

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea Triennale in
Fisica

Modelli di Quintessenza
per l'Energia Oscura

Relatore:

Prof. Sabino Matarrese

Laureando:

Alexander Gigliotti

Anno Accademico 2022/2023

Indice

Introduzione	1
1 La Costante Cosmologica Λ	3
1.1 Analisi Dinamica del Modello Λ CDM	5
1.2 Problemi con la costante cosmologica	8
2 Campi Scalari canonici: Quintessenza	10
2.1 Introduzione alla Quintessenza e analisi dinamica generica	10
2.1.1 introduzione	10
2.1.2 analisi dinamica	12
2.2 Potenziale esponenziale singolo	15
2.2.1 Potenziale esponenziale doppio	20
2.3 Potenziale polinomiale	22
2.3.1 Potenziale polinomiale inverso	25
2.3.2 Potenziale polinomiale diretto	27
3 Limiti Osservativi sui Modelli di Quintessenza	30
Conclusioni	33
Bibliografia	34

Introduzione

L'accelerazione cosmica osservata per tempi tardivi della storia evolutiva dell'Universo (a partire da un redshift di circa ~ 0.46) è stata comprovata da un buon numero di studi indipendenti: dalla misura delle distanze luminose di Supernovae di Tipo Ia ad alto redshift, dallo spostamento dei picchi di anisotropie della temperatura nella radiazione cosmica di fondo (CMB), dalle oscillazioni acustiche barioniche (BAO) e dalla consistenza della stima teorica dell'età dell'Universo. Tale evidenza osservativa dell'esistenza di una nuova, diversa componente di energia con un'equazione di stato negativa (ovvero ipotizzando che tale componente si comporti come un fluido barotropico- $p = \omega\rho$, $\omega < 0$), chiamata Energia Oscura, si stima oggi essere la componente dominante della densità energetica relativa dell'Universo e che tale valore si aggiri attorno al 70% della densità di energia totale disponibile.

Per comprendere questa componente nel contesto di un modello cosmologico, se ne sono ipotizzate diverse descrizioni matematiche, messe poi alla prova da un'analisi dinamica del modello cosmologico ipotizzato. La teoria dei sistemi dinamici fornisce un utile per comprendere la dinamica globale di un qualsiasi modello cosmologico, in quanto quest'ultimo può essere scritto come un sistema di equazioni differenziali. Da tale sistema se ne ricavano i punti critici, e dall'analisi della stabilità degli stessi si ricavano le proprietà matematiche dello spazio delle fasi, corrispondendo quindi a delle precise proprietà fisiche del modello cosmologico analizzato. I modelli cosmologici descritti dalla teoria dei sistemi dinamici si suddividono in due principali categorie: quelli che nella loro descrizione dell'Universo tengono valida la descrizione dell'interazione gravitazionale della Relatività generale e quelli che invece ne propongono una modifica, che sia essa a livello geometrico (e.g. ridefinizione della metrica FLRW) o di altro tipo (e.g. modificazione della forma del tensore energia-impulso).

Tra i modelli che ritengono valida la Relatività Generale come descrizione generale dello spazio-tempo si può fare un'ulteriore distinzione tra i modelli matematici di energia oscura che non interagiscono con la materia oscura (tra questi si elencano il modello Λ CDM, i modelli canonici e non canonici di campo scalare, modelli di campi non scalari) e tra i modelli di energia oscura che invece ammettono un'interazione con questa. Tra i modelli che invece propongono delle modifiche alla teoria della Relatività Generale si possono annoverare le teorie di gravità scalare-tensoriale (ovverosia teorie di campo in cui sia campi scalari sia campi tensoriali possano descrivere una certa interazione) o le teorie di gravità $f(R)$.

In questa discussione, seguendo l'indicazione del titolo, verranno passati in rassegna i principali modelli di Quintessenza, ovvero i modelli dove l'energia oscura viene pensata come un campo scalare spazialmente omogeneo $\phi(t)$ con un potenziale $V(\phi)$ dipendente

da esso la cui forma regolerà la dinamica del campo nel tempo (quindi l'equazione di stato che regola la componente oscura non sarà più statica bensì dinamica), analizzandone le motivazioni della loro esistenza, le varie tipologie di modelli, e infine i suoi limiti imposti da vincoli osservativi.

Questa discussione si dividerà allora in 3 parti:

Il capitolo 1 tratterà la costante cosmologica Λ attraverso un'analisi dinamica di un Universo governato da tale costante e discutendone i relativi problemi che hanno portato a formulare diverse teorie matematiche circa l'origine dell'energia oscura.

Nel capitolo 2 verranno quindi trattati i diversi modelli di campo scalare a seconda della forma del potenziale attraverso un'analisi dinamica delle orbite nello spazio delle fasi. Si tratteranno i modelli canonici di quintessenza con potenziale esponenziale singolo (accennando al modello con potenziale esponenziale doppio) e con potenziale polinomiale (diretto e inverso).

Il capitolo 3 si occuperà invece di discutere i vari limiti osservativi dei modelli di quintessenza basandosi sulle stime dei parametri cosmologici ottenuti da osservazioni sperimentali e confrontandoli coi parametri cosmologici assunti in via teorica.

Capitolo 1

La Costante Cosmologica Λ

Il più semplice modello per descrivere l'Energia Oscura è rappresentato dalla costante cosmologica Λ , la quale può essere pensata come un fluido barotropico (fluido omogeneo con densità costante) con equazione di stato $\rho_\Lambda = -p_\Lambda$, ovvero con $\omega_\Lambda = \frac{p_\Lambda}{\rho_\Lambda} = -1$. Tale pressione negativa quindi sarebbe responsabile dell'espansione accelerata che osserviamo oggi.

Il modello cosmologico di un Universo in cui è prevista la presenza di una costante cosmologica è chiamato "Modello Λ CDM" ed è uno dei modelli che più si accordano con le osservazioni sperimentali, nel senso che il valore dei parametri cosmologici previsti da questa teoria sono molto compatibili con le stime ottenute a partire dai dati raccolti dalle osservazioni [1].

Le ultime osservazioni astronomiche effettuate da PLANCK e da osservazioni di Supernovae di Tipo Ia hanno portato alla conclusione che circa il 70% della densità relativa di energia sul totale disponibile dell'Universo è sottoforma di energia oscura, fornendo come stime del parametro di densità di energia il valore $\Omega_\Lambda^0 = 0.6889 \pm 0.0056$ [5] che ne caratterizza la quantità presente oggi, e la sua equazione di stato pari a $\omega = -1.04 \pm 0.10$ [5], risultato ben compatibile con il valore $\omega_\Lambda = -1$ assunto in via teorica. A partire dal valore stimato di Ω_Λ^0 e del Parametro di Hubble pari a $H_0 = 67.66 \pm 0.42 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ si può dare una stima del valore che la costante cosmologica debba assumere per essere consistente con le osservazioni effettuate:

$$\Lambda \simeq 10^{-52} \text{ m}^{-2}$$

La Costante Cosmologica Λ è spesso discussa in un contesto di Universo piatto (le osservazioni più recenti forniscono la stima della densità energetica della curvatura pari a 0.0007 ± 0.0037 [5], ne consegue che l'Universo oggi, stando al modello Λ CDM, è molto vicino ad avere curvatura nulla); nelle discussioni a seguire, in un contesto in cui sia presente la costante cosmologica Λ sarà sempre assunto $k = 0$.

Le equazioni di campo di Einstein con l'introduzione di tale costante diventano:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

$$3H^2 = \kappa^2 \rho + \Lambda \quad (1.2)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\kappa^2 p + \Lambda \quad (1.3)$$

Un Universo dominato dalla costante cosmologica andrà incontro ad un'eterna espansione accelerata. Infatti siano $\rho = 0$, $p = 0$ (ovvero vengono trascurati i contributi di tutti gli altri elementi di materia) l'equazione che regola l'evoluzione del fattore di scala cosmica diventa:

$$3H^2 = \Lambda \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad \rightarrow \quad \int \frac{da}{a} = \int \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} dt$$

$$\Rightarrow a(t) \propto e^{Ht} \quad \text{con} \quad H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad (1.4)$$

La (1.4) è nota come soluzione di *de Sitter*: in una tale soluzione il fattore di scala cosmico si espande esponenzialmente, ciò significa che $\ddot{a}(t) > 0 \quad \forall t$ e l'Universo si troverà perennemente in una fase di accelerazione. Le conseguenze fisiche di questa soluzione non la rendono un modello realistico per la descrizione dell'Universo (una fase precedente dominata dalla radiazione seguita da una dominata dalla materia doveva esserci stata per forza per giustificare la presenza odierna delle LSS -ovverosia strutture di larga scala-, che altrimenti non sarebbero riuscite a formarsi se le forze di repulsione reciproche tra i componenti dell'Universo dovute alla sua espansione avessero prevalso sulle forze gravitazionali responsabili dell'aggregazione della materia) [1].

Se la soluzione di *de Sitter* non può essere usata per descrivere tutta la storia dell'Universo, può però essere interpretata come soluzione asintotica nel passato primordiale e nel futuro. Una dinamica dell'Universo che da un periodo sufficientemente lungo di dominazione della materia passa ad una espansione alla *de Sitter* potrebbe invece risultare in buon accordo con quanto osservato fino ad oggi. Dato che la soluzione di espansione infinita (1.4) può essere considerata solamente un'approssimazione dell'evoluzione in tempi tardivi dell'Universo, per calcolare l'andamento del fattore di scala cosmico $a(t)$ per tutta la storia dell'Universo bisogna tornare invece alle equazioni di campo (1.2)-(1.3) e risolverle per a tenendo conto dei contributi di materia e radiazione ($\rho = \rho_m, \rho_r$, $\rho > 0$, $p = \omega\rho$, $\omega = 0, 1/3$), imponendo la condizione iniziale $a(0) = 0$ si ottiene [1]:

$$a(t) \propto [\sinh(Ct)]^{\frac{2}{3(\omega+1)}} \quad (1.5)$$

Analizzandone i comportamenti asintotici:

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(\omega+1)}} \quad \text{per } t \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

$$a(t) \propto \exp\left(\frac{2Ct}{3(\omega+1)}\right) \quad H = \frac{2C}{3(\omega+1)} \quad \text{per } t \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

La soluzione riproduce correttamente i comportamenti asintotici previsti da un Universo dominato in tempi passati dalla materia e in tempi futuri dall'Energia Oscura, infatti per $t \rightarrow 0$ il fattore di scala cosmico rappresenta l'evoluzione dell'espansione dell'Universo in presenza della sola materia (radiazione o materia, $\omega = 0, 1/3$), per $t \rightarrow \infty$ tale fattore ha un andamento esponenziale, che è proprio l'andamento della soluzione di *de Sitter*. Il modello ha come unica limitazione il fatto che non è un modello che contempla la presenza di due fluidi di materia ordinaria: il modello può descrivere bene una transizione materia

→ energia oscura o radiazione → energia oscura, ma non radiazione → materia. Tale dettaglio non sarà limitante per la nostra analisi in quanto noi ci focalizzeremo solamente sulla transizione che si sta osservando al tempo presente (e che continuerà ad avvenire nei tempi futuri) materia → energia oscura.

1.1 Analisi Dinamica del Modello Λ CDM

In questa sezione analizzeremo il modello Λ CDM da un punto di vista dinamico, ovvero partendo dalle equazioni di campo (1.2)-(1.3) introdurremo delle variabili dinamiche (che rappresenteranno quantità fisiche osservabili sperimentalmente) e studieremo il sistema di equazioni differenziali nello spazio delle fasi utilizzando le tecniche ereditate dallo studio dei sistemi dinamici (teoria lineare, metodo di Lyapunov etc...). Ciò significa tradurre un problema fisico (determinare l'evoluzione dell'Universo attraverso il susseguirsi delle varie epoche) in un problema matematico (determinazione degli equilibri del sistema di equazioni differenziali e determinazione delle orbite nello spazio delle fasi che meglio riproducono il modello scelto). Per far sì che avvenga questa corrispondenza bisogna richiedere delle proprietà matematiche ben definite per gli equilibri che rappresentano situazioni fisiche interessanti (dominazione della materia, dell'Energia Oscura).

I nodi instabili saranno degli attrattori nel passato (per $t \rightarrow -\infty$) e quindi verranno considerati come le epoche primordiali dell'evoluzione dell'Universo, i nodi stabili rappresentano gli attrattori nel futuro e quindi verranno considerati il futuro dell'Universo, i punti di sella rappresenteranno invece le epoche di dominazione della materia o della radiazione in quanto non rappresentano né l'epoca iniziale né l'epoca finale dell'evoluzione dell'Universo. \square

In questo modello dinamico l'energia oscura è descritta come un fluido ad energia costante $\rho_\Lambda = \Lambda/\kappa^2$ con $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, ovvero con $\omega_\Lambda = -1$ e la materia oscura è trattata come una componente di materia ordinaria non relativistica ($\omega_{dm} = 0$).

Mostriamo come tale modello può prevedere una epoca iniziale dominata dalla radiazione seguita da un'epoca dominata dalla materia e successivamente un'epoca tardiva in cui viene a dominare l'energia oscura.

Le equazioni di campo considerando sia la materia ordinaria sia la radiazione ($p_r = \rho_r/3$, $p_m = 0$) diventano:

$$3H^2 = \kappa^2 \rho_m + \kappa^2 \rho_r + \Lambda \quad (1.8)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{\kappa^2}{3}\rho_r + \Lambda \quad (1.9)$$

Da tale sistema di equazioni possiamo definire le variabili (chiamate "variabili di espansione normalizzata", EN)

$$x = \Omega_m = \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2} \quad y = \Omega_r = \frac{\kappa^2 \rho_r}{3H^2} \quad \Omega_\Lambda = \frac{\kappa^2 \rho_\Lambda}{3H^2} \quad (1.10)$$

Che significano rispettivamente la densità relativa energetica di materia, di radiazione e della costante cosmologica rispetto alla densità di energia totale $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda = 3H^2/\kappa^2$.

Dal fatto che $\rho_m, \rho_r > 0$ segue che $x, y > 0$ e la dinamica si svolge nel primo quadrante del piano (x, y) . Riscrivendo l'equazione di Friedmann otteniamo il vincolo:

$$1 = x + y + \Omega_\Lambda$$

Quest'ultima equazione ci permette di riscrivere Ω_Λ in funzione delle altre due variabili: esprimeremo il sistema di equazione differenziale soltanto in funzione di x e y . Assumendo la costante cosmologica Λ positiva, si avrà $\Omega_\Lambda \geq 0$ e quindi deve valere $x + y \leq 1$. Tali considerazioni vincolano lo spazio delle fasi ad un triangolo definito dai vertici $(x, y) = (0, 0), (0, 1), (1, 0)$, il quale è mostrato in figura (1.1) [1].

Per ottenere il sistema di equazioni differenziali dobbiamo calcolare le derivate rispetto al tempo delle coordinate x e y : per farlo deriviamo rispetto a $N = \log(a)$ che è una variabile temporale adimensionale, allora $N = Ht \rightarrow dN = Hdt$.

$$x' = \frac{dx}{dN} = \frac{1}{H} \frac{dx}{dt} = \frac{\kappa^2 \dot{\rho}_m}{3H^3} - \frac{2\kappa^2 \rho_m \dot{H}}{3H^2} = x(3x + 4y - 3) \quad (1.11)$$

$$y' = \frac{dy}{dN} = \frac{1}{H} \frac{dy}{dt} = \frac{\kappa^2 \dot{\rho}_r}{3H^3} - \frac{2\kappa^2 \rho_r \dot{H}}{3H^2} = y(3x + 4y - 4) \quad (1.12)$$

L'ultimo passaggio nelle due eguaglianze è stato fatto basandosi su due considerazioni: la prima è che la materia oscura e la radiazione non interagiscono tra loro, quindi le equazioni differenziali delle evoluzioni temporali delle rispettive densità di energia sono disaccoppiate, la seconda è che possiamo usare l'equazione dell'accelerazione (1.9) per scrivere \dot{H}/H^2 in funzione di x, y e Ω_Λ :

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\rho}_m = -3H\rho_m = -3H\left(\frac{3H^2x}{\kappa^2}\right) \quad (1.13)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\rho}_r = -4H\rho_r = -4H\left(\frac{3H^2y}{\kappa^2}\right) \quad (1.14)$$

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2} - \frac{\kappa^2 \rho_r}{6H^2} + \frac{\Lambda}{2H^2} = -\frac{1}{2}(3 - y - 3\Omega_\Lambda) \quad (1.15)$$

Il sistema di equazioni differenziali (1.11)-(1.12) è definito per valori di $H \neq 0$, la condizione $H = 0$ corrisponderebbe però alla situazione di un Universo statico, ipotesi scartata nella formulazione del modello Λ CDM. Tale sistema rappresenta quindi il nostro modello cosmologico con la presenza di una costante cosmologica Λ positiva e con parametro di equazione di stato $\omega_\Lambda = -1$.

Il sistema ha due sottovarietà invarianti: $x = 0$ e $y = 0$ (ogni orbita con dato iniziale sulla sottovarietà rimarrà nella sottovarietà per tutti i tempi), rendendo così lo spazio delle fasi compatto.

Per trovare i punti critici si pone $(x', y') = (0, 0)$, il sistema ne ha tre: $O = (0, 0)$, $R = (0, 1)$, $M = (1, 0)$. I rispettivi autovalori della Jacobiana del sistema calcolata nei punti O, R, M sono $\{-4, -3\}$ in O , $\{1, 4\}$ in R e $\{-1, 3\}$ in M , da tali valori si ricava che O è un nodo stabile, R un nodo instabile e M un punto di sella.

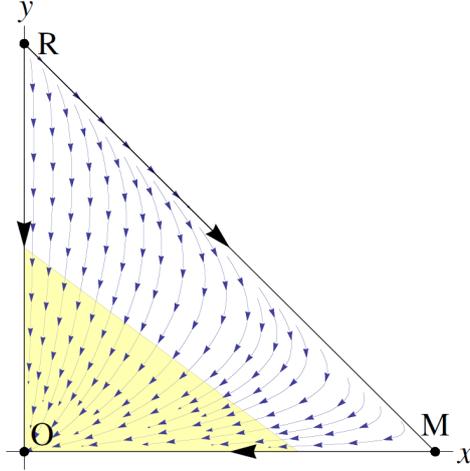


Figura 1.1: Ritratto in fase del sistema di equazioni differenziali (1.11)-(1.12). Figura presa da [1]

L'equazione di stato efficace si definisce come:

$$\omega_{\text{eff}} = \frac{p_{\text{tot}}}{\rho_{\text{tot}}} = \omega_{\text{m}}\Omega_{\text{m}} + \omega_{\text{r}}\Omega_{\text{r}} + \omega_{\Lambda}\Omega_{\Lambda} = \frac{1}{3}y + (-1)(1 - x - y) = -1 + x + \frac{4}{3}y$$

e vale -1 in O , $1/3$ in R e 0 in M , ciò va a significare che i punti O, R, M corrispondono rispettivamente ad un Universo dominato dalla costante cosmologica, dalla radiazione e dalla materia.

Dalla figura (1.1) si può notare che ogni orbita dello spazio delle fasi comincia dal punto R per $N \rightarrow -\infty$ e finisce nel punto O per $N \rightarrow \infty$. Le uniche eccezioni sono rappresentate dalle orbite che connettono $M-O$ e $R-M$ che rappresentano rispettivamente le evoluzioni di un Universo senza fase di dominazione della radiazione ($\Omega_{\text{r}} = 0$) e di un Universo senza la costante cosmologica ($\Omega_{\Lambda} = 0$). Osserviamo che per ogni orbita con dato iniziale nello spazio delle fasi l'Universo è dominato dalla radiazione per $a \rightarrow 0$ ($N \rightarrow -\infty$) mentre l'Universo è dominato dall'Energia Oscura per $a \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$). La regione in giallo nello spazio delle fasi rappresenta i punti dove $\omega_{\text{eff}} < 1/3$: questa è la condizione affinché l'Universo sia sottoposto ad un'espansione accelerata (dall'equazione dell'accelerazione si ottiene $\ddot{a}/a = -\kappa^2\rho(1 + \omega_{\text{eff}})/6$ e $\ddot{a} < 0$ solo se $\omega_{\text{eff}} < 1/3$): tutte le orbite, presto o tardi, entreranno in questa regione e porteranno inevitabilmente all'espansione accelerata prevista.

Un'orbita particolarmente interessante è l'eteroclina $R \rightarrow M \rightarrow O$: il tratto $R \rightarrow M$ implica una costante cosmologica nulla, invece noi sappiamo che dalle osservazioni sperimentali il valore della costante cosmologica non è nullo, bensì estremamente piccolo; ci aspettiamo quindi che l'orbita che meglio concorda coi dati osservativi passi molto vicino al tratto $R \rightarrow M$. Stesso discorso vale anche per il tratto $M \rightarrow O$: questa orbita rappresenta l'assenza completa di radiazione nell'ultima fase di evoluzione dell'Universo, ma noi sappiamo che -seppur molto piccola- la densità relativa di energia della radiazione non è nulla ($\Omega_{\text{r}} \sim 10^{-5}$); l'orbita cercata passerà dunque molto vicino al tratto $M \rightarrow O$. Un'orbita come appena definita rappresenterebbe esattamente l'evoluzione prevista dal modello Λ CDM dell'Universo così com'è osservato oggi.

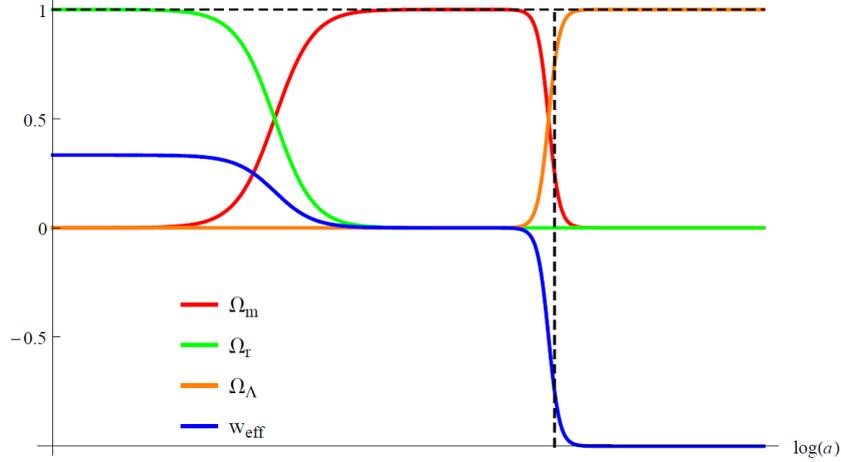


Figura 1.2: Evoluzione temporale dei diversi parametri $\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda$ insieme all'equazione di stato w_{eff} nel modello Λ CDM. La linea verticale tratteggiata rappresenta il tempo presente. Figura presa da [1]

In figura (1.2) sono tracciate le evoluzioni temporali dei vari parametri cosmologici del modello Λ CDM ($\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda$) insieme all'equazione di stato efficace w_{eff} . Come suggerito anche dalle osservazioni sperimentali, la transizione materia-energia oscura sta avvenendo al tempo presente, e sempre al tempo presente le densità relative di energia di energia oscura e materia sono circa ~ 0.7 e ~ 0.3 rispettivamente, in ottimo accordo con le stime fornite dalle osservazioni cosmologiche descritte nel capitolo ??.

Concludiamo l'analisi dinamica del modello Λ CDM facendo un'ultima osservazione: la scelta dell'orbita che meglio si accorda con le stime dei parametri osservati si è basata sul valore della costante cosmologica $\Lambda \sim 10^{-52} \text{ m}^{-2}$. Dalla figura (1.1) si può ben notare che se il valore di Λ fosse anche solo leggermente diverso da quello osservato, l'orbita in accordo con tale nuovo valore di Λ avrebbe un percorso decisamente diverso, più distante dalla retta $y = 1 - x$ e che porterebbe immediatamente ad una transizione radiazione-energia oscura, senza passare per l'epoca di dominazione della materia. Ovviamente questo nuovo modello di evoluzione dell'Universo è incompatibile con l'Universo che osserviamo oggi in quanto non si sarebbero formate in questo caso le strutture di larga scala (LSS).

Questa estrema delicatezza del valore di Λ in relazione alla descrizione dell'evoluzione dell'Universo rappresenta il problema di *fine tuning*, una delle principali problematiche legate al modello Λ CDM.

1.2 Problemi con la costante cosmologica

Due sono i problemi principali che implica l'introduzione della costante cosmologica in un modello cosmologico: il problema del *fine tuning* e della coincidenza cosmica.

Essendo tale costante presente nelle equazioni di campo di Einstein (1.1) fisicamente rappresenta la densità di energia nello spazio vuoto, la stessa quantità che in teoria dei campi viene attribuita all'energia di punto zero del campo permeante lo spazio-tempo. La densità di energia del campo nel suo stato fondamentale è $\rho_{\text{vac}}^{\text{QM}} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \sqrt{k^2 + m^2} d^3k \sim k^4$ [4]. Tale integrale è divergente, usando invece come limite la scala di Planck -ovvero

trascurando nell'integrale tutte le lunghezze d'onda inferiori alla lunghezza di Planck- allora $\rho_{\text{vac}}^{\text{QM}} \sim 10^{76} \text{ GeV}^4$, il ché risulta 123 ordini di grandezza più grande dell'attuale valore osservato $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4$.

Il secondo problema è la coincidenza cosmica: il valore così piccolo della costante cosmologica è esattamente quello necessario al fine di avere un periodo sufficientemente lungo di dominazione della materia oscura e di consentire che la transizione materia-energia oscura avvenga esattamente al tempo presente (o meglio, nel relativamente breve lasso di tempo in cui l'umanità esiste sulla faccia della Terra), mentre se fosse $\rho_\Lambda < -10^{-43} \text{ GeV}^4$ ($\Lambda < 0$) si assisterebbe ad una forza attrattiva che causerebbe il collasso dell'Universo prima che evolva nella struttura che conosciamo oggi, se fosse invece $\rho_\Lambda > 10^{-43} \text{ GeV}^4$ ($\Lambda > 0$) la grande forza repulsiva generata accelererebbe così tanto l'espansione dell'Universo da impedire che la forza gravitazionale generi le strutture cosmiche che oggi osserviamo [4].

Capitolo 2

Campi Scalari canonici: Quintessenza

2.1 Introduzione alla Quintessenza e analisi dinamica generica

2.1.1 introduzione

In questo capitolo ci occuperemo di discutere i modelli di Energia Oscura pensata come un campo scalare. A differenza del modello Λ CDM, i modelli di campo scalare forniscono una descrizione dinamica dell'Energia Oscura, permettendo all'equazione di stato ω_ϕ di variare nel tempo. Infatti, sebbene i dati osservativi vincolano fortemente il valore presente dell'equazione di stato ω_ϕ , poco dicono sull'evoluzione temporale dello stesso, fornendo così una moltitudine di ipotesi su come tale quantità possa essersi evoluta nel tempo [1]. I modelli basati su un campo scalare canonico con l'obiettivo di dare un'origine dinamica all'espansione accelerata dell'Universo in tempi tardivi della sua evoluzione vengono comunemente chiamati modelli di *Quintessenza*.

Per descrivere un generico modello di Quintessenza si introduce un campo scalare $\phi(\vec{x}, t) = \phi(t)$ spazialmente omogeneo e variabile nel tempo, che sia dotato di una massa (definita come $m_\phi^2 = d^2V(\phi)/d\phi^2$, estremamente piccola, stimata essere $|m_\phi| \lesssim H_0 \approx 10^{-33}$ eV [7], in modo tale da interagire molto debolmente con l'interazione gravitazionale) e supposto "scivolare" lungo questo potenziale fino a raggiungere il suo minimo. L'azione di tale campo sarà:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_\phi \right) \quad (2.1)$$

Dove R è lo scalare di Ricci, $\sqrt{-g}$ è il determinante della metrica e \mathcal{L}_m è la (densità) lagrangiana dei campi di materia (e.g. barioni, ...). La Lagrangiana del generico campo scalare ϕ si definisce come:

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (2.2)$$

Con $V(\phi)$ il potenziale del campo.

Variando l'azione (2.1) rispetto a $g^{\mu\nu}$ si ottengono le equazioni di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa^2 (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\phi)}) \quad (2.3)$$

Si definisce il tensore energia-impulso per un campo scalare canonico come:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial\phi^2 - g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (2.4)$$

con $\partial\phi^2 = g_{\alpha\beta} \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi$. Per derivare le equazioni differenziali descrittive l'evoluzione del modello cosmologico in questione bisogna chiedere che lo spazio tempo (assunto piatto, $k = 0$) su cui si sta lavorando sia ben descritto dalla metrica FLRW e che tutte le componenti di materia si comportino come dei fluidi perfetti con equazione barotropica $p = \omega\rho$. Allora dall'equazione di campo (2.3) si derivano l'equazione di Friedmann e dell'accelerazione:

$$3H^2 = \kappa^2 \left(\rho + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (2.5)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\kappa^2 \left(\omega\rho + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right) \quad (2.6)$$

Variando invece l'azione (2.1) rispetto al campo ϕ si ottiene l'equazione di Klein-Gordon:

$$\square\phi - V_{,\phi} = 0 \quad (2.7)$$

che può essere riscritta come

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \quad (2.8)$$

Si possono quindi definire la densità di energia e la pressione del campo scalare canonico:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \quad (2.9)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V \quad (2.10)$$

Allora l'equazione di stato del campo scalare si esprime come:

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V} \quad (2.11)$$

A differenza dell'equazione di stato per la materia ordinaria questa può cambiare col tempo: quando l'energia cinetica $(1/2)\dot{\phi}^2$ domina sull'energia potenziale $V(\phi)$ allora $\omega_\phi = 1$, quando è invece l'energia potenziale a dominare sulla cinetica si ottiene $\omega_\phi = -1$. Considerate le due situazioni estremali (completa dominazione di una forma di energia sull'altra) per tutti gli altri casi si ottengono valori dell'equazione di stato in mezzo a questi due estremi, $\omega_\phi \in [-1, 1]$: questa è una caratteristica peculiare dei modelli di Quintessenza.

La condizione per realizzare l'espansione accelerata dell'Universo è $\omega_\phi < -1/3$, quindi da (2.11) si ha $\dot{\phi} < V(\phi)$. Ciò significa richiedere che il potenziale scalare sia abbastanza piatto in modo tale che il campo ϕ "scivoli" piano su di esso [3]. Nel limite $\dot{\phi} \ll V(\phi)$ si ottengono rispettivamente da (2.8) e (2.11) le relazioni approssimate $3H\dot{\phi} + V_{,\phi} \approx 0$ e $3H^2 \approx \kappa^2 V(\phi)$ [6]. Allora l'equazione di stato del campo scalare si esprime come [6]:

$$\omega_\phi \approx -1 + \frac{2}{3} \epsilon_s \quad \epsilon_s = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{\kappa V} \right)^2 \quad (2.12)$$

Dove ϵ_s è chiamato parametro *slow roll* e durante l'espansione accelerata dell'Universo assume valori molto più piccoli dell'unità, $\epsilon_s \ll 1 \mapsto \omega_\phi \rightarrow -1$ [3, 6].

2.1.2 analisi dinamica

L'obiettivo di questa sezione è cercare di trasformare le equazioni (2.5), (2.6) e (2.8) in un sistema chiuso autonomo di equazioni differenziali. Al fine di ottenere ciò si definiscono le variabili EN :

$$x = \frac{\kappa\dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \quad y = \frac{\kappa\sqrt{V}}{\sqrt{3}H} \quad (2.13)$$

Si assumerà quindi che il potenziale scalare V sia positivo in modo tale da ottenere delle soluzioni fisicamente sensate, allora $y \geq 0$ per valori di H positivi. Si noti come le variabili appena definite non coincidano con le variabili definite in (1.10).

Usando queste variabili l'equazione di Friedmann (2.5) diventa:

$$1 = \Omega_m + x^2 + y^2 \quad (2.14)$$

con $\Omega_m = \kappa^2\rho/3H^2$ la densità relativa energetica della materia. Se si richiede $\Omega_m + \Omega_\phi = 1$ allora:

$$0 \leq \Omega_\phi = x^2 + y^2 \leq 1 \quad (2.15)$$

dove x^2 rappresenta la densità di energia relativa dell'energia cinetica del campo scalare ϕ e dove y^2 rappresenta quella dell'energia potenziale. Il limite superiore di (2.15) viene dal fatto che Ω_m non può essere negativo. L'equazione di stato del campo scalare in queste variabili può essere scritta come:

$$\omega_\phi = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (2.16)$$

Nel limite $x \ll y$ si ottiene $\omega_\phi \simeq -1$ mentre per $x \gg y$ si ha $\omega_\phi \simeq 1$. Dall'equazione (2.15) si nota come man mano che ci si allontana dall'origine dello spazio delle fasi l'energia del campo scalare aumenta. L'origine corrisponde quindi ad un Universo completamente dominato dalla materia ordinaria ($\Omega_m = 1$). L'equazione di stato efficace dell'Universo è data da:

$$\omega_{\text{eff}} = \frac{p_{\text{tot}}}{\rho_{\text{tot}}} = \omega_m\Omega_m + \omega_\phi\Omega_\phi = x^2 - y^2 + \omega(1 - x^2 - y^2) \quad (2.17)$$

Questo parametro è di fondamentale importanza nell'analisi dinamica dei modelli cosmologici di campo scalare in quanto ci dice se l'Universo è sottoposto ad un'espansione accelerata ($\omega_{\text{eff}} < -1/3$) o meno: se $x = y = 0$ allora $\omega_{\text{eff}} = \omega$ e l'Universo è dominato dalla materia ordinaria, se $x = \pm 1$ e $y = 0$ allora $\omega_{\text{eff}} = 1$ e l'Universo è dominato dall'energia cinetica del campo, se $x = 0$, $y = 1$ allora $\omega_{\text{eff}} = -1$ e l'Universo è dominato dall'energia potenziale del campo, quest'ultimo comportandosi come se fosse dominato da una costante cosmologica portando all'espansione accelerata alla *de Sitter*.

Lo spazio delle fasi è limitato dalla condizione espressa in (2.15), includendo anche la richiesta sul segno del potenziale fatta precedentemente si ottiene che lo spazio delle fasi è contenuto nel semicerchio di raggio unitario centrato nell'origine e confinato nella regione $y > 0$.

Scrivendo l'equazione dell'accelerazione nelle nuove variabili EN si ottiene:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2}[(\omega - 1)x^2 + (\omega + 1)(y^2 - 1)] \quad (2.18)$$

Integrandola si ottiene la mappa del flusso di $a(t)$ data la condizione iniziale (x_0, y_0) al tempo t_0 nello spazio delle fasi:

$$a(t) \propto (t - t_0)^{\frac{2}{3(\omega+1)(1-x_0^2-y_0^2)+2x_0^2}} \quad (2.19)$$

Essa corrisponde ad una soluzione il cui fattore di scala cosmico evolve come una potenza del tempo cosmologico t , e questo vale per ogni punto critico dello spazio delle fasi. Tale soluzione è in accordo con le interpretazioni fisiche delle variabili x, y : se $x_0 = y_0 = 0$ allora $a(t) = t^{\frac{2}{3(\omega+1)}}$ evolvendosi come se l'Universo fosse dominato dalla materia, se invece $x = 0$ e $y_0 = 1$ allora il denominatore si annulla e il fattore di scala si evolve esponenzialmente, costringendo il valore di H a rimanere costante ($\dot{H} = 0$ dall'eq. (2.18)). Ciò significa che anche se non si potrà derivare analiticamente una soluzione per tutti i tempi per cui è definita, se ne possono ricavare invece delle stime asintotiche, fornite dal suo comportamento attorno ai punti critici (che è ben definito).

Per ottenere infine il sistema di equazioni differenziali si calcolano le derivate delle variabili x, y rispetto alla variabile temporale adimensionale $N = \log a = Ht$, facendo poi riferimento alle equazioni (2.18) e (2.8) dell'accelerazione e di Klein-Gordon espresse nelle variabili EN si ottiene:

$$x' = -\frac{3}{2} \left(2x + (\omega - 1)x^3 + x(\omega + 1)(y^2 - 1) - \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda y^2 \right) \quad (2.20)$$

$$y' = -\frac{3}{2} y \left((\omega - 1)x^2 + (\omega + 1)(y^2 - 1) - \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda x \right) \quad (2.21)$$

Dove è stata definita la variabile dinamica

$$\lambda = -\frac{V_{,\phi}}{\kappa V} = -\sqrt{2\epsilon_s} \quad (2.22)$$

Il sistema di equazioni (2.20)-(2.21) non è in generale un sistema *chiuso* di equazioni differenziali in quanto la variabile λ contiene ancora una dipendenza esplicita del campo ϕ . Per chiudere tale sistema si procede in questo modo: si scrive l'equazione differenziale anche per l'evoluzione di λ :

$$\lambda' = -\sqrt{6}(\Gamma - 1)\lambda^2 x \quad (2.23)$$

Dove si è definito il parametro:

$$\Gamma = \frac{VV_{,,\phi}}{V_{,\phi}^2} \quad (2.24)$$

Se la funzione $\lambda(\phi)$ è invertibile in modo tale da ottenere $\phi(\lambda)$ allora è possibile scrivere Γ come funzione di λ , $\Gamma(\phi(\lambda))$, e il sistema di equazioni (2.20)-(2.21) insieme a (2.23) è chiuso e autonomo rispetto a ϕ .

Si osservi come le proprietà fenomenologiche dell'Universo, come le densità relative di energia del campo scalare in (2.15), la sua equazione di stato in (2.16) e l'equazione di stato efficace in (2.17), sono tutte indipendenti da λ . Questo significa che diversi modelli di quintessenza, vale a dire diverse scelte di potenziale scalare, non cambiano direttamente le proprietà fisiche dell'Universo. E' solamente attraverso l'evoluzione temporale delle variabili dinamiche x, y che si può osservare una differenza tra i vari modelli. Se due

potenziali diversi portano alla stessa dinamica qualitativa per le variabili EN allora gli Universi descritti dai due modelli saranno fisicamente indistinguibili. [1]

Concludiamo con il discutere le varie simmetrie del sistema di equazioni (2.20)-(2.21) insieme a (2.23): c'è una sottovarietà invariante a $y = 0$, inoltre tale sistema è invariante sotto la trasformazione $y \rightarrow -y$ (la scelta del potenziale $V > 0$ è arbitraria in quanto anche scegliendolo di segno opposto la dinamica rimane identica) e sotto la trasformazione simultanea $x \rightarrow -x, \lambda \rightarrow -\lambda$.

Dopo un'introduzione generale ai modelli canonici di Quintessenza analizziamo ora nel dettaglio i modelli di potenziale esponenziale e polinomiale: entrambi partono dalle equazioni differenziali ricavate sopra (2.20)-(2.21) rappresentando dinamiche cosmologiche diverse tra loro, entrambe però interessanti dal punto di vista fisico per spiegare l'espansione accelerata dell'Universo.

Punto	x	y	Esistenza	Ω_m	Ω_ϕ	ω_ϕ	ω_{eff}
O	0	0	sempre	1	0	–	ω
A_\pm	± 1	0	sempre	0	1	1	1
B	$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}(1+\omega)}}{\lambda}$	$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}(1-\omega^2)}}{\lambda}$	$\lambda^2 \leq 3 + 3\omega$	$1 - \frac{3+3\omega}{\lambda^2}$	$\frac{3+3\omega}{\lambda^2}$	ω	ω
C	$\frac{\lambda}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}$	$\lambda^2 < 6$	0	1	$\frac{\lambda^2}{3} - 1$	$\frac{\lambda^2}{3} - 1$

Tabella 2.1: Punti critici, esistenza e parametri cosmologici per il sistema (2.20)-(2.21).

2.2 Potenziale esponenziale singolo

Come primo modello di campo scalare consideriamo il potenziale esponenziale singolo della forma

$$V = V_0 e^{-\kappa\lambda\phi}$$

Con $V_0 > 0$, $\kappa = (8\pi G)^{-1/2}$ e λ parametro costante.

Questa forma di potenziale, emergente in maniera naturale da molte aree della fisica, in particolare dalla fisica delle alte energie in fenomeni come la teoria delle stringhe o la teoria dell'inflazione cosmica, è il modello più semplice di Quintessenza e presenta proprietà dinamiche interessanti.

Il sistema di equazioni differenziali (2.20)-(2.21) ora rappresenta un sistema autonomo bidimensionale in quando λ è costante e $\Gamma = 1$. Il sistema presenta le stesse simmetrie descritte nel paragrafo precedente: è invariante sotto la riflessione $y \mapsto -y$ (ciò ci permette di restringere lo spazio delle fasi nel semipiano superiore $y > 0$) e sotto le simultanee riflessioni $x \mapsto -x$ e $\lambda \mapsto -\lambda$ (possiamo considerare soltanto valori positivi di λ per comprendere tutta la dinamica del sistema).

I punti critici del sistema sono 5 e sono elencati in tabella (2.1), i rispettivi autovalori e stabilità in tabella (2.2). Procediamo con la loro discussione in dettaglio:

- *Punto O* : Questo punto all'origine dello spazio delle fasi rappresenta il punto di dominazione della materia, in tale punto infatti vale $\omega_{\text{eff}} = \omega$ (tabella (2.1)). Questo punto esiste $\forall \omega, \lambda$. Gli autovalori sono sempre di segno opposto, quindi questo punto è sempre una sella, essendo attrattore lungo l'asse x e repulsore lungo y . L'equazione di stato del campo scalare non è definita in questo punto in quanto sia la sua energia cinetica sia la sua energia potenziale sono nulli in questo punto (vedere eq. (2.16)). Non c'è ovviamente espansione accelerata in questo punto ($\omega_{\text{eff}} > -1/3$) e il campo scalare non ha nessun ruolo in questo punto.
- *Punti A_\pm* : Questi punti rappresentano una situazione di dominazione dell'energia cinetica del campo scalare, $\omega_{\text{eff}} = \omega_\phi = 1$ implicando quindi per (2.19) $a(t) \propto t^{1/3}$ (un'espansione più lenta di quella causata dalla sola dominazione di materia o di radiazione) e soprattutto non porta ad un'espansione accelerata ($H(t) = \dot{a}/a \propto 1/3t^{2/3} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$). Questi punti esistono $\forall \omega, \lambda$ e per determinati valori di λ possono essere entrambi instabili oppure uno instabile e l'altro sella (ma mai due selle contemporaneamente), fungendo (quando instabili) da attrattori nel passato (si

veda Tabella (2.2)). Una soluzione con equazione di stato $\omega_{\text{eff}} = 1$ non è accettabile fisicamente in quanto la velocità di propagazione del campo risulterebbe così pari a quella della luce e ciò è incompatibile con la massa non nulla del campo stesso (solo particelle di massa nulla si muovono con velocità esattamente pari a c). Si può calcolare la velocità di propagazione del campo [6] ponendo ($c = 1$) e ricordando $\omega_{\text{eff}} = p/\rho = 1 \rightarrow p = \rho$:

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = 1$$

Questi punti, per il loro significato fisico, potrebbero piuttosto rappresentare un'Universo nella sua fase primordiale, perciò spesso non considerati in contesti di modelli descrittivi l'evoluzione dell'energia oscura, supposta avvenire in tempi tardivi della storia dell'Universo.

- *Punto B* Questo punto non è fisso nello spazio delle fasi ma la sua posizione dipende da ω , λ (Tab. (2.1)) ed è nota "soluzione scalare" (*scaling solution* in inglese) in quanto l'equazione di stato del campo scalare eguaglia quella della materia ordinaria, $\omega_\phi = \omega$. L'Universo si evolverà come se fosse sempre dominato dalla materia $\omega_{\text{eff}} = \omega$ indipendentemente dalle quantità di materia Ω_m ed energia oscura Ω_ϕ presenti nell'Universo. Le soluzioni scalari ricoprono un ruolo importanti nell'analisi dinamica di modelli di Quintessenza in quanto ammette l'esistenza di un campo scalare che non interferisce con la formazione delle strutture di larga scala. Tuttavia questo tipo di soluzioni non ammettono un'espansione accelerata dell'Universo per tempo che vanno nel futuro. Questo punto quando esiste è sempre stabile (Tab. (2.2)).
- *Punto C* : Anche questo punto non ha una posizione fissa nello spazio delle fasi bensì dipendente dal parametro λ (Tab. (2.1)). Esso rappresenta la situazione di un Universo dominato dall'energia potenziale del campo scalare, dove l'equazione di stato efficace è $\omega_{\text{eff}} = \omega_\phi = (\lambda^2 - 3)/3$ e implica anche un'espansione accelerata se $\omega_{\text{eff}} < -1/3 \rightarrow \lambda^2 < 2$. Nel limite $\lambda \rightarrow 0$ invece il potenziale si riduce al valore costante V_0 che rappresenta esattamente il modello di un Universo dominato dalla costante cosmologica in continua espansione alla *de Sitter* come descritto nel capitolo 1.

Dopo aver descritto le caratteristiche matematiche e fisiche dei punti critici procediamo con l'analisi delle orbite nello spazio delle fasi: la suddivideremo in 3 casi, in base ai tre range di valori che può assumere λ : $\lambda^2 < \sqrt{3} + 3\omega$, $3 + 3\omega \leq \lambda^2 < 6$, $\lambda^2 \geq 6$. Quello a cui siamo interessati è un modello che descriva nel tempo presente/futuro la transizione materia-energia oscura, quindi è una scelta ragionevole porre da qui in avanti $\omega = 0$ come equazione di stato per la materia ordinaria.

- Caso $\lambda < \sqrt{3}$: Per questi valori di λ non esiste il punto critico *B*. Il sistema è mostrato in figura (2.1). I punti A_\pm sono entrambi instabili e fungono da attrattori nel passato per tutte le orbite dello spazio delle fasi ad eccezione dell'orbita eteroclina $O \rightarrow C$. Il punto *O* attrae le orbite passanti vicino all'asse x e le respinge verso *C*,

Punto	Autovalori	Stabilità
O	$\{ -\frac{3}{2}(1-\omega); \frac{3}{2}(1+\omega) \}$	sella
A_+	$\{ 3-3\omega; 3-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda \}$	instabile per $\lambda \leq \sqrt{6}$ sella per $\lambda > \sqrt{6}$
A_-	$\{ 3-3\omega; 3+\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda \}$	instabile per $\lambda \geq -\sqrt{6}$ sella per $\lambda < -\sqrt{6}$
B	$\{ -\frac{3}{4}[(1-\omega) \pm \frac{\Delta}{\lambda^2}] \}$	stabile per $3+3\omega \leq \lambda^2 \leq \frac{24(\omega+1)^2}{9\omega+7}$ spirale stabile per $\lambda^2 \geq \frac{24(\omega+1)^2}{9\omega+7}$
C	$\{ \lambda^2 - (3+3\omega); \frac{\lambda^2}{2} - 3 \}$	stabile per $\lambda^2 < 3+3\omega$ sella per $3+3\omega \leq \lambda^2 \leq 6$

Tabella 2.2: Autovalori e stabilità per i punti critici del sistema (2.20)-(2.21).
 $\Delta = \sqrt{(\omega-1)[(7+9\omega)\lambda^2 - 24(\omega+1)^2]}$

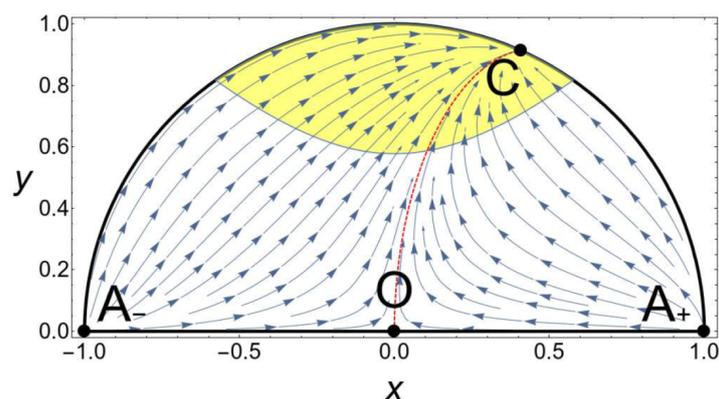


Figura 2.1: Ritratto in fase per $\lambda = 1$. La linea tratteggiata in rosso è l'orbita eteroclina $O \rightarrow C$. Figura tratta da [1].

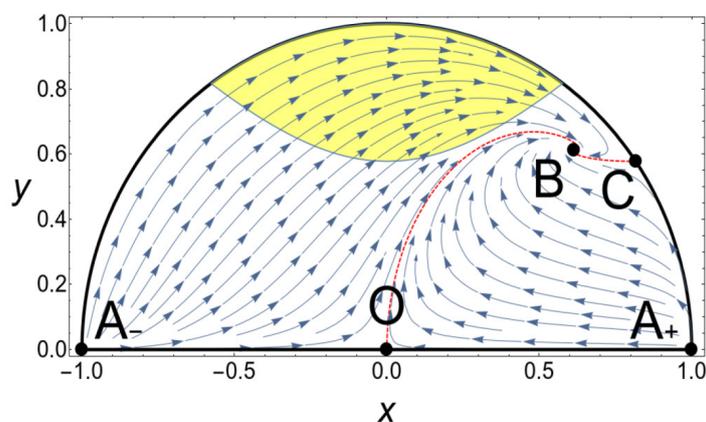


Figura 2.2: Ritratto in fase per $\lambda = 2$. Le linee tratteggiate in rosso sono le orbite eterocline $O \rightarrow B$, $C \rightarrow B$. Figura tratta da [1].

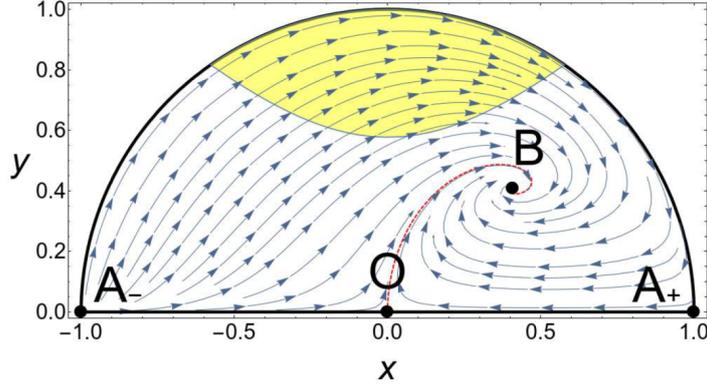


Figura 2.3: Ritratto in fase per $\lambda = 3$. La linea tratteggiata in rosso è l'orbita eteroclina $O \rightarrow B$. Figura tratta da [1].

l'unico punto critico stabile. C corrisponde ad un'espansione accelerata se $\lambda < \sqrt{2}$, se invece $\lambda > \sqrt{2}$ il punto C esce dalla regione dell'espansione accelerata (in giallo in figura (2.1)). Due orbite eterocline sono di particolare interesse: $A_+ \rightarrow O \rightarrow C$ e $A_- \rightarrow O \rightarrow C$. Entrambe le orbite corrispondono inizialmente ad un Universo dominato dall'energia cinetica del campo scalare $\omega_{\text{eff}} = 1$ che successivamente entra in una fase di dominazione della materia con equazione di stato $\omega_{\text{eff}} = \omega$ arrivando infine alla fase di dominazione dell'energia potenziale del campo scalare (con espansione accelerata se $\lambda < \sqrt{2}$). Se le ultime due epoche dell'Universo descritte da queste orbite sono una descrizione verosimile della sua evoluzione, è invece poco plausibile la prima fase di dominazione per i motivi già citati sopra. Prima di concludere si può osservare dalla figura (2.1) come una piccola variazione delle condizioni iniziali attorno ai punti A_{\pm} va a influire in maniera cospicua sulla durata del periodo di dominazione della materia (punto O). L'evoluzione temporale dei parametri cosmologici (Ω_{ϕ} , Ω_m , $\omega_{\phi}\omega_{\text{eff}}$) relativi a questi valori di λ (nello specifico per $\lambda = 1$) è mostrata in figura (2.4) e discussa più avanti nella trattazione.

- Caso $\sqrt{3} \leq \lambda < \sqrt{6}$: Per questi valori di λ tutti i punti critici sono presenti nello spazio delle fasi. Il quadro complessivo è mostrato in figura (2.2). I punti A_{\pm} sono ancora attrattori nel passato e il punto O è ancora una sella, respingendo le orbite stavolta verso B e non verso C come prima. Il punto C adesso è un punto di sella che attrae le orbite percorrenti il bordo dello spazio delle fasi e le repelle verso B , l'unico punto critico stabile, corrispondente alla "soluzione scalare" del sistema, dove l'equazione di stato dell'Universo eguaglia quella della materia $\omega_{\text{eff}} = \omega = 0$. Sia B sia C non sono dentro la regione di espansione accelerata (vero $\forall \lambda \in [\sqrt{3}, \sqrt{6}]$), ciò significa che nessuna orbita eteroclina potrà rappresentare un modello realistico di descrizione dell'energia oscura per tempi presenti/futuri.
- Caso $\lambda \geq \sqrt{6}$: Lo spazio delle fasi per questi valori di λ è rappresentato in figura (2.3). Ora solo uno dei punti A_{\pm} è instabile, mentre l'altro sarà sella (in questo caso, per $\lambda \geq \sqrt{6}$ sarà A_- ad essere l'attrattore nel passato). Il punto B diventa ora una spirale stabile e l'orbita eteroclina $O \rightarrow B$ segue questo andamento. Nessun'orbita dello spazio delle fasi corrisponde ad una soluzione che porta ad un'espansione accelerata dell'Universo. Per $\lambda \rightarrow \infty$ il punto B va a coincidere col punto

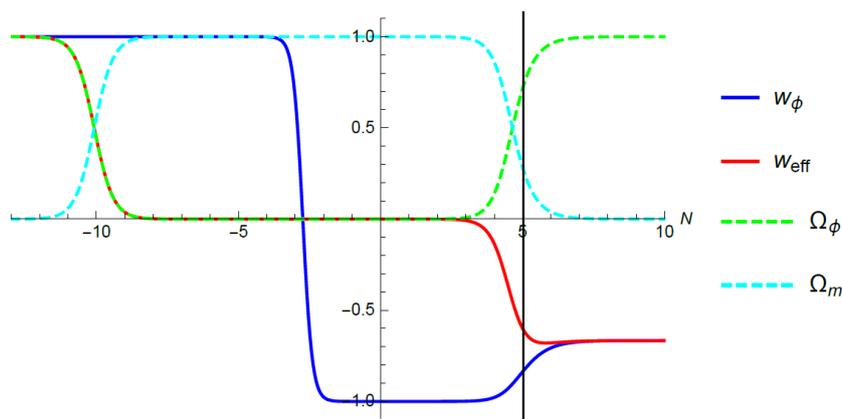


Figura 2.4: evoluzione temporale dei parametri cosmologici Ω_ϕ , Ω_m , ω_ϕ , ω_{eff} per $\lambda = 1$ e per la soluzione con condizione iniziale $(x(N=0), y(N=0)) = (0, 0.01)$. La linea verticale a $N = 5$ rappresenta il tempo presente ($z = 0$). Figura tratta da [2].

O , le traiettorie seguiranno un moto orario, originando dai valori negativi dell'asse x e terminando per valori positivi dell'asse x : questa situazione corrisponde ad un potenziale nullo ($V(\phi) \rightarrow 0$).

Veniamo alla discussione dell'evoluzione temporale dei parametri cosmologici Ω_ϕ , Ω_m , ω_ϕ , ω_{eff} prevista da questo modello matematico. Discuteremo tale evoluzione per $\lambda = 1$ in quanto tale valore appartiene al primo caso tra quelli discussi poc'anzi, caso che porta alla dinamica fisicamente piú interessante tra quelle ottenute. La figura (2.4) mostra l'andamento di tali parametri in funzione di $N = \log a$ per una particolare soluzione a cui sono state assegnate le condizioni iniziali attorno all'origine dello spazio delle fasi $(x(N=0), y(N=0)) = (0, 0.01)$. Si può ricavare facilmente la relazione tra N e il redshift z sfruttando la relazione che lega quest'ultimo col fattore di scala cosmico $a(z) = 1/(1+z)$, ottenendo quindi (imponendo $z_0 = z(t=0) = 0$) $z = e^{N_0 - N} - 1$. Si può notare dalla figura che prima del periodo, piuttosto lungo, di dominazione della materia (caratterizzato da $\Omega_m = 1$ e $\omega_{\text{eff}} = 0$) doveva esserci stato un periodo di dominazione dell'energia cinetica del campo scalare ($\omega_{\text{eff}} = \omega_\phi = 1$). Questa soluzione, per le ragioni fisiche riportate prima, non è un modello fisicamente realistico dell'Universo nei tempi primordiali: i modelli di quintessenza, avendo principalmente applicazioni per tempi tardivi della sua evoluzione, ignorano la struttura delle soluzioni per tempi troppo nel passato in quanto ci si aspetta che altri fenomeni fisici intervengano (e.g. inflazione) in questa fase dell'evoluzione dell'Universo. Il limite di prevedibilità per i modelli di quintessenza si pone circa $z = 3411$ [scalar fields in cosmology jensko], corrispondente al tempo in cui è avvenuta l'eguaglianza radiazione-materia, oltre il quale il modello cessa di essere affidabile nella descrizione dell'evoluzione dell'Universo. Questo perchè nella trattazione è sempre stata considerata la presenza di una sola componente di materia ordinaria, quindi considerare soluzioni per tempi antecedenti a $z = 3411$ risulta in contrasto con la compresenza di due componenti di materia ordinaria (radiazione e materia oscura) e non porterebbe a risultati coerenti fisicamente.

Da un punto di vista matematico il modello di campo scalare con potenziale esponenziale singolo si dimostra di grande interesse per via della sua semplicità, infatti le equazioni di campo possono essere ridotte ad un sistema autonomo bidimensionale, lo spazio delle

fasi è compatto, non ci sono orbite periodiche e i comportamenti asintotici sono ben descritti dai punti critici del sistema. Anche dal punto di vista fisico il potenziale ad esponenziale singolo rimane interessante per via della possibilità di avere soluzioni che ammettono un'espansione accelerata per tempi presenti/futuri ($\lambda < \sqrt{2} \rightarrow \epsilon_s < 1$), fornendo quindi una buona descrizione della dinamica dell'energia oscura. Tale modello di quintessenza però presenta ancora i problemi di *fine tuning*: le soluzioni di questo modello sono strettamente legate dalla scelta delle condizioni iniziali (si è dovuto infatti scegliere come condizione iniziale nello spazio delle fasi un preciso punto molto vicino all'origine, in modo tale che la soluzione passante per quel punto affiancasse da vicino l'orbita eteroclina $A_{\pm} \rightarrow O \rightarrow C$ che riproduce - nei limiti di validità del modello appena definiti sopra - l'evoluzione dell'Universo in accordo con quello che osserviamo oggi. Anche rilassando la condizione iniziale di essere molto vicina all'origine, richiedendo che la soluzione passi per un punto lungo l'asse x , si sta però imponendo una condizione stringente sulla coordinata y iniziale, ovvero sul valore iniziale del potenziale ($V(\phi) \sim 0$). Anche la coincidenza cosmica è un problema non risolto: sempre dalla figura (2.4) la linea verticale che segna il tempo presente ($z = 0, N = 5$) giace esattamente nella fase di evoluzione dell'Universo caratterizzata dalla transizione materia-energia oscura (l'uguaglianza $\Omega_m = \Omega_\phi$ avviene a circa $z = 0.49, N = 4.6$) senza nessuna motivazione fisica particolare.

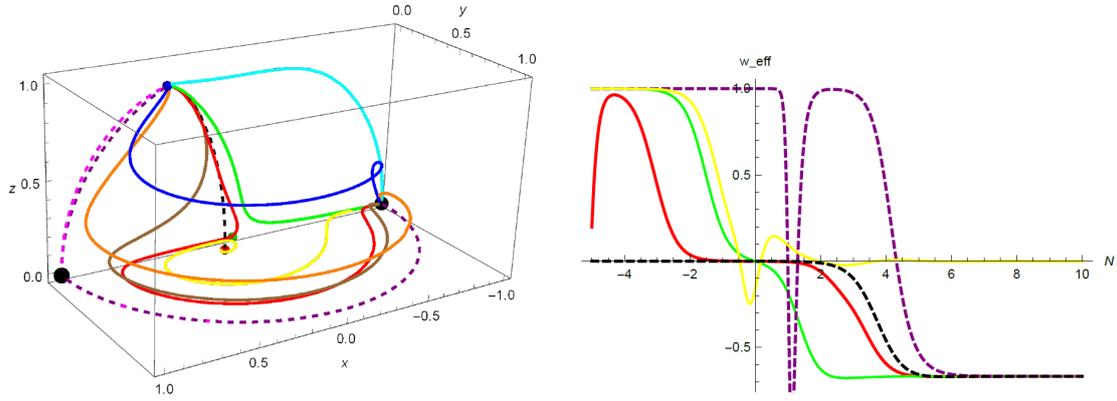
Un modo per sviare il problema delle soluzioni iniziali è quello di optare come soluzione più realistica dell'evoluzione di Universo la soluzione "scalare" ottenibile per valori di $\lambda < \sqrt{6}$ (rappresentata dall'eteroclina $O \rightarrow B$ in figura (2.2)) dove, indipendentemente dalle condizioni iniziali scelte, l'equazione del campo scalare eguaglia quella della materia ordinaria presente. Tale soluzione non ammette però un'espansione accelerata, risultando un modello non realistico per tempi presenti/futuri. La soluzione "accelerante" e la soluzione "scalare" sono però mutualmente esclusive in questo modello [2].

2.2.1 Potenziale esponenziale doppio

Una variazione del potenziale esponenziale singolo che permette di ottenere entrambe le due soluzioni nello stesso piano delle fasi è il potenziale esponenziale doppio: $V(\phi) = V_1 e^{-\kappa\alpha\phi} + V_2 e^{-\kappa\beta\phi}$ con V_1, V_2, α, β costanti. Avendo due esponenziali regolati da due parametri diversi, α e β -uno maggiore dell'altro-, dal fatto che avranno valori diversi ne conseguirà la proprietà che per tempi passati sarà prevalente l'azione dell'esponenziale con parametro maggiore, per tempi futuri sarà prevalente il contributo dell'esponenziale col parametro minore [2].

La caratteristica più importante di questo modello di Quintessenza è che ora si possono ottenere nello stesso spazio delle fasi una soluzione di espansione accelerata e una soluzione "scalare" fin quando $\alpha > \sqrt{3 + 3\omega}$ e $\beta < \sqrt{2}$ o viceversa, permettendo di alleviare parzialmente il problema di *fine tuning* che per l'esponenziale singolo era legato all'impossibilità di ottenere entrambe le soluzioni nello stesso spazio delle fasi.

Anche se i punti critici stavolta sono di più di quelli del caso precedente, solo uno ha un significato fisico diverso da quelli incontrati prima: tale punto esiste quando α e β hanno segno opposto, l'equazione di stato del campo scalare è sempre $\omega_\phi = -1$ e rappresenta una soluzione di espansione alla *de Sitter* [2].



(a) Orbite nello spazio delle fasi con diverse condizioni iniziali. Il punto verde all'origine rappresenta l'Universo dominato dalla materia, i punti neri sono gli attrattori nel passato ($\omega_{\text{eff}} = 1$), il punto rosso è la soluzione "scalare" e il punto blu rappresenta l'Universo dominato dall'energia potenziale del campo scalare ($\omega_{\text{eff}} = -1$).

(b) Evoluzione di ω_{eff} per le orbite considerate a fianco.

Figura 2.5: Soluzione numerica del sistema di equazioni differenziali per il modello con potenziale esponenziale doppio per $\alpha = 10$ e $\beta = 1$. Figura presa da [2].

In figura (2.5a) sono mostrate le soluzioni con $\alpha = 10$, $\beta = 1$ scegliendo diverse condizioni iniziali nello spazio delle fasi. Le linee tratteggiate rappresentano le orbite eterocline. Le orbite colorate in rosso e in verde, sebbene abbiano differenti traiettorie nello spazio delle fasi, possono entrambe rappresentare due modelli realistici dell'evoluzione dell'Universo in quanto entrambe rappresentano un'espansione accelerata dell'Universo in tempi tardivi e differiscono per la durata dell'epoca di dominazione della materia ($\omega_{\text{eff}} = 0$) (in figura (2.5b) sono mostrati gli andamenti temporali di ω_{eff} per tutte le orbite della figura (2.5a)). Si osserva come in questo caso si possa ottenere nello stesso spazio delle fasi una soluzione "scalare" e una soluzione di espansione accelerata [2].

2.3 Potenziale polinomiale

L'ultima forma di potenziale che analizzeremo nel contesto dei modelli canonici di Quintessenza è quella polinomiale (chiamato anche potenziale di *Ratra-Peebles*), forma motivata da contesti di teorie di superstringa. La forma del potenziale è la seguente:

$$V(\phi) = \frac{M^{\alpha+4}}{\phi^\alpha} \quad (2.25)$$

Dove α è un parametro adimensionale e M una costante positiva avente l'unità di misura di una massa (eV).

Per proseguire come si è fatto nel caso precedente bisogna costruire un sistema chiuso di equazioni differenziali per delle particolari variabili e studiarne la dinamica con tecniche di linearizzazione, Lyapunov etc. . . e per fare ciò bisogna studiare l'evoluzione nel tempo di λ , che ora dipende da ϕ :

$$\lambda = -\frac{V_{,\phi}}{\kappa V} = \frac{\alpha}{\kappa\phi}$$

Così definito λ può assumere valori da $-\infty$ a $+\infty$. La funzione Γ è data da:

$$\Gamma = \frac{VV_{,\phi}}{V_{,\phi}^2} = \frac{\alpha + 1}{\alpha}$$

che è costante e dipende solamente dal parametro α . Allora il sistema di equazioni differenziali (2.20)-(2.21) con (2.23) è invariante sotto le simultanee trasformazioni $x \rightarrow -x$, $\lambda \rightarrow -\lambda$ e sotto $y \rightarrow -y$, permettendoci di considerare quindi solamente valori positivi di λ che però vanno da 0 a $+\infty$, rendendo di fatto lo spazio delle fasi non compatto. Per ovviare a questo problema si può definire una nuova variabile:

$$z = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

Allora per $\lambda \in [0, +\infty)$ si ottiene $z \in [0, 1]$, e il nuovo sistema di equazioni differenziali diventa:

$$x' = -\frac{3}{2} \left(2x + (\omega - 1)x^3 + x(\omega + 1)(y^2 - 1) - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{z}{1-z} y^2 \right) \quad (2.26)$$

$$y' = -\frac{3}{2} y \left((\omega - 1)x^2 + (\omega + 1)(y^2 - 1) + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{z}{1-z} x \right) \quad (2.27)$$

$$z' = -\frac{\sqrt{6}}{\alpha} z^2 x \quad (2.28)$$

Lo spazio delle fasi è ridotto al semicilindro positivo confinato nel piano (x, y) con $y > 0$ e $z \in [0, 1]$. I punti su $z = 1$ ($\lambda \rightarrow \infty$), tuttavia, risultano divergenti in quanto non sono definite per questi punti le equazioni per x' e y' . Per ovviare a quest'altro problema si rimuovono le singolarità moltiplicando il membro di destra delle equazioni (2.26)-(2.28) per $(1 - z)$, permettendo così di includere nello spazio delle fasi anche i punti a $z = 1$ senza cambiare la dinamica qualitativa del sistema.

Punto	x	y	z	Esistenza	Ω_ϕ	ω_ϕ	ω_{eff}	Accelerazione
O_z	0	0	qualsiasi	sempre	0	–	ω	No
A_\pm	± 1	0	0	sempre	1	1	1	No
B_x	qualsiasi	0	1	sempre	x^2	1	$x^2(1 - \omega) + \omega$	No
C	0	1	0	sempre	1	–1	–1	Sì

Tabella 2.3: Punti critici e relative proprietà fisiche del sistema (2.29)-(2.31).

Punto	Autovalori	Stabilità
O_z	$\{ 0, -\frac{3}{2}(z - 1)(\omega \pm 1) \}$	sella
A_+	$\{ 0, 3, 3 - 3\omega \}$	instabile* per $\alpha < 0$ sella* per $\alpha > 0$
A_-	$\{ 0, 3, 3 - 3\omega \}$	instabile* per $\alpha > 0$ sella* per $\alpha < 0$
B_x	$\{ 0, -\sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{\sqrt{6}}{\alpha}x \}$	sella per $x \neq 0$ e $\alpha > 0$ stabile* per $x > 0$ e $\alpha < 0$ instabile* per $x < 0$ e $\alpha < 0$
C	$\{ 0, -3, -3 - 3\omega \}$	stabile* per $\alpha > 0$ sella* per $\alpha < 0$

Tabella 2.4: Autovalori e stabilità per il sistema (2.29)-(2.31). Le stabilità segnate con l'asterisco indica che sono state trovate con metodi diversi dalla linearizzazione in quanto punti non iperbolic

Il sistema di equazioni differenziali con quest'ultimo apporto diventa allora:

$$x' = -\frac{3}{2}(1 - z) \left(2x + (\omega - 1)x^3 + x(\omega + 1)(y^2 - 1) \right) + \sqrt{\frac{3}{2}}zy^2 \quad (2.29)$$

$$y' = -\frac{3}{2}y(1 - z) \left((\omega - 1)x^2 + (\omega + 1)(y^2 - 1) \right) - \sqrt{\frac{3}{2}}xyz \quad (2.30)$$

$$z' = -\frac{\sqrt{6}}{\alpha}(1 - z)z^2x \quad (2.31)$$

Il sistema (2.29)-(2.31) presenta le sottovarietà invarianti $y = 0$ e $z = 0$. La dipendenza da α è contenuta soltanto nell'ultima equazione delle 3, quella che regola il flusso temporale di z : per $z = 0$ e per $z = 1$ si ha $z' = 0$ e la dinamica su questi piani è indipendente da α . I parametri cosmologici si riottengono con lo stesso ragionamento compiuto nella sezione 2.1.2 (z stavolta non è un'estensione delle variabili EN bensì una riparametrizzazione di λ , variabile dinamica differente; i parametri fisici dipenderanno soltanto da x e y). Dall'equazione di stato (2.16) e dal vincolo di Friedmann (2.14) otteniamo $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, 1]$.

In tabella (2.3) sono riportati i punti critici del sistema (2.29)-(2.31) insieme alle proprietà fisiche annesse. Un'immediata differenza coi casi precedenti è la presenza non solo di punti

critici, ma anche di linee critiche (B_x, O_z), in particolare su B_x i parametri cosmologici Ω_ϕ e ω_{eff} dipendono dalla coordinata x . Tutti i punti esistono $\forall \alpha, \omega$ e tutti i punti sono non iperbolici, richiedendo ulteriori metodi oltre la linearizzazione per la determinazione delle stabilità. Analizziamoli in dettaglio:

- *Punto O_z* : La linea di punti critici sull'asse z da $z = 0$ a $z = 1$ sono le soluzioni corrispondenti ad un Universo dominato completamente dalla materia ordinaria, anche in questo caso ω_ϕ non è definito e $\omega_{\text{eff}} = \omega$. Per determinarne la stabilità del punto si guarda agli autovalori non nulli (elencati in tabella (2.4)): essendo $\omega + 1 > 0$, $\omega - 1 < 0$ e $z - 1 < 0 \quad \forall z \in [0, 1]$ si ha che la linea critica è una sella.
- *Punti A_\pm* : i punti critici a $(\pm 1, 0, 0)$ rappresentano le soluzioni corrispondenti ad un Universo dominato dall'energia cinetica del campo scalare ($\omega_{\text{eff}} = 1$). Anche qui si conclude che queste soluzioni non sono fisicamente realistiche e sono ignorate per la dinamica avvenente in tempi tardivi. Gli autovalori non nulli sono sempre positivi (tabella (2.4)), quindi i punti A_\pm sono sicuramente non stabili. Per analizzare l'autovalore nullo non si possono usare tecniche di linearizzazione: usando il teorema della varietà centrale si trova che il sottospazio centrale è diretto come l'asse z , calcolando allora il flusso di z attorno a A_\pm si ottiene rispettivamente $z' = \mp \sqrt{6}/\alpha(1 - z)z^2$. Se $\alpha > 0$ allora $z'(A_+) > 0$ (A_+ respinge le orbite verso valori positivi dell'asse z) A_+ è sella e A_- nodo instabile, se $\alpha < 0$ viceversa.
- *Punto B_x* : La linea che connette i punti $(-1, 0, 1)$ e $(1, 0, 1)$ è un'altra linea critica, stavolta poggiate sul piano $z = 1$, e ricordando che $z = 1$ equivale a $\lambda \rightarrow \infty$, i punti su B_x caratterizzano il comportamento asintotico delle orbite quando $\lambda \rightarrow \infty$. Anche qui $\Omega_\phi = x^2$ dipende dalla coordinata x e può assumere valori tra 0 e 1, mentre $\omega_\phi = 1 \quad \forall x$ in quanto $x^2 \propto \dot{\phi}^2$ rappresenta l'energia cinetica del campo scalare. Anche l'equazione di stato efficace dipende da x , $\omega_{\text{eff}} = x^2(1 - \omega) + \omega$ e assume i valori tra ω e 1. Anche gli autovalori di B_x sono non iperbolici (tabella (2.4)) e la stabilità degli stessi dipende sia da α sia da x : se $\alpha > 0$ gli autovalori non nulli avranno sempre segno opposto e i punti di B_x saranno punti di sella indipendentemente dal valore di x , se invece $\alpha < 0$ per valori negativi di x i punti di B_x saranno instabili mentre i punti di B_x con $x > 0$ saranno stabili. Essendo che la varietà centrale corrisponde proprio alla linea critica in questione, le orbite vicino a B_x saranno attratte e respinte in direzione perpendicolare a tale linea.
- *Punto C* : L'ultimo punto critico rappresenta la soluzione corrispondente ad un Universo dominato dall'energia potenziale del campo scalare, l'equazione di stato è $\omega_{\text{eff}} = \omega_\phi = -1$ implicando un'espansione accelerata alla *de Sitter* dell'Universo. I due autovalori non nulli sono entrambi negativi, per determinarne la stabilità si possono usare equivalentemente il metodo della funzione di Lyapunov (ottenendo che se $\alpha > 0$ C è globalmente stabile) oppure col teorema della varietà centrale (ottenendo lo stesso risultato di Lyapunov se $\alpha > 0$ e ottenendo una sella se $\alpha < 0$).

Tutti i punti critici del sistema (2.29)-(2.31) sono non iperbolici e di conseguenza per determinarne le stabilità sono stati usati metodi diversi dalla linearizzazione, come il metodo di Lyapunov o sfruttando il teorema della varietà centrale. In generale si può

separare la dinamica del sistema in due casi, in quanto le proprietà matematiche (e di conseguenza fisiche) dei punti critici cambiano se si considerano valori di $\alpha > 0$ o di $\alpha < 0$. La forma del potenziale stesso dipende dal segno di α , dando origine a due possibili forme di potenziale possibili per (2.25): polinomiale inverso con $\alpha > 0$ e polinomiale diretto con $\alpha < 0$. Queste due dinamiche, come vedremo, porteranno a due tipi di soluzioni diverse.

2.3.1 Potenziale polinomiale inverso

Analizziamo il caso specifico di quintessenza con potenziale della forma (2.25) e con $\alpha > 0$ ($\Gamma > 1$).

In figura (2.6) è mostrato lo spazio delle fasi del sistema (2.29)-(2.31) insieme alle sue proiezioni bidimensionali sui diversi piani. L'immagine (2.6a) è presa da [1] e ivi le soluzioni numeriche sono calcolate per $\alpha = 10$, le altre 3 immagini sono prese da [2] e le soluzioni numeriche sono calcolate per $\alpha = 1$, essendo però in entrambi i casi $\alpha > 0$ la dinamica qualitativa dello spazio delle fasi non cambia ed è quella raffigurata.

L'attrattore nel futuro in questo caso è il punto C , l'attrattore nel passato è A_- mentre il punto A_+ è sella. Il sistema dinamico (2.29)-(2.31) ristretto al piano $z = 1$ può essere risolto analiticamente per ottenere la seguente soluzione (espressa in funzione della variabile temporale adimensionale $N = \log a$:

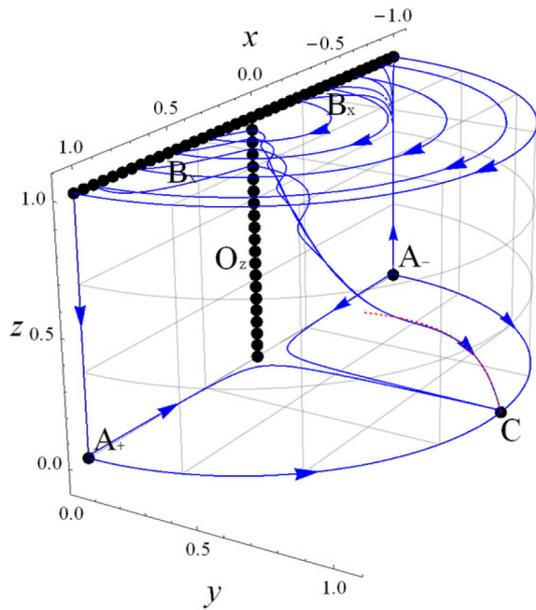
$$x(N) = A \tanh \left(\sqrt{\frac{3}{2}}(N - N_0) \right) \quad (2.32)$$

$$y(N) = A \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}(N - N_0) \right) \quad (2.33)$$

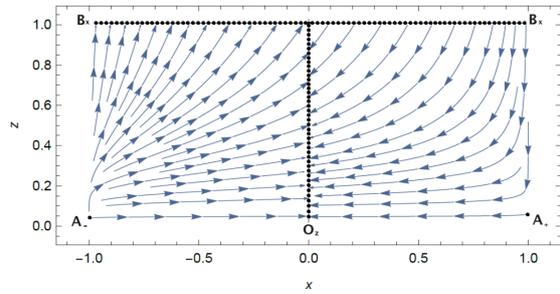
con A, N_0 costanti.

Il punto A_- è dove originano tutte le orbite dello spazio delle fasi (2.6b). Tutte le orbite sul piano $z = 1$ sono circolari ($x^2 + y^2 = A^2$) e viaggiano in senso orario partendo da valori di B_x con $x < 0$ arrivando in valori di B_x con $x > 0$ (questa dinamica è indipendente dal valore di α , figura (2.6c)), da questi punti tutte le orbite vengono attratte dalla linea critica O_z , finendo poi col convergere asintoticamente, presto o tardi, ad una singola orbita che termina nel punto C , attrattore globale del sistema (2.6d). La velocità di convergenza appena descritta dipende da due fattori: dalla traiettoria delle soluzioni sul piano $z = 1$ e dal valore di α . Infatti quanto più le orbite girano vicine ai punti di O_z , tanto più velocemente convergono alla soluzione di espansione accelerata in C , inoltre quanto più α è grande ($\alpha \rightarrow \infty$) tanto più $\Gamma = (\alpha + 1)/\alpha$ tende a 1, e tanto più le orbite entrano nel regime di convergenza verso la soluzione di espansione accelerata.

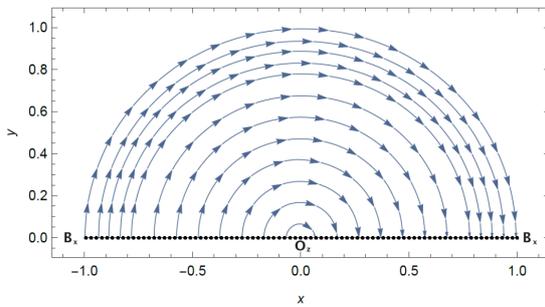
Questo tipo di soluzioni sono fisicamente interessanti per due motivi: possono ben descrivere la transizione materia-energia oscura in tempi tardivi dell'evoluzione dell'Universo in quanto queste permettono al campo scalare di seguire l'equazione di stato della materia ordinaria (comportandosi come una soluzione "scalare") per un periodo di tempo finito prima di approdare alla soluzione corrispondente all'epoca di dominazione dell'energia oscura. Inoltre tali soluzioni non presentano i problemi di *fine tuning* incontrati nel modello Λ CDM (capitolo 1) e nel modello di quintessenza con potenziale esponenziale singolo. Questo tipo di soluzioni si chiamano *tracking solutions* (e Γ è detto *tracking parameter*).



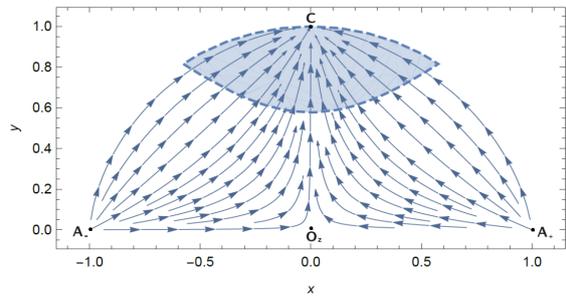
(a) Spazio delle fasi complessivo



(b) Sezione dello spazio delle fasi sul piano (x, z) , $y = 0$.



(c) Sezione dello spazio delle fasi sul piano (x, y) con $z = 1$.



(d) Sezione dello spazio delle fasi sul piano (x, y) con $z = 0$. La zona colorata in azzurro rappresenta la regione in cui c'è espansione accelerata ($\omega_{\text{eff}} < -1/3$).

Figura 2.6: Ritratto in fase del sistema (2.29)-(2.31) con $\alpha > 0$. In figura (2.6a) è rappresentato lo spazio delle fasi complessivo, in (2.6b), (2.6c) e (2.6d) sono rappresentate le sezioni dello stesso rispettivamente sul piano (x, z) , (x, y) con $z = 1$ e (x, y) con $z = 0$. Immagine (2.6a) da [1], (2.6b)-(2.6d) da [2].

In figura (2.7) è stata mostrata l'evoluzione temporale per tempi tardivi delle quantità fisiche $\Omega_m, \Omega_\phi, \omega_{\text{eff}}, \omega_\phi$ per la soluzione con $\alpha = 100$ ($\Gamma = 1.01$). Il periodo temporale in cui la soluzione analizzata diventa una *tracking solution* è visibile dal fatto che l'equazione di stato del campo scalare eguaglia quella della materia ordinaria ($\omega_\phi = \omega = 0$) per un lungo periodo di tempo prima di scendere a valori negativi, finendo per convergere al valore $\omega_\phi = -1$. Prima che la soluzione entri nell'epoca in cui comincia a comportarsi come una *tracking solution* ω_ϕ assume un'altra volta il valore -1, ma la bassa densità relativa di energia del campo scalare Ω_ϕ in quel momento fa sì che l'equazione di stato efficace sia ancora dominata dalla materia, $\omega_{\text{eff}} = \omega$. Infatti si può notare l'andamento della densità relativa di energia del campo scalare Ω_ϕ : trascurabile, se non nulla, per un lungo periodo di tempo per poi aumentare improvvisamente in tempi tardivi causando la caduta di ω_ϕ verso valori negativi, convergenti a -1. Per questo motivo il modello di quintessenza col potenziale a legge di potenza inversa fa parte della classe dei *freezing models* analizzati nel capitolo 3.

Le *tracking solutions* non risolvono il problema della coincidenza cosmica, questo è evidente dalla figura (2.7) dove la transizione materia-energia oscura avviene esattamente al tempo in cui la si sta osservando. Questo tipo di potenziale però riesce a risolvere il problema del *fine tuning*, in quanto soluzioni con diverse condizioni iniziali portano ad un periodo sufficientemente lungo di dominazione della materia seguita dal periodo di dominazione dell'energia oscura, comportamento che per il modello di quintessenza con potenziale esponenziale singolo richiedeva delle precise condizioni iniziali ($\Omega_\phi \sim 0$). Nonostante si sia tolta la stretta sulle condizioni iniziali si è comunque richiesto il passaggio delle orbite per il piano $z = 1$, questa richiesta però è sensata per due motivi: il primo riguarda la struttura geometrica della varietà centrale del punto A_- , diretta come l'asse z , date delle condizioni iniziali vicine a tale punto è molto probabile ottenere una soluzione che passi sufficientemente vicino al piano $z = 1$ e quindi riproduca la *tracking solution* per tempi successivi. La seconda motivazione è di carattere fisico e riguarda l'ampiezza del campo scalare ϕ : richiamando la definizione di $\lambda = -\frac{1}{\kappa} \frac{V_{,\phi}}{V} = \frac{\alpha}{\kappa\phi}$ si ricava la relazione tra la variabile z e il campo ϕ : $z = \frac{1}{1 + \frac{\kappa\phi}{\alpha}}$, allora l'ampiezza del campo scalare è inversamente proporzionale a λ . Assumendo $\kappa\phi \ll \alpha$ per tempi primordiali si ottengono proprio quelle traiettorie nello spazio delle fasi che passano nel piano $z = 1$ (o che ci vanno vicino). Questa condizione equivale a richiedere valori di campo scalare molto piccoli per tempi primordiali, cosa che è fisicamente accettabile in quanto eviterebbe problemi legati a grandi escursioni del valore di ϕ lungo il potenziale in tempi passati, fenomeno in disaccordo con la natura del campo scalare ipotizzata in sezione 2.1.1.

2.3.2 Potenziale polinomiale diretto

Analizziamo ora il potenziale (2.25) con $\alpha < 0$ ($\Gamma < 1$).

In figura (2.8) è mostrato lo spazio delle fasi del sistema (2.29)-(2.31) insieme alle sue proiezioni bidimensionali sui diversi piani. Anche in questo caso l'immagine (2.8a) è presa da [1] e ivi le soluzioni numeriche sono calcolate per $\alpha = -10$, l'altra immagine è presa da [2] e le soluzioni numeriche sono calcolate per $\alpha = -1$, essendo però in entrambi i casi $\alpha < 0$ la dinamica qualitativa dello spazio delle fasi non cambia ed è quella raffigurata. Per le proiezioni dello spazio delle fasi sul piano (x, y) per $z = 1$ e $z = 0$ si rimanda

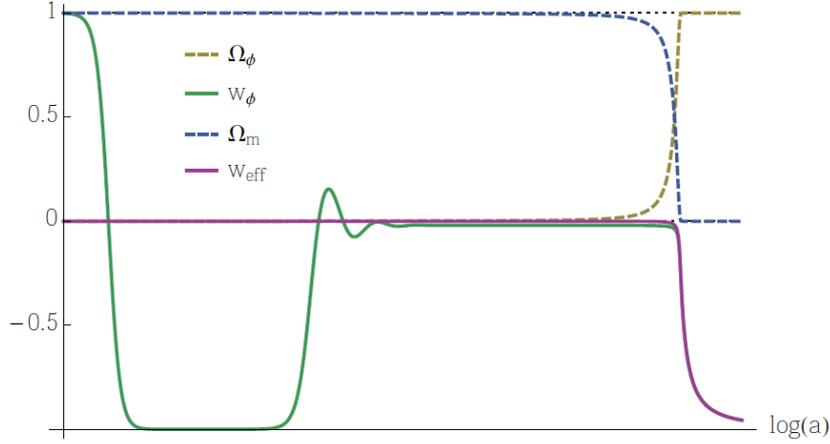
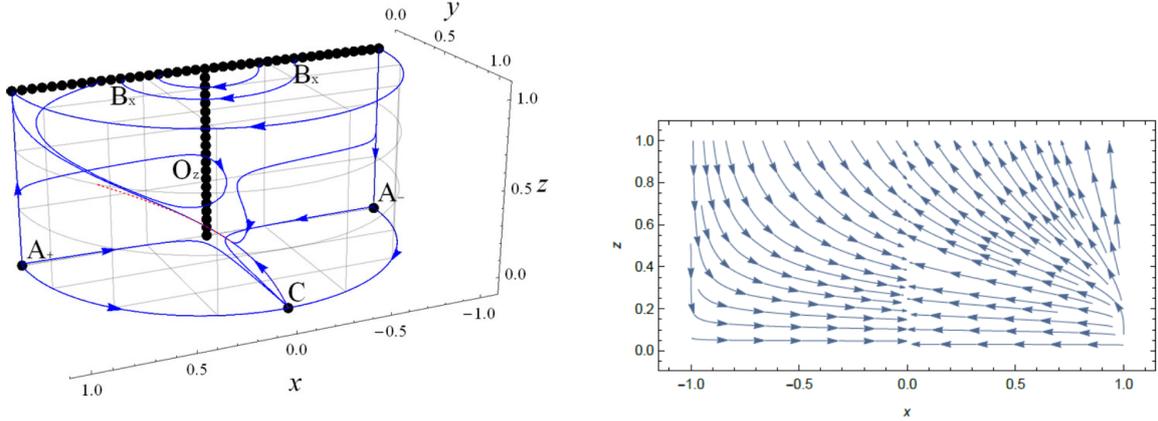


Figura 2.7: Evoluzione per tempi tardivi dei parametri cosmologici $\Omega_m, \Omega_\phi, \omega_{\text{eff}}, \omega_\phi$ per il modello di quintessenza con potenziale polinomiale inverso con $\alpha = 100$ ($\Gamma = 1.01$). Immagine da [1]



(a) Spazio della fasi complessivo del sistema (2.29)-(2.31) con $\alpha < 0$.

(b) Sezione dello spazio delle fasi sul piano (x, z) , $y = 0$.

Figura 2.8

rispettivamente alle figure (2.6c) e (2.6d) in quanto la dinamica su questi piani è indipendente dal segno di α . Dall'analisi delle stabilità riportata in tabella (2.4) si ricava che A_+ adesso è nodo instabile mentre A_+ è sella, scambiandosi quindi i ruoli; B_x è linea di nodi instabili per valori di $x < 0$, rappresentando insieme a A_+ i possibili attrattori nel passato (figura (2.8b)), e linea di nodi stabili per $x > 0$, rappresentando questi ultimi dei possibili attrattori nel futuro (attrattori globali del sistema). C adesso è un punto di sella, attraendo le orbite sul piano $z = 0$ e mandandole verso i valori positivi di x della linea critica B_x .

Dalla tabella (2.3) si nota che il range dei possibili valori di ω_{eff} che può assumere sulla linea critica B_x va da $\omega = 0$ a 1, in particolare $\omega_{\text{eff}} > -1/3$: questo significa che la linea critica B_x non descriverà mai un'espansione accelerata dell'Universo. Alcune orbite però, scegliendo tra quelle che passano molto vicino all'origine O_z , possono descrivere la transizione materia-energia oscura se affiancano l'orbita eteroclina $O_z \rightarrow C$ sul piano $z = 0$. Queste orbite non sono altro che le soluzioni corrispondenti ad un Universo

dominato dalla costante cosmologica ($z = 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow V, \phi = 0 \rightarrow V = \text{costante}$). La fase finale dell'evoluzione di queste soluzioni non è rappresentata però dall'espansione accelerata perchè esse dal punto C vengono poi mandate verso la linea critica B_x con $x > 0$.

I modelli di campo scalare candidati per l'energia oscura che iniziano con valori piccoli di λ sono detti *thawing models*, ovvero soluzioni in cui λ è una funzione crescente del tempo e la fase di espansione accelerata dell'Universo dominata dalla costante cosmologica non rappresenta mai la fase finale della sua evoluzione. Un problema di questo tipo di modello è il fatto di richiedere delle precise condizioni iniziali per ottenere un periodo sufficientemente lungo di dominazione della materia, in accordo coi dati osservativi. Discuteremo meglio dei *thawing models* e del loro ruolo nel fissare dei limiti di validità ai modelli di quintessenza nel capitolo 3.

Capitolo 3

Limiti Osservativi sui Modelli di Quintessenza

Per fornire dei vincoli osservativi ai modelli di quintessenza si sceglie una diversa classificazione di questi ultimi: non più a seconda del potenziale scelto (in quanto non strettamente fisico) ma a seconda dell'evoluzione temporale del parametro ω_ϕ previsto (il quale può essere determinato da osservazioni sperimentali come visto nel capitolo ??). Scegliendo quest'ultima classificazione i diversi modelli di quintessenza possono essere distinti facilmente sul piano delle fasi $\omega - \omega'$. Procedendo con questo criterio i modelli di quintessenza possibili possono essere suddivisi in due classi: *thawing models* e *freezing models*.

Nei *thawing models* il campo scalare è stato frenato dal termine di Hubble per un lungo periodo nella storia dell'Universo e solo recentemente ha cominciato a "scivolare" verso il minimo del potenziale. In questo modello l'equazione di stato parte da un valore attorno a -1 ($\omega_\phi \approx -1$) e cresce nel tempo verso valori meno negativi con andamento $\omega' \equiv \dot{\omega}/H > 0$ [3, 7, 8]. L'accelerazione del campo scalare è limitata dal parametro di Hubble $\ddot{\phi} < \dot{\phi}/t \approx (3/2)H\dot{\phi}$, dunque anche l'accelerazione dell'equazione di stato è limitata $\omega' < 3(1 + \omega)$. C'è anche un estremo inferiore, motivato da modelli di quintessenza provenienti dalla fisica delle particelle, $\omega' > (1 + \omega)$. Essendo che questi due limiti sono validi fin quando $(1 + \omega) \ll 1$, si pone solitamente $\omega \lesssim -0.8$ come limite pratico di validità del vincolo su ω' [8].

Nei *freezing models* invece il campo scalare ϕ sta già "scivolando" verso il minimo del potenziale, decelerando fino a quasi fermarsi a causa del progressivo appiattimento del potenziale. Le soluzioni del sistema, partendo da condizioni iniziali anche diverse, convergono ad una traiettoria comune, da ciò segue che inizialmente l'equazione di stato da $\omega_\phi > -1$ col tempo tende ad assumere valori sempre più vicini al valore limite ($\omega' < 0$). Dall'appiattimento del potenziale segue $\ddot{\phi} > dV/d\phi$, portando al limite inferiore $\omega' > 3\omega(1 + \omega)$ [3, 7, 8]. Studi su diversi modelli di campi scalari portano ad individuare anche ad un limite superiore, meno definito, approssimato a $\omega' \lesssim 0.2\omega(1 + \omega)$. Anche in questo caso $\omega \lesssim -0.8$ fornisce un limite di applicabilità del vincolo su ω' [8].

Vi è anche un limite inferiore al valore che ω può assumere e si può dimostrare che vale $1 + \omega \gtrsim 0.01$ ($\omega \lesssim -0.99$) per i modelli *freezing* e $1 + \omega \gtrsim 0.04$ ($\omega \lesssim -0.96$) per i modelli *thawing*. Allora il range di valori che può assumere un generico modello di quintessenza è:

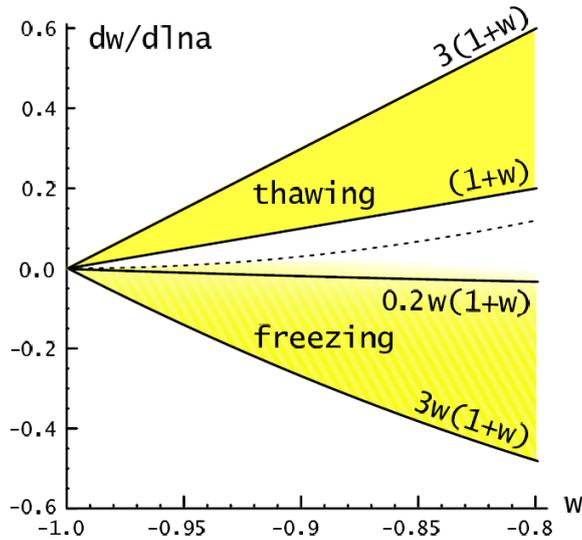


Figura 3.1: Piano delle fasi $\omega - \omega'$, evidenziate in giallo sono le zone di esistenza dei modelli *thawing* e *freezing*. Il bordo superiore della regione del *freezing* va sfumando in quanto il limite superiore è solo un'approssimazione. La linea tratteggiata in mezzo alle due regioni delimita la regione di $\omega - \omega'$ in cui il campo accelera verso il minimo del potenziale da quella in cui il campo decelera verso quest'ultimo.

$$-0.99 \lesssim \omega \lesssim -0.8 \quad (\text{freezing}) \quad (3.1)$$

$$-0.96 \lesssim \omega \lesssim -0.8 \quad (\text{thawing}) \quad (3.2)$$

I range su ω (e di conseguenza i range per ω') appena descritti distinguono in maniera netta i modelli di quintessenza *thawing* da quelli *freezing*, ciò è chiaro dalla figura (3.1) dove sul piano delle fasi $\omega - \omega'$ sono evidenziate le regioni di esistenza dei due modelli. Le stime teoriche dei limiti sui valori che l'equazione di stato ω_ϕ può assumere (3.1) e (3.2) vanno confrontate anche con le stime sperimentali ottenute unendo le varie osservazioni cosmologiche effettuate: i vincoli incrociati provenienti da diverse prove osservative di studi indipendenti forniscono infatti maggiori limitazioni sui possibili valori di ω_{DE} , Ω_{DE} delle prove osservative prese singolarmente. Se si sceglie di parametrizzare l'equazione di stato come una quantità costante $\omega = \omega_0$, così come ipotizzato dal modello ΛCDM allora -incrociando le osservazioni di Planck, CMB, BAO e altri studi osservativi- si ottiene [5]:

$$\omega_0 = -1.04 \pm 0.10 \quad 95\% \text{ CL.}$$

Se si sceglie invece la parametrizzazione con due parametri per permettere una descrizione funzionale di un'equazione di stato dinamica, ossia $\omega = \omega_0 + (1 - a)\omega_a$ con ω_0 , ω_a costanti [5, 10], allora si ottengono delle stime osservative leggermente diverse. Fissando la prior $\omega_a = 0$ (ipotesi modello ΛCDM), da Planck+ SNe (Supernovae Ia) + BAO + CMB + altre osservazioni [5]:

$$\omega_0 = -1.028 \pm 0.031 \quad 68\% \text{ CL.}$$

Si nota che questo valore dell'equazione di stato è < -1 , favorendo maggiormente ipotesi di modelli di quintessenza cosiddetti "non canonici" (ovvero campi scalari dove la forma

della Lagrangiana può differire da (2.2), permettendo così a ω_ϕ di assumere valori anche più negativi di -1 .) Lasciando ω_0, ω_a come parametri liberi, da Planck+SNe+BAO si ottiene [5]:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= -0.957 \pm 0.080 \quad 68\% \text{ CL.} \\ \omega_a &= -0.29^{+0.32}_{-0.26} \quad 68\% \text{ CL.}\end{aligned}$$

Restringendo invece l'equazione di stato ad assumere valori maggiori di -1 (escludendo quindi i modelli non canonici) si ottiene -sempre da Planck + SNe + BAO + CMB + altri studi - $\omega_0 < -0.95$ 95% CL. [5]

Conclusioni

L'esistenza dell'energia oscura, intesa come componente -oggi dominante- di energia presente nell'Universo responsabile dell'espansione accelerata di quest'ultimo, è un fatto comprovato sperimentalmente. Per comprendere la dinamica di questa componente nel contesto di un generico modello cosmologico il migliore strumento matematico a nostra disposizione è la teoria dei sistemi dinamici.

Partendo dal modello Λ CDM e analizzandone le orbite nello spazio delle fasi definito dalle variabili EN associate abbiamo notato come la teoria dei sistemi dinamici può prevedere una evoluzione di Universo in accordo con le osservazioni sperimentali, seppure evidenziandone la fragilità teorica in quanto piccole modifiche nelle condizioni iniziali e nel valore di Λ porta a previsioni completamente diverse. Analizzando i modelli di quintessenza invece abbiamo visto come, a seconda del potenziale scelto, la teoria dei sistemi dinamici ha fornito diverse soluzioni: il modello di potenziale esponenziale singolo dava come possibili dinamiche un'espansione accelerata, soluzione sensibile alle condizioni iniziali, e una soluzione "scalare" che allevia il problema alle condizioni iniziali ma che non fornisce una dinamica accelerata dell'espansione dell'Universo. Il potenziale esponenziale doppio ha mostrato la possibilità di avere entrambi gli andamenti nello spazio delle fasi. Il potenziale polinomiale ha dato origine a due dinamiche diverse: il modello *tracking*, che prevede un'espansione accelerata a partire da diverse condizioni iniziali, e il modello *thawing*, che colloca l'espansione accelerata come una fase intermedia dell'evoluzione dell'Universo.

Infine per vincolare sperimentalmente i diversi modelli abbiamo distinto le varie dinamiche sulla base dell'evoluzione dell'equazione di stato prevista dai singoli modelli: i modelli di quintessenza quindi possono essere distinti in *thawing* e *freezing models*: per distinguerli sperimentalmente bisognerebbe ottenere una misura con risoluzione dell'ordine di $\sigma(\omega') \approx (1+\omega)$ [8]. Essendo tale precisione sulla misura non ancora raggiunta, ad oggi non è ancora fattibile distinguere sul piano osservativo un modello *thawing* da un modello *freezing* di quintessenza, e in generale non è ancora possibile distinguere -sempre dal punto di vista osservativo- un qualsiasi modello di quintessenza dal modello Λ CDM.

Bibliografia

- [1] Bahamonde, S., Boehmer, C.G., Carloni, S., Copeland, E.J., Fang, W., Tamanini, N., (2017). Dynamical systems applied to cosmology: Dark energy and modified gravity. *Physics Reports*. 775-777. 10.1016/j.physrep.2018.09.001.
- [2] Jensko, E. (UCL), 2017/2018. Scalar fields in Cosmology: a dynamical systems approach. *MSc dissertation in Gravity, Particles and Fields*. URL: https://www.ucl.ac.uk/~ucaheje/PDF/MSc_Thesis.pdf
- [3] Copeland, E.J., Sami, M., Tsujikawa, S., (2006). Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys. D*. 15. pp.1753-1935. arXiv:hep-th/0603057.
- [4] Sahni, V., (2002). The Cosmological Constant Problem and Quintessence. *Classical and Quantum Gravity*. 19. 10.1088/0264-9381/19/13/304.
- [5] Planck Collaboration, Aghanim, N., et al., (2020). Planck 2018 Results. VI. Cosmological Parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641, Article No. A6, p.67. arXiv:1807.06209.
- [6] Calcagni G.,(2013). *Quantum Gravity and Quantum Cosmology*. Springer, pp. 289-326.
- [7] Tsujikawa, S., (2013). Quintessence: A Review. *Classical and Quantum Gravity*. 30. 10.1088/0264-9381/30/21/214003.
- [8] Caldwell, R.R., Linder, E.V., (2005). The Limits of Quintessence. *Physical review letters*, 95(14), p.141301. arXiv:astro-ph/0505494.
- [9] Chiba, T., De Felice, A., Tsujikawa, S., (2013). Observational Constraints on Quintessence: Thawing, Tracker, and Scaling models. *Physical Review D*, 87(8), p.083505. arXiv:1210.3859.
- [10] Frieman, J., Turner, M.S., Huterer, D., (2008). Dark Energy and the Accelerating Universe. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 46. 10.1007/978-1-4419-5668-2_6.