



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea triennale

Attrattori Strani

Relatore

Prof. Francesco Fassò

Laureando

Luca Bin

Anno Accademico 2023/2022

Indice

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introduzione | 5 |
| 1 Attrattori Strani | 6 |
| 1.1 Definizioni | 6 |
| 1.2 Introduzione al concetto di caos | 6 |
| 1.3 Attrattori strani | 7 |
| 2 Dimensione dei frattali | 9 |
| 2.1 Introduzione ai frattali | 9 |
| 2.2 Misura di Hausdorff | 10 |
| 2.3 Dimensione di Hausdorff | 13 |
| 2.4 Dimensione di Box-Counting | 15 |
| 3 L'attrattore di Lorenz | 19 |
| 3.1 Il sistema e l'attrattore di Lorenz | 19 |
| 3.2 Calcolo della dimensione | 20 |
| 3.2.1 Risultati | 20 |
| 3.2.2 Analisi del metodo | 21 |
| 3.3 Proprietà elementari delle equazioni di Lorenz | 22 |
| 3.4 Biforcazione omoclina | 23 |
| 3.5 Modello geometrico dell'attrattore di Lorenz | 27 |
| 3.6 Una (nuova) stima superiore della dimensione dell'attrattore di Lorenz | 29 |
| Appendici | 30 |
| A - Codice per il calcolo della dimensione di box-counting | 30 |
| Bibliografia | 31 |

Introduzione

Gli attrattori strani sono oggetti matematici che compaiono nella dinamica di equazioni differenziali ordinarie dissipative e dall'iterazione di mappe dissipative. Una caratteristica peculiare degli attrattori strani è che nelle loro vicinanze le orbite seguono una dinamica caotica: una lieve variazione nelle condizioni iniziali, comporta differenze enormi sull'evoluzione a lungo termine. Inoltre la loro struttura è complessa e frattale.

La tesi è divisa in tre capitoli. Nel capitolo 1 si introdurrà il concetto di attrattore strano e si descriverà brevemente cosa si intende per sistema caotico. Tale trattazione sarà basata su opere di diversi autori, quali [4],[7],[13],[17] e [18]. Nel capitolo 2 si introdurranno degli strumenti provenienti dalla geometria frattale e dalla teoria della misura. In particolare, si parlerà di dimensione di Hausdorff e di dimensione di box-counting, due concetti che permettono una prima descrizione geometrica degli attrattori strani e che consentiranno di quantificarne la frattalità. Questo capitolo sarà basato principalmente su [6] e [9]. Infine, nel capitolo 3 si prenderà in esame l'attrattore di Lorenz, un attrattore strano che emerge da un sistema di tre equazioni differenziali ordinarie dissipative introdotte da Edward Norton Lorenz per la descrizione del moto convettivo di un fluido bidimensionale [10]. Si impiegheranno gli strumenti del capitolo 2 per stimare la dimensione dell'attrattore, si esaminerà la sua struttura e il meccanismo che lo genera. Questa sezione sarà basata ampiamente su [16] e [13].

Capitolo 1

Attrattori Strani

1.1 Definizioni

Gli attrattori strani emergono nella dinamica dettata da alcune equazioni differenziali ordinarie dissipative e dall'iterazione di mappe dissipative. I due concetti sono unificabili in un'unica definizione, ossia quella di *sistema dinamico* [7]. Tuttavia, lo studio svolto in questa tesi sarà ristretto al caso continuo e gli strumenti forniti da tale definizione non verranno di seguito impiegati. Si studieranno sistemi del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad f : M \rightarrow TM$$

dove $M \subset \mathbb{R}^n$ aperto è detto *spazio delle fasi*.

Osservazione: M può avere anche la struttura varietà differenziabile. La definizione generale di sistema dinamico [7] include anche questa situazione.

In questa tesi ci si concentrerà nel caso in cui $M = \mathbb{R}^n$. Si ipotizzerà che f sia un campo *completo*¹, ossia che le soluzioni abbiano dominio prolungabili su tutto l'asse reale. Con queste condizioni è ben definito il *flusso* $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\Phi_t(\mathbf{x}) := \Phi(\mathbf{x}, t)$ è il valore al tempo t della soluzione con dato iniziale \mathbf{x} .

La definizione di attrattore che segue è ragionevolmente accettata e sufficiente allo scopo di questa tesi.

Definizione 1.1.1 (Attrattore). [18] Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e invariante². Allora A è un *attrattore* se esiste un intorno U di A positivamente invariante tale che $\bigcap_{t>0} \Phi_t(U) = A$. L'insieme U è detto *regione di intrappolamento* di A . Il *bacino di attrazione* di A è l'insieme aperto dato da $\bigcup_{t \leq 0} \Phi_t(U)$ per ogni regione di intrappolamento U di A ; esso non dipende dalla scelta di U .

Per osservazioni sulla validità della definizione 1.1.1 vedere [17] e [13].

1.2 Introduzione al concetto di caos

Il concetto di caos o di sistema dinamico caotico non è mai stato formalmente definito e forse non verrà mai fatto, poiché la fenomenologia dei sistemi che si tendono a etichettare come caotici è talmente varia da sfuggire a una caratterizzazione completa.

Se c'è una qualità comune a questi sistemi è la *sensibilità alle condizioni iniziali*. Formalmente può essere definita nel seguente modo:

¹Ciò si verifica, ad esempio, se $f \in \mathcal{C}^1$ e le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ con $i = 1, \dots, n$ sono tutte limitate, oppure se f è localmente Lipschitziano con crescita sublineare.

²Un insieme $U \subset \mathbb{R}^n$ si dice *invariante* (per un flusso Φ su \mathbb{R}^n) se $\Phi_t(\mathbf{x}) \in U \quad \forall \mathbf{x} \in U$ e $\forall t \in \mathbb{R}$. È *positivamente invariante*, se è invariante per tempi positivi.

Definizione 1.2.1 (Sensibilità alle condizioni iniziali). Un e.d.o.³ $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ definita su \mathbb{R}^n è detta *sensibile alle condizioni iniziali* se $\exists d > 0$ tale che $\forall \epsilon > 0$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \exists \mathbf{y} \in B_\epsilon(\mathbf{x})$ e $T > 0$ tale che:

$$|\Phi_T(\mathbf{x}) - \Phi_T(\mathbf{y})| \geq d$$

Dove con $B_\epsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in M : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \epsilon\}$ si indica la palla aperta di raggio ϵ e centrata in \mathbf{x} .

Conseguentemente, anche un piccolo errore ϵ commesso nella scelta del dato iniziale rende difficile, se non impossibile, fare previsioni precise sull'evoluzione a lungo termine del sistema. Tali errori sono inoltre inevitabili.

Questa sola caratteristica non è sufficiente a rendere un sistema caotico. A titolo di esempio si consideri la seguente e.d.o.:

$$\dot{z} = z, \quad z \in \mathbb{R}$$

Essa esibisce sensibilità alle condizioni iniziali, ma non è caotica.

Pertanto, oltre alla sensibilità alle condizioni iniziali, diversi autori aggiungono altre condizioni per definire i sistemi caotici. Ad esempio che esista un sottoinsieme $U \subset \mathbb{R}^n$ tale che:

- il sistema ristretto a U presenti sensibilità alle condizioni iniziali;
- U contenga un sottoinsieme denso di orbite periodiche;
- U contenga un'orbita densa, ossia un'orbita che passa arbitrariamente vicino ad ogni punto di U .

In questa tesi, verrà usata questa definizione. Per osservazioni in merito si veda [7].

1.3 Attrattori strani

È ora possibile introdurre il concetto di attrattore strano.

Definizione 1.3.1. Sia $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ un e.d.o. definita su \mathbb{R}^n . Un insieme $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ si dice *attrattore strano* se:

- è un attrattore;
- il sistema è caotico in \mathcal{A} ;
- è un frattale.

Delle tre proprietà caratteristiche che deve avere un insieme $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ per essere un attrattore strano, risalta la mai prima citata *struttura frattale*. In sezione 2.1 si introdurranno le principali caratteristiche dei frattali.

Osservazione: esistono anche attrattori frattali che non sono caotici [3] e [1].

Perché una e.d.o. presenti un attrattore di qualsiasi natura, è necessario che manifesti contrazione dei volumi. Ossia $\forall U \subset \mathbb{R}^n$ aperto:

$$Vol(\Phi_t(U)) \leq Vol(U) \quad \forall t > 0$$

Vi è una precisa condizione a cui deve soddisfare una e.d.o. perché presenti la contrazione dei volumi.

Teorema 1.3.1 (Teorema di Liouville). Sia $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ una e.d.o. definita su \mathbb{R}^n e $\forall U \subset \mathbb{R}^n$ aperto sia $V(t) = Vol(\Phi_t(U))$. Allora vale la relazione

$$\left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{t=0} = \int_U div(f(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \tag{1.1}$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $div = \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}$.

³Per e.d.o. si intende equazione differenziale ordinaria.

Dimostrazione: Eseguendo un cambio di variabili:

$$V(t) = \int_{\Phi_t(U)} d\mathbf{x} = \int_U \det\left(\frac{\partial\Phi_t(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right) d\mathbf{x}$$

Abbiamo per $t \rightarrow 0$:

$$\Phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + f(\mathbf{x})t + o(t^2)$$

È noto che per ogni matrice quadrata \mathbf{A} vale:

$$\det|\mathbb{I} + \mathbf{A}t| = 1 + t \cdot \text{tr}(\mathbf{A}) + o(t^2), \quad t \rightarrow 0$$

dove con $\text{tr}(\mathbf{A})$ si indica la traccia di \mathbf{A} e con \mathbb{I} la matrice unità. Perciò

$$\det\left(\frac{\partial\Phi_t(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right) = 1 + t \cdot \text{tr}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right) + o(t^2)$$

Ma $\text{tr}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right) = \text{div}(f)$, così:

$$V(t) = \int_U (1 + t \cdot \text{div}(f) + o(t^2)) d\mathbf{x}$$

da cui la (1.1) ■

In particolare, siccome non fa differenza considerare $t = 0$ o $t = t_0$, posto $U_0 = \Phi_{t_0}(U)$, si ottiene:

$$\left.\frac{dV(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \int_{U_0} \text{div}(f(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

Una prima conseguenza del teorema 1.3.1 è che per un sistema Hamiltoniano:

$$\text{div}(\xi) = \frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}\right) = 0$$

e pertanto i volumi si conservano. In particolare, ciò vale anche nel caso non autonomo. Questo rende impossibile la presenza di attrattori di qualsiasi natura in tali sistemi. Ciò non significa che non si possano ottenere attrattori o attrattori strani in sistemi meccanici ([13] e [17]).

Prima di procedere, si sottolinea che la presenza di attrattori strani e la caoticità è possibile per e.d.o. definite su aperti di \mathbb{R}^n solamente per $n \geq 3$ come conseguenza del teorema di Poincaré-Bendixon [17].⁴

⁴Nel caso discreto gli attrattori strani si manifestano anche per $n = 2$: il motivo è legato al fatto che un sistema dinamico discreto piano, definito dalla iterazione di una mappa, può essere visto come la sezione di Poincaré di un sistema continuo in tre dimensioni, dove gli attrattori strani esistono.

Capitolo 2

Dimensione dei frattali

2.1 Introduzione ai frattali

I frattali si presentano spesso con le seguenti proprietà [6]:

- sono autosimilari, ossia contengono copie di sé stessi a scale differenti;
- non sono descrivibili come zeri di funzione, ma sono facilmente ottenibili da procedure ricorsive.

Si vuole analizzare un esempio che tornerà in seguito: l'*insieme di Cantor*.

Sia $E_0 = [0,1]$ e sia E_1 ottenuto dividendo in tre intervalli uguali E_0 e rimuovendo quello centrale. In generale, E_k si ottiene da E_{k-1} applicando la stessa regola per la costruzione di E_1 ad ogni intervallo che lo costituisce. L'insieme E_k è perciò costituito da 2^k intervalli di lunghezza 3^{-k} .

Definizione 2.1.1 (Insieme di Cantor). Data la costruzione di cui sopra, si definisce *insieme di Cantor* l'insieme

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$$

Molte delle proprietà di C sono facilmente derivabili scrivendo gli elementi in esso contenuti in base ternaria. Sia $x \in [0, 1]$, la sua espressione in base 3 è:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{3^n}, \quad a_i \in \{0, 1, 2\}$$

Scrivibile anche come $0.a_1a_2\dots$ che chiameremo scrittura ternaria di x . È evidente, allora, che C conterrà tutti e soli gli $x \in [0,1]$ la cui scrittura ternaria non contiene 1 in nessuna posizione, ossia $a_i \in \{0, 2\} \forall i$. Informalmente, dato $x \in C$, per ricostruire la sequenza di 0 e 2 associata, si parte da E_0 e, ogni volta che si rimuove un segmento, si scrive uno 0 se x si trova nell'intervallo a sinistra o 2 se si trova a quello di destra. Questo processo è mostrato in figura 2.1.

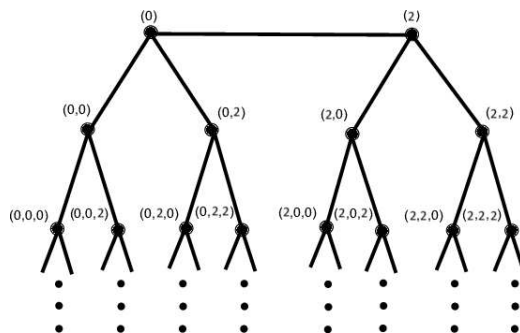


Figura 2.1: Rappresentazione ternaria degli elementi di C

Osservazione: Ci sono delle ambiguità in questa rappresentazione: l'espressione periodica $0.a_1a_2\dots a_n\bar{2}$, con $a_n \neq 2$, coincide con quella finita $0.a_1a_2\dots(a_n + 1)$. In queste particolari situazioni, per descrivere gli elementi di C , si adotta la convenzione di usare quella in cui $a_i \neq 1 \forall i$, che cambierà da caso a caso. Si pensi ad esempio a $1/3$ e $2/3$.

In questo modo è facile mostrare che C è non numerabile.

Proposizione 2.1.1. *C non è numerabile.*

Dimostrazione: Data la rappresentazione di cui sopra è evidente la biiezione $C \simeq \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$. Ma $\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e tale insieme contiene la rappresentazione binaria di tutti i numeri nell'intervallo $[0, 1]$. ■

Tuttavia vale:

Proposizione 2.1.2. *C ha misura nulla*

Dimostrazione: Dalle proprietà della misura di Lebesgue si ha che un'intersezione numerabile di misurabili è misurabile. Gli E_k sono chiaramente misurabili $\forall k$. Dunque C è misurabile. In particolare, se si indica con λ_1 la misura di Lebesgue in \mathbb{R} , abbiamo $\lambda_1(E_k) = (\frac{2}{3})^k$. Ma siccome $C \subset E_k$, per monotonia

$$\lambda_1(C) \leq \lambda_1(E_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \forall k$$

da cui la tesi. ■

Ciò che si è appena mostrato è rilevante per i seguenti motivi:

- L'insieme di Cantor apparirà all'interno dello spazio delle fasi del sistema di Lorenz, che verrà studiato nel capitolo 3;
- Il fatto che C abbia misura nulla pur essendo non numerabile suggerisce che la misura di Lebesgue non sia la più adatta a studiare i frattali. Ciò motiva l'introduzione della misura di Hausdorff.

In particolare, in questa tesi si definirà frattale un insieme con dimensione di Hausdorff non intera. Per osservazioni su questa definizione si vedano [2] e [6].

2.2 Misura di Hausdorff

Si richiama il concetto di misura esterna.

Definizione 2.2.1 (Misura esterna su \mathbb{R}^n). Una *misura esterna* su \mathbb{R}^n è una funzione $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, dove $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme delle parti di \mathbb{R}^n , tale che:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- $\forall F, E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ se $F \subset E$, allora $\mu^*(F) \leq \mu^*(E)$;
- se $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è una collezione numerabile, o finita, di sottoinsiemi, allora:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(F_i)$$

Definizione 2.2.2. Un δ -ricoprimento di un sottoinsieme $F \subset \mathbb{R}^n$ è una collezione $\{U_i\}$ di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n tale che $|U_i| \leq \delta \forall i$ e $F \subset \bigcup_i U_i$, dove $|U_i| = \sup\{|x - y| : x, y \in U_i\}$ è il diametro di U_i .

Siano ora $F \subset \mathbb{R}^n$ un insieme e s un numero reale non negativo. Allora, $\forall \delta > 0$ si definisce

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento di } F\right\} \quad (2.1)$$

Man mano che δ diminuisce, i possibili δ -ricoprimenti di F calano: $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ è perciò una funzione monotona non crescente in δ . Esiste perciò il limite per $\delta \rightarrow 0$.

Teorema 2.2.1 (Misura esterna di Hausdorff). $\forall s$ la funzione definita dal limite

$$\mathcal{H}^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s$$

è una misura esterna. Tale misura è detta misura esterna di Hausdorff s -dimensionale.

Dimostrazione: Si ha che $\emptyset \subset \{x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Inoltre $|\{x\}| = 0$. Ne segue che $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0 \quad \forall \delta > 0$ e $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.

Sia ora $F \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$, dove F_j è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n . Si vuole dimostrare che

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(F_j) \quad (2.2)$$

Senza perdita di generalità si assume che $\mathcal{H}_\delta^s(F_j) < \infty \quad \forall j$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un δ -ricoprimento $\{U_i^j\}$ di F_j , $F_j \subset \bigcup_i U_i^j$, $|U_i^j| < \delta \quad \forall i$, tale che

$$\mathcal{H}_\delta^s(F_j) + \frac{\epsilon}{2^j} \geq \sum_i |U_i^j|^s$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sum_j \mathcal{H}_\delta^s(F_j) + \epsilon &\geq \sum_j \sum_i |U_i^j|^s \\ &= \sum_{j,i} |U_i^j|^s \geq \mathcal{H}_\delta^s(F) \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è giustificata dal fatto che $F \subset \bigcup_{j,i} U_i^j$. Prendendo il limite per $\epsilon \rightarrow 0$ si ottiene la (2.2). Ora, da (2.2)

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(F_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_j)$$

dove si è usato il fatto che \mathcal{H}_δ^s è monotona non crescente in δ . Tale relazione vale $\forall \delta > 0$ e pertanto sussiste dopo aver preso il limite per $\delta \rightarrow 0$. Ossia

$$\mathcal{H}^s(F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_j)$$

Allora per verificare la seconda proprietà di misura esterna è sufficiente che $F \subset F_1$, mentre per la seconda basta prendere $F = \bigcup_j F_j$. ■

Definizione 2.2.3. Sia μ^* una misura esterna su \mathbb{R}^n . Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice μ^* -misurabile se $\forall F \subset \mathbb{R}^n$ vale

$$\mu^*(F) = \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \setminus E)$$

Vale allora la seguente proposizione.

Proposizione 2.2.1. Sia μ^* una misura esterna su \mathbb{R}^n . Se F_1, F_2, \dots è una collezione numerabile, o finita, di insiemi μ^* -misurabili a due a due disgiunti, allora vale

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(F_i)$$

È poi immediato verificare che l'insieme dei μ^* -misurabili formi una σ -algebra¹. La restrizione di μ^* a tale σ -algebra si dice *misura* e solitamente si indica con μ .

Definizione 2.2.4 (Insieme di Borel). Sia (\mathbb{R}^n, τ) uno spazio topologico. Allora un insieme $B \subset \mathbb{R}^n$ è detto *insieme di Borel* se può essere creato a partire da aperti di \mathbb{R}^n attraverso le operazioni di unione numerabile, intersezione numerabile e complemento relativo.²

Si può mostrare, ma è più dispendioso, che $\forall s > 0$ \mathcal{H}^s è una misura se ristretta alla σ -algebra di Borel [9]. Pertanto \mathcal{H}^s si dice *misura di Hausdorff s -dimensionale*.

Si possono ora studiare alcune proprietà della misura di Hausdorff.

Proposizione 2.2.2. Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di Borel. Allora

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1} \lambda_n(F)$$

dove λ_n indica la misura di Lebesgue n -dimensionale di \mathbb{R}^n e c_n è il volume della palla n -dimensionale di volume 1.

La dimostrazione è omessa poiché molto lunga [9]. Tuttavia la proposizione 2.2.2 lega la misura di Hausdorff a quella di Lebesgue quando s è pari alla dimensione di tutto lo spazio. In realtà, questo risultato è generalizzabile anche nel caso in cui F sia una sottovarietà di \mathbb{R}^n [6].

Definizione 2.2.5. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta *similitudine di grado $c > 0$* se

$$|f(x) - f(y)| = c|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Possiamo quindi provare una prima proprietà di scala della misura di Hausdorff.

Proposizione 2.2.3. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una similitudine di grado $c > 0$. Se $F \subset \mathbb{R}^n$, allora

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = c^s \mathcal{H}^s(F) \quad \forall s > 0$$

Dimostrazione: Sia $\{U_i\}$ un δ -ricoprimento di F , allora $\{f(U_i)\}$ è un $c\delta$ -ricoprimento di $f(F)$. Perciò

$$\sum_i |f(U_i)|^s = c^s \sum_i |U_i|^s$$

da cui prendendo l'inf

$$\mathcal{H}_{c\delta}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}_\delta^s(F) \tag{2.3}$$

Per $\delta \rightarrow 0$ si trova $\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F)$. Dalla definizione 2.2.5 risulta immediato che f sia iniettiva. Perciò esiste f^{-1} ed è anch'essa similitudine di grado c^{-1} . Sostituendo f con f^{-1} , c con c^{-1} e F con $f(F)$ in (2.3) si trova la disuguaglianza opposta. ■

Corollario 2.2.1. $\forall s > 0$ la misura di Hausdorff s -dimensionale è invariante per isometrie.

Dimostrazione: Se f è un'isometria, allora $c = 1$. ■

Quindi la misura di Hausdorff è invariante per rotazioni e traslazione, che è ciò che ci si aspetterebbe da una misura.

Con argomentazioni simili a quelle usate per dimostrare la proposizione precedente si mostra un risultato più generale:

Proposizione 2.2.4. Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad x, y \in F \tag{2.4}$$

per delle costanti $c, \alpha > 0$. Allora per ogni s

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F) \tag{2.5}$$

¹Si ricorda che, dato l'insieme M , un insieme $\Sigma \subset \mathcal{P}(M)$ si dice σ -algebra se $M \in \Sigma$ e Σ è chiuso per complementari e unioni numerabili.

²Si ricorda che, dati due insiemi A e B , per complemento di A relativo a B si intende l'insieme differenza $B \setminus A$.

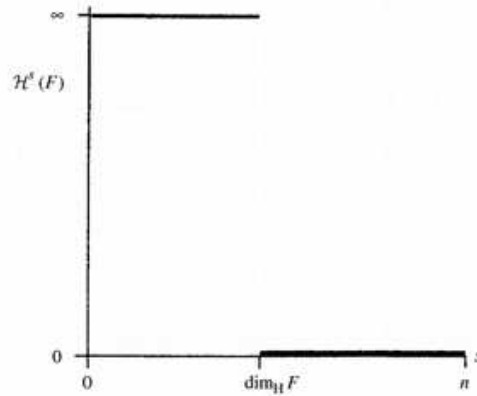


Figura 2.2: Grafico di $\mathcal{H}^s(F)$. Da [6].

Dimostrazione: Se $\{U_i\}$ è un δ -ricoprimento di F , allora, siccome $|f(F \cap U_i)| \leq c|F \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha$, segue che $\{f(F \cap U_i)\}$ è un ϵ -ricoprimento di $f(F)$, dove $\epsilon = c\delta^\alpha$.

Allora $\sum_i |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_i |U_i|^s$, cosicché $\mathcal{H}_\epsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Quando $\delta \rightarrow 0$ si ha $\epsilon \rightarrow 0$ e così si ottiene la (2.5) \blacksquare

Le funzioni che soddisfano (2.4) si chiamano *Hölderiane di esponente α* . Più interessante è il caso in cui $\alpha = 1$, poiché significa che f è Lipschitziana e in tal caso

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F)$$

Si vedrà a breve che le funzioni bi-lipshitz giocheranno un ruolo importante nello studio della dimensione di Hausdorff dell'insieme su cui vengono definite.

2.3 Dimensione di Hausdorff

Si può ora procedere a definire la dimensione di Hausdorff. Dalla definizione 2.1 è evidente che se $\delta < 1$, allora $\mathcal{H}_\delta^s(F)$, con $F \subset \mathbb{R}^n$, è non crescente in s . Ciò si mantiene anche al passaggio al limite, cioè rimane valido per \mathcal{H}^s . Più precisamente, se $t > s$ e $\{U_i\}$ è un δ -ricoprimento di F , si ha:

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

perciò, prendendo l'inf, si ottiene $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Passando al limite $\delta \rightarrow 0$ si nota che, se $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, allora $\mathcal{H}^t(F) = 0$ per $t > s$. Perciò, come mostrato in figura 2.2, esiste un valore "critico" di s per cui $\mathcal{H}^s(F)$ "salta" da ∞ a 0. Tale valore di s verrà chiamato *dimensione di Hausdorff* di F e indicato con $\dim_H F$. Formalmente

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

dove si pone l'estremo superiore dell'insieme vuoto pari a 0.

Quando $s = \dim_H F$ si ha che $\mathcal{H}^s(F) \in \mathbb{R}_+ \cup \infty$.

Proposizione 2.3.1. *La dimensione di Hausdorff soddisfa le seguenti proprietà [6]:*

- "Monotonia", ossia se $E \subset F$, allora $\dim_H E \leq \dim_H F$;
- "Stabilità numerabile", ossia se F_1, F_2, \dots è una collezione numerabile, o finita, di insiemi, allora $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$;
- se F è numerabile, allora $\dim_H F = 0$;

- se $F \subset \mathbb{R}^n$ è aperto, allora $\dim_H F = n$;
- se F è una sottovarietà m -dimensionale di $(\mathbb{R})^n$, allora $\dim_H F = m$.

Dimostrazione: Si danno le dimostrazioni in sequenza:

- segue immediatamente dalla proprietà di monotonia della misura, ossia che $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$;
- Sicuramente, $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_H F_j \quad \forall j$ dalla proprietà di monotonia. D'altra parte, se $s > \dim_H F_i \quad \forall i$, allora $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$, perciò $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$, ottenendo così la disuguaglianza opposta;
- Se F_i è un singolo punto, $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$, cioè $\dim_H F_i = 0$. Perciò per stabilità numerabile $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$;
- F contiene una palla n -dimensionale con volume positivo, pertanto per monotonia $\dim_H F \geq n$. Tuttavia F è contenuta in una quantità numerabile di palle, da cui $\dim_H F \leq n$ usando la stabilità numerabile e la monotonia;
- Si deriva dalla relazione tra la misura di Lebesgue e quella di Hausdorff. ■

Ora si può dimostrare una proprietà fondamentale della dimensione di Hausdorff.

Proposizione 2.3.2. Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ e sia $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione Hölderiana di esponente α . Allora $\dim_H f(F) \leq (1/\alpha)\dim_H F$.

Dimostrazione: Sia $s > \dim_H F$ allora per la proposizione 2.2.4 $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F) = 0$. Pertanto $\dim_H f(F) \leq s/\alpha \quad \forall s > \dim_H F$ ■

Corollario 2.3.1. Valgono le seguenti affermazioni:

- se $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una trasformazione Lipschitziana, allora $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$;
- se $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una trasformazione bi-Lipschitziana, ossia esistono due costanti $0 < C_- \leq C_+ < \infty$ tali che

$$C_-|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq C_+|x - y| \quad \forall x, y \in F$$

allora $\dim_H f(F) = \dim_H F$

Dimostrazione: Il primo punto è immediato, basta porre $\alpha = 1$ nella precedente proposizione. Applicando tale disuguaglianza a $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$ si ottiene il secondo punto.³ ■

Si è mostrato che la dimensione di Hausdorff rappresenta un invariante sotto trasformazioni bi-Lipschitziane. Quindi due insiemi connessi da una tale trasformazione avranno la stessa dimensione di Hausdorff. Un approccio alla geometria frattale è quello di considerare "uguali" tutti gli insiemi connessi da una mappa bi-Lipschitziana [6]. Per quanto riguarda lo studio degli attrattori strani, ciò comporterebbe che un cambio di coordinate che abbia la suddetta proprietà, mantenga invariata la dimensione di un attrattore strano \mathcal{A} contenuto nello spazio delle fasi. Un'applicazione di questo corollario sarà data alla sezione 3.6.

Un'ultima proprietà interessante, che restituisce anche delle informazioni topologiche è la seguente.

Proposizione 2.3.3. Sia $F \subset \mathbb{R}^n$. Se $\dim_H F < 1$, allora F è totalmente sconnesso⁴.

Dimostrazione: Siano x e y due punti distinti di F . Si definisce una mappa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ tale che $f(z) = |z - x|$. Tale funzione non incrementa le distanze, infatti:

$$|f(z) - f(w)| = ||z - x| - |w - x|| \leq |(z - x) - (w - x)| = |z - w|$$

³Si noti che la condizione di bi-Lipschitzianità implica che f sia iniettiva e quindi un omeomorfismo sulla propria immagine. Inoltre, sostituendo $x = f^{-1}(u)$ e $y = f^{-1}(v)$ si verifica subito che f^{-1} è Lipschitziana.

⁴Un insieme $F \subset \mathbb{R}^n$ si dice *totalmente sconnesso* se la componente connessa di ogni punto consiste solo di tale punto.

Perciò per il primo punto del corollario 2.3.1 vale $\dim_H f(F) \leq \dim_H F < 1$. Quindi $f(F)$ è un sottoinsieme di \mathbb{R} di lunghezza nulla e pertanto ha un complementare denso. Scegliendo r tale che $r \notin f(F)$ e $0 < r < f(y)$ segue che

$$F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\}$$

Quindi F è contenuto in due insiemi aperti e disgiunti, uno contenente x e l'altro contenente y . Pertanto x e y giacciono su due diverse componenti connesse di F . ■

Si può ora procedere con un esempio di calcolo della dimensione di Hausdorff per l'insieme di Cantor.

Proposizione 2.3.4 (Dimensione di Hausdorff dell'insieme di Cantor). *Sia C l'insieme di Cantor. Allora $s = \dim_H C = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ e $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(C) \leq 1$.*

Dimostrazione: Si chiameranno gli intervalli contenuti negli E_k definiti nella costruzione di C *intervalli di livello k* . Quindi E_k consiste di 2^k intervalli di livello k , ciascuno con lunghezza 3^{-k} . Prendendo gli intervalli di E_k come un 3^{-k} -ricoprimento di C si ottiene $\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(C) \leq 2^k 3^{-ks} = 1$ se $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Ponendo $k \rightarrow \infty$ si ottiene $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$. Per provare che $\mathcal{H}^s(C) \geq \frac{1}{2}$ si deve mostrare che

$$\sum_i |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s} \quad (2.6)$$

per qualsiasi ricoprimento $\{U_i\}$ di C . A tal proposito, è sufficiente assumere che gli $\{U_i\}$ siano intervalli, ed espandendoli leggermente e sfruttando la compattezza di C , basta verificare (2.6) nel caso gli $\{U_i\}$ siano una collezione finita di sottointervalli chiusi di $[0,1]$. Per ogni U_i , sia k l'intero tale che:

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k} \quad (2.7)$$

Per cui U_i può intersecare al più un solo intervallo di livello k , poiché la separazione di tali intervalli è almeno 3^{-k} . Se $j \geq k$, allora, per costruzione, U_i interseca al più $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$ intervalli di livello j in E_j , dove si è sfruttata la (2.7). Scegliendo j tale che $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$ per ogni U_i , allora, siccome gli $\{U_i\}$ intersecano tutti i 2^j intervalli di lunghezza 3^{-j} , contando gli intervalli si ottiene $2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$, che si riduce a (2.6). ■

Eventualmente, con un conto più laborioso, è possibile mostrare che $\mathcal{H}^s(C) = 1$.

Osservazione: come conseguenza della proposizione 2.3.3, l'insieme di Cantor è totalmente sconnesso.

Ciò che risalta dall'esempio fatto è che, anche per insiemi "semplici" come quello di Cantor, non è facile calcolare la dimensione di Hausdorff. Per questa ragione è stata introdotta un'altra definizione di dimensione, detta *dimensione di box-counting*, che offre una stima del limite superiore della dimensione di Hausdorff ed è più facile da stimare numericamente.

2.4 Dimensione di Box-Counting

Si parte dando un'idea intuitiva della dimensione che si vuole introdurre: dato un insieme $F \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, si pone $N_\delta(F)$ il più piccolo numero di insiemi di diametro al più δ che copre F . La dimensione di box-counting F riflette il modo in cui $N_\delta(F)$ cresce al tendere di δ a zero. Spesso $N_\delta(F)$ segue una legge esponenziale del tipo

$$N_\delta(F) \sim c\delta^{-s}$$

per certe costanti $c, s > 0$. Si dirà allora che s è la dimensione di box counting di F . Quello che si sta facendo è quindi vedere come si manifesta l'irregolarità dell'insieme F adottando scale via via più fini.

⁴Cioè che giace su una varietà di dimensione 2.

Esplicitando s:

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} \quad (2.8)$$

valore facilmente stimabile computazionalmente tramite un'interpolazione delle coppie di dati $\{(\ln N_\delta(F), -\ln \delta)\}$ al variare di δ . In particolare si considera δ sufficientemente piccolo, cosicché $-\ln \delta$ sia una quantità strettamente positiva. Tuttavia, spesso $N_\delta(F)$ non segue una legge esponenziale e in tal caso si può solo ricavare il limite superiore e inferiore dalla (2.8).

Ora che è stata data l'idea intuitiva, si procede con la definizione formale:

Definizione 2.4.1. Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto e limitato e sia $N_\delta(F)$ il più piccolo numero di insiemi di diametro al più δ che copre F . Le *dimensioni di box-counting inferiori e superiori* di F sono definite rispettivamente da

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B F &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} \\ \overline{\dim}_B F &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Se esiste, il limite

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} \quad (2.10)$$

è detto *dimensione di box-counting* di F .

Proposizione 2.4.1. I limiti (2.9) e (2.10) non variano scegliendo $N_\delta(F)$ come:

- il più piccolo numero di palle chiuse di raggio δ che coprono F ;
- il più piccolo numero di cubi di lato δ che coprono F ;
- il numero di cubi che costituiscono una δ -mesh che interseca F ;
- il più grande numero di palle disgiunte di raggio δ con centri in F .

Dimostrazione: La dimostrazione completa è omessa poiché lunga e poco interessante. Si dimostra solamente il punto tre, poiché sarà la definizione adottata per il calcolo della dimensione di box-counting per l'attrattore di Lorenz. Sia $N_\delta(F)$ il più piccolo numero di insiemi di diametro al più δ che copre F . Sia $N'_\delta(F)$ il numero di cubi di una δ -mesh che intersecano F , dove per δ -mesh di \mathbb{R}^n si intende una famiglia di cubi o intervalli n -dimensionali del tipo

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$$

dove $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$. Tali cubi costituiscono una collezione di insiemi di diametro $\delta\sqrt{n}$ che copre F , cioè $N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F)$. D'altra parte, qualsiasi insieme di diametro al più δ è contenuto in 3^n cubi di una δ -mesh. Pertanto $N'_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F)$. Unendo le due disuguaglianze e dividendo per $-\ln \delta$:

$$\frac{\ln N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\ln(\delta\sqrt{n}) + \ln \sqrt{n}} \leq \frac{\ln N'_\delta(F)}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln 3^n + \ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

prendendo limite inferiore e superiore per $\delta \rightarrow 0$ si ottiene la tesi. ■

In realtà, la proposizione 2.4.1 è molto più lunga. All'atto pratico si usa la definizione più conveniente al calcolo desiderato.

Il legame tra la dimensione di box-counting e la dimensione di Hausdorff è dato nella seguente proposizione.

Proposizione 2.4.2. Per ogni $F \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto e limitato vale

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \quad (2.11)$$

Dimostrazione: Si supponga che $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ per un certo $s \geq 0$. Allora per δ sufficientemente piccolo

$$1 < \mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F) \delta^s$$

dove $N_\delta(F)$ è il più piccolo numero di insiemi di diametro al più δ che copre F . Prendendo il logaritmo

$$0 < \ln N_\delta(F) + s \ln \delta$$

da cui segue che

$$s \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

■

Anche se spesso non si ha l'uguaglianza in (2.11), la dimensione di box-counting può essere uno strumento utile per la stima di un limite superiore per la dimensione di Hausdorff. Esistono modi anche per eseguire una stima dal basso, ma sono spesso di difficile applicazione, soprattutto nei casi di interesse a questa tesi.⁵

Si passano in rassegna alcune proprietà della dimensione di box counting in modo da evidenziare differenze e analogie con la dimensione di Hausdorff.

Proposizione 2.4.3. *Valgono le seguenti proprietà $\forall E, F \subset \mathbb{R}^n$ [6]:*

- "monotonia", se $E \subset F$, allora $\underline{\dim}_B E \leq \underline{\dim}_B F$ e $\overline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B F$;
- se F è non vuoto e limitato, vale $0 \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq n$;
- $\overline{\dim}_B F$ è finitamente stabile, ossia $\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$;
- se $F \subset \mathbb{R}^n$ è aperto, allora $\underline{\dim}_B F = n$;
- se $F \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto e finito, allora $\underline{\dim}_B F = 0$;
- se F è una sottovarietà limitata m -dimensionale di \mathbb{R}^n , allora $\underline{\dim}_B F = m$.

Dimostrazione: Si danno le dimostrazioni in sequenza:

- deriva immediatamente dalla definizione notando che $N_\delta(E) \leq N_\delta(F) \quad \forall \delta$;
- Le prime due disuguaglianze sono ovvie; per la terza, F può essere racchiuso in un cubo C cosicché, contando la δ -mesh di cubi, si abbia $N_\delta(F) \leq N_\delta(C) \leq c\delta^{-n}$ per una certa costante $c > 0$;
- Si ha che $N_\delta(E \cup F) \leq N_\delta(E) + N_\delta(F)$, perciò dividendo per $-\ln \delta$ e prendendo il limite superiore si ha che $\overline{\dim}_B(E \cup F) \leq \max\{\overline{\dim}_B(E), \overline{\dim}_B(F)\}$. La disuguaglianza opposta segue dalla proprietà di monotonia sfruttando il fatto che $E, F \subset E \cup F$. La stessa proprietà non sussiste per $\underline{\dim}_B$;
- F contiene un cubo C e così $N_\delta(F) \geq N_\delta(C) \geq c\delta^{-n}$ per una certa costante $c > 0$;
- siccome F è costituito da m punti distinti, allora per delta δ sufficientemente piccolo $N_\delta(F) = m$;
- Omessa perché più complicata.

■

Persiste anche per la dimensione di box-counting l'invarianza per trasformazioni bi-Lipschitziane.

Proposizione 2.4.4. *Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana. Allora, $\underline{\dim}_B f(F) \leq \underline{\dim}_B F$ e $\overline{\dim}_B f(F) \leq \overline{\dim}_B F$. Se inoltre f è bi-Lipschitziana vale l'uguaglianza.*

⁵Si veda [6] per metodi di calcolo della dimensione di Hausdorff.

Dimostrazione: Dimostrando 2.2.4 si è visto che se $\{U_i\}$ è un δ -ricoprimento di F , allora, $\{f(F \cap U_i)\}$ è un $c\delta$ -ricoprimento di $f(F)$. Segue che $N_{c\delta}(f(F)) \leq N_\delta(F)$ per ogni $\delta > 0$. Così:

$$\frac{\ln N_{c\delta}(f(F))}{-\ln(c\delta) + \ln c} \leq \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

Prendendo i limiti superiori e inferiori per $\delta \rightarrow 0$ si ha la prima parte della tesi. Per la seconda, basta applicare nuovamente ciò che si è appena fatto a f^{-1} . ■

Malgrado le proprietà della dimensione di box-counting somiglino a quelle della dimensione di Hausdorff, ve ne è una che crea diversi problemi in alcune situazioni.

Proposizione 2.4.5. *Sia \bar{F} la chiusura di F . Allora*

$$\underline{\dim}_B \bar{F} = \underline{\dim}_B F \quad \overline{\dim}_B \bar{F} = \overline{\dim}_B F$$

Dimostrazione: Siano B_1, \dots, B_k una collezione finita di palle chiuse di raggio δ . Allora l'insieme chiuso dato da $\bigcup_{i=1}^k B_i$ contiene F se e solo se contiene \bar{F} . Quindi il numero più piccolo di palle chiuse di raggio δ che copre F è uguale a quello necessario per coprire \bar{F} , da cui la tesi. ■

Conseguentemente, se F è un sottoinsieme denso in un aperto di \mathbb{R}^n , allora $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = n$. Ad esempio, se si considera l'insieme numerabile dei numeri razionali nell'intervallo $[0,1]$, si ha che la sua dimensione di box-counting è 1. Ciò comporta che, in generale, non si abbia la stabilità numerabile, che invece possiede la dimensione di Hausdorff. Ciò mette in evidenza il fatto che definizioni diverse di dimensione abbiano proprietà diverse e talvolta anche valori differenti. È necessario derivare le proprietà dalle definizioni senza dare nulla per scontato. Spesso si allude col termine di *dimensione frattale* a una definizione universale di dimensione. Come mostrato, ciò è errato ed esistono diverse definizioni, ciascuna con i propri vantaggi e svantaggi.

Si può allora concludere che la dimensione di box-counting possiede la caratteristica di essere computazionalmente migliore, a discapito di costituire uno strumento teorico con limitazioni decisamente serie. Sicuramente, da quest'ultimo punto di vista, la dimensione di Hausdorff offre numerosi vantaggi.

Prima di concludere il capitolo si mostra un esempio di calcolo.

Proposizione 2.4.6 (Dimensione di box-counting dell'insieme di Cantor). *Sia C l'insieme di Cantor, allora $\underline{\dim}_B C = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.*

Dimostrazione: I 2^k intervalli di livello k in E_k di lunghezza 3^{-k} costituiscono un ricoprimento di C , cosicché, se $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$, allora $N_\delta(C) \leq 2^k$. Così

$$\overline{\dim}_B C = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(C)}{-\ln \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{-3^{-k+1}} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Viceversa, ogni intervallo di lunghezza δ con $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ interseca al più un livello k in E_k di lunghezza 3^{-k} . Ci sono 2^k intervalli in E_k , ciascuno contenente punti di C . Allora, sono necessari almeno 2^k intervalli lunghi δ per coprire C , da cui $N_\delta(C) \geq 2^k$. Perciò:

$$\underline{\dim}_B C = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(C)}{-\ln \delta} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{-3^{-k-1}} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Quindi l'insieme di Cantor è uno dei pochi casi per cui $\underline{\dim}_H C = \underline{\dim}_B C = \overline{\dim}_B C$. ■

Capitolo 3

L'attrattore di Lorenz

3.1 Il sistema e l'attrattore di Lorenz

Le equazioni di Lorenz sono un sistema di tre equazioni differenziali ordinarie dipendenti da tre parametri che vennero per la prima volta introdotte da E.N. Lorenz per la descrizione del moto termico di convezione di uno strato bidimensionale di fluido [10]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (3.1)$$

dove $\sigma, r, b > 0$ sono rispettivamente il numero di Prandtl, il numero di Rayleigh e una costante legata alla dimensione dello strato bidimensionale di fluido. Tuttavia, i comportamenti caotici e l'attrattore strano emergono per valori del parametro $r > 1$, ossia fuori dall'intervallo $r \sim 1$ in cui tali equazioni descrivono un sistema fisico. Precisamente, l'attrattore strano emerge per $r \geq r_A \simeq 24.06$.

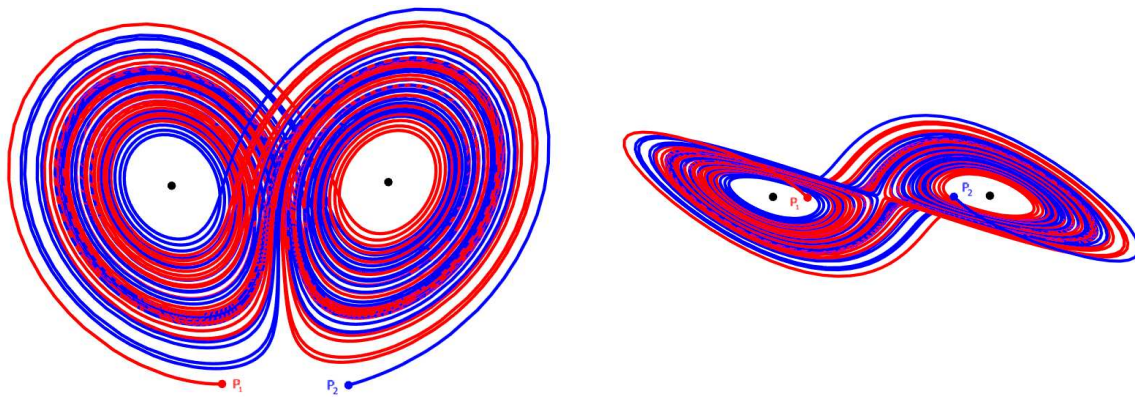


Figura 3.1: L'attrattore di Lorenz da due angolazioni differenti.

In figura 3.1 è mostrato l'attrattore di Lorenz per $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$, ossia i valori originariamente usati in [10], ricostruito a partire da due punti $P_1 = (5, 5, 5)$ e $P_2 = (-5, -5, 5)$ e in due angolazioni diverse. Si noti come vi è un effetto di "mescolamento" delle due orbite. In figura 3.2 sono stati spostati P_1 e P_2 a una distanza circa di $|P_1 - P_2| \simeq 10^{-5}$ per evidenziare la sensibilità alle condizioni iniziali. In particolare $P_1 = (10^{-5}, 10^{-5}, 5)$ e $P_2 = (-10^{-5}, -10^{-5}, 5)$. Malgrado la vicinanza dei dati iniziali, il comportamento delle due orbite appare molto differente. Ad esempio, l'orbita rossa si avvolge più volte attorno al punto di equilibrio a destra rispetto alla blu e viceversa.

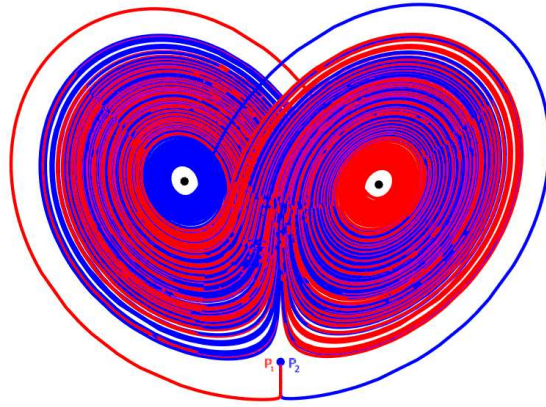


Figura 3.2: Sensibilità alle condizioni iniziali nell'attrattore di Lorenz.

L'attrattore di Lorenz presenta uno spessore, apprezzabile soltanto attraverso una sezione dello stesso. In figura 3.3 è raffigurata una porzione della sezione dell'attrattore di Lorenz che si ha per $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$ con un piano $z = r - 1 = 27$. Si può notare che i punti non si dispongono lungo una curva. Questo è sufficiente per affermare che, indicando con \mathcal{A} l'attrattore di Lorenz, $\dim_H \mathcal{A} > 2$.

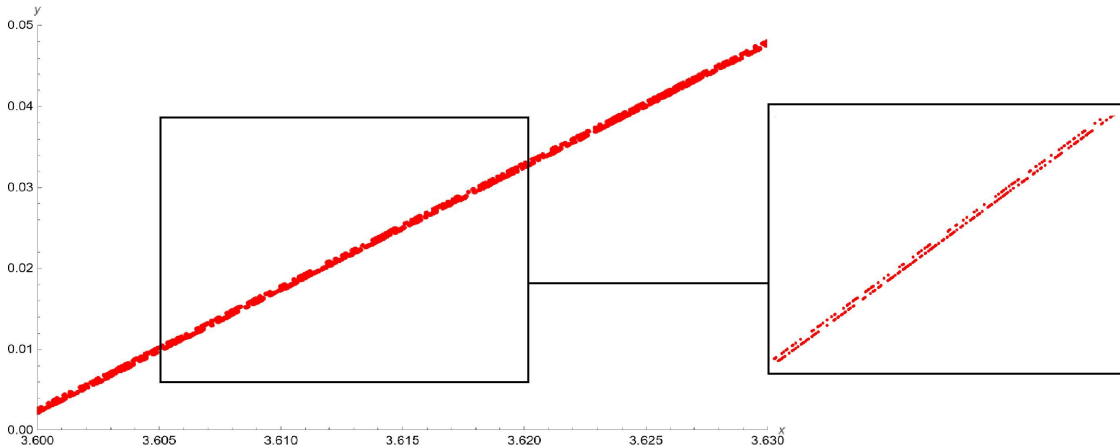


Figura 3.3: Sezione ingrandita dell'attrattore di Lorenz.

3.2 Calcolo della dimensione

3.2.1 Risultati

Ho implementato un programma in Wolfram Mathematica che, dopo aver integrato numericamente le equazioni di Lorenz, calcola la dimensione di box-counting contando quanti cubi di una δ -mesh contengono almeno un punto dell'orbita integrata e quindi andando a interpolare la (2.8). Il listato è riportato in appendice A.

Sono state integrate le equazioni di Lorenz a partire dal dato iniziale $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$, per tempi $0 \leq t \leq 10^3$ e a passi di $dt = 10^{-4}$. In figura 3.4 sono mostrate le coppie $\{\ln(N_\delta), \ln(1/\delta)\}$ ottenute variando $\ln(1/\delta)$ uniformemente tra 0 e $\ln(1/10^{-4})$, ossia $10^{-4} \leq \delta \leq 1$.

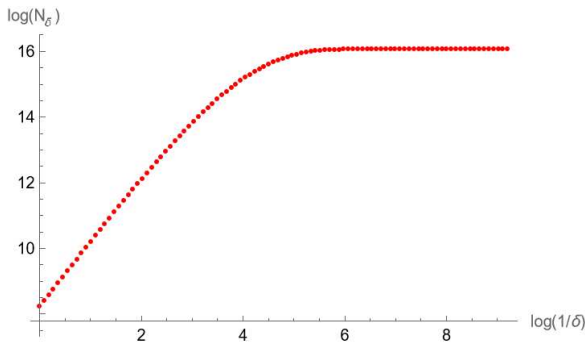


Figura 3.4: Andamento di $\ln(N_\delta)$ rispetto $\ln(1/\delta)$.

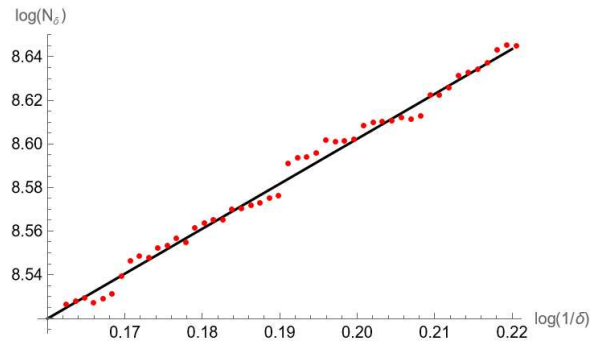


Figura 3.5: Interpolazione lineare delle coppie $\{\ln(N_\delta), \ln(1/\delta)\}$.

Come si può notare, per valori di $\ln(1/\delta) \rightarrow \infty$, ossia $\delta \rightarrow 0$, la curva si appiattisce. Questo perché per $\delta = dt = 10^{-4}$ ogni cubo della δ -mesh non vuoto contiene esattamente un solo punto dell'orbita integrata. Ossia N_δ corrisponde ai punti dell'orbita integrata. Volendo evitare i valori di δ per cui avviene questo fenomeno, che chiameremo "saturazione", si fa variare δ tra 0.80 e 0.85 a passi di 10^{-3} . Dunque è possibile interpolare linearmente le coppie $\{\ln(N_\delta), \ln(1/\delta)\}$ e stimare dalla pendenza della retta la dimensione di box counting. In figura 3.5 è mostrato l'esito dell'interpolazione.

Così facendo ho ottenuto la stima numerica della dimensione di box-counting $dim_B \mathcal{A} \simeq 2.061$. Diversi studi mostrano che la dimensione di Hausdorff dell'attrattore di Lorenz \mathcal{A} è superiormente limitata dal valore ~ 2.06 ([14] e [5]). Si conclude perciò che:

$$2 < dim_H \mathcal{A} \leq 2.061$$

dove il limite inferiore è dato dallo spessore dell'attrattore.

3.2.2 Analisi del metodo

Il calcolo della dimensione di box-counting si è rivelato facile da implementare ed efficace. Tuttavia non è esente da problemi. In particolare, bisogna prestare attenzione nella scelta del range in cui variare δ , del passo di integrazione e del numero di punti dell'orbita integrata. Anche piccole variazioni nella scelta di tali parametri, può portare a stime molto differenti della dimensione di box-counting: difatti, in diverse pubblicazioni, il suo calcolo non supera il 2 ([5] e [11]).

Inoltre, continuando a variare δ tra 0.80 e 0.85 a passi di 10^{-3} e andando a cambiare il dato iniziale si ottengono risultati diversi da quello riportato prima. In figura 3.6 è mostrata la distribuzione delle dimensioni di box counting calcolate integrando le orbite a partire da 27 dati iniziali diversi. Il risultato più affidabile sarà sicuramente il sup delle dimensioni calcolate.

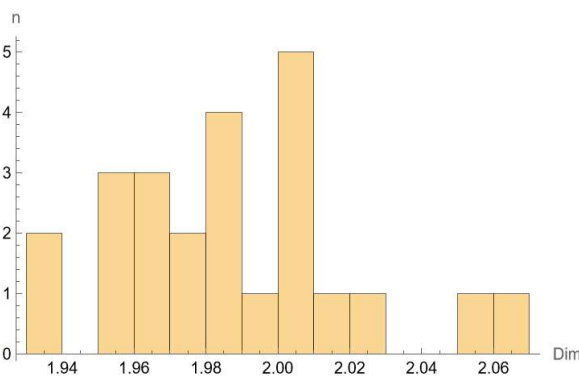


Figura 3.6: Distribuzione delle dimensioni calcolate per 27 dati iniziali attorno l'origine.

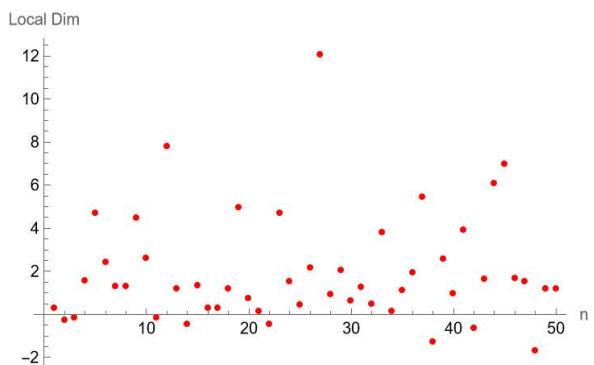


Figura 3.7: Distribuzione delle dimensioni locali.

La ragione di queste fluttuazioni potrebbe risiedere nella lunghezza dell'orbita generata: le traiettorie che partono da alcuni dati iniziali potrebbero esplorare più omogeneamente in meno tempo l'attrattore strano rispetto ad altre. Questo potrebbe avere come conseguenza una più o meno marcata dipendenza alle condizioni iniziali. Ad esempio l'orbita integrata a partire dal dato iniziale

$(x_0, y_0, z_0) = (-0.1, -0.1, -0.1)$ restituisce stima $\dim_B \mathcal{A} \simeq 1.938$. Andando però a integrare l'orbita per $0 \leq t \leq 2000$ mantenendo $dt = 10^{-3}$ si ottiene la migliore stima $\dim_B \mathcal{A} \simeq 2.033$ a conferma di quanto ipotizzato sopra. Un ultimo problema riguarda le fluttuazioni alte della dimensione locale, ossia la pendenza delle rette che interpolano coppie di punti consecutivi. In figura 3.7 è mostrata la dimensione locale calcolata facendo variare δ tra 0.80 e 0.85 a passi di 10^{-3} . Bisogna pertanto generare un numero sufficiente di coppie $\{\ln(N_\delta), \ln(1/\delta)\}$ per essere sicuri di avere una buona stima della dimensione.

3.3 Proprietà elementari delle equazioni di Lorenz

Le equazioni di Lorenz hanno le seguenti proprietà $\forall \sigma, r, b > 0$:

- *Simmetria*: posto $R(x, y, z) = (-x, -y, z)$ vale $R \circ \Phi_t = \Phi_t \circ R \forall t$;
- *Invarianza dell'asse z*: l'asse z è invariante e ogni orbita su di esso tende verso l'origine;
- *Contrazione dei volumi*: notando che $\operatorname{div}(f) = -(\sigma + b + 1) < 0$ e applicando il teorema 1.3.1 si ha che ogni sottoinsieme $U \subset \mathbb{R}^3$ di volume V_0 si contrae a un volume $V(t) = V_0 e^{-(\sigma+b+1)t}$;
- *Punti fissi*: l'origine è un punto fisso. Se $r > 1$, si hanno due punti fissi aggiuntivi simmetrici: $C_\pm = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$;

Si procede ora con un'analisi della stabilità dei punti fissi.

Proposizione 3.3.1.

1) Il campo vettoriale linearizzato nell'origine ha

- tre autovalori reali negativi se $r < 1$;
- un autovalore reale positivo e due reali negativi se $r > 1$

2) Il campo vettoriale linearizzato in C_- e C_+ ha

- due autovalori complessi con parte reale negativa e un autovalore reale negativo per $1 < r < r_H := \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$;
- due autovalori complessi con parte reale positiva e un autovalore reale negativo per $r > r_H$;

Dimostrazione:

1. La linearizzazione del campo vettoriale delle equazioni di Lorenz all'origine è

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

che ha gli autovalori

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-\sigma - 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-\sigma - 1 - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r}), \quad \lambda_3 = -b$$

Chiaramente $\lambda_3 < 0$. Si noti che $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \forall \sigma, r > 0$. È evidente che $\lambda_2 < 0$. Ponendo $\lambda_1 > 0$ e risolvendo per r si trova che ciò vale se e solo se $r > 1$.

2. La linearizzazione del campo vettoriale delle equazioni di Lorenz in C_\pm è

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0 \quad (3.2)$$

La forma degli autovalori è lunga e complicata. Per stabilire il segno della parte reale ci si può affidare ad appositi criteri [15].

■

Il valore di r_H si determina osservando che per $r = r_H$ le radici complesse di (3.2) sono immaginarie pure. Pertanto sostituendo $\lambda = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, in (3.2) si trova

$$-i\omega^3 - (\sigma + b + 1)\omega^2 + ib(\sigma + r)\omega + 2\sigma b(r - 1) = 0$$

Prendendo la parte reale e immaginaria si trova

$$\omega^2 = \frac{2\sigma b(r - 1)}{\sigma + b + 1}, \quad \omega^3 = \omega b(\sigma + r)$$

Siccome $\omega \neq 0$, allora si possono eguagliare le due espressioni e risolvere per r , trovando così r_H . Perché r_H sia positivo è necessario però che i parametri soddisfino $\sigma > b + 1$.

Per $r = r_H$ vi è una *biforcazione di Hopf*. Tale biforcazione può essere: *supercritica* se i punti fissi perdono stabilità "espellendo" un'orbita periodica stabile; *subcritica* se i punti fissi perdono stabilità "assorbendo" un'orbita periodica instabile. In figura 3.8 è mostrata schematicamente la biforcazione. Si può mostrare che in questo caso la suddetta biforcazione è subcritica [16].

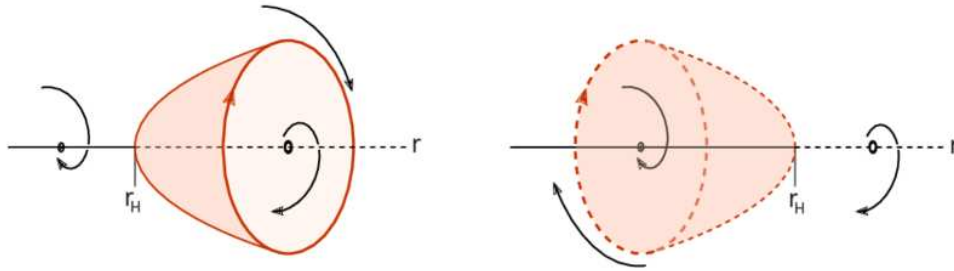


Figura 3.8: Schema della biforcazione di Hopf da [8]. A sinistra il caso supercritico e a destra quello subcritico.

3.4 Biforcazione omoclina

In questa sezione si mostrerà che per $r = r' \simeq 13.926$ si genera, attraverso un processo di biforcazione, un insieme invariante frattale non attrattivo per $r' \leq r < r_A$ e attrattivo per $r > r_A$, dove corrisponde all'attrattore di Lorenz. Da ora si fissano $\sigma = 10$ e $b = 8/3$ e si varia solamente r .

Dalla proposizione 3.3.1 è noto che per $r > 1$ l'origine possiede due autovalori negativi e uno positivo. In particolare, per $r > 1$ nessun autovalore del campo vettoriale linearizzato all'origine ha parte reale nulla.

Definizione 3.4.1 (Punto di equilibrio iperbolico). Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ si dice *iperbolico* se nessun autovalore del campo vettoriale linearizzato in \bar{x} ha parte reale nulla.

Definizione 3.4.2 (Insiemi stabile e instabile). Si definiscono gli *insiemi stabile e instabile* di un punto di equilibrio \bar{x} come

$$W^s(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi_t(x) \rightarrow \bar{x} \text{ per } t \rightarrow +\infty\}, \quad W^u(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi_t(x) \rightarrow \bar{x} \text{ per } t \rightarrow -\infty\}$$

Per un punto iperbolico gli insiemi stabile e instabile hanno la struttura di varietà differenziabile immersa. Si parlerà in tal caso di varietà stabile $W^s(\bar{x})$ e instabile $W^u(\bar{x})$ [7].

Per $r > 1$ l'origine O possiede una varietà stabile $W^s(O)$ bidimensionale e una varietà instabile $W^u(O)$ unidimensionale. Non si può dire molto a priori sulla forma della varietà stabile dell'origine, se non

che contiene l'intero asse z .¹ La varietà instabile dell'origine, essendo 1-dimensionale, è formata da O e da due curve disgiunte, $W_+^u(O)$ e $W_-^u(O)$, che ne costituiscono i due "rami". Dalla proposizione 3.3.1 è noto che le varietà stabili di C_+ e C_- sono tridimensionali per $1 < r < r_H$.² Numericamente si osserva che, per $1 < r < r' \simeq 13.926$, $W_+^u(O) \subset W^s(C_+)$ e $W_-^u(O) \subset W^s(C_-)$. Si noti che $r' < r_H$. Per $r > r'$ avviene uno scambio: $W_+^u(O) \subset W^s(C_-)$ e $W_-^u(O) \subset W^s(C_+)$. Precisamente, per $r = r'$ i due rami $W_+^u(O)$ e $W_-^u(O)$ di $W^u(O)$ formano dei cappi omoclini all'origine. Questo evento è chiamato *biforcazione omoclina* o *esplosione omoclina* ed è il responsabile della creazione di un insieme invariante frattale che però non risulta attrattivo fino a $r = r_A$. Per $r = r_A$ tale insieme diventa l'attrattore di Lorenz [16].

Si può ora procedere con un'analisi locale all'origine per descrivere ciò che accade per valori di $r \simeq r'$. La seguente trattazione è valida per sistemi che presentano simmetria analoga a quella delle equazioni di Lorenz e che abbiano sull'asse di simmetria un punto di equilibrio con autovalori corrispondenti al campo vettoriale linearizzato tali che $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0$.

Come prima cosa ci si pone nel sistema di riferimento (ξ, η, z) degli autovettori del campo vettoriale linearizzato all'origine. Sia ξ corrispondente a $\lambda_1 > 0$, η a $\lambda_2 < 0$ e z a $\lambda_3 < 0$. La simmetria data dalla riflessione $R(x, y, z) = (-x, -y, z)$ permane anche nel nuovo sistema di coordinate.

Si consideri ora una "scatola" chiusa B centrata nell'origine e con facce $|\xi| = l_1$, $|\eta| = l_2$ e $|z| = l_3$. Siano T e S due tubi che contengono le orbite che fuoriescono dalla scatola nei punti $(\pm l_1, 0, 0)$. Tali tubi circondano solo la porzione di orbita che congiunge i punti $(\pm l_1, 0, 0)$ ai punti in cima alla scatola dove le traiettorie rientrano per la prima volta. Siccome tali traiettorie rientrano nella scatola per $r = r'$, per continuità lo faranno anche per valori prossimi a r' . La costruzione descritta è mostrata in figura 3.9.

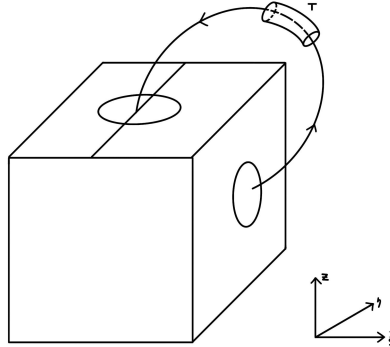


Figura 3.9: Costruzione della scatola attorno all'origine. Per chiarezza, è stata mostrata solo una porzione del tubo T ; il tubo S è ottenibile per simmetria. L'immagine è ispirata al lavoro di [16].

Sia Σ la faccia superiore della scatola e $S = \Sigma \cap W^s(O)$. Sia $E \subset \Sigma$ un disco che intersechi il segmento S . Si vuole costruire una mappa di primo ritorno di E su Σ .

Sia quindi D un disco sulla faccia laterale della scatola che circondi il punto $(l_1, 0, 0)$ dove fuoriesce il ramo destro della varietà instabile dell'origine. Scegliendo la scatola B sufficientemente piccola, è possibile approssimare la mappa $E_+ \rightarrow D$ attraverso il campo vettoriale linearizzato all'origine, dove $E_+ := \{\xi \in E : \xi > 0\}$. Per $\xi > 0$ si ottiene:

$$(\xi, \eta, l_3) \rightarrow \left(l_1, \eta \left(\frac{\xi}{l_1} \right)^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, l_3 \left(\frac{\xi}{l_1} \right)^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \right) \quad (3.3)$$

Si definisce quindi il tubo T in modo tale che la sua base sulla faccia laterale della scatola contenga D e termini in qualche sottoinsieme di Σ . Si osservi che tale tubo termina in Σ intersecando S per $r = r'$, dal momento che ingloba il ramo destro della varietà instabile, e per continuità lo farà anche

¹La forma della varietà stabile dell'origine è complicata e avvolta su se stessa. In particolare, riempie densamente \mathbb{R}^3 [12].

²Si noti che per $1 < r < r_H$ e $r > r_H$ anche C_1 e C_2 sono iperbolici.

per valori vicini a r' . Si fa notare che, a meno di avvicinare r a r' e di restringere E , $|\xi| \ll l_1$ e inoltre che $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ e $-\frac{\lambda_3}{\lambda_1} < 1$. Pertanto la seconda coordinata di (3.3) è molto più piccola della terza. Per costruzione, il tubo T induce una mappa $D \rightarrow \Sigma$ tale che

$$(l_1, \eta, z) \rightarrow (f_r(\eta, z), g_r(\eta, z), l_3) \quad (\eta, z) \in D$$

Combinando le due mappe si ottiene una trasformazione $E_+ \rightarrow \Sigma$ data da

$$(\xi, \eta, l_3) \rightarrow \left(f_r \left(\eta \left(\frac{\xi}{l_1} \right)^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, l_3 \left(\frac{\xi}{l_1} \right)^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \right), \quad g_r \left(\eta \left(\frac{\xi}{l_1} \right)^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, l_3 \left(\frac{\xi}{l_1} \right)^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \right), \quad l_3 \right) \quad (3.4)$$

Una versione analoga è ottenibile per $\xi < 0$. Si pongono quindi $\xi_r^* = f_r(0, 0)$ e $\eta_r^* = g_r(0, 0)$; cioè (ξ_r^*, η_r^*, l_3) sono le coordinate del punto su Σ dove il ramo destro della varietà instabile rientra per la prima volta. Siano $f_r^* = \frac{\partial f_r}{\partial z}(0, 0)$ e $g_r^* = \frac{\partial g_r}{\partial z}(0, 0)$. Si può allora espandere (3.4) al primo ordine e ignorare i termini $\frac{\partial f_r}{\partial \eta}$ e $\frac{\partial g_r}{\partial \eta}$ poiché sono moltiplicati dalla seconda coordinata di equazione (3.3), che come detto sopra è molto piccola. Si ottiene così la mappa di primo ritorno $F : E_+ \rightarrow \Sigma$:

$$(\xi, \eta) \xrightarrow{F} \left(\xi_r^* + f_r^* l_3 \left(\frac{\xi}{l_1} \right)^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}, \eta_r^* + g_r^* l_3 \left(\frac{\xi}{l_1} \right)^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \right) \quad (3.5)$$

e si nota che la prima coordinata risulta disaccoppiata dalla seconda, permettendo di ricavare la mappa unidimensionale:

$$\Phi(\xi) = \xi_r^* + f_r^* l_3 \left(\frac{\xi}{l_1} \right)^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}$$

dove $\xi > 0$. Si suppone quindi che f_r^* non cambi segno in r' cosicché ciò non avvenga nemmeno in un suo intorno. Ci sono quindi due casi, $f_r^* > 0$ e $f_r^* < 0$, che rappresentano i due tipi di biforcazioni omocline possibili. Per ciascuno, si considera senza perdita di generalità $\xi_r^* > 0$ se $r < r'$ e $\xi_r^* < 0$ se $r > r'$. In figure 3.10, 3.11 e 3.12 sono illustrati i vari casi solo per $f_r^* > 0$ in quanto l'altra biforcazione si manifesta in modo identico, ma solo nel verso opposto³. In particolare, la biforcazione che si ha per $r = r' \simeq 13.926$ è proprio quella data da $f_r^* > 0$ come sarà chiaro a breve.

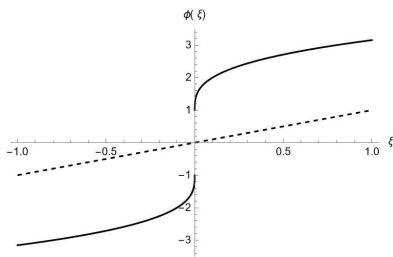


Figura 3.10: Mappa per $\xi_r^* > 0$ e $f_r^* > 0$.

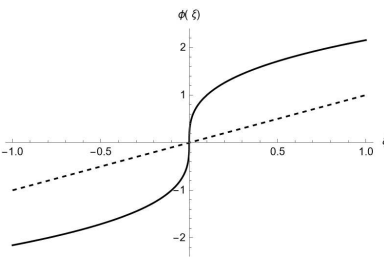


Figura 3.11: Mappa per $\xi_r^* = 0$ e $f_r^* > 0$.

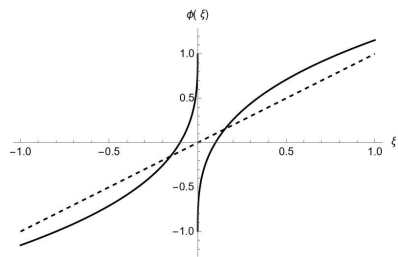


Figura 3.12: Mappa per $\xi_r^* < 0$ e $f_r^* > 0$.

Per studiare l'effetto della biforcazione, ci si concentra in ciò che accade per $r > r'$, ossia sulla mappa 3.12. Siano A e $-A$ e punti di intersezione della mappa con la bisettrice del primo e terzo quadrante e B e $-B$ i punti le cui immagini finiscono in tale intersezione, ossia $\Phi(B) = -A$ e $\Phi(-B) = A$. È immediato che se $|\xi| > A$ si ha $|\Phi(\xi)| > |\xi|$ e che se $|\xi| < B$, allora $|\Phi(\xi)| > A$. Pertanto in tutti questi intervalli, la coordinata ξ aumenterà ad ogni ritorno. Tuttavia, gli intervalli $[-A, -B]$ e $[B, A]$ vengono mappati da Φ in $[-A, A]$: pertanto alcune orbite con dato iniziale in $[-A, -B] \cup [B, A]$ rimarranno intrappolate in tale intervallo. Dalla mappa di primo ritorno bidimensionale (3.5) è evidente che per ogni $B < |\xi| < A$ si ha che η potrà variare in un certo intervallo. In figura 3.13 è riportata la mappa di primo ritorno sulla faccia superiore della scatola B . La parte con $\xi > 0$ del disco E è mappata nel profilo allungato

³In particolare sono stati usati i seguenti valori numerici di esempio: $\lambda_3/\lambda_2 = 3$, $f_r^* = 1$, $\xi_r^* = 1$, $l_3 = 10$ e $l_1 = 100$. La cosa più importante è che $\xi \ll l_1$, poiché la mappa è definita solo per tali valori. Inoltre la mappa è stata estesa per simmetria a $\xi < 0$ usando la disparità di Φ .

più basso e viceversa per la parte con $\xi < 0$; la forma di uno è deducibile per simmetria da quella dell'altro. Sono stati evidenziati i settori che compresi negli intervalli che soddisfano $B < |\xi| < A$. Tali settori verranno quindi allungati in modo che $\xi \in [-A, A]$ al successivo ritorno sulla scatola.

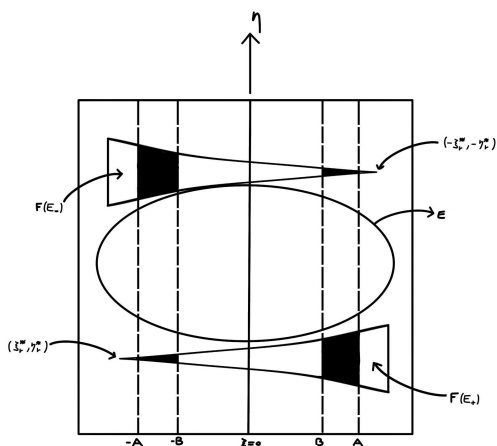


Figura 3.13: Mappa di primo ritorno di E sulla superficie Σ . La figura è ispirata al lavoro di [16].

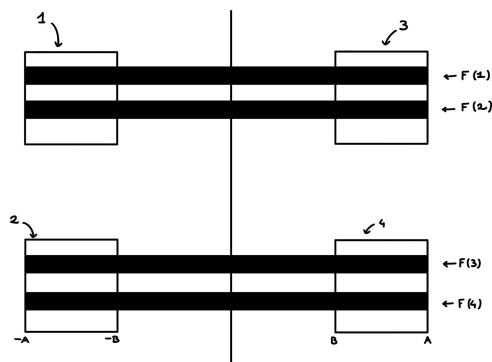


Figura 3.14: Primo ritorno delle 4 aree scure di figura 3.13 dove è stata ignorata la deformazione lungo η . La figura è ispirata al lavoro di [16].

Per semplicità, si ignora la deformazione lungo η e si considerano le quattro aree scure nella figura 3.13 come dei quadrati⁴. In figura 3.14 è possibile vedere una mappa semplificata che illustra tali settori dopo un primo ritorno. Tutti i punti che dopo essere ritornati sulla faccia superiore della scatola non intersecano uno dei quadrati di partenza, lasceranno la zona di interesse, ossia $\xi \notin I := [-A, A]$, oppure, nel caso terminassero sulla varietà stabile, concluderanno verso l'origine. Si possono pertanto dividere i quadrati in fasce verticali: ad ogni fascia verticale corrisponderà una sequenza di numeri 1,2,3 e 4 che rappresentano tutti i possibili futuri in termini di quadrati visitati. Tali sequenze possono essere infinite o, nel caso l'orbita termini nell'origine, oppure lasci l'area di interesse, finite. L'ordine con cui possono essere visitati i quadrati seguono delle regole precise dettate dalla mappa di primo ritorno F . Tali regole sono schematizzate in 3.15.

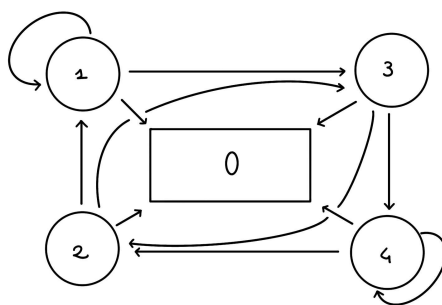


Figura 3.15: Possibili transizioni tra i quadrati di figura 3.14. Lo zero al centro rappresenta il raggiungimento dell'origine e quindi il termine della sequenza. La figura è ispirata al lavoro di [16].

Rimuovendo le fasce verticali attraverso le quali passano le orbite che fuoriescono dalla zona di interesse, ma non quelle che terminano all'origine, si ottiene un insieme di Cantor di intervalli verticali [16].

Tuttavia, è possibile dividere le 4 fasce scure di figura 3.14 anche in strisce orizzontali: ogni striscia rappresenterà un passato unico per le traiettorie che la attraversano. Ad esempio se ci si trova sul quadrato 1 e si sa di provenire dal quadrato 2, ci si trova sulla fascia $F(2)$ di figura 3.14. Reiterando questo processo si ottiene un insieme di Cantor di intervalli orizzontali attraversati da tutte le traiettorie che rimangono nella regione di interesse per tutti i tempi negativi e i cui passati sono tutti e soli

⁴È possibile mostrare l'equivalenza tra le due mappe [16].

quelli ammessi dalle regole di figura 3.15. Pertanto tutti i punti che giacciono sull'intersezione di questi due insiemi di Cantor di intervalli rimarranno all'interno di questa regione per tutti i tempi. Inoltre, ogni punto in questa intersezione avrà una rappresentazione simbolica unica in termini di 1, 2, 3 e 4. Ancor più importante, qualsiasi sequenza di questi simboli generata a partire dalle regole dettate dallo schema 3.15, doppiamente infinita, oppure infinita a sinistra e terminante a destra, nel caso di orbite che terminano all'origine, apparterrà a tale intersezione. Quest'ultima osservazione permette di utilizzare solo due simboli, T per 3 e 4, e S per 1 e 2, mantenendo l'unicità della rappresentazione [16]. L'insieme appena costruito è chiamato *insieme strano invariante*. Tuttavia non è ancora un attrattore. Molte delle proprietà di questo insieme derivano dallo studio delle sue orbite attraverso le sequenze di T e S che le identificano⁵. Le principali sono le seguenti:

- Nessun orbita dell'insieme strano invariante è stabile: è possibile trovare traiettorie arbitrariamente vicine ad ogni punto dell'insieme strano invariante che lasciano la scatola;
- Le orbite che partono dall'insieme strano invariante presentano sensibilità alle condizioni iniziali;
- Contiene un'infinità non numerabile di traiettorie dense. In particolare, se non fosse per le traiettorie che terminano all'origine, si potrebbe costruire una sequenza aperiodica di T e S che passi arbitrariamente vicino a ciascun'altra orbita dell'insieme;
- Le orbite periodiche sono dense

È inoltre possibile mostrare che all'aumentare di r verso r_H le due orbite periodiche più semplici dell'insieme invariante strano, ossia quelle date dalle sequenze infinite di sole T e S, si restringano attorno C_- e C_+ . Numericamente è confermabile che siano loro le responsabili della biforcazione di Hopf che accade per $r = r_H$ ⁶. Inoltre, come già detto tali orbite non sono stabili e così viene spiegato perché la biforcazione è subcritica. È poi possibile verificare che sia proprio l'insieme invariante strano a dare origine, per $r = r_A$, all'attrattore strano: è per questo che la biforcazione omoclina che si ha per $r = r'$ è quella descritta da $f_r^* > 0$, altrimenti l'insieme invariante strano esisterebbe per $r < r'$ e non viceversa [16].

3.5 Modello geometrico dell'attrattore di Lorenz

Si vorrebbe ora dare una descrizione del flusso per $r > r_A$, ossia in seguito alla formazione dell'attrattore. A differenza della sezione precedente, ora la descrizione non sarà più locale. In particolare, si creerà un modello atto alla descrizione del flusso. Ciò richiederà delle ipotesi che potrebbero venir confermate o smentite da altri studi. Tale modello viene riconosciuto con il nome di *modello geometrico dell'attrattore di Lorenz* e può costruito sulla base di ipotesi che potrebbero valere anche per sistemi diversi da quello di Lorenz.

Si consideri un rettangolo Σ che giace sul piano $z = r - 1$, parallelamente al piano xy. Tale rettangolo è scelto in modo tale che i punti fissi C_- e C_+ giacciono nel punto medio di due lati opposti. Sia S la curva che si ottiene dall'intersezione di Σ con la varietà stabile dell'origine. Si vuole definire una mappa di ritorno F su $\Sigma \setminus S$. Si supponga poi che:

- gli autovalori del campo vettoriale linearizzato all'origine soddisfino $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0$, con λ_3 associato all'autovettore parallelo all'asse z;
- esista una famiglia di curve \mathcal{F} su Σ che contenga S e abbia la proprietà di essere invariante sotto la mappa di ritorno F di Σ . Ossia se $\gamma \in \mathcal{F}$, allora $F(\gamma) \in \mathcal{F}$. Si dirà che \mathcal{F} costituisce una *foliazione contrattiva* per il flusso;
- tutti i punti all'interno di $\Sigma \setminus S$ ritornino in Σ e che la mappa di ritorno F sia "sufficientemente" espansiva nella direzione trasversa a \mathcal{F} ;
- il flusso sia simmetrico rispetto $R(x, y, z) = (-x, -y, z)$.

⁵Si veda [16] per una trattazione esaustiva.

⁶Si noti che $r_A < r_H$: la biforcazione di Hopf non è responsabile della creazione dell'attrattore strano poiché esso è già presente quando avviene [16].

Chiaramente la prima e l'ultima ipotesi sono soddisfatte dalle equazioni di Lorenz. Tuttavia, le altre non sono ancora state verificate [13]. È però evidente che eseguire ipotesi sia necessario per estrapolare qualche proprietà da un flusso tanto complesso. La presenza di una foliazione contrattiva è stata tacitamente presente anche nella sezione precedente ed è apparsa come conseguenza delle approssimazioni fatte. È stata proprio tale ipotesi a permettere di disaccoppiare le variabili e ricavare una mappa uno-dimensionale [16]. Tuttavia, l'ipotesi fatta qui è molto più forte perché è globale e non locale. Formalmente queste ipotesi si traducono nel fatto che esiste un sistema di coordinate (ξ, η) su Σ tale che F ha le seguenti proprietà:

- le curve nella famiglia \mathcal{F} sono date da $\xi = \text{cost.}$ e S da $\xi = 0$;
- esistono due funzioni f e g tale che F ha la forma $F(\xi, \eta) = (f(\xi), g(\xi, \eta))$ per $\xi \neq 0$ e $F(-\xi, -\eta) = -F(\xi, \eta)$;
- $f'(\xi) > \sqrt{2}$ per $\xi \neq 0$ e $f'(\xi) \rightarrow \infty$ per $\xi \rightarrow 0$;
- $0 < \frac{\partial g}{\partial \eta} < 1$ per $\xi \rightarrow 0$ e $\frac{\partial g}{\partial \eta} \rightarrow 0$ per $\xi \rightarrow 0$.

Si noti che per l'ultima proprietà i limiti $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} F(\xi, \eta) = (r^-, t^-)$ e $\lim_{\xi \rightarrow 0^-} F(\xi, \eta) = (r^+, t^+)$ sono indipendenti da η . Si noti poi in figura 3.16 che, per la terza proprietà, la striscia verticale $V \subset \Sigma$ data da $r^- \leq \xi \leq r^+$ è mappata in sé stessa. In particolare, $F(V_+)$ è la striscia in basso e $F(V_-)$ quella in alto. Ciò è ancor più evidente guardando alla mappa unidimensionale f in figura 3.17. In particolare, è possibile dimostrare che l'insieme $A = \bigcap_{n \geq 0} F^n(V)$ è un attrattore per la mappa F [13].

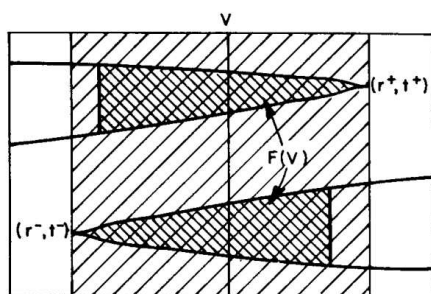


Figura 3.16: Mappa di primo ritorno di V da [13].

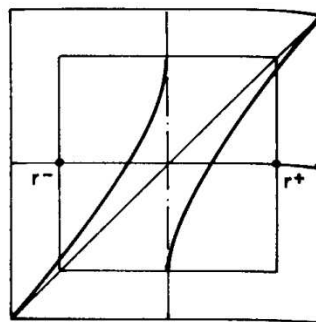


Figura 3.17: Grafico della mappa f da [13].

Ciò che accade è che tutti i punti di V o tendono verso A , oppure finiscono in S , dove F non è definita, terminando all'origine. L'insieme A sarà formato da una collezione non numerabile di segmenti che possono essere visti come un insieme di Cantor per un intervallo $C \times I$, seguendo le idee della sezione precedente. Tuttavia tali segmenti sono "incollati" nei punti (r^+, p^+) e (r^-, p^-) . Per creare il flusso geometrico a partire da questo attrattore si definisce un volume sopra l'origine che abbia come faccia superiore V , come mostrato in figura 3.18.

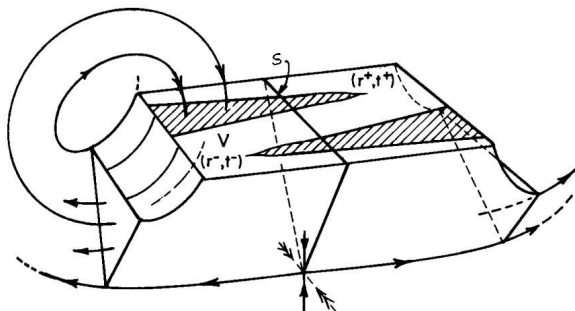


Figura 3.18: Flusso geometrico da [13].

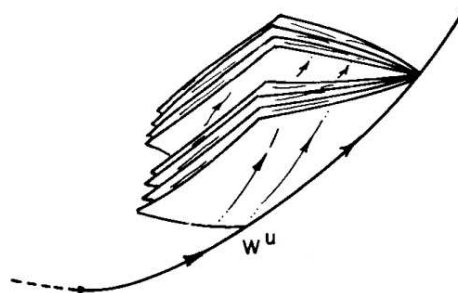


Figura 3.19: Rappresentazione del "libro alla Cantor" da [13].

Poi si definisce un flusso lineare all'interno del volume descritto dagli autovalori dell'origine. Le orbite poi fuoriescono dalle facce laterali per tornare sulla superficie superiore e rientrare secondo quanto descritto dalla mappa $F(\xi, \eta)$. Con questa visione del flusso, localmente l'attrattore appare come un "libro alla Cantor", ossia un insieme di superfici parametrizzate da un insieme di Cantor e incollate lungo una curva, come mostrato in figura 3.19.

Molte delle proprietà di questo flusso sono deducibili dalla mappa unidimensionale f . In modo simile a quanto fatto nella precedente sezione, le orbite possono essere descritte da sequenze di due simboli scelti in base al fatto che $\xi > 0$ o $\xi < 0$. Tutto ciò è possibile grazie all'ipotesi di una foliazione contrattiva. Grazie ad essa è inoltre possibile interpretare la mappa uni-dimensionale come la sezione di Poincaré di un semi-flusso, dove ogni curva in \mathcal{F} è identificata con un punto e il flusso scorre su una superficie ramificata, come mostrato in figura 3.20. Questa semplificazione permette di studiare diverse proprietà del flusso, a patto di sacrificare l'unicità del passato delle traiettorie, che viene persa identificando ogni arco della foliazione con un punto.

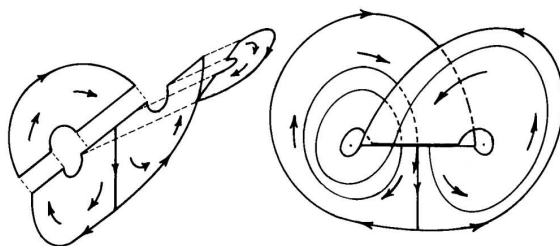


Figura 3.20: Semiflusso costruito a partire dalla mappa f su una superficie ramificata da [13].

3.6 Una (nuova) stima superiore della dimensione dell'attrattore di Lorenz

In conclusione, mostriamo che, utilizzando il modello geometrico precedente, si può ottenere una nuova stima della dimensione dell'attrattore di Lorenz che, per mia conoscenza, è nuova.

Ci si aspetta che la dimensione di hausdorff dell'attrattore di Lorenz sia superiore a 2 a causa del suo spessore. Pertanto ci si aspetta che $2 < \dim_H \mathcal{A} \leq \underline{\dim}_B \mathcal{A} \leq \overline{\dim}_B \mathcal{A} < 3$. In realtà si può fare meglio di così. Useremo la seguente proposizione.

Proposizione 3.6.1. [6] Per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ e $F \subset \mathbb{R}^m$ vale

$$\dim_H(E \times F) \geq \dim_H E + \dim_H F$$

e l'uguaglianza vale se $\overline{\dim}_B F = \dim_H F$

Sia $E = [0,1]$ e $F = C$ l'insieme di Cantor. Allora, per la proposizione precedente, $\dim_H(C \times [0, 1]) = \dim_H C + \dim_H [0, 1] = 1 + \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Tale insieme è costituito da segmenti verticali centrati in ogni punto di C . È possibile definire una mappa $f : C \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ tale che

$$(x, y) \rightarrow (xy, y)$$

Tale funzione mappa i vari segmenti in porzioni di rette che congiungono l'origine al punto $(x, 1)$ con $x \in C$. È chiaro che f sia Lipschitziana, ma non invertibile in 0. Pertanto per il corollario 2.3.1: $\dim_H(f(C \times [0, 1])) \leq \dim_H(C \times [0, 1])$. Estendendo il ragionamento⁷ al caso del "libro alla Cantor" si ha che:

$$2 < \dim_H \mathcal{A} \leq 2 + \frac{\ln 2}{\ln 3} \simeq 2.6$$

⁷È sufficiente prolungare i segmenti lungo z per creare i "fogli del libro". La funzione f ristretta a tale coordinata può essere scelta come l'identità.

Appendici

A - Codice per il calcolo della dimensione di box-counting

```
sol = NDSolve[{x'[t] == 10 (y[t] - x[t]),
  y'[t] == x[t] (28 - z[t]) - y[t], z'[t] == x[t] y[t] - 8/3 z[t],
  x[0] == 0.1, y[0] == 0.1, z[0] == 0.1}, {x, y, z}, {t, 50, 1000},
  MaxSteps -> Infinity];

attrattore = Table[{x[t], y[t], z[t]} /. sol[[1]], {t, 50, 1000, 0.0001}];

ConteggioCaselle[dati_, l_] :=
  Module[{minX, maxX, minY, maxY, minZ, maxZ, istogramma},
    {minX, minY, minZ} = Floor[Min /@ Transpose[dati]];
    {maxX, maxY, maxZ} = Ceiling[Max /@ Transpose[dati]];

    istogramma =
      BinCounts[dati, {minX, maxX, l}, {minY, maxY, l}, {minZ, maxZ, l}];

    Length[Select[Flatten[istogramma], # > 0 &]]

    dimensioniGriglia = Table[0.8 + i*10^-3, {i, 0, 50}];
    conteggi = ConteggioCaselle[attrattore, #] & /@ dimensioniGriglia;

    DimensioneBoxCounting =
      Fit[Transpose[{Log[1/dimensioniGriglia], Log[conteggi]}], {1, x}, x][[2]]
```

Bibliografia

- [1] Celso Grebogi et al. “strange attractors that are not chaotic”. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* (1984).
- [2] Heinz-Otto Peitgen et al. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer, 1992.
- [3] Llàus Alsedà. “On the definition of Strange Nonchaotic Attractor”. Università di Barcellona. 2007.
- [4] Vladimir Igorevič Arnol’d. “Metodi matematici della meccanica classica”. In: Editori Riuniti Univ. Press, 2010, pp. 71–73.
- [5] Jonathan Jaquette e Benjamin Schweinhart. “Fractal dimension estimation with persistent homology: a comparative study”. In: *arXiv:1907.11182v2 [math.DS]* (2019).
- [6] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 2014.
- [7] Francesco Fassò. “Note per il corso di Dynamical Systems per il corso di laurea magistrale in Matematica”. Università di Padova.
- [8] Erwin Frey e Fridtjof Brauns. “Self-organisation of Protein Patterns”. In: (dic. 2020).
- [9] Lee Chau Kee. “Lecture notes”. Chapter 3: Lebesgue and Hausdorff. The chinese university of Hong Kong. 2014.
- [10] Edward N. Lorenz. “Deterministic nonperiodic flow”. In: *Journal of the atmospheric sciences* (1963).
- [11] Mark J. McGuinness. “The fractal dimension of the Lorenz attractor”. In: *Physics Letters A Volume 99* (1983).
- [12] Hinke M. Osinga. “Understanding the geometry of dynamics: the stable manifold of the Lorenz system”. In: *Journal of the Royal Society of New Zealand* (2018).
- [13] John Guckenheimer e Philip Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983.
- [14] Grassberger P. e Procaccia I. “Measuring the Strangeness of Strange Attractors”. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* (1983).
- [15] Azad.I.Amen e Rizgar .H. Salih. “Limit Cycles of Lorenz System with Hopf Bifurcation”. In: *Raf. J. of Comp. & Math's. , Vol. 5, No. 1* (2008), p. 86.
- [16] Colin Sparrow. *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*. Springer-Verlag, 1982.
- [17] Steven H. strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos*. CRC Press, 2015.
- [18] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2003.