 Strumentazione

La prova di frattura fragile è condotta in maniera molto simile alla prova di trazione. Per la misura degli spostamenti si usa un trasduttore, che concettualmente è un estensometro, posto a cavallo

dell'intaglio, fig. 1.9.

Il carico viene fatto aumentare gradualmente in modo che K_I cresca di $30 \div 150 \text{ MN m}^{3/2}$ al minuto, che corrisponde ad una durata della prova tra 1 e 5 minuti.

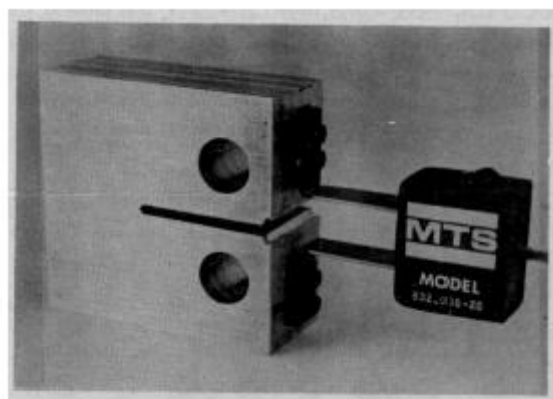


Figura 1.9 – Trasduttore di spostamento (estensometro).

1.7.6 Interpretazione della prova

Durante la conduzione della prova si registrano istante per istante i valori del carico Q e dello spostamento s , fino alla rottura del provino.

L'andamento del diagramma carico - spostamento può presentare un punto di discontinuità più o meno accentuato al momento della propagazione instabile; il caso più favorevole è quello del quarto diagramma della fig. 1.10, mentre il più dubbio è quello del primo diagramma.

Per differenziare i vari casi si traccia una retta A sul prolungamento del primo tratto rettilineo e successivamente una seconda retta il cui coefficiente angolare sia il 95% del precedente. Come valore Q_q da usare nel calcolo di K_{Ic} si usa l'intercetta con la seconda retta o il massimo (se c'è) compreso tra le due rette.

La prova non è valida se lo scostamento del diagramma dalla prima retta è troppo 'dolce' come nel primo diagramma di fig. 1.10, in cui il segmento q_i , in corrispondenza dell'ordinata $0.8Q_q$, è maggiore di $1/4$ del segmento q , misurato in corrispondenza di Q_q .

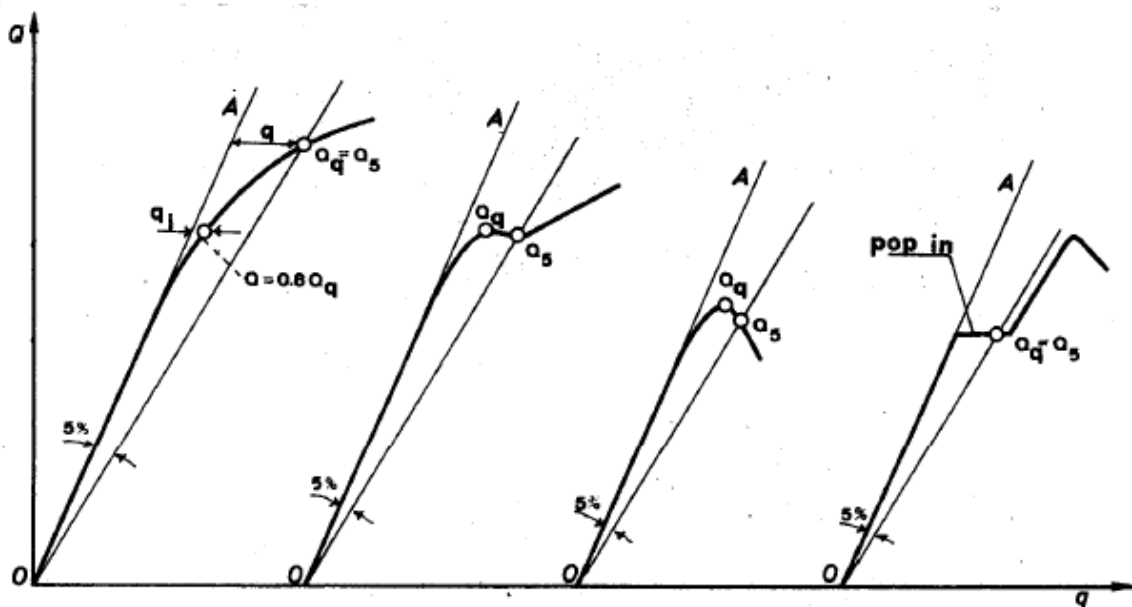


Figura 50: Principali tipi di diagrammi carico-spostamento per prove di K_{Ic}

Figura 1.10 – Principali tipi di diagrammi carico-spostamento per prove di K_{Ic} .

1.7.7 Calcolo di K_{Ic}

Per il calcolo di K_{Ic} , il valore di Q_q si introduce nella formula:

$$K_{Ic} = \frac{QY}{B\sqrt{W}} \quad (1.21)$$

In cui il valore della cedevolezza Y è dato da uno sviluppo in serie di potenze di a/W , ma più comodamente dalle tabelle 9 e 10, rispettivamente per i provini a flessione e C.T.

Tabella 1.1 – Valori di Y al variare di a/W per provini di flessione a tre punti

a/W	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.450	9.10	9.13	9.15	9.18	9.21	9.23	9.26	9.29	9.32	9.35
0.460	9.37	9.40	9.43	9.46	9.49	9.52	9.54	9.57	9.60	9.63
0.470	9.66	9.69	9.72	9.75	9.78	9.81	9.84	9.87	9.90	9.93
0.480	9.96	9.99	10.03	10.06	10.09	10.12	10.15	10.18	10.21	10.25
0.490	10.28	10.31	10.34	10.38	10.41	10.44	10.48	10.51	10.54	10.58
0.500	10.61	10.65	10.68	10.71	10.75	10.78	10.82	10.85	10.89	10.93
0.510	10.96	11.00	11.03	11.07	11.11	11.14	11.18	11.22	11.25	11.29
0.520	11.33	11.37	11.40	11.44	11.48	11.52	11.56	11.60	11.64	11.67
0.530	11.71	11.75	11.79	11.83	11.87	11.91	11.96	12.00	12.04	12.08
0.540	12.12	12.16	12.20	12.25	12.30	12.33	12.37	12.42	12.46	12.50
0.550	12.55									

Tabella 1.2 – Valori di Y al variare di a/W per provini C.T.

a/W	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.450	8.34	8.36	8.38	8.41	8.43	8.45	8.47	8.50	8.52	8.54
0.460	8.57	8.59	8.61	8.64	8.66	8.69	8.71	8.73	8.76	8.78
0.470	8.81	8.83	8.86	8.88	8.91	8.93	8.96	8.98	9.01	9.03
0.480	9.06	9.09	9.11	9.14	9.16	9.19	9.22	9.24	9.27	9.30
0.490	9.32	9.35	9.38	9.41	9.43	9.46	9.49	9.52	9.55	9.57
0.500	9.60	9.63	9.66	9.69	9.72	9.75	9.78	9.81	9.84	9.87
0.510	9.90	9.93	9.96	9.99	10.02	10.05	10.08	10.11	10.15	10.18
0.520	10.21	10.24	10.27	10.31	10.34	10.37	10.40	10.44	10.47	10.50
0.530	10.54	10.57	10.61	10.64	10.68	10.71	10.75	10.78	10.82	10.85
0.540	10.89	10.92	10.96	11.00	11.03	11.07	11.11	11.15	11.18	11.22
0.550	11.26									

2. Teoria di Griffith: Crack theory

2.1 Approccio energetico

L'approccio utilizzato da Griffith^[4] nasce considerando il caso di una cricca presente in una piastra tensionata. Egli notò che per prevedere l'accrescimento di tale cricca risultava necessario scrivere un bilancio energetico tra il decremento di energia potenziale (dovuto al rilascio di energia elastica immagazzinata nella piastra e il lavoro svolto dal movimento dei carichi esterni applicati a monte e a valle) e tra l'incremento dell'energia superficiale dovuto alla presenza della cricca. Secondo questo bilancio una cricca può crescere di una certa lunghezza solo se viene fornito dal sistema la necessaria energia superficiale. Quest'energia superficiale nasce dal fatto che non c'è una situazione di equilibrio stabile negli atomi molto vicini alle superfici libere nei solidi. Nella configurazione mostrata in fig. 2.1 egli ipotizza che l'energia superficiale è calcolata come prodotto tra l'area superficiale totale della cricca ($2a \cdot 2 \cdot t$) e l'energia superficiale specifica γ_s , che rappresenta l'energia superficiale per unità di area. Egli si serve della trattazione analitica di Inglis (caso di intaglio ellittico immerso centralmente in una piastra infinitamente grande risolto in forma chiusa) per calcolare il decremento di energia potenziale in funzione della dimensione della cricca, che risulta essere $(\pi \cdot \sigma^2 \cdot a^2 \cdot t) / E$.

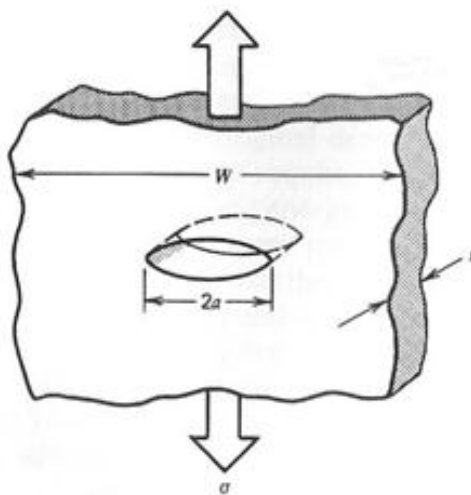


Figura 2.1 – Configurazione utilizzata per il calcolo dell'energia di frattura

La variazione di energia potenziale del sistema appena presentato può essere scritto nella forma seguente:

$$U - U_0 = - \frac{\pi\sigma^2 a^2 t}{E} + 4at\gamma_s \quad (2.1)$$

Dove:

- U = energia potenziale della piastra con la cricca;
- U_0 = energia potenziale della piastra senza la cricca;
- σ = tensione applicata a monte e a valle della cricca;
- a = semi-ampiezza della cricca;
- t = spessore della piastra;
- E = modulo elastico (modulo di Young);
- γ_s = energia superficiale specifica.

Possiamo riscrivere l'eq. (2.1) nel modo seguente:

$$U = 4at\gamma_s - \frac{\pi\sigma^2 a^2 t}{E} + U_0 \quad (2.2)$$

Ora per determinare la condizione di equilibrio deriviamo la (2.2) rispetto alla semi-ampiezza della cricca e poniamo il tutto uguale a zero, ottenendo:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 4t\gamma_s - \frac{2\pi\sigma^2 at}{E} = 0 \quad (2.3)$$

($\partial U_0/\partial a = 0$, perché l'energia potenziale della piastra senza cricca non varia con la lunghezza della cricca)

Dalla (2.3) possiamo ricavare la condizione secondo la quale si ha equilibrio quando:

$$2\gamma_s = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (2.4)$$

Per conoscere la natura di questo equilibrio occorre derivare la (2.3) una seconda volta, ottenendo:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = - \frac{2\pi\sigma^2 t}{E} \quad (2.5)$$

Dalla derivata appena calcolata notiamo come questa condizione sia sempre negativa, ciò porta alla conclusione che la condizione di equilibrio descritto dalla (2.3) sia instabile, quindi la cricca tenderà sempre a crescere. Griffith riscrisse la (2.4) in modo da rendere esplicita la tensione applicata:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\gamma_s E}{\pi a}} \quad (2.6)$$

nel caso di stato piano di tensione (stato biassiale, prodotto dall'ipotesi di trascurare la componente di tensione lungo l'asse z), mentre nel caso di stato piano di deformazione (stato triassiale, prodotto dall'ipotesi di trascurare la deformazione lungo l'asse z) otteniamo la seguente condizione tensionale:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\gamma_s E}{\pi a(1-\nu^2)}} \quad (2.7)$$

Nella (2.7) compare il coefficiente di Poisson che, variando tra $0.25 < \nu < 0.33$ nella maggior parte dei materiali, non produce grandi differenze tra i livelli tensionali critici calcolati nelle due ipotesi: tensione piana o deformazione piana.

La cosa molto importante da ricordare è che queste relazioni si basano su ipotesi di materiale a comportamento elastico fino a rottura e contenente una cricca con apici molto acuti (raggio di raccordo pari a zero). Inoltre questa teoria così scritta è da considerarsi necessaria, ma non sufficiente per determinare il cedimento del materiale.

Se invece prendo in considerazione materiali che possono plasticizzare come metalli e polimeri devo tener conto di questo fatto perché i valori a frattura possono essere molto diversi, in quanto il materiale riesce ad assorbire molta più energia (dovuta alla plasticizzazione del materiale) prima che la cricca inizi a nucleare.

Per questi materiali troviamo sperimentalmente che l'energia di frattura è di diversi ordini di grandezza più grande rispetto alla sola energia assorbita dal materiale per la creazione di superfici libere.

Orowan fu il primo ad teorizzare questo aspetto e introdusse il parametro γ_p (rappresenta l'energia di deformazione plastica). La tensione critica diventa così:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a}} = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \left(1 + \frac{\gamma_p}{\gamma_s}\right)} \quad (2.8)$$

dove (come detto precedentemente) $\gamma_p \gg \gamma_s$. Sotto queste condizioni possiamo approssimare la (2.8) nel modo seguente:

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \left(\frac{\gamma_p}{\gamma_s}\right)} \quad (2.9)$$

L'appicabilità della (2.6) e (2.7) nel descrivere il comportamento a frattura dei materiali dipende della severità degli intagli considerati (raggio all'apice tendente a zero) e dalla dimensione del volume plastico nella vicinanza dell'apice.

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{a_0}} \quad (2.10)$$

$$\sigma_{max} \approx 2\sigma_a \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (2.11)$$

L'equazione (2.10) rappresenta la tensione teorica coesiva che deve essere vinta in un materiale in modo tale da innescare una cricca nel materiale non danneggiato, mentre la (2.11) rappresenta il fattore di concentrazione delle tensioni (approssimato) nel caso di piastra infinita soggetta a trazione/compressione (σ_a) con intaglio ellittico centrale.

Eguagliando la (2.10) e la (2.11) è possibile ottenere:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E\gamma_s}{a} \left(\frac{\rho}{a_0}\right)} \text{ o } \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \left(\frac{\pi\rho}{8a_0}\right)} \quad (2.12)$$

Dove:

- σ_a = carico applicato a monte e a valle dell'intaglio per giungere a frattura;
- E = modulo elastico;
- a_0 = equilibrium atomic separations;
- γ_s = energia superficiale specifica;
- ρ = raggio di raccordo agli apici;
- a = semi-ampiezza dell'intaglio.

La similitudine tra la (2.9) e le (2.11) suggerisce una correlazione tra l'energia di plasticizzazione e l'effetto di arrotondamento degli apici dell'intaglio (fenomeno dovuto proprio alla plasticizzazione del volume di fronte all'apice). Più γ_p è elevato più riesco ad ottenere un raggio di raccordo ampio ρ all'apice dell'intaglio.

Le equazioni appena scritte avranno quindi campi di applicabilità diversi:

- le (2.6) e (2.7) potranno essere applicate quando siamo in presenza di intagli con apici $\rho \leq (8/\pi)a_0$, ma non è ragionevolmente plausibile che la tensione vada a zero se $\rho \rightarrow 0$;
- le (2.8), (2.9) e (2.12) potranno essere applicate in presenza di apici $\rho > (8/\pi)a_0$ dove i processi plastici presenti sono molto evidenti.

Nella seguente trattazione prenderemo in considerazione solamente materiali con comportamento lineare elastico fino a rottura sollecitati staticamente. Le equazioni (2.6) e (2.7) possono essere applicate, come detto precedentemente, a materiali fragili ad es. vetri amorfi o ceramici per sollecitazioni statiche; mentre per i materiali metallici esse sono valide solo se sollecitati a fatica (prove sperimentali dimostrano che durante carichi ciclici la rottura dei componenti avviene in modo netto senza fenomeni plastici diffusi).

2.2 Relazioni tra energia di frattura e approccio basato sui campi di tensione

In questo paragrafo si vogliono rendere note le relazioni che correlano i due aspetti: energia di frattura e approccio basato su “campi di tensione asintotici” (Irwin, 1957-58)^[2].

Partendo dalla relazione (2.6) e ponendo $G = 2\gamma_s$:

$$\sigma\sqrt{\pi a} = \sqrt{EG} \quad (2.13)$$

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} = \sqrt{EG} \quad (2.14)$$

Valida nell'ipotesi di stato piano di tensione, mentre se sono in stato piano di deformazione ottengo:

$$K = \sqrt{\frac{EG}{(1-\nu^2)}} \quad (2.15)$$

Queste relazioni sono state ideate calcolando l'energia necessaria alla chiusura di una parte della cricca precedentemente formata in un solido. Per contro se la stessa quantità di energia viene rimossa la cricca torna ad aprirsi.

Con i parametri descritti in fig. 2.2 possiamo calcolare il lavoro compiuto per unità di area (considero un modello 2D in quanto lo spessore è unitario e quindi non viene esplicitamente introdotto nella relazione) per richiudere una cricca di una quantità α , che risulta essere:

$$G = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{\sigma_y V(x)}{2} dx \quad (2.16)$$

Dove:

- $2 =$ (fuori dall'integrale) sta ad indicare che $V(x)$ rappresenta solo il campo di spostamenti lungo uno solo dei due lembi;
- $V(x) =$ campo di spostamenti lungo x misurato dal lembo alla bisettrice della cricca lungo la distanza α ;
- $\sigma_y V(x)/2 =$ energia sottesa dalla load deflection curve.

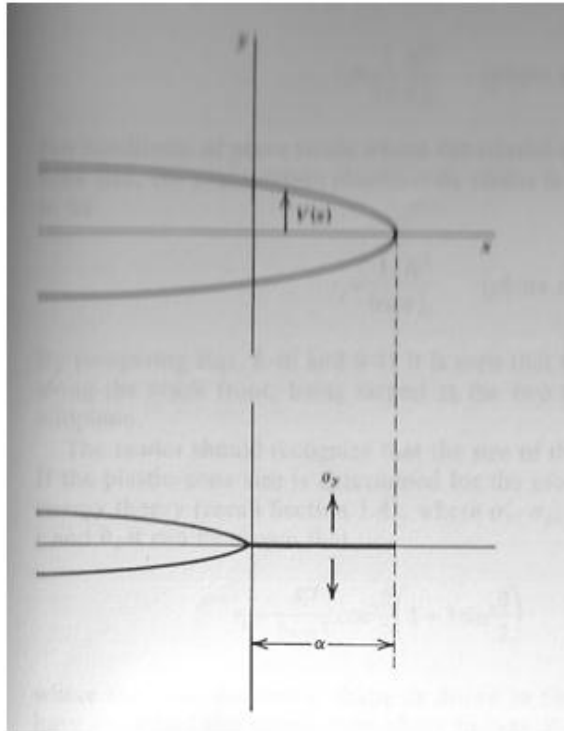


Figura 2.2 – Diagramma che mostra una parziale chiusura di una cricca per una distanza a .

Utilizzando l'espressione di Irwin per il calcolo delle tensioni lungo la bisettrice della cricca; pongo $\theta = 0$ e ottengo:

$$\sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi x}} \quad (2.17)$$

$$V(x) = \frac{2K}{E} \sqrt{\frac{2(\alpha-x)}{\pi}} \quad (2.18)$$

Sostituendo le espressioni (2.17) e (2.18) nella (2.16) ottengo la seguente espressione:

$$G = \frac{2K^2}{\alpha E \pi} \int_0^\alpha \sqrt{\frac{\alpha-x}{x}} dx \quad (2.19)$$

Così scritto G rappresenta un valore medio, $G=f(1/\alpha)$; mentre K varia in funzione della lunghezza della cricca, quindi a rigore l'integrale scritto sopra è un'approssimazione del valore medio reale. Tanto più piccolo è il valore di α considerato tanto migliore sarà l'approssimazione ottenuta del valore di G , al limite se $\alpha \rightarrow 0$ e integro ottengo i risultati seguenti:

$$G = \frac{K^2}{E} \quad (2.20)$$

$$G = \frac{K^2}{E}(1 - \nu^2) \quad (2.21)$$

Rispettivamente stato piano di tensione (2.20) e stato piano di deformazione (2.21) che rappresentano gli stessi risultati mostrati a inizio paragrafo (vedi eq. (2.14) e (2.15)).

3. Teoria di D. Leguillon applicata a puro modo I

3.1 Resistenza o tenacità? Criterio per la nucleazione di una cricca all'apice di un intaglio

Secondo la teoria studiata da D. Leguillon (2001)^[5] per determinare la condizione di cedimento di un componente intagliato devono essere soddisfatti entrambi i criteri, sia quello basato sulla resistenza del materiale sia quello energetico. Infatti nessuno dei due rappresenta una condizione necessaria e sufficiente. Da un lato il criterio energetico fornisce un limite inferiore per la lunghezza di nucleazione della cricca, mentre dall'altro lato il criterio tensionale fornisce un limite superiore alla lunghezza della cricca. Uguagliando queste due condizioni possiamo trovare il parametro dimensionale (l_0) della cricca al momento della sua comparsa. In questa analisi non si ipotizza nulla sui fenomeni che intercorrono tra $l=0$ (componente intagliato senza cricca all'apice) e l_0 (momento nel componente è presente all'apice dell'intaglio una cricca).

3.1.1 Criterio energetico

Ipotizzando di avere un provino di un materiale con comportamento elastico fino a rottura (o che presenta fenomeni di plastici trascurabili, zona plastica di fronte all'apice della cricca molto piccola) lo stato di equilibrio è rappresentato da una certa energia potenziale $W_p \neq 0$ e energia cinetica $W_k = 0$. Successivamente, consideriamo lo stesso provino dopo la nucleazione della cricca all'apice o dopo l'accrescimento di una cricca preesistente. Il criterio energetico prevede di scrivere il bilancio energetico tra i due stati appena descritti, che risulta essere:

$$\delta W_p + \delta W_k + G_c \delta S = 0 \quad (3.1)$$

Dove:

- δW_p = variazione di energia potenziale;
- δW_k = variazione di energia cinetica;
- δS = nuova superficie creata dalla nascita o crescita della cricca;
- G_c = energia di frattura per unità di superficie, tenacità a frattura.

Dalle ipotesi iniziali possiamo dire che, indubbiamente, la variazione di energia cinetica tra i due stadi è positiva ($\delta W_k \geq 0$); ciò implica che la variazione di energia potenziale sommata alla variazione di energia superficiale deve essere negativa. Dalle considerazioni appena scritte si arriva alla seguente disequazione:

$$-\frac{\delta W_p}{\delta S} \geq G_c \quad (3.2)$$

La (3.2) rappresenta il criterio energetico che sta alla base della Finite Fracture Mechanics espresso in forma incrementale; se faccio tendere l'incremento di superficie (generata dalla nucleazione o accrescimento della cricca) a zero pervengo alla forma differenziale ideata da Griffith.

3.1.2 Criterio basato sulla resistenza

Il criterio di resistenza è basato sulla tensione che porta a rottura il materiale in condizioni di trazione (o taglio), σ_c o τ_c , rappresenta quindi la tensione che un materiale può sopportare appena prima del cedimento:

$$\sigma \geq \sigma_c \text{ o } \tau \geq \tau_c \quad (3.3)$$

I due criteri appena descritti, se applicati per prevedere la nucleazione di una cricca all'apice di un intaglio, portano ad un evidente paradosso. Il criterio energetico di Griffith non riesce a porre una condizione perché prima che la cricca nasca non c'è superficie libera generata e quindi il valore di G tende a zero, mentre a causa del campo asintotico delle tensioni vicino all'apice le tensioni in quei punti sono sicuramente più alte del valore critico che il materiale è in grado di sopportare. Per il criterio energetico la cricca non dovrebbe formarsi perché il valore G_c non potrà mai essere raggiunto, mentre per il criterio tensionale il valore di σ_c viene raggiunto all'apice dell'intaglio per qualsiasi carico esterno applicato (anche molto piccolo).

Queste considerazioni portano a dire che né l'uno né l'altro rappresentano delle condizioni necessarie e sufficienti per prevedere la nucleazione della cricca.

Prove sperimentali hanno dimostrato che prendendo in esame un provino liscio a trazione il cedimento è governato dal criterio tensionale, solo quando raggiungo la tensione a rottura il provino si rompe (mentre il criterio energetico è soddisfatto automaticamente); prendendo in considerazione un laminato cross-ply (due lamine esterne a 0° e una lamina centrale a 90°) noto che, al variare dello spessore della lamina centrale, cricche trasversali si formano all'interno della lamina centrale

a deformazioni diverse. Per spessori elevati ho che le cricche si formano ad una data def. percentuale costante ($\varepsilon = \sigma/E$) perché è il criterio tensionale a dominare su quello energetico, dall'altra parte quando lo spessore diminuisce le cricche iniziano a formarsi a def. sempre maggiori appunto perché ora è il criterio energetico a fornire la condizione di cedimento adeguata (Esperimenti di Parvizi et al.).

Tutto ciò ci porta a dire che affinché la cricca possa nucleare o accrescere entrambi i criteri devono essere simultaneamente soddisfatti e nella maggior parte dei casi uno sovrasta l'altro, quindi la nucleazione di una cricca all'apice di un intaglio è un problema di tenacità a frattura del materiale e di tensione critica.

Nel proseguo della trattazione verrà formulato un criterio di previsione del cedimento basato sui campi di tensioni asintotici.

3.2 Iniziazione di una cricca all'apice di un intaglio

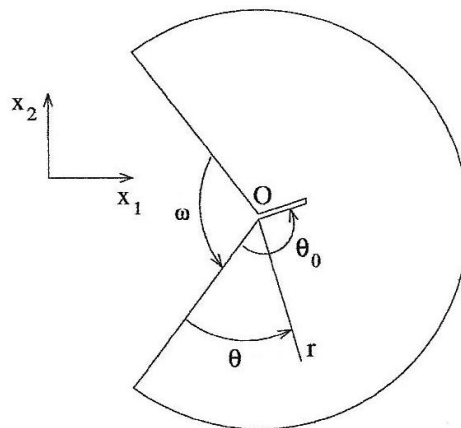


Figura 3.1 – Rappresentazione di un intaglio a spigolo vivo con una cricca nucleante dal suo apice

E' noto da studi precedenti che il campo degli spostamenti lungo l'apice di un intaglio a spigolo vivo in un materiale a comportamento elastico risulta essere:

$$\underline{U}(x_1, x_2) = \underline{U}(0,0) + kr^\lambda \underline{u}(\theta) + \dots \quad (3.4)$$

Dove:

- x_1, x_2 = coordinate cartesiane con centro posizionato sull'apice dell'intaglio;
- $\underline{U}(0,0)$ = traslazione rigida del corpo (termine irrilevante al fine della trattazione);
- r, θ = coordinate polari centrate sull'apice dell'intaglio;
- λ = esponente di singolarità (0.5 nel caso di una cricca $\omega = 0$, 1 nel caso di provino non intagliato $\omega = \pi$);
- $\underline{u}(\theta)$ = funzione di forma;
- k = fattore di intensificazione delle tensioni.

Prendendo in esame il caso particolare di carico simmetrico applicato ad un componente criccato la (3.4) diventa:

$$\underline{U}(x_1, x_2) = \underline{U}(0,0) + k_I \sqrt{r} \underline{u}_I(\theta) + \dots \quad (3.5)$$

Mentre nel caso del provino liscio (non criccato o intagliato) lo sviluppo del campo degli spostamenti risulta essere il seguente:

$$\underline{U}(x_1, x_2) = \underline{U}(0,0) + T r t(\theta) + \dots \quad (3.6)$$

In questo caso k_I corrisponde al SIF di modo I, mentre T rappresenta la tensione uniforme che agisce su tutta la sezione del provino sottoposto a trazione.

Il campo delle tensioni, derivante da questo campo degli spostamenti, è noto essere funzione di $r^{\lambda-1}$; ciò porta a dire che le tensioni tenderanno all'infinito quanto più ci si avvicina all'apice della cricca. Per qualsiasi carico applicato ci sarà una regione antistante l'apice della cricca dove le tensioni saranno sicuramente maggiori della resistenza a trazione del materiale (in queste zone il criterio tensionale per il cedimento sarà sempre soddisfatto).

3.3 Lunghezza di iniziazione della cricca

A fronte di quello detto in precedenza si vuole trovare la lunghezza di nucleazione della cricca sotto determinate condizioni geometriche e di carico.

Questa lunghezza sarà determinata dal confronto tra la condizione energetica e la condizione tensionale agente sul materiale.

Come detto all'inizio di questa trattazione il criterio energetico prevede di porre un bilancio tra la variazione tra l'energia potenziale e la variazione di energia provocata dalla creazione di nuove superfici libere.

La variazione di energia potenziale prevista da D.Leguillon, 1989 risulta essere :

$$-\delta W_p = k^2 K(\omega, \theta_0) l^{2\lambda} d + \dots \quad (3.7)$$

Dove:

- l = lunghezza della nuova cricca creatasi;
- d = spessore del provino (elasticità piana);
- $K(\omega, \theta_0)$ = coefficiente scala che dipende dalla geometria e dalla direzione di cricca.

Applicando la condizione data dalla (3.2) ottengo:

$$-\delta W_p \geq G_c l d \Rightarrow k^2 K(\omega, \theta_0) l^{2\lambda-1} \geq G_c \quad (3.8)$$

Il fattore di intensificazione delle tensioni è proporzionale al carico applicato ($k=\beta\sigma_a$) otteniamo in questo modo un limite inferiore alla lunghezza l ammissibile per la cricca:

$$l^{2\lambda-1} \geq \frac{G_c}{(\beta\sigma_a)^2 K(\omega, \theta_0)} \quad (2\lambda - 1 > 0) \quad (3.9)$$

Il limite di questa condizione risiede nel fatto che la dimensione di l non può essere infinitamente piccola, perché il carico esterno applicato non può essere infinitamente grande. Questa entità deve essere in accordo con la trattazione analitica asintotica del problema e deve essere in accordo con la grandezza strutturale del materiale.

Applicando il criterio basato sulla resistenza del materiale e assumendo che lungo la linea di frattura (prima che essa avvenga) agisca una forza di trazione superiore alla resistenza del materiale

possiamo formulare la seguente disequazione, che ci permette di individuare un limite superiore alla lunghezza l .

La tensione σ_θ agente ad una distanza l e direzione θ_0 risulta essere:

$$\sigma_\theta(l, \theta_0) = kl^{\lambda-1}s_\theta(\theta_0) + \dots \quad (3.10)$$

$$\sigma_\theta(l, \theta_0) \geq \sigma_c \Rightarrow l^{\lambda-1} \leq \frac{\beta\sigma_a s_\theta(\theta_0)}{\sigma_c} \quad (3.11)$$

Dal momento che le due condizioni devono essere simultaneamente soddisfatte perché la frattura avvenga la lunghezza ammissibile risulta dalla soluzione del sistema formato dalle due disequazioni. Risolvendo risulta:

$$l_0 = \frac{G_c(s_\theta(\theta_0))^2}{K(\omega, \theta_0)\sigma_c^2} \quad (3.12)$$

Possiamo affermare quindi che la struttura contenente una micro cricca di lunghezza l_0 è in equilibrio nel senso che la soluzione elastica prevede l'assenza di energia cinetica. Inoltre prendendo in esame l'equilibrio proposto da Griffith, la (2.5) avendo un valore sempre negativo, determina la natura altamente instabile di questo equilibrio.

Il valore di G all'apice della nuova cricca è una funzione crescente della sua stessa lunghezza e resta sempre più elevato del valore critico G_c .

$$G(l_0) = 2\lambda G_c \text{ con } (\lambda \geq \frac{1}{2}) \quad (3.13)$$

$G(l_0)$ viene calcolato utilizzando la (3.8) considerando piccoli incrementi δl da l_0 .

$$G(l_0) = - \lim_{\delta l \rightarrow 0} \frac{W_p(l_0 + \delta l) - W_p(l_0)}{\delta l} \quad (3.14)$$

$W_p(l_0)$ rappresenta del provino contenente una cricca di lunghezza l_0 . Gli incrementi possono essere presi piccoli quanto servono per riuscire a prevedere con maggior accuratezza possibile il valore di G . Inoltre i due casi presi in esame precedentemente portano a due situazioni:

- Nel caso di provino liscio ($\omega=\pi \Rightarrow \lambda=1$) il criterio basato sulla resistenza non riesce a porre nessun limite superiore alla lunghezza della cricca:

$$l \geq \frac{G_c(s_\theta(\theta_0))^2}{K(\omega, \theta_0)\sigma_c^2} \quad (3.15)$$

- Nel caso di provino criccato ($\omega=0 \Rightarrow \lambda=1/2$) il criterio energetico non pone nessun limite inferiore:

$$l \leq \frac{G_c(s_\theta(\theta_0))^2}{K(\omega, \theta_0)\sigma_c^2} \quad (3.16)$$

3.4 Criterio per prevedere la nucleazione della cricca

E' assodato che il termine rilevante per la determinazione della nucleazione di una cricca in un materiale è il fattore di intensificazione delle tensioni k , la condizione affinché ciò avvenga è necessario che il suo valore superi quello critico del materiale k_c o k_{Ic} a seconda delle condizioni geometriche del provino.

$$k \geq k_c \text{ o } k_{Ic} \quad (3.17)$$

Il problema sorge nel momento in cui si voglia calcolare questo valore critico per i vari materiali in quanto esso non varia solo tra materiale e materiale, ma varia al variare dell'angolo di apertura dell'intaglio considerato a parità di materiale. Ciò porta a dover condurre prove sperimentali per ogni angolo di apertura specifico.

Utilizzando la trattazione precedente sulla lunghezza di nucleazione della cricca è possibile derivare questo valore utilizzando la tenacità a frattura del materiale G_c e la sua resistenza a trazione σ_c o (τ_c). Sostituendo il valore di l_0 dell'eq. (3.12) nella (3.9) si ottiene la seguente espressione:

$$k \geq \left(\frac{G_c}{K(\omega, \theta_0)} \right)^{1-\lambda} \left(\frac{\sigma_c}{s_\theta(\theta_0)} \right)^{2\lambda-1} \quad (3.18)$$

La direzione di frattura θ_c può essere determinata dal minimo valore del secondo membro della (3.18), che in condizioni di materiale omogeneo con proprietà di frattura isotrope (non dipendenti dalla direzione considerata) si traduce in questa disequazione:

$$K(\omega, \theta_c)^{1-\lambda} s_\theta(\theta_c)^{2\lambda-1} \geq K(\omega, \theta_0)^{1-\lambda} s_\theta(\theta_0)^{2\lambda-1}, \forall \theta_0 \ 0 < \theta_0 < 2\pi - \omega \quad (3.19)$$

Infatti se il materiale è isotropo i valori G_c e σ_c sono costanti in tutte le direzioni considerate. Questa disequazione impone che la direzione di frattura è determinata dalla direzione dove il k_c è minimo. Una volta noto il valore dell'angolo di iniziazione della cricca, l'autofunzione $r^\lambda \underline{u}(\theta)$ può essere normalizzato così:

$$s_\theta(\theta_c) = 1 \quad (3.20)$$

(Di solito per una cricca il valore vero sarebbe $1/\sqrt{2\pi}$)

In questo modo il criterio assume una forma semplificata:

$$k \geq \left(\frac{G_c}{K(\omega, \theta_c)} \right)^{1-\lambda} \sigma_c^{2\lambda-1} \quad (3.21)$$

Nel caso di una cricca ($\lambda=1/2$) questo criterio di coincidere con quello di Griffith, mentre se siamo in presenza di un provino liscio ($\lambda=1$) esso coincide con il criterio basato sulla resistenza.

Nel caso di un intaglio in un materiale omogeneo e isotropo caricato in modo simmetrico si può affermare con estrema certezza che la direzione di frattura è rappresentata dalla bisettrice di tale intaglio ($\theta_c = \pi - \omega/2$). In questo modo è possibile definire il valore di k_c in funzione di G_c , σ_c e ω (angolo di apertura dell'intaglio):

$$k_c = \left(\frac{G_c}{K(\omega, \pi - \omega/2)} \right)^{1-\lambda} \sigma_c^{2\lambda-1} \quad (3.22)$$

Il valore del G-SIF, k , calcolato con questo metodo avrà unità di misura diversa per ogni angolo preso in considerazione, in quanto l'angolo influisce direttamente sul valore del grado di singolarità del problema ($1-\lambda$). Per verificare la resistenza del componente occorre confrontare ogni volta il valore predetto dal metodo con quello critico ricavato sperimentalmente (stesso angolo di apertura ω dell'intaglio).

3.5 Espressioni asintotiche accoppiate per la soluzione del problema singolare

Nei casi di elasticità piana si è soliti considerare che all'apice dell'intaglio sia presente un difetto di piccolissime dimensioni.

La soluzione di questo problema "perturbato" dal difetto vista da molto lontano può essere descritta come la soluzione del problema analitica (dove il difetto non è presente) sommata a una piccola correzione dovuta alla presenza del difetto, che in qualche modo ne influenzerà il comportamento.

Se il difetto lo chiamiamo ε e la soluzione elastica a tale problema $\underline{U}^\varepsilon(x_1, x_2)$, la soluzione a tale problema può essere definita nel seguente modo:

$$\underline{U}^\varepsilon(x_1, x_2) = \underline{U}^0(x_1, x_2) + f_1(\varepsilon)\underline{U}^1(x_1, x_2) + \dots \quad (3.23)$$

Dove:

- $\underline{U}^0(x_1, x_2)$ = soluzione del problema non perturbato definita nel dominio Ω^0 ;
- $f_1(\varepsilon)\underline{U}^1(x_1, x_2)$ = correzione dovuta alla presenza del difetto.

La funzione $\underline{U}^\varepsilon$ è definita all'interno del dominio Ω^ε , mentre $f_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ si ritorna al caso imperturbato, infatti anche $\Omega^\varepsilon \rightarrow \Omega^0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Questa soluzione è valida all'interno dei domini appena descritti a patto che si stia distanti dall'apice dell'intaglio dove il difetto è presente.

L'espressione appena descritta viene chiamata "outer" o "far field".

La soluzione analitica $\underline{U}^0(x_1, x_2)$ assume invece l'espressione nota:

$$\underline{U}^0(x_1, x_2) = \underline{U}^0(0,0) + kr^\lambda \underline{u}(\theta) + \dots \quad (3.24)$$

Per semplicità prendiamo in considerazione il problema con carico simmetrico, quindi possiamo affermare che il parametro singolare dominante è reale e unico.

Per risolvere il problema in prossimità dell'apice dobbiamo utilizzare un metodo leggermente diverso.

Per prima cosa dobbiamo deformare il dominio, normalizzando tutto rispetto alla dimensione caratteristica del difetto ε , in questo modo se facciamo tendere a zero la dimensione del difetto otteniamo un dominio Ω^ε illimitato e le variabili spaziali ad esso connesse diventeranno $y_i = x_i/\varepsilon$.

In questo nuovo dominio “stretched” la dimensione della perturbazione diventa automaticamente pari a 1 e la soluzione elastica al problema risultante sarà:

$$\underline{U}^\varepsilon(x_1, x_2) = \underline{U}^\varepsilon(\varepsilon y_1, \varepsilon y_2) = F_0(\varepsilon)\underline{V}^0(y_1, y_2) + F_1(\varepsilon)\underline{V}^1(y_1, y_2) + \dots \quad (3.25)$$

In questo caso $F_1(\varepsilon)/F_0(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Ciò significa che se il difetto non è presente si ritorna al problema noto e già risolto di intaglio a spigolo vivo (trattazione di Williams).

Questa espansione viene chiamata “inner” e si riferisce al “near field”, in quanto rappresenta il comportamento del campo degli spostamenti quando si è molto vicini all’apice dell’intaglio.

Per determinare le funzioni incognite \underline{V}^0 e \underline{V}^1 è necessario ricorrere all’ipotesi secondo la quale se entrambe le espressioni sono soluzione dello stesso problema deve esistere una regione dove si verificano simultaneamente, quindi ci sarà un’area dove entrambe le soluzioni coesistono. Prendendo il far field mi dovrò avvicinare al difetto, mentre prendendo il near field mi dovrò allontanare da questa zona.

Utilizzando l’espansione nota del problema non perturbato posso esplicitare le funzioni incognite:

$$F_0(\varepsilon) = 1; \underline{V}^0(y_1, y_2) = \underline{U}^0(0,0); F_1(\varepsilon) = k\varepsilon^\lambda \quad (3.26)$$

Mentre il comportamento di $\underline{V}^1(y_1, y_2) \rightarrow \rho^\lambda \underline{u}(\theta)$ quando $\rho \rightarrow \infty$ con $\rho = \sqrt{(y_1^2 + y_2^2)} = r/\varepsilon$.

Quest’ultima funzione è indipendente dai carichi applicati, ma dipende solo dalla geometria locale e dalla forma del modo singolare che definisce la condizione all’infinito. Il carico entra in gioco solo tramite il G-SIF espresso nella $F_1(\varepsilon)$.

Usando il principio di sovrapposizione degli effetti possiamo definirla nel modo seguente:

$$\underline{V}^1(y_1, y_2) = \rho^\lambda \underline{u}(\theta) + \hat{\underline{V}}^1(y_1, y_2) \quad (3.27)$$

Possiamo ora affermare che il secondo termine della “inner expansion” è ben definito.

Calcoliamo la variazione di energia potenziale tra lo stato non perturbato e quello con il difetto presente a parità di carichi esterni applicati, il teorema di Betti ci permette di formulare la seguente espressione:

$$\delta W_p = \frac{1}{2} \int_\Gamma (\sigma(\underline{U}^\varepsilon) \underline{n} \underline{U}^0 - \sigma(\underline{U}^0) \underline{n} \underline{U}^\varepsilon) ds \quad (3.28)$$

Dove Γ rappresenta un qualsiasi dominio che circonda l'intaglio e che inizia e finisce sulle sue superfici libere, mentre \underline{n} rappresenta la normale a tale contorno che punta verso l'origine del sistema di riferimento (apice dell'intaglio).

Questo integrale può essere calcolato in qualsiasi dei tre domini descritti precedentemente, Ω^ε , Ω^0 o Ω^{in} (rappresenta il dominio illimitato derivante dalla normalizzazione rispetto alla dimensione del difetto che poi viene fatta tendere a zero).

La variazione di energia potenziale risultante:

$$\delta W_p = K k^2 \varepsilon^{2\lambda} + \dots \quad (3.29)$$

(questa espressione corrisponde alla (3.7) con $d=1$, spessore del provino).

A sua volta il fattore K può essere calcolato utilizzando l'integrale seguente:

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\sigma(\underline{V}^1) \underline{n} \rho^\lambda \underline{u} - \sigma(\rho^\lambda \underline{u}) \underline{n} V^1) ds \quad (3.30)$$

Questo fattore dipende dalla forma della perturbazione attraverso la funzione \underline{V}^1 , ma non dipenderà dalle sue dimensioni in quanto abbiamo normalizzato tutto rispetto a ε . Inoltre il suo valore non dipende dai carichi esterni applicati, che compaiono nell'espressione (3.26) solo attraverso il G-SIF (k). La funzione \underline{V}^1 può essere approssimata tramite un modello FEM e a sua volta K può essere calcolato utilizzando l'integrale indipendente dal percorso scelto (scritto sopra eq (3.30)).

3.6 Calcolo del fattore $K(\omega, \theta_0)$

Fisicamente la funzione di \underline{V}^1 è soluzione di un problema mal posto, in quanto è riferito a una quantità di energia infinità. Il problema è risolto definendo tale funzione all'interno di un dominio illimitato e ponendo che tale funzione all'infinito deve essere pari a $\rho^\lambda \underline{u}(\theta)$. Le uguaglianze espresse nelle (3.26 e 3.27) garantiscono l'esistenza della soluzione.

Dal punto di vista numerico, è possibile pensare di confinare tale dominio (Γ^Δ) ad una distanza molto grande rispetto a quella della dimensione della perturbazione (piccola cricca all'apice dell'intaglio). Tramite un modello FEM è possibile calcolare la funzione $\underline{V}^{1h}(y_1, y_2)$, approssimazione di \underline{V}^1 , ponendo le condizioni al contorno sulla frontiera di tale dominio.

Le condizioni da porre possono essere di due tipi:

$$1. \text{ Condizione di Dirichlet: } \underline{V}^{1h}(y_1, y_2) = \rho^\lambda \underline{u}(\theta) \text{ in } \Gamma^\Delta \quad (3.31)$$

$$2. \text{ Condizione di Neumann: } \tilde{\sigma}(\underline{V}^{1h}) \underline{n}^\Delta = \tilde{\sigma}(\rho^\lambda \underline{u}(\theta)) \underline{n}^\Delta \text{ in } \Gamma^\Delta \quad (3.32)$$

\underline{n}^Δ rappresenta la normale esterna al dominio considerato.

Una volta noto il valore della funzione approssimata è possibile calcolare K utilizzando l'integrale (3.30). Usando per semplicità come cammino di integrazione il dominio Γ^Δ .

E' importante precisare come il valore così calcolato di K non sia molto accurato perché è affetto da un errore K_e . Un valore accurato può essere ottenuto bilanciando gli errori:

$$K(\omega) = \psi(\underline{V}^1(y_1, y_2), \rho^\lambda \underline{u}(\theta)) - K_e \quad (3.33)$$

Generalmente la condizione di Dirichlet tende a sovrastimare il valore di K, mentre quella di Neumann a sottostimarla.

3.7 Metodo numerico per il calcolo di K

Questo termine risulta fondamentale per l'applicabilità del metodo sopracitato e risulta valido per un solo angolo ω_0 e la sua procedura numerica di calcolo consiste negli step seguenti:

- Costruire un modello FEM di un intaglio a spigolo vivo (sharp V-notch) per calcolare gli autovalori e autofunzioni λ e $\underline{u}(\theta)$ per quello specifico angolo di apertura ω_0 . Se siamo in presenza di materiale isotropo e omogeneo questi valori sono ricavabili analiticamente tramite la trattazione di Williams;
- Costruire un secondo modello FEM contenente l'intaglio e una cricca di lunghezza unitaria sull'apice dell'intaglio, il dominio circolare di tale modello deve essere pari a 100 (deve essere sufficientemente più grande rispetto alla lunghezza della cricca);
- Applicare le condizioni al contorno, Dirichlet o Neumann;
- Risolvere il sistema elastico di equazioni per ottenere la soluzione $\underline{V}^1(y_1, y_2)$;
- Sostituire tale soluzione e $\rho^\lambda \underline{u}(\theta)$ all'interno dell'integrale (3.30) e integrare lungo un dominio circolare di qualsiasi raggio (per semplicità si può utilizzare direttamente come percorso di integrazione la frontiera del dominio utilizzato per definire il modello FEM);
- Ripetere gli step precedenti facendo variare l'angolo di apertura dell'intaglio che si vuole studiare.

3.8 Espressione finale del criterio

Nel caso di una cricca ($\omega = 0$) possiamo affermare che l'energia di frattura può essere espressa nel modo seguente, nel caso di stato di deformazione piana:

$$G_c = k_{Ic}^2 2\pi \frac{1-\nu^2}{E} \quad (3.34)$$

Confrontando la (3.7) con la (3.34) notiamo come $K_{|\omega=0} = 2\pi(1-\nu^2)/E$.

A fronte di quest'ultima relazione risulta chiaro che K è proporzionale a $1/E$ qualsiasi sia l'angolo di apertura dell'intaglio; inoltre è stato verificato che per valori del coefficiente di Poisson tra 0.1 e 0.4 la variazione dei risultati previsionali è trascurabile.

Il criterio espresso dalla (3.22) può quindi essere riscritto nella forma seguente^[6]:

$$k \geq k_c = \gamma(\omega) E^{*1-\lambda} G_c^{1-\lambda} \sigma_c^{2\lambda-1} \quad (3.35)$$

Il primo termine dell'espressione rappresenta una funzione universale dipendente dall'angolo di apertura dell'intaglio, mentre E^* rappresenta il modulo elastico "normalizzato":

$$E^* = \frac{E}{2\pi(1-\nu^2)} \quad (3.36)$$

in questo modo K risulta:

$$K = \frac{1}{E^* \gamma(\omega)^{1/(1-\lambda)}} \quad (3.37)$$

successivamente possiamo introdurre il parametro di tenacità a frattura definito da Irwin mediante la (3.34) nella (3.35) ottenendo:

$$k \geq k_c = \gamma(\omega) k_{Ic}^{2(1-\lambda)} \sigma_c^{2\lambda-1} \quad (3.38)$$

I parametri necessari per la determinazione della resistenza del materiale risultano essere sostanzialmente 4:

1. λ che in un materiale omogeneo e isotropo risulta funzione di ω secondo questa equazione:

$$\sin(\lambda(2\pi - \omega)) = \lambda \sin(\omega) \quad (3.39)$$

2. il valore della funzione universale $\gamma(\omega)$;
3. G_c ;
4. σ_c .

E' da notare che all'interno della meccanica della frattura lineare elastica i dati hanno una certa dispersione e inaccuracy, quindi in buona approssimazione possiamo dire che la funzione universale $\gamma(\omega) \cong 1$ (estendendo il valore particolare della cricca anche agli intagli con angolo di apertura diversi).

Per completezza inseriamo il grafico, in fig. 3.2, che rappresenta la variazione della funzione universale rispetto a ω e la tabella 3.1 relativa.

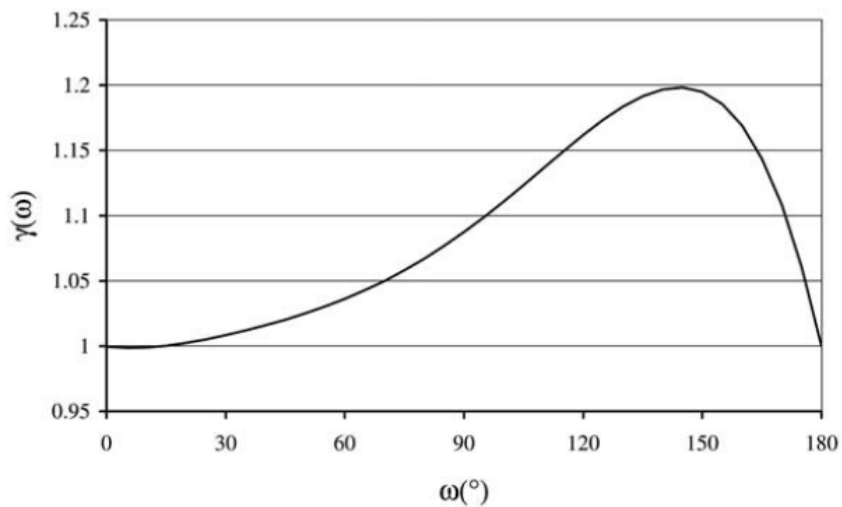


Figura 3.2 – Grafico che mostra l'andamento della funzione universale in funzione dell'angolo di apertura dell'intaglio.

Tabella 3.1 – Valori della funzione universale in funzione dell'angolo di apertura dell'intaglio.

ω (°)	λ	$\gamma(\omega)$	ω (°)	λ	$\gamma(\omega)$
0	0.500	1.00	90	0.545	1.09
5	0.500	1.00	95	0.553	1.10
10	0.500	1.00	100	0.563	1.11
15	0.500	1.00	105	0.574	1.12
20	0.501	1.00	110	0.586	1.14
25	0.501	1.01	115	0.600	1.15
30	0.502	1.01	120	0.615	1.16
35	0.503	1.01	125	0.633	1.17
40	0.504	1.02	130	0.652	1.18
45	0.506	1.02	135	0.673	1.19
50	0.507	1.03	140	0.697	1.20
55	0.510	1.03	145	0.723	1.20
60	0.513	1.04	150	0.752	1.19
65	0.516	1.04	155	0.784	1.19
70	0.520	1.05	160	0.819	1.17
75	0.525	1.06	165	0.858	1.14
80	0.531	1.07	170	0.901	1.11
85	0.537	1.08	175	0.948	1.06
			180	1.000	1.00

4. Metodo SED applicato a modo I puro

4.1 Teoria e ipotesi iniziali

La teoria contrapposta a quella appena presentata è stata formulata da P. Lazzarin^[7] e verrà illustrata nei paragrafi seguenti.

Nel caso di un intaglio a spigolo vivo la distribuzione delle tensioni (dovuta ad una condizione di carico di puro modo 1) di fronte all'apice può essere espressa nella forma seguente

$$\sigma_{ij} = A_1 r^{\lambda_1 - 1} f_{ij}(\theta, \alpha) \quad (4.1)$$

Dove f_{ij} rappresentano le funzioni angolari studiate da Williams^[8] (relative al modo 1, opening mode).

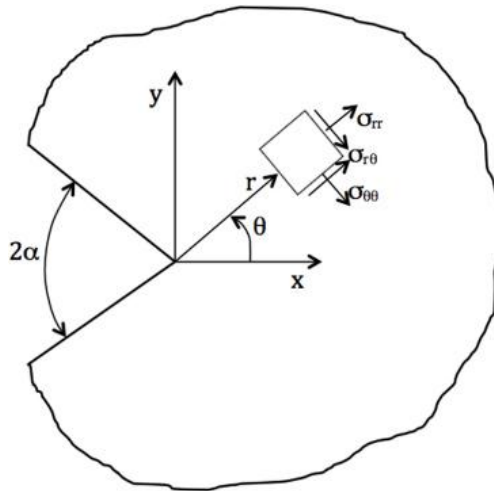


Figura 4.1 – Intaglio a spigolo vivo con rappresentati i due sistemi di riferimento cartesiano e polare centrati sull'apice.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_{\theta\theta} \\ f_{rr} \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{1 + \lambda_1 + \chi_{b1}(1 - \lambda_1)} \\ \left\{ \begin{Bmatrix} (1 + \lambda_1)\cos(1 - \lambda_1)\theta \\ (3 - \lambda_1)\cos(1 - \lambda_1)\theta \\ (1 - \lambda_1)\sin(1 - \lambda_1)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{b1}(1 - \lambda_1) \begin{Bmatrix} \cos(1 + \lambda_1)\theta \\ -\cos(1 + \lambda_1)\theta \\ \sin(1 + \lambda_1)\theta \end{Bmatrix} \right\} & \end{aligned} \quad (4.2)$$

Mentre A_1 può essere espresso in funzione del parametro di campo K_1^V (N-SIF di modo 1 per componente intagliato con spigolo vivo, raggio di raccordo all'apice pari a zero). Mentre il K_1^V può essere calcolato tramite l'espressione formulata da Gross – Mendelson, eq. (4.4)^[9].

$$A_1 = \frac{K_1^V}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.3)$$

$$K_1^V = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} [\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) r^{1-\lambda_1}] \quad (4.4)$$

Una volta noti questi parametri è possibile calcolare in forma chiusa il valore della densità di energia di deformazione in un punto, di coordinate cilindriche (r, θ) , utilizzando l'espressione di Beltrami^[10]:

$$W_1^{(e)}(r, \theta) = \frac{1}{2E} r^{2(\lambda_1-1)} \frac{(K_1^V)^2}{2\pi} [f_{\theta\theta}^2 + f_{rr}^2 + f_{zz}^2 - 2\nu(f_{\theta\theta}f_{rr} + f_{\theta\theta}f_{zz} + f_{rr}f_{zz}) + 2(1 + \nu)f_{r\theta}^2] \quad (4.5)$$

Nulla è stato detto sulla funzione f_{zz} in quanto il suo valore dipende dalle condizioni in cui viene svolta l'analisi. Le condizioni ipotetiche di analisi sono principalmente 2:

1. deformazione piana: dove il materiale si ritrova in una condizione di deformazione biassiale e stato tensionale triassiale

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (4.6)$$

che si traduce in uno stato tensionale lungo l'asse z che vale

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}) \quad (4.7)$$

2. tensione piana: dove il materiale si trova in una condizione di stato piano di tensione e stato triassiale di deformazione

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (4.8)$$

che si traduce in uno stato di deformazione lungo l'asse z pari a

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}) \quad (4.9)$$

A causa dell'alto gradiente di tensioni che si genera in prossimità dell'apice dell'intaglio si preferisce ipotizzare che in quella regione di materiale viga una condizione di stato piano di deformazione, in modo da non trascurare le eventuali tensioni σ_{zz} che per le ipotesi descritte sopra anch'esse tenderanno all'infinito.

Integrando tale densità di energia in un volume finito di materiale si ottiene l'energia totale di deformazione generata dallo stato tensionale applicato a monte e a valle dell'intaglio.

$$E_1^{(e)} = \int_V W_1^{(e)} dV \quad (4.10)$$

Trattandosi però di ipotesi di deformazione piana (il materiale non subisce deformazione lungo l'asse z) possiamo pensare di trascurare lo spessore passando quindi da volume di controllo ad area.

$$E_1^{(e)} = \int_A W_1^{(e)} dA = \int_0^{R_c} \int_{-\gamma}^{+\gamma} W_1^{(e)}(r, \theta) r dr d\theta = \frac{1}{E} \frac{I_1(\gamma)}{4\lambda_1} (K_1^V)^2 R_c^{2\lambda_1} \quad (4.11)$$

Dove $I_1(\gamma)$ rappresenta l'integrale delle funzioni angolari in funzione della semi ampiezza dell'angolo solido considerato, vedi fig. 4.2.

$$I_1(\gamma) = \int_{-\gamma}^{+\gamma} [f_{\theta\theta}^2 + f_{rr}^2 + f_{zz}^2 - 2\nu(f_{\theta\theta}f_{rr} + f_{\theta\theta}f_{zz} + f_{rr}f_{zz}) + 2(1 + \nu)f_{r\theta}^2] d\theta \quad (4.12)$$

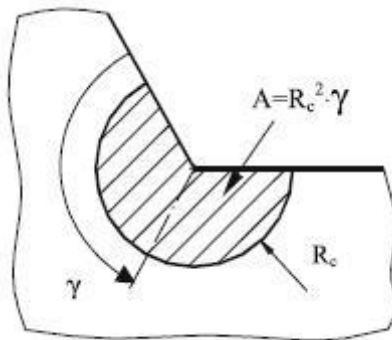


Figura 4.2 – Volume di controllo centrato sull'apice dell'intaglio e definizione di angolo solido.

La dimensione dell'area su cui mediare quest'energia di deformazione totale è pari a:

$$A = \int_0^{R_c} \int_{-\gamma}^{+\gamma} r dr d\theta = R_c^2 \gamma \quad (4.13)$$

La densità di energia di deformazione mediata su tutta l'area di controllo viene calcolata mediante l'espressione seguente:

$$\bar{W}_1^{(e)} = \frac{E_1^{(e)}}{A} = \frac{1}{E} \frac{I_1(\gamma)}{4\lambda_1 \gamma} \left(\frac{K_{1c}^V}{R_c^{1-\lambda_1}} \right)^2 \quad (4.14)$$

Il cedimento nel materiale avverrà nel momento in cui verrà raggiunto un valore critico W_c che dipende direttamente dal materiale in esame. Questo valore critico per un materiale che dimostra comportamento lineare fino a rottura (rottura fragile) può essere valutato mediante una prova di trazione monoassiale con provino liscio.

$$W_c = \frac{\sigma_t^2}{2E} \quad (4.15)$$

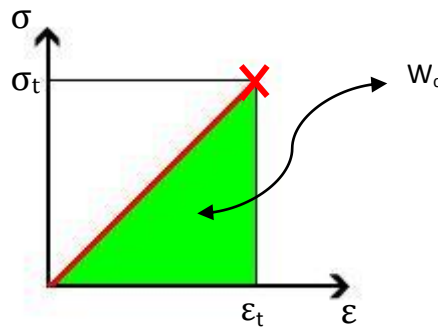


Figura 4.3 – Schema di una prova di trazione con rottura fragile.

Una volta noto il valore della densità di energia critica che porta al cedimento del materiale considerato è possibile ricavare il raggio di del volume di controllo R_c utilizzando la formula sopra descritta, eq. (4.14). Se siamo in presenza di un intaglio con $2\alpha \neq 0$ dovrò utilizzare il valore del K_{1c}^V (cioè il valore critico del N-SIF che provoca il cedimento del materiale per quel dato angolo di apertura), mentre se siamo in presenza di un angolo di apertura pari a zero l'N-SIF diventa SIF e diventa coincidente con la tenacità a frattura del materiale K_{Ic} .

$$R_c = \left[\frac{1}{E} \frac{I_1(\gamma)}{4\lambda_1\gamma} \frac{(K_{Ic} V)^2}{W_c} \right]^{\frac{1}{2(1-\lambda_1)}} \quad (4.16)$$

Oppure il valore del raggio del volume di controllo può essere espresso come suggerito da Yosibash^[11] (2004):

$$R_c = \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{4\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_t} \right)^2 \quad (4.17)$$

Sostituendo il valore del raggio del volume di controllo appena presentato nell'espressione per il calcolo della densità di energia di deformazione elastica (eq. (4.14)) ed uguagliando tale valore con il valore critico (eq. (4.15), ottenuto tramite la prova di trazione con il provino liscio) si ottiene una stima del valore critico dell'N-SIF. Questo valore sarà funzione del materiale in esame e della geometria considerata.

4.2 Espressione finale del metodo

$$K_{Ic} V = \left(\frac{2\lambda_1\gamma}{I_1(\gamma)} \right)^{1/2} \left(\frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{4\pi} \right)^{1-\lambda_1} K_{Ic}^{2(1-\lambda_1)} \sigma_t^{2\lambda_1-1} \quad (4.18)$$

L'espressione appena descritta mostra come sia possibile valutare il N-SIF critico per un dato provino in un materiale noto che presenta uno sharp V-notch di apertura nota. Grazie a questo criterio è possibile valutare il campo di tensioni critiche che portano a rottura il materiale senza dover ogni volta operare delle prove "ad hoc" per ogni angolo di apertura dell'intaglio considerato.

5. Confronto tra i due criteri in modo I puro

5.1 Sintesi delle espressioni finali dei due metodi

Risulta, ora, possibile operare un confronto diretto tra i valori ottenibili applicando le espressioni omologhe dei due rispettivi criteri.

Riprendiamo brevemente l'espressione per il calcolo del N-SIF a rottura ricavata da Leguillon:

$$k_{1c}^V = \left(\frac{G_c}{K(\omega, \theta_c)} \right)^{1-\lambda_1} \sigma_t^{2\lambda_1-1} \quad (5.1)$$

Sostituendo il valore di G_c con il K_{Ic}

$$G_c = k_{Ic}^2 2\pi \frac{(1-\nu^2)}{E} \quad (5.2)$$

Nelle ipotesi di puro modo I è ben noto come l'unica direzione possibile di propagazione di una cricca che si formi all'apice dell'intaglio sia per $\theta_c = 0^\circ$ (ossia lungo la bisettrice dello stesso), possiamo quindi scrivere $K(\omega, \theta_c=0^\circ)$ nella notazione seguente $K(\omega)$.

$$k_{1c}^V = \left[\frac{2\pi (1-\nu^2)}{E K(\omega)} \right]^{1-\lambda_1} k_{Ic}^{2(1-\lambda_1)} \sigma_t^{2\lambda_1-1} \quad (5.3)$$

E' inoltre impotante notare che la definizione del k fornita da Leguillon non è la stessa rispetto a quella utilizzata nel modello del SED; infatti rispetto alla definizione del secondo modello il primo adotta la seguente espressione:

$$k^{Leguillon} = \frac{K^{Gross-Mendelson}}{\sqrt{2\pi}} \quad (5.4)$$

Applicando quest'ultima sostituzione alla (5.3) otteniamo l'espressione finale seguente:

$$K_{1c}^V = \left[\frac{2\pi (1 - \nu^2)}{E K(\omega)} \right]^{1-\lambda_1} (2\pi)^{\lambda_1 - \frac{1}{2}} K_{Ic}^{2(1-\lambda_1)} \sigma_t^{2\lambda_1 - 1}$$

$$K_{1c}^V = \gamma(\omega) (2\pi)^{\lambda_1 - \frac{1}{2}} K_{Ic}^{2(1-\lambda_1)} \sigma_t^{2\lambda_1 - 1} \quad (5.5)$$

Le due formule appena scritte sono del tutto equivalenti, è stato sostituito al primo termine la definizione che lo stesso Leguillon propone: $\gamma(\omega) = \text{FUNZIONE UNIVERSALE}$.

Utilizzando i valori di $K(\omega)$ tabellati è possibile valutare l'N-SIF critico per un dato materiale e data geometria. Il valore di questo parametro è influenzato solamente dalla geometria considerata e essendo stato ricavato in ipotesi di comportamento del materiale lineare elastico è possibile ricavare i nuovi valori partendo da quelli riportati in tabella utilizzando la seguente proporzione

$$K(\omega)^{new} = K(\omega)^{Leguillon} \frac{2,3}{1-0,36^2} \frac{1-(\nu^{new})^2}{E^{new}} \quad (5.6)$$

Tabella 5.1 – Valori della funzione geometrica in funzione di precisi angoli di apertura.

ω	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	165°	180°
$K(\omega)$	0.00248	0.00243	0.00242	0.00237	0.00212	0.00176	0.00128	0.00098	0.00069

I valori del parametro K sono stati calcolati considerando un materiale con modulo di Young 2,3 GPa e coefficiente di Poisson 0,36.

Il primo termine dell'espressione di Leguillon può essere espresso come una funzione universale $\gamma(\omega)$ che ha il seguente grafico

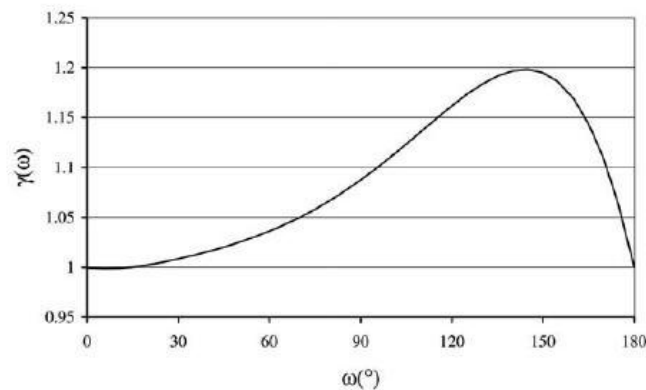


Figura 5.1–Andamento funzione universale.

Essa vale 1 quando l'angolo di apertura è pari a 0° (caso della cricca) e quando l'angolo di apertura è pari a 180° (caso del provino liscio), dal grafico possiamo notare un massimo in corrispondenza di un'apertura leggermente inferiore ai 150° . Lo stesso Leguillon afferma che in prima approssimazione è possibile trascurare la dipendenza della funzione universale dall'angolo di apertura e approssimarla ad un valore costante pari a 1. Infatti per angoli fino a circa 90° (quelli di maggior interesse pratico) il suo valore non si discosta di molto dall'unità.

La funzione universale può essere calcolata partendo dai valori tabellati con la seguente espressione:

$$\gamma(\omega) = \left(\frac{2\pi}{K(\omega)_{Leguillon}} \frac{1-0,36^2}{2300} \right)^{1-\lambda_1} \quad (5.7)$$

5.2 Confronto analitico

Prendendo in esame le due espressioni finali notiamo come esse si presentino in una forma pressochè coincidente:

1. Entrambe le equazioni presentano la tenacità a frattura del materiale (K_{Ic}) elevata al doppio del grado di singolarità che si sta considerando;
2. Entrambe le equazioni presentano come terzo termine moltiplicativo la tensione a rottura del materiale base non intagliato elevato a 2 volte l'autovalore di modo 1 di Williams associato alla geometria considerata meno 1.
3. Mentre il primo termine differisce per forma e parametri coinvolti.

Concentrandosi sul confronto tra i primi due termini delle espressioni possiamo notare come pur essendoci parametri diversi essi però siano dipendenti dalle stesse grandezze:

- in entrambe le espressioni troviamo parametri che sono direttamente correlati all'angolo di apertura dell'intaglio;

- solo nella espressione del SED troviamo parametri che sono funzione del materiale considerato;
- solo nel SED troviamo un parametro che tiene conto delle ipotesi di stato tensionale e deformazionale che si sta considerando.

I parametri correlati alla geometria nel criterio del Strain energy density sono: l'autovalore di Williams per modo I (λ_1), la semi ampiezza dell'angolo solido ($\gamma = \pi - \alpha$).

I parametri correlati alla geometria nel criterio di Leguillon sono: come nel caso sopra l'autovalore di Williams e il fattore geometrico $K(\omega)$ che anch'esso dipende direttamente dall'angolo di apertura dell'intaglio e indirettamente dal materiale con cui lo si è calcolato (in quanto la sua determinazione non è possibile ottenerla in forma chiusa, ma bisogna ricorrere ad un codice agli elementi finiti per stimarlo). Come è stato dimostrato precedentemente il termine può essere pensato come ad una funzione universale dipendente solo dall'angolo di apertura dell'intaglio (ω).

Nel criterio del SED troviamo il modulo di Poisson che è stato introdotto quando è stato sostituito il valore del raggio del volume di controllo sul quale mediare e calcolare l'energia di deformazione totale.

Troviamo anche il valore dell'integrale $I_1(\gamma)$ che dipende direttamente dalla geometria e dal materiale ed è indirettamente dipendente dalle ipotesi tensionali e di deformazione considerate. Infatti questo termine viene calcolato sulle funzioni angolari determinate dalla trattazione di Williams per la determinazione del campo tensionale di fronte all'apice dell'intaglio (esse variano in funzione della coordinata θ del sistema di riferimento e quindi il valore dell'integrale dipende dall'angolo solido considerato), inoltre il suo valore dipende dalle ipotesi che vengono imposte sul materiale nella direzione z. Grazie a tali ipotesi e alle equazioni di Lamè è possibile infatti ricavare il valore della f_{zz} (come dimostrato sopra nella presentazione del metodo SED).

5.3 Confronto numerico

5.3.1 Calcolo del coefficiente di Leguillon

Sfruttando i valori della funzione universale forniti dallo stesso Leguillon è possibile calcolare i valori N-SIF critici per diversi angoli di apertura da 0 a 180°.

Tabella 5.2 – Andamento coefficiente di Leguillon al variare dell'angolo di apertura dell'intaglio

ω [°]	coefficiente	ω [°]	coefficiente	ω [°]	coefficiente	ω [°]	coefficiente
0	1	45	1,031	90	1,184	135	1,635
5	1	50	1,043	95	1,213	140	1,724
10	1	55	1,049	100	1,246	145	1,808
15	1	60	1,065	105	1,283	150	1,891
20	1,002	65	1,071	110	1,335	155	2,006
25	1,012	70	1,089	115	1,382	160	2,103
30	1,014	75	1,110	120	1,433	165	2,201
35	1,016	80	1,133	125	1,494	170	2,319
40	1,028	85	1,156	130	1,560	175	2,415
						180	2,507

Questi dati portano ad un andamento riportato in fig.5.2 (qui sotto) al variare dell'angolo di apertura considerato.

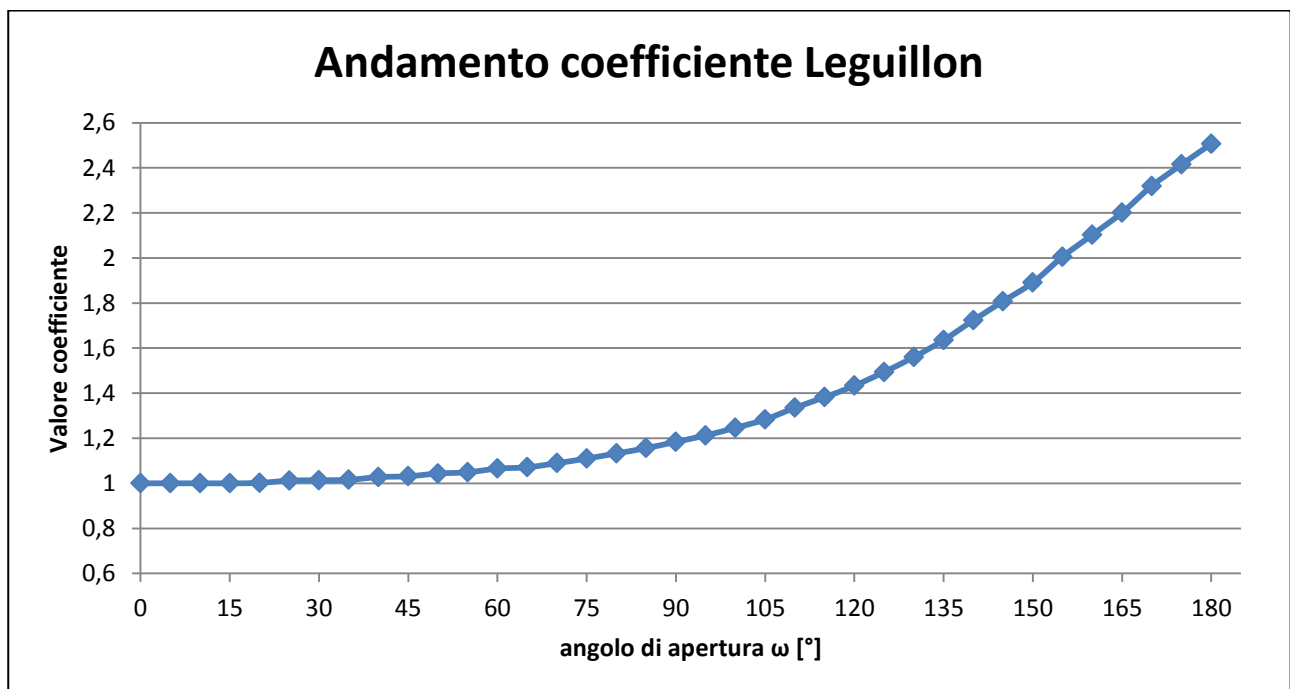


Figura 5.2 – Andamento coefficiente di Leguillon al variare dell'angolo di apertura dell'intaglio.

Una volta noto il valore di tale coefficiente è possibile calcolare il valori dei K_{Ic}^V per tutti gli angoli di nostro interesse, nasce la necessità di introdurre i parametri del materiale per il quale vogliamo calcolare gli N-SIF critici:

Prendiamo in esame il PMMA con le seguenti caratteristiche fisiche:

- Modulo di Young => $E = 3000 \text{ MPa}$
- Coefficiente di Poisson => $\nu = 0,4$
- Tenacità a frattura => $K_{Ic} = 1 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$
- Tensione a rottura => $\sigma_t = 136 \text{ MPa}$ (ricavata dal valore di densità di energia critica $W_c = 3,08 \text{ MJ/m}^3$)

Tabella 5.3 – Valori degli N-SIF critici calcolati tramite il criterio di Leguillon al variare dell'angolo di apertura dell'intaglio.

$\omega [^\circ]$	$\gamma(\omega)$	coefficiente	λ_1	$1 - \lambda_1$	K_{Ic} [MPa*m ^{1/2}]	σ_t [MPa]	K_{Ic}^V stimato [MPa*m ^{1-λ]}
0	1	1	0,5	0,5	1	136	1,00
5	1	1	0,5	0,5	1	136	1,00
10	1	1	0,5	0,5	1	136	1,00
15	1	1	0,5	0,5	1	136	1,00
20	1	1,002	0,501	0,499	1	136	1,01
25	1,01	1,012	0,501	0,499	1	136	1,02
30	1,01	1,014	0,502	0,498	1	136	1,03
35	1,01	1,016	0,503	0,497	1	136	1,05
40	1,02	1,028	0,504	0,496	1	136	1,07
45	1,02	1,031	0,506	0,494	1	136	1,09
50	1,03	1,043	0,507	0,493	1	136	1,12
55	1,03	1,049	0,51	0,49	1	136	1,16
60	1,04	1,065	0,513	0,487	1	136	1,21
65	1,04	1,071	0,516	0,484	1	136	1,25
70	1,05	1,089	0,52	0,48	1	136	1,33
75	1,06	1,110	0,525	0,475	1	136	1,42
80	1,07	1,133	0,531	0,469	1	136	1,54
85	1,08	1,156	0,537	0,463	1	136	1,66
90	1,09	1,184	0,545	0,455	1	136	1,84
95	1,1	1,213	0,553	0,447	1	136	2,04
100	1,11	1,246	0,563	0,437	1	136	2,31
105	1,12	1,283	0,574	0,426	1	136	2,65
110	1,14	1,335	0,586	0,414	1	136	3,11
115	1,15	1,382	0,6	0,4	1	136	3,69

120	1,16	1,433	0,615	0,385	1	136	4,44
125	1,17	1,494	0,633	0,367	1	136	5,52
130	1,18	1,560	0,652	0,348	1	136	6,95
135	1,19	1,635	0,673	0,327	1	136	8,95
140	1,2	1,724	0,697	0,303	1	136	11,94
145	1,2	1,808	0,723	0,277	1	136	16,17
150	1,19	1,891	0,752	0,248	1	136	22,49
155	1,19	2,006	0,784	0,216	1	136	32,66
160	1,17	2,103	0,819	0,181	1	136	48,31
165	1,14	2,201	0,858	0,142	1	136	74,18
170	1,11	2,319	0,901	0,099	1	136	119,26
175	1,06	2,415	0,948	0,052	1	136	197,03
180	1	2,507	1	0	1	136	340,90

La tabella 5.3 e la fig. 5.3 mostrano i valori degli N-SIF critici predetti dal modello di Leguillon nel caso di provini intagliati soggetti a puro modo I.

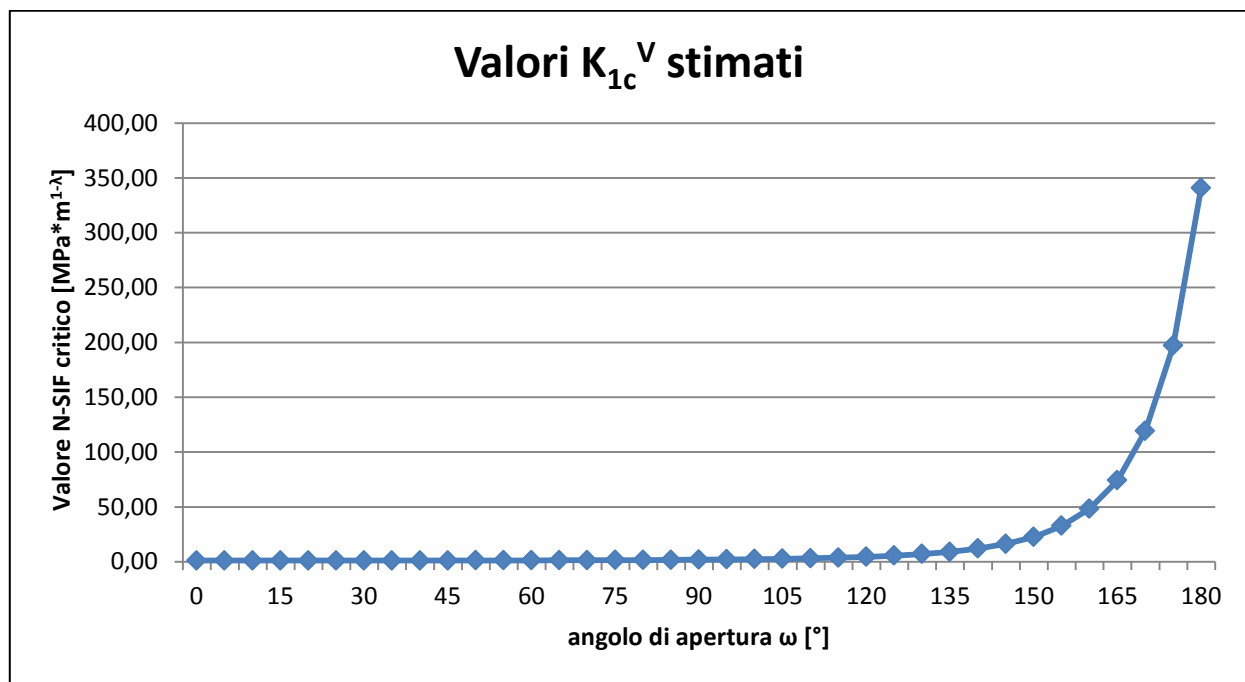


Figura 5.3 – Andamento N-SIF critici calcolati tramite il criterio di Leguillon.

E' possibile notare, sia dalla tabella 5.3 che dal grafico (fig. 5.3) sopra, che l'andamento degli N-SIF critici è monotono crescente con un tasso di crescita molto basso per angoli da 0° a 90° e successivamente esso tende a crescere velocemente per angoli superiori.

5.3.2 Calcolo del primo termine dell'espressione del SED

Tabella 5.4 – Valori del primo termine del SED (nota: i valori dell'integrale sono calcolati rispetto al coeff. di Poisson = 0.4 e in ipotesi di stato piano di deformazione)

ω [°]	λ_1	$\Pi(\gamma)$	γ [rad]	coefficiente
0	0,5000	0,6300	3,1416	1,000
15	0,5002	0,6303	3,0107	0,979
30	0,5014	0,6301	2,8798	0,961
45	0,5050	0,6282	2,7489	0,949
60	0,5122	0,6235	2,6180	0,947
75	0,5247	0,6152	2,4871	0,960
90	0,5445	0,6024	2,3562	0,993
105	0,5739	0,5849	2,2253	1,054
120	0,6157	0,5624	2,0944	1,155
135	0,6736	0,5344	1,9635	1,317
150	0,7520	0,5013	1,8326	1,574
160	0,8187	0,4767	1,7453	1,830
170	0,9000	0,4523	1,6581	2,187
180	1,0000	0,2800	1,5708	3,349

Possiamo notare dalla tabella 5.4 e dal grafico (fig. 5.4) che il valore del coefficiente presente nella formula del SED sia in perfetto accordo con la teoria, in quanto esso vale esattamente 1 quando l'angolo di apertura è pari a 0° (caso della cricca); la previsione del modello in questo caso è proprio il K_{Ic} del materiale in considerazione.

Possiamo notare che tale coefficiente presenta un minimo a 45° (cosa in contraddizione con la teoria) e presenta un massimo in corrispondenza dei 170° (questo, invece, in perfetto accordo con la teoria).

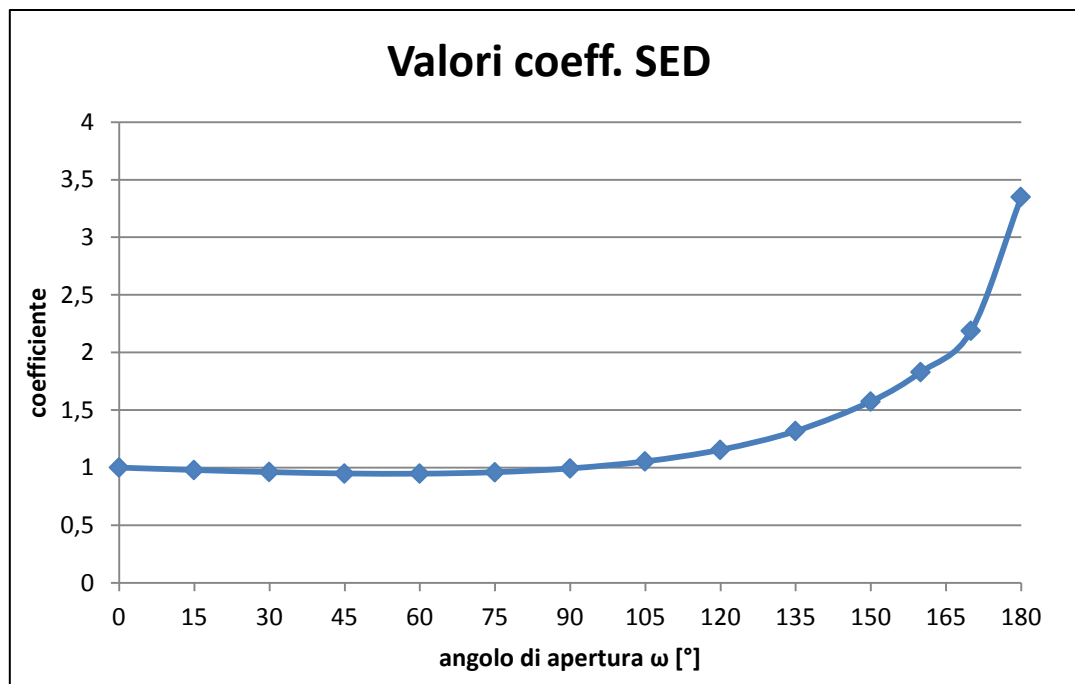


Figura 5.4 – Andamento del primo termine della formula del SED.

Noto il valore di questo termine è possibile calcolare i valori degli N-SIF critici applicando l'espressione fornita dal criterio del SED:

Tabella 5.5 – Valori degli N-SIF critici calcolati tramite il metodo del SED al variare dell'angolo di apertura dell'intaglio.

ω [°]	λ_1	$I_1(\gamma)$	γ [rad]	coefficiente	K_{Ic} [MPa*m ^{1/2}]	σ_t [MPa]	K_{Ic}^V stimato [MPa*m ^{1-λ_1}]
0	0,5000	0,6300	3,1416	1,000	1	136	1,000
15	0,5002	0,6303	3,0107	0,979	1	136	0,981
30	0,5014	0,6301	2,8798	0,961	1	136	0,974
45	0,5050	0,6282	2,7489	0,949	1	136	0,997
60	0,5122	0,6235	2,6180	0,947	1	136	1,068
75	0,5247	0,6152	2,4871	0,960	1	136	1,223
90	0,5445	0,6024	2,3562	0,993	1	136	1,537
105	0,5739	0,5849	2,2253	1,054	1	136	2,178
120	0,6157	0,5624	2,0944	1,155	1	136	3,599
135	0,6736	0,5344	1,9635	1,317	1	136	7,249
150	0,7520	0,5013	1,8326	1,574	1	136	18,722
160	0,8187	0,4767	1,7453	1,830	1	136	41,908
170	0,9000	0,4523	1,6581	2,187	1	136	111,372
180	1,0000	0,2800	1,5708	3,349	1	136	455,549

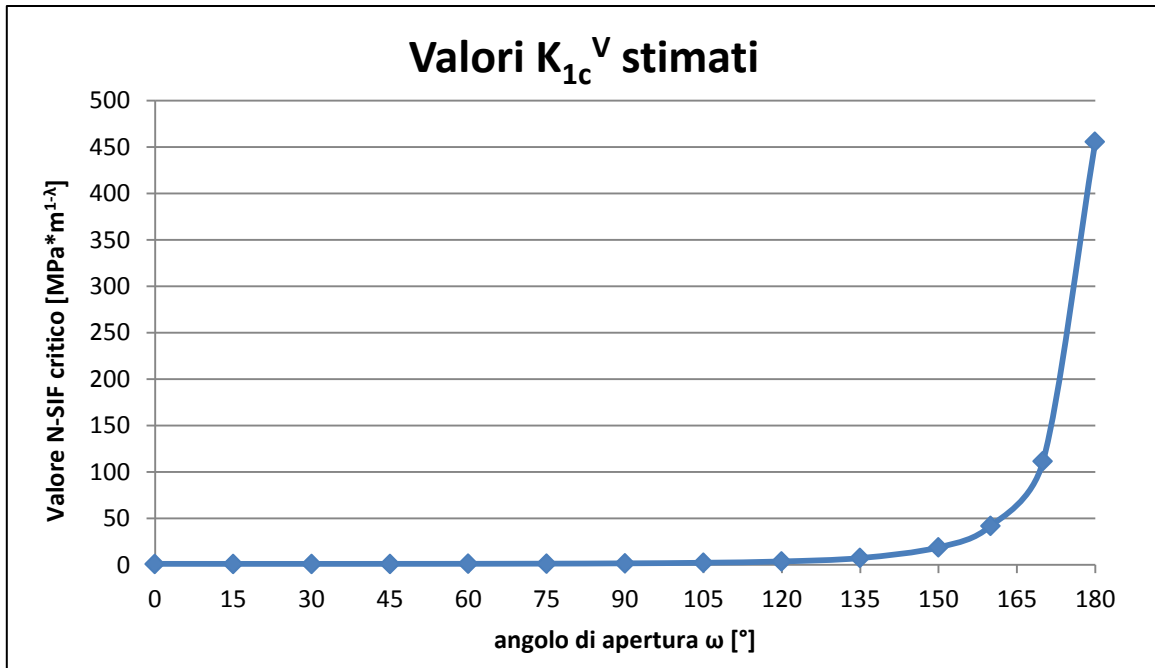


Figura 5.5 –Andamento del degli N-SIF critici calcolati tramite il metodo del SED al variare dell'angolo di apertura dell'intaglio.

Dalla tabella 5.5 e dal grafico, in fig. 5.5, è possibile notare come sia presente un minimo di poco inferiore al valore a 0° in corrispondenza dei 45°, ciò sembrerebbe in disaccordo con la teoria in quanto il caso più critico è rappresentato dalla cricca (il grado di singolarità ha valore massimo 0,5).

5.3.3 Confronto diretto tra i parametri

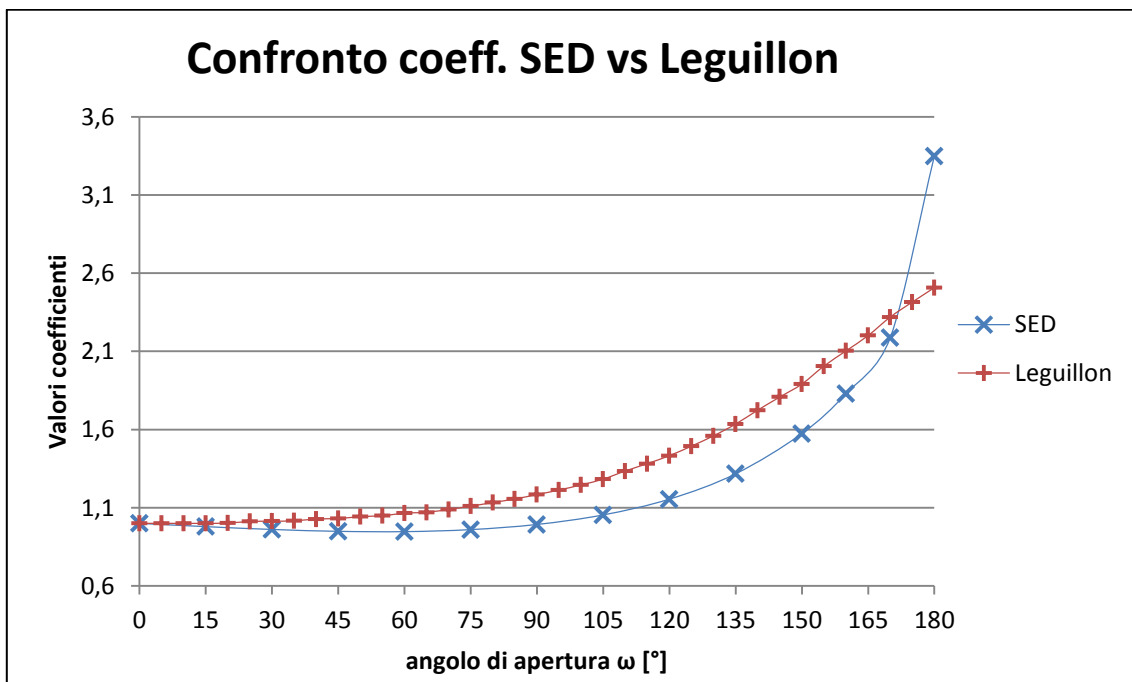


Figura 5.6 –Confronto diretto tra gli andameneti dei coefficienti delle due metodi.

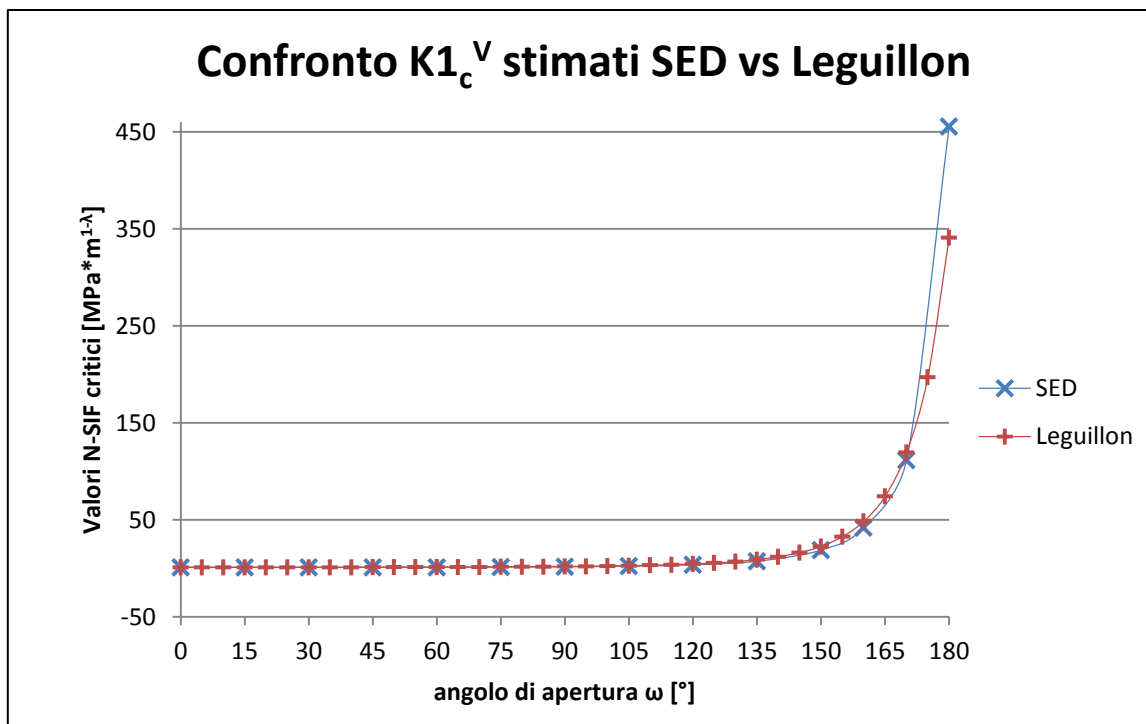


Figura 5.7 – Confronto tra gli N-SIF critici predetti dai due criteri al variare dell'angolo di apertura dell'intaglio.

Tabella 5.6 – Confronto diretto tra gli N-SIF forniti dai due metodi.

ω [°]	K_{Ic} SED	K_{Ic} Leguillon
0	1,00	1,00
15	0,98	1,00
30	0,97	1,03
45	1,00	1,09
60	1,07	1,21
75	1,22	1,42
90	1,54	1,84
105	2,18	2,65
120	3,60	4,44
135	7,25	8,95
150	18,72	22,49
160	41,91	48,31
170	111,37	119,26
180	455,55	340,90

Dai due grafici (fig. 5.6 e 5.7) appena presentati e dalla tabella 5.6 è possibile notare come le leggere differenze che troviamo nei coefficienti da 30 a 180 gradi non si ripercuotono nel calcolo dei valori degli N-SIF critici, infatti nel secondo grafico le due curve sono praticamente sovrapposte lungo il dominio $[0^\circ - 180^\circ]$. Differenze più marcate degli N-SIF si possono notare per angoli superiori ai 135° .

Se si opera un confronto basato sui dati tabellati si nota che gli N-SIF critici calcolati tramite il criterio della Strain Energy Density tendono a essere leggermente inferiori rispetto a quelli calcolati con il modello di Leguillon lungo tutto l'intervallo $[0^\circ-180^\circ]$. Confrontando ora i valori ottenuti con i valori ricavati da prove di trazione su provini intagliati è possibile determinare quale dei due metodi più si avvicina ai dati sperimentali ed eventualmente il grado di sicurezza dei valori predetti.

5.4 Confronto con i dati sperimentali

5.4.1 Analisi FEM per il calcolo degli N-SIF critici partendo dai dati sperimentali

Analisi fem ottenuta tramite software Ansys 12.0 dove è stato modellato mezzo provino in ipotesi di deformazione piana con elementi plane 82 a 8 nodi.

In caso di puro modo I essendo presente una simmetria geometrica del provino, di carichi e vincoli applicati è possibile sfruttare questo aspetto per semplificare il modello, rendendo l'analisi numerica più snella e veloce.

Questo tipo di analisi consiste in due fasi ben distinte:

1. Modellazione del provino;
2. Generazione dei risultati di particolare interesse per il tipo di analisi che si sta conducendo.

1. MODELLAZIONE DEL PROVINO

Durante la modellazione del provino si parte dalla definizione dei keypoints, ossia i vertici o comunque punti notevoli che servono per creare la geometria nella sua totalità, fig. 5.8.

Successivamente si passa alla definizione delle linee danno la forma al modello, sia nella sua interezza, sia lo suddividendolo in aree interne le cui forme e dimensioni serviranno per la corretta estrapolazione dei dati di interesse durante l'analisi, fig.5.8.

La definizione delle aree, come già detto è basata sull'utilizzo delle linee, e permette di suddividere il modello in modo che la successiva creazione degli elementi sia coerente con i risultati che si vogliono ottenere, fig. 5.8.

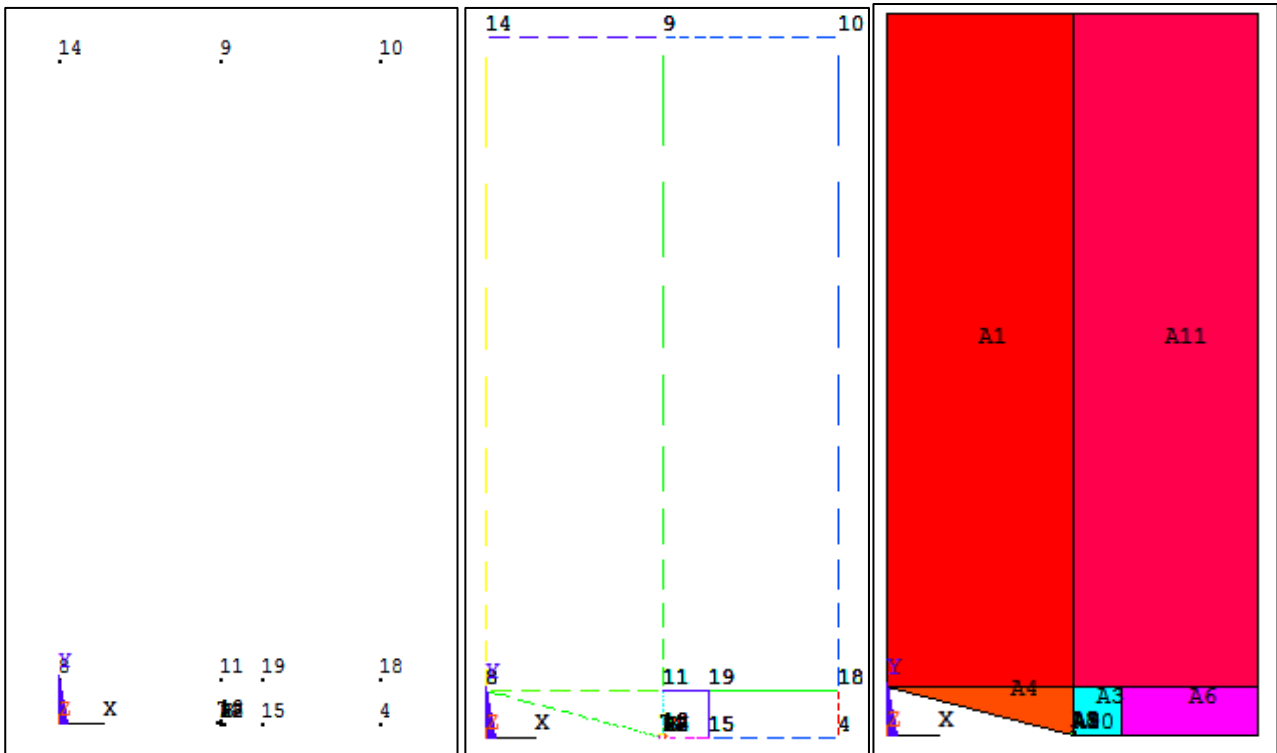


Figura 5.8 –Da sx a dx, definizione dei Keypoints, creazione delle linee e creazione delle aree.

Un volta create le aree si passa alla definizione della suddivisione delle linee in modo da avere elementi molto piccoli in prossimità dei punti di particolare interesse e via via più grandi allontanandosi da questi. Ciò ci permette di concentrare i calcoli operati dal programma (quindi risorse del calcolatore) solo nelle zone di particolare interesse per l'analisi e risparmiare calcoli "inutili" in aree lontane (tecnicamente si dice che si risparmiano nodi, in quanto ogni nodo presente nel modello prevede una equazione da risolvere per il calcolatore).

Nei casi presi in esame in questa trattazione l'area di maggior interesse è quella in estrema prossimità dell'apice dell'intaglio e centrata proprio nell'apice dell'intaglio, fig. 5.9. Saranno, infatti, quelle le zone soggette all'analisi dei risultati.

Per creare un'orientazione degli elementi dall'apice dell'intaglio verso il lato opposto del provino si provvede a creare un "concentration keypoint" rappresentato proprio dal punto di riferimento per modellare l'apice dell'intaglio stesso, fig. 5.9.

Una volta definito il tutto si provvede a creare una "mesh" di tipo "free" nelle aree direttamente adiacenti all'apice dell'intaglio (il comando concentration keypoint funziona solamente con una mesh di tipo free), mentre si utilizza una mesh di tipo "mapped" per le restanti aree, fig.5.10.

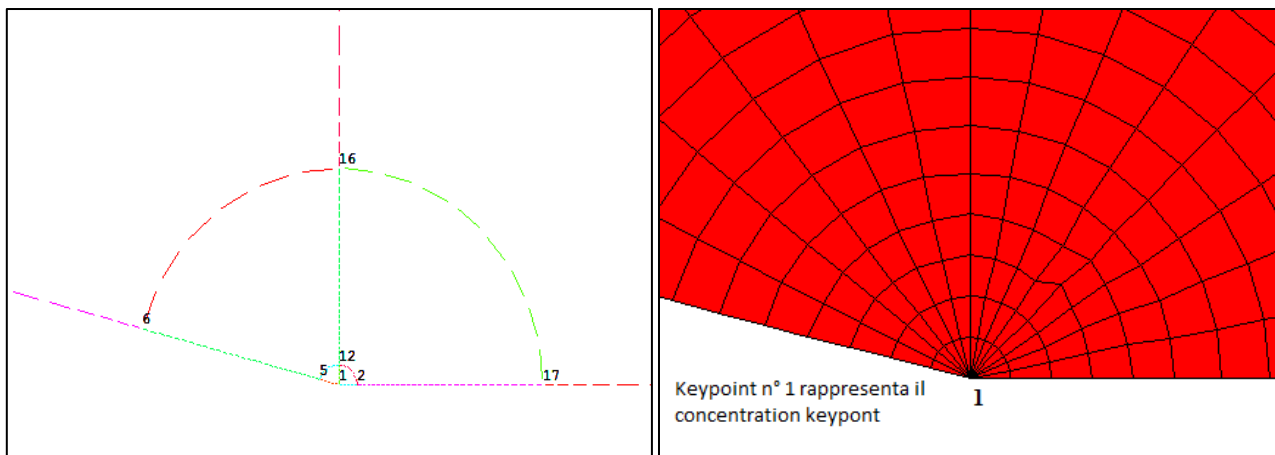


Figura 5.9 – Zoom sull’apice dell’intaglio (a sx), elementi concentrati sull’apice dell’intaglio (a dx).

Per ultimo si provvede ad applicare i carichi e i vincoli. Nel nostro caso i carichi sono rappresentati o da forze nodali o da carichi distribuiti lungo una linea. Mentre come vincoli si pone solitamente la simmetria lungo l’asse di simmetria usato per sezionare idealmente il provino e il relativo appoggio in un nodo definito dal tipo di prova che si sta modellando, fig.5.10.

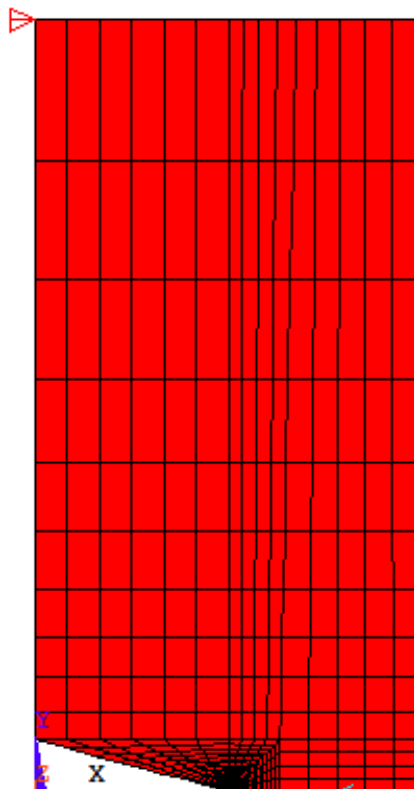


Figura 5.10 – Modello completo di un provino “Three point bending”, grazie alla simmetria assiale passante per l’apice dell’intaglio e parallela (nel modello all’asse x del sistema di riferimento), è stato possibile applicare uno solo dei due appoggi e la forza nodale agente parallelamente alla bisettrice dell’intaglio. La simmetria è stata applicata sulle linee che congiungono l’apice dell’intaglio fino al nodo dove è stata applicata la forza.

2. ESTRAPOLAZIONE DEI RISULTATI

Alla fine della modellazione si passa soluzione del modello tramite il comando “solve”.

Risolto il modello si provvede in primo luogo a verificare la forma della deformata fig. 5.11, in quanto rappresenta un primo controllo qualitativo sulla bontà dell’analisi. Se essa dovesse apparire molto diversa da quella prevista dal tipo di configurazione modellata significherebbe che sono stati commessi errori o nella definizione del modello stesso o nell’applicazione dei vincoli e dei carichi. Nel caso in esame (modo I puro) una particolare attenzione si deve porre nella zona vicina all’apice dell’intaglio, in quanto il fianco dell’intaglio deve assumere una forma tipica di questa sollecitazione a “ramo di iperbole” e lo spostamento dei nodi appartenenti alla bisettrice dell’intaglio deve avvenire solo lungo l’asse x, fig. 5.12.

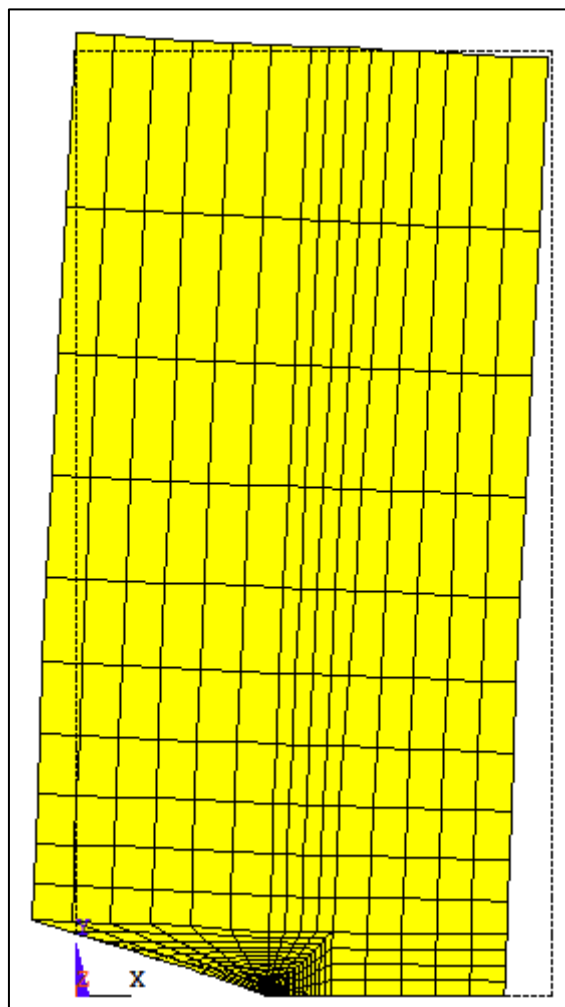


Figura 5.11 – Deformata totale del modello “Three point bending”, si può ben notare come il provino sia soggetto a flessione lungo l’asse y.

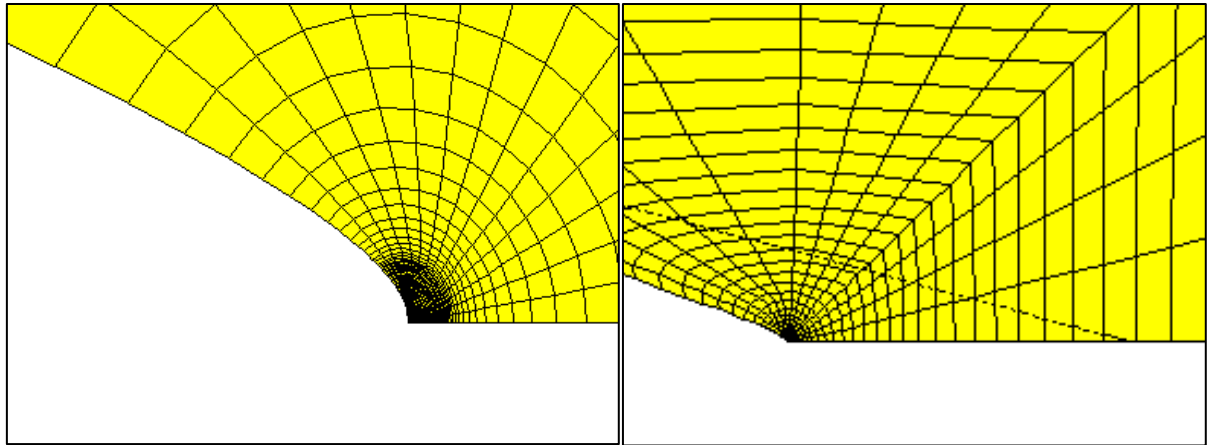


Figura 5.12 – Zoom sul fianco dell’intaglio (a dx), verifica della traslazione dei nodi lungo la bisettrice lungo l’asse x (nota: la linea tratteggiata indica il fianco dell’intaglio della struttura indeformata) (a sx).

Verificata qualitativamente la deformata si passa alla ricerca dei dati di interesse per l’analisi, in questo caso particolare sfruttando l’espressione di Gross – Mendelson, eq. (4.4), urge la necessità di estrapolare i valori delle tensioni dei nodi presenti lungo la bisettrice. In particolare le tensioni che agiscono in direzione perpendicolare ad essa (in questo modello σ_{yy}), tensioni che tendono ad aprire l’intaglio facendo nucleare la cricca all’apice (come detto all’inizio della trattazione il modo I viene anche denominato “opening mode”), tabella 5.7.

Grazie alle espressioni (4.1 – 4.3) è possibile condurre una seconda valutazione (in questo caso) quantitativa che permette di valutare la bontà del modello. La teoria, infatti, ci permette di affermare che la bisettrice dell’intaglio rappresenta l’unico luogo geometrico di punti dove modo I e modo II risultano disaccoppiati; grazie a ciò risulta necessario, al fine della verifica, estrapolare dal modello i valori delle tensioni di taglio (τ_{xy}) nei nodi appartenenti alla bisettrice. Questi valori dovranno essere nulli (o valori molto prossimi a zero a causa dell’approssimazione numerica dell’analisi).

Per poter ricavare dal modello questi risultati si procede generando un “path” di nodi scelti in modo ordinato dall’apice dell’intaglio verso l’interno del materiale lungo la bisettrice. La teoria utilizzata per questo tipo di fenomeno ha un approccio di tipo locale, in quanto le formule descritte hanno un campo di validità ristretto (dell’ordine dei decimi di mm).

Note le tensioni e le distanze dall’apice a cui si riferiscono è possibile calcolare il valore dell’ N-SIF applicando la (4.4). Tale valore dovrà essere costante lungo il path scelto.

Come ulteriore verifica si possono plottare in un grafico con scale doppio logaritmiche i valori delle tensioni e rispetto alle relative distanze dall’apice. In questo tipo di grafico i valori dovranno disporsi su di una retta con pendenza coincidente con il grado di singolarità del problema in esame, fig.5.13.

Tabella 5.7 – Valori delle tensioni lungo la bisettrice e calcolo del N-SIF critico risultante dalla prova secondo la definizione di Gross – Mendelson. Nota: valori relativi al modello three point bending con angolo di apertura pari a 30°.

r [mm]	σ_{yy} [MPa]	τ_{xy} [MPa]	K_I^V Gross – Mendelson [MPa*mm^{1-λ1}]
5,00E-04	559,19	9,20E-01	31,68
6,00E-04	506,58	-3,87E-01	31,43
7,00E-04	473,92	6,61E-02	31,75
8,00E-04	441,27	5,19E-01	31,60
9,00E-04	418,25	5,02E-01	31,76
1,00E-03	395,22	4,85E-01	31,63
1,12E-03	376,06	3,56E-01	31,78
1,23E-03	356,89	2,27E-01	31,68
1,35E-03	342,14	2,47E-01	31,79
1,47E-03	327,38	2,67E-01	31,72
1,59E-03	315,51	2,52E-01	31,80
1,71E-03	303,63	2,37E-01	31,75
1,83E-03	293,81	2,31E-01	31,81
1,96E-03	283,98	2,25E-01	31,77
2,08E-03	275,66	2,18E-01	31,82
2,21E-03	267,34	2,11E-01	31,78
2,34E-03	260,18	2,06E-01	31,82
2,47E-03	253,01	2,01E-01	31,79
2,60E-03	246,75	1,96E-01	31,83
2,74E-03	240,49	1,91E-01	31,80
2,87E-03	234,95	1,87E-01	31,83
3,01E-03	229,41	1,82E-01	31,81
3,15E-03	224,47	1,79E-01	31,83
3,29E-03	219,52	1,75E-01	31,81
3,43E-03	215,06	1,71E-01	31,83
3,58E-03	210,61	1,68E-01	31,82
3,72E-03	206,56	1,65E-01	31,84
3,87E-03	202,52	1,61E-01	31,82
4,02E-03	198,83	1,59E-01	31,84
4,17E-03	195,13	1,56E-01	31,82
4,32E-03	191,74	1,53E-01	31,84
4,48E-03	188,35	1,50E-01	31,83
4,63E-03	185,21	1,48E-01	31,84
4,79E-03	182,08	1,45E-01	31,83
4,95E-03	179,18	1,43E-01	31,84
5,11E-03	176,27	1,41E-01	31,83
5,28E-03	173,57	1,39E-01	31,84
5,44E-03	170,86	1,37E-01	31,83

5,61E-03	168,34	1,35E-01	31,84
5,78E-03	165,81	1,33E-01	31,83
5,95E-03	163,44	1,31E-01	31,84
6,13E-03	161,07	1,29E-01	31,83
6,31E-03	158,85	1,27E-01	31,84
6,48E-03	156,62	1,25E-01	31,83
6,66E-03	154,52	1,24E-01	31,84
6,85E-03	152,42	1,22E-01	31,83
7,03E-03	150,43	1,20E-01	31,84
7,22E-03	148,45	1,19E-01	31,83
7,41E-03	146,57	1,17E-01	31,84
7,60E-03	144,69	1,16E-01	31,83
7,79E-03	142,90	1,15E-01	31,84
7,99E-03	141,12	1,13E-01	31,83
8,19E-03	139,42	1,12E-01	31,84
8,39E-03	137,72	1,10E-01	31,83
8,59E-03	136,11	1,09E-01	31,84
8,80E-03	134,49	1,08E-01	31,83
9,01E-03	132,94	1,07E-01	31,84
9,22E-03	131,40	1,05E-01	31,83
9,43E-03	129,92	1,04E-01	31,84
9,65E-03	128,45	1,03E-01	31,83
9,87E-03	127,03	1,02E-01	31,84
1,01E-02	125,62	1,01E-01	31,83
1,03E-02	124,26	9,97E-02	31,83
1,05E-02	122,91	9,87E-02	31,83
1,08E-02	121,60	9,76E-02	31,83
1,10E-02	120,30	9,66E-02	31,83
1,13E-02	118,65	9,53E-02	31,83
1,16E-02	117,01	9,40E-02	31,82
1,20E-02	115,09	9,24E-02	31,83
1,24E-02	113,17	9,09E-02	31,82
1,29E-02	110,98	8,92E-02	31,83
1,34E-02	108,79	8,74E-02	31,81
1,41E-02	106,34	8,55E-02	31,83
1,47E-02	103,88	8,35E-02	31,80
1,56E-02	101,18	8,14E-02	31,83
1,64E-02	98,48	7,92E-02	31,79
1,74E-02	95,58	7,69E-02	31,83
1,85E-02	92,68	7,46E-02	31,78
1,98E-02	89,63	7,21E-02	31,82
2,12E-02	86,58	6,97E-02	31,76
2,29E-02	83,44	6,72E-02	31,81

2,46E-02	80,30	6,47E-02	31,74
2,68E-02	77,13	6,22E-02	31,80
2,90E-02	73,97	5,96E-02	31,71
3,17E-02	70,84	5,72E-02	31,79
3,45E-02	67,71	5,47E-02	31,68
3,81E-02	64,67	5,22E-02	31,77
4,16E-02	61,62	4,98E-02	31,64
4,61E-02	58,71	4,75E-02	31,74
5,06E-02	55,80	4,52E-02	31,60
5,64E-02	53,05	4,30E-02	31,70
6,21E-02	50,30	4,08E-02	31,55
6,94E-02	47,74	3,88E-02	31,65
7,68E-02	45,17	3,67E-02	31,48
8,61E-02	42,79	3,49E-02	31,58
9,54E-02	40,41	3,30E-02	31,39
0,1073	38,23	3,13E-02	31,49
0,11919	36,05	2,95E-02	31,29
0,13434	34,05	2,81E-02	31,37
0,14949	32,06	2,67E-02	31,15
0,1688	30,24	2,48E-02	31,22
0,1881	28,43	2,29E-02	30,98
0,2127	26,79	2,30E-02	31,03
0,2373	25,14	2,31E-02	30,76
0,26865	23,66	1,85E-02	30,79
0,3	22,17	1,39E-02	30,49

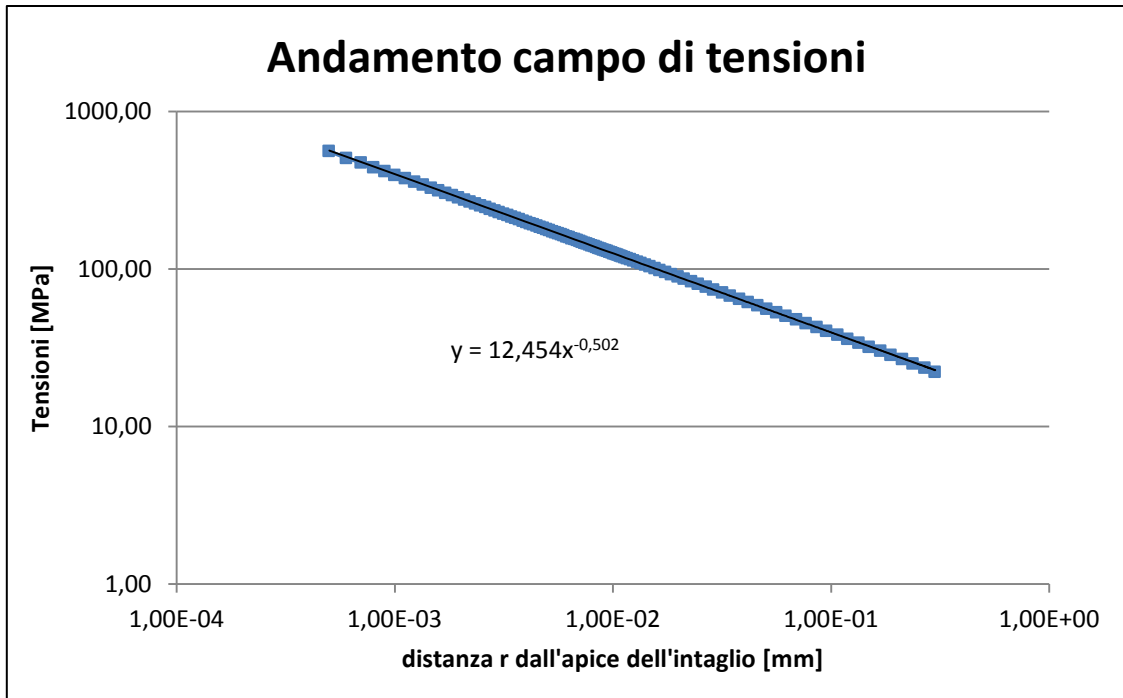


Figura 5.13 – Grafico che rappresenta l’andamento del campo di tensione, da notare il valore della pendenza della retta in accordo con la teoria.

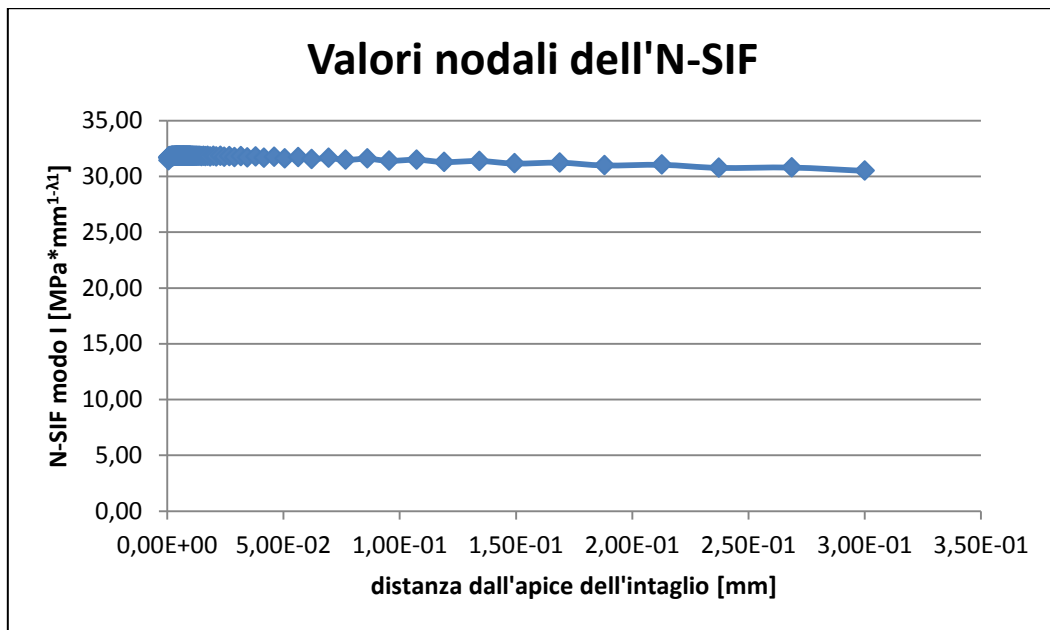


Figura 5.14 –Grafico che rappresenta l’andamento dei valori nodali degli N-SIF critici ottenuti dal modello FEM.

Questo tipo di procedura verrà eseguita per ogni provino al variare dell’angolo di apertura. Passiamo ora alla presentazione dei risultati sperimentali utilizzati per confrontare i due metodi.

5.4.2 Gomez and Elices

I dati utilizzati per il confronto sono stati ricavati dai ricercatori Gómez and Elices^[12] (2000, 2003a,b) su provini intagliati a spigolo vivo, sono state praticate due prove distinte:

1. Prove SEN (single edge notch) di trazione con provini dalle dimensioni seguenti (in fig. 5.15 è rappresentata la geometria del provino):
 - lunghezza $L = 196$ mm;
 - altezza $W = 28$ mm;
 - spessore $t = 14$ mm;
 - profondità intaglio $a = 14$ mm;
 - angolo di apertura variabile $2\alpha = 60, 90, 120$ e 150 gradi.
2. Prove TPB (three point bending) a flessione con provini dalle dimensioni seguenti (in fig. 5.16 è rappresentata la geometria del provino):
 - lunghezza $L = 112$ mm;
 - altezza $W = 28$ mm;
 - spessore $t = 14$ mm;
 - profondità intaglio $a = 14$ mm;
 - angolo di apertura variabile $2\alpha = 15, 30, 45, 60, 90, 120, 150$ gradi.

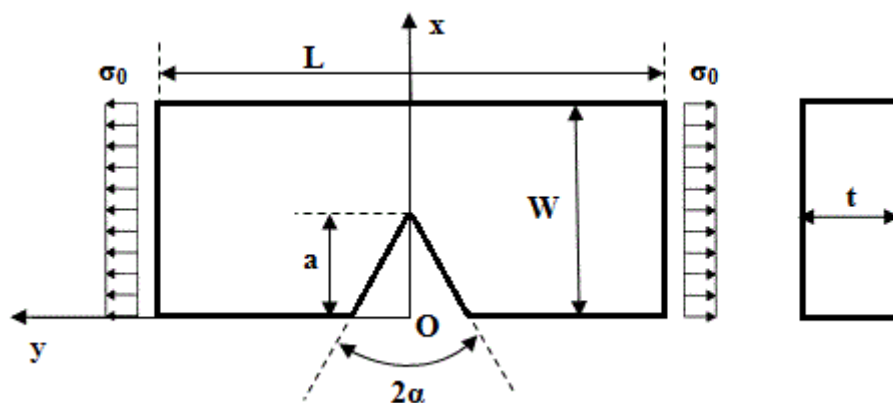


Figura 5.15 – Geometria del provino SEN (single edge notch).

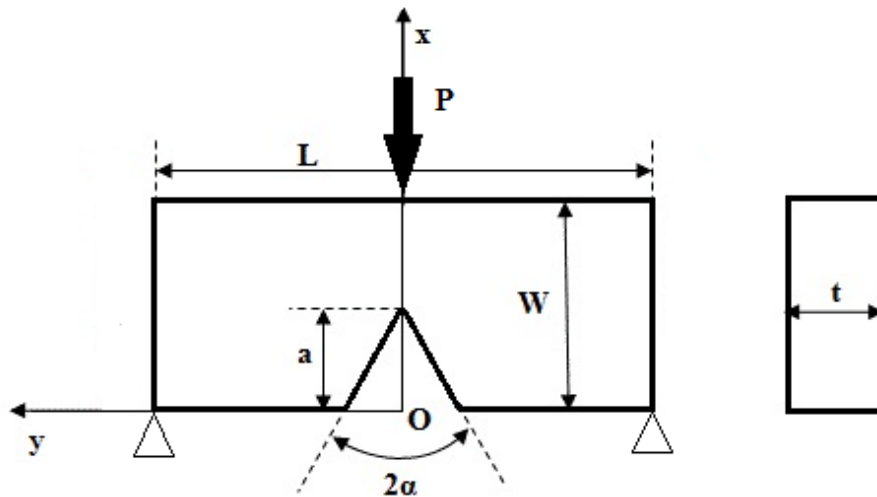


Figura 5.16 – Geometria del provino TPB (three point bending).

Tabella 5.8 – Valori dei carichi critici ricavati da due set di provini, TPB (three point bending) e SEN (single edge notch), dai ricercatori Gomez and Elices.

Influence of V-notch angle α

Angle α (°)	TPB ($D = 28$ mm, $a = 14$ mm)		SEN ($D = 28$ mm, $a = 14$ mm)	
	P_{MAX} (N)	$P/NMOD$ (N/mm)	P_{MAX} (N)	$P/NMOD$ (N/mm)
15	190 ± 10	1100 ± 1100		
30	240 ± 20	1100 ± 100		
60	210 ± 20	1000 ± 90	880 ± 40	4280 ± 60
90	240 ± 10	980 ± 50	980 ± 40	4230 ± 60
120	490 ± 30	820 ± 10	1360 ± 80	3680 ± 40
150	800 ± 50	950 ± 20	1940 ± 40	3600 ± 30

Utilizzando questi dati sperimentali è stato possibile calcolare tramite il modello fem il valore sperimentale dell’N-SIF critico che ha portato a rottura di schianto il provino sottoposto alla prova di trazione o flessione.

Tabella 5.9 – Valori degli N-SIF critici ricavati dall’analisi numerica. Nota: i valori degli N-SIF critici sono espressi in $MPa \cdot m^{1-\lambda_1}$.

SEN				TPB			
ω [°]	λ_1	$1 - \lambda_1$	$K_{1c,fem}$	ω [°]	λ_1	$1 - \lambda_1$	$K_{1c,fem}$
				15	0,5002	0,4998	0,85
				30	0,5014	0,4986	1,01
60	0,5122	0,4878	1,05	60	0,5122	0,4878	1,03
90	0,5445	0,4555	1,49	90	0,5445	0,4555	1,51
120	0,6157	0,3843	3,38	120	0,6157	0,3843	5,05
150	0,752	0,248	10,89	150	0,752	0,248	22,11

Di seguito riportiamo il confronto grafico tra gli N-SIF critici ottenuti per via sperimentale e quelli predetti secondo i criteri appena presentati, separando i grafici per tipo di prova condotta.

Mostriamo per primi i risultati ottenuti dai provini three point bending:

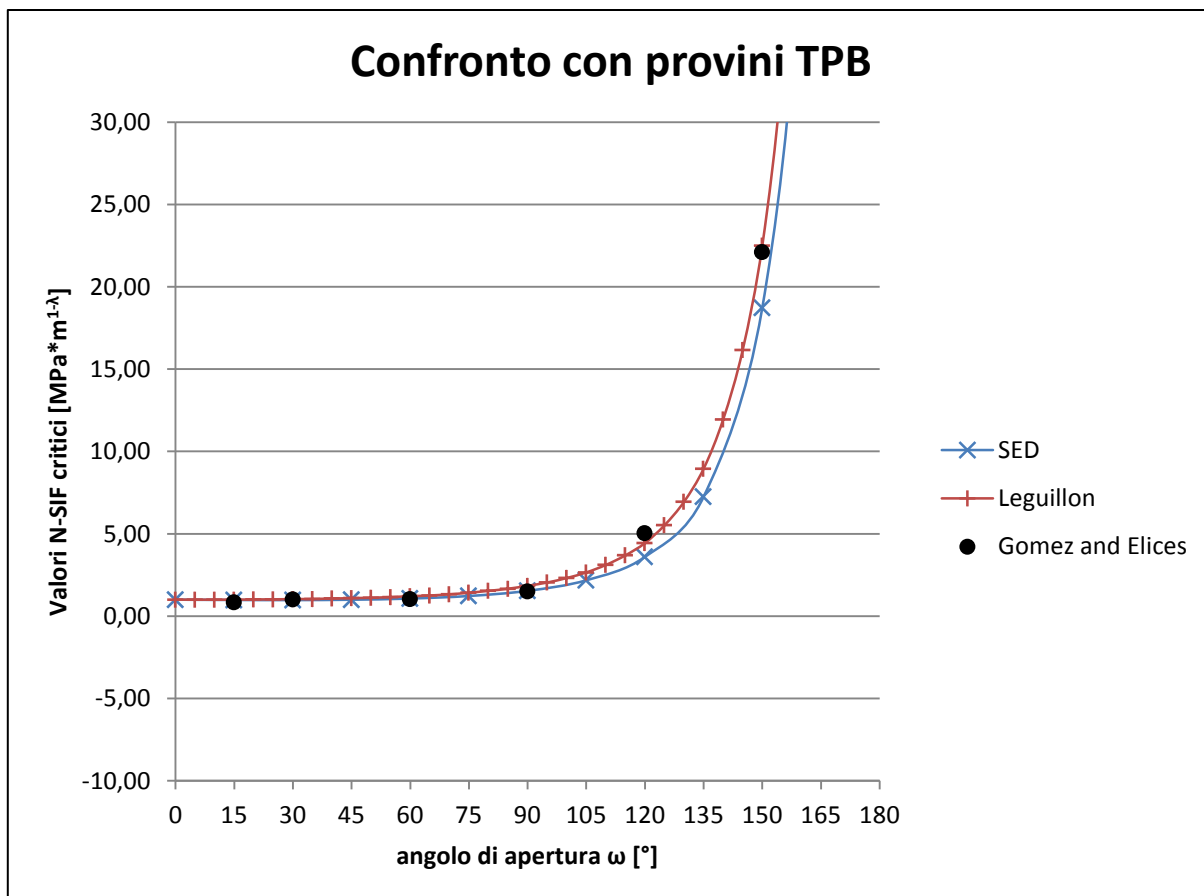


Figura 5.17 – Grafico che mostra il confronto tra i dati ottenuti dai provini TPB rispetto ai valori predetti dai due criteri.

Dalla fig. 5.17 si può notare come i valori stimati tramite il criterio del SED siano praticamente coincidenti con i valori sperimentali per i provini con angoli di apertura 30, 60 e 90°, mentre vengono sottostimati i valori per angoli di apertura 120 e 150°. L'unico piccolo problema risulta evidente per il provino con angolo di apertura di 15° dove il modello teorico tende a sovrastimare il valore critico, creando un problema in quanto pone il progettista in una condizione a sfavore di sicurezza.

Il modello di Leguillon tende invece a sovrastimare gli N-SIF critici per valori da 15 a 90°, escluso il caso dei 30°. Mentre invece è in grado di prevedere in modo preciso i valori critici per gli angoli 120 e 150°. In questo caso si può notare senza alcun dubbio che il criterio del SED sia molto più vicino ai dati sperimentali per gli angoli di maggior interesse.

Passiamo ora al grafico contenente i valori ottenuti con provini SEN, fig 5.18:

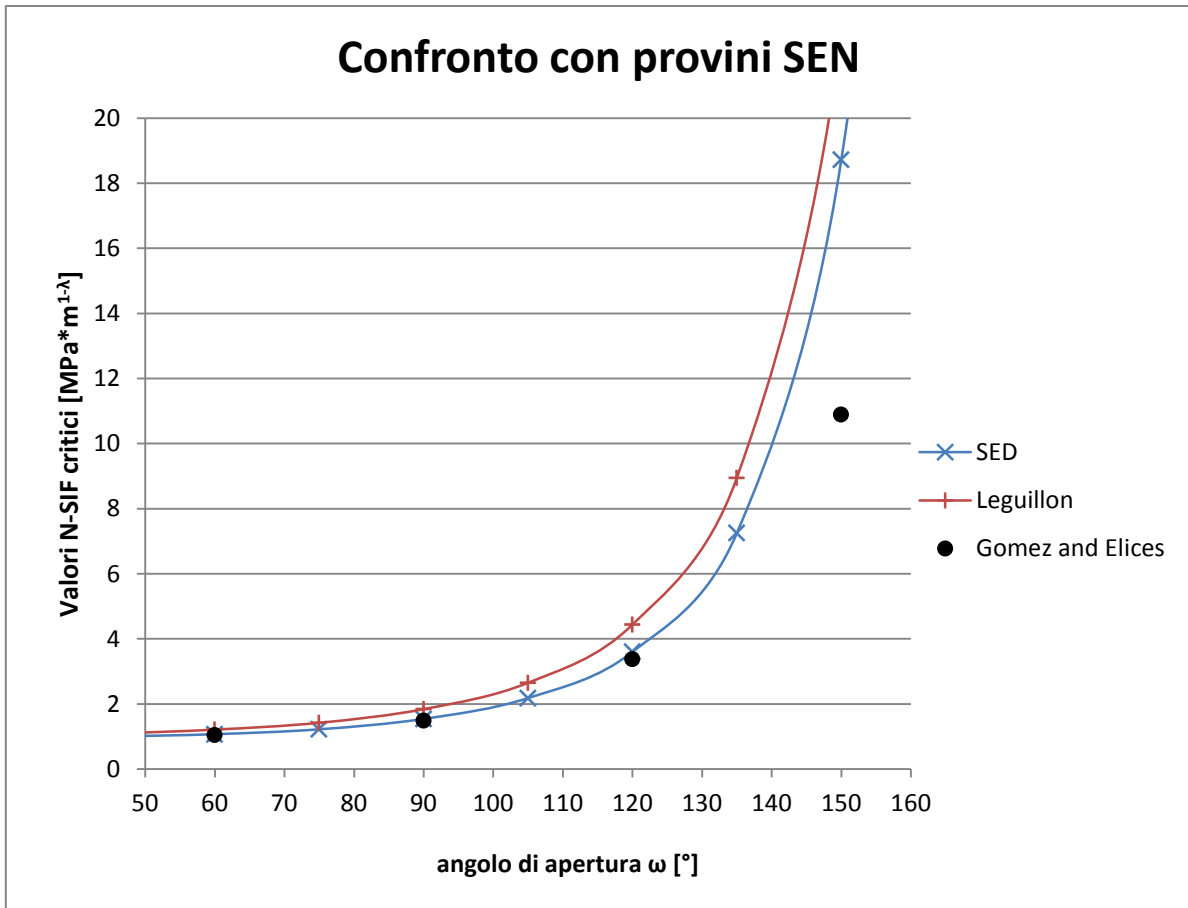


Figura 5.18 - Grafico che mostra il confronto tra i dati ottenuti dai provini SEN rispetto ai valori predetti dai due criteri.

Dal confronto con quest'altro tipo di dati sperimentali si nota come l'unico punto che non è ben predetto dal criterio SED sia quello con angolo di apertura pari a 150°. Per gli altri angoli di apertura si nota come i valori sperimentali siano in perfetto accordo con i valori predetti dal modello. Il modello di Leguillon in questo caso tende a sovrastimare, di poco, per i primi due angoli di apertura, mentre tende a sovrastimare in modo più marcato il valore a 120°. Per quanto riguarda l'N-SIF critico ricavato dal provino a 150° possiamo dire che il valore risulta evidentemente sbagliato, in quanto il valore dovrebbe essere molto vicino al valore ricavato con l'omologo provino TPB. Dalla tabella 5.9 si può notare molto bene questa anomalia.

Confrontiamo ora i risultati sperimentali ottenuti da altri ricercatori presenti in letteratura, in particolare confronteremo i dati forniti da Carpinteri^[13] e Seweryn^[14].

5.4.3Carpinteri

Il materiale utilizzato da Carpinteri per ottenere i valori sperimentali ha proprietà meccaniche leggermente differenti rispetto al PMMA utilizzato nei confronti precedenti, di seguito verranno presentati tali valori e i rispettivi N-SIF critici predetti dai modelli:

- Modulo di Young => $E = 3000 \text{ MPa}$
- Coefficiente di Poisson => $\nu = 0,3$
- Tensione a rottura => $\sigma_t = 130,3 \text{ MPa}$
- Tenacità a frattura => $K_{Ic} = 1,89 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{0,5}$

I valori predetti dai due modelli utilizzando le proprietà del materiale appena presentate sono rappresentati nella seguente tabella (5.10):

Tabella 5.10 – Valori predetti dai due modelli secondo i dati sperimentali forniti da Carpinteri.

ω [°]	K_{Ic} SED [MPa*m ^{1,5}]	K_{Ic} Leguillon [MPa*m ^{1,5}]
0	1,89	1,89
15	1,86	1,89
30	1,85	1,95
45	1,89	2,05
60	2,01	2,25
75	2,28	2,59
90	2,80	3,28
105	3,83	4,54
120	5,97	7,17
135	11,06	13,38
150	25,40	30,19
160	51,32	59,20
170	120,25	130,73

Confrontiamo ora i risultati sperimentali ottenuti da Carpinteri con gli N-SIF critici calcolati tramite i due criteri:

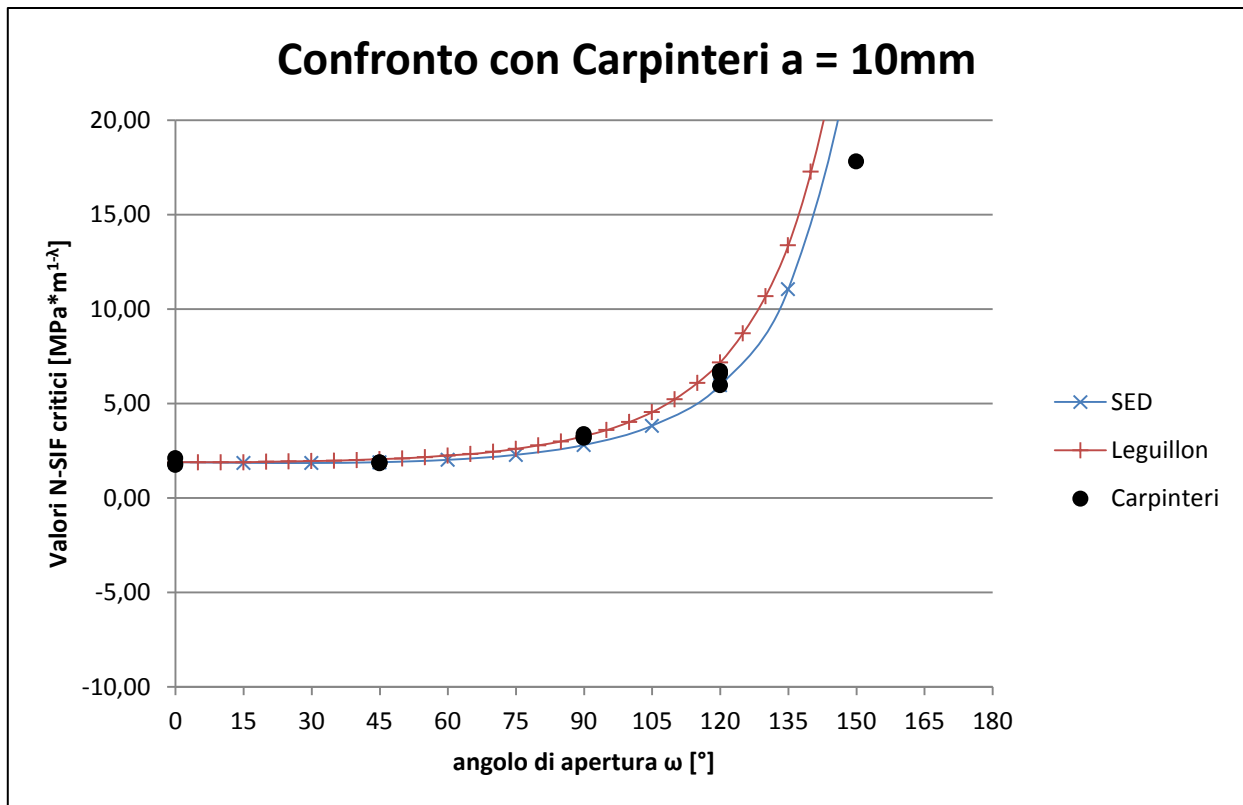


Figura 5.20 – Grafico contenente i valori degli N-SIF critici ottenuti da Carpinteri con provini aventi profondità d'intaglio pari 10 mm.

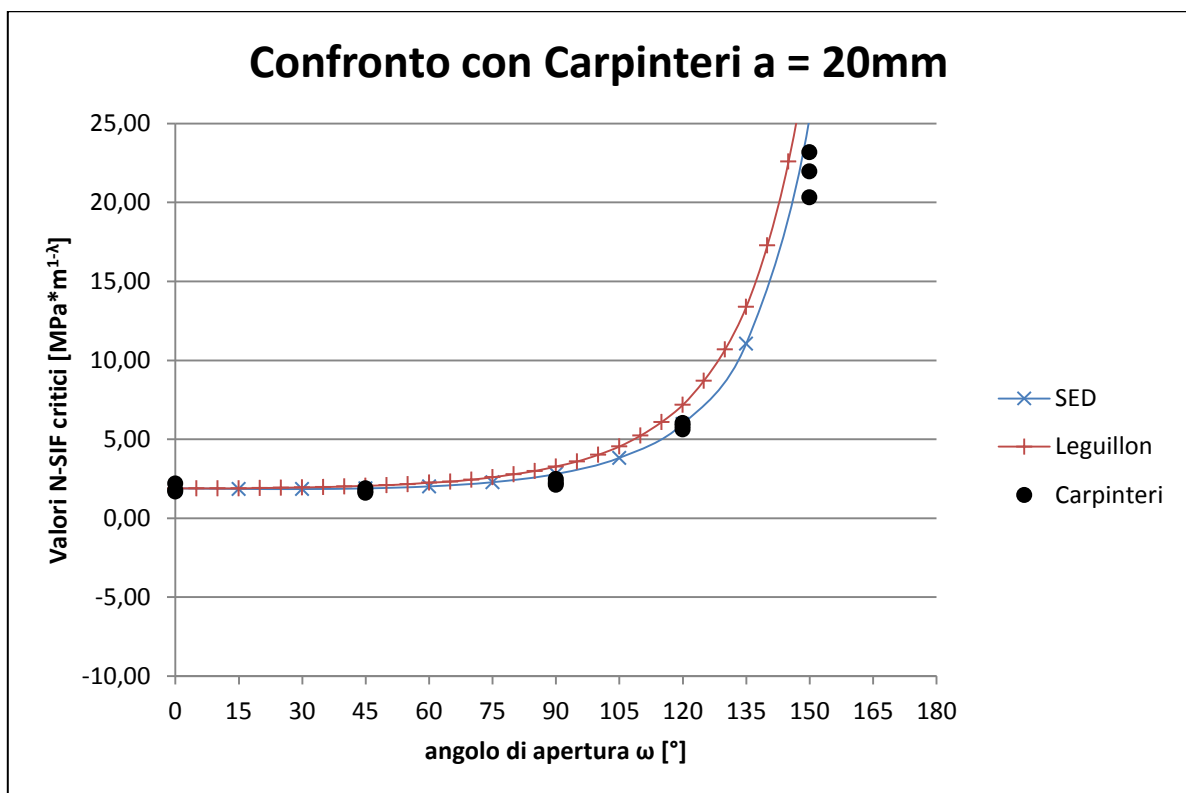


Figura 5.21 – Grafico contenente i valori degli N-SIF critici ottenuti da Carpinteri con provini aventi profondità d'intaglio pari 20 mm.

Dalle due fig. 5.20 e 5.21 è possibile notare come i dati sperimentali siano ben stimati dal SED ad eccezione del valore a 150° dove il criterio lo sovrastima.

Al contrario il criterio di Leguillon tende a sovrastimare gli N-SIF critici anche per angoli inferiori, mettendo quindi il progettista in una condizione in sfavore di sicurezza.

Possiamo comunque affermare che la discrepanza tra i dati risulta minima e che l'accuratezza dei due metodi risulta essere buona.

5.4.4 Seweryn

Andiamo ora a confrontare i risultati sperimentali ottenuti da Seweryn che ha utilizzato provini in PMMA. Il materiale utilizzato per la determinazione sperimentale degli N-SIF critici ha le seguenti proprietà meccaniche:

- Modulo di Young => $E = 3000 \text{ MPa}$
- Coefficiente di Poisson => $\nu = 0,4$
- Tensione a rottura => $\sigma_t = 104,90 \text{ MPa}$
- Tenacità a frattura => $K_{Ic} = 1,863 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1-\lambda}$

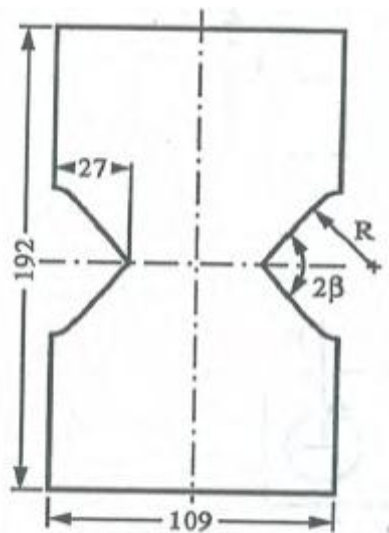


Figura 5.22 – Geometria del provino utilizzata per la determinazione sperimentale degli N-SIF critici.

Tabella 5.11 – Confronto numerico degli N-SIF critici di modo I predetti dai due criteri rispetto ai valori medi ricavati dalle prove sperimentali ottenute da Seweryn.

ω [°]	K_{Ic} Seweryn [MPa·m ^{1-λ}]	K_{Ic} SED [MPa·m ^{1-λ}]	K_{Ic} Leguillon [MPa·m ^{1-λ}]
0	1,863	1,863	1,863
20	1,867	1,819	1,882
40	1,863	1,825	1,977

60	2,216	1,947	2,204
80	2,576	2,305	2,709
100	3,433	3,184	3,858
120	5,377	5,468	6,747
140	12,732	12,687	15,717
160	51,41	44,504	51,272
180	271,468	351,37	262,945

La tabella 5.11 mostra come per angoli di apertura molto piccoli i due criteri tendono a dare una buonissima stima dei valori sperimentali, con una tendenza del criterio di Leguillon a sovrastimare leggermente i valori sperimentali. Al di sopra dei 100 gradi si notano delle differenze tra i valori stimati non trascurabili, sempre con la tendenza del secondo metodo a sovrastimare i valori sperimentali. Notiamo invece un'enorme differenza per quanto riguarda il valore nel caso di provino liscio, dove il SED sovrastima enormemente il valore sperimentale mentre il criterio di Leguillon si avvicina molto bene al valore sperimentale.

Di seguito riportiamo due grafici che mostrano l'andamento dei dati predetti e i punti ricavati sperimentalmente dalle prove di trazione su provini con doppio intaglio simmetrico mostrati in fig. 5.22:

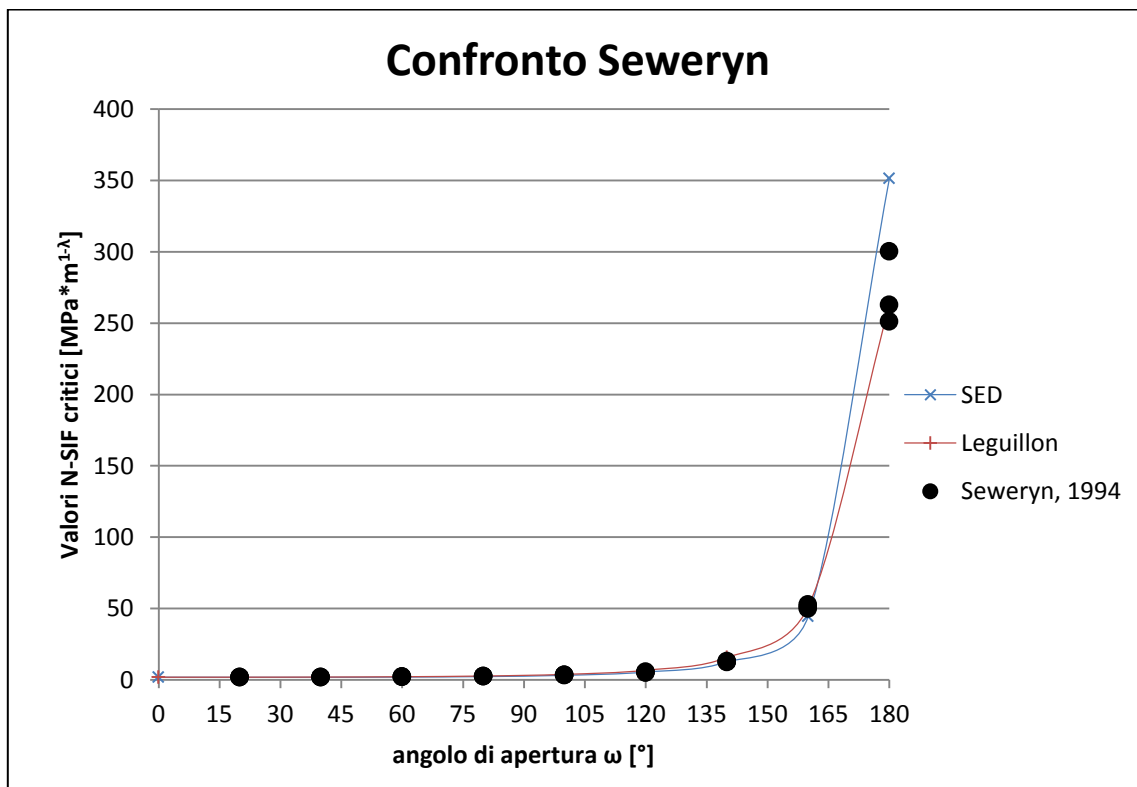


Figura 5.23 – Confronto tra i dati sperimentali ottenuti da Seweryn rispetto ai valori predetti dai due criteri.

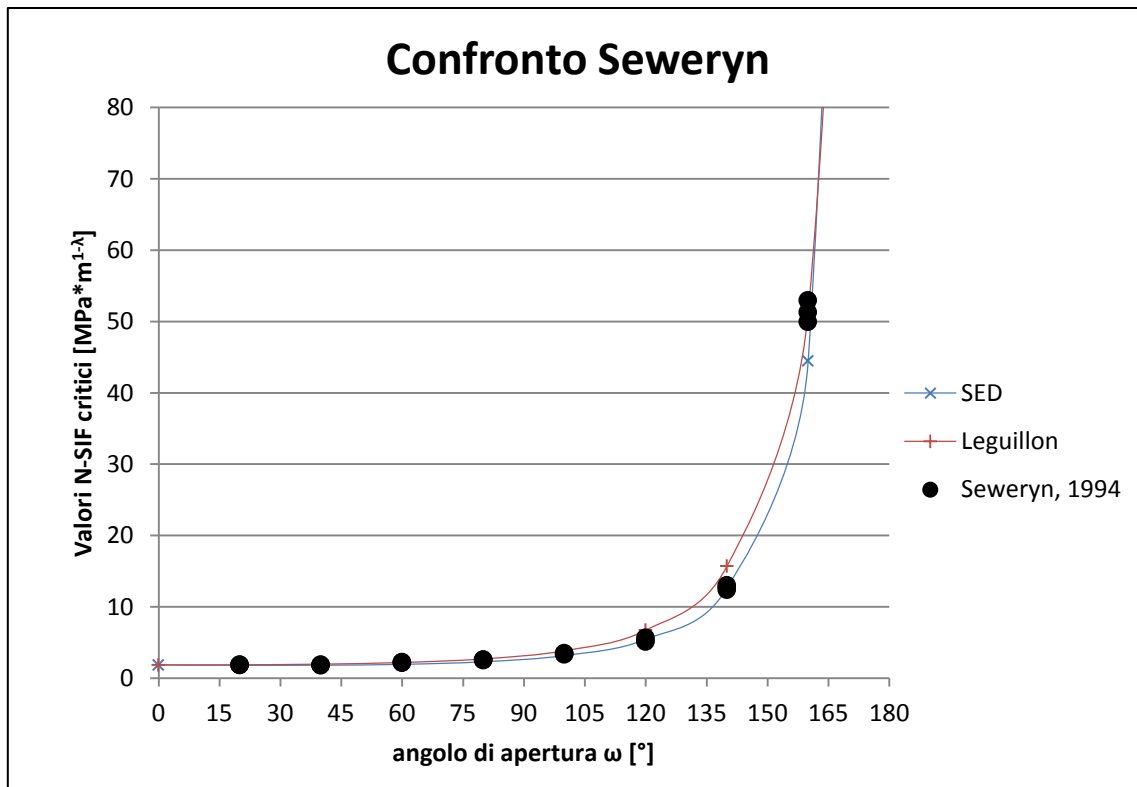


Figura 5.24 – Zoom del grafico precedente per evidenziare gli angoli di maggior interesse ingegneristico.

I grafici nelle fig. 5.23 e 5.24 evidenziano bene quello che è stato detto precedentemente, inoltre si può ben notare come la dispersione dei dati, relativi ai valori ricavati con 3 provini per angolo di apertura, sia molto piccola per angoli di apertura piccoli, mentre sia più grande per gli ultimi due angoli investigati (160 e 180°).

Dal grafico si nota molto bene come per angolo molto ampi di apertura il criterio di Leguillon riesce a interpretare bene i dati sperimentali, ciò è dovuto al fatto che esso è stato formulato usando come

6. Teoria di D. Leguillon applicata a modo misto I+II

6.1 Introduzione

Successivamente alla trattazione di puro modo I, il criterio è stato esteso al modo misto (I+II) dai ricercatori Z. Yosibash, E. Priel and D. Leguillon^[15] (2006).

Il problema del cedimento di provini soggetti a carichi che generano modo misto è tuttora un problema aperto. Alcuni ricercatori hanno proposto metodi per poter prevedere questo fenomeno, ma in molti casi questi metodi hanno una applicabilità limitata. Per esempio il criterio di cedimenti formulato da Dunn et. al. (1997b) riesce a prevedere in modo adeguato casi in cui il modo I domina il modo II.

Il criterio di Leguillon per modo I viene ora esteso al modo misto I+II, vengono mantenute le ipotesi fondamentali formulate per il puro modo I:

- si prende in considerazione un componente intagliato con una cricca molto piccola che parte dall'apice dell'intaglio ad un preciso angolo θ_0 ;
- la soluzione utilizzata è quella fornita dalla FINITE FRACTURE MECHANICS, cioè la soluzione asintotica in prossimità dell'apice dell'intaglio (con raggio di raccordo pari a zero) risulta controllata dal termine dominante della soluzione asintotica del problema non perturbato dalla cricca;
- la condizione di cedimento risulta essere la combinazione tra criterio energetico classico postulato da Griffith e criterio basato sulla resistenza a trazione del materiale (provino liscio a trazione);
- il metodo deve essere applicato (in condizioni di carico statico) a materiali che presentano un comportamento a rottura lineare elastico (il metodo viene anche applicato per quei materiali che durante una prova di trazione con provino liscio mostrano una lieve plasticità, in quanto nel caso di provino intagliato la rottura viene preceduta da un tratto perfettamente lineare).

I parametri fondamentali del criterio sono 2 relativi al materiale (come per il puro modo I) e 5 parametri geometrici.

Materiale:

- resistenza a trazione 1-D σ_c ;
- tenacità a frattura G_c .

Geometrici:

- due GSIF A_1 e A_2 (che sono funzione del campo asintotico di fronte all'apice dell'intaglio);
- tre funzioni geometriche $H_{11}, H_{12}+H_{21}, H_{22}$ dipendenti dall'angolo di apertura dell'intaglio e direzione lungo la quale si sviluppa la cricca, (per il calcolo di questi tre parametri è necessario ricorrere all'uso di un modello FEM).

6.2 Estensione della teoria da modo I a modo misto

Essendo una estensione del criterio per puro modo I le ipotesi fondamentali risultano coincidenti, ricordiamo quindi brevemente il filo logico che porta alla definizione del metodo:

- La lunghezza della cricca l_0 viene stimata in modo da soddisfare simultaneamente il criterio energetico e quello basato sulla tensione a rottura del materiale;
 - il criterio energetico formulato da Griffith ci permette di scrivere questa disequazione :

$$\frac{-\delta\Pi}{l} \geq G_c \quad (6.1)$$

dove $\delta\Pi$ rappresenta la variazione di energia potenziale nel materiale prima e dopo che si sia formata la cricca di lunghezza l .

- il criterio basato sulla tensione a rottura del materiale ci permette di scrivere quest'altra disequazione:

$$\sigma_{\theta\theta}(l, \theta_0) \geq \sigma_c \quad (6.2)$$

dove θ_0 rappresenta la direzione in cui la cricca si è formata, rispetto ad un sistema di coordinate polari centrate sull'apice dell'intaglio.

- Per riuscire a valutare queste due condizioni occorre conoscere il campo di tensioni che si genera di fronte all'apice dell'intaglio quando è presente anche questa cricca di lunghezza l_0 .
- Come per il metodo già descritto occorre utilizzare la soluzione, ben nota, degli sharp V-notches come condizione al contorno del problema ancora aperto dello sharp V-notch perturbato da una cricca che parte dall'apice dell'intaglio stesso.
 - Partendo dai campi di spostamento e tensioni noti:

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix}_0 = \mathbf{u}(0,0) + \sum_{i=1}^L A_i r^{\alpha_i} \mathbf{u}^i(\theta) + \text{termini di ordine inferiore} \quad (6.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(r, \theta) = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix}_0 = \sum_{i=1}^L A_i r^{\alpha_i - 1} \boldsymbol{\sigma}^i(\theta) + \text{termini di ordine inferiore} \quad (6.4)$$

Questi risultano esatti se il problema viene visto da lontano e la cricca ha una lunghezza molto piccola rispetto alle dimensioni del provino, cioè se $l \rightarrow 0$.

- Ponendoci invece molto vicini all'apice dell'intaglio è evidente che queste espressioni non sono più adatte a descrivere bene ciò che succede in questa regione, quindi si passa ad un cambio di coordinate da x_i a y_i secondo questa relazione:

$$y_i = \frac{x_i}{l} \quad (6.5)$$

Si ottiene così un dominio illimitato con coordinate deformate dove la lunghezza della cricca è pari a 1 e la soluzione di tale problema diventa dipendente da tale lunghezza. Operando questo cambio di coordinate anche il sistema polare subisce la stessa variazione secondo questa espressione:

$$\rho = \frac{r}{l} \quad (6.6)$$

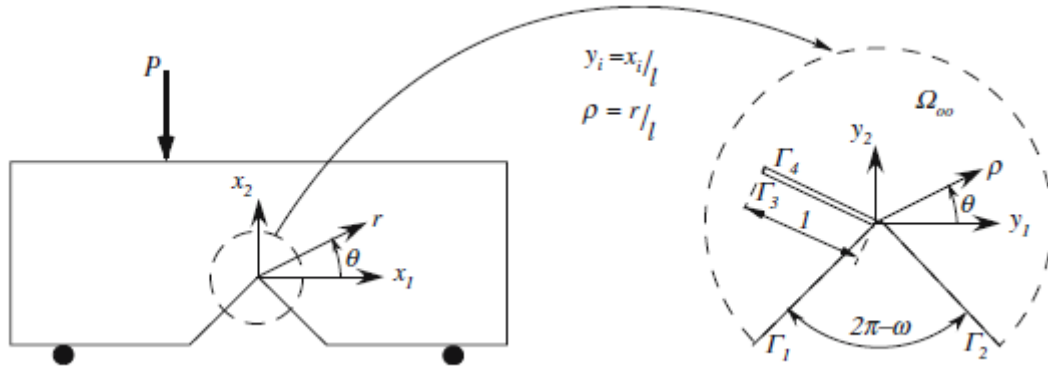


Figura 6.1 – Rappresentazione del dominio dove la cricca non è presente (a sx) e rappresentazione del dominio con la cricca di lunghezza unitaria (a dx).

- Ipotizzando che deve esserci una zona di materiale nella quale le relazioni che definiscono la soluzione non perturbata dalla cricca (per $r \rightarrow 0$) devono essere coincidenti alle relazioni del caso dove la cricca è presente (per $\rho \rightarrow \infty$) si possono calcolare i coefficienti del secondo problema.
- I coefficienti così calcolati devono soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}
 & \blacksquare L(\hat{\mathbf{v}}_1) = 0 \text{ in } \Omega_\infty \\
 & \blacksquare T(\hat{\mathbf{v}}_1) = 0 \text{ in } \Gamma_1, \Gamma_2 \\
 & \blacksquare T(\hat{\mathbf{v}}_1) = -T(\rho^{\alpha_1} \mathbf{u}^{(1)}(\theta)) \text{ in } \Gamma_3, \Gamma_4 \\
 & \blacksquare \text{con } \sigma(\hat{\mathbf{v}}_1) = 0 \text{ per } \rho \rightarrow \infty
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Questi sono le condizioni per la determinazione dei coeff. relativi al modo 1, analogamente per i termini di modo 2 si ottengono le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}
 & \blacksquare L(\hat{\mathbf{v}}_2) = 0 \text{ in } \Omega_\infty \\
 & \blacksquare T(\hat{\mathbf{v}}_2) = 0 \text{ in } \Gamma_1, \Gamma_2 \\
 & \blacksquare T(\hat{\mathbf{v}}_2) = -T(\rho^{\alpha_2} \mathbf{u}^{(2)}(\theta)) \text{ in } \Gamma_3, \Gamma_4 \\
 & \blacksquare \text{con } \sigma(\hat{\mathbf{v}}_2) = 0 \text{ per } \rho \rightarrow \infty
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

- Una volta noti tutti i termini della soluzione perturbata dalla cricca nel dominio illimitato è possibile calcolare la variazione dell'energia potenziale usando un integrale di linea, con dominio di integrazione che parte da una fianco dell'intaglio e che finisce sull'altro (come mostrato in fig. 6.2):

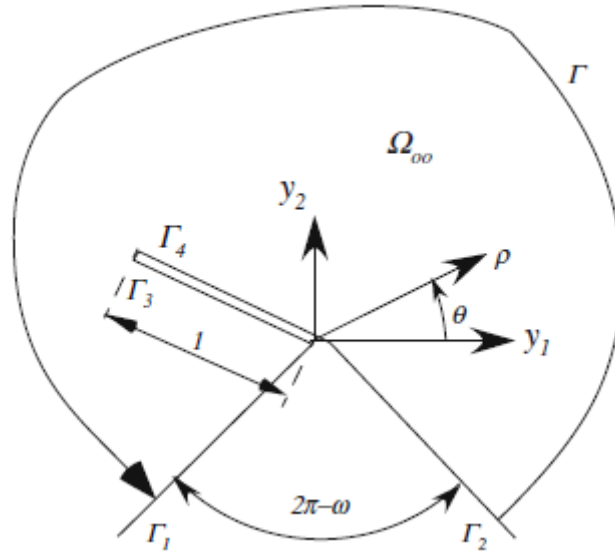


Figura 6.2 – Rappresentazione del percorso di integrazione nel dominio illimitato contenente la cricca.

$$\Psi(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [T(\mathbf{f})\mathbf{g} - T(\mathbf{g})\mathbf{f}] dS \quad (6.9)$$

Usando il teorema di Betti possiamo dire che la variazione di energia potenziale del sistema può essere espressa nel modo seguente:

$$\delta\Pi = \Pi(l) - \Pi(l = 0) = \Psi(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_0) \quad (6.10)$$

Sostituendo le espressioni dei campi di spostamento ottenuti dai due problemi sopra citati si perviene alla seguente espressione della variazione di energia potenziale:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & A_1^2 l^{2\alpha_1} \Psi(\hat{\mathbf{v}}_1, \rho^{\alpha_1} \mathbf{u}^{(1)}(\theta)) + A_1 A_2 l^{\alpha_1 + \alpha_2} \left[\Psi(\hat{\mathbf{v}}_1, \rho^{\alpha_2} \mathbf{u}^{(2)}(\theta)) + \right. \\ & \left. \Psi(\hat{\mathbf{v}}_2, \rho^{\alpha_1} \mathbf{u}^{(1)}(\theta)) \right] + A_2^2 l^{2\alpha_2} \Psi(\hat{\mathbf{v}}_2, \rho^{\alpha_2} \mathbf{u}^{(2)}(\theta)) + \\ & \text{termini di ordine superiore} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Definendo le funzioni geometriche introdotte all'inizio di tale trattazione:

$$\begin{aligned}
 & \blacksquare -\Psi\left(\hat{\mathbf{v}}_i, \rho^{\alpha_i} \mathbf{u}^{(i)}(\theta)\right) = H_{ii} \\
 & \blacksquare -\Psi\left(\hat{\mathbf{v}}_i, \rho^{\alpha_j} \mathbf{u}^{(j)}(\theta)\right) = H_{ij} \\
 & \blacksquare -\Psi\left(\hat{\mathbf{v}}_j, \rho^{\alpha_i} \mathbf{u}^{(i)}(\theta)\right) = H_{ji}
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Otteniamo l'espressione in questa forma:

$$\begin{aligned}
 -\delta\Pi = & A_1^2 l^{2\alpha_1} H_{11} + A_1 A_2 l^{\alpha_1 + \alpha_2} [H_{12} + H_{21}] + A_2^2 l^{2\alpha_2} H_{22} \\
 & + \text{termini di ordine superiore}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

- Sostituendo l'espressione appena ottenuta all'interno del criterio basato sulla tenacità del materiale è possibile individuare il limite inferiore di l:

$$\begin{aligned}
 & A_1^2 l^{2\alpha_1 - 1} H_{11}(\omega, \theta_0) + A_1 A_2 l^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} [H_{12}(\omega, \theta_0) + H_{21}(\omega, \theta_0)] \\
 & + A_2^2 l^{2\alpha_2 - 1} H_{22}(\omega, \theta_0) \geq G_c
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Dall'altra parte utilizzando il criterio basato sulla tensione a rottura del materiale è possibile ottenere il limite superiore della lunghezza l:

$$\sigma_{\theta\theta}(l, \theta_0) = A_1 l^{\alpha_1 - 1} \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta_0) + A_2 l^{\alpha_2 - 1} \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\theta_0) \geq \sigma_c \tag{6.15}$$

- Introducendo il parametro $m(l) = \frac{A_1}{A_2} l^{\alpha_2 - \alpha_1}$ e sapendo che la lunghezza l per la quale le due disequazioni devono essere valide è la medesima si perviene alla seguente espressione del G SIF di modo I per sintetizzare ciò che avviene nel materiale quando è sottoposto a una condizione di modo misto I+II:

$$l \geq \left(\frac{G_c}{A_1^2 (H_{11}(\omega, \theta_0) + m(H_{12}(\omega, \theta_0) + H_{21}(\omega, \theta_0)) + m^2 H_{22}(\omega, \theta_0))} \right)^{\frac{1}{2\alpha_1 - 1}} \tag{6.16}$$

$$l \leq \left(\frac{A_1(\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta_0) + m\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\theta_0))}{\sigma_c} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \quad (6.17)$$

$$A_1 = \left(\frac{G_c}{H_{11}(\omega, \theta_0) + m(H_{12}(\omega, \theta_0) + H_{21}(\omega, \theta_0)) + m^2 H_{22}(\omega, \theta_0)} \right)^{1-\alpha_1} \\ \times \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta_0) + m\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\theta_0)} \right)^{2\alpha_1-1} \quad (6.18)$$

- Noto il valore del G-SIF che garantisce la simultanea adempienza di entrambi i criteri è possibile ricavare la lunghezza caratteristica della cricca l_0 che provoca la rottura del materiale:

$$l_0 = \frac{G_c}{H_{11}(\omega, \theta_0) + m(l_0)(H_{12}(\omega, \theta_0) + H_{21}(\omega, \theta_0)) + m^2(l_0)H_{22}(\omega, \theta_0)} \\ \times \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta_0) + m(l_0)\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\theta_0)} \right)^2 \quad (6.19)$$

- Una volta noto questo parametro fondamentale è possibile giungere all'equazione conclusiva che permette di ricavare il G-SIF a rottura del materia previsto, note le caratteristiche del materiale base e i parametri geometrici H_{ii} e H_{ij} :

$$A_{1c} = \left(\frac{G_c}{H_{11}(\omega, \theta_0) + m(l_0)(H_{12}(\omega, \theta_0) + H_{21}(\omega, \theta_0)) + m^2(l_0)H_{22}(\omega, \theta_0)} \right)^{1-\alpha_1} \\ \times \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta_0) + m(l_0)\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\theta_0)} \right)^{2\alpha_1-1} \quad (6.20)$$

E' importante notare come il valore di tale G-SIF a rottura dipenda come è ovvio dall'angolo di apertura dell'intaglio "ω", dall'angolo di propagazione della cricca "θ₀", dal coefficiente "m(l₀)" e dalla lunghezza l₀ della cricca stessa. Tra tutti i valori ottenuti del G-SIF quello corretto sarà quello con valore minore e l'angolo di propagazione relativo verrà indicato con la seguente scrittura θ_{0c}.

Inoltre è importante notare come l₀ dipenda da θ₀ quindi ogni valore di G-SIF a rottura dovrà essere calcolato con il corrispondente l₀.

Per riuscire ad applicare il metodo risulta necessario poter calcolare i valori delle funzioni geometriche H_{ij} (che risultano essere funzioni dell'angolo di apertura dell'intaglio e dell'angolo di propagazione della cricca di lunghezza l_0). Queste funzioni devono essere calcolate in base al campo di spostamenti $\hat{\mathbf{v}}_i$ (presenti nel caso dove è nucleata la cricca di fronte all'apice dell'intaglio) per via numerica usando un integrale di linea con un percorso di integrazione ben definito. Queste funzioni verranno ricavate una sola volta per tutte e poi applicate di volta in volta nei casi pratici in esame.

Il calcolo verrà effettuato all'interno di un dominio circolare molto più grande rispetto alla dimensione della cricca (in questo dominio le coordinate sono state normalizzate rispetto alla lunghezza della cricca stessa, perciò la cricca avrà lunghezza pari a 1).

Per semplicità esecutiva la frontiera del dominio viene utilizzata come percorso di integrazione delle funzioni geometriche, infatti in tale luogo di punti il campo di spostamenti $\hat{\mathbf{v}}_i = 0$ come previsto dalle condizioni al contorno, quindi risulta:

$$\begin{aligned}
 H_{ii} &= -\Psi\left(\hat{\mathbf{v}}_i, \rho^{\alpha_i} \mathbf{u}^{(i)}(\theta)\right) = -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2}}^{\frac{3\pi}{2} - \frac{\omega}{2}} T(\hat{\mathbf{v}}_i)|_R R^{\alpha_i} \mathbf{u}^{(i)} R d\theta = \\
 &= -\frac{R^{\alpha_i+1}}{2} \int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2}}^{\frac{3\pi}{2} - \frac{\omega}{2}} T(\hat{\mathbf{v}}_i)|_R \mathbf{u}^{(i)}(\theta) d\theta
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned}
 H_{ij} + H_{ji} &= -\Psi\left(\hat{\mathbf{v}}_i, \rho^{\alpha_j} \mathbf{u}^{(j)}(\theta)\right) - \Psi\left(\hat{\mathbf{v}}_j, \rho^{\alpha_i} \mathbf{u}^{(i)}(\theta)\right) = \\
 &= -\frac{R^{\alpha_j+1}}{2} \int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2}}^{\frac{3\pi}{2} - \frac{\omega}{2}} T(\hat{\mathbf{v}}_i)|_R \mathbf{u}^{(j)}(\theta) d\theta - \frac{R^{\alpha_i+1}}{2} \int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2}}^{\frac{3\pi}{2} - \frac{\omega}{2}} T(\hat{\mathbf{v}}_j)|_R \mathbf{u}^{(i)}(\theta) d\theta
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

coni $\neq j$

Nella pratica per il calcolo delle funzioni si procede nel modo seguente:

1. Per un dato angolo di apertura ω si determinano in modo analitico gli autovalori di Williams e i campi di spostamento $\mathbf{u}^{(i)}(\theta)$ per modo I e modo II;
2. Si crea un modello FEM di forma circolare con raggio R sufficientemente ampio (100, 200, 300 volte la grandezza della cricca) avente uno sharp V-notch di apertura ω e con una cricca

avente un estremo coincidente con l'apice dell'intaglio e un angolo orientazione θ_0 rispetto al sistema di coordinate polari scelto (vedi fig. 6.1 e 6.2);

3. Lungo il perimetro esterno di tale modello devono essere applicate le condizioni al contorno omogenee di Dirichlet (per $\rho=R$), mentre i fianchi dell'intaglio devono essere liberi da ogni tensione;
4. Lungo le due facce della cricca è necessario applicare il campo di tensione presente prima che la cricca si sia formata:

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \sigma_{\theta\theta}(\theta_0) &= -\sigma_{\theta\theta}(\rho^{\alpha_1} \mathbf{u}^{(1)}(\theta)); \\
 \text{b. } \sigma_{r\theta}(\theta_0) &= -\sigma_{r\theta}(\rho^{\alpha_1} \mathbf{u}^{(1)}(\theta)); \\
 \text{c. } \sigma_{\theta\theta}(\theta_0) &= -\sigma_{\theta\theta}(\rho^{\alpha_2} \mathbf{u}^{(2)}(\theta)); \\
 \text{d. } \sigma_{r\theta}(\theta_0) &= -\sigma_{r\theta}(\rho^{\alpha_2} \mathbf{u}^{(2)}(\theta)).
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

5. Così facendo si ottengono due distinte soluzioni per i campi di spostamento in un dominio di raggio R (ben definito e sufficientemente ampio): $\hat{\mathbf{v}}_1 \mathbf{e} \hat{\mathbf{v}}_2$;
6. Noti i campi di spostamento è possibile calcolare gli integrali (6.21) e (6.22) lungo un percorso di integrazione di raggio $\rho=R$ per modo 1 e modo 2 usando il metodo di quadratura Gaussiana di ordine superiore in modo da assicurare la bontà del risultato numerico ottenuto (per la corretta convergenza dei risultati occorrono 90 nodi);
7. Si riparte dal punto 2 modificando l'angolo di propagazione della cricca.

(Una volta terminati tutti gli angoli possibili di propagazione della cricca bisogna ripartire dal punto 1 cambiando l'angolo di apertura dell'intaglio).

I valori delle funzioni geometriche così ottenuti sono per forza di cose dipendenti dai parametri del materiale scelti per condurre tale analisi numerica (in particolare modulo di Young E e coeff. di Poisson ν); come visto per il puro modo I è possibile, partendo dai valori ricavati per un dato materiale, trovare i valori per qualsiasi altro materiale utilizzando una semplice proporzione:

$$H_{ij}^{new}(\omega, \theta_0) = H_{ij}^{fem}(\omega, \theta_0) \frac{E^{fem}}{(1-\nu^2)^{fem}} \frac{(1-\nu^2)^{new}}{E^{new}} \tag{6.24}$$

7. Metodo SED applicato a modo misto I+II

7.1 Teoria

Come per la teoria appena presentata anche il criterio del SED è stato esteso al modo misto da P. Lazzarin and R. Zambardi^[16] (2001).

Possiamo esprimere in forma compatta il campo di tensioni presente nelle vicinanze dell'apice dell'intaglio:

$$\sigma_{ij} = A_{1,2} r^{\lambda_{1,2}-1} f_{ij}(\theta, \alpha) \quad (7.1)$$

Dove 1 e 2 stanno a rappresentare le tensioni generate da modo I e da modo II rispettivamente.

FUNZIONI ANGOLARI DI MODO I:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_{\theta\theta} \\ f_{rr} \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(1)} &= \frac{1}{(1 + \lambda_1) + \chi_{b1}(1 - \lambda_1)} \\ &\left\{ \begin{Bmatrix} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1) \theta \end{Bmatrix} + \chi_{b1}(1 - \lambda_1) \begin{Bmatrix} \cos(1 + \lambda_1) \theta \\ -\cos(1 + \lambda_1) \theta \\ \sin(1 + \lambda_1) \theta \end{Bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (7.2)$$

FUNZIONI ANGOLARI DI MODO II:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_{\theta\theta} \\ f_{rr} \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(2)} &= \frac{1}{(1 - \lambda_2) + \chi_{b2}(1 + \lambda_2)} \\ &\left\{ \begin{Bmatrix} (-1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ (-3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2) \theta \end{Bmatrix} + \chi_{b2}(1 + \lambda_2) \begin{Bmatrix} -\sin(1 + \lambda_2) \theta \\ \sin(1 + \lambda_2) \theta \\ \cos(1 + \lambda_2) \theta \end{Bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Le funzioni angolari rappresentano la forma del campo di tensione al variare dell'angolo rispetto alla bisettrice dell'intaglio.

Una volta noti analiticamente i campi di tensione in prossimità dell'apice dell'intaglio è possibile calcolare (come nel caso di puro modo I) l'energia di deformazione elastica alla quale il materiale è sottoposto in un punto del materiale ben definito. A differenza del caso precedente questa volta la deformazione sarà la somma del contributo di modo I, modo II e contributo misto I+II.

$$W(r, \theta) = W_1(r, \theta) + W_2(r, \theta) + W_{12}(r, \theta) \quad (7.4)$$

$$W_1(r, \theta) = \frac{1}{2E} r^{2(\lambda_1-1)} \frac{(K_1^N)^2}{2\pi} [f_{\theta\theta}^{(1)2} + f_{rr}^{(1)2} + f_{zz}^{(1)2} - 2\nu(f_{\theta\theta}^{(1)} f_{rr}^{(1)} + f_{\theta\theta}^{(1)} f_{zz}^{(1)} + f_{rr}^{(1)} f_{zz}^{(1)}) + 2(1 + \nu) f_{r\theta}^{(1)2}] \quad (7.5)$$

$$W_2(r, \theta) = \frac{1}{2E} r^{2(\lambda_2-1)} \frac{(K_2^N)^2}{2\pi} [f_{\theta\theta}^{(2)2} + f_{rr}^{(2)2} + f_{zz}^{(2)2} - 2\nu(f_{\theta\theta}^{(2)} f_{rr}^{(2)} + f_{\theta\theta}^{(2)} f_{zz}^{(2)} + f_{rr}^{(2)} f_{zz}^{(2)}) + 2(1 + \nu) f_{r\theta}^{(2)2}] \quad (7.6)$$

$$W_{12}(r, \theta) = \frac{1}{2E} r^{\lambda_1+\lambda_2-1} \frac{K_1^N K_2^N}{2\pi} \left[f_{\theta\theta}^{(1)} f_{\theta\theta}^{(2)} + f_{rr}^{(1)} f_{rr}^{(2)} + f_{zz}^{(1)} f_{zz}^{(2)} - \nu(f_{\theta\theta}^{(1)} f_{rr}^{(2)} + f_{\theta\theta}^{(1)} f_{zz}^{(2)} + f_{rr}^{(1)} f_{zz}^{(2)} + f_{\theta\theta}^{(2)} f_{rr}^{(1)} + f_{\theta\theta}^{(2)} f_{zz}^{(1)} + f_{rr}^{(2)} f_{zz}^{(1)}) + 2(1 + \nu) f_{r\theta}^{(1)} f_{r\theta}^{(2)} \right] \quad (7.7)$$

Le tre espressioni sopra descritte (7.5 – 7.7) rappresentano la densità di energia di deformazione in un punto di coordinate polari r, θ dovuta alla particolare sollecitazione in esame.

Una volta nota tale densità di energia puntuale è possibile calcolare l'energia totale all'interno di un volume integrando l'espressione (7.4).

$$E(R) = \int_A W dA = \int_0^R \int_{-\gamma}^{+\gamma} [W_1(r, \theta) + W_2(r, \theta) + W_{12}(r, \theta)] r dr d\theta \quad (7.8)$$

La particolare simmetria del dominio di integrazione produce l'annullamento del contributo di $W_{12}(r,\theta)$, quindi l'energia di deformazione elastica presente nel volume di materiale di raggio R è la seguente:

$$E(R) = E_1(R) + E_2(R) = \frac{1}{E} \frac{I_1(\gamma)}{4\lambda_1} (K_1^N)^2 R^{2\lambda_1} + \frac{1}{E} \frac{I_2(\gamma)}{4\lambda_2} (K_2^N)^2 R^{2\lambda_2} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} conI_1(\gamma) = \int_{-\gamma}^{+\gamma} [f_{\theta\theta}^{(1)2} + f_{rr}^{(1)2} + f_{zz}^{(1)2} - 2\nu(f_{\theta\theta}^{(1)}f_{rr}^{(1)} + f_{\theta\theta}^{(1)}f_{zz}^{(1)} + \\ f_{rr}^{(1)}f_{zz}^{(1)}) + 2(1 + \nu)f_{r\theta}^{(1)2}] d\theta \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} eI_2(\gamma) = \int_{-\gamma}^{+\gamma} [f_{\theta\theta}^{(2)2} + f_{rr}^{(2)2} + f_{zz}^{(2)2} - 2\nu(f_{\theta\theta}^{(2)}f_{rr}^{(2)} + f_{\theta\theta}^{(2)}f_{zz}^{(2)} + \\ f_{rr}^{(2)}f_{zz}^{(2)}) + 2(1 + \nu)f_{r\theta}^{(2)2}] d\theta \end{aligned} \quad (7.11)$$

Le due espressioni (7.10 e 7.11) rappresentano gli integrali delle funzioni angolari di modo I e modo II calcolate in ipotesi di stato piano di deformazione. I valori di tali integrali si possono calcolare numericamente per ogni angolo solido di interesse, in letteratura si trovano tabellati tali valori per gli angoli di maggior interesse.

Una volta nota l'energia di deformazione totale elastica è possibile calcolare la densità di energia media presente in tale volume di raggio R .

$$A(R) = \int_0^R \int_{-\gamma}^{+\gamma} r dr d\theta = R^2 \gamma \quad (7.12)$$

Nella particolare ipotesi in cui si sta operando è possibile pensare ad uno spessore unitario del volume di controllo e quindi passare dal volume all'area, in quanto lungo lo spessore non avviene deformazione.

La densità di energia di deformazione elastica presente in tale area è rappresentata dalla seguente espressione:

$$\bar{W}(e) = \frac{E_1^{(e)}}{A} + \frac{E_2^{(e)}}{A} = \frac{1}{E} \frac{I_1(\gamma)}{4\lambda_1\gamma} (K_1^N)^2 R^{2\lambda_1-2} + \frac{1}{E} \frac{I_2(\gamma)}{4\lambda_2\gamma} (K_2^N)^2 R^{2\lambda_2-2} \quad (7.13)$$

$$cone_1(2\alpha) = \frac{I_1(\gamma)}{4\lambda_1\gamma} \quad (7.14)$$

$$ee_2(2\alpha) = \frac{I_2(\gamma)}{4\lambda_2\gamma} \quad (7.15)$$

Applicando la stessa condizione di resistenza utilizzata per il puro modo I è possibile affermare che il materiale giunge a cedimento quando in un volume di materiale ben definito la densità di energia di deformazione raggiunge un valore critico W_c . Si ipotizza che tale valore sia costante e funzione del solo materiale, non delle condizioni geometriche o di carico; come anche la dimensione del volume di controllo è funzione dei parametri meccanici del materiale e non dalle particolari condizioni di carico o geometria.

Detto ciò è possibile stimare questo valore mediante una prova di trazione (ovviamente il provino deve giungere a rottura mediante un tratto lineare, in quanto tutta la trattazione appena svolta si basa su ipotesi di comportamento lineare elastico del materiale).

CONDIZIONE DI RESISTENZA:

$$\bar{W} \leq W_c \quad (7.16)$$

$$conW_c = \frac{\sigma_t^2}{2E} \quad (7.17)$$

Una volta noto tutto ciò è possibile stimare il carico che porterà a cedimento un componente soggetto ad un particolare carico. Per poter operare questa stima è necessario avere a disposizione le proprietà meccaniche e la geometria del componente. La stima della resistenza di tale componente in questa particolare trattazione viene basata sul calcolo del K_1 presente nel materiale nel momento in cui avviene il cedimento.

8. Confronto tra i due criteri in modo misto I+II

8.1 Sintesi dei due criteri

8.1.1 SED

Sostituendo nell'espressione (7.16) la (7.13) e la (7.17) ottengo la seguente espressione:

$$\frac{\sigma_t^2}{2E} = \frac{1}{E} e_1 \left(\frac{K_1^N}{R_c^{1-\lambda_1}} \right)^2 + \frac{1}{E} e_2 \left(\frac{K_2^N}{R_c^{1-\lambda_2}} \right)^2 \quad (8.1)$$

$$\frac{\sigma_t^2}{2} = (K_1^N)^2 R_c^{2(\lambda_1-1)} \left[e_1 + e_2 \left(\frac{K_2^N}{K_1^N} \right)^2 \frac{R_c^{2\lambda_2-2}}{R_c^{2\lambda_1-2}} \right] \quad (8.2)$$

Voglio ottenere il valore del K_1 che ha prodotto il cedimento del materiale in funzione di tutto il resto. In questo modo posso confrontare direttamente le previsioni dei due criteri.

Una volta noto il valore del K_1 che ha provocato il cedimento del materiale è possibile grazie al parametro m di ricondursi all'omologo K_2 . Mentre per calcolare il carico critico che, in quella particolare geometria e condizione, ha provocato la rottura del componente basta fare un'analisi fem con un carico a scelta e operare una proporzione (tutto ciò è reso possibile dall'ipotesi di linearità elastica nella quale si sta lavorando).

$$K_1^N = \frac{\sigma_t}{\sqrt{2}} R_c^{(1-\lambda_1)} [e_1 + e_2 m^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (8.3)$$

$$con m = \left(\frac{K_2^N}{K_1^N} \right)^2 R_c^{\lambda_2-\lambda_1} \quad (8.4)$$

$$con R_c = \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{4\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_t} \right)^2 \quad (8.5)$$

Sostituendo la (8.5) nella (8.3) si perviene alla seguente espressione (8.6) per la previsione del K_{Ic} , da notare che per stimare il raggio del volume di controllo (nel quale viene mediata la densità di energia di deformazione elastica) è stata utilizzata l'espressione di Yosibash come per il caso di puro modo I.

$$K_{Ic} = \frac{\left[\frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{4\pi}\right]^{1-\lambda_1}}{[2(e_1+e_2m^2)]^{1/2}} K_{Ic}^{2(1-\lambda_1)} \sigma_t^{2\lambda_1-1} \quad (8.6)$$

8.1.2 Leguillon

Come descritto precedentemente il criterio di Leguillon permette di stabilire il G-SIF di modo 1 che porterà a rottura il materiale utilizzando i parametri meccanici del materiale come il K_{Ic} e la tensione di rottura.

$$A_{1c} = \left(\frac{G_c}{H_{11}(\omega, \theta_0) + m(l_0)[H_{12}(\omega, \theta_0) + H_{21}(\omega, \theta_0)] + m^2(l_0)H_{22}(\omega, \theta_0)} \right)^{1-\lambda_1} \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta_0) + m(l_0)\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\theta_0)} \right)^{2\lambda_1-1} \quad (8.7)$$

Per il calcolo di tale valore in modo corretto nasce la necessità di calcolare la lunghezza caratteristica che la cricca deve avere per poter soddisfare contemporaneamente le due ipotesi (sulle quali si basa il criterio di resistenza utilizzato nel modello).

$$l_0 = \frac{G_c}{H_{11}(\omega, \theta_0) + m(l_0)[H_{12}(\omega, \theta_0) + H_{21}(\omega, \theta_0)] + m(l_0)^2 H_{22}(\omega, \theta_0)} \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta_0) + m(l_0)\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\theta_0)} \right)^{-2} \quad (8.8)$$

$$m = \frac{A^2}{A^1} l^{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (8.9)$$

Tale lunghezza deve essere calcolata in modo ricorsivo in quanto è dipendente da m , ma anch'esso è a sua volta dipendente da l come si può notare nell'espressione (8.9).

Per poter confrontare direttamente le due espressioni finali dei modelli considerati urge la necessità di applicare alcune sostituzioni:

$$conG_c = \frac{K_{Ic}^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (8.10)$$

$$eA_{1c} = \frac{K_{1c}}{\sqrt{2\pi}} \quad (8.11)$$

Sostituendo le due espressioni (8.10 e 8.11) nella (8.7) otteniamo la seguente espressione finale che può essere confrontata direttamente con l'espressione omologa del criterio del SED (8.6).

$$K_{1c} = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1 - \nu^2/E}{H_{11}(\omega, \theta_0) + m(l_0)[H_{12}(\omega, \theta_0) + H_{21}(\omega, \theta_0)] + m^2(l_0)H_{22}(\omega, \theta_0)} \right)^{1-\lambda_1} \\ \left(\frac{1}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta_0) + m(l_0)\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\theta_0)} \right)^{2\lambda_1-1} K_{Ic}^{2(1-\lambda_1)} \sigma_t^{2\lambda_1-1} \quad (8.12)$$

8.2 Confronto analitico

Come accadeva per il puro modo I due termini finali delle due espressioni sono identici e rappresentano i parametri meccanici del materiale, mentre la parte dell'esponente si riconduce direttamente alla geometria considerata. Possiamo notare infatti la presenza dell'autovalore di Williams di modo I " λ_I ".

La parte iniziale della formula invece risulta molto differente nell'espressione, ma in realtà i termini coinvolti risultano essere funzione delle stesse variabili:

- A numeratore del primo termine della (8.6) troviamo il coefficiente di Poisson che rappresenta un parametro funzione del materiale considerato, stessa cosa la troviamo nell'espressione (8.12);
- A denominatore dell'espressione (8.6) troviamo i termini e_1 ed e_2 che sono parametri legati sia alla geometria che del materiale, stessa cosa che si può notare nel terzo termine della (8.12) dove sono presenti le funzioni angolari del campo di tensioni di modo I e II.

Le differenze si trovano negli esponenti ai quali questi parametri sono elevati e alla comparsa nell'espressione (8.12) delle funzioni geometriche H_{ii} , H_{ij} e H_{ji} ; questo per due motivi principali:

- Le ipotesi iniziali sulle quali i due modelli si basano sono diverse;
- Le definizioni e i metodi di calcolo degli N-SIF sono diversi.

Un'ulteriore differenza tra i due modelli è che il secondo permette di stimare l'angolo di nucleazione della cricca rispetto alla bisettrice dell'intaglio nello stesso momento in cui viene calcolato l'N-SIF critico.

Cosa che il modello SED non prevede, si può comunque oltrepassare questo limite applicando il criterio di Sih^[17] o il criterio di Erdogan-Sih^[18].

CRITERIO DI SIH:

Rappresenta un approccio di tipo energetico secondo il quale la direzione di propagazione della cricca è rappresentata dal luogo dei punti dove l'energia di deformazione elastica è minima. Questa condizione è determinata dall'ipotesi termodinamica che afferma la tendenza dei sistemi in natura di evolvere da una condizione di energia elevata ad un'altra inferiore.

Tramite un modello dell'intaglio considerato, è possibile ricavare il valori delle tensioni principali agenti punto per punto all'interno di un path circolare (di raggio R) generato per tale scopo. Una volta note le tensioni principali utilizzando l'espressione dell'energia di deformazione totale (Beltrami, eq (8.15)) è possibile ricavare tale valore per ogni punto del path. L'angolo di propagazione della cricca sarà determinato dal punto nel quale l'energia di deformazione totale sarà minima.

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] \quad (8.13)$$

CRITERIO DI ERDOGAN – SIH:

Rappresenta un approccio tensionale e ha come ipotesi quella di prevedere la propagazione nella direzione in cui le tensioni $\sigma_{\theta\theta}$ e σ_{rr} risultano principali, con ciò si afferma indirettamente che in quel luogo di punti di coordinata angolare θ_0 la tensione $\tau_{r\theta}$ deve risultare pari a zero.

Utilizzando un modello agli elementi finiti e costruendo un path circolare attorno all'apice dell'intaglio, è possibile ricavare la tensione $\tau_{r\theta}$ in ogni punto. Noti quindi tutti i valori ad una distanza R prefissata, l'angolo di propagazione sarà quello determinato dal nodo dove la tensione

sarà vicina a zero o in alternativa sarà quella in mezzo tra le coordinate angolari dove le tensioni cambiano di segno tra un nodo e l'altro.

Operativamente si procede generando un grafico contenente i valori delle tensioni in ordinata e il rispettivo angolo in ascissa, l'angolo di propagazione vero sarà quell'angolo dove tale curva interseca l'asse x.

8.3 Confronto con i dati sperimentali

8.3.1 Analisi FEM per il calcolo degli N-SIF critici partendo dai dati sperimentali

L'analisi numerica per ottenere il K_1 e K_2 (critici), che hanno portato a rottura il provino durante la prova effettuata in laboratorio, risulta essere la stessa utilizzata per il caso di modo I puro.

A causa della diversa geometria dei provini, configurazione dei carichi e differenti tensioni investigate quest'ultima analisi possiede delle caratteristiche leggermente diverse.

In primo luogo la condizione di modo misto si genera sul materiale quando siamo in presenza di geometria o carico o entrambi non simmetrici, ciò porta inevitabilmente a dover modellare il provino, la configurazione dei carichi e dei vincoli nella totale interezza.

In secondo luogo, se per modo I puro la tensione $\tau_{r\theta}$ veniva utilizzata per verificare la bontà del modello, qui viene utilizzata proprio per il calcolo dell'N-SIF critico di modo II. Ricordando che la teoria ci assicura che la bisettrice rappresenta il luogo geometrico dei punti dove modo I e modo II sono disaccoppiati. Qualunque tensione $\sigma_{\theta\theta}$ presente sulla bisettrice dell'intaglio sarà dovuta al modo I, al contrario la $\tau_{r\theta}$ sarà dovuta al modo II.

In fine, per alcuni particolari geometrie, sarà necessario generare un sistema di riferimento cilindrico centrato sull'apice dell'intaglio e ruotato rispetto al sistema cartesiano in modo che la bisettrice dell'intaglio sia coincidente con la direzione $\theta = 0$.

Per la verifica della bontà dei modelli si ricorre solamente alla verifica della pendenza dei campi di tensione in scala doppio logaritmica.

8.3.2 Gómez, Elices, Berto and Lazzarin (2009)

I dati utilizzati per il confronto sono stati ricavati dai ricercatori Gómez, Elices, Berto e Lazzarin^[19] su provini intagliati a spigolo vivo, mediante un tipo di prova di flessione a tre punti con due tipologie distinte di provini:

1. Vertical Notch con le seguenti dimensioni e geometria rappresentata in fig. 8.1:

- lunghezza $L = 126$ mm;
- altezza $W = 28$ mm;
- spessore $t = 14$ mm;
- profondità intaglio $a = 14$ mm;
- angolo di apertura variabile $2\alpha = 30,60$ e 90 gradi.

Vincolato inferiormente con due appoggi semplici a distanze fisse, uno a 18 mm a sinistra rispetto alla bisettrice dell'intaglio e uno a destra a 56 mm. Mentre il carico applicato superiormente viene posto prima ad una distanza $b = 1$ mm a sinistra della bisettrice e successivamente ad $b = 9$ mm.

2. Tilted Notch con le seguenti dimensioni e geometrie rappresentate nelle fig. 8.2a/b:

- lunghezza $L = 126$ mm;
- altezza $W = 28$ mm;
- spessore $t = 14$ mm;
- profondità intaglio $a = 14$ mm;
- angolo di apertura variabile $2\alpha = 30,60$ e 90 gradi.

In quest'altro tipo di provini viene mantenuta costante la posizione del carico ad una distanza di $b = 9$ mm a destra rispetto alla bisettrice. Mentre viene fatto spostare l'appoggio di sinistra in due posizioni $m = 9$ mm e $m = 18$ mm.

In questa particolare geometria la bisettrice dell'intaglio è ruotata di 45° rispetto alla verticale .

Questi due tipi di configurazioni di carico e di appoggio sono servite per modificare il rapporto tra i due modi di sollecitazione, ciò ci ha permesso di confrontare entrambi i metodi su una varietà di dati sperimentali più ampia a parità di geometria dei provini considerata.

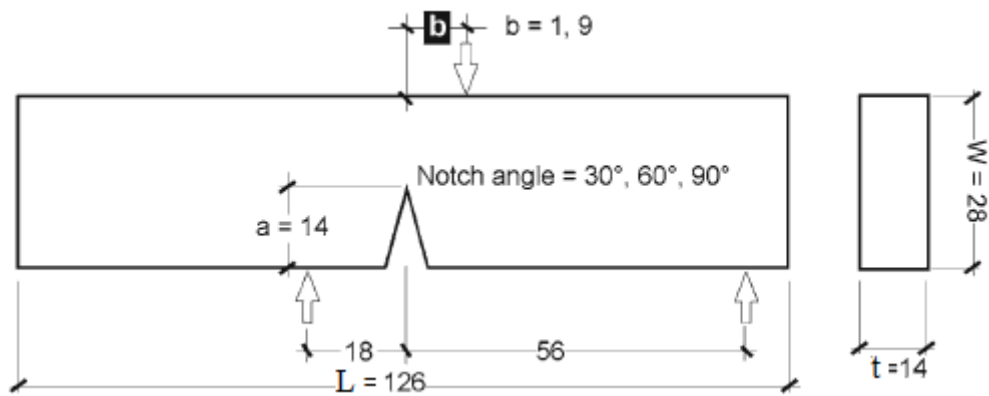


Figura 8.1 – Rappresentazione del provino Vertical notch.

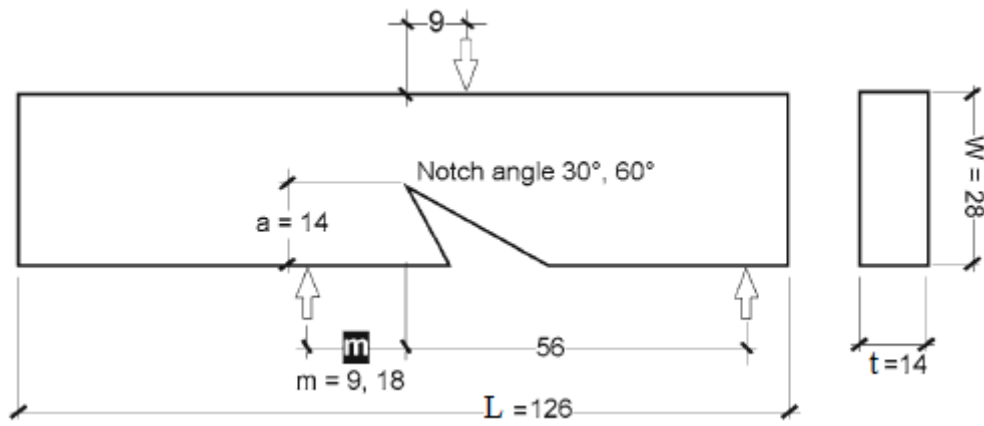


Figura 8.2a – Rappresentazione del provino Tilted notch per angoli di apertura 30° e 60° .

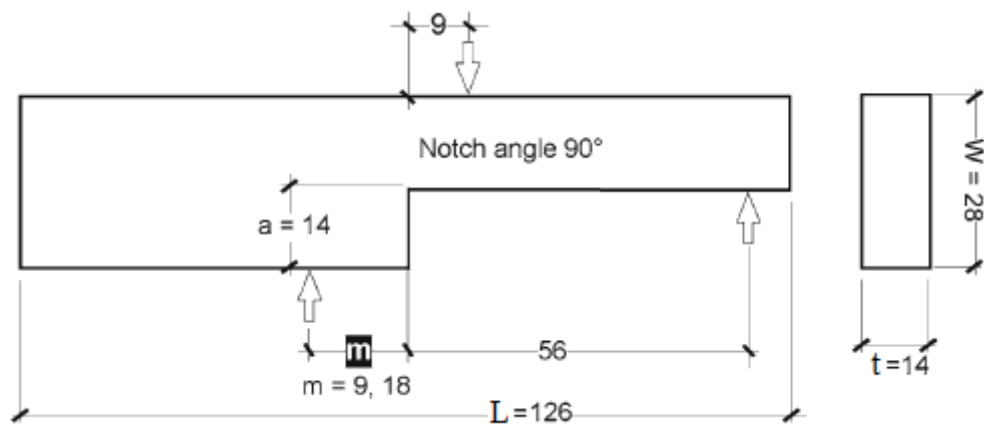


Figura 8.2a – Rappresentazione del provino Tilted notch per l'angolo di apertura 90° .

Il materiale utilizzato per questo tipo di prova è stato il PMMA con le seguenti proprietà meccaniche:

- Modulo di Young => $E = 5050 \text{ MPa}$;
- Coefficiente di Poisson => $\nu = 0,4$;
- Tensione a rottura => $\sigma_t = 128,4 \text{ MPa}$;
- Tenacità a frattura => $K_{Ic} = 1,7 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{0,5}$.

Tutti questi parametri sono stati stimati ad una temperatura di -60°C in quanto si voleva ottenere un comportamento lineare fino a rottura del materiale (vedi fig. 8.3). Per temperature superiori il materiale dimostra una capacità plastica non più trascurabile, a questo punto i dati sperimentali ottenuti in queste condizioni risultavano essere completamente all'esterno della ipotesi di validità di tutta la trattazione.

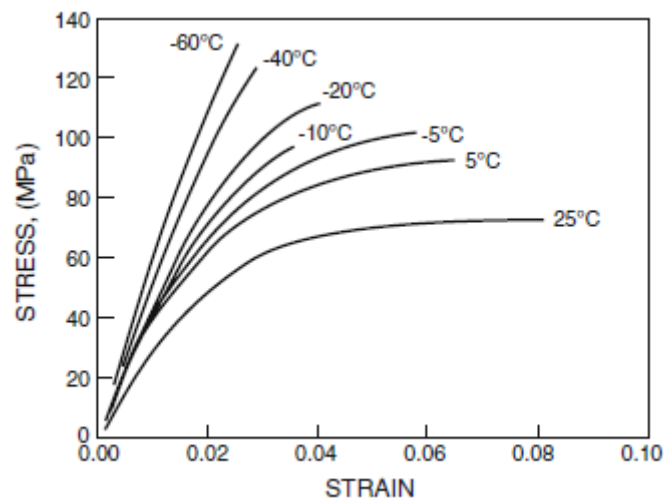


Figura 8.3 – Andamento delle curve tensione – deformazione al variare della temperatura di prova per il PMMA considerato nell'analisi sperimentale.

I test condotti tramite una prova di three point bending in camera climatica controllata hanno portato ai seguenti risultati per i provini “Vertical notches”, tabella 8.1:

Tabella 8.1 – Carichi critici e angoli di propagazione della cricca ottenuti su provini Vertical notches.

Specimen	b (mm)	Notch angle (°)	Notch radius (μm)	Maximum load P (N)	Fracture angle φ (°)
v30-1	1	30.7	45	813	12.9
v30-2	1	30.0	44	840	14.8
v30-3	1	30.0	32	860	7.7
v60-16	1	62.8	44	1,047	11.9
v60-17	1	62.8	48	1,017	15.8
v60-18	1	63.2	56	986	14.3
v90-31	1	90.5	32	856	5.2
v90-32	1	90.2	22	897	5.9
v90-33	1	90.3	20	894	6.2
v30-4	9	30.5	40	826	19.7
v30-5	9	30.1	44	940	29.7
v30-6	9	29.9	46	921	24.3
v60-19	9	62.9	66	1,080	14.6
v60-20	9	62.9	72	1,023	27.5
v60-21	9	62.9	63	1,013	21.9
v90-34	9	90.3	18	923	17.4
v90-35	9	89.4	18	994	16.8
v90-36	9	89.4	23	961	21.1

Mentre per i provini “Tilted notches” sono stati ottenuti i seguenti risultati, tabella 8.2:

Tabella 8.2 - Carichi critici e angoli di propagazione della cricca ottenuti su provini Tilted notches.

Specimen	m (mm)	Notch angle ($^{\circ}$)	Notch radius (μm)	Maximum load P (N)	Fracture angle φ ($^{\circ}$)
v30-46	18	30.8	26	1,401	54.2
v30-47	18	30.6	16	1,256	59.5
v30-48	18	30.1	33	1,369	59.9
v60-61	18	63.0	50	1,430	47.8
v60-62	18	63.4	53	1,476	49.2
v60-63	18	62.9	52	1,410	48.3
v90-76	18	90.0	22	1,525	40.8
v90-77	18	90.1	16	1,676	33.1
v90-78	18	90.1	18	1,567	36.3
v30-49	9	29.8	28	2,198	63.3
v30-50	9	30.3	30	2,259	69.2
v30-51	9	30.1	22	2,228	64.3
v60-69	9	63.0	45	3,437	43.0
v60-70	9	63.0	41	3,138	49.6
v60-71	9	63.0	42	3,221	56.3
v90-85	9	90.0	19	3,979	49.1
v90-86	9	90.4	22	5,166	49.4
v90-87	9	90.1	25	4,345	45.1

È possibile notare come per ogni angolo di apertura siano stati utilizzati tre provini in modo da poter avere una valutazione sulla dispersione statistica dei risultati ottenuti. Inoltre per ogni provino è stato misurato l'angolo di nucleazione della cricca " ϕ " rispetto alla bisettrice dell'intaglio. Come detto precedentemente nei paragrafi 5.4.1 e 8.3.1, tramite un modello FEM è stato possibile ricavare gli N-SIF presenti nel materiale durante la rottura.

I risultati ottenuti sono rappresentati nelle tabelle 8.3 e 8.4 (nella prima tabella verranno mostrati i risultati relativi ai Vertical notches, mentre nella seconda quelli relativi ai Tilted notches) e verranno poi confrontati con i risultati previsionali forniti dai due modelli.

Tabella 8.3 – N-SIF critici ricavati dall’analisi FEM effettuata sui provini Vertical notches.

Specimen	b (mm)	K_1^V MPa (m) $^{1-\lambda_I}$	K_2^V MPa (m) $^{1-\lambda_{II}}$	K_2^V/K_1^V (m) $^{\lambda_I-\lambda_{II}}$
v30-1	1	1.71	0.36	0.21
v30-2	1	1.77	0.38	0.21
v30-3	1	1.81	0.38	0.21
v60-16	1	2.42	1.10	0.45
v60-17	1	2.36	1.06	0.45
v60-18	1	2.28	1.03	0.45
v90-31	1	2.51	5.00	1.99
v90-32	1	2.63	5.24	1.99
v90-33	1	2.62	5.23	2.00
v30-4	9	1.65	0.72	0.44
v30-5	9	1.88	0.82	0.44
v30-6	9	1.84	0.80	0.44
v60-19	9	2.36	2.34	0.99
v60-20	9	2.24	2.22	0.99
v60-21	9	2.21	2.19	0.99
v90-34	9	2.57	8.38	3.27
v90-35	9	2.76	9.02	3.27
v90-36	9	2.67	8.72	3.27

Dalla seguente tabella è possibile notare come rapporti K_2/K_1 risultino più elevati quando il carico viene posto nella posizione più lontana delle due rispetto alla bisettrice dell’intaglio ($b = 9$ mm), tutto ciò è in perfetto accordo con quanto ci si aspetta in quanto questa configurazione maggiormente anti-simmetrica rispetto alla precedente produce un aumento del modo II a scapito del modo I.

Nella tabella successiva verranno rappresentati i valori ottenuti nella modellazione dei provini Tilted notch.

Tabella 8.4 – N-SIF critici ricavati dall’analisi FEM sui provini Tilted notches.

Specimen	m (mm)	K_1^V MPa $(m)^{1-\lambda_I}$	K_2^V MPa $(m)^{1-\lambda_{II}}$	$K_2^V/K_1^V (m)^{\lambda_I-\lambda_{II}}$
v30-46	18	1.76	2.27	1.29
v30-47	18	1.58	2.04	1.29
v30-48	18	1.72	2.22	1.29
v60-61	18	1.93	5.67	2.94
v60-62	18	1.99	5.86	2.94
v60-63	18	1.90	5.60	2.95
v90-76	18	2.56	20.43	7.98
v90-77	18	2.81	22.46	7.99
v90-78	18	2.63	21.00	7.98
v30-49	9	0.97	2.77	2.84
v30-50	9	1.00	2.84	2.84
v30-51	9	0.99	2.80	2.84
v60-69	9	1.56	10.49	6.72
v60-70	9	1.42	9.57	6.74
v60-71	9	1.46	9.83	6.73
v90-85	9	2.15	37.86	17.61
v90-86	9	2.79	49.16	17.62
v90-87	9	2.34	41.35	17.67

A differenza di quello visto prima a parità di angolo di apertura il rapporto tra i due K risulta maggiore quando l’appoggio di sinistra viene posto ad una distanza minore rispetto alla mezziera della lunghezza del provino ($m = 9$ mm), questo perchè l’avvicinamento dell’appoggio al carico produce un aumento di condizione di carico anti-simmetrica.

Confrontando, invece, i valori contenuti nelle due tabelle risulta molto evidente come, a parità di angolo di apertura dell’intaglio, i provini con intaglio ruotato di 45° presentano una componente di modo II molto più rilevante rispetto ai provini con la bisettrice verticale. Tutto ciò è confermato dal fatto i Tilted notches presentano due tipi di anti-simmetria, una geometrica del provino e una di applicazione di carichi e vincoli. Al contrario i Vertical notches presentano una simmetria geometrica e una anti-simmetria dei carichi. La doppia anti-simmetria dei primi produce un aumento del modo II di sollecitazione dell’intaglio e di conseguenza un aumento del rapporto tra gli N-SIF.

Applicando le espressioni (8.6 e 8.12) è stato possibile ricavare i valori degli N-SIF previsti dai due modelli, iniziamo mostrando la previsione del modello SED:

Tabella 8.5 – Risultati previsionali forniti dal modello SED per tutte le geometrie considerate.

Vertical Notches

b = 1mm

ω [°]	$\frac{K_2}{K_1}$ [$m^{\lambda_1-\lambda_2}$]	m	K_{Ic} stimato [$MPa \cdot m^{1-\lambda_1}$]
30	0,21	0,0777	1,635
60	0,45	0,0476	1,784
90	1,99	0,0476	2,467

b = 9mm

ω [°]	$\frac{K_2}{K_1}$ [$m^{\lambda_1-\lambda_2}$]	m	K_{Ic} stimato [$MPa \cdot m^{1-\lambda_1}$]
30	0,44	0,1627	1,597
60	0,99	0,1048	1,770
90	3,27	0,0782	2,460

Tilted Notches

m = 18mm

ω [°]	$\frac{K_2}{K_1}$ [$m^{\lambda_1-\lambda_2}$]	m	K_{Ic} stimato [$MPa \cdot m^{1-\lambda_1}$]
30	1,29	0,4770	1,322
60	2,94	0,3111	1,647
90	7,98	0,1909	2,409

m = 9mm

ω [°]	$\frac{K_2}{K_1}$ [$m^{\lambda_1-\lambda_2}$]	m	K_{Ic} stimato [$MPa \cdot m^{1-\lambda_1}$]
30	2,84	1,0502	0,859
60	6,73	0,7122	1,285
90	17,62	0,4214	2,205

Mostriamo ora i valori previsionali forniti dal criterio di Leguillon:

Tabella 8.6 – Risultati previsionali ottenuti dal modello di Leguillon per tutte le geometrie considerate.

Vertical Notches

b = 1mm

ω [°]	$\frac{K_2}{K_1}$ [$m^{\lambda_1-\lambda_2}$]	m	K_{Ic} stimato [$MPa \cdot m^{1-\lambda_1}$]
30	0,21	0,0761	1,719
60	0,45	0,0458	1,971
90	1,99	0,0464	2,889

b = 9mm

ω [°]	K_2/K_1 [$m^{\lambda_1-\lambda_2}$]	m	K_{Ic} stimato [$MPa*m^{1-\lambda_1}$]
30	0,44	0,1596	1,680
60	0,99	0,1010	1,956
90	3,27	0,0772	2,878

Tilted Notches

m = 18mm

ω [°]	K_2/K_1 [$m^{\lambda_1-\lambda_2}$]	m	K_{Ic} stimato [$MPa*m^{1-\lambda_1}$]
30	1,29	0,4710	1,425
60	2,94	0,3055	1,826
90	7,98	0,1898	2,806

m = 9mm

ω [°]	K_2/K_1 [$m^{\lambda_1-\lambda_2}$]	m	K_{Ic} stimato [$MPa*m^{1-\lambda_1}$]
30	2,84	1,0423	1,007
60	6,73	0,7237	1,470
90	17,62	0,4428	2,536

Dai valori mostrati dalle due tabelle si può notare come seppure i valori degli m, utilizzati per il calcolo finale del K critico, siano molto simili i valori degli N-SIF critici di modo I siano diversi con una tendenza del criterio di Leguillon ad essere sempre meno conservativo rispetto al SED.

Passiamo ora al confronto tra i risultati sperimentali e i valori appena mostrati:

Tabella 8.7 – Confronto tra dati sperimentali medi e dati previsionali.

Vertical Notches

b = 1mm

ω [°]	K_{Ic} SED [$MPa*m^{1-\lambda_1}$]	K_{Ic} Leguillon [$MPa*m^{1-\lambda_1}$]	K_2/K_1 [$m^{\lambda_1-\lambda_2}$]	K_{Ic} medio sperimentale [$MPa*m^{1-\lambda_1}$]
30	1,635	1,719	0,21	1,763
60	1,784	1,971	0,45	2,353
90	2,467	2,889	1,99	2,587

b = 9mm

ω [°]	K_{Ic} SED [$MPa*m^{1-\lambda_1}$]	K_{Ic} Leguillon [$MPa*m^{1-\lambda_1}$]	K_2/K_1 [$m^{\lambda_1-\lambda_2}$]	K_{Ic} medio sperimentale [$MPa*m^{1-\lambda_1}$]
30	1,597	1,680	0,44	1,790
60	1,770	1,956	0,99	2,270
90	2,460	2,878	3,27	2,667

Tilted Notches
 $m = 18\text{mm}$

ω [°]	K_{Ic} SED [MPa*m ^{1-λ1}]	K_{Ic} Leguillon [MPa*m ^{1-λ1}]	K_2/K_1 [m ^{λ1-λ2}]	K_{Ic} medio sperimentale [MPa*m ^{1-λ1}]
30	1,322	1,425	1,29	1,687
60	1,647	1,826	2,94	1,940
90	2,409	2,806	7,98	2,667

$m = 9\text{mm}$

ω [°]	K_{Ic} SED [MPa*m ^{1-λ1}]	K_{Ic} Leguillon [MPa*m ^{1-λ1}]	K_2/K_1 [m ^{λ1-λ2}]	K_{Ic} medio sperimentale [MPa*m ^{1-λ1}]
30	0,859	1,007	2,84	0,987
60	1,285	1,470	6,73	1,480
90	2,205	2,536	17,62	2,427

Nel confronto con i dati sperimentali medi (tabella 8.7) si può notare come per i primi due angoli considerati (30° e 60°) il modello di Leguillon si avvicini molto di più ai risultati sperimentali, mentre il modello del SED tende ad essere più conservativo. In queste condizioni il SED tende a sottostimare tali valori critici. Tutto ciò appare insensibile anche al rapporto tra gli N-SIF in quanto sia per rapporti piccoli (minori di 1) che per rapporti grandi si nota un divario tra le due previsioni che sembra essere più o meno costante.

Situazione diversa si può notare per l'ultimo angolo studiato (90°) dove il criterio del SED tende ad avvicinarsi molto di più ai valori previsti, mentre il criterio di Leguillon tende a sovrastimare la resistenza di tutti i provini considerati.

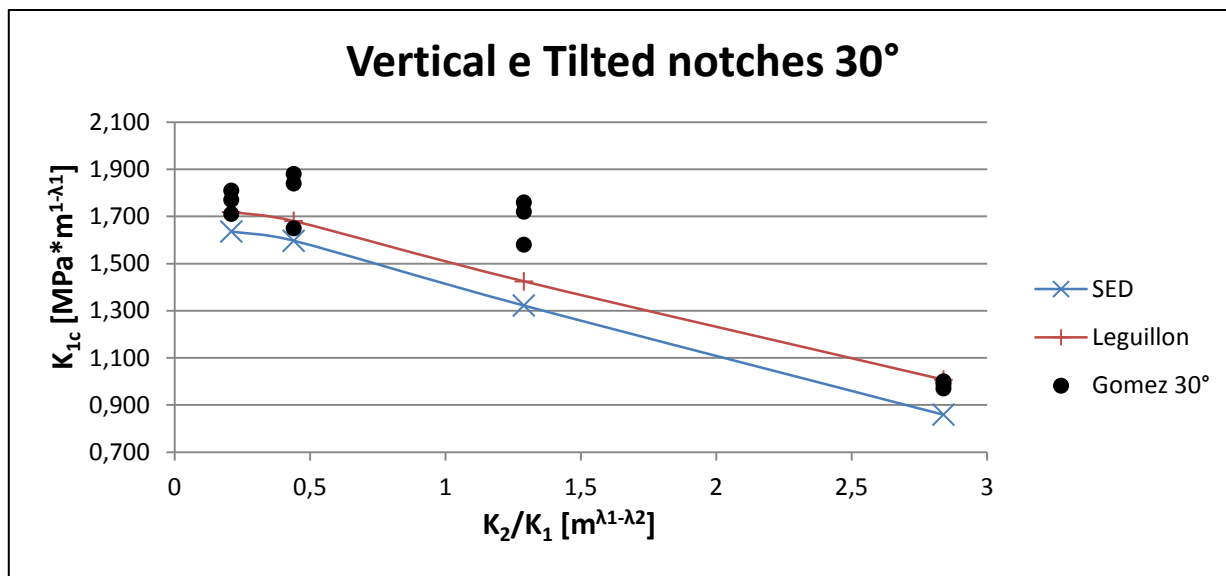


Figura 8.4 – Confronto tra i dati sperimentali e i risultati previsionali in funzione del rapporto tra gli N-SIF su provini con angolo di apertura pari a 30°.

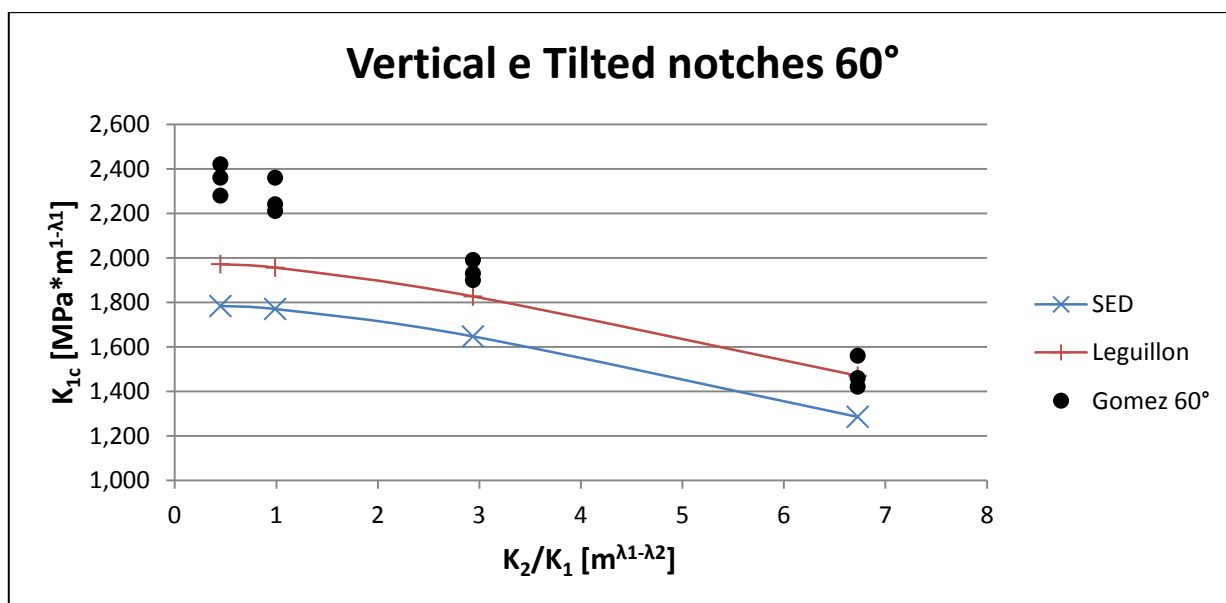


Figura 8.5 – Confronto tra i dati sperimentali e i risultati previsionali in funzione del rapporto tra gli N-SIF su provini con angolo di apertura pari a 60°.

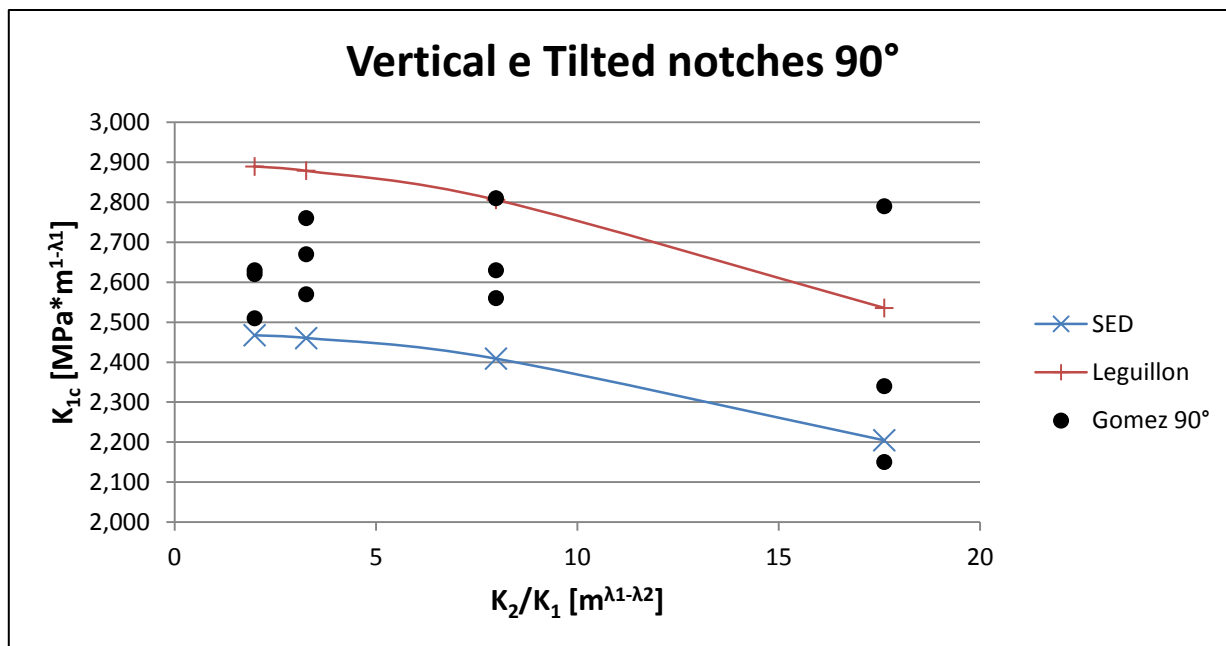


Figura 8.6 – Confronto tra i dati sperimentali e i risultati previsionali in funzione del rapporto tra gli N-SIF su provini con angolo di apertura pari a 90°.

Dai grafici presenti nelle fig. 8.4 – 8.6 è possibile notare come gli andamenti dei due metodi previsionali al variare del rapporto tra gli N-SIF siano pressochè uguali, infatti le due linee appaiono solo traslate in orizzontale una rispetto all'altra.

Nel confronto con i punti sperimentali possiamo ribadire quello detto precedentemente, cioè per i primi due angoli di apertura considerati il criterio di Leguillon tende ad essere più vicino ai dati sperimentali, anche se possiamo notare che alcuni punti sperimentali giacciono sotto la curva previsionale. Quei punti rappresentano un problema in fase di progettazione in quanto il modello fornisce al progettista una sovrastima della resistenza del materiale in una specifica configurazione geometrica.

Per quanto riguarda il criterio del SED possiamo affermare come esso tende ad essere più conservativo, cioè tende a sottostimare sia i valori medi sperimentali che i valori forniti dai singoli provini. Questo permette al modello di rimanere sempre in favore di sicurezza, infatti di tutto il set di dati sperimentali solo un punto viene sovrastimato da tale criterio. Questa condizione a livello di progettazione risulta molto più conveniente.

8.3.3 V-Notch brasilian disc

Come ultima analisi per il confronto con i dati sperimentali possiamo utilizzare ciò che è stato ottenuto dai ricercatori M.R. Ayatollahi and A.R. Torabi^[20](2010). Essi hanno utilizzato dei dischi in grafite policristallina con al centro un intaglio romboiadale.

Tali provini circolari avevano le seguenti dimensioni:

- diametro $D = 60$ mm;
- profondità intaglio $d/2 = 15$ mm;
- spessore $t = 8$ mm;
- angolo di azione del carico β (variabile in funzione dell'apertura dell'intaglio);
- angolo di apertura variabile $2\alpha = 30, 60$ e 90 gradi.

Lo stato di sollecitazione nel materiale è stato generato tramite l'applicazione di due carichi uguali e opposti di compressione, la prova è stata condotta normale macchina per la prova di trazione-compressione. Per far variare il rapporto tra gli N-SIF si è agito sull'angolo formato tra la bisettrice dell'intaglio e la direzione di applicazione del carico (vedi fig. 8.7).

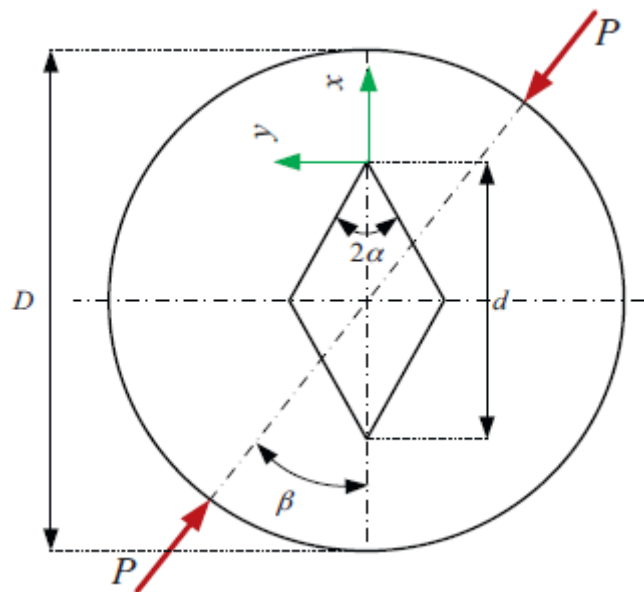


Figura 8.7 – Geometria del provino utilizzato.

Per tali provini è stata utilizzata della grafite policristallina commerciale grana equiassica di grandezza media con le seguenti proprietà meccaniche:

- Modulo di Young $\Rightarrow E = 8050$ MPa;
- Coefficiente di Poisson $\Rightarrow \nu = 0,2$;
- Tensione a rottura $\Rightarrow \sigma_t = 27,5$ MPa;
- Tenacità a frattura $\Rightarrow K_{Ic} = 1$ MPa*m^{0,5}.

Il materiale è stato scelto per il suo comportamento lineare a rottura e per la sua buona proprietà di isotropicità.

I test condotti tramite una prova di compressione hanno portato ai seguenti risultati, tabella 8.8:

Tabella 8.8 – Carichi medi ottenuti con sui provini con angoli i apertura 30, 60 e 90 gradi.

2α [°]	β [°]	P_f medio [N]
30	0	1380
30	10	1390
30	20	1500
30	25	1560
60	0	1372
60	15	1575
60	25	1717
60	30	1740
90	0	848
90	15	930
90	25	1343
90	35	2118

Dagli angoli di applicazione del carico β presenti nella tabella 8.8, si può notare come i ricercatori siano partiti da una condizione di carico di puro modo I per poi via via generare nel materiale una condizione di modo misto con rapporto diverso. L'ultimo angolo di applicazione del carico per ogni angolo di apertura dell'intaglio ha prodotto nel provino una sollecitazione di puro modo II. I ricercatori in questa analisi hanno verificato tutte e tre le condizioni di sollecitazione planari possibili, in tale ordine modo I puro, modo misto I+II e modo II puro.

Conducendo un'analisi FEM è stato possibile ricavare i valori degli N-SIF critici di modo I e modo II che hanno portato a cedimento il materiale, partendo dalla geometria e dal carico critico applicato dalla macchina di compressione durante le varie prove.

I risultati ottenuti dall'analisi FEM sono riassunti nelle tabelle 8.9 – 8.11, suddivisi per angolo di apertura dell'intaglio:

Tabella 8.9 – Valori degli N-SIF critici ricavati dalle prove sperimentali per il set di provini con angolo di apertura $2\alpha = 30^\circ$.

β [°]	K_1 [MPa*m ^{1-λ_1]}	K_2 [MPa*m ^{1-λ_2]}	K_2/K_1 [m ^{$\lambda_1-\lambda_2$}]
0	0,98	0,00	0,0
0	1,02	0,00	0,0
0	1,05	0,00	0,0
10	0,47	1,28	2,7
10	0,53	1,42	2,7
10	0,55	1,47	2,7
20	0,16	1,80	11,0
20	0,16	1,80	11,0
20	0,18	2,00	11,0
25	0,00	1,86	∞
25	0,00	2,00	∞
25	0,00	2,20	∞

Come detto precedentemente ogni tipo di provino è stato sollecitato in tutti i tre modi possibili nel piano, in particolare l'ultimo angolo applicazione del carico produce nel materiale uno stato di sollecitazione di puro modo II (nella tabella è possibile notare come tale angolo produca un K di modo I costante e pari a 0).

Tabella 8.10 – Valori degli N-SIF critici ricavati dalle prove sperimentali per il set di provini con angolo di apertura $2\alpha = 60^\circ$.

β [°]	K_1 [MPa*m ^{1-λ_1]}	K_2 [MPa*m ^{1-λ_2]}	K_2/K_1 [m ^{$\lambda_1-\lambda_2$}]
0	1,01	0,00	0,0
0	1,07	0,00	0,0
0	1,09	0,00	0,0
15	0,50	3,13	6,3
15	0,53	3,36	6,3
15	0,59	3,73	6,3
25	0,17	4,82	28,0
25	0,17	4,82	28,0
25	0,17	4,82	28,0
30	0,00	6,20	∞
30	0,00	6,30	∞
30	0,00	6,51	∞

Tabella 8.11 – Valori degli N-SIF critici ricavati dalle prove sperimentali per il set di provini con angolo di apertura $2\alpha = 90^\circ$.

β [°]	K_1 [MPa*m ^{1-λ_1}]	K_2 [MPa*m ^{1-λ_2}]	K_2/K_1 [m ^{$\lambda_1-\lambda_2$}]
0	1,29	0,00	0,0
0	1,44	0,00	0,0
0	1,49	0,00	0,0
15	1,06	10,51	9,9
15	1,16	11,50	9,9
15	1,21	12,00	9,9
25	0,80	14,72	18,5
25	0,96	17,76	18,5
25	1,01	18,68	18,5
35	0,00	25,93	∞
35	0,00	27,31	∞
35	0,00	29,63	∞

Passiamo ora al confronto numerico e grafico dei dati sperimentali con i dati predetti dai due modelli presi in esame in questa trattazione, per semplicità il confronto numerico verrà eseguito sui valori medi degli N-SIFs critici ottenuti tramite l'analisi FEM:

Tabella 8.12 – Confronto numerico tra i dati sperimentali medi e i risultati previsionali forniti dai due modelli.

2α [°]	β [°]	K_{Ic} SED[MPa*m ^{1-λ_1}]	K_{Ic} Leguillon [MPa*m ^{1-λ_1}]	K_2/K_1 [m ^{$\lambda_1-\lambda_2$}]	K_{Ic} sperimentale[MPa*m ^{1-λ_1}]
30	0	1,00	1,02	0,0	1,02
	10	0,51	0,54	2,7	0,52
	20	0,15	0,18	11,0	0,17
60	0	1,05	1,15	0,0	1,06
	15	0,65	0,71	6,3	0,54
	25	0,18	0,23	28,0	0,17
90	0	1,39	1,60	0,0	1,41
	15	1,20	1,31	9,9	1,14
	25	0,94	1,02	18,5	0,92

Dal confronto numerico diretto tra i due modelli possiamo notare come i valori previsionali forniti dal criterio di Leguillon tendano ad essere leggermente più elevati rispetto alle previsioni fornite dal modello SED. Come nel caso precedente si nota la tendenza del criterio del SED ad essere più conservativo rispetto al criterio di Leguillon.

Confrontando, invece, i valori dei due modelli con quelli ricavati sperimentalmente si può affermare come, questo caso, il modello del SED si avvicini di più ai risultati sperimentali. L'unico punto

sovrastimato di molto risulta essere per il caso di provino con angolo di apertura pari a 60° e angolo di applicazione del carico pari a 15° .

Per contro il criterio di Leguillon tende a sovrastimare quasi tutti i dati sperimentali, ciò dimostra come il metodo in questa condizione non possa essere applicato così com'è in fase di progettazione in quanto pone l'utilizzatore in sfavore di sicurezza.

Passiamo ora al confronto grafico, le successive figure 8.8 – 8.10 mostrano il riassunto del confronto tra gli andamenti previsionali e i punti sperimentali:

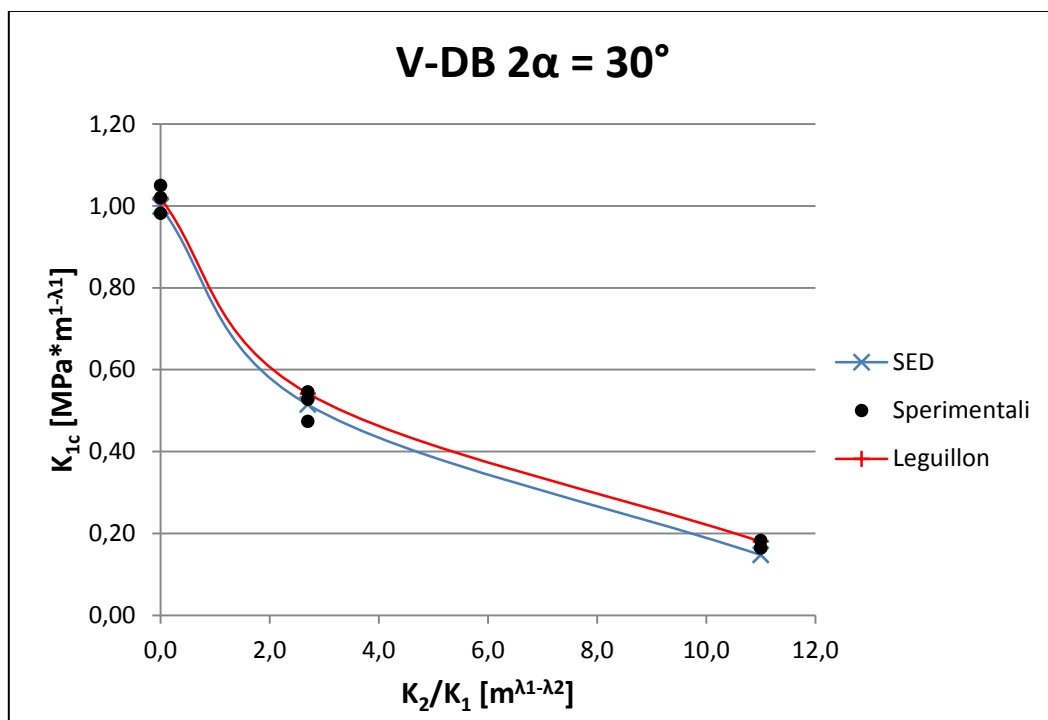


Figura 8.8 – Sintesi dati sperimentali e andamento previsionale dei due modelli nel caso di provino con angolo di apertura pari a 30 gradi.

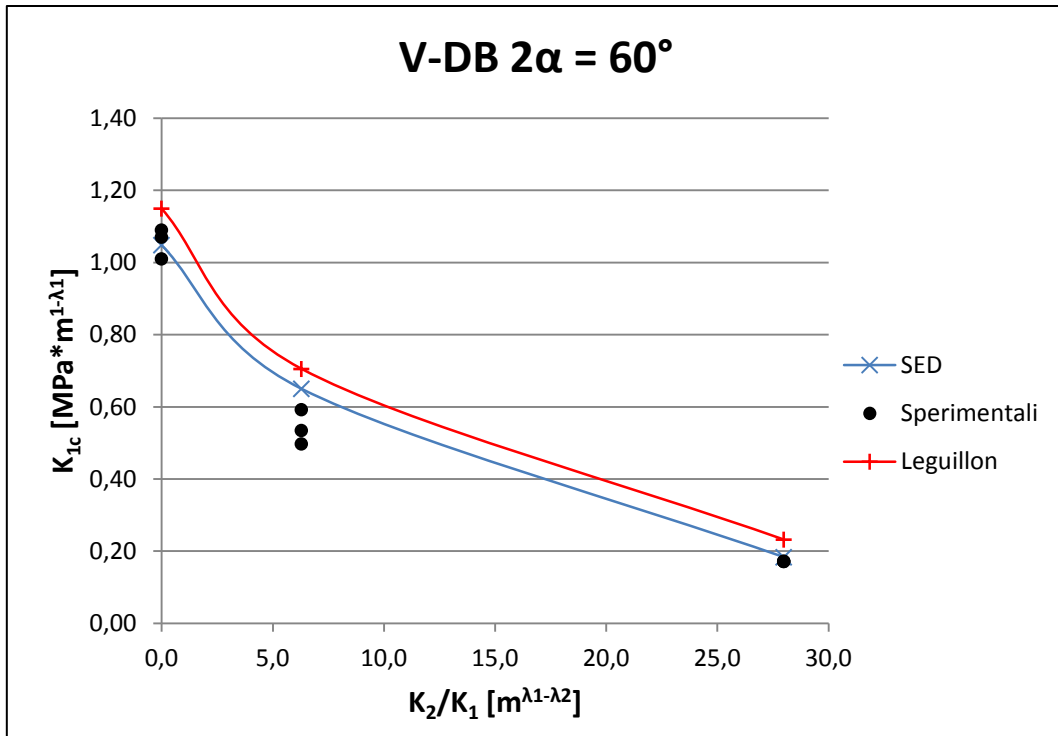


Figura 8.9 – Sintesi dati sperimentali e andamento previsionale dei due modelli nel caso di provino con angolo di apertura pari a 60 gradi.

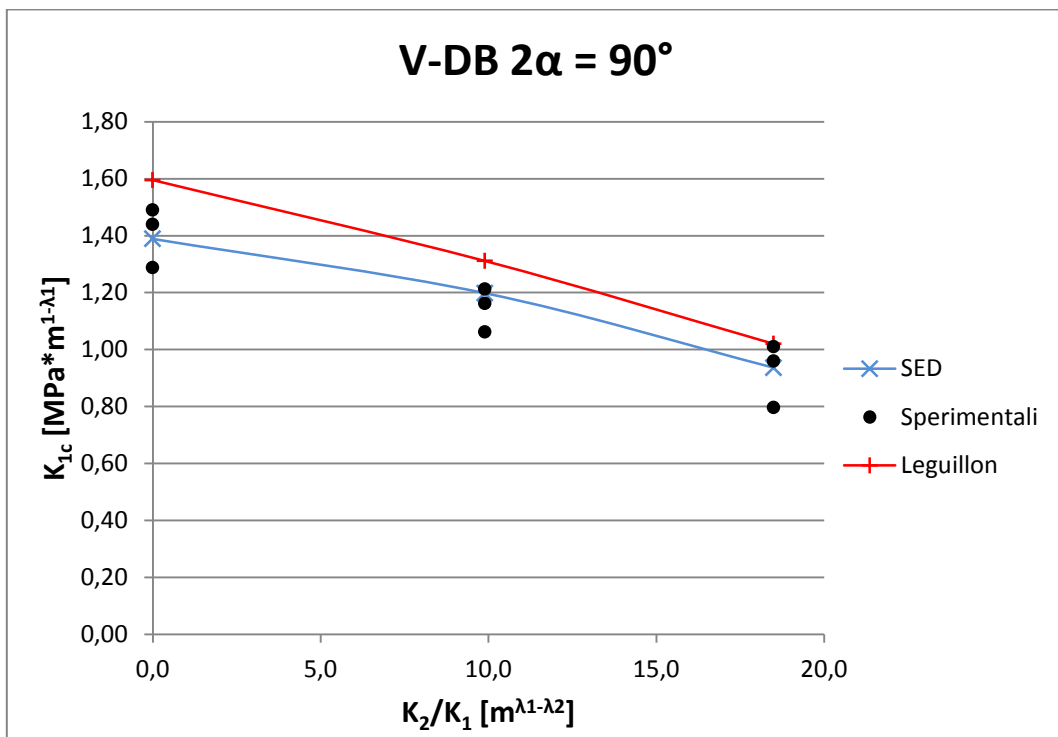


Figura 8.10 - Sintesi dati sperimentali e andamento previsionale dei due modelli nel caso di provino con angolo di apertura pari a 90 gradi.

Dal confronto appena presentato si può ben notare come i risultati sperimentali siano meglio interpretati dal modello del SED, anche se tuttavia sono presenti alcuni punti sperimentali al di sotto del limite determinato dal modello. In particolare, come già visto nel caso dei valori medi, il valore previsionale del modello è inferiore a tutti e tre i punti sperimentali ottenuti con il provino con angolo di apertura pari a 60° e rapporto di modo misto 6,3 (angolo di applicazione del carico $\beta = 15^\circ$).

Per quanto riguarda il criterio di Leguillon si nota, invece, che i risultati previsionali funzionano discretamente bene solo per i provini con angolo di apertura pari a 30° . Confrontando i risultati previsionali forniti dal modello con gli altri due angoli presi in esame si può notare come essi siano molto sensibilmente più elevati. Come detto precedentemente ciò si traduce in una condizione di sfavore di sicurezza durante la progettazione.

Mettendo a confronto i due modelli, come per il caso dei provini a flessione, notiamo che le curve che mostrano l'andamento tra i due criteri siano una traslata rispetto all'altra.

Il criterio del SED per il modo misto riesce a prevedere anche il caso di puro modo II, cosa che non è possibile per il criterio di Leguillon. Come conclusione possiamo quindi verificare i risultati sperimentali ottenuti in condizione di puro modo II con le previsioni fornite dal modello, fig. 8.11:

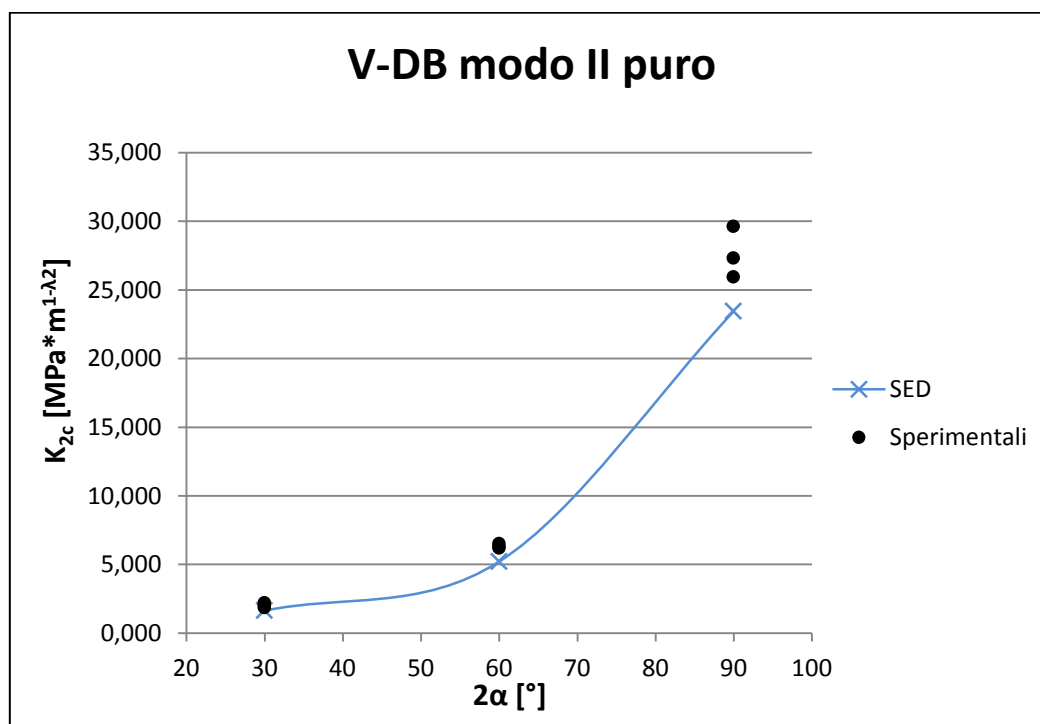


Figura 8.11 – Confronto tra l'andamento dei risultati previsionali e i punti sperimentali relativi ai provini sollecitati a puro modo II.

Quest'ultimo confronto ci permette di affermare come il modello del SED permetta di stimare la condizione di resistenza o cedimento di componenti soggetti a modo II puro con buona approssimazione. Ricordando che il modello non è stato modificato rispetto a quello per il calcolo del puro modo I (infatti non è stata modificata la relazione per il calcolo del raggio del volume di controllo e nemmeno il valore della densità di energia critica) le previsioni risultano essere di poco inferiori ai valori reali, quindi sempre in favore di sicurezza. Nella parte finale di questa trattazione verranno proposte delle nuove ipotesi per migliorare la previsione del modello SED rispetto al caso di modo misto e modo II.

9. Conclusioni

Riassumendo possiamo concludere che nel caso di modo I puro i due modelli seppur utilizzando delle condizioni di cedimento differenti tendono a fornire, a parità di angolo di apertura, una stima molto simile del valore dell'N-SIF critico. Al variare delle proprietà dei materiali considerati, si nota però, come il criterio di Leguillon tenda a dare una stima più elevata dei valori critici. Ciò dimostra che la condizione di cedimento utilizzata dal criterio risulta essere meno conservativa rispetto al criterio del SED.

Quando vengono confrontati tali valori previsionali con quelli ottenuti tramite prove sperimentali, ottenute da diversi ricercatori, risulta evidente come i due modelli risultino in buon accordo con gli N-SIF sperimentali. La tendenza del criterio di Leguillon a sovrastimare i tali risultati diviene più evidente quanto più l'angolo di apertura aumenta, mentre per angoli di apertura piccoli (più interessanti da un punto di vista teorico) la previsione risulta essere molto vicina al valore sperimentale. Nel confronto con i risultati sperimentali ottenuti da Seweryn (1994) si può notare come il criterio del SED tenda a sovrastimare di molto il valore critico nel caso di provino liscio; mentre il criterio di Leguillon tende a dare un'ottima stima di tale valore. Questo accade perchè il secondo criterio utilizza come una delle due ipotesi di cedimento la condizione di cedimento del provino liscio, quindi in tali condizioni la formula degenera in quella nota per provino liscio soggetto a trazione.

In conclusione possiamo comunque affermare che in caso di progettazione è preferibile utilizzare il valore predetto dal criterio del SED in quanto tende a fornire un risultato in favore di sicurezza.

Nel caso di modo misto I+II le cose si complicano, in quanto i modelli utilizzati per modo I vengono estesi a quest'altro tipo di sollecitazione. Vengono mantenute uguali le condizioni di cedimento per il criterio di Leguillon, mentre per il criterio del SED oltre alla densità di energia critica viene mantenuto costante anche il raggio di controllo sul quale tale densità viene calcolata.

Entrambi i criteri si pongono l'obiettivo di stimare il valore dell'N-SIF critico di modo I, noto il valore del rapporto tra gli N-SIF (che producono sul materiale il modo misto). Infatti noti il valore di tale rapporto e di uno dei due N-SIF, il calcolo del terzo valore risulta elementare. È importante notare, inoltre, che il rapporto tra gli N-SIF risulta dipendente soltanto dalla geometria del provino e dalla configurazione dei carichi e vincoli e non dalle proprietà del materiale. Per ottenere una stima di tale valore risulta necessaria solamente un'analisi FEM con un carico applicato qualsiasi.

Dal confronto diretto tra i due modelli risulta evidente che, a parità di rapporto tra gli N-SIF e angolo di apertura, il criterio di Leguillon tende a sovrastimare gli N-SIF critici predetti rispetto al criterio del SED (in modo analogo al caso di puro modo I), anche se in questo caso la sovrastima avviene anche per angoli di apertura piccoli.

Confrontando i valori predetti dai due modelli con i risultati sperimentali presenti in letteratura si nota come nel caso dei brasilian disc in grafite policristallina studiati da Ayatollahi e Torabi (2011) i due criteri riescono a dare un'ottima stima. Da notare, inoltre, il sorprendente risultato ottenuto estendendo il modello di puro modo I del SED al modo II puro, dove i valori predetti si avvicinano molto ai valori sperimentali (seppure sottimandoli).

Nel caso dei provini three point bending in PMMA studiata dai ricercatori Gomez, Elices, Berto e Lazzarin (2009) si nota che i valori previsionali non sembrano interpretare bene i valori sperimentali, questa tendenza risulta molto evidente per angoli di apertura piccoli e rapporti tra gli N-SIF non molto elevati.

I risultati appena commentati dimostrano come l'estensione del modello non può essere utilizzata direttamente in tutti i casi, ma in alcuni casi devono essere modificati alcuni parametri.

Recenti studi analitici condotti in condizioni di sollecitazione di modo II hanno evidenziato come la variazione dell'intensità dei campi di tensione risulti molto influenzata dal raggio di raccordo presente all'apice dell'intaglio. La discrepanza notata da P. Lazzarin, M. Zappalorto e F. Berto^[21] (2011) risiede nel fatto che l'approssimazione utilizzata volendo ottenere l'N-SIF di modo II con un provino V-notched (con raggio di raccordo all'apice pari a 0) risulta affetta da un errore non trascurabile, come poteva accadere nel caso di modo I puro.

Ciò accade perchè nella realtà risulta impossibile ottenere un raggio di raccordo all'apice di un intaglio pari a zero, ma seppure molto piccolo un raggio di raccordo sarà sempre presente.

Per modo I la variazione dell'N-SIF in funzione del raggio di raccordo è meno marcata, in quanto il valore delle tensioni $\sigma_{\theta\theta}$ all'apice passa (a livello matematico) da limite all'infinito (nel caso di raggio di raccordo pari a 0) a un valore molto grande (tanto più grande quanto più piccolo sarà il raggio di raccordo), questa approssimazione matematica porta ad un errore di valutazione dell'intensità dei campi di tensione molto piccola, se il raggio di raccordo rimane piccolo (vedi fig. 9.1).

Nel caso di modo II tale studio ha dimostrato che anche per raggi di raccordo piccoli si può notare un'aumento dell'intensità dei campi di tensione non più trascurabile.

Ciò succede perchè a livello matematico esiste un'enorme differenza tra le tensioni $\tau_{r\theta}$ presenti all'apice nel caso di raggio di raccordo pari a zero, dove il valore raggiunge l'infinito; mentre non appena il raggio di raccordo è diverso da zero, per ragioni di equilibrio elastico, la tensione all'apice

deve essere pari a zero. Utilizzando un modello sharp-V-notch nel caso sia presente una componente di modo II e ci sia un raggio di raccordo all'apice sufficientemente grande (anche 0,001 mm) il valore dell'intensità dei campi di tensione risulta affetta da un errore non più trascurabile e funzione del raggio di raccordo all'apice (vedi fig. 9.2).

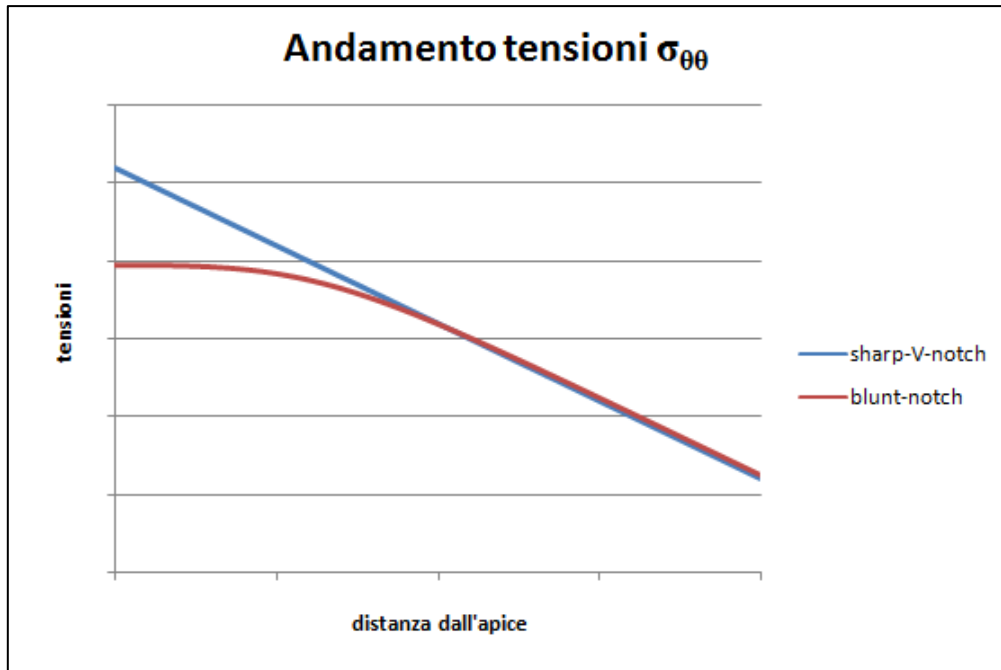


Figura 9.1 – Andamento qualitativo delle tensioni di modo I lungo la bisettrice dell'intaglio nel caso di raggio di raccordo $\rho = 0$ (in blu) e raggio di raccordo $\rho \neq 0$ (in rosso).

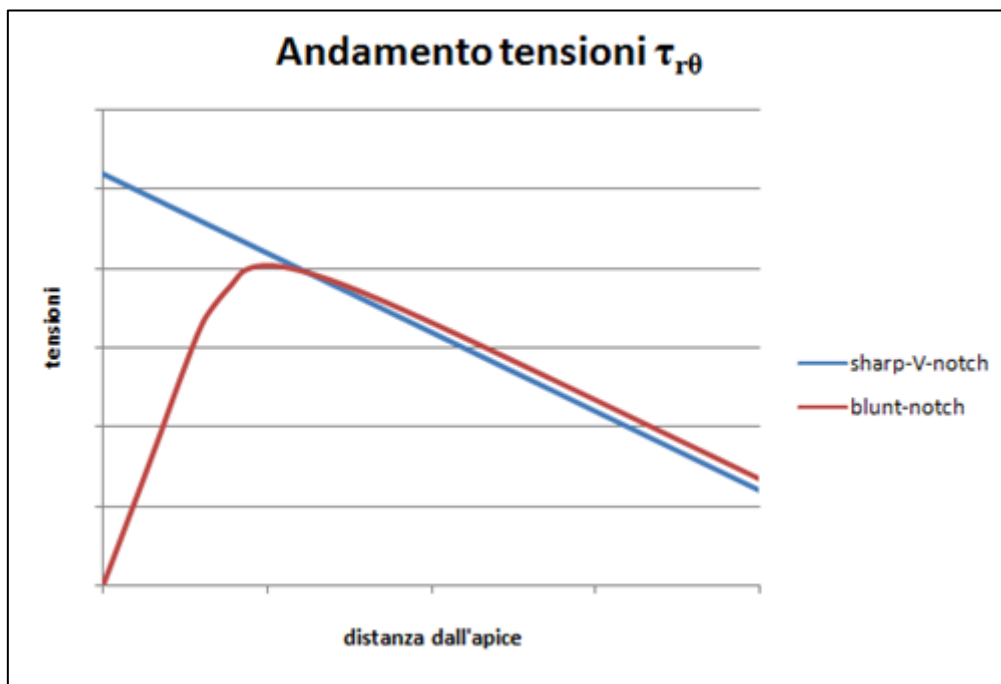


Figura 9.2 – Andamento delle tensioni di modo II lungo la bisettrice dell'intaglio nel caso di raggio di raccordo $\rho = 0$ (in blu) e raggio di raccordo $\rho \neq 0$ (in rosso).

La differenza dell'intensità dei campi di tensione è stata calcolata in modo analitico nel caso di un intaglio parabolico e i risultati ottenuti sono mostrati nel grafico seguente, fig 9.3.

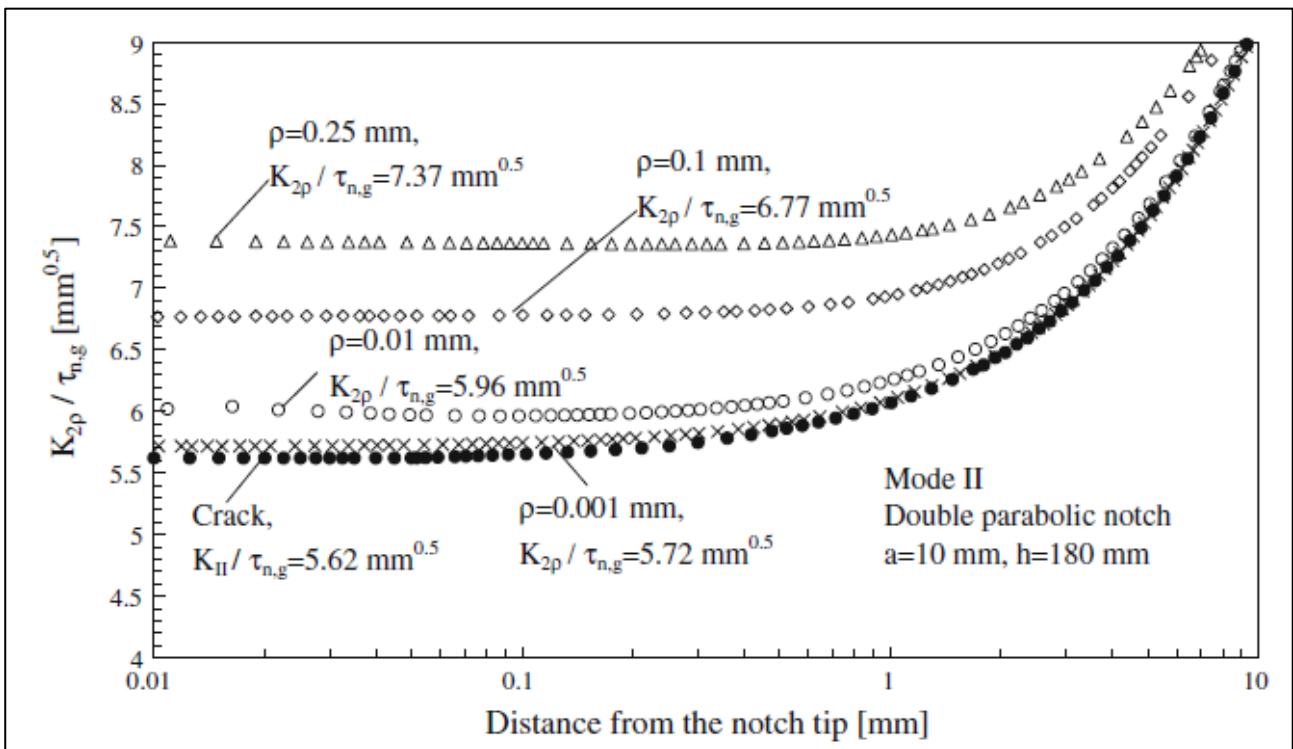


Figura 9.3 – Valori dei SIF, normalizzati secondo un carico che produce un’azione tagliante pari a 100 MPa, plottati rispetto la distanza dall’apice dell’intaglio e funzione del raggio di raccordo.

A fronte delle considerazioni matematiche fatte precedentemente e a fronte del grafico appena mostrato possiamo ben notare come anche valori molto piccoli del raggio di raccordo all’apice (per es. $\rho = 0,001$ mm) si possono notare differenze non trascurabili del valore del SIF.

Una modifica che può essere applicata per migliorare il criterio del SED nel caso di modo misto può essere quella di ricalcolare il valore del parametro “m” sostituendo il valore del K_2 (presente a numeratore) con il valore del $K_{2,p}$ ottenuto tramite modellazione del provino con raggio di raccordo adeguato.

Bibliografia

- [1] C. E. Inglis, "Proceedings", Institute of Naval Architects 55, 219 (1913).
- [2] Irwin G.R., "Fracture", Handbuch der Physik 6, Springer(1958) pag. 551-590.
- [3] Irwin G.R. "Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate", Journal of Applied Mechanics 24 (1957) pag. 361-364.
- [4] R. W. Hertzberg, "Deformation and fracture mechanics of engineering materials" third edition, (1937), pag. 271-291.
- [5] Dominique Leguillon, "Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch", European Journal of Mechanics A/Solids 21 (2002) pag. 61-72.
- [6] Dominique Leguillon and Zohar Yosibash, "Crack onset at a v-notch. Influence of the notch tip radius", International Journal of Fracture 122 (2003) pag. 1-21.
- [7] Paolo Lazzarin and Filippo Berto, "Some expressions for the strain energy in a finite volume surrounding the root of blunt V-notches", International Journal of Fracture 135 (2005) pag. 161-185.
- [8] Williams, M.L. "Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension", Journal of Applied Mechanics 19 (1952) pag. 526-528.
- [9] Gross R. and Mendelson A. "Plane Elastostatic Analysis of V-Notched Plates", International Journal of Fracture Mechanics 8 (1972) pag. 267-280.
- [10] Beltrami E. "Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici", Rendic. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere e Arti 18 (1885).
- [11] Yosibash Z., Bussiba A.R. and Gilad I. "Fracture criteria for brittle elastic materials", International Journal of Fracture 125 (2004) pag. 307-333.
- [12] F.J. Gómez, M. Elices, "Fracture of components with V-shaped notches", Engineering Fracture Mechanics 70 (2003) 1913-1927.
- [13] Carpinteri A., "Stress singularity and generalised fracture toughness at the vertex of re-entrant corners", Engineering Fracture Mechanics 26 (1987) pag. 143-155.
- [14] Seweryn A., "Brittle fracture criterion for structures with sharp notches", Engineering Fracture Mechanics 47 (1994) pag. 673-681.
- [15] Zohar Yosibash, Elad Priel and Dominique Leguillon, "A failure criterion for brittle elastic materials under mixed-mode loading", International Journal of Fracture 141 (2006) pag. 291-312.
- [16] Paolo Lazzarin and R. Zambardi, "A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches", International Journal of Fracture 112 (2001) pag. 275-298.

- [17] G.C. Sih, "Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems", *International Journal of Fracture* (1974) pag 305-321.
- [18] F. Erdogan and G.C. Sih, "On the crack extension in plates under loading and a transverse shear", *Journal of Basic Engineering* 85D (1963) pag. 519-527.
- [19] F. J. Gómez, M. Elices, Filippo Berto and Paolo Lazzarin, "Fracture of V-notched specimens under mixed mode (I+II) loading in brittle materials", *International Journal of Fracture* (2009).
- [20] M.R. Ayatollahi and A.R. Torabi, "Failure assessment of notched polycrystalline graphite under tensile-shear loading", *Materials Science and Engineering A* 528 (2011) pag. 5685-5695.
- [21] P. Lazzarin, M. Zappalorto and F. Berto, "Generalised stress intensity factors for rounded notches in plates under in-plane shear loading", *International Journal of Fracture* 170 (2011) pag. 123-144.