



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA**

**FACOLTA' DI SCIENZE STATISTICHE**

**CORSO DI LAUREA IN STATISTICA,  
ECONOMIA E FINANZA**

RELAZIONE FINALE:

**CALCOLO DELLA FRONTIERA  
EFFICIENTE: UNA STIMA  
ALTERNATIVA DELLA MATRICE DI  
VARIANZE E COVARIANZE**

RELATORE: Prof. NUNZIO CAPPuccio

LAUREANDO: MAURO BOSCOLO

Matricola n° 498868-SEF

ANNO ACCADEMICO 2006-07



# Indice

## Capitolo 1: Introduzione

1.1	Introduzione	5
-----	--------------	---

## Capitolo 2: I Dati

2.1	I Rendimenti	6
-----	--------------	---

2.2	Il titolo non rischioso	7
-----	-------------------------	---

## Capitolo 3: i Stime e Risultati

3.1	Andamento degli indici	8
-----	------------------------	---

3.2	Statistiche descrittive	10
-----	-------------------------	----

3.3	Analisi della volatilità	12
-----	--------------------------	----

3.4	Correlazione e diversificazione	13
-----	---------------------------------	----

3.5	Il criterio media - varianza	14
-----	------------------------------	----

3.5.1	Formalizzazione del problema	15
-------	------------------------------	----

3.6	La frontiera efficiente senza titolo non rischioso	17
-----	--	----

3.7	La frontiera efficiente con titolo non rischioso	19
-----	--	----

3.8	Inferenza sulla frontiera efficiente	22
-----	--------------------------------------	----

3.8.1	Test di confronto delle performance di Sharpe	22
-------	---	----

3.8.2	Test di esclusione di titoli dai portafogli efficienti	23
-------	--	----

## Capitolo 4: Matrice di varianze e covarianze ponderata

4.1	Il tasso di decadimento	25
-----	-------------------------	----

4.2	Nuove stime e risultati	28
-----	-------------------------	----

4.2.1	Nuove frontiere efficienti	28
-------	----------------------------	----

4.2.2	Test di confronto delle performance di Sharpe	33
-------	---	----

4.2.3	Test di confronto delle performance di Sharpe	34
-------	---	----

**Capitolo 5: Accontentarsi di  $d^*$  ? No, grazie.**

5.1 *Ricerca sulle quote nel portafoglio  $M$*  \_\_\_\_\_ 36

5.2 *Conclusioni* \_\_\_\_\_ 40

**Riferimenti bibliografici** \_\_\_\_\_ 41

**Ringraziamenti** \_\_\_\_\_ 43



# Capitolo 1: Introduzione

## 1.1 Introduzione

In questa relazione ci occuperemo dell'allocazione ottimale di un portafoglio di indici, cioè di un insieme di attività finanziarie in cui gli agenti economici investono la propria ricchezza, cercando di ricavarne il massimo rendimento.

In finanza un indice rappresenta il prezzo di un portafoglio di titoli, ed è un indicatore importante perché riassume in un unico valore l'evoluzione di tutto il mercato. Nel nostro caso, i portafogli di mercato considerati sono:

1. AEX – Amsterdam (NED)
2. BEL 20 – Bruxelles (BEL)
3. Dax 30 – Francoforte (GER)
4. FTSE100 – Londra (U.K.)
5. IBEX 35 – Madrid (ESP)
6. CAC 40 – Parigi (FRA)
7. ATX - Vienna (AUT)
8. SMI - Zurigo (SWI)

Tali indici, composti dai titoli più rappresentativi dei vari mercati nazionali, sono tutti di tipo *value weighted*, ovvero calcolati in modo tale che il peso di ciascun titolo risulti proporzionale alla sua capitalizzazione; esistono anche indici con fattore di ponderazione costante (e.g. il Dow Jones della Borsa di New York), o basato sul prezzo di ogni titolo. Inoltre, il valore dell'indice è fissato ad una certa data di riferimento, che varia di indice in indice.

# Capitolo 2: i Dati

## 2.1 I Rendimenti

I dati presenti in questa relazione provengono dal sito [finance.yahoo.com](http://finance.yahoo.com).

La rilevazione dei dati riguarda le quotazioni in Euro delle chiusure mensili degli otto mercati azionari europei sopra elencati, per il periodo campionario gennaio 1996 – settembre 2006. Di queste 128 quotazioni si sono calcolati i **rendimenti**, che rappresentano quanto rende un titolo acquistato al mese  $t$  e rivenduto al mese  $t+1$ . Dato  $P_{it}$  il valore dell'indice  $i$  al mese  $t$ , il rendimento  $R_{it}$  si calcola come:

$$R_{it} = \frac{P_{it} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}}.$$

Si ipotizza che la distribuzione congiunta del vettore aleatorio dei rendimenti,  $\underline{R} = [R_1, R_2, \dots, R_8]'$ , sia caratterizzata solo dai primi due momenti, ossia:

$\underline{R} \sim ID(\underline{\mu}; \Sigma)$ , con  $\underline{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_8]'$  vettore dei rendimenti attesi degli indici e  $\Sigma$  matrice di varianze e covarianze degli indici.

Si noti che nell'operazione di differenziazione delle serie dei prezzi si perde l'ultimo valore in ordine di tempo, per cui nelle analisi seguenti il periodo campionario di interesse parte dalla quotazione di febbraio 1996 per ogni indice.

Ogni attività finanziaria ha una propria quota all'interno del portafoglio, che va a formare il vettore:

$\underline{w} = [w_1, w_2, \dots, w_8]'$ ; per cui il rendimento totale del portafoglio sarà dato dalla somma ponderata dei rendimenti dei singoli indici:

$$R_p = \sum_{i=1}^8 w_i R_i.$$

## 2.2 Il titolo non rischioso

Nel calcolo della frontiera efficiente, oltre a considerare titoli caratterizzati da un certo grado di **rischio**, misurato dalla **volatilità**, si assume che esista anche un titolo non rischioso (risk-free), il cui rendimento, che indicheremo con  $r_0$ , è noto fin dalla data di acquisto. Formalmente, la variabile casuale "rendimento del titolo non rischioso" è una variabile con rendimento atteso  $r_0$  e varianza nulla. Infatti, anche se nel corso del tempo i rendimenti fluttuano, e potrebbero perciò apparire rischiosi dato che la loro varianza campionaria è diversa da zero, in realtà la loro variabilità è minima rispetto a quella dei titoli rischiosi, e può con buona approssimazione essere considerata nulla.

Nella prassi, i titoli non rischiosi sono identificati da titoli di stato a brevissimo termine di paesi assolutamente affidabili (e. g. il Treasury Bond USA a 3 mesi). Essi sono importanti perché diventano il riferimento, il tasso base, in quanto il tasso dell'investimento a rischio nullo. Ogni altro investimento possibile infatti renderà questo "tasso base", con aggiunto un "premio al rischio" in base al rischio intrinseco dell'investimento proprio di ogni attività finanziaria.

Nel caso in esame si è cercato di considerare un tasso risk-free europeo quanto più "globale" possibile. Per questo si è tenuto conto delle quotazioni mensili dell'Euribor (EURO InterBank Offered Rate, *tasso interbancario di offerta in Euro*) a 3 mesi, il tasso medio a cui avvengono le transazioni finanziarie tra le grandi banche europee; fissato dalla European Banking Federation (EBF) come media dei tassi di deposito interbancario tra un insieme di oltre 50 banche, l'Euribor è però disponibile solo a partire dal 1° gennaio 1999, contestualmente all'introduzione dell'Euro. Per cui per la restante parte del *range* campionario si è utilizzato il Fibor, fissato dalla Bundesbank (la Banca Centrale tedesca), dato che le quotazioni del mercato telematico



tedesco possono essere considerate come le più rilevanti e indicative della situazione economico-finanziaria dell'intero panorama europeo.

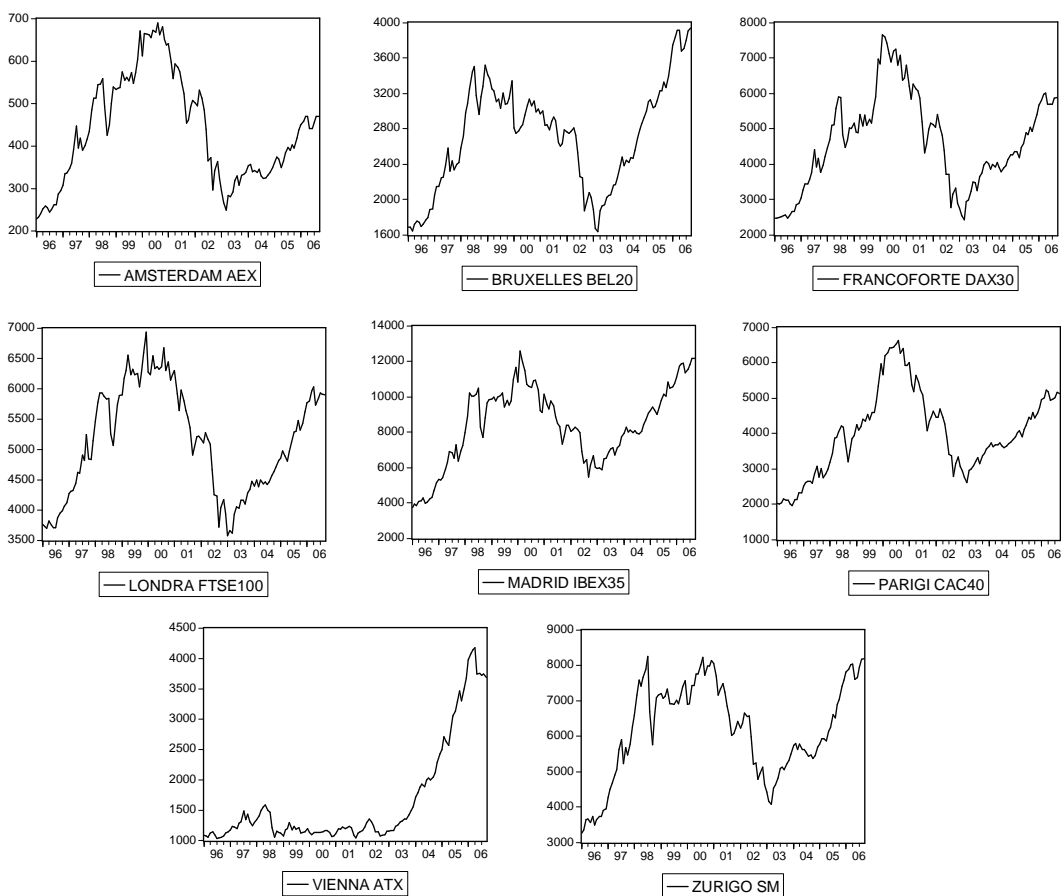
## Capitolo 3: Stima e Risultati

Tutti gli outputs riportati in seguito sono stati ottenuti utilizzando i software statistici Eviews 4.0 e R 2.1.

### 3.1 Andamento degli indici

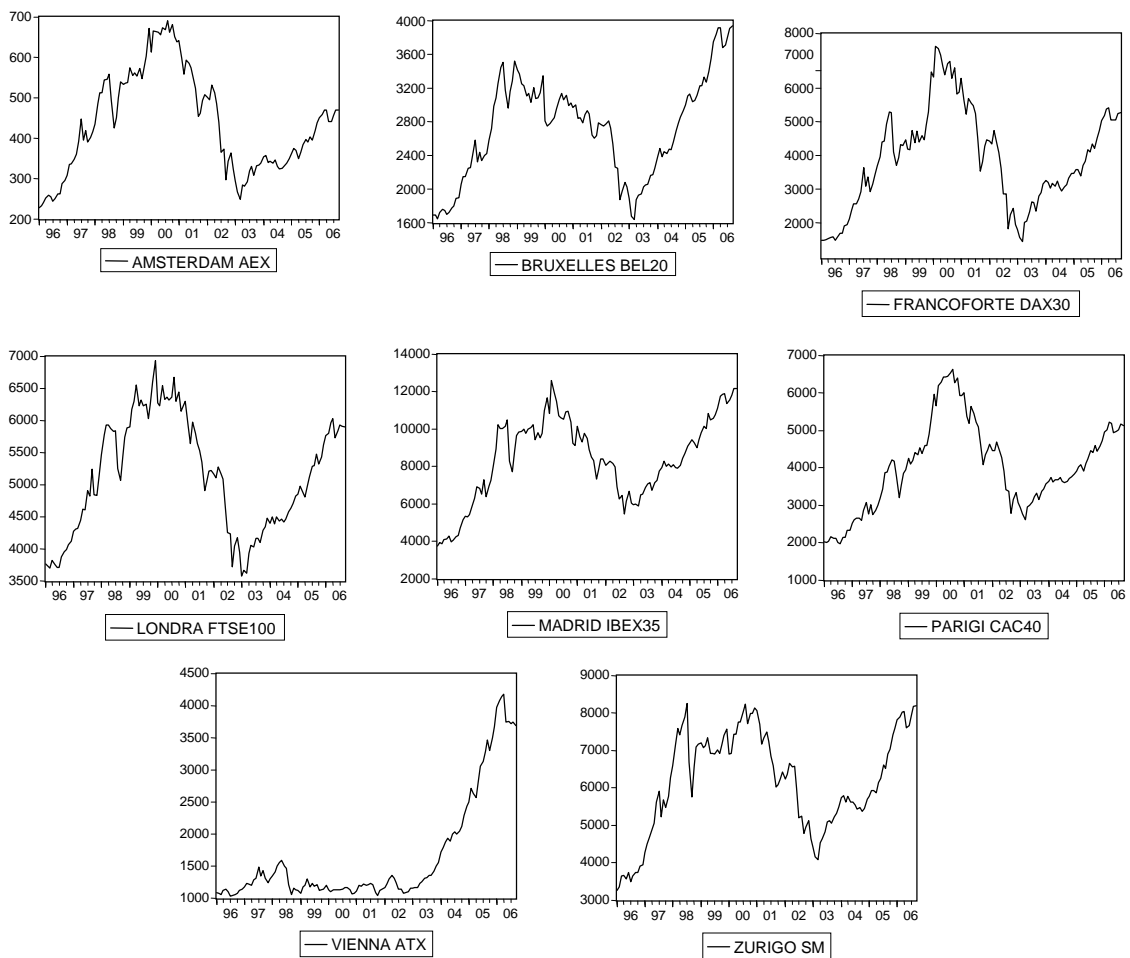
Ecco come si presentano graficamente le quotazioni mensili degli indici considerati:

GRAFICI DEGLI INDICI



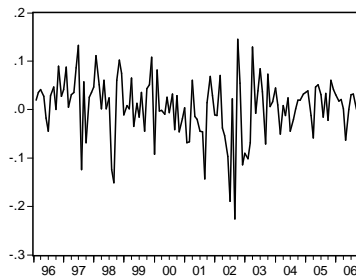
Si noti che quasi tutti i mercati azionari europei, eccetto Vienna che sembra non seguire del tutto il trend degli altri indici, conoscono un periodo positivo tra la fine del 1999 e l'inizio del 2000, per poi iniziare una lenta discesa che giunge al suo punto più basso nella parte centrale del 2002. Da qui ha inizio una veloce risalita che ha riportato i valori ai livelli più che buoni dei nostri giorni.

#### GRAFICI DEGLI INDICI

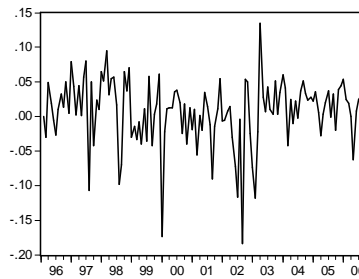


Indicazioni analoghe vengono fornite dai grafici dei rendimenti delle serie.

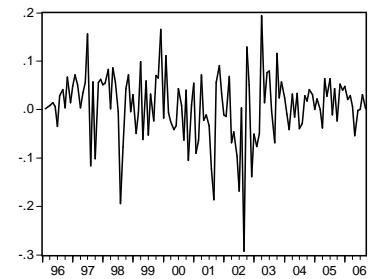
## GRAFICI DEI RENDIMENTI



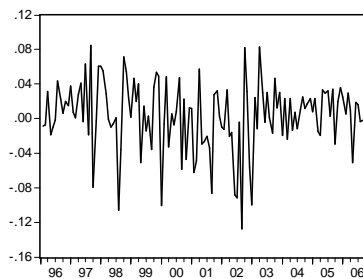
— AMSTERDAM AEX



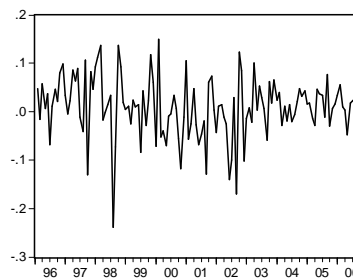
— BRUXELLES BEL20



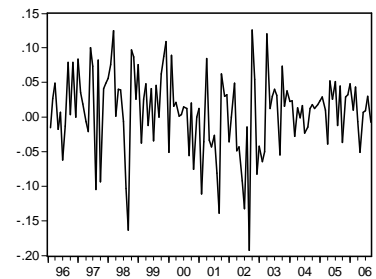
— FRANCOFORTE DAX30



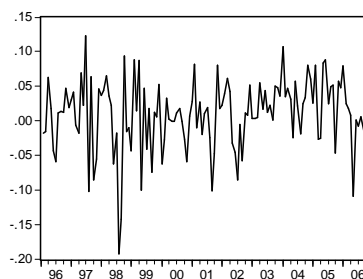
— LONDRA FTSE100



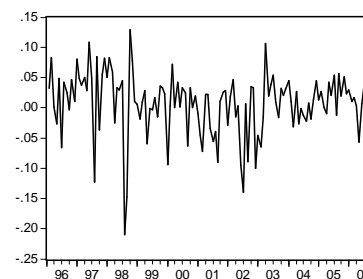
— MADRID IBEX35



— PARIGI CAC40



— VIENNA ATX



— ZURIGO SMI

## 3.2 Statistiche descrittive

Nella tabella seguente sono riportati alcune statistiche descrittive di interesse per ogni serie di rendimenti.

Per la verifica della normalità si utilizza il test di Jarque-Bera, che si basa sui momenti empirici di terzo e quarto grado: l'indice di asimmetria, che valuta la simmetria della distribuzione attorno al valore atteso, e l'indice di curtosi, che riflette la probabilità di osservare rendimenti lontani dal valore atteso, rispettivamente definiti da:

$$A_r = E\left[\left(\frac{r - \mu_r}{\sigma_r}\right)^3\right] \text{ e } C_r = E\left[\left(\frac{r - \mu_r}{\sigma_r}\right)^4\right],$$

momenti stimati da:

$$\hat{A} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{R_t - \bar{R}}{s_r}\right)^3 \text{ e } \hat{C} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{R_t - \bar{R}}{s_r}\right)^4.$$

Per una distribuzione simmetrica,  $A_r = 0$ ; l'indice di curtosi  $C_r$  è invece pari a 3 per una distribuzione normale. Nel nostro caso, tutte le serie hanno distribuzioni empiriche leptocurtiche, ovvero la probabilità di realizzazioni lontane dal valore atteso è maggiore rispetto al caso di una distribuzione normale.

Il test congiunto, che sfrutta l'indipendenza asintotica dei due indicatori sotto l'ipotesi nulla di normalità, si calcola come:

$$\xi_{JB} = \frac{T}{6} \hat{A}^2 + \frac{T}{24} (\hat{C} - 3)^2$$

e sotto  $H_0$  ha distribuzione asintotica  $\chi^2_2$ .

Come si può vedere, il valore del test è molto alto per tutte le distribuzioni di rendimenti esaminate, e il p-value praticamente nullo. Non possiamo perciò assumere la normalità dei dati.

	NED	BEL	GER	U.K.	ESP	FRA	AUT	SWI
Mean	0.0056	0.0066	0.0068	0.0035	0.0092	0.0073	0.0095	0.0072
Median	0.0172	0.0117	0.0116	0.0075	0.0129	0.0131	0.0157	0.0169
Maximum	0.1457	0.1351	0.1937	0.0849	0.1498	0.1259	0.1226	0.1286
Minimum	-0.2262	-0.1838	-0.2933	-0.1274	-0.2388	-0.1923	-0.1925	-0.2099
Std. Dev.	0.0620	0.0481	0.0701	0.0399	0.0627	0.0580	0.0515	0.0518
Skewness	-0.8478	-1.1866	-0.8908	-0.8010	-0.6630	-0.6668	-0.8333	-1.1069
Kurtosis	4.5600	5.8822	5.6565	3.9915	4.6293	3.8915	4.4595	5.4924
Jarque-Bera	28.31	74.34	54.57	18.93	23.54	13.72	26.17	59.27
Probability	0	0	0	0.0001	0	0.0010	0	0
Sum	0.7194	0.8457	0.8663	0.4500	1.1809	0.9307	1.2206	0.9253
Sum Sq. Dev.	0.4887	0.2938	0.6238	0.2020	0.4996	0.4278	0.3366	0.3409
Obs.	128	128	128	128	128	128	128	128

I rendimenti mensili di tutti gli indici sono compresi tra lo 0.3% e l'1%, mentre le deviazioni standard tra il 4% e il 7%. Per avere un quadro più globale, possiamo annualizzare questi due indicatori, moltiplicando semplicemente i risultati per 12, nell'ipotesi che i valori medi mensili restino costanti per un anno:

Indice	Std. dev	Medie
AMSTERDAM	0.7444	0.0674
BRUXELLES	0.5772	0.0793
FRANCOFORTE	0.8410	0.0812
LONDRA	0.4785	0.0422
MADRID	0.7527	0.1107
PARIGI	0.6964	0.0873
VIENNA	0.6178	0.1144
ZURIGO	0.6217	0.0867

### 3.3 Analisi della volatilità

Gli aspetti relativi al comportamento dei rendimenti degli indici non possono essere completi senza una valutazione dell'incertezza dei rendimenti futuri, poiché essi dipendono da fattori di rischio presenti nel sistema economico.

In generale, al concetto di volatilità si fa corrispondere una misura statistica di variabilità. Un indice di variabilità tipicamente utilizzato in proposito è la **varianza storica**, calcolata come:

$$s_{ii}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)^2, \quad i = 1, \dots, 8, \quad T = 128$$

In modo analogo si ricavano le **covarianze** tra i vari mercati azionari, utili per analizzare le interrelazioni fra coppie di rendimenti utilizzando le realizzazioni presenti e passate:

$$s_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j), \quad i, j = 1, \dots, 8, \quad T = 128$$

Questi elementi vanno a formare la **matrice di varianze e covarianze** ( $\hat{\Sigma}$ ), di dimensioni 8x8.

$\hat{\Sigma}$	NED	BEL	GER	U.K.	ESP	FRA	AUT	SWI
NED	0.0038							
BEL	0.0024	0.0023						
GER	0.0039	0.0025	0.0049					
U.K.	0.0020	0.0014	0.0022	0.0016				
ESP	0.0030	0.0019	0.0034	0.0019	0.0039			
FRA	0.0032	0.0021	0.0036	0.0018	0.0029	0.0033		
AUT	0.0019	0.0015	0.0020	0.0012	0.0017	0.0016	0.0026	
SWI	0.0026	0.0018	0.0027	0.0015	0.0023	0.0024	0.0015	0.0027

### 3.4 Correlazione e diversificazione

Uno strumento invece utile per la **diversificazione** del portafoglio è la matrice di correlazione: una correlazione negativa tra due titoli implica che a fronte di variazioni positive di un rendimento, si avrebbe una tendenza ad avere variazioni negative sull'altro, e viceversa, mentre una correlazione positiva indica che le variazioni dei due rendimenti seguono la stessa direzione in termini di segno. La rischiosità del rendimento di un insieme di titoli si basa sulla non perfetta correlazione tra le diverse attività finanziarie, e tale rischiosità si riduce appunto diversificando l'investimento in ogni titolo. Nella pratica, i benefici della diversificazione in termini di riduzione del rischio di portafoglio giustificano l'esistenza di istituzioni quali i fondi comuni di investimento, che consentono a un investitore di acquisire direttamente un portafoglio altamente diversificato.

Qui sotto vediamo la matrice  $\hat{P}$  dei coefficienti di correlazione tra le varie coppie di indici, calcolati come:

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_{ii}s_{jj}} = \frac{\sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)^2 \sum_{t=1}^T (R_{jt} - \bar{R}_j)^2}}, \quad i = 1, \dots, 8, \quad T = 128$$

## MATRICE DI CORRELAZIONE

$\hat{P}$	NED	BEL	GER	U.K.	ESP	FRA	AUT	SWI
NED	1							
BEL	0.8186	1						
GER	0.9029	0.7399	1					
U.K.	0.8095	0.7267	0.7914	1				
ESP	0.7665	0.6399	0.7777	0.7500	1			
FRA	0.9020	0.7543	0.9025	0.7885	0.7991	1		
AUT	0.6034	0.6128	0.5659	0.6116	0.5307	0.5362	1	
SWI	0.8208	0.7452	0.7591	0.7550	0.7107	0.8026	0.5829	1

Tutti i valori sono positivi e "vicini" a uno, quindi si presuppone che per valori positivi (negativi) dei rendimenti di un dato titolo, ci si aspettano ugualmente valori positivi (negativi) per i rendimenti di un altro indice qualsiasi.

### 3.5 Il criterio media - varianza

Un problema rilevante per un investitore è il seguente: qual è il portafoglio migliore fra tutti quelli che possono essere composti sulla base dell'insieme dato di indici? La risposta deve da un lato considerare le preferenze dell'investitore, e dall'altro dell'incertezza relativa al rendimento dei diversi portafogli.

Una soluzione al problema viene proposta da Markowitz nel 1959; essa si fonda su ipotesi particolari e talvolta restrittive, ad esempio sul tipo di funzioni di utilità che possono rappresentare le preferenze degli operatori di mercato, ma semplifica decisamente l'analisi econometrica del problema. Nel modello di Markowitz la composizione dei portafogli ottimali dipende dal valore atteso  $\underline{\mu}$  e dalla matrice di varianze e covarianze  $\underline{\Sigma}$  del vettore dei rendimenti  $\underline{R}$  considerato, quantità ignote approssimate dagli stimatori campionari  $\hat{\underline{\Sigma}}$  e  $\bar{\underline{R}}$ . Sostituendo questi ultimi ai momenti teorici, si

ottiene l'allocazione empirica, che costituisce una stima di quella teorica, e di cui si studia la distribuzione per costruire statistiche test che vedremo in seguito.

### 3.5.1 Formalizzazione del problema

Alla data 0 un risparmiatore decide come investire la propria ricchezza  $W_0$  fino alla data 1, che è pari a:

$$W_1 = W_0(1 + R_p),$$

dove  $R_p$  è il rendimento atteso del portafoglio.

Le preferenze dell'investitore sulla ricchezza futura sono descritte dalla sua funzione di utilità  $U(W_1)$ . Il problema dell'investitore è quello di massimizzare l'utilità attesa, che è incerta, ricorrendo al suo valore atteso  $E[U(W_1)]$ ; la soluzione fornita da Markowitz si basa sull'ipotesi che  $E[U(W_1)]$  sia funzione dei primi due momenti della distribuzione di  $W_1$ , ovvero il **valore atteso** e la **varianza**:

$$E[U(W_1)] = E(W_1) - \eta \text{Var}(W_1),$$

con  $\eta$  parametro positivo che quantifica l'avversione al rischio.

L'espressione sopra viene chiamata funzione di utilità attesa media - varianza, ed è una funzione crescente del valore atteso della ricchezza futura e decrescente della sua varianza. In particolare, presi due portafogli A e B, l'investitore preferisce il portafoglio A al portafoglio B se:

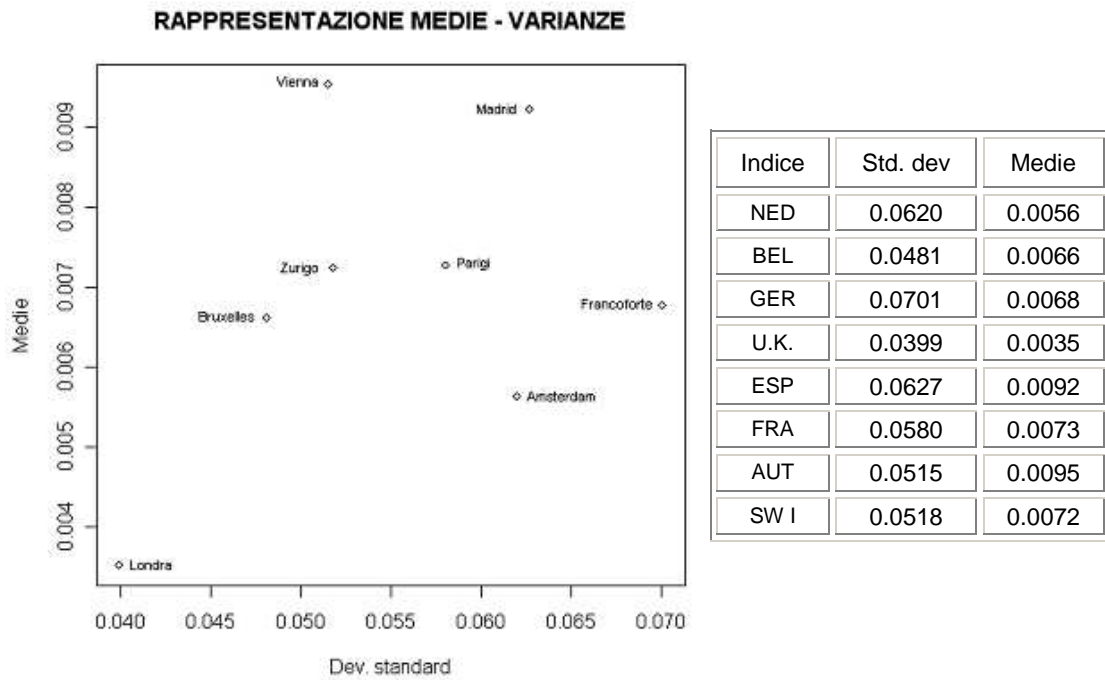
$$E[R_A] > E[R_B] \quad \text{e} \quad \text{Var}[R_A] < \text{Var}[R_B].$$

Questo sistema di disuguaglianze si definisce **criterio media - varianza**, e determina un insieme di portafogli efficiente che costituiscono la **frontiera efficiente**. Un portafoglio efficiente è tale



che, tra tutti i portafogli con medesimo rendimento medio, è caratterizzato dalla varianza minore.

Vediamo a seguire una rappresentazione grafica delle coppie  $(s_{ii}, \bar{R}_i)$ :



Notiamo come l'indice inglese fornisca il rendimento medio minore, compensato però da un rischio molto basso, mentre il rendimento medio maggiore viene dall'indice austriaco, che si contraddistingue anche per un rischio più che buono nell'insieme dei titoli considerati.

### 3.6 La frontiera efficiente senza titolo non rischioso

Se definiamo  $k = \eta W_0$ , il problema della scelta dei portafogli efficienti si può formulare nel modo seguente:

$$w_* = \arg \max_w \{E[U(W_1)]\} = \arg \max_w \{E(R_p) - k \text{Var}(R_p)\},$$

L'insieme delle soluzioni al variare di  $k$  coincide con quello di:

$$\begin{aligned} w_* &= \arg \max_w [E(R_p)], \quad \text{s.v. } \text{Var}(R_p) = \bar{\sigma}^2, \text{ e} \\ w_* &= \arg \min_w [\text{Var}(R_p)], \quad \text{s.v. } E(R_p) = \bar{\mu}, \end{aligned}$$

con  $\bar{\sigma}^2$  e  $\bar{\mu}$  livelli obiettivo rispettivamente di varianza e rendimento atteso. Al variare del valore dei vincoli, fissato arbitrariamente, si determina l'insieme delle soluzioni.

Consideriamo il secondo problema di ottimizzazione. Fissato un livello di rendimento medio per il portafoglio,  $\bar{\mu} = \mu_{p^{**}}$ , possiamo riformulare il problema come:

$$w_{**} = \arg \min_w [\sigma_p^2 = \underline{w}' \Sigma \underline{w}] \quad \text{s. v. } \underline{w}' \underline{\mu} = \mu_{p^{**}} \text{ e } \underline{w}' \underline{i} = 1$$

che porta alla soluzione di ottimo vincolato:

$$\begin{aligned} w_{**} &= \lambda_{**} \Sigma^{-1} \underline{\mu} + \gamma_{**} \Sigma^{-1} \underline{i}, \\ \text{con } \lambda_{**} &= \frac{c \mu_{p^{**}} - b}{\delta}, \quad \gamma_{**} = \frac{a - b \mu_{p^{**}}}{\delta}, \quad \delta = ac - b^2, \\ \text{e dove } a &= \underline{\mu}' \Sigma^{-1} \underline{\mu}, \quad b = \underline{\mu}' \Sigma^{-1} \underline{i}, \quad c = \underline{i}' \Sigma^{-1} \underline{i}. \end{aligned}$$

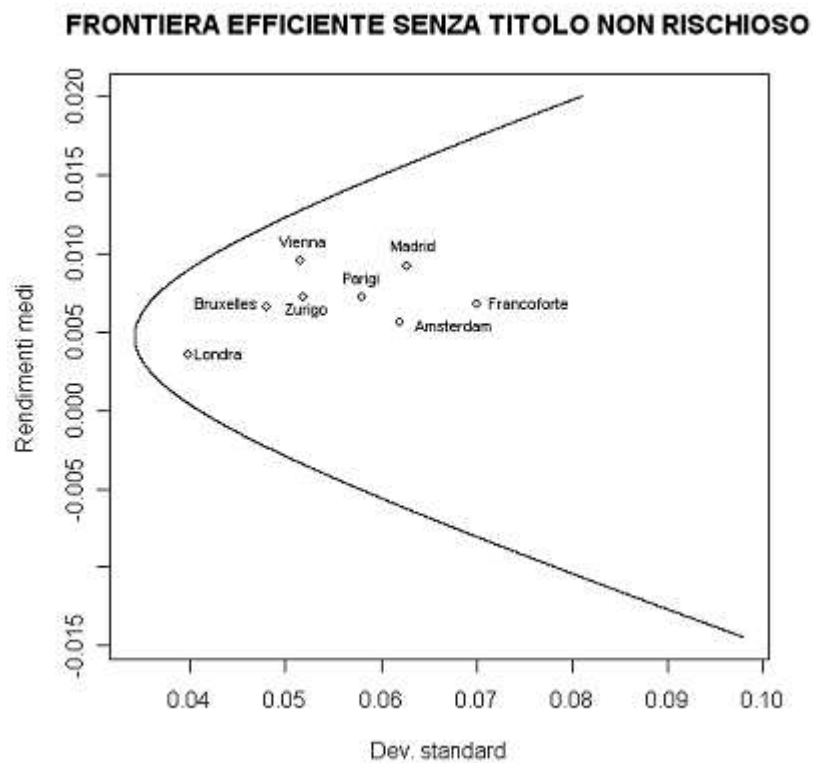
Ad ogni  $\mu_{p^{**}}$  viene associato un portafoglio ottimale  $\mu_{**}$ , funzione di  $\mu_{p^{**}}$ , con rischio pari a:

$$\sigma_{p^{**}} = \left( \frac{c}{\delta} \mu_{p^{**}}^2 - 2 \frac{b}{\delta} \mu_{p^{**}} + \frac{a}{\delta} \right)^{1/2}$$

che rappresenta la **frontiera efficiente senza titolo non rischioso**, ovvero il luogo dei portafogli aventi la minima varianza a parità di rendimento atteso; graficamente, un'iperbole di vertice  $\left( \frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{b}{c} \right)$  e asintoti  $\mu_{p^{**}} = \frac{b}{c} \pm \sigma_{p^{**}} \sqrt{\frac{\delta}{c}}$ .

Qui sotto, vediamo la frontiera efficiente calcolata a partire dagli otto indici considerati, di equazione:

$$\sigma = \left( 22.40\mu^2 + 0.37\mu + 0.003 \right)^{1/2}, \text{ e vertice in } (0.034, 0.008).$$



### 3.7 La frontiera efficiente con titolo non rischioso

Passiamo ora al calcolo della frontiera efficiente considerando anche il titolo non rischioso, che ha rendimento (mensilizzato)  $r_0 = 0.0027$  e, come già sottolineato, varianza nulla e quota nel portafoglio pari a  $w_0$ .

Il problema di ottimo da considerare ora è il seguente:

$$\arg \min_{w, w_0} \{ \underline{w}' \Sigma \underline{w} = \sigma_p^2 \} \quad \text{s.v.} \quad \underline{w}'(\underline{\mu} - r_0 \underline{i}) = \mu_{p^*} - r_0;$$

si impone cioè che i rendimenti medi netti dei titoli rischiosi eguagliano il rendimento medio netto del portafoglio. Si ricavano quindi i pesi ottimali:

$$\underline{w}^* = \lambda^* \Sigma^{-1}(\underline{\mu} - r_0 \underline{i}), \text{ il vettore delle quote nei titoli rischiosi, e}$$

$$w_0^* = 1 - \underline{i}' \underline{w}^*, \text{ la quota nel titolo non rischioso, con}$$

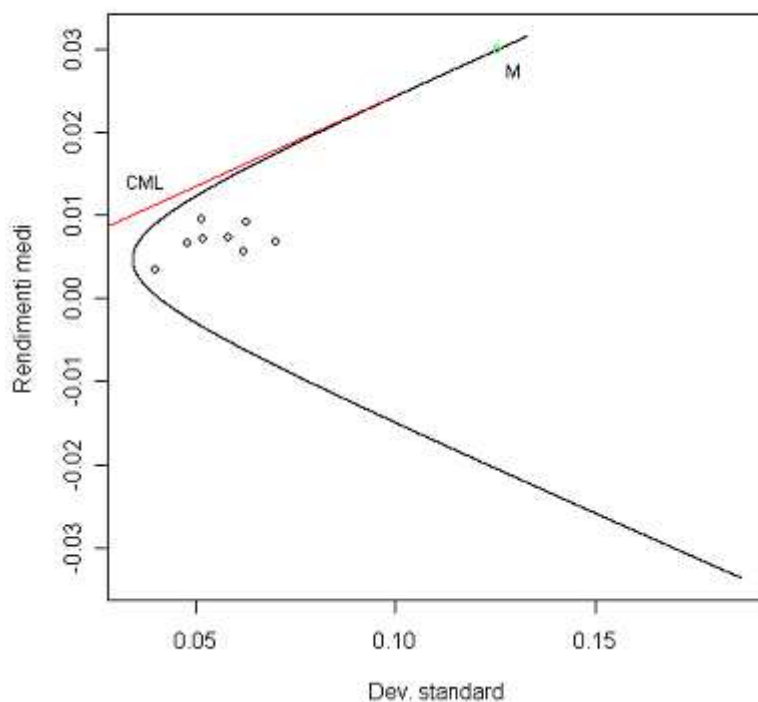
$$\lambda^* = \frac{\mu^* - r_0}{a - 2br_0 + cr_0^2}, \text{ e il valore della funzione obiettivo, che rappresenta}$$

la frontiera efficiente senza titolo non rischioso, ovvero una retta denominata **Capital Market Line** (CML):

$$\mu_{p^*} = r_0 + p s^* \sigma_{p^*}$$

Nel nostro caso, si ha  $\mu_{p^*} = 0.0027 + 0.217 \sigma_{p^*}$

### FRONTIERA EFFICIENTE CON TITOLO NON RISCHIOSO



La pendenza della CML,  $ps_* = \frac{\mu_{p^*} - r_0}{\sigma_{p^*}} = \sqrt{a - 2br_0 + cr_0^2}$ , si

definisce **performance di Sharpe**, e rappresenta il rapporto tra rischio e rendimento atteso di un portafoglio. Tutti i portafogli appartenenti alla CML hanno performance di Sharpe  $ps_*$ . Fra questi, due in particolare sono di interesse: quello in cui si investe solo nel titolo non rischioso ( $T_0$ ), che ha varianza nulla, e quello che contiene solo titoli rischiosi, che indicheremo con  $M$ , che rappresenta il punto di tangenza tra le frontiere efficienti con e senza titolo non rischioso.

In particolare, il portafoglio  $M$  ha rendimento medio

$$\bar{\mu}_M = \frac{a - br_0}{b - cr_0} = 0.0300, \text{ e deviazione standard } \hat{\sigma}_M = \frac{ps_*}{b - cr_0} = 0.1255. \text{ Per}$$

i portafogli sulla frontiera efficiente compresi fra  $T_0$  e  $M$  (area di maggior avversione al rischio), nel nostro caso tutti gli 8 considerati, gli agenti economici investono una quota positiva in entrambi, con quote via via maggiori di titoli rischiosi quanto più il portafoglio è vicino a  $M$ . Se invece si trovassero a destra di  $M$ , gli investitori sarebbero meno avversi al rischio e investirebbero una quota

negativa di ricchezza nel titolo non rischioso, indebitandosi al tasso  $r_0$  e investendo il ricavato e la ricchezza iniziale in  $M$ .

Calcoliamo ora il vettore dei pesi del portafoglio  $M$  con la formula:

$$\underline{w}_M = \frac{\lambda^* \Sigma^{-1}(\underline{\mu} - r_0 \underline{i})}{\lambda^* \underline{i}' \Sigma^{-1}(\underline{\mu} - r_0 \underline{i})} = \frac{\Sigma^{-1}(\underline{\mu} - r_0 \underline{i})}{b - cr_0}$$

da cui risulta:

Indice	$W_{M_i}$
AMSTERDAM	-2.3241
BRUXELLES	0.9832
FRANCOFORTE	-0.1179
LONDRA	1.3988
MADRID	1.5756
PARIGI	1.8873
VIENNA	0.9176
ZURIGO	-3.3204

Ovviamente, i pesi sommano a 1:  $\sum_{i=1}^8 w_{M,i} = 1$ . Come detto, nei casi in cui essi sono negativi, l'investitore prende a prestito il necessario per acquistare il titolo  $i$ , lo rivende nel mercato e con il ricavato acquista gli altri titoli con quote nel portafoglio positive.

Per valutare la bontà dell'investimento, per ogni titolo  $i$  possiamo calcolare:

- Performance di Sharpe:  $\hat{p}s_i = \frac{\hat{\mu}_i - r_0}{\hat{\sigma}_{ii}}$ ;
- Standard error di  $p s_i$ :  $\hat{\sigma}_{ps_i} = \sqrt{\frac{1}{T} \left( 1 + \frac{\hat{p}s_i^2}{2} \right)}$ ;
- Estremi inferiore e superiore dell'intervallo di confidenza per  $p s_i$  al 95%:

$$\left[ Inf_{ps_i} = \hat{p}s_i - 1.96\hat{\sigma}_{ps_i} ; Sup_{ps_i} = \hat{p}s_i + 1.96\hat{\sigma}_{ps_i} \right]$$

Indice	$\hat{p}s_i$	$\hat{\sigma}_{ps_i}$	Int. di conf. per $ps_i$ al 95%
AMSTERDAM	0.047	0.089	[-0.127, 0.221]
BRUXELLES	0.081	0.089	[-0.093, 0.256]
FRANCOFORTE	0.058	0.089	[-0.116, 0.232]
LONDRA	0.021	0.089	[-0.153, 0.195]
MADRID	0.104	0.089	[-0.070, 0.279]
PARIGI	0.079	0.089	[-0.095, 0.253]
VIENNA	0.133	0.089	[-0.042, 0.308]
ZURIGO	0.088	0.089	[-0.087, 0.262]
$ps_*$	0.217	0.008	[0.201, 0.233]

Tutti gli indici hanno performance di Sharpe positiva, dovuta al proprio rendimento medio, e errore standard praticamente costante. L'indice più vantaggioso risulta quindi essere l'ATX di Vienna, che ha rendimento medio maggiore.

## 3.8 Inferenza sulla frontiera efficiente

### 3.8.1. Test di confronto delle performance di Sharpe

Vogliamo verificare l'ipotesi di uguaglianza delle performance di Sharpe a coppie, ovvero  $H_0: \hat{p}s_i - \hat{p}s_j = 0, i, j = 1, \dots, 8, i \neq j$ , vs.  $H_1: \bar{H}_0$ .

Poiché  $\sqrt{T}(ps_i - ps_j) \sim N(0, \sigma_a^2)$ , con  $\hat{\sigma}_a^2 = 2(1 - \hat{\rho}_{ij}) + \frac{\hat{p}s_i^2}{2} + \frac{\hat{p}s_j^2}{2} - \hat{p}s_i \hat{p}s_j \hat{\rho}_{ij}^2$ ,

e dove  $\hat{\rho}_{ij}$  è il coefficiente di correlazione tra l'indice  $i$  e l'indice  $j$ , il test si calcola nel seguente modo:

$$\xi_1 = \sqrt{T} \frac{\hat{p}s_i - \hat{p}s_j}{\hat{\sigma}_a}, \text{ che sotto } H_0 \text{ si distribuisce asintoticamente}$$

come una normale standard. Vediamo sotto la matrice dei valori del test per ogni coppia di indici, e tra parentesi i relativi p-value:

possiamo notare che tutti i test sono significativi a livello 5%, per cui si accetta l'ipotesi di uguaglianza a coppie delle performance di Sharpe.

$\xi_1$ (p-value)	NED	BEL	GER	U.K.	ESP	FRA	AUT
BEL	0.641 (0.522)						
GER	1.403 (0.161)	0.325 (0.745)					
U.K.	-0.624 (0.533)	-1.042 (0.297)	-1.552 (0.121)				
ESP	1.077 (0.281)	0.414 (0.679)	0.175 (0.861)	1.583 (0.114)			
FRA	1.062 (0.288)	0.121 (0.903)	-0.338 (0.735)	1.314 (0.189)	-0.420 (0.675)		
AUT	1.073 (0.283)	0.648 (0.517)	0.361 (0.718)	1.519 (0.129)	0.226 (0.821)	0.504 (0.614)	
SWI	0.331 (0.741)	-0.264 (0.792)	-0.608 (0.543)	0.833 (0.405)	-0.709 (0.478)	-0.435 (0.664)	-0.830 (0.406)

### 3.8.2. Test di esclusione di titoli dai portafogli efficienti

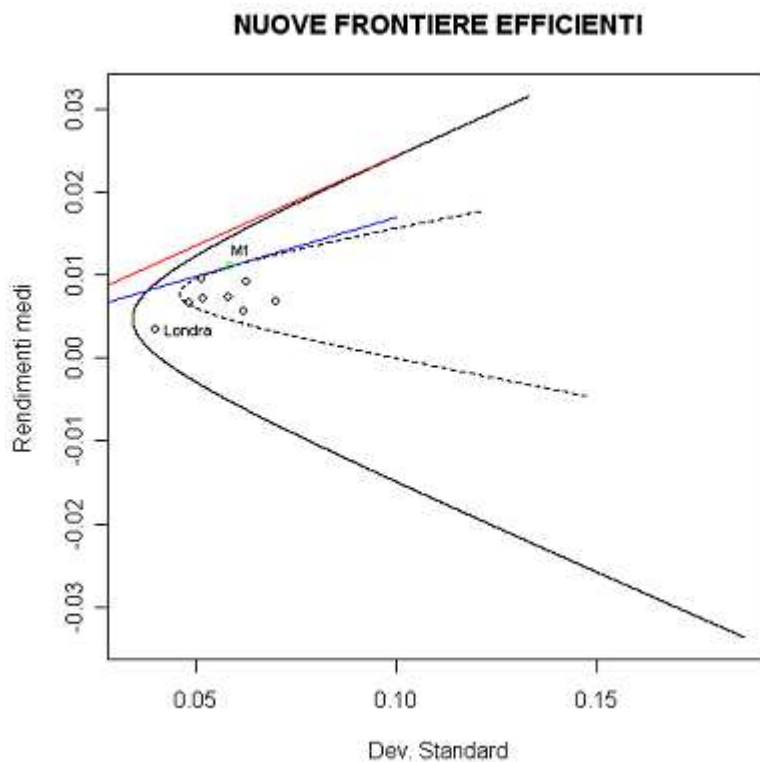
Supponiamo di voler verificare l'ipotesi che i portafogli efficienti contengano solo  $I_0 < I$  indici, ovvero che l'esclusione di alcuni indici non comporta una perdita nella performance di Sharpe. Ad esempio, poniamo  $I_0 = 5$ , escludendo dal portafoglio originario gli indici di Francoforte, Londra e Vienna. Il problema quindi equivale a verificare  $H_0 : ps_* - ps_{*0} = 0$  vs.  $H_1 : ps_* - ps_{*0} \neq 0$ , dove  $ps_{*0}$  è la massima performance di Sharpe realizzabile con gli  $I_0 = 5$  titoli. Nel nostro caso troviamo  $\hat{p}_{s_{*0}} = 0.142$ , e andiamo quindi a calcolare il test:

$$\xi_2 = T \frac{\hat{p}_{s_*}^2 - \hat{p}_{s_{*0}}^2}{1 + \hat{p}_{s_{*0}}^2}, \text{ che sotto } H_0 \text{ ha distribuzione asintotica } \chi_{I-I_0}^2.$$



Sostituendo i valori stimati, si ha:  $\xi_2 = 128 \frac{0.217^2 - 0.142^2}{1 + 0.142^2} = 3.378$ ;

confrontando il valore del test con una distribuzione  $\chi_3^2$ , il p-value risultante è pari a 0.337. Si accetta quindi l'ipotesi di efficienza del portafoglio ridotto, dato che le performance di Sharpe non sono significativamente differenti. Vediamo a seguire le nuove frontiere efficienti senza e con titolo non rischioso (rispettivamente tratteggiate e in blu), oltre al nuovo portafoglio efficiente con titoli rischiosi  $M_1$ .



Si nota che l'indice londinese è oltre la nuova frontiera efficiente senza titolo non rischioso, ma questo non costituisce un problema, in quanto questo indice non fa parte del portafoglio ridotto  $M_1$ , che ha rendimento medio  $\hat{\mu}_{M_1} = 0.0109$  e deviazione standard  $\hat{\sigma}_{M_1} = 0.0549$ . Ricaviamo inoltre il vettore dei pesi  $w_{i0}$  associati a  $M_1$ :

Indice	$W_{M_i}$
AMSTERDAM	-1.6473
BRUXELLES	0.7937
MADRID	0.7254
PARIGI	0.5655
ZURIGO	0.5626

Ora l'unico indice che prevede un indebitamento al tasso risk-free è quello di Amsterdam.

## Capitolo 4: Matrici di varianze e covarianze ponderata

### 4.1. Il tasso di decadimento

Introduciamo ora un particolare metodo di stima della matrice di varianze e covarianze, utilizzato presso l'istituto di analisi finanziaria Goldman, Sachs & Co. Nello stimare le covarianze, questo approccio considera una media pesata dei prodotti dei rendimenti passati, mentre per le volatilità si considerano le medie dei quadrati dei rendimenti storici di ogni indice.

Formalizzando il problema, supponiamo che  $R_{i,T-s}$  sia il rendimento mensile dell' $i$ -esimo indice,  $i=1,\dots,8$ , al tempo  $(T-s)$ , e che  $d_{T-s}$  sia il peso applicato al tempo  $(T-s)$ . Inoltre, assumiamo che la varianza dei rendimenti del titolo  $i$  al tempo  $T$  sia  $\sigma_{ii}^T$ . Lo stimatore di  $\sigma_{ii}^T$  è dato quindi da:

$$\hat{\sigma}_{ii}^T = \frac{\sum_{s=0}^T d_{T-s} (R_{i,T-s} - \bar{R}_i)^2}{\sum_{s=0}^T d_{T-s}}.$$

Analogamente, si definisce lo stimatore della covarianza. Sia  $R_{j,T-s}$  il rendimento dell'indice  $j$  al tempo  $(T-s)$ : possiamo scrivere la covarianza tra  $R_{i,T-s}$  e  $R_{j,T-s}$  al tempo  $T$  come:

$$\hat{\sigma}_{ij}^T = \frac{\sum_{s=0}^T d_{T-s} (R_{i,T-s} - \bar{R}_i)(R_{j,T-s} - \bar{R}_j)}{\sum_{s=0}^T d_{T-s}} .$$

Ovviamente, vi sono molte possibili opzioni per i pesi  $d_t$ . In particolare, questo approccio considera  $d_t$  **funzione crescente del tempo**, assegnando maggior peso alle osservazioni più recenti, e pesi tanto minori alle quotazioni quanto più esse siano lontane nel tempo. Ad esempio, se viene attribuito il 100% del peso al rendimento osservato più recentemente ( $t=128$ ),  $d_T = 1.0$ . Supponiamo che ogni ritardo indietro nel tempo riceva il 90% del peso del ritardo seguente: in tal caso,  $d_{T-1} = 0.90$ ,  $d_{T-2} = 0.81$ , e così via. Chiamiamo la quantità  $d = \frac{d_t - d_{t-1}}{d_t}$  **tasso di decadimento**, e nell'esempio esso è pari al 10%.

Per scegliere il tasso più consistente ci avvaliamo del **metodo della massima verosimiglianza**, che consiste nel massimizzare la funzione di verosimiglianza, definita in base alla probabilità di osservare una data realizzazione campionaria condizionatamente ai valori assunti dai parametri oggetto di stima. Ricercando il valore più *verosimile* dei parametri, ossia massimizzando la verosimiglianza dei dati osservati tra tutti i possibili valori dei parametri stessi, si ottiene lo **stimatore di massima verosimiglianza**.

Nel nostro caso, il parametro in questione è  $\sum_d$ . Siano dunque:

- $\{\underline{X}_t\}_{t=1}^{128}$  il campione di vettori casuali i.i.d. dei rendimenti degli  $n=8$  indici al tempo  $t$ ,  $t=1, \dots, 128$ ; si assume

$\underline{X}_t \sim N_n(\underline{\mu}, \Sigma_d)$ , con  $\underline{\mu}$  vettore (8x1) delle medie e  $\Sigma_d$  matrice (8x8) di varianze e covarianze definita positiva.

- $\underline{x}_t$  il vettore delle realizzazioni dei rendimenti degli  $n$  indici al tempo  $t$ .

$\underline{X}_t$  ha funzione di densità:

$$f(\sqrt{d_t} \underline{x}_t; \underline{\mu}, \Sigma_d) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} |\hat{\Sigma}_d|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2d_t} (\underline{x}_t - \hat{\underline{\mu}})' \hat{\Sigma}_d^{-1} (\underline{x}_t - \hat{\underline{\mu}}) \right\}$$

con corrispondente funzione di verosimiglianza:

$$L(\sqrt{d_t} \underline{x}_t; \underline{\mu}, \Sigma_d) = \prod_{t=1}^{128} f(\sqrt{d_t} \underline{x}_t; \underline{\mu}, \Sigma_d).$$

Per semplicità di calcolo, consideriamo il logaritmo della funzione sopra; la funzione di log-verosimiglianza che andiamo a massimizzare, ottenuta dopo opportune semplificazioni, ha forma:

$$L_d = -\frac{1}{2} \left[ Tn(\ln 2\pi) - \sum_{t=1}^{128} \ln(d_t) + T(\ln |\hat{\Sigma}_d|) + \sum_{t=1}^{128} d_t (\underline{x}_t - \hat{\underline{\mu}})' \hat{\Sigma}_d^{-1} (\underline{x}_t - \hat{\underline{\mu}}) \right]$$

da cui si ricava lo stimatore di massima verosimiglianza:

$$\hat{\Sigma}_d = \frac{\sum_{t=1}^{128} d_t (\underline{x}_t - \hat{\underline{\mu}})(\underline{x}_t - \hat{\underline{\mu}})'}{\sum_{t=1}^{128} d_t}.$$

Come si nota, la matrice di varianze e covarianze cercata è funzione di  $d$ ; di conseguenza, il tasso di decadimento ottimale sarà quello che massimizza la funzione di verosimiglianza che dipende dalla matrice ponderata utilizzando quel particolare valore di  $d$ . In particolare, il tasso ottimale risulta:

$$d^* = 0.09.$$

Quindi, ogni osservazione passata ha un peso inferiore del 9% rispetto a quella immediatamente successiva, per cui possiamo scrivere il vettore dei pesi  $128 \times 1$  come:

$$\underline{d}'_* = [\dots 0.8281 \ 0.91 \ 1]$$

A seguire viene riportata la matrice di varianze e covarianze  $\hat{\Sigma}_{185}$ , ponderata con il vettore dei pesi sopra citato:

$\hat{\Sigma}_{09}$	NED	BEL	GER	U.K.	ESP	FRA	AUT	SWI
NED	0.001224							
BEL	0.000916	0.000900						
GER	0.001113	0.000878	0.001244					
U.K.	0.000681	0.000583	0.000681	0.000579	0.000559			
ESP	0.000845	0.000693	0.000851	0.000559	0.000910			
FRA	0.000959	0.000774	0.001003	0.000618	0.000753	0.000932		
AUT	0.001139	0.001006	0.001153	0.000840	0.000925	0.001018	0.002113	
SWI	0.000868	0.000693	0.000819	0.000515	0.000637	0.000694	0.000835	0.000811

Come si nota, le varianze e covarianze sono minori di quelle originarie, per via dei pesi che tendono a zero.

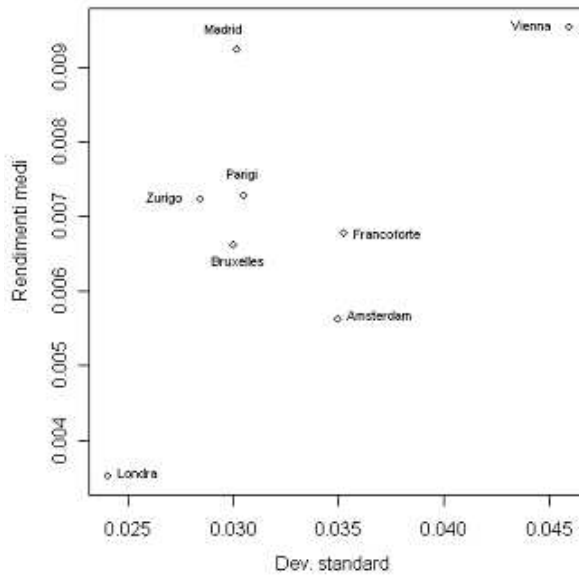
## 4.2. Nuove stime e risultati

Utilizzando la matrice di varianze e covarianze ponderata, svolgiamo ora le medesime analisi econometriche, con opportuni confronti e conclusioni.

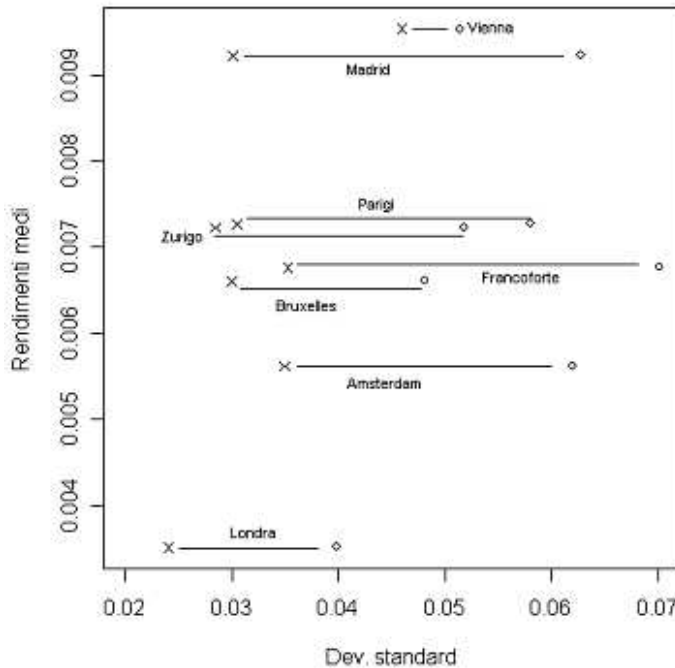
### 4.2.1. Frontiere efficienti

Innanzitutto, vediamo il nuovo diagramma medie-varianze: si considerano gli stessi rendimenti medi, mentre le volatilità degli indici, stimate dalle rispettive deviazioni standard, in alcuni casi ne fanno cambiare posizione nel grafico rispetto agli altri. Si noti inoltre la distanza ridotta in termini di rischio delle coppie con varianze ponderate.

Indice	Std. dev	Medie
NED	0.0350	0.0056
BEL	0.0300	0.0066
GER	0.0353	0.0068
U.K.	0.0241	0.0035
ESP	0.0302	0.0092
FRA	0.0305	0.0073
AUT	0.0460	0.0095



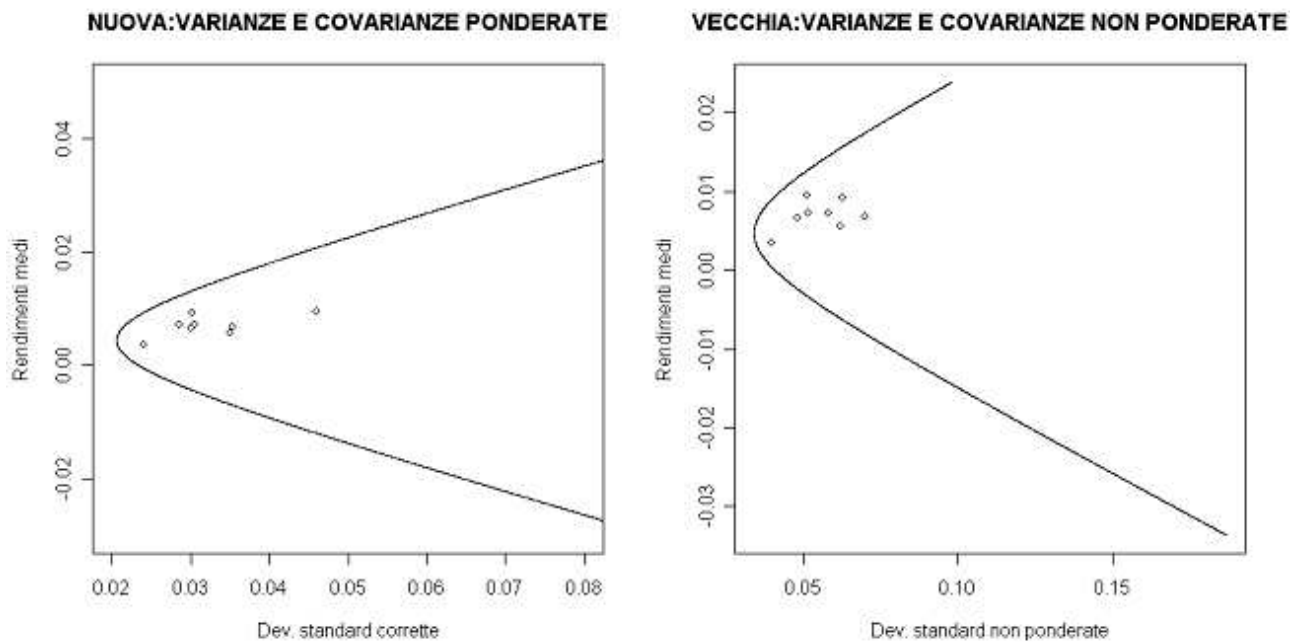
L'indice austriaco risulta ora il più rischioso, a fronte di un miglior rendimento medio. L'indice londinese si mantiene il più affidabile, benché il suo rendimento sia il più basso.



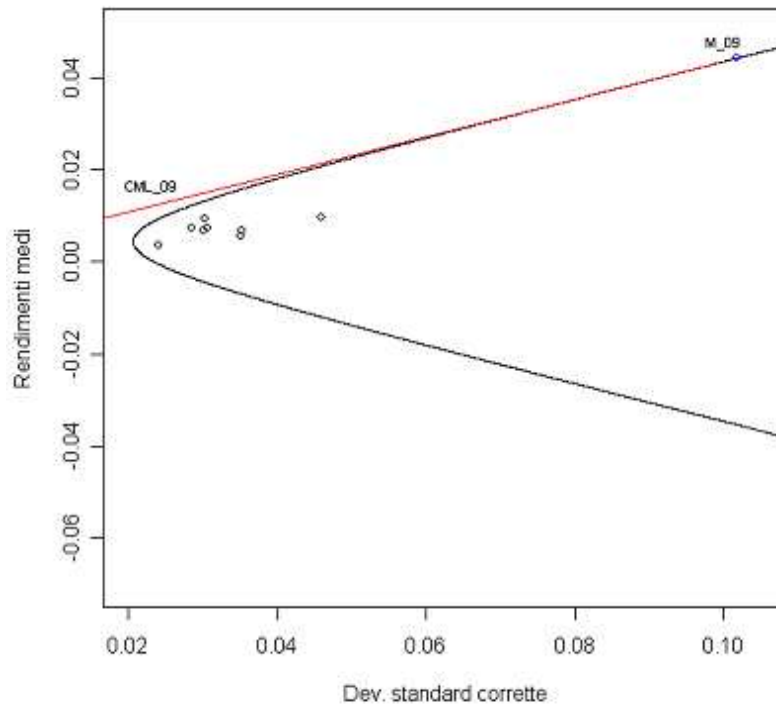
- coppie medie-varianze non ponderate
- x coppie medie-varianze ponderate

a questo confronto si può ravvisare che le "posizioni" nel diagramma restano più o meno le stesse, mentre cambiano, e nella fattispecie si riducono, le distanze tra un indice e l'altro in termini di volatilità.

Vediamo ora la frontiera efficiente senza titolo non rischioso, che ha equazione:  $\sigma_{09} = (6.284\mu_{09}^2 - 0.055\mu_{09} + 0.00054)^{1/2}$  e vertice in  $(0.0206, 0.0044)$ , mentre la CML ha equazione:  $\mu_{09} = 0.0027 + 0.407\sigma_{09}$ .



### NUOVA FRONTIERA EFFICIENTE CON TITOLO NON RISCHIOSO



Ora il portafoglio ottimale  $M_{09}$  è caratterizzato da rendimento

medio  $\bar{\mu}_{M,09} = \frac{a_{09} - b_{09}r_0}{b_{09} - c_{09}r_0} = 0.0441$  e deviazione standard

$\hat{\sigma}_{M,09} = \frac{ps^*_{09}}{b_{09} - c_{09}r_0} = 0.1016$ . Come prima, calcoliamo il vettore delle

quote di ogni indice in  $M_{09}$ :  $w_{M,09} = \frac{\sum_{09}^{-1}(\underline{\mu} - r_0 \underline{i})}{b_{09} - c_{09}r_0}$

Indice	$w_{M,09_i}$	$w_{M_i}$
AMSTERDAM	-4.0738	-2.3241
BRUXELLES	0.8581	0.9832
FRANCOFORTE	-1.4783	-0.1179
LONDRA	-5.6165	1.3988
MADRID	3.2610	1.5756
PARIGI	3.8936	1.8873
VIENNA	1.1378	0.9176
ZURIGO	3.0181	-3.3204



I pesi del portafoglio con soli titoli rischiosi appaiono ora meno plausibili: ad esempio, nel caso dell'indice londinese dovremmo prendere a prestito il 561% del nostro capitale, investirlo nell'indice e con il ricavato investire fino al 389% della ricchezza a nostra disposizione in un altro indice! Proprio la scarsa razionalità di un investitore di questo tipo ci induce ad altre ricerche, di cui si tratterà più approfonditamente nel cap. 5.

Come prima, per ogni titolo  $i$  possiamo calcolare performance di Sharpe, standard error di  $ps_{i,09}$ , intervallo di confidenza per  $ps_{i,09}$  al 95%:

Indice	$\hat{p}s_i$	$\hat{p}s_{i,09}$	$\hat{\sigma}_{ps_{i,09}}$	Int. di conf. per $ps_{i,09}$ al 95%
AMSTERDAM	0.047	0.087	0.089	[-0.090, 0.257]
BRUXELLES	0.081	0.130	0.089	[-0.043, 0.304]
FRANCOFORTE	0.058	0.116	0.089	[-0.058, 0.289]
LONDRA	0.021	0.034	0.088	[-0.139, 0.208]
MADRID	0.104	0.217	0.089	[0.041, 0.392]
PARIGI	0.079	0.150	0.089	[-0.024, 0.324]
VIENNA	0.133	0.149	0.089	[-0.025, 0.323]
ZURIGO	0.088	0.159	0.089	[-0.015, 0.334]
$ps_{*,09}$	0.217	0.407	0.008	[0.391, 0.424]

Le differenze di performance rispetto al metodo di calcolo non ponderato sono positive, il che significa che, assegnando maggior peso ai rendimenti più recenti, le performance di ogni indice migliorano, e ciò riflette l'andamento degli indici, che nella totalità dei casi hanno una forte impennata verso l'alto nell'ultima parte del *range* campionario. L'errore standard resta invece molto simile al caso precedente. Questo porta l'indice IBEX 35 di Madrid ad essere il più conveniente.

Vediamo ora la matrice di correlazione  $\hat{P}_{09}$  (tra parentesi i valori della matrice originale  $\hat{P}$ ).

$\hat{P}_{09}$ ( $\hat{P}$ )	NED	BEL	GER	U.K.	ESP	FRA	AUT	SWI
NED	1							
BEL	0.8773 (0.8186)	1						
GER	0.9288 (0.9029)	0.8185 (0.7399)	1					
U.K.	0.7340 (0.8095)	0.7850 (0.7267)	0.7613 (0.7914)	1				
ESP	0.7050 (0.7665)	0.6381 (0.6399)	0.7370 (0.7777)	0.6381 (0.7500)	1			
FRA	0.9166 (0.9020)	0.8326 (0.7543)	0.9719 (0.9025)	0.8092 (0.7885)	0.7537 (0.7991)	1		
AUT	0.6103 (0.6034)	0.7528 (0.6128)	0.6214 (0.5659)	0.9407 (0.6116)	0.6158 (0.5307)	0.6815 (0.5362)	1	
SWI	0.8787 (0.8208)	0.7441 (0.7452)	0.7796 (0.7591)	0.5130 (0.7550)	0.5217 (0.7107)	0.7175 (0.8026)	0.4923 (0.5829)	1

Come si nota, i valori di  $\hat{p}$  si mantengono alti, e spesso vicini ai valori originari.

#### 4.2.2 Test di confronto delle performance di Sharpe

Calcoliamo ora il test nel seguente modo:

$$\xi_{1-09} = \sqrt{T} \frac{\hat{p}^{s_{i,09}} - \hat{p}^{s_{j,09}}}{\hat{\sigma}_{a,09}}, \text{ che come prima sotto } H_0 \text{ si distribuisce}$$

asintoticamente come una normale standard. Si nota che in alcuni casi il test rifiuta l'ipotesi di uguaglianza al 5%, e in particolare nei confronti che interessano la performance dell'indice inglese (evidenziate in rosso).

$\xi_{1,185}$ (p-value)	NED	BEL	GER	U.K.	ESP	FRA	AUT
BEL	1.0609 (0.2887)						
GER	0.9487 (0.3428)	-0.2788 (0.7804)					
U.K.	-0.7654 (0.4440)	-1.6487 (0.0992)	-1.3247 (0.1853)				
ESP	1.9291 (0.0537)	1.1298 (0.2586)	1.5528 (0.1205)	2.3914 (0.0168)			
FRA	1.8131 (0.0698)	0.3773 (0.7059)	1.6200 (0.1052)	2.0964 (0.0360)	-1.0576 (0.29020)		
AUT	0.8302 (0.4064)	0.2934 (0.7692)	0.4304 (0.6669)	3.6588 (0.0002)	-0.8621 (0.3886)	-0.0151 (0.9879)	
SWI	1.7166 (0.0860)	0.4515 (0.6516)	0.7390 (0.4599)	1.4254 (0.1540)	-0.6541 (0.5130)	0.1393 (0.8892)	0.1160 (0.9076)

#### 4.2.3 Test di esclusione di titoli dai portafogli efficienti

Come nel caso della matrice di varianza non ponderata, poniamo  $I_0 = 5$ , escludendo dal portafoglio originario gli indici di Francoforte, Londra e Vienna. Vogliamo verificare  $H_0 : ps_{*09} - ps_{*0,09} = 0$  vs.  $H_1 : ps_{*09} - ps_{*0,09} > 0$ , dove  $ps_{*0,09}$  è la massima performance di Sharpe realizzabile con gli  $I_0 = 5$  titoli, considerando la matrice di varianze e covarianze ponderata. Ne risulta  $\hat{p}s_{*0,09} = 0.3092$ , e andiamo quindi a calcolare il test:

$$\xi_{2_{-09}} = T \frac{\hat{p}s_{*09}^2 - \hat{p}s_{*0,09}^2}{1 + \hat{p}s_{*0,09}^2}, \text{ che sotto } H_0 \text{ ha distribuzione asintotica}$$

$$\chi_{I-I_0}^2.$$

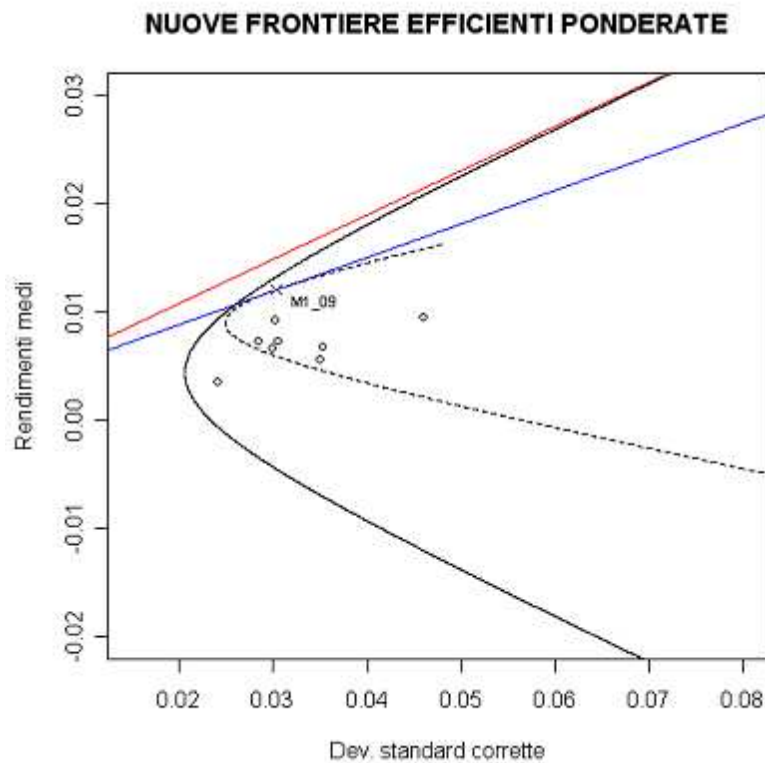
Sostituendo le quantità stimate, si ha:

$$\hat{\xi}_{2_{-09}} = 128 \frac{0.4073^2 - 0.3092^2}{1 + 0.3092} = 8.2128, \text{ valore che, confrontato con}$$

una distribuzione  $\chi_3^2$ , dà un p-value pari a 0.0418. Siamo quindi di fronte ad un valore limite, per il quale si rifiuta l'ipotesi di efficienza

del nuovo portafoglio ridotto a livello 5%, ma si può accettare a livello 1%. In sostanza, la perdita di performance di Scarpe non può essere considerata del tutto significativa.

Vediamo qui sotto le nuove frontiere efficienti senza e con titolo non rischioso (rispettivamente tratteggiate e in blu), oltre al nuovo portafoglio efficiente con titoli rischiosi  $M_{1,09}$ .



Come nel caso "classico", la frontiera efficiente con portafoglio ridotto non comprende l'indici FTSE100 di Londra, che però non è incluso all'interno del portafoglio stesso.

Il portafoglio  $M_{1,09}$  che ha rendimento medio  $\hat{\mu}_{M0\_09} = 0.0120$  e deviazione standard  $\hat{\sigma}_{M0\_09} = 0.0303$ . Ricaviamo anche il vettore dei pesi  $w_{i0\_09}$  del nuovo portafoglio ridotto, che confrontiamo con quelli non ponderati:

Indice	$W_{i0\_09}$	$W_{i0}$
AMSTERDAM	-1.7321	-1.6473
BRUXELLES	0.1374	0.7937
MADRID	1.0504	0.7254
PARIGI	0.5898	0.5655
ZURIGO	0.9544	0.5626

Le differenze riguardano in particolar modo gli indici di Bruxelles, la cui quota nel portafoglio diminuisce di molto, e di Zurigo, che al contrario ha un peso molto più rilevante nel nuovo portafoglio ridotto.

## Capitolo 5: Accontentarsi di $d^*$ ?

### No, grazie.

#### 5.1. Ricerca sulle quote nel portafoglio $M$

Si è visto che calcolare il vettore delle quote nel portafoglio  $M_{09}$ , utilizzando la matrice ponderata con il tasso di decadimento con massima verosimiglianza, non ha portato a risultati molto buoni, soprattutto per quanto riguarda la razionalità dell'investimento. Le percentuali trovate si sono rivelate poco plausibili, dato che prevedevano movimenti di capitali assai maggiori, sia in attivo che in passivo, della ricchezza disponibile.

Per questo, è se non altro opportuna una verifica empirica della validità della tecnica di calcolo utilizzata. Ovvero, è lecito aspettarsi quote quanto meno più "realistiche" utilizzando tassi di decadimento diversi per stimare la matrice di varianze e covarianze?

Allo scopo, eseguiamo una ricerca tra i diversi tassi, ovvero, tra tutti i pesi con cui ponderiamo la matrice, ricerchiamo quelli che forniscono le quote più plausibili, ossia più vicine a zero in valore assoluto.

Vediamo a seguire i risultati della ricerca: sono stati considerati tassi crescenti, con particolare attenzione per i valori più bassi, per non traviare eccessivamente le conclusioni del cap. 4.

**QUOTE NEL PORTAFOGLIO E MASSIME  
PERFORMANCE DI SHARPE PER DATI VALORI DI  $d$**

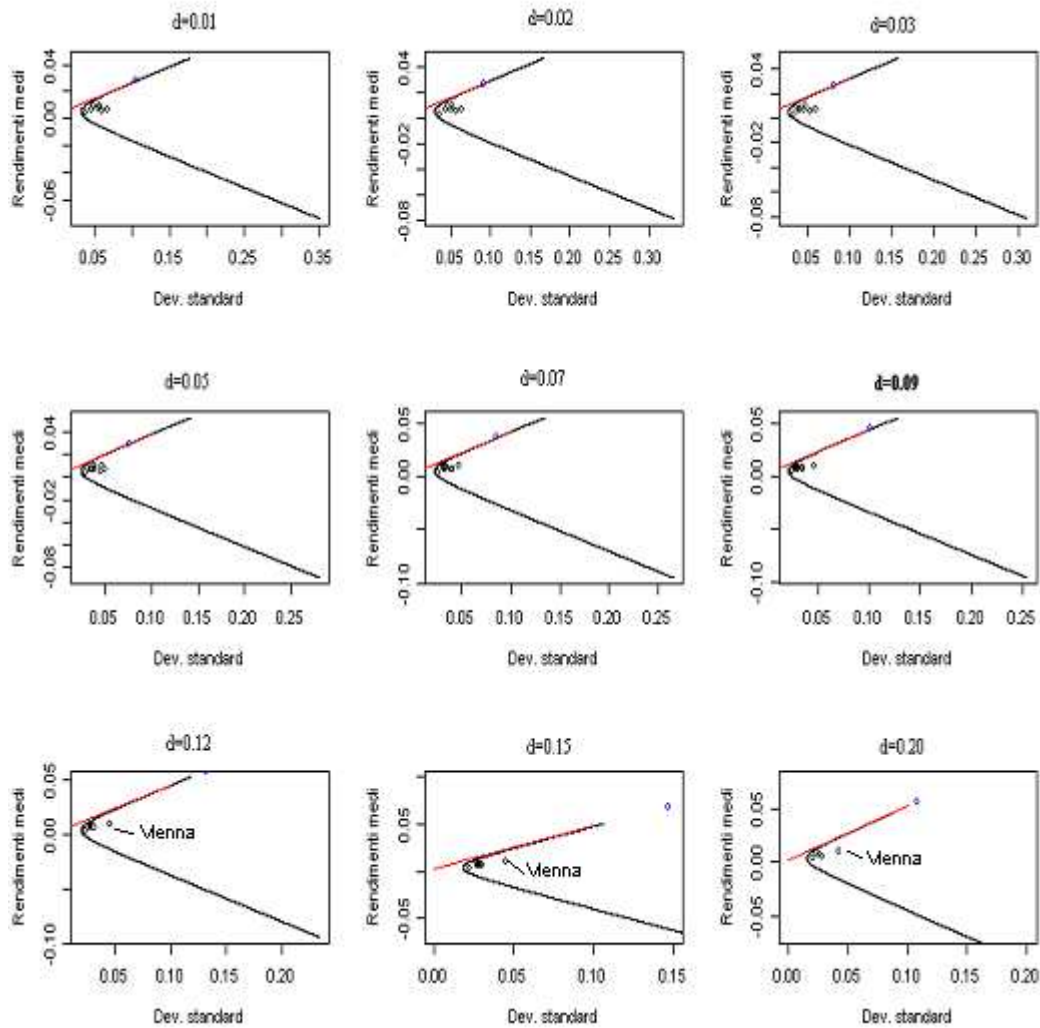
	$d=0.01$	$d=0.02$	$d=0.03$	$d=0.04$	$d=0.05$	$d=0.07$	<b><math>d=0.09</math></b>	$d=0.12$
NED	-2.1630	-2.1324	-2.1803	-2.2926	-2.4773	-3.0947	-4.0738	-6.3042
BEL	0.8749	0.8133	0.7801	0.7654	0.7666	0.8047	0.8581	0.9329
GER	-0.3042	-0.4875	-0.6608	-0.8112	-0.9366	-1.1628	-1.4783	-2.2656
U.K.	-3.0357	-2.9408	-2.9785	-3.1412	-3.4371	-4.3852	-5.6165	-7.5093
ESP	1.3816	1.4594	1.5966	1.7769	2.0009	2.5727	3.2610	4.3997
FRA	1.7073	1.8788	2.0832	2.3161	2.5777	3.1866	3.8936	5.0273
AUT	1.4732	1.1546	0.9250	0.7878	0.7358	0.8341	1.1378	1.8554
SWI	1.0658	1.2545	1.4346	1.5987	1.7701	2.2445	3.0181	4.8639
$\hat{\mu}_M$	0.0278	0.0269	0.0270	0.0279	0.0297	0.0357	0.0440	0.0590
$\hat{\sigma}_M$	0.1051	0.0908	0.0813	0.0765	0.0761	0.0850	0.1016	0.1316
$ps_*$	0.2388	0.2670	0.2991	0.3299	0.3553	0.3885	0.4073	0.4276

	$d=0.15$	$d=0.20$	$d=0.25$	$d=0.30$	$d=0.35$	$d=0.40$	$d=0.50$	$d=0.75$
NED	-8.7131	-9.3839	-8.4743	-7.9978	-7.8696	-7.9372	-8.3909	-9.7231
BEL	1.0128	0.9757	0.7712	0.4478	0.0044	-0.5125	-1.5189	-2.4210
GER	-2.7941	-1.5226	-0.0864	0.7474	1.3006	1.7494	2.5053	3.2872
U.K.	-8.3037	-5.7318	-3.2935	-2.1043	-1.5344	-1.2529	-1.0575	-1.0704
ESP	5.1350	4.2140	2.9447	2.1915	1.7388	1.4304	0.9730	0.0186
FRA	5.4523	3.5049	1.7901	0.9721	0.5438	0.2652	-0.0935	-0.0264
AUT	2.3970	1.7797	0.9285	0.4754	0.2522	0.1421	0.0627	0.0346
SWI	6.8137	7.1640	6.4197	6.2679	6.5641	7.1156	8.5198	10.901
$\hat{\mu}_M$	0.0687	0.0563	0.0407	0.0328	0.0290	0.0273	0.0265	0.0269
$\hat{\sigma}_M$	0.1472	0.1077	0.0655	0.0421	0.0287	0.0201	0.0098	0.0008
$ps_*$	0.4488	0.4982	0.5808	0.7135	0.9173	1.2252	2.4247	28.183

Come si può facilmente notare, la performance di Sharpe aumenta con  $d$ , mentre abbiamo un progressivo aumento della quota nel portafoglio dell'indice di Zurigo (fino al 1000% per  $d=0.75!$ ), e una contemporanea variazione negativa della percentuale dell'indice di Amsterdam.

Inoltre, vediamo che i rendimenti medi crescono fino a  $d=0.15$ , in cui il rendimento è massimo, e da qui iniziano a diminuire, mentre le deviazioni standard hanno un andamento oscillatorio, ma da  $d=0.15$  subiscono anch'esse un brusco calo, che fa impennare il valore della performance di Sharpe ottimale. Questo però avviene per valori di  $d$  molto alti, e poco indicativi nell'ambito di tale metodo di calcolo. Infatti, con  $d=0.75$ , la penultima osservazione più recente ha solo il 25% del peso dell'ultima, e così via per valori lontani dall'ultimo. Ecco che le osservazioni meno recenti hanno pesi praticamente nulli.

Per questo, ci concentriamo su valori bassi di  $d$  e facciamo un confronto tra le frontiere efficienti.



Le distribuzioni dei titoli nel piano media-varianza sono molto simili, l'unica deviazione standard che varia significativamente è quella dell'indice di Vienna, come già sottolineato in precedenza. Altra variazione importante è quella del portafoglio con soli titoli rischiosi, che ha rendimento e deviazione standard massime in  $d=0.15$ .

In definitiva, possiamo considerare il valore del tasso di decadimento  $d=0.15$  come spartiacque del comportamento del portafoglio con soli titoli rischiosi: da questo punto infatti le performance di  $M$  iniziano a crescere maggiormente per via del progressivo calo della deviazione standard.



## 5.2. Conclusioni

Concludiamo la relazione innanzitutto con un commento sul metodo di calcolo di  $\Sigma$  adottato. Se l'approccio "classico" media-varianza di Markowitz ha dato risultati soddisfacenti in termini di razionalità del portafoglio ottimale con soli titoli rischiosi, lo stesso non si può dire in termini di performance, e quindi di ottimizzazione dell'investimento, che con la ponderazione temporale dei rendimenti osservati ha fornito risultati migliori.

Tuttavia, in termini di plausibilità delle quote si nota che con tassi di decadimento bassi si ottengono percentuali in valore assoluto via via minore, e quindi "migliori" secondo il criterio di razionalità adottato.

Per cui possiamo concludere che il tasso di decadimento ottimale  $d^* = 0.09$ , ottenuto massimizzando la funzione di verosimiglianza del campione di rendimenti a nostra disposizione, si può considerare un giusto compromesso tra razionalità delle quote e efficienza in termini di performance. Sebbene l'approccio della Goldam, Sachs & Co. sia caratterizzato da alcune lacune empiriche, ad esempio nell'assunzione di normalità dei rendimenti realizzati, esso propone risultati alternativi e di sicuro interesse per un investitore.

## Riferimenti bibliografici

- R. Litterman e K. Winkelmann (1998), "Risk Management series – Estimating Covariance Matrices", Goldman Sachs
- S. Pastorello (2001), "Rischio e rendimento - Teoria finanziaria e applicazioni econometriche", Il Mulino
- G. M. Gallo e B. Pacini (2002), "Metodi quantitativi per i mercati finanziari: istruzioni per l'uso", Casa Editrice Carrocci, Firenze
- Appunti di Econometria dei Mercati Finanziari, prof. N. Cappuccio, Università degli Studi di Padova, AA. AA. 2000-2006
- L. Pace e A. Salvan (2001), "Introduzione alla statistica II – Inferenza, verosimiglianza, modelli", CEDAM

# Ringraziamenti

- Alla Goldman, Sachs & Co., e in particolare a R. Litterman e K. Winkelmann: la lodevole tecnicità del paper da loro scritto, soprattutto per quanto riguarda la formalizzazione, mi ha fatto sclerare per cercare di capire cosa intendessero e volessero, senza dimenticare le ultime notti insonni per correggere un erroraccio dell'ultimo minuto, che non era del tutto farina del mio sacco. Un sentito e accorato grazie.
- Al mio relatore, che un po' di sclerosi se l'è presa pure lui.
- Ai Proff. Masarotto, Pauli, Ventura e Coles per la consulenza su quel magnifico programma che è R.
- Ai miei compagni di università, che in questi ultimi giorni di lavoro frenetico mi hanno sopportato e compatito, e che ho ritrovato nelle allegre lezioni della specialistica. In particolare un doveroso grazie a: Martina, che mi ha prestato la sua tesi sulla quale ho elegantemente scritto sopra, evitando indicibili noie sull'impaginazione che mi avrebbero portato a una crisi nervosa ancora peggiore; Bissa e Pippo per le mangiate gorde alla Forcellini (presto tornerò tra voi), la baldoria ad algebra, le dimostrazioni spesso banali e le pause condite da puntini; Ciwa, mia compagna di laurea, ma molto più veloce e meno incasinata di me; Roby e Martina per le piacevoli serate condite da Jenga e Clerks (a casa loro); Camilla e Fede (un po' meno) per l'assistenza psicologica fornitami; Rocco e di nuovo Pippo per la consulenza R; tutti gli altri compagni di avventura che ora per la fretta dimentico, che ora si divertono con me alla specialistica.

- Alla Facoltà di Scienze Statistiche dell'Università degli Studi di Padova, che ha sapientemente inserito l'appello di laurea nella settimana degli esami, e soprattutto fissato il compitino la mattina seguente alle 9.30, così da non avere nemmeno il tempo di organizzare un festone celebrativo come si deve. Grazie davvero.
- Ai miei coinquilini Perini e Sammer per avermi sopportato in questi ultimi giorni di crisi mistica, e a tutti i compagni di mercoledì festosi: Bighin, Klismann, Papo, Pagan, Palo e tutti quelli che almeno una volta hanno dormito di quel porto di mare che è casa mia, letto, divano o pavimento che sia.
- Tutti quelli che in questi tre anni (trascorsi velocissimamente) hanno contribuito a questa laurea. Famiglia: mamma sempre attenta ai miei bisogni, papà che mi sostiene e (soprattutto) caccia quando serve, e alla cara sorella a cui dico brava, prenderai più di me, anche se il tuo voto è in centesimi (però ricordiamo che io sono dottore); amici tutti, compagni di avventura che furono, sono e saranno, amici secchioni, di cui sopra, che mi hanno salvato in più di un'occasione. Un saluto particolare al caro Lorè, che tante volte mi ha illuminato con i suoi saggi consigli, e che siamo impazienti di riavere tra noi, anche se di sicuro con qualche milione di neuroni in meno.