



Università degli Studi di Padova

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Equazione di Korteweg-de Vries e sue soluzioni solitoniche

Candidato:
Clara Dainese
Matricola 575274

Relatore:
Prof. Giancarlo Benettin

Correlatore:
Dr. Antonio Ponno

Sommario

Questo elaborato si propone di studiare le proprietà ed il comportamento di un certo tipo di equazioni d'onda non lineari, che hanno particolari soluzioni localizzate dette solitoni. L'analisi riguarda in particolare le onde di superficie in acque poco profonde e prende in considerazione le soluzioni solitoniche dell'equazione di Korteweg-de Vries.

Il primo capitolo introduce l'argomento: vi è riportata una breve storia della scoperta dei solitoni, dalle prime osservazioni all'elaborazione di equazioni, seguita da una panoramica delle principali proprietà del tipo di onda in esame e da una presentazione del metodo delle differenze finite, utilizzato nel quarto capitolo per la soluzione numerica della KdV.

Nel secondo capitolo si delinea il quadro di lavoro per il capitolo successivo. Partendo dalle equazioni di base di meccanica dei fluidi e fissate le condizioni al bordo, si ricavano le equazioni delle onde di superficie, analizzando anche gli effetti della tensione superficiale. Nel terzo si procede così alla deduzione dell'equazione di Korteweg-de Vries in forma standard per mezzo di cambiamenti di variabile e di un'espansione in serie troncata opportunamente.

Infine, il quarto capitolo mostra la consistenza di alcune proprietà dei solitoni tramite una soluzione numerica della KdV, riportando i grafici ottenuti dalle simulazioni al variare dei dati iniziali.

Indice

1	Introduzione	7
1.1	La scoperta e lo studio delle onde solitarie	7
1.2	Solitoni: onde non lineari	8
1.3	Metodo delle differenze finite	10
2	Equazioni di partenza per la KdV	13
2.1	Equazioni di base di meccanica dei fluidi	13
2.1.1	Conservazione della massa	13
2.1.2	Conservazione della quantità di moto	14
2.2	Ipotesi di base e approssimazioni	16
2.2.1	Condizioni al bordo	16
2.2.2	La tensione superficiale	17
2.2.3	Onde di superficie di piccola ampiezza in acque poco profonde	18
3	Deduzione della KdV: approccio perturbativo	23
4	Soluzioni solitoniche della KdV e loro evoluzione nel tempo	27
4.1	Proprietà delle soluzioni	27
4.2	Schema numerico adottato	29
4.3	Programma	30
4.4	Grafici degli andamenti	31
	Bibliografia	41

Capitolo 1

Introduzione

1.1 La scoperta e lo studio delle onde solitarie

Lo studio dei solitoni e delle loro proprietà vede le sue origini nel 1834, quando John Scott Russell, un ingegnere scozzese, fu colpito da un fenomeno insolito ([8]). Osservando una barca trascinata da due cavalli in uno stretto canale ad Edimburgo, notò che, all'improvviso fermarsi dell'imbarcazione, la massa d'acqua messa in moto da quest'ultima continuava ad allontanarsi a gran velocità, acquisendo la forma di una singola onda ben definita. La propagazione lungo il canale apparentemente non modificava la forma nè la velocità dell'onda osservata, e seguendone l'andamento a cavallo, Russell stabilì che si stesse muovendo a circa otto o nove miglia all'ora, con un'altezza di una trentina di centimetri e una lunghezza di circa dieci metri. Dopo un paio di miglia la diminuzione dell'altezza dell'onda dovuta all'attrito gliene rese impossibile l'osservazione, ma l'accaduto aveva ormai scatenato la sua curiosità. Ribattezzò la perturbazione "Wave of Translation" e in seguito eseguì molteplici esperimenti in altri canali e in un serbatoio nel suo giardino ([9]), che gli permisero di ricavare empiricamente una relazione tra la profondità h dell'acqua, la velocità c e l'ampiezza a dell'onda:

$$c^2 = g(h + a)$$

I suoi contemporanei tuttavia non compresero l'importanza delle sue scoperte, soprattutto perchè erano in disaccordo con le teorie convenzionali della fluidodinamica: sembrava impossibile che un'onda completamente al di sopra dell'acqua potesse muoversi imperturbata.

Bisognò attendere i lavori di Joseph Boussinesq del 1871 e di Lord Rayleigh del 1876, che confermarono i risultati di Russell e nei loro trattati individuarono anche un'espressione per il profilo dell'onda:

$$\eta(x, t) = a \operatorname{sech}^2(\beta(x - ct))$$

per $a/h \ll 1$ e $\beta^{-2} = 4h^2(h + a)/3a$ ([2]).

Ma fu solo nel 1895, grazie ad una pubblicazione dei due matematici olandesi

desi Diederick Johannes Korteweg e Gustav de Vries, che si ottenne finalmente un'equazione non lineare per descrivere i fenomeni osservati da Russell. L'equazione, che porta il nome degli scopritori, ammette una soluzione esatta della forma ricavata da Rayleigh e Boussinesq. La forma originale dell'equazione era la seguente:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)$$

dove η rappresenta l'innalzamento della superficie al di sopra del livello d'equilibrio dell'acqua h , α è una costante arbitrariamente piccola relativa al moto uniforme del liquido e $\sigma = \frac{h^3}{3} - \frac{Th}{\rho g}$, con T tensione superficiale e ρ densità del fluido.

Nella seconda metà del '900 diversi scienziati approfondirono il problema, ed in particolare Norman Zabusky e Martin Kruskal nel 1965 [12] mostrarono il comportamento delle onde solitarie con un'approccio numerico all'equazione di Korteweg-De Vries servendosi di uno schema alle differenze finite. Sono proprio loro a denominare questo tipo di onde solitoni: onde solitarie che preservano la loro forma in seguito ad un'interazione (durante la quale l'ampiezza totale non corrisponde alla somma delle ampiezze come nel caso lineare), evidenziando solo una variazione di fase dopo essersi attraversate. Per questa loro analogia con le particelle il loro nome contiene il suffisso *-oni*.

Nel 1967, Gardner, Greene, Kruskal e Miura in [3], grazie al metodo dell'*inverse scattering transform*, furono in grado di ricavare soluzioni analitiche della KdV per dati iniziali tendenti rapidamente ad una costante per $|x| \rightarrow +\infty$.

1.2 Solitoni: onde non lineari

I solitoni apparivano tanto improbabili ai contemporanei di Russell perchè intrinsecamente differenti dalle onde lineari alle quali erano abituati. Essi sono causati da effetti non lineari nel mezzo in cui si propagano, come uno strato di acqua poco profonda, il plasma o una fibra ottica. Il loro studio non è strettamente legato soltanto alle onde marine di superficie come nei primi tempi: se ne sono infatti trovate applicazioni nella trasmissione a lunga distanza tramite fibre ottiche senza l'uso di ripetitori, in assenza di dissipazione, si sono osservati profili solitonici in onde interne sottomarine causate da differenze di pressione e salinità, solitoni acustici e luminosi nei plasmi e nei cristalli anarmonici, nonchè solitoni atmosferici, e sembrano comparire anche nella dinamica di sistemi molecolari come proteine e DNA. Inoltre le soluzioni solitoniche non sono ammesse soltanto dalla KdV, come si pensava in un primo momento, ma anche da altre equazioni non lineari: tra

le più note ricordiamo l'equazione di Sine-Gordon, l'equazione di Schrödinger non lineare, l'equazione di Toda, l'equazione di Boussinesq.

L'equazione di Korteweg-de Vries, la cui forma standard ¹ è

$$\varphi_t + 6\varphi\varphi_x + \varphi_{xxx} = 0$$

è una equazione differenziale alle derivate parziali, nella quale il termine non lineare è dato da $\varphi\varphi_x$, che descrive l'evoluzione per tempi lunghi di onde monodimensionali dispersive la cui ampiezza è piccola rispetto alle altre grandezze in gioco, profondità e lunghezza d'onda (la profondità a sua volta deve essere piccola rispetto alla lunghezza d'onda). In particolare la sua soluzione ad un solo solitone è quella che è nota col nome di Tsunami, un'onda solitaria di superficie di ampiezza dell'ordine di alcuni o poche decine di centimetri, comunque molto minore rispetto alla profondità h , e di lunghezza d'onda $\lambda \gg h$, che viaggia nell'oceano a velocità $c = \sqrt{gh}$ (può raggiungere i 900 km/h), causata principalmente da movimenti sismici sottomarini.

Le caratteristiche peculiari dei solitoni, che li distinguono dalle onde lineari sono principalmente le seguenti:

- sono onde di forma permanente, non presentano infatti una cresta e un ventre, ma si mantengono costantemente al di sopra o al di sotto della superficie
- sono onde localizzate, cioè decadono ad una costante all'infinito (la loro forma è ben descritta dalla secante iperbolica)
- la loro velocità dipende dall'ampiezza
- un generico profilo iniziale non si mantiene, ma decade nel tempo in un treno di N solitoni di ampiezza diversa, più una coda laterale detta radiazione che tende a smorzarsi (ed anche questo fatto rivela un comportamento particellare)
- nella collisione tra due solitoni, questi si attraversano e riemergono senza modificare la propria forma, ma subiscono uno sfasamento.

Nel quarto capitolo verificheremo queste proprietà tramite una simulazione numerica, sulla scia del lavoro di Zabusky e Kruskal [12].

¹i coefficienti sono arbitrari, è possibile infatti ottenere qualsiasi coefficiente diverso da zero tramite un cambio di variabili

$$t \mapsto \alpha t', \quad x \mapsto \beta x'$$

1.3 Metodo delle differenze finite

I modelli matematici dei fenomeni fisici prendono principalmente la forma di equazioni differenziali o integrali. Grazie allo sviluppo dei calcolatori è stato possibile servirsi in modo massiccio di questi modelli ricorrendo alle simulazioni ed evitando così molti test di laboratorio, con una semplificazione notevole della fase sperimentativa.

Per utilizzare modelli matematici su un calcolatore è tuttavia necessario operare con metodi numerici, che sostituiscono la soluzione analitica esatta (la cui ricerca diretta è un problema che si sa risolvere esplicitamente soltanto in pochi casi) con una soluzione approssimata che permetta di stabilire comunque le proprietà della soluzione.

L'idea di fondo di qualunque metodo numerico per le equazioni differenziali è quella di discretizzare un dato problema continuo, che ha quindi infiniti gradi di libertà, per ottenere un problema discreto facilmente elaborabile da un calcolatore. I valori approssimati della soluzione sono calcolati per un numero discreto di valori delle variabili indipendenti.

Il cosiddetto FEM, metodo degli elementi finiti, è una tecnica generale per la soluzione approssimata di equazioni differenziali o integrali nella scienza e nell'ingegneria. Questo metodo fu introdotto negli anni '50 del secolo scorso e venne chiamato in questo modo poichè la struttura studiata veniva divisa in piccole parti, gli elementi finiti appunto. Durante gli anni '60 e '70 il metodo fu ampiamente sviluppato da ingegneri, matematici e analisti numerici per la risoluzione di equazioni differenziali in molteplici campi.

Tuttavia il metodo numerico classico per risolvere le equazioni differenziali alle derivate parziali è quello delle differenze finite: le derivate che compaiono nell'equazione sono sostituite da rapporti incrementali fatti sul passo di discretizzazione, dato che il limite di questi per una discretizzazione infinitesima è appunto la derivata.

Si ricava così un algoritmo che permette di calcolare il valore numerico della soluzione approssimata per ogni valore discreto delle variabili indipendenti.

Gli obiettivi da perseguire nell'applicazione di tali metodi sono principalmente due: l'algoritmo dev'essere stabile, ovvero non deve amplificare gli errori insiti nei dati iniziali o prodotti dai primi passi dell'algoritmo stesso, ed efficiente, ossia deve presentare un basso costo computazionale e dev'essere possibile per il calcolatore ricavare la soluzione in un tempo accettabile. Per quanto riguarda il primo punto, si può dire che un errore, una volta generato, generalmente si propagherà attraverso il calcolo. Questo conduce al concetto di stabilità numerica: un algoritmo si dice numericamente stabile se un errore, una volta che è stato generato, non cresce troppo durante il calcolo. Per alcuni problemi non esistono algoritmi stabili, in quanto per variazioni arbitrariamente piccole dei dati del problema, la soluzione varia comunque di molto. Generalmente, comunque, si può garantire la stabilità tramite una scelta opportuna dei passi di discretizzazione.

Per il secondo, è necessario ottimizzare l'algoritmo in modo che il tempo di esecuzione sia al più una funzione lineare o poco più che lineare della quantità di dati da gestire.

Gli algoritmi di analisi numerica sono applicati per risolvere svariati problemi scientifici e tecnici (previsioni meteorologiche, analisi di molecole, scienza delle costruzioni, meccanica dei fluidi ecc.) e rappresentano quindi uno strumento molto potente al servizio della scienza.

Capitolo 2

Equazioni di partenza per la KdV

Prima di ricavare l'equazione di Korteweg-de Vries, introduciamo le equazioni di meccanica dei fluidi che ne hanno reso possibile la deduzione, partendo da semplici leggi di conservazione della massa e della quantità di moto (si vedano [4] e [1]). Esporremo inoltre le ipotesi semplificative del problema in studio, ovvero l'assenza di tensione superficiale (trascurabile), e le condizioni al bordo.

2.1 Equazioni di base di meccanica dei fluidi

Nel seguito faremo riferimento al modello del fluido ideale, ovvero soddisfacente le seguenti ipotesi:

- il fluido è incompressibile (densità ρ costante)
- non avvengono scambi di calore tra le diverse parti del fluido, cioè non vi è un gradiente di temperatura (moto adiabatico)
- la viscosità è nulla
- il moto è irrotazionale, ciò è possibile grazie all'assenza di viscosità e di scambi di calore.

2.1.1 Conservazione della massa

Se consideriamo un arbitrario volume V_0 del fluido, limitato da una superficie S_0 , la massa M in esso contenuta è

$$M = \int_{V_0} \rho dV \quad (2.1)$$

Il flusso totale attraverso S_0 è

$$\frac{\partial M}{\partial t} = - \int_{S_0} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.2)$$

con $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ velocità della particella di fluido e \mathbf{n} versore normale all'unità di superficie dS .

Il flusso entrante in S_0 è pari all'aumento per unità di tempo del fluido in V_0

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = - \int_{S_0} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.3)$$

Applicando il teorema di Green, trasformiamo l'integrale di superficie in un integrale di volume e otteniamo:

$$\int_{V_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \quad (2.4)$$

Poichè V_0 è arbitrario, la relazione precedente deve valere per qualsiasi volume di fluido considerato. Si ricava quindi l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.5)$$

2.1.2 Conservazione della quantità di moto

Si assuma inizialmente che l'unica forza agente sul fluido sia dovuta alla pressione $p = p(x, y, z, t)$. La forza totale agente su V_0 è

$$\mathbf{F} = - \int_{S_0} p \mathbf{n} dS = - \int_{V_0} (\nabla p) dV \quad (2.6)$$

sempre per la formula di Green. Ciò significa che una forza $-\nabla p$ agisce su un'unità di volume.

Scriviamo l'equazione del moto per un'unità di volume dV del fluido di massa dM

$$-\nabla p = \frac{dM}{dV} \mathbf{a} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.7)$$

La velocità \mathbf{v} è funzione delle coordinate spaziali e del tempo t , possiamo quindi scrivere:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz \quad (2.8)$$

Da cui:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \quad (2.9)$$

Quindi l'equazione (2.7) diventa

$$-\nabla p = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) \quad (2.10)$$

Se ora consideriamo che il fluido si trova in un campo gravitazionale, la forza addizionale $\rho \mathbf{g} = -\rho g \mathbf{e}_z$ agisce su ogni unità di volume. E' sufficiente aggiungere questa forza al primo membro della (2.10), ottenendo le cosiddette equazioni di Eulero

$$\mathbf{f} - \nabla p = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) \quad (2.11)$$

Ci serviamo ora della seguente identità vettoriale:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (|\mathbf{v}|^2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (2.12)$$

Assumendo l'irrotazionalità del fluido, risulta $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, semplificando l'identità precedente; inoltre, il campo di velocità del flusso, in quanto irrotazionale, si può esprimere come il gradiente di uno scalare detto potenziale di velocità:

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (2.13)$$

Sostituendo quest'equazione in quella di continuità (2.5) si ricava l'equazione di Laplace:

$$\Delta \phi = 0 \quad (2.14)$$

Tornando a (2.11) e sostituendovi le relazioni trovate, dividendo tutto per ρ e ricordando che $\mathbf{f} = -\rho g \mathbf{e}_z$:

$$\partial_t \nabla \phi = -\nabla \left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz \right] \quad (2.15)$$

Integrando quest'equazione rispetto alle variabili spaziali si trova:

$$\partial_t \phi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz = C(t) \quad (2.16)$$

dove $C(t)$ è un'arbitraria funzione del tempo che possiamo assumere uguale a zero senza perdita di generalità ¹.

¹Infatti, sostituendo ϕ con $\psi = \phi + \int \left[C(t) - \frac{p_0}{\rho} \right] dt$, con p_0 costante che rappresenta la pressione atmosferica sulla superficie libera, si ottiene :

$$\partial_t \psi + C(t) - \frac{p_0}{\rho} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + gz = C(t)$$

cioè

$$\partial_t \psi + \frac{p - p_0}{\rho} + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + gz = 0$$

In definitiva (vedasi nota), l'equazione risulta:

$$\partial_t \phi + \frac{p - p_0}{\rho} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz = 0 \quad (2.17)$$

2.2 Ipotesi di base e approssimazioni

2.2.1 Condizioni al bordo

L'equazione di Laplace (2.14) e la (2.17) devono essere accompagnate da opportune condizioni al bordo sulla superficie libera e sul fondo orizzontale. Sul bordo superiore sia

$$z = \eta(x, y, t) \quad (2.18)$$

l'equazione del pelo libero. All'equilibrio $\eta = 0$.

Imponiamo la condizione che le particelle di fluido non si staccino dalla superficie. Differenziamo quindi la 2.21 ottenendo:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.19)$$

Ricordando che $\mathbf{v} = \nabla \phi$, otteniamo:

$$\phi_z = \frac{\partial \eta}{\partial x} \phi_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} \phi_y + \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{su} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (2.20)$$

Le due forme, che sono equivalenti, sono dette in letteratura condizione cinematica al bordo.

Al bordo inferiore la velocità normale (quindi lungo la direzione z) del fluido deve essere nulla, perchè l'acqua non può superare il fondo rigido, mentre le componenti nelle direzioni x e y possono essere diverse da zero.

$$\phi_z = 0 \quad \text{su} \quad z = -h \quad (2.21)$$

Ignorando per il momento la tensione superficiale, la pressione dell'acqua e del fluido esterno (l'aria) devono essere uguali sulla superficie. Quindi, su $z = \eta$, l'equazione (2.17) porge

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0 \quad (2.22)$$

cioè

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0 \quad (2.23)$$

che rappresenta la condizione dinamica al bordo.

2.2.2 La tensione superficiale

Per completezza, benchè non sia rilevante nella scala in cui poi lavoreremo, consideriamo anche l'effetto della tensione superficiale. Con riferimento alla figura 2.1, consideriamo due archi PQ e P'Q' su un elemento di superficie libera ABCD, contenuti nei piani normali alla superficie. I raggi locali di curvatura siano R_y ed R_x rispettivamente.

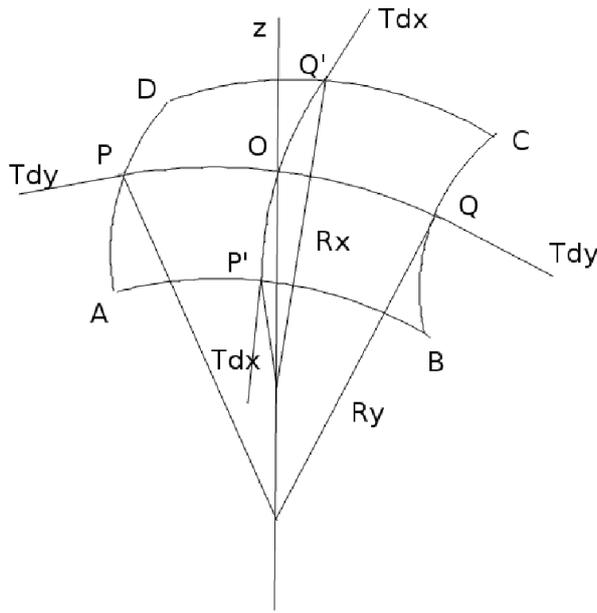


Figura 2.1: Elemento di superficie sottoposto a tensione superficiale

L'elemento di superficie è sottoposto (sia agli estremi AD e BC che AB e DC) ad una tensione superficiale T per unità di lunghezza in direzione tangenziale alla superficie. La pressione atmosferica è p_a e la pressione dell'acqua appena sotto alla superficie è p .

Per l'equilibrio della superficie, la somma delle forze di tensione dev'essere uguale alla risultante delle forze di pressione.

$$F_z = Tdy \frac{dx}{R_y} + Tdx \frac{dy}{R_x} = (p_a - p) dxdy \quad (2.24)$$

Si ottiene così la relazione di Laplace tra la differenza di pressione e le curvature:

$$p_a - p = T \left(\frac{1}{R_y} + \frac{1}{R_x} \right) \quad (2.25)$$

Al tempo t la superficie libera ha equazione $z = \eta(x, y, t)$ e le curvature sono

$$\frac{1}{R_y} = \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{1}{R_x} = \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Per onde di piccola pendenza la (2.24) si può riscrivere

$$p_a - p = T \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \quad (2.26)$$

In seguito verificheremo se sia legittimo trascurare gli effetti della tensione superficiale. Per fare ciò ci caliamo nella situazione di onde in acqua bassa e ricaviamo alcune relazioni che saranno utili anche nel prossimo capitolo.

2.2.3 Onde di superficie di piccola ampiezza in acque poco profonde

Consideriamo il moto di onde sulla superficie dell'acqua nel campo gravitazionale costante di modulo g , ritenendo dapprima la forza di gravità come la forza dominante. In questo paragrafo linearizzeremo il problema per un primo livello di comprensione, ricavando l'approssimazione per la velocità delle onde di superficie.

Le equazioni che regolano le onde in queste condizioni sono quelle ricavate precedentemente (nelle ipotesi di fluido ideale):

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{per} \quad -h < z < \eta(x, y, t) \quad (2.27)$$

$$\phi_z = \eta_x \phi_x + \eta_y \phi_y + \eta_t \quad \text{su} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (2.28)$$

$$\phi_z = 0 \quad \text{su} \quad z = -h \quad (2.29)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0 \quad \text{su} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (2.30)$$

Se consideriamo piccole perturbazioni, l'elevazione della superficie libera sopra il livello medio η e il potenziale di velocità ϕ sono entrambi piccoli rispetto alla lunghezza d'onda e al periodo delle onde. Le condizioni al bordo possono essere linearizzate così

$$\eta_t - \phi_z = 0 \quad z = \eta \quad (2.31)$$

$$\phi_t + g\eta = 0 \quad z = \eta \quad (2.32)$$

Poichè η è piccolo, si può espandere ϕ_z in serie di Taylor attorno a $z = 0$:

$$(\phi_z)_\eta = (\phi_z)_0 + \eta (\phi_{zz})_0 + \dots$$

Fermandoci al primo ordine, nella (2.31) ϕ_z può essere valutato in $z = 0$. Differenziando la (2.32) rispetto al tempo e sfruttando l'uguaglianza $\eta_t = \phi_z$ su $z = 0$ come appena detto otteniamo:

$$\phi_{tt} + g\phi_z = 0 \quad z = 0 \quad (2.33)$$

Così facendo abbiamo ridotto il problema al contorno non lineare ad un problema lineare con bordo fissato per il potenziale di velocità. Le equazioni sono dunque:

$$\Delta\phi = 0 \quad -h < z < 0 \quad (2.34)$$

$$\phi_{tt} + g\phi_z = 0 \quad z = 0 \quad (2.35)$$

$$\phi_z = 0 \quad z = -h \quad (2.36)$$

D'ora in poi ci restringeremo al problema monodimensionale, considereremo cioè onde che si propagano lungo l'asse x che sono uniformi nella direzione y . Tutte le quantità risulteranno quindi indipendenti da y .

Sperimentalmente si osserva che nel caso lineare le onde di superficie sono approssimabili con onde sinusoidali qualche tempo dopo la loro generazione dovuta ad una perturbazione. Questo suggerisce di cercare una soluzione a variabili separabili per la (2.34), della forma

$$\phi = q(x, z) \sin(kx - \omega t) \quad (2.37)$$

Sostituendo (2.37) in (2.34) abbiamo

$$\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - k^2 q \right) \sin(kx - \omega t) + k \frac{\partial q}{\partial x} \cos(kx - \omega t) = 0 \quad (2.38)$$

Quest'equazione è soddisfatta se sia il coefficiente del seno che quello del coseno sono nulli, quindi $\frac{\partial q}{\partial x} = 0$, cioè q è indipendente da x (non vi è dissipazione).

Inoltre $\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - k^2 q = 0$, la cui soluzione generale è $q(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$, con A e B costanti arbitrarie. La condizione al bordo (2.36) porge $B = Ae^{-2kh}$. Il potenziale di velocità può essere quindi espresso come

$$\phi = \omega a_m \frac{\cosh[k(z+h)]}{k \sinh(kh)} \sin(kx - \omega t) \quad (2.39)$$

con $a_m = 2e^{-kh} \frac{kA}{\omega} \sinh(kh)$. Da (2.31) possiamo ricavare la forma della superficie libera, derivando l'equazione precedente rispetto a z ed integrando rispetto a t

$$\eta = a_m \cos(kx - \omega t) \quad (2.40)$$

su $z = 0$. Non compare la costante di integrazione perchè il valore medio di η è zero.

Considerando (2.35) si ottiene la relazione di dispersione per onde di gravità di piccola ampiezza sulla superficie dell'acqua:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (2.41)$$

Dalla relazione $\omega = kv_f$ ([5]), possiamo calcolare la velocità di fase

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \quad (2.42)$$

e la velocità di gruppo $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

$$v_g = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k \tanh(kh)}} [\tanh(kh) + kh \operatorname{sech}^2(kh)] \quad (2.43)$$

Poichè le ultime quantità dipendono da kh e quindi da $\frac{h}{\lambda}$, calandoci nel caso di onde in acque poco profonde, cioè $\frac{h}{\lambda} \ll 1$, possiamo espandere $\tanh(kh)$ in serie di Taylor:

$$\tanh(kh) \approx kh - \frac{(kh)^3}{3}$$

e la relazione di dispersione (2.41) è approssimata da

$$\omega \approx c_o k \left(1 - \frac{1}{6} (kh)^2\right) \quad (2.44)$$

dove $c_o = \sqrt{gh}$. Questa relazione corrisponde ad onde debolmente dispersive in acque poco profonde. Definendo $\frac{h}{\lambda} = \delta$, dove δ è un piccolo parametro, vediamo che nella relazione precedente il termine dispersivo di ordine dominante è δ^2 . Ignorando questo termine, per onde con lunghezza d'onda molto maggiore della profondità, (2.41) e (2.42) possono essere approssimati così

$$\omega \approx c_o k \quad v_f \approx c_o \quad (2.45)$$

La velocità di fase risulta quindi indipendente dalla lunghezza d'onda ma varia con la radice quadrata della profondità. La velocità di gruppo è $v_g \approx c_o$.

Possiamo poi sfruttare le approssimazioni

$$\cosh[k(z+h)] \approx 1 \quad \sinh(kh) \approx kh$$

Quindi l'espressione (2.39) per il potenziale di velocità può essere approssimata da un'onda armonica di ampiezza costante.

Andiamo ora ad analizzare l'effetto della tensione superficiale su quanto ricavato. Finora abbiamo supposto che la pressione sulla superficie fosse uguale alla pressione atmosferica p_a . Di fatto, la discontinuità tra acqua e aria sul pelo libero crea una differenza di pressione tra i due fluidi e la superficie si comporta come se fosse sottoposta ad una tensione. Anche la tensione superficiale, così come la gravità, ha effetti dispersivi sulle onde. L'equazione (2.30), tenendo in considerazione gli effetti della tensione superficiale ricavata in 2.2.2, diventa:

$$\phi_t + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + g\eta - \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{su} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (2.46)$$

che per onde di piccola ampiezza diventa lineare. Differenziando rispetto al tempo e servendoci di (2.31) otteniamo

$$\phi_{tt} + g\phi_z - \frac{T}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{su} \quad z = 0 \quad (2.47)$$

Restringendoci sempre al caso di onde propagantisi lungo l'asse x e uniformi lungo l'asse y , il procedimento per ricavare la soluzione dell'equazione precedente è analogo a quello enunciato in assenza di tensione superficiale. Cercando soluzioni sinusoidali come fatto in precedenza si ottiene la relazione di dispersione

$$\omega = \sqrt{gk \left(1 + \frac{Tk^2}{\rho g} \right) \tanh(kh)} \quad (2.48)$$

La velocità di fase diventa

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k} \left(1 + \frac{Tk^2}{\rho g} \right) \tanh(kh)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \left(1 + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho g} \right) \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \quad (2.49)$$

La rilevanza della tensione superficiale è misurata dal parametro

$$I = \frac{Tk^2}{\rho g} = \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho g}$$

Nelle ipotesi di grande lunghezza d'onda gli effetti della tensione superficiale sono quindi trascurabili e le onde sono approssimabili con pure onde di gravità come già visto.

Capitolo 3

Deduzione della KdV: approccio perturbativo

Seguendo il procedimento di [7], il moto della superficie libera si trova ricavando una soluzione dell'equazione di Laplace che soddisfi le condizioni al bordo che ora richiamiamo:

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{per} \quad -h < z < \eta(x, t) \quad (3.1)$$

$$\phi_z = \eta_x \phi_x + \eta_t \quad \text{su} \quad z = \eta(x, t) \quad (3.2)$$

$$\phi_z = 0 \quad \text{su} \quad z = -h \quad (3.3)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0 \quad \text{su} \quad z = \eta(x, t) \quad (3.4)$$

Se ora operiamo una traslazione in modo che il fondale corrisponda a $z = 0$, possiamo scrivere

$$\bar{z} = z + h$$

Inoltre, possiamo riscalarare la nuova variabile \bar{z}

$$Z = \frac{\bar{z}}{h} \quad (3.5)$$

in modo da renderla adimensionale. Allo stesso modo possiamo agire per tutte le variabili in gioco, ponendo:

$$\phi = \epsilon c_0 l \Phi \quad (3.6)$$

$$x = lX \quad (3.7)$$

$$t = \frac{lT}{c_0} \quad (3.8)$$

$$\eta = \epsilon h \eta' \quad (3.9)$$

e introducendo le seguenti grandezze:

$$\epsilon = \frac{a_m}{h}$$

$$\delta = \frac{h}{l}$$

con l scala di lunghezza e a_m massima ampiezza dell'onda, ricordiamo inoltre che $c_0 = \sqrt{gh}$.

Si noti che ϵ e δ sono costanti adimensionali. Nella nostra trattazione siamo interessati ai limiti $\epsilon \rightarrow 0$ e $\delta \rightarrow 0$ (sempre nell'ipotesi di grande lunghezza d'onda, piccola ampiezza dell'onda ed acque poco profonde). Nel nostro caso $a_m \ll h \ll l \implies \epsilon \ll \delta \ll 1$, la scelta di scala di interesse per noi è quella in cui ϵ è confrontabile con δ^2 . Considereremo quindi ϵ e δ^2 dello stesso ordine di grandezza, ma non uguali, in quanto a priori sono indipendenti l'una dall'altra.

A questo punto riscriviamo le equazioni su cui lavoreremo:

$$\delta^2 \Phi_{XX} + \Phi_{ZZ} = 0 \quad 0 < Z < 1 + \epsilon \eta' \quad (3.10)$$

$$\Phi_Z = 0 \quad Z = 0 \quad (3.11)$$

$$\Phi_Z = \epsilon \delta^2 \eta'_X \Phi_X + \delta^2 \eta'_T \quad Z = 1 + \epsilon \eta' \quad (3.12)$$

$$\Phi_T + \frac{1}{2} \left(\epsilon \Phi_X^2 + \frac{\epsilon}{\delta^2} \Phi_Z^2 \right) + \eta' = 0 \quad Z = 1 + \epsilon \eta' \quad (3.13)$$

Poichè Z è piccola possiamo usare un'espansione del potenziale di velocità Φ della forma:

$$\Phi = \Phi_0 + Z \Phi_1 + Z^2 \Phi_2 + \dots \quad (3.14)$$

con Φ_i funzioni di (X, T) .

Sostituendo in (3.10) e associando i termini con la stessa potenza di Z otteniamo

$$\delta^2 \Phi_{0XX} + 2\Phi_2 = 0, \quad \delta^2 \Phi_{1XX} + 6\Phi_3 = 0, \quad \delta^2 \Phi_{2XX} + 12\Phi_4 = 0 \quad (3.15)$$

L'espansione del potenziale di velocità deve soddisfare anche le condizioni al bordo. Ci serviamo di (3.11) e di (3.15), che porgono

$$\Phi_Z = \Phi_1 = 0, \quad \Phi_3 = 0 \quad (3.16)$$

e via dicendo tutti i termini di indice dispari si annullano.

Quindi, da (3.14) e da (3.15) otteniamo

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{\delta^2}{2} Z^2 \Phi_{0XX} + \frac{\delta^4}{24} \Phi_{0XXXX} + \dots \quad (3.17)$$

Da questa calcoliamo le componenti orizzontale e verticale della velocità:

$$\Phi_X = \Phi_{0X} - \frac{\delta^2}{2} Z^2 \Phi_{0XXX} + O(Z^4) \quad (3.18)$$

$$\Phi_Z = -\delta^2 Z \Phi_{0XX} + \frac{\delta^4}{6} Z^3 \Phi_{0XXXX} + O(Z^5) \quad (3.19)$$

Considerando ora le altre due condizioni al bordo superiore, (3.12) e (3.13), valide per $Z = 1 + \epsilon\eta'$, possiamo ricavare

$$-\delta^2 Z \Phi_{0XX} + \frac{\delta^4}{6} Z^3 \Phi_{0XXXX} = \epsilon \delta^2 \eta'_X \left(\Phi_{0X} - \frac{\delta^2}{2} Z^2 \Phi_{0XXX} \right) + \delta^2 \eta'_T \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_{0T} - \frac{\delta^2}{2} Z^2 \Phi_{0TXX} + \frac{\delta^4}{24} Z^4 \Phi_{0TXXXX} + \\ & + \frac{1}{2} \epsilon \left(\Phi_{0X}^2 + \frac{\delta^4}{4} Z^4 \Phi_{0XXX}^2 - \delta^2 Z^2 \Phi_{0X} \Phi_{0XXX} + \delta^2 Z^2 \Phi_{0XX}^2 \right) + \eta' = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Mantenendo i termini in ϵ e δ^2 e sostituendo l'espressione per Z

$$(1 + \epsilon\eta') \Phi_{0XX} + \epsilon \eta'_X \Phi_{0X} + \eta'_T - \frac{\delta^2}{6} (1 + \epsilon\eta')^3 \Phi_{0XXXX} = 0 \quad (3.22)$$

$$\Phi_{0T} - \frac{\delta^2}{2} (1 + \epsilon\eta')^2 \Phi_{0TXX} + \frac{\epsilon}{2} \Phi_{0X}^2 + \eta' = 0 \quad (3.23)$$

Introduciamo ora la funzione $f = \Phi_{0X}$. Sostituendola nelle due equazioni precedenti e differenziando la seconda rispetto ad X si ottiene

$$\eta'_T + \epsilon \eta'_X f + (1 + \epsilon\eta') f_X - \frac{\delta^2}{6} (1 + \epsilon\eta')^3 f_{XXX} = 0 \quad (3.24)$$

$$\eta'_X + f_T + \epsilon f f_X - \frac{\delta^2}{2} f_{TXX} = 0 \quad (3.25)$$

Se trascurassimo i termini in ϵ e δ^2 , le equazioni precedenti si ridurrebbero a

$$\eta'_T + f_X = 0 \quad \eta'_X + f_T = 0$$

Queste equazioni lineari ammettono una soluzione semplice

$$f = \eta' \quad \eta'_T = -\eta'_X$$

Questo significa che η' è una funzione della variabile $(X - T)$, cioè corrisponde a un disturbo che si muove lungo la direzione positiva di X .

Per determinare un'equazione valida per il primo ordine in ϵ e δ^2 , cerchiamo una soluzione di (3.24) e (3.25) della forma

$$f = \eta' + \epsilon F + \delta^2 G \quad (3.26)$$

dove F e G sono funzioni di η' e delle sue derivate rispetto ad X .

Poichè η' è una funzione della variabile $(X - T)$, tutte le derivate rispetto a T possono essere sostituite da derivate rispetto a X cambiate di segno. Sostituendo in (3.24) e (3.25), otteniamo

$$-\eta'_X + 2\epsilon\eta'_X\eta' + \eta'_X + \epsilon F_X + \delta^2 G_X - \frac{\delta^2}{6}\eta'_{XXX} = 0 \quad (3.27)$$

$$\eta'_X - \eta'_X - \epsilon F_X - \delta^2 G_X + \epsilon\eta'\eta'_X + \frac{\delta^2}{2}\eta'_{XXX} = 0 \quad (3.28)$$

Sottraendo la seconda dalla prima

$$\epsilon\eta'_X\eta' + 2\epsilon F_X + 2\delta^2 G_X - \frac{2}{3}\delta^2\eta'_{XXX} = 0 \quad (3.29)$$

Poichè ϵ e δ sono indipendenti, i loro coefficienti devono essere entrambi nulli. Da ciò segue

$$F = -\frac{\eta'^2}{4} + c_1(t) \quad G = \frac{1}{3}\eta'_{XX} + c_2(t) \quad (3.30)$$

Inserendo le relazioni appena ricavate in (3.27), ripristinando le derivate rispetto a T , otteniamo l'equazione di Korteweg-de Vries:

$$\eta'_T + \eta'_X + \frac{3}{2}\epsilon\eta'\eta'_X + \frac{\delta^2}{6}\eta'_{XXX} = 0 \quad (3.31)$$

Ritornando alle variabili t , η e x , otteniamo:

$$\eta_t + c_0\eta_x + \frac{3}{2}\frac{c_0}{h}\eta\eta_x + \frac{c_0}{6}h^2\eta_{xxx} = 0 \quad (3.32)$$

Con un ulteriore cambio di variabili si ricava una forma caratteristica della KdV

$$s = x - c_0 t \quad \tau = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{g}{h}}t \quad \xi = \frac{s}{h} \quad \varphi = \frac{3}{2}\frac{\eta}{h}$$

$$\varphi_\tau + 6\varphi\varphi_\xi + \varphi_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.33)$$

Capitolo 4

Soluzioni solitoniche della KdV e loro evoluzione nel tempo

A partire dalla forma caratteristica dell'equazione di Korteweg-de Vries (3.33) ricavata nel capitolo precedente, dopo aver elencato alcune proprietà delle sue soluzioni, ci serviamo di uno schema numerico alle differenze finite, precisamente quello usato da Zabusky e Kruskal nel 1965 ([12]), per ottenere l'andamento nel tempo di un certo dato iniziale.

4.1 Proprietà delle soluzioni

L'equazione di Korteweg-de Vries gode di infinite leggi di conservazione soddisfatte da tutte le soluzioni $u(x, t)$ dell'equazione in esame, del tipo:

$$T_t + X_x = 0$$

con T densità conservata e $-X$ flusso di T , entrambe funzioni di x, t, u e derivate di u rispetto a x ([6]).

Se assumiamo che u sia periodico in x (in tal caso si integra nel periodo) o che u e le sue derivate vadano a zero abbastanza rapidamente agli estremi di qualche intervallo, allora ogni legge di conservazione del tipo riportato ci fornisce una quantità conservata

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} T dx = \text{cost}$$

La KdV nella forma (4.3) può essere espressa nella forma di una legge di conservazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (3u^2 + u_{xx}) = 0$$

che, nel caso delle onde d'acqua, esprime la conservazione della massa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u dx = cost$$

Le altre leggi di conservazione si ottengono dalla KdV tramite operazioni algebriche.

Un'altra proprietà significativa, di cui ci serviremo anche nel prossimo paragrafo, lega l'equazione di Korteweg-de Vries all'equazione di Schrödinger monodimensionale

$$-\psi_{xx}^{(n)} - u(x, t) \psi^{(n)} = \lambda \psi^{(n)} \quad (4.1)$$

con t parametro, non indicante il tempo. Ogni autovalore $\lambda_n > 0$ dello spettro dell'equazione di Schrödinger (autovalori degli stati legati) è associato ad una soluzione solitonica della KdV. In particolare ai λ_n sono legate le ampiezze dei solitoni che emergono per un'arbitraria condizione iniziale $u(x, 0)$.

Gardner, Greene, Kruskal e Miura nel loro articolo [3] mostrano che se $u(x, t)$ soddisfa all'equazione di Korteweg-de Vries, gli autovalori λ_n ($n = 0, 1, \dots, N - 1$) definiti dall'equazione di Schrödinger sono indipendenti dal tempo.

Consideriamo ad esempio la condizione iniziale

$$u(x, 0) = p(p + 1) \operatorname{sech}^2(x) \quad (4.2)$$

con $p > 0$ ([11]). Gli autovalori sono dati da

$$\lambda_n = (p - n)^2 = (\epsilon - 1 + N - n)^2$$

con N numero totale degli stati legati, cioè il massimo intero tale che $N \leq p + 1$ e con $0 \leq \epsilon < 1$, $\epsilon = 1 + p - N$.

Se p è intero lo stato iniziale della KdV si decomporrà in p solitoni, altrimenti ne emergeranno p più radiazione, cioè la coda che si estende a sinistra.

La relazione che lega gli autovalori alle ampiezze emergenti è la seguente:

$$A_n = 2\lambda_n$$

mentre per le velocità vale

$$c_n = 4\lambda_n$$

Appare quindi evidente la dipendenza della velocità del solitone dalla sua ampiezza.

4.2 Schema numerico adottato

L'equazione risolta numericamente è dunque

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.3)$$

Per approssimare la funzione continua $u(x, t)$ con la sua versione discreta $u_i^j = u(i\Delta x, j\Delta t)$ è necessario discretizzare le variabili indipendenti spazio e tempo, poniamo quindi:

$$x \rightarrow i\Delta x$$

$$t \rightarrow j\Delta t$$

con i e j interi e con $\Delta x = 0.03$ e $\Delta t = 0.00001$. Si noti che il passo di discretizzazione temporale è circa il cubo del passo di discretizzazione spaziale; si potrebbe vedere che questa relazione è necessaria per garantire la stabilità dello schema numerico adottato (ciò è dovuto al termine u_{xxx}).

Si utilizza uno schema alle differenze finite di tipo centred-time, centred-space ([10]), cioè con i rapporti incrementali calcolati in questo modo:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i^j = \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\Delta t}$$

e

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^j = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x}$$

Ognuno dei precedenti rapporti incrementali è ricavato servendosi di due sviluppi di Taylor, ad esempio per quello rispetto ad x :

$$u_{i+1}^j = u_i^j + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^j + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^j + O((\Delta x)^3)$$

$$u_{i-1}^j = u_i^j - \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^j + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^j + O((\Delta x)^3)$$

da cui segue

$$\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^j + O((\Delta x)^2)$$

Per le derivate successive si applica lo stesso criterio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^j &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}}^j - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}}^j}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x} - \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta x} \right) = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

per la derivata seconda e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i^j &= \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i+1}^j - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i-1}^j}{2\Delta x} = \\ &= \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + u_i^j}{(\Delta x)^2} - \frac{u_i^j - 2u_{i-1}^j + u_{i-2}^j}{(\Delta x)^2} \right) = \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2(\Delta x)^3} \end{aligned} \quad (4.5)$$

per la derivata terza.

In questo modo si sono ottenute le espressioni per ogni i e per ogni j delle derivate spaziali, e si può fare lo stesso per quelle temporali.

Il termine u è calcolato dagli autori come media

$$u = \frac{u_{i+1}^j + u_i^j + u_{i-1}^j}{3}$$

A questo punto siamo in grado di ricavare lo schema esplicito usato da Zabusky e Kruskal in [12] sostituendo alle derivate nella KdV (4.3) i rapporti incrementali precedentemente calcolati

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\Delta t} + 6 \left(\frac{u_{i+1}^j + u_i^j + u_{i-1}^j}{3} \right) \left(\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) + \left(\frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2(\Delta x)^3} \right) = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} u_i^{j+1} &= u_i^{j-1} - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left(u_{i+1}^j + u_i^j + u_{i-1}^j \right) \left(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j \right) + \\ &\quad - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} \left(u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Considerando gli sviluppi di Taylor di cui ci siamo serviti, notiamo che l'errore dovuto al troncamento è dell'ordine di $(\Delta t)^3$ e $\Delta t (\Delta x)^2$.

4.3 Programma

Il programma che implementa l'algoritmo (4.6) è stato scritto in linguaggio Java. Servendosi di un vettore bidimensionale, per ogni valore discreto del

tempo, che va da 0 a 1 secondo, si sono memorizzati i valori della soluzione in ogni valore discreto dello spazio, per $x \in [-10, 35]$, con condizioni periodiche al contorno.

Si è quindi prodotto in output un file di dati, graficati con l'ausilio di Gnu-plot, per visualizzare l'andamento della soluzione nel tempo.

Si sono svolte diverse simulazioni con dati iniziali differenti, che hanno permesso di verificare varie proprietà delle soluzioni solitoniche:

- in una prima serie di simulazioni, con dati iniziali differenti si sono osservate evoluzioni diverse della soluzione (in uno o più solitoni, con o senza radiazione);
- nella seconda serie, si è verificato che solitoni di ampiezza maggiore si muovono con velocità maggiore;
- con la terza, si è realizzata la collisione tra due solitoni di ampiezza e quindi velocità diversa, riportando in un grafico lo sfasamento ottenuto.

Per garantire che le soluzioni trovate fossero stabili si sono verificate le leggi di conservazione di massa ([12])

$$\sum_{i=0}^{1500} u_i^j$$

e quantità di moto,

$$\sum_{i=0}^{1500} \frac{1}{2} (u_i^j)^2$$

per diversi valori di j , cioè in tempi diversi.

4.4 Grafici degli andamenti

Consideriamo condizioni iniziali differenti:

$$u(x, 0) = 2 \operatorname{sech}^2(x),$$

$$u(x, 0) = 6 \operatorname{sech}^2(x),$$

$$u(x, 0) = 8 \operatorname{sech}^2(x),$$

$$u(x, 0) = 12 \operatorname{sech}^2(x).$$

Andremo a graficare l'andamento delle soluzioni in corrispondenza di tali dati iniziali per evidenziarne il comportamento differente.

I grafici ottenuti con le simulazioni evidenziano che il comportamento dei dati iniziali è in linea con quanto esposto nel paragrafo 4.1.

Il dato iniziale $u(x, 0) = 2 \operatorname{sech}^2(x)$, riportato in figura 4.1, corrisponde a $p = 1$ nell'equazione (4.2), l'unico autovalore ad esso associato è $\lambda_0 = 1$ e infatti permane un unico solitone di ampiezza $A_0 = 2$. Il profilo iniziale quindi si mantiene ed è quello che viene definito un'onda solitaria. Essa si muove con velocità $c_0 = 4$ (infatti al tempo 0 è centrato nell'origine, dopo 1 secondo risulta centrato in 4), confermando il legame con ampiezza e velocità illustrato nel primo paragrafo.

Il dato iniziale $u(x, 0) = 6 \operatorname{sech}^2(x)$, riportato in figura 4.2, corrisponde a $p = 2$, che fornisce gli autovalori associati $\lambda_0 = 4$ e $\lambda_1 = 1$. In questo caso il profilo iniziale non si mantiene, essendo $p > 1$: si nota infatti la comparsa di due solitoni di ampiezza $A_0 = 8$ e $A_1 = 2$, che si separano progressivamente fino a diventare indipendenti dopo pochi decimi di secondo. Le velocità ad essi associate sono $c_0 = 16$ e $c_1 = 4$, con il solitone di ampiezza maggiore che procede a velocità più elevata, che gli consente di staccarsi dall'altro.

Con il dato iniziale $u(x, 0) = 8 \operatorname{sech}^2(x)$, riportato in figura 4.3, si osserva invece un nuovo fenomeno. Il valore di p non è più un numero intero ($p = 2.37$), e gli autovalori associati risultano tre: $\lambda_0 = 5.61$, $\lambda_1 = 1.877$ e $\lambda_2 = 0.137$. Solo due di questi corrispondono tuttavia a solitoni, di ampiezza rispettivamente $A_0 = 11.2$ e $A_1 = 3.75$, mentre sia a sinistra che a destra di essi compare una coda laterale di andamento oscillante che è detta radiazione, di cui vediamo un particolare in figura 4.4, e che rappresenta la materia mancante ai due solitoni "regolari". Le velocità associate ai due solitoni sono $c_0 = 22.4$ e $c_1 = 7.5$, sempre maggiore per quello di ampiezza maggiore.

Infine, il dato iniziale $u(x, 0) = 12 \operatorname{sech}^2(x)$, riportato in figura 4.5, corrisponde a $p = 3$ e gli autovalori associati sono tre: $\lambda_0 = 9$, $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 1$. Anche questa volta p è intero e i tre autovalori portano alla comparsa di tre solitoni distinti di ampiezza $A_0 = 18$, $A_1 = 8$ e $A_2 = 2$ dopo pochi decimi di secondo. Le velocità associate ai tre solitoni sono $c_0 = 36$, $c_1 = 16$ e $c_2 = 4$. Si noti tra l'altro come all'aumentare del valore di p si ottengano solitoni di ampiezza e quindi velocità maggiore, che risultano quindi indipendenti e ben distinguibili l'uno dall'altro dopo un lasso di tempo via via minore, ma anche come questi siano sempre più stretti all'aumentare dell'ampiezza.

Mostriamo infine cosa avviene nel caso di collisione tra due solitoni. Il dato iniziale usato per la simulazione è $u(x, 0) = 12 \operatorname{sech}^2(x) + 2 \operatorname{sech}^2(x - 15)$, con due profili d'onda sufficientemente distanti nei loro picchi da poter essere considerati indipendenti. Gli andamenti nel tempo di entrambi i profili sono già stati studiati separatamente: il profilo di ampiezza 2 si mantiene invariato, mentre l'altro decade in tre solitoni. Tra questi ultimi siamo interessati a quello di ampiezza maggiore ($A = 18$), che grazie alla velocità molto

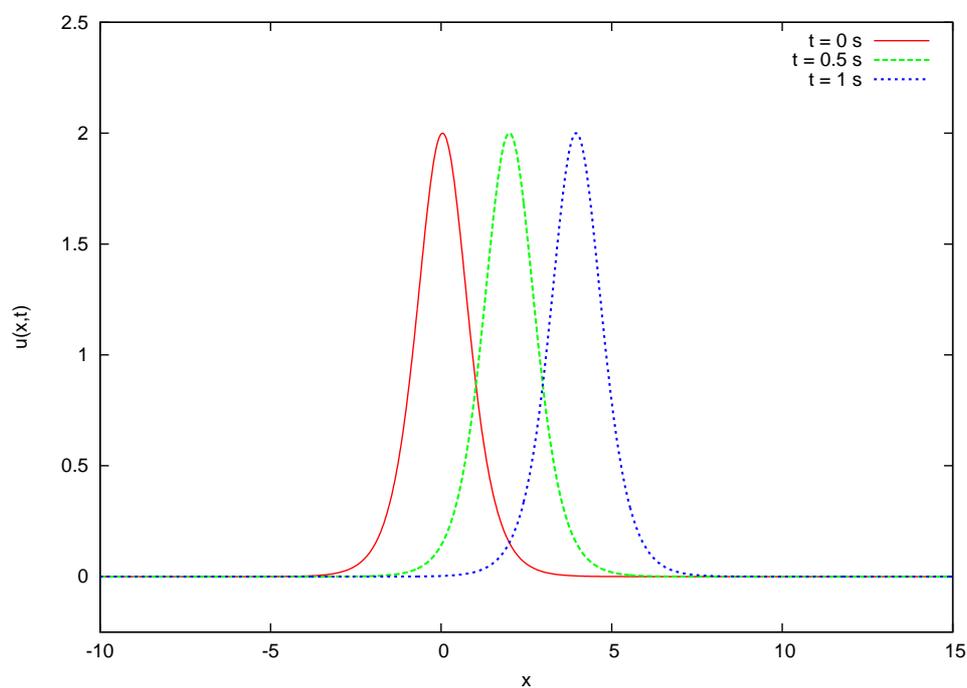


Figura 4.1: Dato iniziale $u(x,0) = 2 \operatorname{sech}^2(x)$, si noti la persistenza di un solo solitone

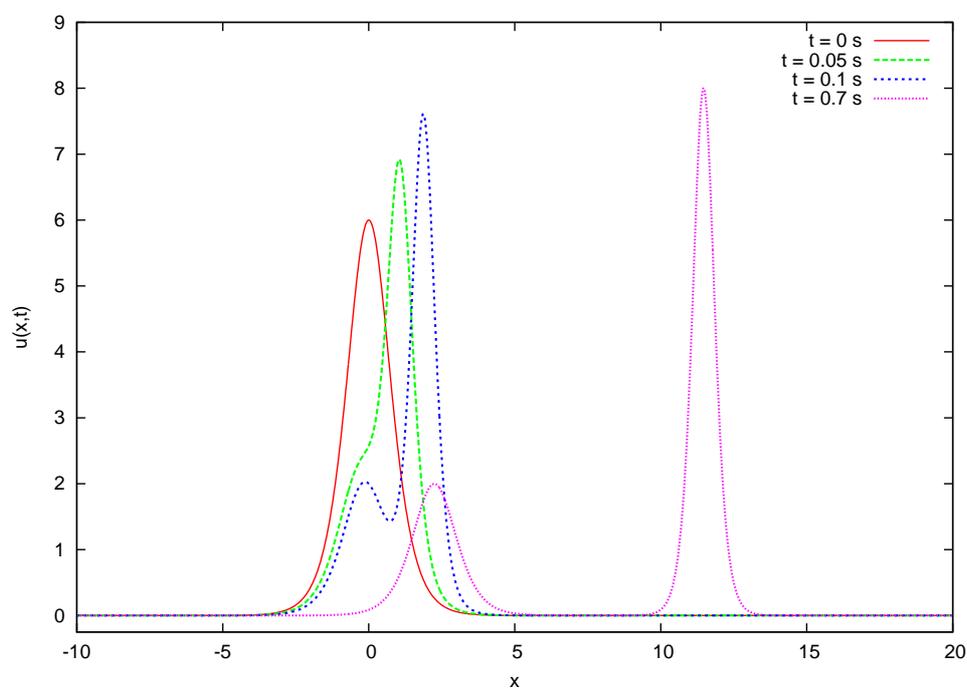


Figura 4.2: Dato iniziale $u(x,0) = 6 \operatorname{sech}^2(x)$, con passaggio da uno a due solitoni

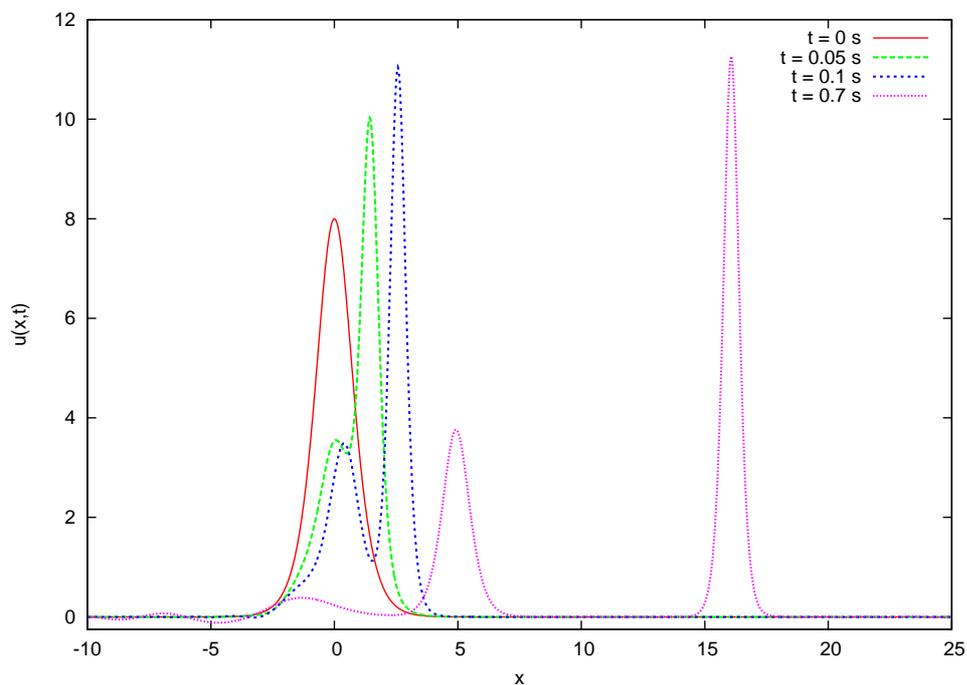


Figura 4.3: Dato iniziale $u(x,0) = 8 \operatorname{sech}^2(x)$, con passaggio da uno a due solitoni più radiazione laterale

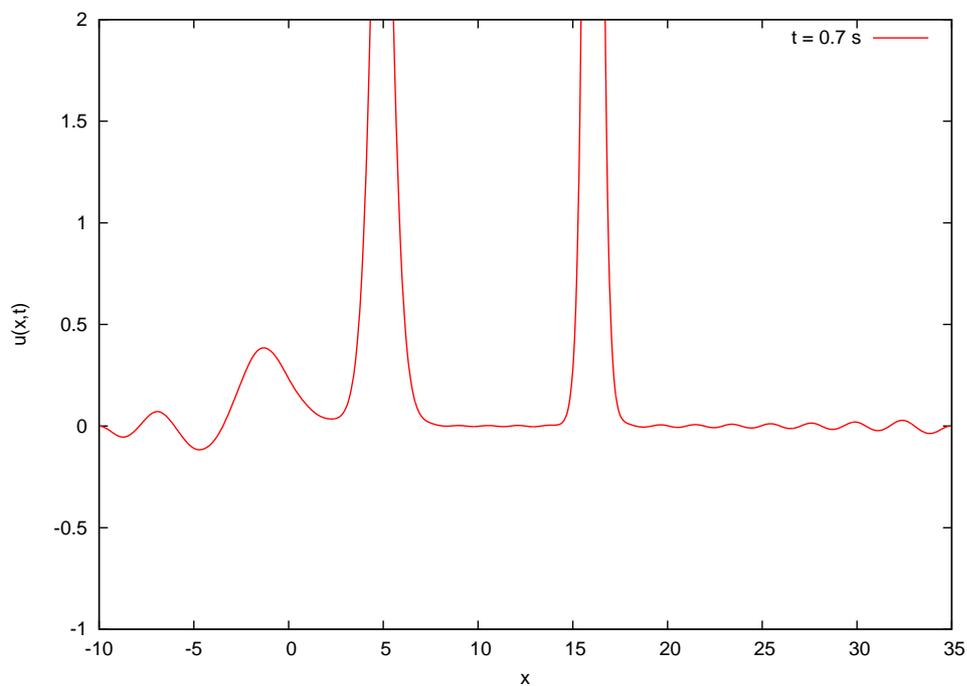


Figura 4.4: Particolare della radiazione

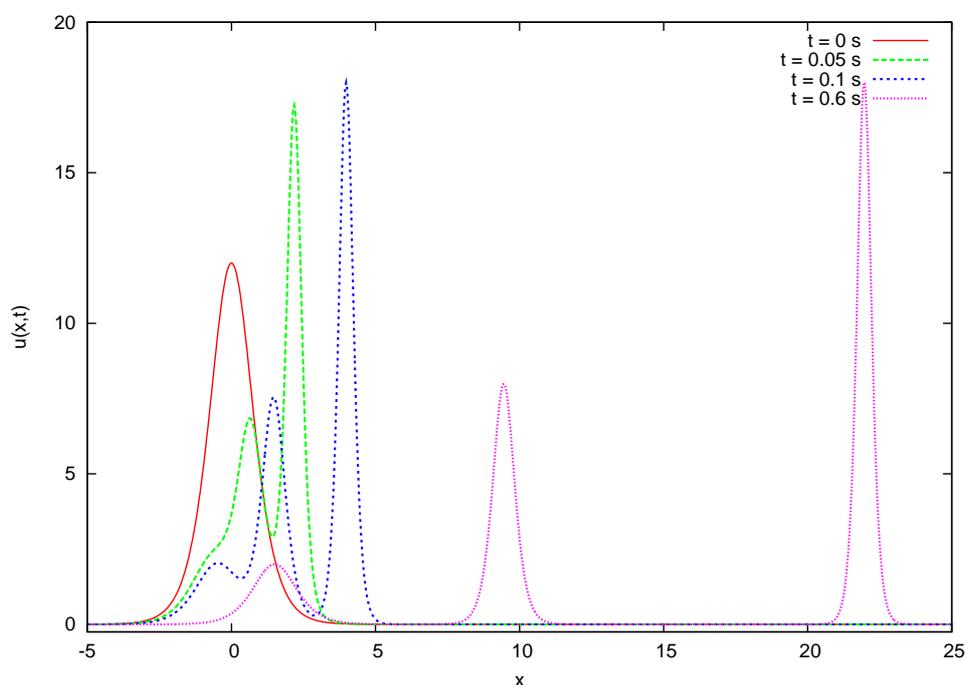


Figura 4.5: Dato iniziale $u(x, 0) = 12 \operatorname{sech}^2(x)$, con passaggio da uno a tre solitoni

elevata raggiunge in pochi decimi di secondo il solitone di ampiezza minore e comincia ad interagire con esso. Come si può vedere in figura 4.7, la non linearità del fenomeno risulta evidente a colpo d'occhio: l'ampiezza totale dell'onda di sovrapposizione è inferiore alla somma delle ampiezze delle due onde interagenti, in netto contrasto col comportamento delle onde lineari. Al termine dell'interazione comunque le due onde riemergono invariate nella forma come si nota in figura 4.6, ma non come se nulla fosse accaduto: il solitone di ampiezza maggiore risulta spostato a destra rispetto alla posizione che occuperebbe in assenza di collisione, mentre quello di ampiezza minore risulta spostato a sinistra, come se il primo fosse stato accelerato ed il secondo rallentato nell'interazione. Benchè di individuazione meno immediata, questo aspetto è l'essenza della non linearità della collisione.

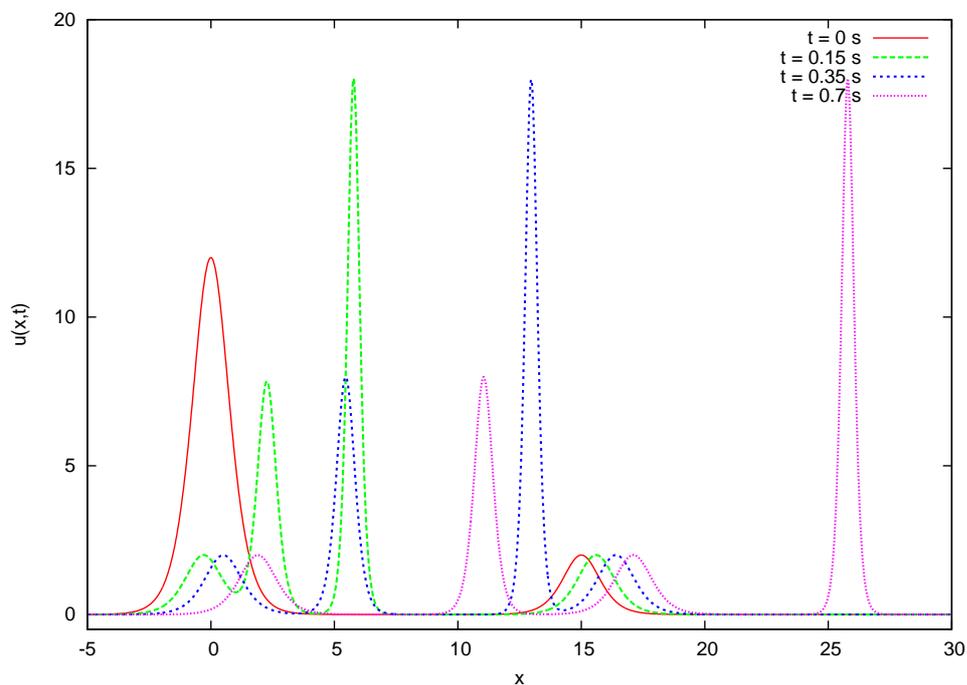


Figura 4.6: Dato iniziale $u(x,0) = 12 \operatorname{sech}^2(x) + 2 \operatorname{sech}^2(x-15)$, andamento prima e dopo la collisione

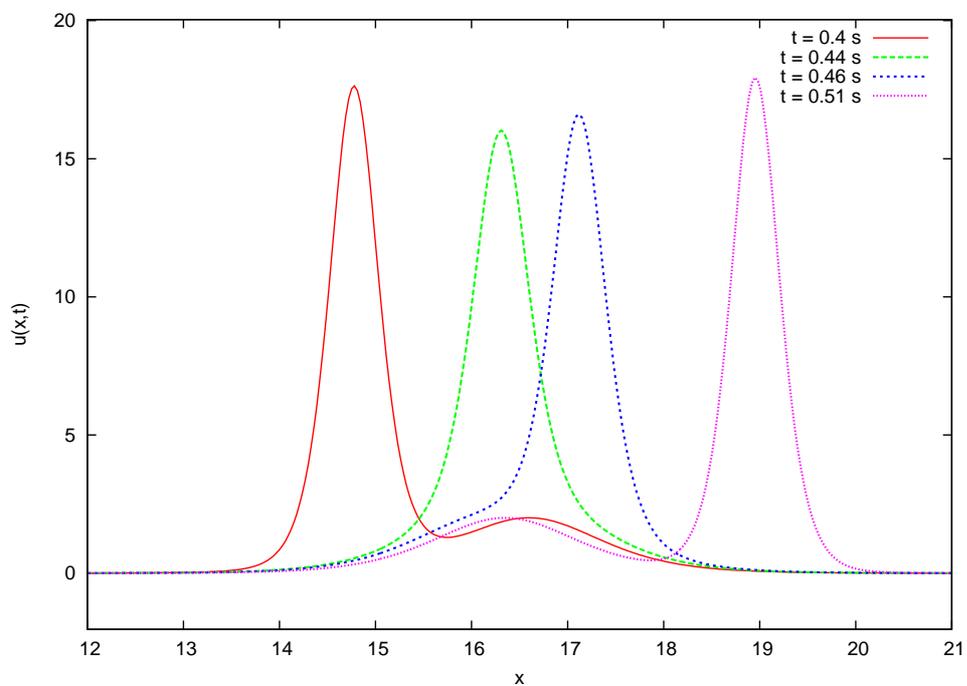


Figura 4.7: Particolare della collisione

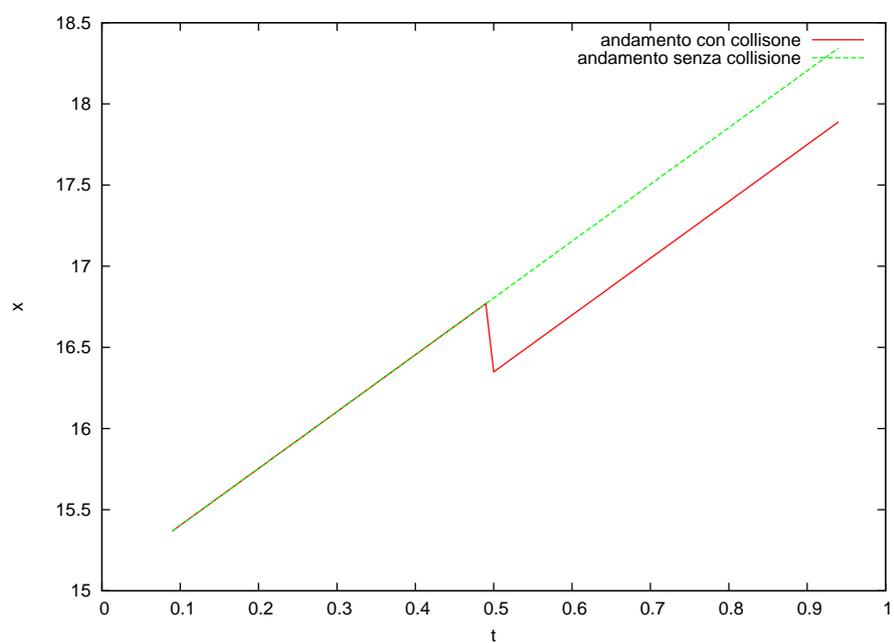


Figura 4.8: Andamento nel tempo della cresta del solitone di ampiezza minima in presenza ed in assenza di collisione

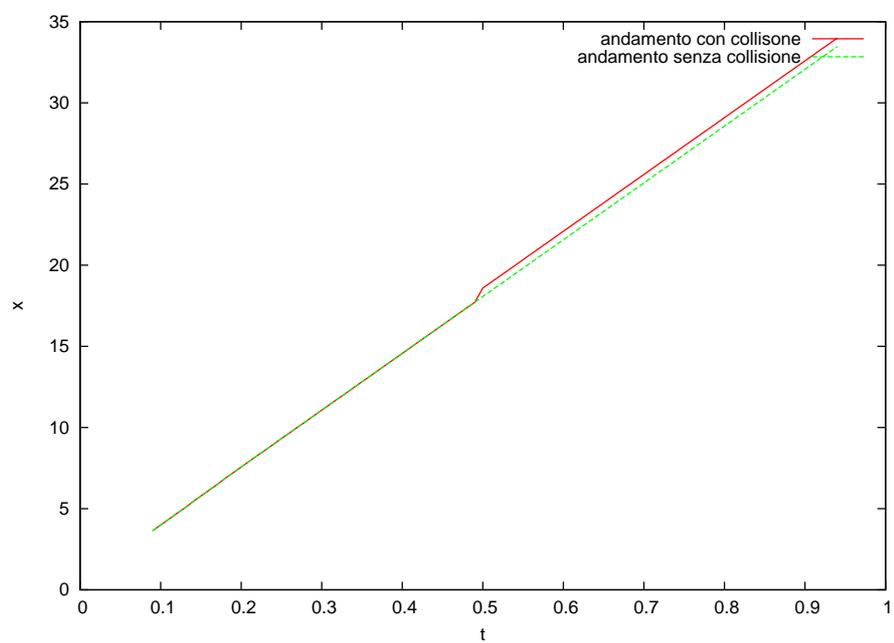


Figura 4.9: Andamento nel tempo della cresta del solitone di ampiezza massima in presenza ed in assenza di collisione

38 Soluzioni solitoniche della KdV e loro evoluzione nel tempo

Gli ultimi due grafici 4.8 e 4.9 illustrano quanto appena detto sulla non linearità dell'interazione: lo sfasamento introdotto dalla stessa nelle due onde. Essi mettono a confronto l'andamento nel tempo della cresta dei due solitoni in presenza ed in assenza di collisione; si nota che il solitone di ampiezza minore ha "perso tempo" durante l'interazione con l'altro, come se fosse stato frenato nell'impatto, mentre il secondo riceve quasi "una spinta".

Conclusioni

Nel presente lavoro, dopo aver dedotto l'equazione di Korteweg-de Vries classica, si è preferita la via della soluzione numerica piuttosto di quella analitica, poichè ha permesso, seppur in forma approssimata, di visualizzare la dinamica dei solitoni con il solo ausilio di un calcolatore, ottenendo un buon grado di coerenza con i risultati noti ed accreditati. Si è potuto così osservare un fenomeno interessante come la collisione di due solitoni, che racchiude in sè l'essenza della non linearità e del comportamento particellare di questo tipo di onda.

L'equazione di Korteweg-de Vries offre innumerevoli opportunità e spunti per l'approfondimento, si pensi soltanto alla varietà dei suoi campi d'applicazione: onde acquatiche di superficie, onde longitudinali in un reticolo di masse uguali connesse da molle non lineari (problema di Fermi, Pasta, Ulam), onde acustiche nei plasmi, onde di pressione in miscele di bolle di gas liquido, onde in bacchette elastiche, componente assiale della velocità di un fluido ruotante in un tubo.

In questa relazione è stato considerato l'ambito delle onde d'acqua (e ancor più in particolare le sole soluzioni solitoniche dell'equazione), ma anche restringendosi a questo campo la trattazione potrebbe essere ben più ampia. I solitoni infatti non si manifestano unicamente come onde di superficie, studiate nel presente elaborato, ma anche come onde interne, potendosi formare sotto il pelo dell'acqua, all'interfaccia tra strato superficiale e profondo, a causa di discontinuità di salinità e temperatura. E ancora, la dinamica dei solitoni a tutt'oggi non risulta perfettamente chiara: se in presenza di fondale a profondità costante il comportamento è quello studiato nel quarto capitolo, in prossimità della costa, dove il fondale evidenzia un profilo variabile, l'evoluzione di questo tipo di onda è ancora in fase di studio e risulta molto articolato. Il problema è molto sentito nelle zone del mondo particolarmente soggette agli Tsunami, soprattutto zone costiere che si affacciano sull'Oceano Pacifico. L'equazione di Korteweg-de Vries si presta tuttavia anche a questo genere di analisi, seppur con alcune complicazioni in più, sostituendo ai coefficienti costanti già visti dei coefficienti variabili, diversi a seconda del profilo del fondale considerato.

Bibliografia

- [1] Y. A. Cengel e J. M. Cimbala. *Meccanica dei Fluidi*. McGraw-Hill, 2007.
- [2] P. G. Drazin e R. S. Johnson. *Solitons: an introduction*. Cambridge University Press, 1990.
- [3] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, e R. M. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries Equation. *Physical Review Letters*, 19(19):1095–1097, 1967.
- [4] L. D. Landau e E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1987.
- [5] P. Mazzoldi, M. Nigro, e C. Voci. *Fisica Volume II*. Edises, 1998.
- [6] R. M. Miura, C. S. Gardner, e M. D. Kruskal. Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. *Journal of Mathematical Physics*, 9(8):1204–1209, 1968.
- [7] M. Remoissenet. *Waves called solitons*. Springer, 1996.
- [8] J. S. Russell. Report on waves. In *Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science*, 1844.
- [9] Heriot Watt University. <http://www.ma.hw.ac.uk/solitons>, 2001.
- [10] A. C. Vliegenthart. On finite-difference methods for the Korteweg-de Vries Equation. *Journal of Engineering Mathematics*, 5(2):137–155, 1971.
- [11] N. J. Zabusky. Solitons and bound states of the time-independent Schrödinger equation. *Physical Review Letters*, 168(1):124–128, 1968.
- [12] N. J. Zabusky e M. D. Kruskal. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, 15(6):240–242, 1965.