

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

**La dinamica caotica dello spin stellare  
in sistemi binari e la produzione di  
giganti gioviani disallineati**

**Relatore:**

PROF. FRANCESCO MARZARI

**Laureando:**

LORENZO DE BORTOLI

---

Anno Accademico 2014/2015



*a mia zia Anna,  
da cui tutto è cominciato.*

*ai miei genitori,  
che devo ringraziare per tutto.*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Il meccanismo di Kozai e la precessione dello spin stellare</b>	<b>5</b>
1.1 La funzione di disturbo e le equazioni di Lagrange . . . . .	5
1.2 Variazioni in eccentricità ed inclinazione . . . . .	7
1.3 Precessione del momento angolare . . . . .	9
1.4 Precessione dello spin . . . . .	10
<b>2 Regimi di evoluzione dello spin stellare</b>	<b>13</b>
2.1 Suddivisione teorica . . . . .	13
2.2 Analisi numerica . . . . .	15
<b>3 Interazione mareale e configurazione definitiva</b>	<b>19</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>21</b>



# Introduzione

Osservazioni astronomiche hanno rilevato che circa l'1% delle stelle di dimensione e massa simili a quelle del Sole ospitano pianeti giganti (di massa dell'ordine della massa di Giove) aventi un periodo di rivoluzione di  $\sim 3$  giorni e un'orbita ad eccentricità praticamente nulla. Questi *giganti gioviani* non possono essere sempre stati ad una distanza di  $\sim 0,05AU$ , dove li vediamo noi ora, perchè interazioni mareali e il campo di radiazione così in prossimità della stella ospite avrebbero certamente impedito la loro formazione. Un pianeta di quella massa e dimensione dovrebbe formarsi a  $\sim 5 - 10AU$  dalla stella ospite, dunque la prima ipotesi che si può fare è che essi siano migrati verso l'interno attraverso vari meccanismi, tra cui il più importante è l'interazione mareale tra il pianeta e il disco protoplanetario. Un processo di questo tipo, tuttavia, tende a mantenere allineati gli assi di spin della stella ospite e del momento angolare planetario che, al contrario, dalle osservazioni sembrano essere fortemente disallineati (sono osservati angoli anche di  $150^\circ$ ) [1]. E' quindi richiesta la presenza di altre ipotesi per poter spiegare una tale configurazione. Quella qui fatta è che il sistema sia affetto da perturbazioni secolari generate da una compagna binaria molto distante ( $\sim 200AU$ ).

Quello che verrà fatto è, dunque, di trattare il sistema come un *problema a tre corpi*. Considerando già avvenuta la migrazione planetaria, il pianeta gigante inizialmente orbita a una distanza di  $\sim 1AU$  dalla stella ospite e risente delle perturbazioni gravitazionali secolari generate dalla binaria. Verranno quindi ricavate le equazioni che regolano la variazione degli elementi orbitali del pianeta, per dimostrare *l'effetto Kozai* indotto dalla compagna: quando l'orbita del pianeta è sufficientemente inclinata rispetto al piano orbitale delle due stelle (sono sufficienti  $40 - 45^\circ$ , ma si considererà un'inclinazione iniziale di  $i_0 \sim 85 - 90^\circ$ ), l'eccentricità (sempre del pianeta) è sottoposta a variazioni periodiche da  $e = 0$  fino a un valore massimo (nel caso di  $i_0 \sim 90^\circ$ ,  $e_{max} \sim 1$ ) così come l'inclinazione (che arriva al valore minimo di  $40^\circ$ ).

In questo scenario si studieranno i moti di precessione che si generano tra gli assi di spin stellare, momento angolare planetario e momento angolare binario (quello proprio del sistema delle due stelle). I soli moti secolari, infatti, comportano una precessione del vettore  $\vec{L}$  (momento angolare orbitale planetario) attorno al vettore  $\vec{L}_b$  (momento angolare del sistema delle due stelle), mentre, analizzando gli effetti del quadrupolo stellare (indotto dalla rotazione), si dimostrerà la precessione di  $\vec{S}$  (vettore di momento angolare di spin della stella) attorno a  $\vec{L}$ . Ottenute le frequenze di precessione (rispettivamente  $\Omega_{pl}$ , per la prima precessione, e  $\Omega_{ps}$ , per la seconda) si arriverà a mostrare che ci sono molteplici comportamenti dinamici per l'evoluzione dello spin della stella durante i cicli di Kozai. In particolare si distingueranno tre diversi comportamenti dinamici che troveranno poi dimostrazione nelle simulazioni numeriche. Risultato importante è che, per opportune combinazioni di frequenza di rotazione della stella e massa del pianeta, il vettore  $\vec{S}$  pre-

sentia un'evoluzione completamente caotica.

Come si è già accennato, durante i cicli di Kozai, l'eccentricità arriva a raggiungere valori elevati e con  $e \sim 1$  la vicinanza al perielio tra stella e pianeta è critica, tale da generare, in molti casi, delle collisioni pianeta-stella. Nei casi in cui ciò non avviene, sono comunque presenti enormi dissipazioni mareali che portano ad una circolarizzazione dell'orbita e ad una diminuzione del semiasse. Mentre la marea dissipa, tuttavia, il sistema compie i cicli di Kozai, durante i quali il vettore di spin evolve caoticamente. Verrà mostrato, quindi, che, in presenza di queste dissipazioni mareali, il sistema preserva la memoria del comportamento caotico dello spin e mantiene, al termine di tutto, un angolo tra  $\vec{S}$  e  $\vec{L}$  diverso da zero, in accordo con le osservazioni.



# Capitolo 1

## Il meccanismo di Kozai e la precessione dello spin stellare

### 1.1 La funzione di disturbo e le equazioni di Lagrange

Si è di fronte a un problema a tre corpi. Un pianeta, di massa  $m_p$ , delle dimensioni di Giove, orbita attorno a una stella, di massa  $M_*$ , con  $M_* \sim 1M_\odot$ , dove  $M_\odot$  è la massa del Sole, e il tutto avviene in presenza di una stella compagna di massa  $M_b \sim M_*$ .

D'ora in avanti si indicheranno con il pedice \* le grandezze relative alla stella ospite, con  $b$  quelle relative alla compagna binaria e senza pedice tutte le grandezze relative al pianeta.

Consideriamo inoltre  $e_b = e_* = 0$ , ovvero che le stelle del sistema binario siano su orbite circolari. La configurazione è dunque quella rappresentata in figura.

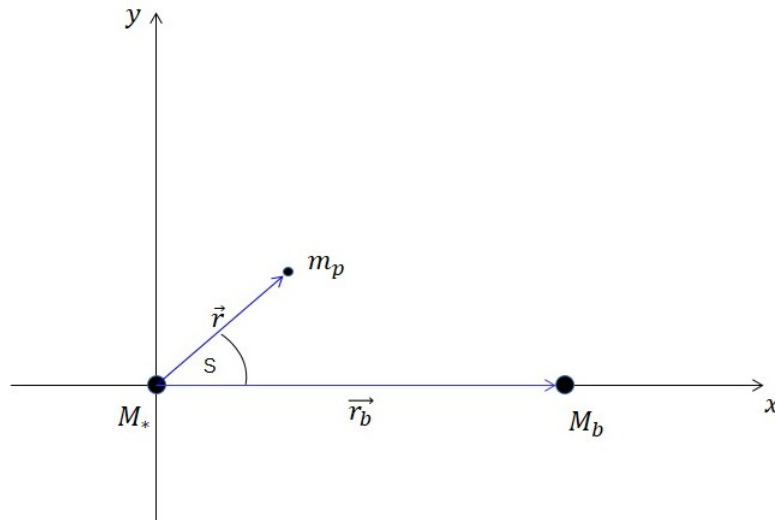


Figura 1.1: Configurazione del sistema

Assumendo che  $m_p \ll M_*$  possiamo scrivere l'hamiltoniana del sistema [3]:

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{M_b + M_*}{r} - M_b \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_b|} - \vec{r} \cdot \vec{r}_b \frac{1}{r_b^3} \right)$$

dove  $\vec{r}$  e  $\vec{r}_b$  sono i vettori posizione indicati in figura, di moduli  $r$  e  $r_b$  e  $p$  è il momento specifico del pianeta. Si assume da ora in poi che  $G = 1$ .

Se  $r \ll r_b$  possiamo espandere in serie di polinomi di Legendre l'hamiltoniana:

$$H = -\frac{M_* + M_b}{2a} - M_b \left[ \frac{1}{r_b} + \frac{r^2}{r_b^3} P_2(\cos S) \right] + \dots$$

dove  $P_i$  sono i polinomi di Legendre,  $S$  è l'angolo tra i vettori  $\vec{r}$  e  $\vec{r}_b$  e  $a$  il semiasse maggiore del pianeta. Da questa forma dell'hamiltoniana ricaviamo, in prima approssimazione, la *funzione di disturbo* del sistema:

$$R = M_b \frac{r^2}{r_b^3} P_2(\cos S)$$

che mediata sulle anomalie medie,  $\lambda$  e  $\lambda_b$ , risulta:

$$R = \frac{M_b a^2}{8b_b^3} [2 + 3e^2 - (3 + 12e^2 - 15e^2 \cos^2 \omega) \sin^2 i] \quad (1.1)$$

dove  $b_b$  è il semiasse minore dell'orbita della binaria, mentre  $e$ ,  $\omega$  e  $i$  sono rispettivamente eccentricità, argomento del perielio e inclinazione del pianeta (a scanso di equivoci si sottolinea che, in questa prima parte, per inclinazione si considera l'angolo compreso tra il piano di rivoluzione delle due stelle, il piano  $xz$ , e l'asse maggiore dell'orbita pianeta, nella configurazione di figura 1.2).

Si conoscono le *equazioni di Lagrange* per la variazione degli elementi orbitali [6, pp. 251-252]:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{\eta a} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \quad (1.2)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\eta a^2 e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{\eta a^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \quad (1.3)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\tan \frac{i}{2}}{\eta a^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) - \frac{1}{\eta a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad (1.4)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\eta a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (1.5)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\eta a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan \frac{i}{2}}{\eta a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (1.6)$$

dove  $\Omega$  è l'argomento del pericentro e  $\eta$  è il moto medio del pianeta. In particolare

$$\eta = \sqrt{\frac{M_*}{a^3}}$$

Sostituendo (1.1) nelle precedenti, otteniamo le *equazioni di Lagrange* per il sistema a tre corpi considerato [3],[4]:

$$\frac{de}{dt} = \frac{15}{8} \tau^{-1} e \sqrt{1-e^2} \sin 2\omega \sin^2 i \quad (1.7)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3}{4} \tau^{-1} \frac{\cos i}{\sqrt{1-e^2}} (5e^2 \cos^2 \omega - 4e^2 - 1) \quad (1.8)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{15}{16} \tau^{-1} \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} \sin 2\omega \sin 2i \quad (1.9)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} \tau^{-1} \frac{2(1-e^2) + 5 \sin^2 \omega (e^2 - \sin^2 i)}{\sqrt{1-e^2}} \quad (1.10)$$

con  $\tau$ , il *tempo caratteristico* di un ciclo di Kozai (vedi §1.2), che ha la forma:

$$\tau^{-1} = \frac{M_b}{\eta b_b^3} = \frac{M_b}{\sqrt{M_*}} \frac{a^{3/2}}{a_b^3} \frac{1}{(1-e_b^2)^{3/2}} = \eta \left( \frac{M_b}{M_*} \right) \left( \frac{a}{a_b} \right)^3 \quad (1.11)$$

dove nell'ultimo passaggio si è moltiplicato e diviso per  $\sqrt{M_*}$  e per  $a^{3/2}$ , tenendo conto che  $e_b = 0$ .

## 1.2 Variazioni in eccentricità ed inclinazione

Dalle equazioni (1.7)-(1.10) possiamo ricavare la dinamica del sistema.

Partendo dalla (1.7):

$$\frac{de}{dt} = \frac{15}{8} \tau^{-1} e \sqrt{1-e^2} \sin 2\omega \sin^2 i \implies \frac{de}{e\sqrt{1-e^2}} = \frac{15}{8} \tau^{-1} \sin 2\omega \sin^2 i \frac{dt}{di} di \quad (1.12)$$

dalla (1.9) ricaviamo la forma di  $\frac{dt}{di}$  che sostituita in (1.12) porta a:

$$\frac{de}{e\sqrt{1-e^2}} = -\frac{15}{8} \tau^{-1} \sin 2\omega \sin^2 i \tau \underbrace{\frac{16}{15} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^2 \sin 2i \sin 2\omega}}_{dt/di} di = -\frac{\sin i \sqrt{1-e^2}}{\cos i e^2} di \quad (1.13)$$

integrando entrambi i membri

$$\int_{e_0}^e \frac{e}{1-e^2} de = \int_{i_0}^i -\frac{\sin i}{\cos i} di \implies -\frac{1}{2} \ln(1-e^2) \Big|_{e_0}^e = \ln(\cos i) \Big|_{i_0}^i$$

otteniamo un integrale primo del moto:

$$\boxed{\sqrt{1-e^2} \cos i = \sqrt{1-e_0^2} \cos i_0 \implies \sqrt{1-e^2} \cos i = \text{cost}}$$

Dunque ad una variazione di eccentricità segue una variazione di inclinazione e viceversa.

Tenendo conto delle condizioni iniziali si può stimare come sarà la dinamica del sistema. Supponiamo che il pianeta abbia un'eccentricità iniziale  $e_0 \sim 0$  e un'inclinazione  $i_0 \sim 90^\circ$ , allora da (1.9) notiamo che (finchè  $e$  rimane piccola)  $\frac{di}{dt} \sim 0$ , ovvero l'inclinazione rimane

costante al valore iniziale  $i_0$ . Sapendo poi che  $\frac{d\omega}{dt} = 0$  [6, p. 316], e usando le condizioni precedenti, otteniamo da (1.10)

$$5 \sin^2 \omega \sin^2 i_0 = 2 \quad (1.14)$$

Riprendendo l'equazione (1.7) per  $e$  molto piccolo, cioè al primo ordine nell'eccentricità, e per  $i \rightarrow i_0$ :

$$\frac{de}{dt} = \frac{15}{4} \tau^{-1} e \sin \omega \cos \omega \sin^2 i_0 = \frac{15}{4} \tau^{-1} e \sin \omega \sqrt{1 - \sin^2 \omega} \sin^2 i_0$$

utilizzando la (1.14)

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{15}{4} \tau^{-1} e \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{\sin i_0} \sqrt{1 - \frac{2}{5} \frac{1}{\sin^2 i_0}} \sin^2 i_0 = \frac{15}{4} \tau^{-1} e \sqrt{\frac{2}{5} \left(1 - \frac{2}{5} \frac{1}{\sin^2 i_0}\right)} \sin i_0 \\ &= \frac{15}{4} \tau^{-1} e \sqrt{\frac{2}{5} \left(\sin^2 i_0 - \frac{2}{5}\right)}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Le condizioni di esistenza della radice impongono che

$$\boxed{\sin^2 i_0 \geq \frac{2}{5} \implies i \geq i_c = \arcsin \frac{2}{5} \sim 40^\circ}$$

e ciò porta ad avere come angolo minimo raggiungibile durante il ciclo di Kozai proprio  $i_c$ .

Partendo dall'integrale primo del moto, possiamo ottenere una forma per l'eccentricità in funzione dell'inclinazione :

$$\sqrt{1 - e^2} \cos i = \sqrt{1 - e_0^2} \cos i_0 \implies e(i) = \sqrt{\frac{\cos^2 i - (1 - e_0^2) \cos^2 i_0}{\cos^2 i}} \quad (1.16)$$

possiamo dunque trovare quanto vale l'eccentricità massima raggiunta:

$$\boxed{e_{max} = e(i_c) = \sqrt{1 - \frac{3}{5} \cos^2 i_0}}$$

Siamo, quindi, di fronte a dei clici, di durata  $\tau$ , in cui il pianeta varia la sua eccentricità e la sua inclinazione. Partendo da  $e_0 \sim 0$  e  $i_0 \sim 90^\circ$ , come si vede in figura 1.2, si arriva a raggiungere inclinazioni di circa  $40^\circ$  a cui corrispondono eccentricità elevatissime (infatti se  $i_0 = 85^\circ$  allora  $e_{max} = 0,9977$ ). In generale comunque, se il pianeta parte con un'eccentricità iniziale  $e_0$  e con un'inclinazione iniziale compresa tra  $40^\circ$  e  $140^\circ$  sarà soggetto a cicli di Kozai in cui  $i$  varierà con continuità tra questi valori ed  $e$  andrà da  $e_0$  fino ad  $e_{max}$  (raggiunta quando  $i = i_{min}$ ).

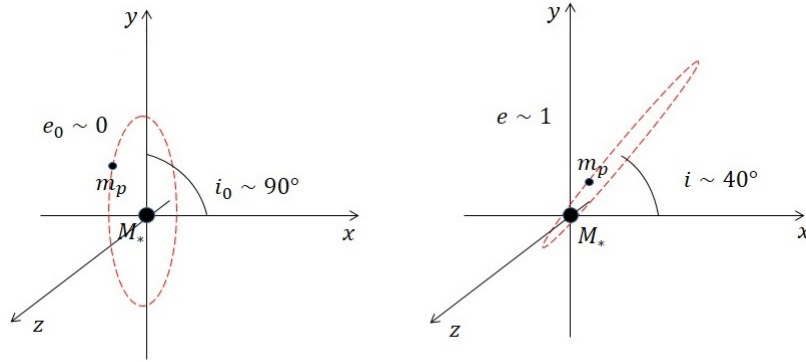


Figura 1.2: **Ciclo di Kozai con valori iniziali**  $e_0 \sim 0$  e  $i_0 \sim 90^\circ$ . Nell'immagine di sinistra si può vedere la configurazione iniziale del sistema, a destra invece quella finale, quando  $i = i_{min} \sim 40^\circ$  ed  $e = e_{max} \sim 1$ .

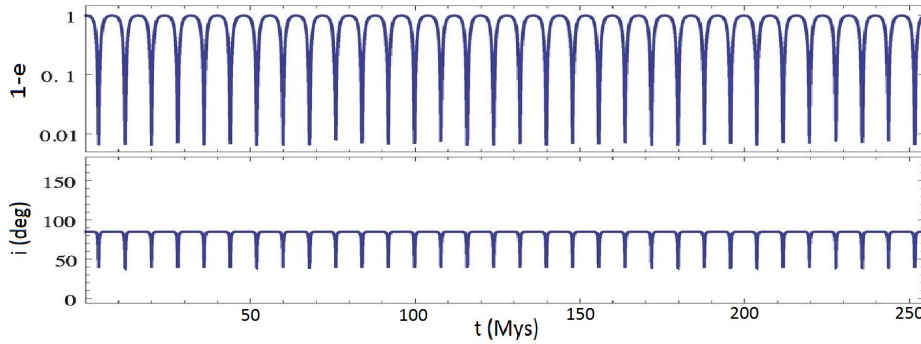


Figura 1.3: **Variazioni di eccentricità ed inclinazione durante i cicli di Kozai.** Questo andamento è stato ottenuto tramite una simulazione numerica [1] su un periodo di 250 milioni di anni, i quali parametri sono  $a = 1AU$ ,  $a_b = 200AU$ ,  $e_b = 0$ ,  $M_* = M_b = 1M_\odot$ ,  $m_p = 4,6M_J$  e come condizioni iniziali  $e_0 = 0,01$ ,  $i_0 = 85^\circ$ .

### 1.3 Precessione del momento angolare

Da questo momento in poi non si considererà più l'inclinazione  $i$ , ma l'angolo compreso tra il vettore  $\vec{L}$  e il vettore  $\vec{L}_b$ , denominato  $\theta_{lb}$ . Si ha, tuttavia, che  $\theta_{lb} = i$ .

Insieme alle variazioni tra eccentricità ed inclinazione, il vettore momento angolare orbitale del pianeta,  $\vec{L}$ , precece attorno all'asse binario,  $\vec{L}_b$  e, come si vede dalla figura, l'angolo che regola questa precessione è proprio  $\Omega$ , la cui variazione troviamo nell'equazione (1.8).

L'equazione che regola il moto di precessione è

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = \Omega_{pl} \hat{L}_b \times \hat{L} \quad (1.17)$$

dove  $\Omega_{pl} = \frac{d\Omega}{dt}$

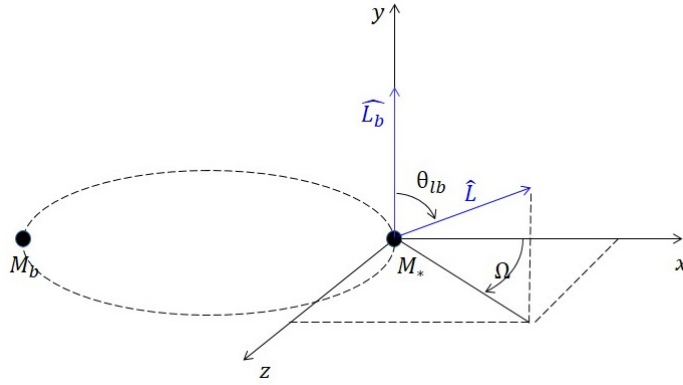


Figura 1.4: Precessione di  $\vec{L}$  intorno a  $\vec{L}_b$ .

Partendo dalla (1.8) e usando l'integrale primo del moto e l'equazione (1.14) otteniamo [1]

$$\Omega_{pl} = \frac{3}{4} \tau^{-1} \cos \theta_{lb}^0 \sqrt{1 - e_0^2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{1 - e_0^2}{1 - e^2} \right) \frac{\sin^2 \theta_{lb}^0}{\sin^2 \theta_{lb}} \right] \quad (1.18)$$

## 1.4 Precessione dello spin

A causa del quadrupolo stellare (indotto dalla rotazione) il pianeta induce una precessione dell'orientazione dello spin stellare attorno all'asse del momento angolare orbitale, secondo la formula

$$\frac{d\hat{S}}{dt} = \Omega_{ps} \hat{L} \times \hat{S} \quad (1.19)$$

Per ricavare il valore di  $\Omega_{ps}$  cominciamo considerando la stella un ellissoide con momenti principali di inerzia  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$ . Denominiamo poi G il punto corrispondente al centro di massa della stella, mentre P quello relativo al pianeta. Il momento torcente gravitazionale rispetto a G è [6, p. 198],[5]

$$\vec{M} = -\frac{3\mu}{r^3} [(I_z - I_y)(\hat{r} \cdot \hat{y})(\hat{r} \cdot \hat{z})\hat{x} + (I_x - I_z)(\hat{r} \cdot \hat{x})(\hat{r} \cdot \hat{z})\hat{y} + (I_y - I_x)(\hat{r} \cdot \hat{x})(\hat{r} \cdot \hat{y})\hat{z}]$$

dove  $\mu = Gm_p$ ,  $\hat{r}$  è il versore da G a P e  $r$  è la distanza tra G e P. ( $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  sono al solito i versori degli assi cartesiani scelti).

Supponiamo ora che la stella ruoti solo attorno all'asse z e che  $I_x = I_y$ . Il momento torcente si riduce a

$$\vec{M} = -\frac{3\mu}{r^3} (I_z - I_x)(\hat{r} \cdot \hat{z})(\hat{r} \times \hat{z})$$

Chiamando  $\vec{K}$  il vettore momento angolare della stella, possiamo scrivere l'equazione dinamica

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = -\frac{3\mu}{r^3} (I_z - I_x)(\hat{r} \cdot \hat{z})(\hat{r} \times \hat{z})$$

equivalente a [5]

$$\frac{\Delta \vec{K}}{T} = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{3\mu}{r^3} (I_z - I_x)(\hat{r} \cdot \hat{z})(\hat{r} \times \hat{z}) dt$$

dove  $T$  è il periodo orbitale di P attorno a G.

Si può anche scrivere:

$$\frac{\Delta \vec{K}}{T} = -\frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{3\mu}{r^3} (I_z - I_x) (\hat{r} \cdot \hat{z}) (\hat{r} \times \hat{z}) \frac{df}{\dot{f}} \quad (1.20)$$

Tenendo presente che  $h = r^2 \dot{f}$ , dove  $h$  è lo pseudomomento angolare, si ha che  $r^2 \dot{f} = h = \frac{2\pi}{T} a^2 (1 - e^2)^{1/2}$  e quindi la (1.20) prende la forma

$$\frac{\Delta \vec{K}}{T} = -\frac{1}{2\pi a^2 (1 - e^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \frac{3\mu}{r} (I_z - I_x) (\hat{r} \cdot \hat{z}) (\hat{r} \times \hat{z}) df \quad (1.21)$$

Facendo riferimento alla figura (1.5) definiamo  $\hat{n}$  il versore ortogonale all'orbita,  $\hat{a}$  il vettore unitario che da G porta al perielio dell'orbita, e di conseguenza  $\hat{b} = \hat{n} \times \hat{a}$  a completare la terna ortonormale. In questa base possiamo scrivere

$$\hat{r} = \hat{a} \cos f + \hat{b} \sin f$$

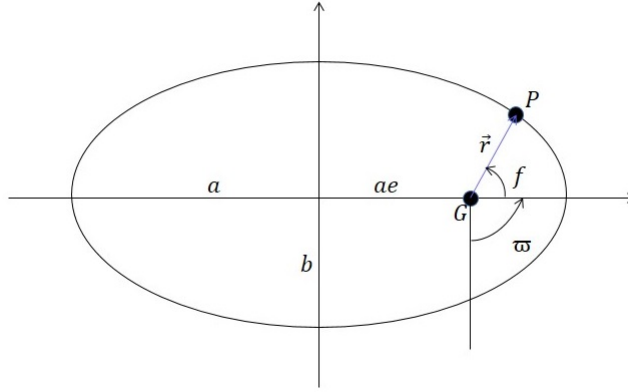


Figura 1.5: Traiettoria del pianeta attorno alla stella

Inoltre si ha che

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (1.22)$$

e quindi risulta, sostituendo (1.22) in (1.21), che

$$\frac{\Delta \vec{K}}{T} = -\frac{3\mu(I_z - I_x)}{2\pi a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos f) (\hat{r} \cdot \hat{z}) (\hat{r} \times \hat{z}) df \quad (1.23)$$

Calcolando i prodotti scalare e vettoriale si ottiene ( $z_a$ ,  $z_b$  e  $z_n$  sono le componenti del versore  $\hat{z}$  nella base composta dai versori  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{n}$ )

$$\hat{r} \cdot \hat{z} = \begin{pmatrix} \cos f \\ \sin f \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_a \\ z_b \\ z_n \end{pmatrix} = z_a \cos f + z_b \sin f$$

e

$$\hat{r} \times \hat{z} = \begin{pmatrix} \cos f \\ \sin f \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_a \\ z_b \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{a} & \hat{b} & \hat{n} \\ \cos f & \sin f & 0 \\ z_a & z_b & z_n \end{vmatrix} = z_n \sin f \hat{a} - z_n \cos f \hat{b} + (z_b \cos f - z_a \sin f) \hat{n}$$

che sostituite in (1.23) portano all'integrale

$$\frac{\Delta \vec{K}}{T} = -\frac{3\mu(I_z - I_x)}{2\pi a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos f) (z_a \cos f + z_b \sin f) \times [z_n \sin f \hat{a} - z_n \cos f \hat{b} + (z_b \cos f - z_a \sin f) \hat{n}] df \quad (1.24)$$

Tale integrale è risolvibile e da come risultato [5]

$$\frac{\Delta \vec{K}}{T} = -\frac{3\mu(I_z - I_x)}{2\pi a^3 (1 - e^2)^{3/2}} 2\pi \frac{z_n}{2} (z_b \hat{a} - z_a \hat{b}) = -\frac{3}{2} \frac{\mu(I_z - I_x)}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}} (\hat{z} \cdot \hat{n}) (\hat{z} \times \hat{n}) \quad (1.25)$$

Il momento angolare  $\vec{K}$  altro non è che il momento di spin della stella

$$\vec{K} = \vec{S} = S \hat{S}$$

dove  $S$  è il modulo del momento angolare di spin. Inoltre si è già detto che la stella ruota solo attorno all'asse  $z$  e di conseguenza

$$\hat{z} \equiv \hat{S}$$

Analogamente il versore  $\hat{n}$  altro non è che il versore  $\hat{L}$ , dunque

$$\hat{n} \equiv \hat{L}$$

Mettendo tutto insieme nella (1.25), otteniamo [5]

$$S \frac{d\hat{S}}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{Gm_p(I_z - I_x)}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}} (\hat{S} \cdot \hat{L}) (\hat{S} \times \hat{L}) \quad (1.26)$$

e dunque

$$\Omega_{ps} = -\frac{3}{2} \frac{Gm_p(I_z - I_x) \cos \theta_{sl}}{a^3 (1 - e^2)^{3/2} S} \quad (1.27)$$

dove  $\theta_{sl}$  è l'angolo tra il vettore di spin della stella e il vettore momento angolare planetario.



## Capitolo 2

# Regimi di evoluzione dello spin stellare

In tutta l'analisi che segue nel capitolo sono di fondamentale importanza tre angoli: quello tra il vettore di spin stellare della stella ospite e il vettore momento angolare orbitale del pianeta,  $\theta_{sl}$ ; l'angolo tra il vettore momento angolare orbitale planetario e quello binario,  $\theta_{lb}$ ; e ultimo,  $\theta_{sb}$ , tra il vettore di spin stellare e il vettore momento angolare orbitale binario.

### 2.1 Suddivisione teorica

In questa configurazione si sono viste e analizzate due precessioni: quella di  $\vec{L}$  attorno a  $\vec{L}_b$  con frequenza di precessione  $\Omega_{pl}$ ; e quella di  $\vec{S}$  attorno a  $\vec{L}$  con frequenza di precessione  $\Omega_{ps}$ . Le due frequenze sono date dalle formule:

$$\Omega_{pl} = \frac{3}{4} \tau^{-1} \cos \theta_{lb}^0 \sqrt{1 - e_0^2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{1 - e_0^2}{1 - e^2} \right) \frac{\sin^2 \theta_{lb}^0}{\sin^2 \theta_{lb}} \right]$$

$$\Omega_{ps} = - \frac{3 G m_p (I_z - I_x) \cos \theta_{sl}}{2 a^3 (1 - e^2)^{3/2} S}$$

Durante un ciclo di Kozai, l'eccentricità dell'orbita varia con continuità tra 0 e  $e_{max}$  e sia  $\Omega_{ps}$  che  $\Omega_{pl}$  variano da  $\Omega_{ps,0}$  e  $\Omega_{pl,0}$  fino a  $\Omega_{ps,max}$  e  $\Omega_{pl,max}$  rispettivamente. Notiamo, poi, che  $\Omega_{ps}$  è più sensibile di  $\Omega_{pl}$  a variazioni di eccentricità e questo porta a poter, almeno in linea teorica, distinguere tre differenti *regimi di evoluzione* per lo spin stellare [1].

- REGIME I,  $|\Omega_{ps,max}| \lesssim |\Omega_{pl,max}|$  ("non adiabatico"): Per quanto detto prima  $|\Omega_{ps}|$  rimane sempre più piccolo di  $|\Omega_{pl}|$ . Ci si aspetta che  $\vec{S}$  preceda attorno a  $\vec{L}_b$  (attorno al quale sta precedendo  $\vec{L}$ ), mantenendo un angolo  $\theta_{sb}$  approssimativamente costante. Ci aspettiamo, dunque, una qualche periodicità nell'evoluzione dello spin.
- REGIME II,  $|\Omega_{ps,max}| \gtrsim |\Omega_{pl,max}|$  e  $|\Omega_{ps,0}| \lesssim |\Omega_{pl,0}|$  ("transadiabatico"): Ci si aspetta che avvenga una risonanza secolare quando  $|\Omega_{ps}| \approx |\Omega_{pl}|$ . Nel variare da 0 a  $e_{max}$  dell'eccentricità durante il ciclo di Kozai, il sistema transisce da

”non adiabatico” ad ”adiabatico”. Ci aspettiamo che questo passaggio porti ad una evoluzione complessa e completamente caotica dello spin stellare.

- REGIME III,  $|\Omega_{ps,0}| \gtrsim |\Omega_{pl,0}|$  (”adiabatico”):  
 $|\Omega_{ps}|$  è sempre maggiore di  $|\Omega_{pl}|$ . Ci aspettiamo che  $\vec{S}$  segua ”adiabaticamente”  $\vec{L}$ , mantenendo un angolo  $\theta_{sl}$  di disallineamento tra i due approssimativamente costante.

Possiamo, ora, riscrivere la formula di  $\Omega_{ps}$  nel seguente modo [1]:

$$\Omega_{ps} = -2,38 \times 10^{-8} \left( \frac{2\pi}{\text{years}} \right) \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \left( \frac{2k_q}{K_*} \right) \left( \frac{10^3 m_p}{M_*} \right) \left( \frac{M_*}{M_\odot} \right)^{1/2} \left( \frac{\hat{\Omega}_*}{0,1} \right) \times \left( \frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-3} \left( \frac{R_*}{R_\odot} \right)^{3/2} \cos \theta_{sl} \quad (2.1)$$

definendo  $(I_z - I_x) \equiv k_q M_* R_*^3 \hat{\Omega}_*^2$  e  $S \equiv k_* M_* R_*^2 \Omega_*$ , dove  $\hat{\Omega}_* \equiv \Omega_* / \sqrt{\frac{GM_*}{R_*^3}}$  è la frequenza di spin della stella ( $\Omega_*$ ) in unità di frequenza di breakup,  $R_*$  è il raggio della stella e  $R_\odot$  è il raggio del Sole, mentre  $k_q \approx 0,05$  e  $k_* \approx 0,1$  per il Sole.

Fissati i semiassi maggiori  $a$  e  $a_b$ , la divisione in differenti regimi dipende dal prodotto di  $m_p$  e  $\Omega_*$ . In particolare, come si vede dalla figura (2.1), sistemi con piccoli  $m_p$  e  $\Omega_*$  cadono nel regime I, mentre quelli con grandi  $m_p$  e  $\Omega_*$  cadono o nel II o nel III.

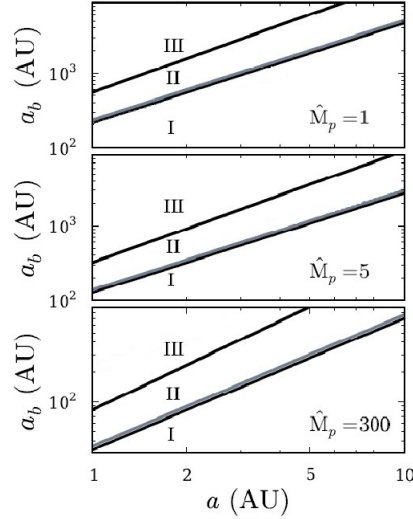


Figura 2.1: **Divisione tra i regimi di evoluzione dello spin.** [1] Nera: per una distanza al periastro di  $r_p = a(1 - e_{max}) = 0,03\text{AU}$ ; grigia: per  $r_p = 0,05\text{AU}$ .  $\hat{M}_p = (\hat{\Omega}_*/0,05)(m_p/M_J)$ , con  $M_J$  la massa di Giove. I regimi sono determinati dai relativi valori della frequenza di precessione dello spin ( $\Omega_{ps}$ ) e di quella di precessione nodale dell’orbita del pianeta ( $\Omega_{pl}$ ). Da notare che  $\Omega_{ps}$  dipende dal  $\cos \theta_{sl}$  che ragionevolmente è stato fissato a 1.  $\Omega_{pl}$  poi è una funzione piuttosto complicata dell’eccentricità e di  $\theta_{lb}$  ed è stata, nel fare tale grafico, approssimata a  $\Omega_{pl} \approx -\tau^{-1}/(1 - e^2)$ . Le linee che separano i regimi I e II sono date da  $|\Omega_{ps,max}| \approx 0,5|\Omega_{pl,max}|$ , dove  $\Omega_{ps,max}$  e  $\Omega_{pl,max}$  sono equivalenti a  $\Omega_{ps}$  e  $\Omega_{pl}$  valutati per  $(1 - e_{max}) = r_p/a$ . Le linee che separano i regimi II e III sono date da  $|\Omega_{ps,0}| \approx 2|\Omega_{pl,0}|$ , dove  $\Omega_{ps,0}$  e  $\Omega_{pl,0}$  sono equivalenti a  $\Omega_{ps}$  e  $\Omega_{pl}$  valutati per  $e = 0$ .

## 2.2 Analisi numerica

Per un'analisi molto dettagliata bisognerebbe tenere conto anche della precessione di  $\vec{L}$  attorno a  $\vec{S}$  e di tutte le eventuali forze a corto raggio (quali la precessione del perielio dovuta alla Relatività Generale, il rigonfiamento rotazionale del pianeta e la distorsione mareale). Includendole nei calcoli si trova che le conclusioni generali, cioè che l'evoluzione dello spin stellare ha comportamento caotico nel regime transadiabatico, non variano [1].

Andiamo, quindi, a guardare l'evoluzione dello spin stellare nel problema di Kozai "puro", integrando l'equazione (1.19) insieme con le equazioni di evoluzione degli elementi orbitali del pianeta. Si sono considerati differenti combinazioni di massa del pianeta e frequenza di rotazione stellare per illustrare i differenti regimi descritti e si sono presentati quattro casi "canonici" che riassumono, in figura (2.2), le possibili dinamiche dello spin [1].

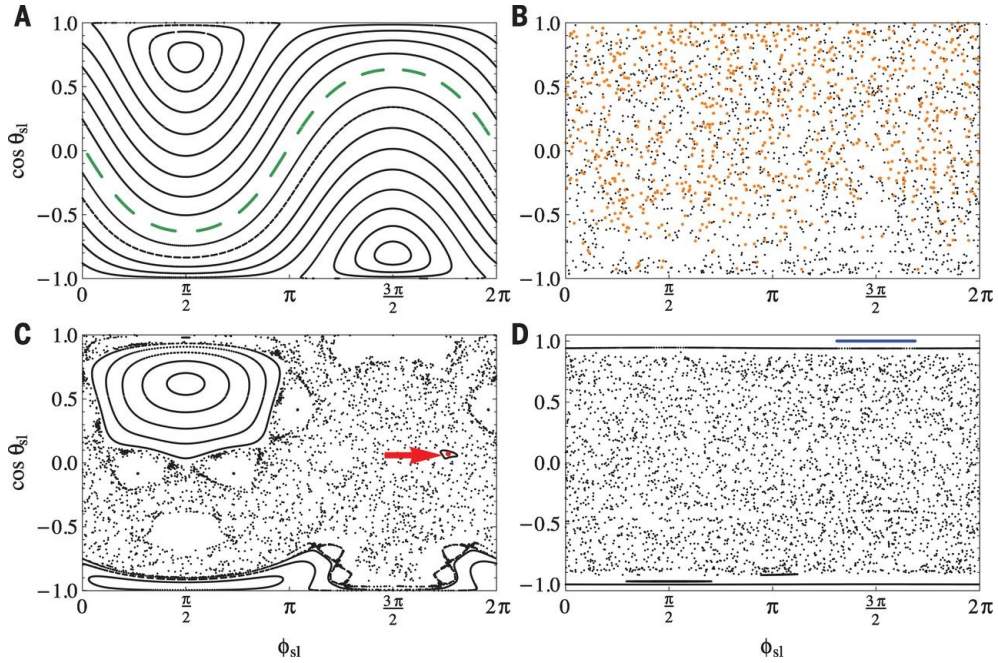


Figura 2.2: **Grafici del  $\cos \theta_{sl}$  verso la fase di precessione ( $\phi_{sl}$ ) di  $\hat{S}$  attorno a  $\hat{L}$  per il sistema di Kozai "puro".** In tutti i casi presentati si è posto  $a = 1AU$ ,  $a_b = 200AU$ ,  $e_b = 0$ ,  $M_* = M_b = 1M_\odot$ ,  $e_0 = 0,01$ ,  $\theta_{lb}^0 = 85^\circ$ . Ogni pannello è composto da molte curve di evoluzione corrispondenti a diversi valori di  $\theta_{sl}^0$  (con  $\theta_{sb}^0$  che varia tra  $0^\circ$  e  $180^\circ$  e assumendo che inizialmente  $\hat{S}$  sia sullo stesso piano di  $\hat{L}$  e  $\hat{L}_b$ ). Ogni caso è stato evoluto per un tempo totale equivalente a  $\sim 1500$  cicli di Kozai (12,7 miliardi di anni). Ogni punto delle curve è stato acquisito mantenendo  $\omega = 90^\circ$ . **(A)** Regime I (non adiabatico);  $\hat{\Omega}_* = 0,003$ ,  $m_p = 1M_J$ . Sono mostrate 18 curve, con  $\theta_{sb}^0$  che varia tra  $5^\circ$  e  $175^\circ$ ; la linea verde corrisponde a  $\theta_{sl}^0 = 0^\circ$ . **(B)** Regime II (transadiabatico);  $\hat{\Omega}_* = 0,05$ ,  $m_p = 4,6M_J$ . I punti in arancione mostrano  $\theta_{sl}^0 = 0^\circ$ ; i punti neri sono un insieme di diversi valori di  $\theta_{sl}^0$ . **(C)** Regime II (transadiabatico);  $\hat{\Omega}_* = 0,05$ ,  $m_p = 1,025M_J$ . Sono mostrate 11 orbite periodiche (o quasi-periodiche) e una regione completamente caotica. Il punto rosso indicato dalla freccia corrisponde all'isola periodica con  $\theta_{sl}^0 = 0^\circ$ , situata in  $(\cos \theta_{sl}, \phi_{sl}) = (0,06, 1,8\pi)$ . **(D)** Regime III (adiabatico);  $\hat{\Omega}_* = 0,05$ ,  $m_p = 20M_J$ . Sono mostrate 5 orbite quasi-periodiche e tutta la regione di caos. La linea blu corrisponde a  $\theta_{sl}^0 = 0^\circ$ .

- In figura (2.2)A è rappresentato il caso del regime non adiabatico (regime I), in cui l'evoluzione dello spin è regolare e periodica.
- In figura (2.2)D è invece rappresentato il caso del regime adiabatico (regime III). Per traiettorie che partono con un alto disallineamento di  $\hat{S}$  e  $\hat{L}$  il regime è di difficile lettura a causa del fattore  $\cos \theta_{sl}$  nella frequenza di evoluzione dello spin. Le traiettorie che, invece, partono con  $\theta_{sl}^0 \sim 0^\circ$  (oppure  $\theta_{sl}^0 \sim 180^\circ$ ), rimangono con quell'angolo, come ci si aspettava.
- In figura (2.2)B e C è invece rappresentato il regime II, quello transadiabatico. Si osservano subito due diversi comportamenti. Per molte combinazioni di  $m_p$  e  $\Omega_*$  che cadono in questo regime l'evoluzione dello spin è fortemente caotica. Esistono, tuttavia, nel mezzo del caos, isole periodiche in cui l'evoluzione dello spin è regolare (figura (2.2)C). In figura (2.4) è presentato un esempio di questi regimi periodici.

Poichè nei sistemi fisici reali, tipicamente, lo spin della stella e il momento angolare planetario partono allineati [1], ci si è concentrati sul caso in cui  $\theta_{sl}^0 = 0^\circ$  e si è osservata l'evoluzione del sistema durante diversi cicli di Kozai (figura 2.3) nel regime II, corrispondente alla figura (2.2)B. Per rendersi conto dell'evoluzione caotica si è generata una curva "clone", che presenta condizioni iniziali poco differenti da quella originale.

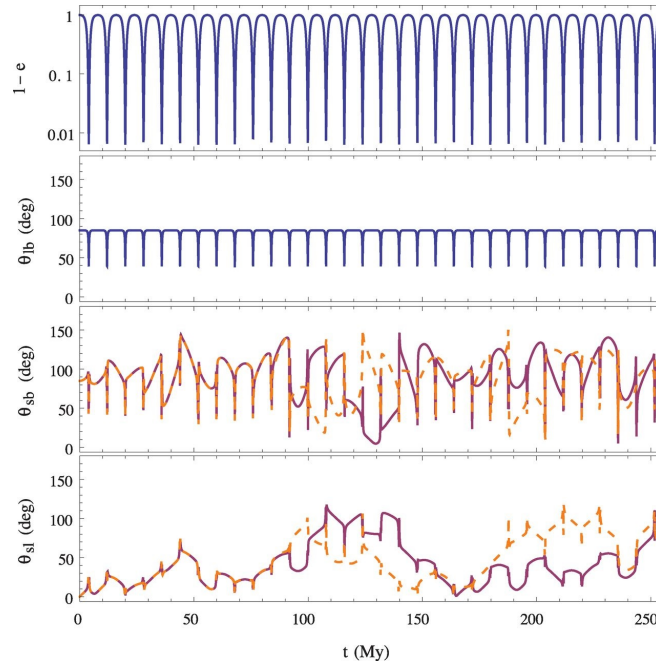


Figura 2.3: **Curve di evoluzione del sistema di Kozai "puro", dimostranti l'evoluzione dello spin durante i cicli nel regime "transadiabatico".** I parametri della simulazione sono  $m_p = 4,6M_J$  e  $\hat{\Omega}_* = 0,05$  per rientrare nel regime II;  $a = 1AU$ ,  $a_b = 200AU$ ,  $e_b = 0$ ,  $M_* = M_b = 1M_\odot$ , e come condizioni iniziali  $e_0 = 0,01$ ,  $\theta_{lb}^0 = 85^\circ$ . Si sono graficate una curva di evoluzione "reale" (linea viola continua) e una "clone" (linea arancione tratteggiata), usata per valutare il grado di caoticità nell'evoluzione. Le traiettoria "reale" è tale per cui  $\theta_{sl}^0 = 0^\circ$ , mentre in quella fantasma  $\theta_{sl}^0 = 0,000001^\circ$ .

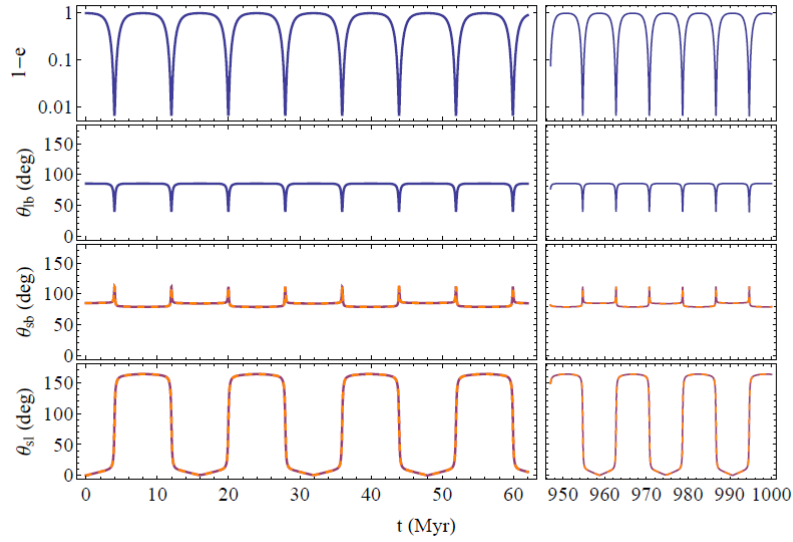


Figura 2.4: **Curve di evoluzione per una delle "isole di periodicit " all'interno della regione II.** Anche qui   stata graficata una curva reale (viola continua) e una clone (arancione tratteggiata) per verificare un eventuale andamento caotico nell'evoluzione del sistema. La reale   inizializzata in modo tale che  $\hat{S}$  parta allineato con  $\hat{L}$ , mentre per la fantasma il disallineamento iniziale   di  $10^{-6}^\circ$ . I parametri della simulazione sono:  $m_p = 1,025M_J$  e  $\hat{\Omega}_* = 0,03$  per rientrare nel regime II, poi  $a = 1AU$ ,  $a_b = 200AU$ ,  $e_b = 0$ ,  $M_* = M_b = 1M_\odot$ ,  $\theta_{lb}^0 = 85^\circ$ . Questa figura   l'andamento corrispondente al punto rosso di figura (2.2)C.

Come si pu  notare l'andamento   perfettamente periodico in quanto la curva reale e quella clone si sovrappongono perfettamente per tutti i tempi, anche dopo diversi cicli di Kozai.



## Capitolo 3

# Interazione mareale e configurazione definitiva

Nel capitolo precedente si è visto che, durante i cicli di Kozai, lo spin della stella presenta una larga varietà di comportamenti. Se al sistema aggiungiamo ora la dissipazione mareale è logico pensare che una volta circularizzata l'orbita il sistema mantenga memoria del comportamento caotico dello spin e dunque si presenti, nella configurazione finale, un pianeta con un semiasse maggiore molto piccolo (poi si quantificherà quanto), un'eccentricità praticamente nulla e un'orbita con momento angolare disallineato rispetto allo spin della stella ospite.

Si va, quindi, ad aggiungere la componente di dissipazione mareale alle equazioni del sistema (si è usato il modello standard di *frizione mareale debole* [7],[8]):

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{1}{t_a} \frac{1}{(1-e^2)^{15/2}} \left[ (1-e^2)^{3/2} f_2(e) \frac{\Omega_p}{\eta} - f_1(e) \right] \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dt} = \frac{11}{4} \frac{1}{t_a} \frac{1}{(1-e^2)^{13/2}} \left[ (1-e^2)^{3/2} f_4(e) \frac{\Omega_p}{\eta} - \frac{18}{11} f_3(e) \right] \quad (3.2)$$

dove  $a$  è il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta,  $\Omega_p$  e  $\eta$  sono rispettivamente la frequenza di rotazione e il moto medio del pianeta, mentre le  $f_1$ - $f_4$  sono date da:

$$f_1(e) = 1 + \frac{31}{2}e^2 + \frac{255}{8}e^4 + \frac{185}{16}e^6 + \frac{25}{64}e^8$$

$$f_2(e) = 1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6$$

$$f_3(e) = 1 + \frac{15}{4}e^2 + \frac{15}{8}e^4 + \frac{5}{64}e^6$$

$$f_4(e) = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4$$

Per quanto riguarda  $t_a$ , il *tempo-scala caratteristico*, esso è dato da:

$$\frac{1}{t_a} = 6k_2 \Delta t_L \left( \frac{M_*}{m_p} \right) \left( \frac{R_p}{a} \right)^5 \eta^2 \quad (3.3)$$

dove  $R_p$  è il raggio del pianeta,  $k_2$  è il *numero di Love mareale* e  $\Delta t_L$  è il *tempo di ritardo mareale*. Per Giove,  $k_2 = 0,37$  e consideriamo  $\Delta t_L = 0,1s$ . Per garantire che il pianeta

circularizzati l'orbita entro un tempo di  $10^{10}$  anni si prende  $\Delta t_L = 0,1 \chi s$ , dove  $\chi$  è il *fattore di aumento mareale*.

Con la simulazione numerica di figura (3.1) [1], si trova che la dissipazione mareale porta a un graduale decremento del semiasse maggiore del pianeta e alla circularizzazione dell'orbita; inoltre si nota come  $\theta_{sl}$  tenda a stabilizzarsi al valore finale. Dopo  $10^4$  anni siamo dunque di fronte alla situazione che ci si prefiggeva di trovare: un pianeta molto vicino alla stella ospite ( $0,05AU$ ), in un'orbita quasi circolare ( $e \sim 0$ ) e con un forte disallineamento tra momento di spin della stella e momento angolare orbitale del pianeta.

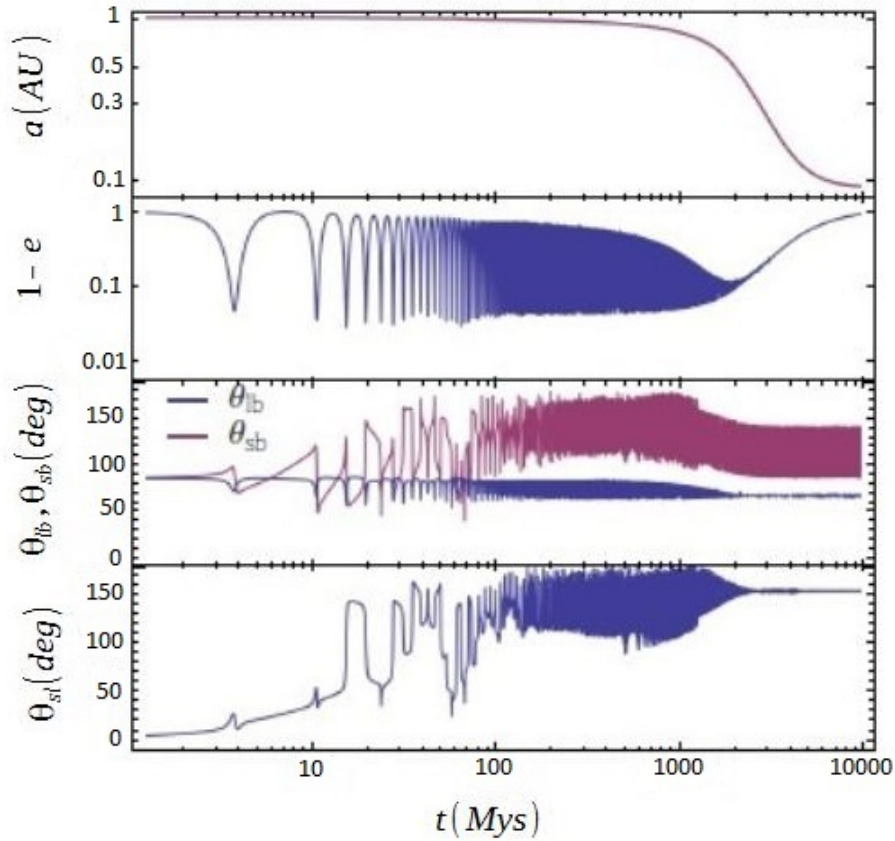


Figura 3.1: **Evoluzione del sistema includendo le dissipazioni mareali.** I parametri della simulazione sono  $a_0 = 1AU$ ,  $a_b = 200AU$ ,  $e_0 = 0,01$ ,  $\theta_{lb}^0 = 85^\circ$ ,  $\hat{\Omega}_{*,0} = 0,05$ ,  $m_p = 5M_J$ ,  $\chi = 700$ .



# Bibliografia

- [1] N. I. Storch, K. R. Anderson, D. Lai, *Chaotic dynamics of stellar spin in binaries and the production of misaligned hot Jupiters*, *Science* 345, 1317-1321 (2014).
- [2] Y. Kozai, *Secular Perturbation of Asteroids with High Inclination and Eccentricity*, *The Astronomical Journal* 67 (9), 591-598 (1962).
- [3] K. A. Innanen, J. Q. Zheng, S. Mikkola, M. J. Valtonen, *The Kozai mechanism and the stability of planetary orbits in binary star systems*, *The Astronomical Journal* 113 (5), 1915-1919 (1997).
- [4] L. G. Kiseleva, P. P. Eggleton, S. Mikkola, *Tidal friction in triple stars*, *MNRAS* 300, 292-302 (1998).
- [5] G. Colombo, *Cassini's Second and Third Laws*, *The Astronomical Journal* 71 (9), 891-896 (1966).
- [6] C. D. Murray, S. F. Dermott, *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, (1999).
- [7] M. E. Alexander, *The weak friction approximation and tidal evolution in close binary systems*, *Astrophysics and Space Science* 23, 459-510 (1973).
- [8] P. Hut, *Tidal Evolution in Close Binary Systems*, *Astronomy and Astrophysics* 99, 126-140 (1981).