

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN
INGEGNERIA ELETTRONICA

Studio del modello e del controllo di un convertiplano

Relatore:
PROF.ESSA MARIA ELENA VALCHER

Laureando:
JACOPO MAGGINI
1224261

Anno Accademico 2022/23
21 Luglio 2023

Abstract

In questa tesi, l'argomento di studio è la realizzazione di un modello e successivamente il controllo di un convertiplano. Un convertiplano è un velivolo di tipo VTOL (Vertical Take-Off and Landing) in grado di decollare e atterrare verticalmente come un elicottero e, durante la fase di crociera, di operare come un aeroplano.

Di VTOL ne esistono di molti tipi: alcuni modelli presentano dei propulsori per la fase di decollo e atterraggio, altri invece sfruttano la rotazione dell'intera ala per entrare in modalità elicottero ed essere così in grado di atterrare (e decollare) verticalmente.

Il convertiplano, a differenza degli altri VTOL, garantisce la possibilità di volo verticale andando a muovere solamente la parte relativa all'elica. Questi velivoli garantiscono un'ottima versatilità dato che uniscono la capacità di volo di un elicottero con quella di un aeroplano. Se da un lato l'aeroplano necessita di ampi spazi dedicati per il decollo e atterraggio, dall'altro l'elicottero garantisce la possibilità di andare in volo in qualunque situazione. Allo stesso modo, l'elicottero non è un mezzo di trasporto dotato di grande velocità o autonomia. Il convertiplano, invece, garantisce lo spostamento ad una velocità ben superiore a quella di un normale elicottero e permette di percorrere tratte più lunghe.

Con questo lavoro di tesi, si andrà poi a "costruire" un modello che descriva la dinamica del velivolo per simulare il suo comportamento. Inoltre, verranno sintetizzati dei controllori necessari affinché il moto del convertiplano rispetti determinate prestazioni.

Indice

1	Storia del convertiplano	7
2	Modello del convertiplano	11
2.1	Modello di stato non lineare	12
2.2	Punti di equilibrio	13
2.3	Linearizzazione	14
2.4	Funzione di trasferimento	15
3	Progettazione del controllore	19
3.1	Controllo della posizione del convertiplano	19
3.1.1	Controllo della quota z	19
3.1.2	Controllo del parametro b	26
3.2	Controllo della posizione angolare del convertiplano	29
3.2.1	Controllo della posizione θ	30
3.2.2	Controllo del parametro β	33
4	Il convertiplano del futuro	37
5	Conclusioni	39
	Bibliografia	43

Capitolo 1

Storia del convertiplano

Il convertiplano è un velivolo di tipo VTOL (Vertical Take-Off and Landing) in cui il sistema di propulsione e sostentamento garantisce la possibilità di volo sia verticale che orizzontale.

Esso combina la capacità di portanza verticale dell'elicottero con la velocità e autonomia di un velivolo ad ala fissa.

Inizialmente il velivolo decolla verticalmente, quindi le eliche si muovono in modo tale che il loro piano di rotazione sia orizzontale, generando una portanza pari a quella di un elicottero. Man mano che il velivolo decolla, aumenta anche la sua velocità: le eliche cominciano ad inclinarsi in avanti con il piano di rotazione che alla fine diventa verticale. In questo modo l'ala fornisce la portanza, mentre l'elica la spinta necessaria per procedere ad una certa velocità di crociera.

Data questa configurazione delle eliche, che risulta essere più efficiente per la propulsione ed evita problemi di stallo dell'elicottero, i convertiplani possono raggiungere velocità maggiori degli elicotteri.

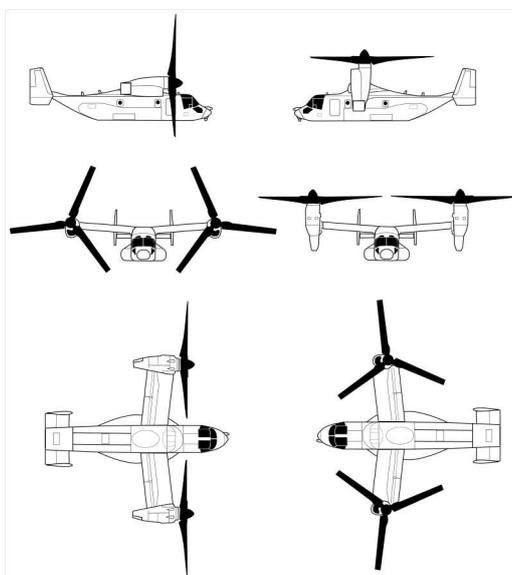


Figura 1.1: Rappresentazione secondo diverse angolature di un convertiplano.

Dal punto di vista storico il convertiplano venne ideato per applicazioni militari. La prima idea di costruire un velivolo VTOL che impiegava le eliche come gli elicotteri, fu dell'inventore George Lehberger nel 1930. Fu però nel 1947 che venne sviluppato e fatto volare un convertiplano: il Transcendental Model 1-G (successivamente anche il biposto Transcendental Model 2). Tale velivolo volò per un anno fino a quando, nel 1955, fu distrutto a causa di un incidente. Fu il primo VTOL ad aver volato e compiuto correttamente la maggior parte delle transizioni in volo da elicottero a aeroplano.

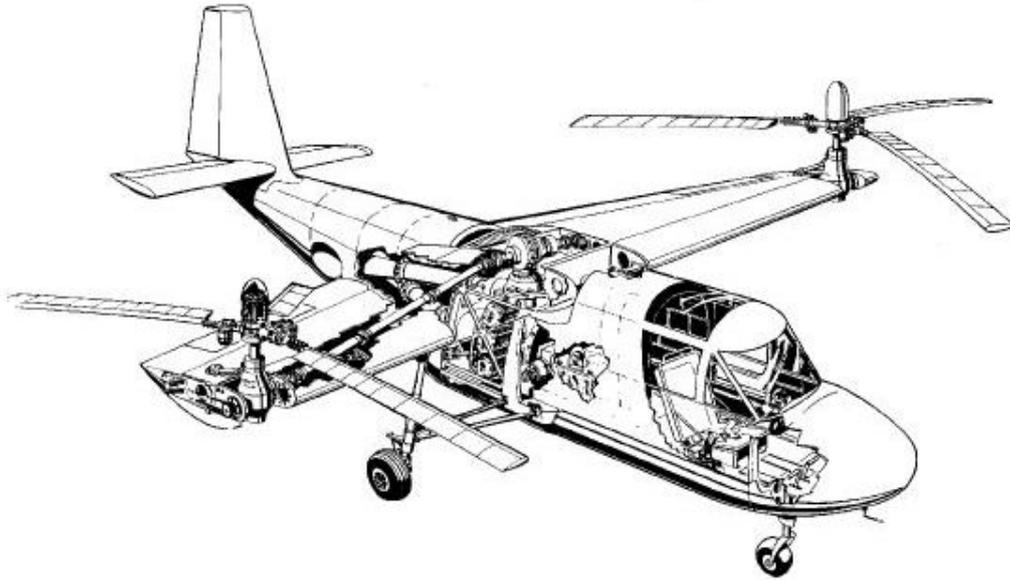


Figura 1.2: Struttura del convertiplano Transcendental Model 1-G.

In realtà, durante i primi anni di sviluppo di velivoli di tipo VTOL, si susseguirono diverse configurazioni per le eliche. Infatti la tecnologia *tiltrotors* (i.e. convertiplano) non fu l'unica che venne testata, per esempio furono realizzati velivoli *tiltwing* e *tiltjet*.

I VTOL *tiltwing* sono dei velivoli a decollo e atterraggio verticale che a differenza del convertiplano, che fa ruotare solo le eliche, mettono in rotazione l'intera l'ala del sistema.

Anche se dal punto di vista del design i due velivoli sono simili, il VTOL *tiltwing* presenta dei vantaggi rispetto al *tiltrotors*, per quanto riguarda l'efficienza. Infatti un velivolo *tiltwing* ha una maggior potenza durante la fase di decollo, mentre il convertiplano, a causa dell'interferenza delle ali, perde una parte della spinta. Un altro vantaggio dei velivoli ad ala inclinabile, riguarda la maggior facilità di transizione tra la modalità volo verticale e orizzontale. Il convertiplano, invece, prima deve volare verso l'alto come un elicottero aumentando la sua velocità, fin quando il sollevamento delle ali è sufficiente per consentire alle gondole di iniziare ad inclinarsi verso il basso.

Uno primo svantaggio che caratterizza questi velivoli, è che sono sensibili alle raffiche di vento durante la fase di salita o discesa questo a causa dell'ala molto ampia che si trova in posizione verticale rispetto al suolo. Inoltre sono poco efficaci in volo stazionario.



Figura 1.3: Velivolo VTOL tiltwing LTV XC-142 del 1964

Un'altra tecnologia sviluppata intorno agli inizi degli anni '50, fu il velivolo *tiltjet*. Il funzionamento di tale velivolo è simile a quella di un convertiplano. La differenza è che in questo caso invece di utilizzare rotori girevoli, il tiltjet impiega motori a reazione in grado di muoversi per inclinare la loro spinta o verso il basso o indietro.

Tipicamente i motori vengono messi sulle estremità delle ali e l'intero sistema di propulsione viene fatto ruotare da assiale a dorsale in modo da ottenere il passaggio da volo verticale a orizzontale.

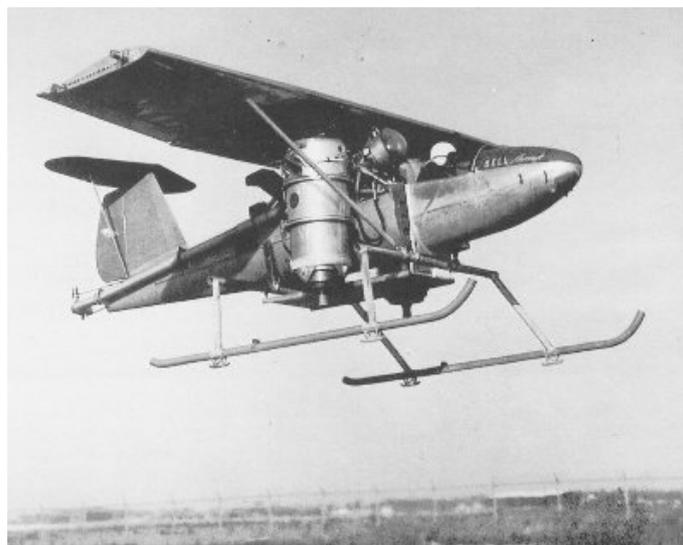


Figura 1.4: velivolo sperimentale Bell 65 (1954) che impiega un motore a turbogetto missilistico montato su ciascun lato.

Col passare degli anni e dopo molti prototipi di VTOL costruiti, si arrivò alla conclusione che rispetto alle configurazioni studiate negli anni '50 e '60 per i VTOL, il convertiplano rappresenta dal punto di vista ingegneristico la soluzione più valida sia per l'impiego in diversi ambiti (civile, militare,...) sia economicamente.

Il velivolo Bell XV-15, progettato nel 1972, è un convertiplano a motori basculanti che aprì la strada allo sviluppo di VTOL di tipo tiltrotors per impieghi sia militari che civili.

A partire da questo modello, infatti, furono realizzati il *Bell-Boeing V22 Osprey*, impiegato dalle forze armate statunitensi per il trasporto di persone e veicoli, e il *Bell-Augusta BA609* (attualmente diventato *AugustaWestland AW609*) di Figura 4.1 un convertiplano medio-leggero bimotore prodotto dall'azienda italiana Leonardo.

Quest'ultimo velivolo viene impiegato per uso civile e in particolare per il trasporto di passeggeri, con l'obiettivo di superare le limitazioni di un aereo convenzionale durante l'atterraggio e il decollo.



Figura 1.5: Convertiplano AugustaWestland AW609.

Capitolo 2

Modello del convertiplano

Andiamo adesso a descrivere la dinamica del velivolo, in modo da poter ricavare un modello che diventerà il nostro oggetto di studio per raggiungere lo scopo di questa tesi: ossia il controllo, in diverse condizioni, del VTOL.

Il modello di riferimento del nostro sistema è rappresentato in Figura 2.1. Si tratta di un modello semplificato che serve a spiegare le grandezze che entrano in gioco in questo sistema meccanico.

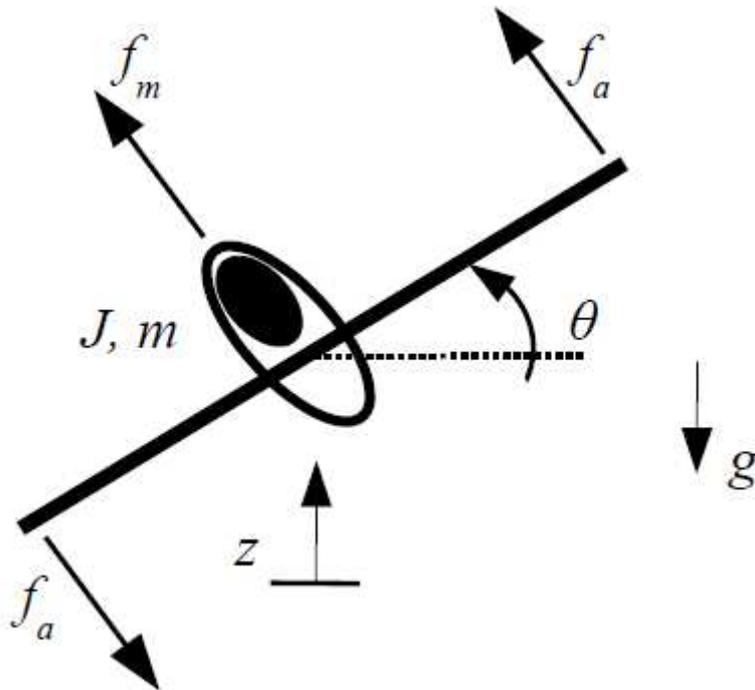


Figura 2.1: Scema del sistema meccanico

Entrano in gioco due coppie di forze: f_m responsabile della messa in quota del velivolo e cioè la forza che fornisce la spinta necessaria per salire verticalmente; invece la forza f_a agisce sulle ali del convertiplano, in modo da poter garantire la virata dell'intero sistema.

Bisogna poi considerare che saranno presenti delle forze d'attrito causate dal moto del sistema in un fluido come l'aria. Consideriamo infatti due coefficienti di attrito viscoso: b che modella la resistenza dell'aria alla traslazione, e β che la modella durante la rotazione.

Possiamo quindi descrivere il comportamento dinamico del velivolo tramite le equazioni

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + b\dot{z} &= f_m \cos \theta - mg \\ J\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} &= 2lf_a \end{aligned} \quad (2.1)$$

La prima equazione descrive la dinamica di traslazione del velivolo. Infatti, entra in gioco la forza motrice f_m che agisce sulla quota z del convertiplano.

Nella seconda equazione, invece, è presente il termine f_a relativo alla forza motrice che agisce sulla posizione angolare θ del convertiplano. Pertanto, tale equazione, descrive la dinamica rotazionale del velivolo.

Le grandezze che entrano in gioco nello studio del nostro convertiplano sono:

- J : inerzia del velivolo
- m : massa
- z : quota a cui si trova il velivolo
- θ : posizione angolare riferita all'inclinazione del velivolo rispetto all'asse orizzontale
- b : coefficiente d'attrito viscoso in traslazione
- β : coefficiente d'attrito viscoso in rotazione
- l : apertura alare
- f_m : forza motrice relativa alla dinamica traslazionale
- f_a : forza motrice relativa alla dinamica rotazionale
- g : accelerazione gravitazionale

2.1 Modello di stato non lineare

Le equazioni appena definite rappresentano un modello non lineare del sistema preso in esame. Ai fini dello studio della dinamica del convertiplano risulta conveniente riportare il modello alla forma di stato:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) = f(x(t), f_m(t), f_a(t)) \quad (2.2)$$

dove vengono indicati:

$$x(t) \text{ è la variabile di stato definita come: } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \theta \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$u(t) \text{ è l'ingresso di controllo } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m \\ f_a \end{bmatrix}$$

$$y(t) \text{ è l'uscita del sistema } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix}$$

Andando adesso a considerare l'equazione (2.1) e sostituendo le grandezze appena trovate si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{b}{m}x_3 + \frac{u_1}{m} \cos x_2 - g \\ \dot{x}_4 = -\frac{\beta}{J}x_4 + \frac{2l}{J}u_2 \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2 Punti di equilibrio

Dato il modello di stato descritto dalle equazioni (2.3), uno stato x_e è definito *stato di equilibrio* per l'ingresso costante $u = \bar{u}$ se qualora il sistema si trovi inizialmente nello stato $x(0) = x_e$ e ad esso venga applicato l'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$, per $t \geq 0$, allora il sistema rimane indefinitamente nello stato x_e : ovvero $x(t) = x_e$ per ogni $t \geq 0$. Assumiamo come vettore degli ingressi:

$$u(t) = \begin{bmatrix} f_m(t) \\ f_a(t) \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{f}_m \\ \bar{f}_a \end{bmatrix}.$$

Matematicamente, al fine di determinare i punti di equilibrio ad ingresso costante, impongo che la derivata sia nulla ovvero: $\dot{x} = f(x(t), \bar{u}) = 0$.

Sostituendo i valori nell'equazione (2.3), ottengo:

$$\begin{cases} 0 = x_{3e} \\ 0 = x_{4e} \\ 0 = -\frac{b}{m}x_{3e} + \frac{\bar{f}_m}{m} \cos x_{2e} - g \\ 0 = -\frac{\beta}{J}x_{4e} + \frac{2l}{J}\bar{f}_a \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \frac{\bar{f}_m}{m} \cos x_{2e} - g \\ 0 = \frac{2l}{J}\bar{f}_a \end{cases} \quad (2.4)$$

Per semplicità, calcolo i punti di equilibrio nel caso in cui la posizione angolare del velivolo sia nulla ($x_2 = \theta = 0$).

In queste condizioni e andando a sostituire i valori nell'equazione (2.4), si ottiene che gli ingressi costanti in corrispondenza ai quali si ottiene il punto di equilibrio con seconda componente nulla sono:

$$\begin{cases} \frac{\bar{f}_m}{m} \cos 0 = g \\ \frac{2l}{J}\bar{f}_a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{f}_m = mg \\ \bar{f}_a = 0 \end{cases}$$

Lo stato di equilibrio che rispetta le condizioni imposte risulta:

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \\ x_{3e} \\ x_{4e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In conclusione, la situazione che stiamo considerando è che il velivolo ha un'inclinazione pari a 0° e l'unica forza motrice che entra in gioco, è quella necessaria a contrastare la forza peso che porta verso il basso il convertiplano.

2.3 Linearizzazione

A questo punto, dopo aver trovato lo stato di equilibrio ad ingresso costante, possiamo linearizzare il sistema nell'intorno della coppia:

$$(x_e, \bar{u}) = \left([x_{1e} \ 0 \ 0 \ 0]^T, \begin{bmatrix} mg \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Definisco:

$\Delta x(t)$ lo scostamento dello stato all'istante t dal valore di equilibrio x_e :

$$\Delta x(t) = x(t) - x_e$$

$\Delta u(t)$ lo scostamento dell'ingresso all'istante t dall'ingresso di riferimento $u = \bar{u}$:

$$\Delta u(t) = u(t) - \bar{u}$$

L'equazione di aggiornamento dello stato, in corrispondenza all'ingresso Δu e nell'intorno dello stato di equilibrio x_e , è rappresentata dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x(t), u(t))$, arrestato al primo termine:

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta x)}{dt} &= \frac{d(x_e + \Delta x)}{dt} \\ &= f(x_e, \bar{u}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] \Delta x(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right] \Delta u(t) + \epsilon \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] \Delta x(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right] \Delta u(t) + \epsilon \end{aligned}$$

Nell'intorno del punto di equilibrio ottengo il modello lineare approssimato:

$$\Delta \dot{x} = F \Delta x(t) + G \Delta u(t) \tag{2.5}$$

Dove:

$$\Delta x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{1e} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_{1e} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m \\ f_a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} mg \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m - mg \\ f_a \end{bmatrix}$$

Mentre le matrici F e G , per $x = x_e$, $f_m = mg$, $f_a = 0$, risultano:

$$F = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_e, \bar{u})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f_m}{m} \sin x_{2e} & -\frac{b}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix}$$

$$G = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_e, \bar{u})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\cos x_{2e}}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix}$$

2.4 Funzione di trasferimento

Dopo aver linearizzato il sistema vogliamo rappresentarlo tramite un modello di stato, nella forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx + Du \end{cases} \quad (2.6)$$

dove le matrici F e G sono state definite nel Paragrafo 2.3, mentre le matrici H e D descrivono la dipendenza dell'uscita dallo stato e dagli ingressi. Dato che le due forze motrici f_m e f_a non influiscono sull'uscita y , la matrice D risulterà nulla.

Le equazioni che descrivono il sistema in forma estesa risultano pertanto essere:

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - x_{1e} \\ \theta \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_m - mg \\ f_a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z - x_{1e} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - x_{1e} \\ \theta \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Andando ad applicare all'equazione (2.6) tramite la trasformata di Laplace si ottiene la relazione:

$$\begin{cases} sX(s) = FX(s) + GU(s) \\ Y(s) = HX(s) \end{cases} \quad \begin{cases} X(s) = (sI - F)^{-1}GU(s) \\ Y(s) = HX(s) \end{cases}$$

Usando l'equazione per $X(s)$ ricavata prima, l'uscita $Y(s)$ risulta:

$$Y(s) = H(sI - F)^{-1}GU(s)$$

Da questa equazione ricavo la relazione ingresso uscita del sistema la cui funzione di trasferimento risulta essere:

$$\begin{aligned} W(s) = H(sI - F)^{-1}G &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & \frac{1}{s(s+\frac{b}{m})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & \frac{1}{s(s+\frac{\beta}{J})} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+\frac{b}{m}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+\frac{\beta}{J}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & \frac{1}{s(s+\frac{b}{m})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & \frac{1}{s(s+\frac{\beta}{J})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(b+ms)} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{s(\beta+Js)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice di trasferimento $W(s)$ ha due componenti. Quella che descrive la sola azione dell'ingresso f_m sull'uscita è:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(b+ms)} \quad (2.7)$$

Andando poi a sostituire i valori del coefficiente di attrito viscoso b e della massa m del convertiplano, si ottiene:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(150 + 2000s)}$$

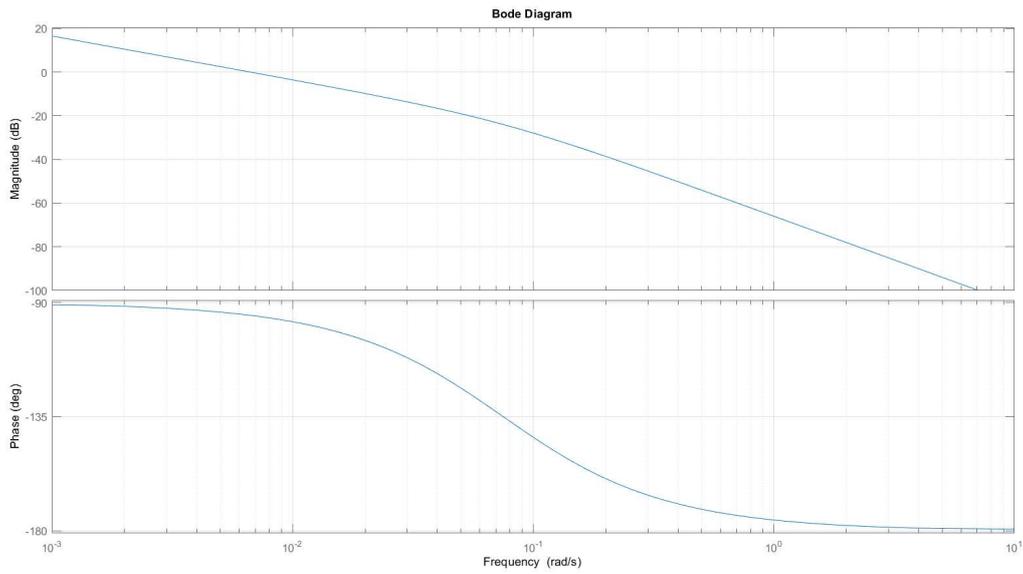


Figura 2.2: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G_1(s)$

Se invece consideriamo la sola azione dell'ingresso f_a sul sistema, allora la componente della matrice di trasferimento corrispondente diventa:

$$G_2(s) = \frac{2l}{s(\beta + Js)} \quad (2.8)$$

Sostituendo poi i valori di β e J si ottiene:

$$G_2(s) = \frac{1}{s(15 + 5000s)}$$

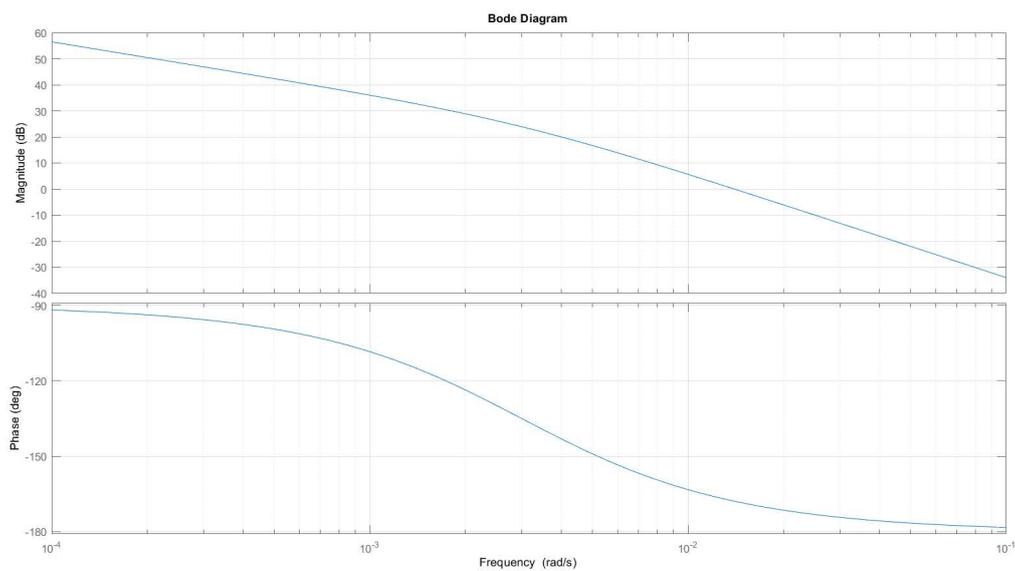


Figura 2.3: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G_2(s)$

Capitolo 3

Progettazione del controllore

In questo capitolo andremo ad affrontare il problema del controllo del convertiplano. L'obiettivo sarà quello di soddisfare delle specifiche in modo da evitare problemi di instabilità del velivolo.

In primo luogo, si andrà a controllare la posizione del VTOL e in particolare della quota z . Successivamente si andrà ad analizzare il comportamento del nostro sistema, nel caso in cui il parametro b , relativo al coefficiente di attrito viscoso nella fase di salita del velivolo, vari entro un range di valori.

Il secondo controllore, invece, si occuperà del controllo della posizione angolare andando a soddisfare le specifiche richieste. Anche in questo caso, si andranno a studiare gli effetti dovuti alla variazione del parametro β anch'esso corrispondente al coefficiente di attrito viscoso, ma questa volta riferito alla rotazione del velivolo.

3.1 Controllo della posizione del convertiplano

Il primo controllore che andremo a progettare si occuperà del controllo di quota del velivolo. Ipotizziamo che la posizione iniziale del convertiplano sia $z = 0$ e che sul sistema, agisca come ingresso la sola forza motrice f_m . L'obiettivo del controllo è soddisfare contemporaneamente due requisiti:

1. che si raggiunga il 98% della quota z di regime pari ad 1 m in un tempo non superiore a 2 s , senza mai eccedere il valore di 1.1 m ;
2. che in presenza di una variazione del parametro b pari a $\pm 30\%$ rispetto al suo valore nominale, l'errore relativo sull'uscita corrispondente a ingressi nell'intervallo di frequenze inferiori a 1 rad/s , sia minore dell'1%.

3.1.1 Controllo della quota z

Progettiamo un controllore in retroazione che permetta al sistema risultante di soddisfare i vincoli che ci siamo imposti. Il sistema è descritto dalla funzione di

trasferimento:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(b + ms)}$$

Dall'analisi di tale funzione si nota come è presente un polo nell'origine. Tramite l'azione di controllo vogliamo che il VTOL si porti alla quota di regime senza errori. Tale richiesta viene subito soddisfatta. Infatti, applicando una retroazione unitaria negativa da $G_1(s)$, si ottiene un sistema del primo tipo che assicura che l'errore a regime al gradino sia pari a zero. A questo punto, soddisfatta la specifica sull'errore a regime, non ci resta che andare a considerare le altre due. La specifica che ci chiede di far in modo che si raggiunga il 98% della quota di regime in $2s$, è equivalente a dire che il tempo di assestamento al 2% non superi i $2s$ ($t_{a2\%} \leq 2s$).

Per quanto riguarda il limite sulla massima quota raggiungibile pari $1.1m$, possiamo affermare che tale vincolo fa riferimento alla massima sovraelongazione percentuale S . Infatti la specifica viene tradotta in $S \leq 10\%$.

In conclusione le specifiche che vogliamo soddisfare risultano essere:

$$\begin{cases} t_{a2\%} \leq 2s \\ S \leq 10\% \end{cases}$$

A questo punto, con le specifiche date, siamo in grado di ricavare i valori del margine di fase e della pulsazione di attraversamento per la realizzazione del controllore.

Prima di eseguire i calcoli sul nostro sistema, vogliamo spiegare i passaggi chiave con cui sono state ricavate le formule per le specifiche sulla sovraelongazione e sul tempo di assestamento.

In primo luogo consideriamo un sistema del secondo ordine con due poli complessi coniugati $p = \alpha \pm j\beta$ e senza zeri caratterizzato da una funzione di trasferimento del tipo

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

dove $\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ rappresenta la *pulsazione naturale*, ossia la pulsazione di oscillazione se il sistema non fosse smorzato. Il termine $\xi = -\frac{\alpha}{\omega_n}$ è definito *coefficiente di smorzamento* e si ha $-1 < \xi < 1$. Inoltre, dato che vogliamo studiare la risposta al gradino nel caso in cui il sistema risulti stabile, ossia con poli a parte reale positiva, possiamo assumere che l'intervallo di ξ sia: $0 \leq \xi < 1$.

La risposta al gradino di un sistema del secondo ordine risulta essere:

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2})} \right\} = (1 - Ae^{\xi\omega_n t} \sin(\beta t + \phi)) \delta_{-1}(t) \quad (3.1)$$

dove $A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$ e $\phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \arccos \xi$.

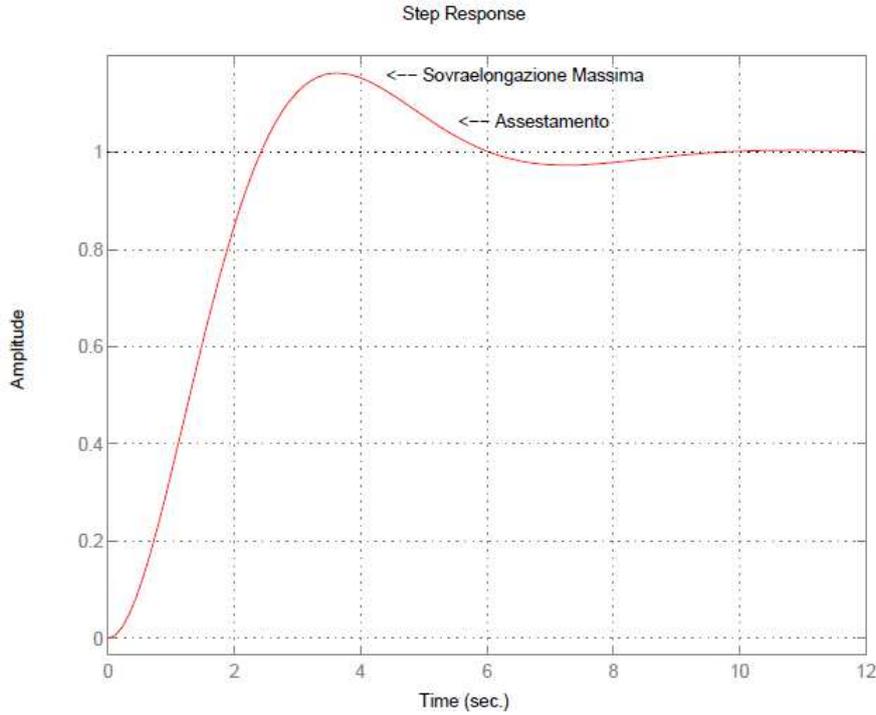


Figura 3.1: Risposta al gradino di un sistema del secondo ordine con $\omega_n = 1$, $\xi = 0.5$

Un esempio di risposta al gradino per un sistema del secondo ordine è rappresentato in Figura 3.1.

Come si può notare dalla figura, il valore di regime viene superato andando a raggiungere un valore che rappresenta la massima sovravelongazione (*overshoot*). Tale valore è dato dalla differenza fra il valore massimo y_{max} e il valore di regime \bar{y} , normalizzato rispetto alla differenza tra il valore iniziale y_0 e \bar{y} :

$$S = \frac{|y_{max} - \bar{y}|}{|\bar{y} - y_0|}$$

La relazione che intercorre tra il coefficiente di smorzamento ξ e la sovravelongazione S , la si può ricavare imponendo che:

$$\frac{dy}{dt} = -Ae^{-\xi\omega_n t} \beta \cos(\beta t + \phi) + A\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} \sin(\beta t + \phi) = 0$$

valida se e solo se:

$$\xi\omega_n \sin(\beta t + \phi) - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \cos(\beta t + \phi) = 0$$

ovvero per

$$\tan(\beta t + \phi) = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$

Visto che $\phi = \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$ allora $\beta t = k\pi$ (per $k = 0, 1, \dots$). Si ottiene:

$$t_k = \frac{k\pi}{\beta} = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Andando poi a sostituire nell'espressione (3.1), si ottiene:

$$y(t_k) = 1 - \frac{e^{-\frac{k\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(k\pi + \phi) = 1 - (-1)^k e^{-\frac{k\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Posso quindi ricavarmi il valore

$$T_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

e l'espressione che definisce la sovralongazione

$$S = y_{t1} - 1 = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (3.2)$$

Quindi, la massima sovralongazione S_{max} , si verifica tanto prima quanto maggiore è la pulsazione ω_n , e tanto più tardi quanto è maggiore lo smorzamento ξ . Il picco di sovralongazione è invece funzione solo dello smorzamento della coppia di poli del sistema e decresce rapidamente con esso. Per evitare che S non ecceda di un valore massimo S_{max} il sistema deve avere smorzamento maggiore o uguale di un valore ξ_{min} ottenibile dall'equazione (3.2). Allo stesso modo, i poli del sistema devono appartenere ad un settore conico con asse la semiretta reale negativa a semiapertura $\phi_{max} = \arccos(\xi_{min})$ si veda la Figura 3.2).

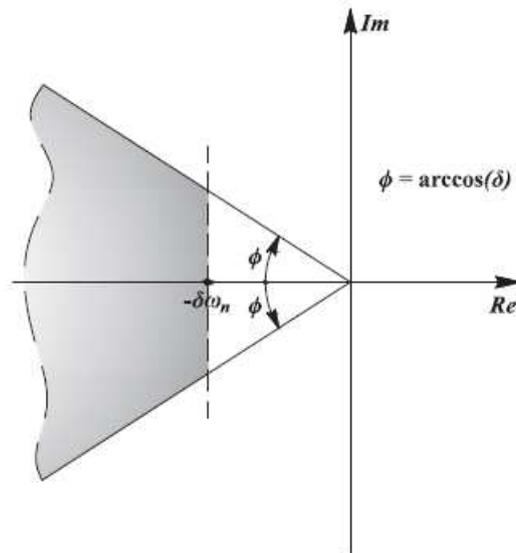


Figura 3.2: Regioni del piano complesso corrispondenti a dati limiti di sovralongazione e di rapidità di risposta

A questo punto non ci resta che fare ulteriori considerazioni sul tempo di assestamento del sistema che, secondo le specifiche prese in considerazione, dev'essere

inferiore ai 2 s.

Per far in modo che il sistema sia sufficientemente veloce nel rispondere al gradino, si deve garantire un tempo di assestamento sufficientemente rapido. Definiamo il tempo di assestamento $T_{a,p\%}$ come il più piccolo valore per cui vale:

$$|1 - y(t)| = |Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\beta t + \phi)| \leq \frac{p}{100} \quad \forall t \geq t_a$$

L'espressione appena definita risulta essere di difficile valutazione a causa del termine $\sin(\beta t + \phi)$. Si può però dare una valutazione per eccesso assegnando a $|\sin(\beta t + \phi)|$ il suo valore massimo nel periodo. Dato che $A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} > 0$ per $0 < \xi < 1$ si può riscrivere:

$$e^{-\xi\omega_n t} \leq \frac{p}{100A}$$

che diventa

$$\xi\omega_n t \geq -\ln \frac{p}{100} + \ln A$$

da cui si ricava

$$t_a \approx \frac{4.6 - \ln p - \frac{1}{2} \ln(1 - \xi^2)}{\xi\omega_n}$$

Per smorzamenti di ξ sufficientemente piccoli ($\xi < 0.8$) si può scrivere, in forma approssimata, la relazione:

$$t_a \approx \frac{4.6 - \ln p}{\xi\omega_n} \quad (3.3)$$

In conclusione, nel caso di sistemi secondo ordine con due poli complessi, il tempo di assestamento della risposta al gradino è legato alla parte reale dei poli e la sovraelongazione al loro smorzamento.

Conclusa l'analisi teorica sulle relazioni che intercorrono tra la sovraelongazione e il tempo di assestamento da una parte, la pulsazione ω_n e lo smorzamento ξ dall'altra, possiamo andare a calcolare i valori numerici che ci permetteranno di ottenere le informazioni sul *margin di fase* e sulla *pulsazione di attraversamento* per la realizzazione del controllore.

Partendo dall'espressione (3.2) e, imponendo il vincolo che sia minore del 10% del valore di regime, si ricava lo smorzamento:

$$S = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq 0.1$$

$$-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \leq \ln 0.1$$

$$\pi\xi \geq -(\ln 0.1)\sqrt{1-\xi^2}$$

Esplicitiamo ξ :

$$\begin{aligned} (\pi\xi)^2 &\geq (\ln 0.1)^2(1 - \xi^2) \\ \xi^2 &\geq \frac{(\ln 0.1)^2}{\pi^2 + (\ln 0.1)^2} = \frac{5.3}{\pi^2 + 5.3} \approx 0.349 \end{aligned}$$

$$\xi \approx 0.591 \quad (3.4)$$

A questo punto, trovato il valore dello smorzamento ξ , possiamo ricavare il valore del margine di fase m_ϕ . Possiamo esprimere il margine di fase in funzione del coefficiente di smorzamento, ottenendo così la relazione:

$$\xi = \sin\left(\frac{m_\phi}{2}\right)$$

Tale espressione, però, si basa su delle ipotesi semplificative che, nel nostro caso, possono non essere esattamente verificate. Il valore di ξ così ottenuto, risulta essere approssimato e ci fornisce solo un'indicazione del vero smorzamento dei poli dominanti del sistema.

Assumendo di voler ottenere un margine di fase inferiore a 1.3 rad ($\approx 75^\circ$), è possibile sostituire alla funzione seno con il suo argomento, ottenendo così l'espressione per lo smorzamento:

$$\xi = \frac{m_\phi}{2} \frac{\pi}{180} \simeq \frac{m_\phi}{100} \quad (3.5)$$

Da cui si ricava il valore di m_ϕ :

$$m_\phi \approx 60^\circ$$

Utilizzando l'espressione (3.3) e imponendo il limite sul tempo di assestamento a 2 s , si ottiene:

$$T_{a2\%} = \frac{4}{\xi\omega_a} \leq 2s$$

Esplicitando poi la *pulsazione di attraversamento* (ω_a):

$$\omega_a = \frac{4}{\xi T_{a2\%}} \simeq 3.384 \text{ rad/s}$$

I valori appena ottenuti per margine di fase e pulsazione di attraversamento sono le specifiche che bisogna soddisfare per fare in modo che vengano rispettati i limiti sulla sovraelongazione e sul tempo di assestamento.

Dall'analisi del diagramma di Bode di $G_1(s)$ (Figura 2.2) si può notare come la pulsazione di attraversamento sia pari a $\omega_a \simeq 0.007 \text{ rad/s}$, valore molto più basso rispetto a quello che ci occorre per soddisfare le specifiche sulla quota z (pulsazione di attraversamento $\omega_a^* = 3.384 \text{ rad/s}$)

Se invece consideriamo il margine di fase, possiamo notare come quest'ultimo, in corrispondenza della pulsazione di attraversamento ω_a^* , abbia un valore inferiore rispetto al margine di fase richiesto ($m_\phi^* \geq 60^\circ$).

Sarà quindi necessario introdurre una *rete anticipatrice* in modo da alzare il guadagno d'anello e garantire un buon margine di fase.

La forma della rete che vogliamo introdurre è del tipo:

$$C(s) = \frac{1 + sT}{1 + saT} \quad T > 0, a \in (0, 1)$$

Per ricavare a si utilizza l'espressione:

$$10 \log \frac{1}{a} = -|G_1(j\omega_a^*)|_{dB} \quad (3.6)$$

Al calare di a , la fase ϕ_{max} cresce.

Dall'espressione (3.6) andiamo prima a calcolare il modulo di $G_1(s)$ per $s = j\omega_a^* = j3.384$, ottenendo così:

$$|G_1(j\omega_a^*)| = \left| \frac{1}{j2000\omega_a^* \frac{150}{2000} + j\omega_a^*} \right| = \frac{1}{\omega_a^* 2000} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{150}{2000}\right)^2 + \omega_a^{*2}}} \simeq 4.365 \times 10^{-5} \simeq -87.2 dB$$

A questo punto possiamo calcolare a :

$$\frac{1}{a} = 10^{-\frac{|G_1(j\omega_a^*)|_{dB}}{10}} \rightarrow a = 10^{\frac{|G_1(j\omega_a^*)|_{dB}}{10}} \simeq 1.905 \times 10^{-9}$$

Calcoliamo il massimo guadagno di fase:

$$\phi_{max} = \arcsin \frac{1-a}{1+a} \simeq 90^\circ$$

Si tratta di un valore più che sufficiente per soddisfare la specifica sul margine di fase.

Con la suddetta scelta di a , si può ricavare il valore di T :

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_a^* \implies T = \frac{1}{\omega_a^* \sqrt{a}} \simeq 6770.52$$

La rete anticipatrice diventa quindi:

$$C_1(s) = \frac{1 + 6770.52s}{1 + (1.29 \times 10^{-5})s}$$

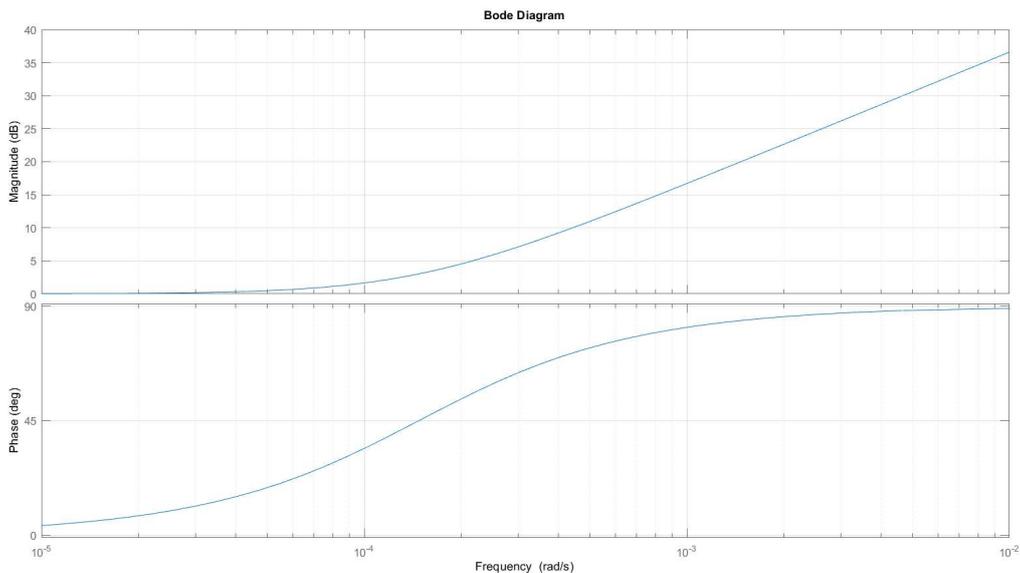


Figura 3.3: Diagramma di Bode di $C_1(s)$

Otteniamo la funzione di trasferimento $\bar{G}_1(s)'$:

$$\bar{G}_1(s)' = G_1(s)C_1(s) = \frac{1 + 6770.52s}{150s(1 + 13.333s)(1 + 1.29 \times 10^{-5}s)} \quad (3.7)$$

Analizzando il diagramma di Bode della funzione appena trovata, si può notare come le specifiche sulla pulsazione di attraversamento ω_a^* e il margine di fase m_ϕ , vengono rispettate.

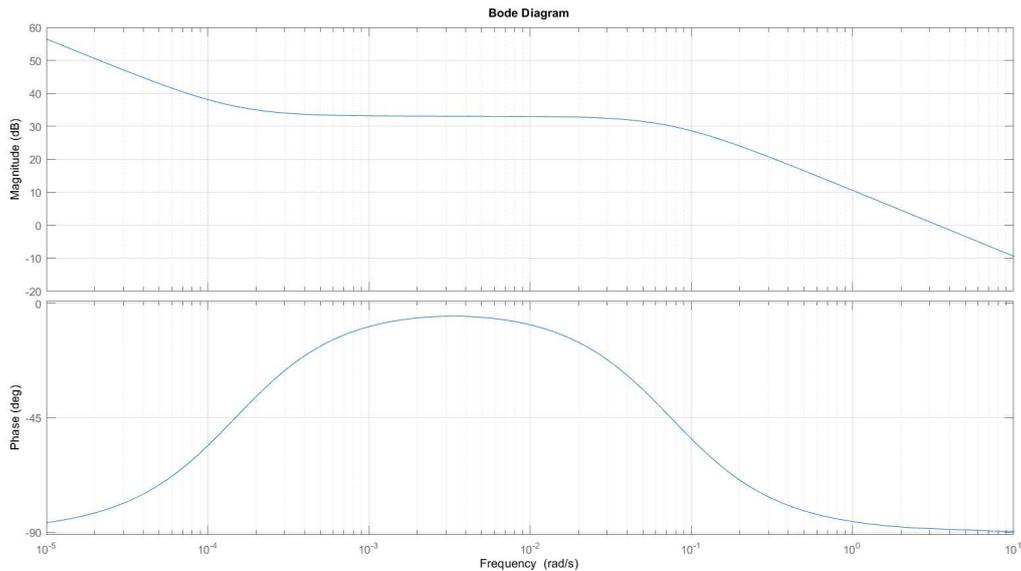


Figura 3.4: Diagramma di Bode del controllore $\bar{G}_1(s)'$

3.1.2 Controllo del parametro b

Adesso vogliamo realizzare un controllore che, nel caso si verifichi una variazione del parametro b , relativo al coefficiente di attrito viscoso nella fase di salita del velivolo, di $\pm 30\%$, l'errore relativo corrispondente a ingressi nel campo di frequenze inferiori a 1 rad/s , sia minore del 1% .

Consideriamo dapprima la sensibilità della risposta del sistema alle difformità di comportamento delle componenti rispetto a quello nominale (problema della robustezza del sistema rispetto ad errore di modello). Tali difformità le modelliamo come variazioni del nostro parametro b rispetto ad un valore nominale \hat{b} . Avrò quindi una risposta del sistema in anello aperto, ad un particolare ingresso $U(s)$, in condizioni nominali:

$$\hat{Y}(s) = P(\hat{b}, s)U(s)$$

e la risposta ottenuta in seguito alla variazione del parametro sarà:

$$Y(s) = P(b, s)U(s)$$

Lo scostamento dell'uscita rispetto al valore all'equilibrio risulta:

$$\frac{\Delta Y(s)}{\hat{Y}(s)} = \frac{Y(s) - \hat{Y}(s)}{\hat{Y}(s)} = \frac{P(b, s) - P(\hat{b}, s)}{P(\hat{b}, s)} = \frac{\Delta P(s)}{P(s)}$$

Se assumiamo che tale variazione sia piccola, ed esprimiamo la variazione risentita sull'uscita in termini relativi, approssimandola al primo ordine. Otteniamo così:

$$\frac{\Delta P(s)}{P(s)} \approx \left[\frac{\partial P(b, s)}{\partial b} \Big|_{\hat{b}} \frac{\hat{b}}{\hat{P}(s)} \right] \frac{\Delta b}{\hat{b}} = S_{b,0}(s) \frac{\Delta b}{\hat{b}}$$

Il termine appena trovato: $S_{b,0}(s)$, rappresenta la sensibilità del processo (in anello aperto) alle variazioni del parametro b . Lo possiamo riscrivere nella forma:

$$S_{b,0}(s) = \frac{\partial G_1(s, b)}{\partial b} \Big|_{b=\hat{b}} \frac{\hat{b}}{G_1(s, \hat{b})} = -\frac{1}{s(\hat{b} + ms)^2} s(\hat{b} + ms)\hat{b} = -\frac{\hat{b}}{\hat{b} + ms}$$

Se consideriamo il sistema in retroazione con il controllore $C_1(s)$ progettato precedentemente si ottiene la sensibilità totale in anello chiuso del sistema:

$$S_T(s) = S_{C_1}(s)S_{b,0}(s) = \frac{S_{b,0}(s)}{1 + C_1(s)G_1(s)}$$

dove $S_C(s)$ rappresenta la sensibilità d'anello. Per rispettare la specifica si deve avere:

$$S_T(s) \frac{\Delta b}{\hat{b}} \leq \frac{\Delta y}{\hat{y}} = 0.01$$

ovvero

$$|S_T(s)| = \frac{S_{b,0}(s)}{1 + C_1(s)G_1(s)} \leq 0.033$$

andando poi ad esplicitare il guadagno d'anello $C_1(s)G_1(s)$, si ottiene:

$$C_1(s)G_1(s) \geq 30S_{b,0}(s) - 1 \quad (3.8)$$

Il valore di $S_{b,0}$ (sensibilità ad anello aperto) lo si determina andando ad assumere il valore massimo nell'intervallo delle frequenze di interesse.

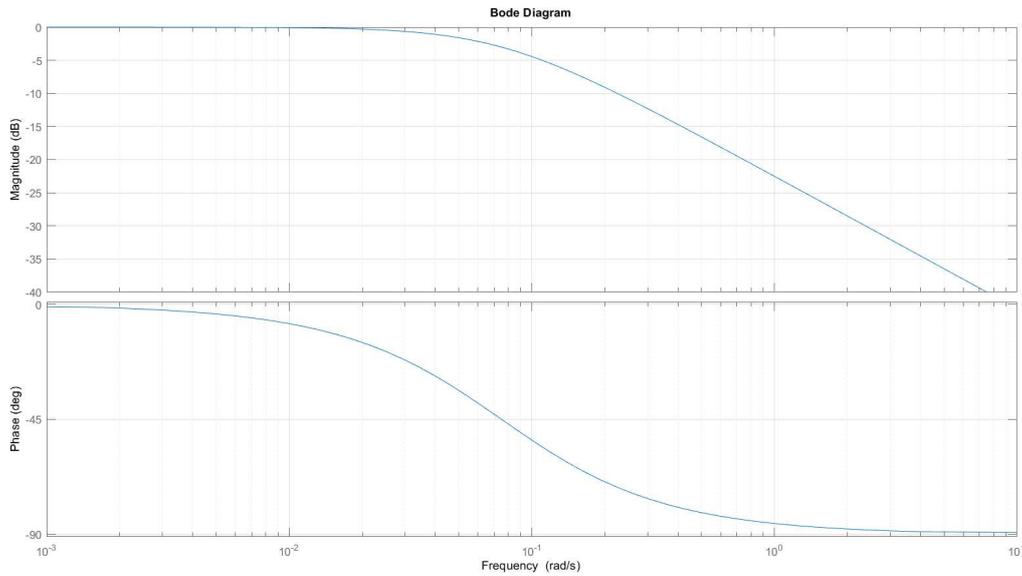


Figura 3.5: Diagramma di Bode di $S_{b,0}(s)$

Andando ad analizzare il diagramma di Bode della Figura 3.5, si può osservare come il massimo valore trovato per $S_{b,0}(s)$ sia 0 dB per $\omega < 1 \text{ rad/s}$.

Andando a sostituire il valore trovato nell'equazione (3.8), si ottiene:

$$C_1(s)G_1(s) \geq 30S_{b,MAX} - 1 = 30 - 1 \approx 29 \text{ dB} \quad \forall \omega < 1 \text{ rad/s}$$

Nel diagramma di Bode di Figura 3.4, l'ampiezza risulta essere $> 29 \text{ dB}$, per $\omega \leq 0.093 \text{ rad/s}$. Per far in modo che venga soddisfatta la specifica sul controllo del parametro b , bisogna alzare il grafico del modulo in modo da spostare la pulsazione di attraversamento di circa una decade più avanti. Andiamo infatti ad inserire un controllore proporzionale con guadagno di Bode pari a 10:

$$\overline{G}_1(s) = C_B(s)\overline{G}'_1(s) = 10 \times \frac{1 + 6770.52s}{150s(1 + 13.333s)(1 + 1.29 \times 10^{-5}s)} \quad (3.9)$$

3.2. CONTROLLO DELLA POSIZIONE ANGOLARE DEL CONVERTIPIANO 29

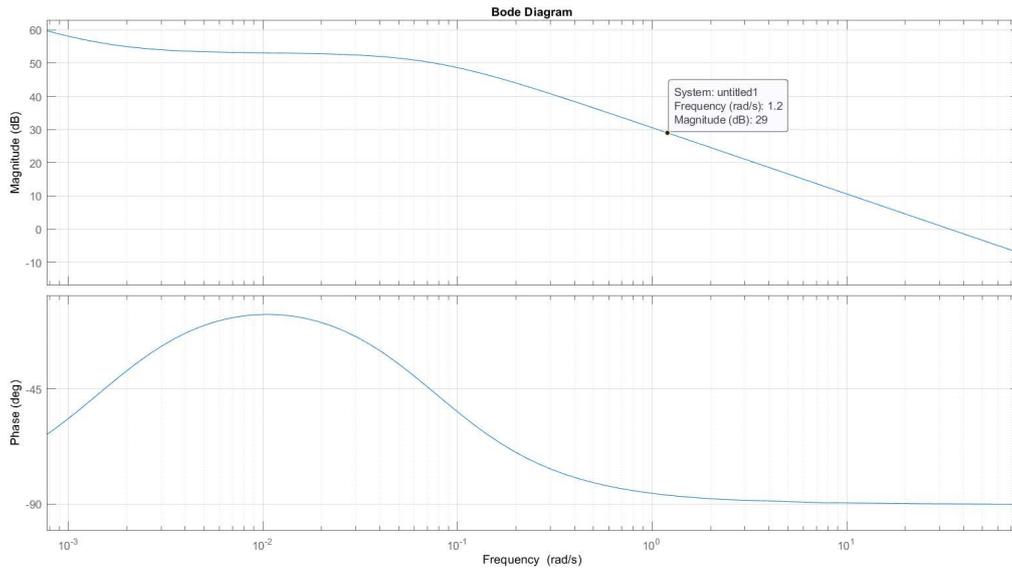


Figura 3.6: Diagramma di Bode di $\overline{G}'_1(s)$

Analizzando il diagramma di Bode della funzione appena trovata, si vede che la specifica che garantisce che l'errore a regime sia minore dell' 1% per variazione del parametro b di $\pm 30\%$ è verificata; dato che il guadagno d'anello $C(s)G(s) \geq 29dB$ per $\omega \leq 1.2 \text{ rad/s}$. Le specifiche sul margine di fase e la pulsazione di attraversamento vengono anche in questo caso rispettate.

3.2 Controllo della posizione angolare del convertiplano

In questa sezione, andremo a realizzare una legge di controllo per l'ingresso f_a in modo tale da garantire il soddisfacimento delle specifiche sulla posizione angolare θ e sul parametro β . Partendo da una condizione iniziale $\theta = 0^\circ$ andremo a soddisfare i due requisiti:

1. si deve raggiungere il 95% dell'inclinazione di regime $\theta = 30^\circ$ necessari per virare, senza superare un valore pari a 33° , in un tempo non superiore a 5 s;
2. in presenza di una variazione del parametro β (coefficiente di attrito viscoso dell'aria) di $\pm 10\%$ del valore nominale l'errore relativo sull'uscita deve essere minore del 5%, per pulsazioni minori di 0.1 rad/s.

3.2.1 Controllo della posizione θ

L'obiettivo è quello di progettare un controllore in retroazione, per conseguire le condizioni desiderate. Il sistema, in questo caso, è descritto dalla funzione $G_2(s)$:

$$G_2(s) = \frac{2l}{s(\beta + Js)}$$

Anche in questo caso il sistema presenta un polo nell'origine, ottenendo così che il sistema in retroazione negativa unitaria risulta essere del primo tipo: ciò garantisce un inseguimento perfetto di un segnale a gradino. I vincoli da soddisfare sulla posizione angolare del velivolo, possono essere tradotti in termini di massima sovralongazione e tempo di assestamento. Il raggiungimento del 95% del valore di regime in tempo massimo di 5 s, rappresenta il *tempo di assestamento* al 5%. Per il vincolo sulla massima massima inclinazione, invece, possiamo dire che quest'ultimo impone che la *sovralongazione* sia al massimo pari al 20% del valore di regime.

$$\begin{cases} t_{a,5\%} \leq 5s \\ S \leq 10\% \end{cases}$$

Possiamo ricorrere alle formule definite prima per trovare la relazione che lega le specifiche sul tempo di assestamento e sulla sovralongazione, con la *pulsazione di attraversamento* e il *margin di fase*.

Dalla formula (3.2), esprimendo la condizione sulla massima sovralongazione al 10%, otteniamo:

$$S = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq 0.1$$

Da questa relazione, possiamo ricavare lo *smorzamento*:

$$-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \leq \ln 0.1$$

$$\pi\xi \geq -(\ln 0.1)\sqrt{1-\xi^2}$$

Esplicitiamo ξ :

$$\begin{aligned} (\pi\xi)^2 &\geq (\ln 0.1)^2(1-\xi^2) \\ \xi^2 &\geq \frac{(\ln 0.1)^2}{\pi^2 + (\ln 0.1)^2} = \frac{5.3}{\pi^2 + 5.3} \approx 0.349 \end{aligned}$$

$$\xi \approx 0.591$$

Trovato ξ , possiamo ricavare il margine di fase m_ϕ tramite l'equazione (3.5):

$$m_\phi \approx 60^\circ$$

3.2. CONTROLLO DELLA POSIZIONE ANGOLARE DEL CONVERTIPLANO 31

Andiamo adesso a ricavare la specifica sulla pulsazione di attraversamento, tramite le condizioni imposte sul tempo di assestamento. Dall'equazione (3.3) otteniamo:

$$t_{a5\%} = \frac{4}{\xi\omega_a} \leq 5s \quad \longrightarrow \quad \omega_a \simeq 1.354rad/s$$

In conclusione, il controllore che si andrà a progettare dovrà fare in modo che la funzione di trasferimento a catena aperta soddisfi le seguenti specifiche sul m_ϕ e sulle ω_a :

$$\begin{cases} \omega_a^* = 1.354rad/s \\ m_\phi \geq 60^\circ \end{cases}$$

Analizzando il diagramma di Bode della funzione $G_2(s)$ (Figura 2.3), si può notare come entrambe le specifiche non vengano soddisfatte. Infatti si trova: $\omega_a \simeq 0.01rad/s$ che risulta minore della specifica richiesta e un margine di fase quasi nullo.

Per il progetto del controllore, anche in questo caso, la soluzione risulta essere quella dell'utilizzo di una rete anticipatrice.

Riprendiamo la forma della rete che risulta essere:

$$C(s) = \frac{1 + sT}{1 + saT} \quad T > 0, a \in (0, 1)$$

Calcoliamo il modulo di $G_2(s)$ per $s = j\omega_a^* = j1.354$:

$$\begin{aligned} |G_2(j\omega_a^*)| &= \left| \frac{1}{j\omega_a^*(15 + j5000\omega_a^*)} \right| = \left| \frac{1}{j1.354(15 + j6770)} \right| = \\ &= \frac{1}{1.354\sqrt{15^2 + 6770^2}} \simeq 1.091 \times 10^{-4} \simeq -79.24dB \end{aligned}$$

Utilizzando l'espressione (3.6) ricaviamo il valore di a :

$$\frac{1}{a} = 10^{-\frac{|G_2(j\omega_a^*)|_{dB}}{10}} \longrightarrow a = 10^{\frac{|G_2(j\omega_a^*)|_{dB}}{10}} \simeq 1.191 \times 10^{-8}$$

Il guadagno di fase che otteniamo è:

$$\phi_{max} = \arcsin \frac{1 - a}{1 + a} \simeq 90^\circ$$

Dopo aver scelto a , possiamo ricavare T :

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_a^* \quad \longrightarrow \quad T = \frac{1}{\omega_a^*\sqrt{a}} \simeq 6767.46$$

La rete anticipatrice che introduciamo presenta la forma:

$$C_2(s) = \frac{1 + 6767.46s}{1 + (8.06 \times 10^{-5})s}$$

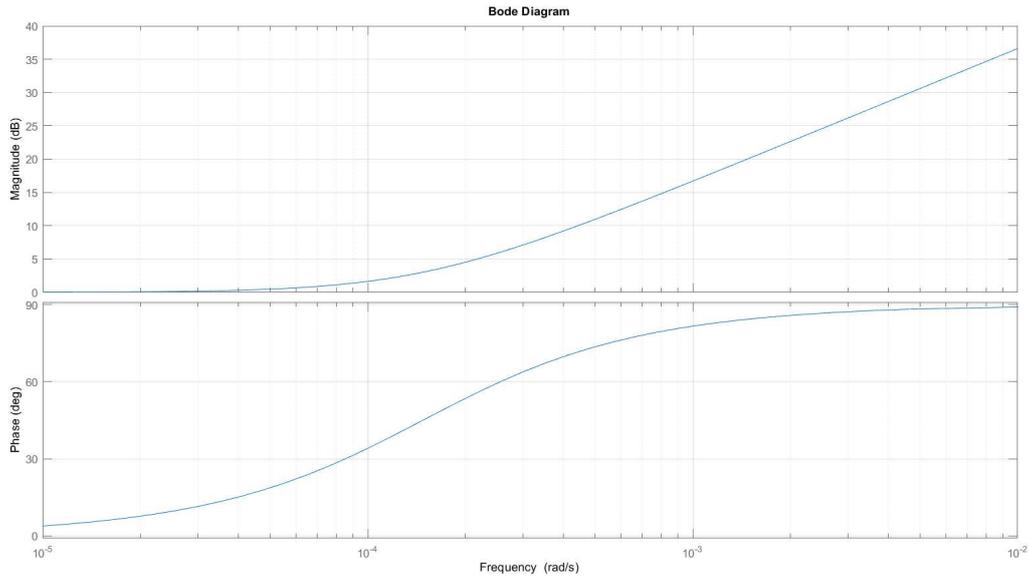


Figura 3.7: Diagramma di Bode del controllore $C_2(s)$.

Inserendo il controllore nel sistema, la funzione di trasferimento a catena chiusa diventa:

$$\overline{G}'_2(s) = C_2(s)G_2(s) = \frac{1 + 6767.46s}{15s(1 + 333.33s)(1 + 8.06 \times 10^{-5}s)}$$

Dal diagramma di Bode di $\overline{G}'_2(s)$ si può vedere come sia la specifica sulla pulsazione di attraversamento che quella sul margine di fase siano rispettate. Ciò quindi garantisce che la sovranelongazione S e il tempo di assestamento $t_{a,5\%}$, rientrino nei limiti prestabiliti.

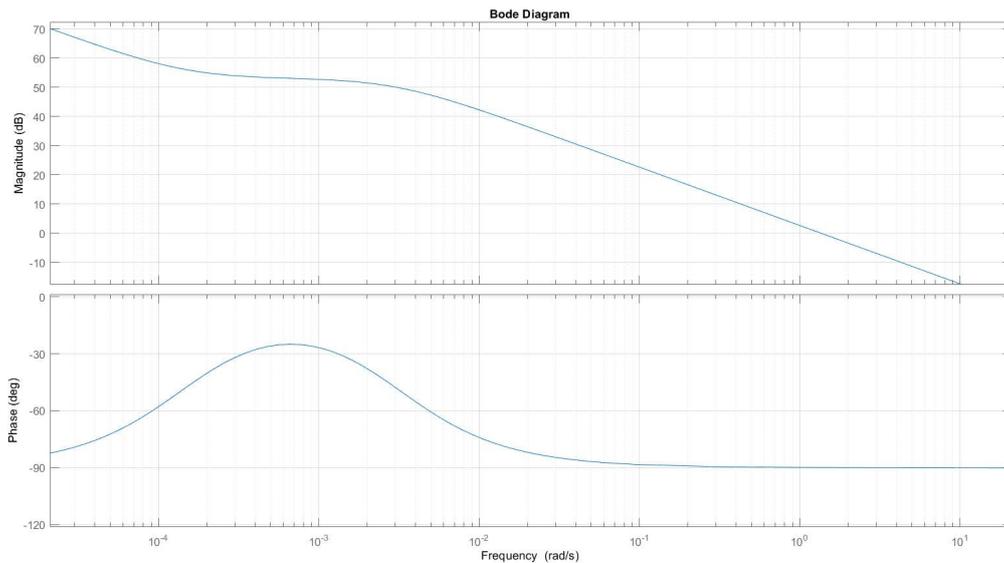


Figura 3.8: Diagramma di Bode di $\overline{G}'_2(s)$

3.2.2 Controllo del parametro β

Il progetto di quest'ultimo controllore si pone l'obiettivo di fare in modo che in presenza di una variazione del parametro β , che modella il coefficiente di attrito viscoso dell'aria durante la rotazione del VTOL, del $\pm 10\%$ del suo valore, l'errore relativo sull'uscita sia minore del 5% .

La risposta del sistema in anello aperto, assumendo l'ingresso $U(s)$ in condizioni nominali, risulta essere definita come:

$$\hat{Y}(s) = P(\hat{\beta}, s)U(s)$$

mentre la risposta ottenuta in seguito alla variazione del parametro β :

$$Y(s) = P(\beta, s)U(s)$$

Possiamo calcolare la sensibilità in anello aperto del nostro sistema, alle variazioni del parametro β . L'espressione quindi diventa:

$$S_{\beta,0}(s) = \left. \frac{\partial G_2(s, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\hat{\beta}} \frac{\hat{\beta}}{G_2(s, \hat{\beta})} = -\frac{1}{s(\hat{\beta} + ms)^2} s(\hat{\beta} + ms)\hat{\beta} = -\frac{\hat{\beta}}{\hat{\beta} + ms}$$

Introduciamo a questo punto il controllore in retroazione negativa $C_2(s)$, utilizzato per il controllo della posizione angolare del convertiplano.

Calcoliamo la sensibilità totale in anello chiuso del sistema:

$$S_T(s) = S_{C_2}(s)S_{\beta,0}(s) = \frac{S_{\beta,0}(s)}{1 + C_2(s)G_2(s)}$$

La specifica richiede che l'errore relativo sull'uscita sia inferiore del 5% (per una variazione di β del $\pm 10\%$), possiamo quindi scrivere:

$$S_T(s) \frac{\Delta\beta}{\hat{\beta}} \leq \frac{\Delta y}{\hat{y}} = 0.05$$

Esplicitando il modulo della sensibilità in anello chiuso si ottiene che:

$$|S_T(s)| = \frac{|S_{\beta,0}(s)|}{|1 + C_2(s)G_2(s)|} \leq 0.5$$

Esplicitando il guadagno d'anello si ricava:

$$C_2(s)G_1(s) \geq 2S_{\beta,0}(s) - 1 \quad (3.10)$$

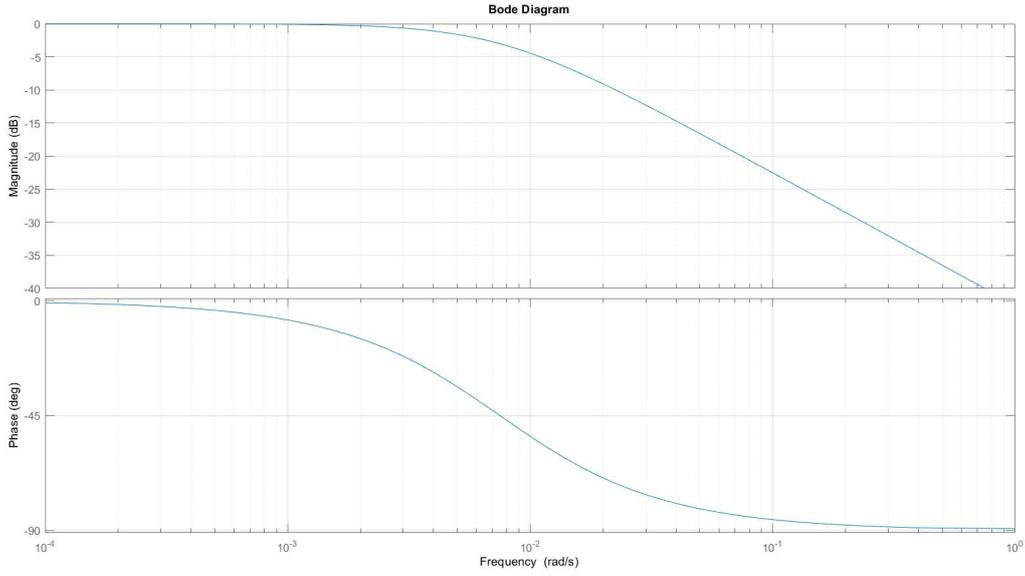


Figura 3.9: Diagramma di Bode della funzione di sensibilità $S_{\beta,0}(s)$

Analizzando il diagramma di Bode di Figura 3.9, si nota che il valore massimo assunto dal modulo di $S_{\beta,0}(s)$ è di 0 dB .

Quindi, dall'equazione (3.10), ricaviamo che per garantire tale specifica sull'errore relativo sull'uscita y , deve valere che:

$$C_2(s)G_1(s) \geq 2S_{\beta,MAX}(s) - 1 = 1 = 0dB \quad \forall \omega < 0.1 \text{ rad/s}$$

Dal diagramma di Bode della funzione $\overline{G}'_2(s)$ (Figura 3.10) si nota che il modulo è maggiore di 0 dB per pulsazioni minori della pulsazione di attraversamento $\omega \simeq 1.354 \text{ rad/s}$. Bisogna quindi spostare la pulsazione ω_a^* ad un valore prossimo a 0.1 rad/s .

Tale specifica, però, va a modificare la condizione precedentemente definita sulla pulsazione di attraversamento ω_a^* . Infatti, per garantire un errore relativo inferiore all'1% per pulsazioni minori di 0.1 rad/s otterrei un tempo di assestamento del sistema pari a: $t_{a,5\%} \simeq 67.682 \text{ s}$. Si tratta di un valore molto maggiore rispetto alla richiesta di fare in modo che $T_{a,5\%} \leq 5 \text{ s}$.

Se invece teniamo conto del fatto che le variazioni del parametro β del $\pm 10\%$, siano definite per pulsazioni minori o uguali della pulsazione di attraversamento ω_a^* , allora possiamo considerare valido il controllore $\overline{G}'_2(s)$:

$$\overline{G}_2(s) = \overline{G}'_2(s) = C_2(s)G_2(s) = \frac{1 + 6767.46s}{15s(1 + 333.33s)(1 + 8.06 \times 10^{-5}s)}$$

3.2. CONTROLLO DELLA POSIZIONE ANGOLARE DEL CONVERTIPLANO35

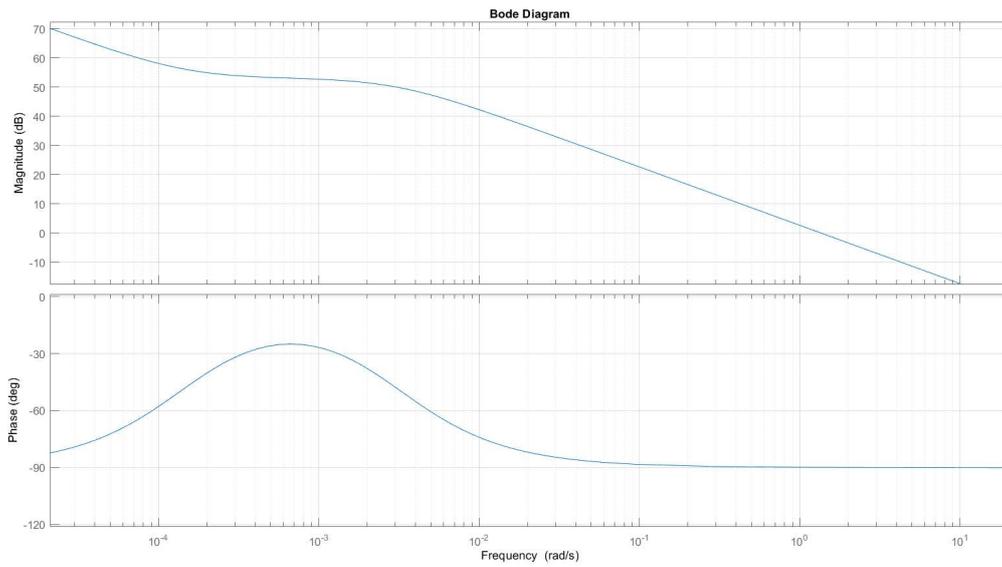


Figura 3.10: Diagramma di Bode di $\overline{G}'_2(s)$

In questo modo vengono garantite sia le specifiche sulla massima sovravelazione ($S \leq 10\%$) che sul tempo di assestamento ($T_{a,5\%} < 5 s$) che le specifiche sulla variazione parametrica di β , per $\omega \leq \omega_a^*$.

Capitolo 4

Il convertiplano del futuro

Dopo aver analizzato il convertiplano sia dal punto di vista storico che da un punto di vista più matematico, utilizzo questo capitolo della tesi per presentare cosa ci potrà offrire in futuro questo velivolo.

Era già stata citata l'azienda Leonardo e in particolare il convertiplano AW609 attualmente ancora prodotto in serie. Nel corso degli anni questo velivolo ha subito diverse migliorie. Basato sulla tecnologia del Bell V-22 Osprey il convertiplano AW609 è in grado di effettuare collegamenti da piazzole di atterraggio per elicotteri o parcheggi, con la velocità di un aereo ad elica convenzionale.



Figura 4.1: Augusta AW609

L'obiettivo della Leonardo è proiettato verso un futuro dove questo velivolo potrà essere utilizzato da chiunque, non solo come mezzo di trasporto per privati, ma anche per missioni di soccorso.

La versatilità di questo velivolo permette infatti di raggiungere luoghi che per un aereo normale sarebbero irraggiungibili. Basti pensare ad alcune comunità che abitano le isole dell'Asia, le quali si trovano a chilometri di distanza dalla terraferma o dai centri urbani, rendendo l'approvvigionamento o il raggiungimento di tali zone molto complicato. Un aeromobile capace di raggiungere anche solamente uno spiazzo

erboso per atterrare sarebbe l'ideale. È infatti il convertiplano, e in particolare l'AW609 dato che è il primo velivolo VTOL tiltrotors con certificazione civile, a soddisfare le esigenze di quei velivoli che sennò sarebbero limitati negli spostamenti a causa della mancanza di piste dedicate per l'atterraggio.

L'AW609 potrà essere poi impiegato per uso privato come mezzo di trasporto. Per volare da Milano a Londra ci si impiega circa due ore che vanno poi a sommarsi al tempo che ci si mette per raggiungere l'aeroporto e il tempo per il check-in e l'imbarco. Con un convertiplano i tempi vengono ridotti significativamente.

Da un punto di vista pratico, possiamo affermare che un velivolo come il convertiplano possa portare delle grandi migliorie nel campo del trasporto aereo.

Se poi consideriamo anche il tema della sostenibilità ambientale, allora l'azienda statunitense Joby Aviation è in prima linea per la realizzazione di VTOL elettrici.

L'aeromobile ha una capacità di quattro passeggeri ed è in grado di percorrere fino a quasi 80 chilometri con una carica. Si tratta di una soluzione ottimale per operare voli economici, silenziosi e più ecologici.

L'azienda, infatti, si è posta l'obiettivo di intercettare la domanda di aeromobili sostenibili ed offrire soluzioni per ridurre le emissioni di gas serra negli Stati Uniti.



Figura 4.2: eVTOL della Joby Aviation.

Capitolo 5

Conclusioni

Conclusa la progettazione dei controllori possiamo andare ad analizzare cosa accade nel dominio del tempo.

In primo luogo consideriamo i due controllori $C_1(s)$ e $C_B(s)$. Il primo relativo al controllo della quota del velivolo, l'altro, invece, relativo al controllo del parametro b (coefficiente di attrito viscoso in traslazione).

La funzione di trasferimento in catena chiusa in retroazione negativa $W_1(s)$ è definita come:

$$W_1(s) = \frac{\overline{G}_1(s)}{1 + \overline{G}_1(s)} = \frac{C_B(s)C_1(s)G_1(s)}{1 + C_B(s)C_1(s)G_1(s)}$$

Tramite Simulink rappresentiamo il sistema per mezzo dello schema a blocchi:

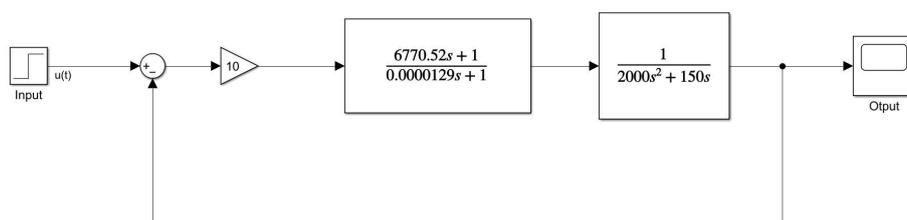


Figura 5.1: Schema a blocchi del sistema a catena chiusa in retroazione negativa di $W_1(s)$

Andiamo ora ad analizzare se le specifiche richieste vengono soddisfatte nel dominio del tempo. Veniva richiesto, che in un tempo non superiore a $2s$, il velivolo raggiungesse il 98% della quota pari a $1 m$ senza eccedere il valore di $1.1 m$.

Otteniamo così, una risposta al gradino:

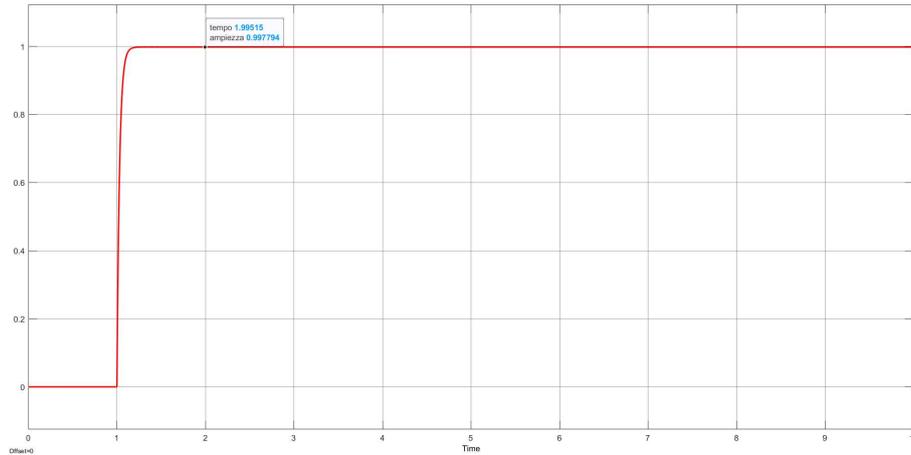


Figura 5.2: Risposta al gradino del sistema $W_1(s)$

Si può notare come le specifiche richieste per la progettazione del controllore siano state completamente rispettate. La risposta ottenuta dal sistema raggiunge il valore di regime entro $2s$.

Adesso consideriamo la funzione di trasferimento in catena chiusa $W_2(s)$. In particolare, abbiamo progettato il controllore $C_2(s)$ che si occupa di raggiungere l'angolo necessario a virare pari a 30° in $5s$ senza superare i 33° di inclinazione. La specifica sulla variazione del parametro β , relativo al coefficiente di attrito viscoso durante la rotazione del velivolo, non necessita di alcun controllore specifico come abbiamo visto al capitolo 3.2.2. Pertanto si trova che $W_2(s)$ è uguale a:

$$W_2(s) = \frac{\overline{G}_2(s)}{1 + \overline{G}_2(s)} = \frac{C_2(s)G_2(s)}{1 + C_2(s)G_2(s)}$$

Il diagramma a blocchi del sistema ottenuto con Simulink è il seguente:

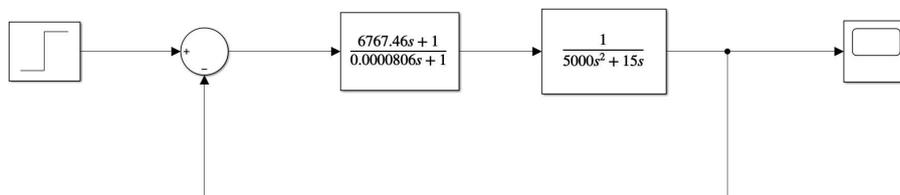


Figura 5.3: Schema a blocchi del sistema a catena chiusa in retroazione negativa di $W_1(s)$

Come si può osservare in figura 5.3 il sistema rispetta le specifiche richieste. Infatti, viene raggiunto il valore di regime, che è pari all'angolo di virata, in $5s$.

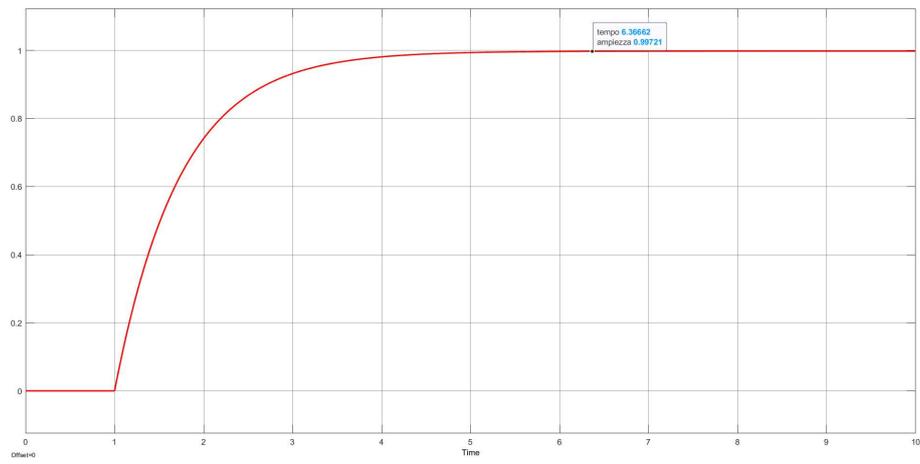


Figura 5.4: Risposta al gradino del sistema $W_2(s)$

Bibliografia

- [1] Avionews - world aeronautical press agency, 18 Agosto 2021. URL <https://www.avionews.it/it/item/1239705-aereo-elicottero-il-convertiplano-e-il-futuro-del-volo.html>.
- [2] Il bell xv-15 era un convertiplano con motori basculanti, 30 Maggio 2020. URL <https://svppbellum.blogspot.com/2020/05/il-bell-xv-15-era-un-convertiplano-con.html>.
- [3] Antonio Bicchi. Fondamenti di automatica - parte 1. 24 Ottobre 2019. URL <https://www.centropiaggio.unipi.it/course/fondamenti-di-automatica>.
- [4] Redazione di Rotornation. Tiltrotor aircraft: the history behind the tiltrotor. URL <http://rotornation.com/tiltrotor-aircraft/>.
- [5] Augusto Ferrante, Antonio Lepschy, and Umberto Viaro. *Introduzione ai controlli automatici*. Città Studi, Torino, 2004.
- [6] Leonardo. Aw609, quando il domani decolla dal tetto di casa, 10 Agosto 2022. URL <https://helicopters.leonardo.com/it/focus-detail/-/detail/revolutionary-aw609-tiltrotor-aircraft>.
- [7] Gianluigi Pillonetto and Gian Antonio Susto. *Esercizi di Controlli Automatici con note teoriche*. Società Editrice Esculapio, Bologna, 2019.