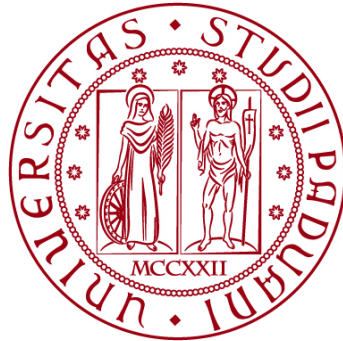


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE E AMBIENTALE
Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile



TESI DI LAUREA

**MODELLAZIONE GEOMETRICAMENTE
INTRINSECA DELLE EQUAZIONI DELLE ONDE
LUNGHE IN ACQUE BASSE E DELLA LORO
APPROSSIMAZIONE DIFFUSIVA**

Relatore:
Chiar.mo PROF. MATTEO CAMPORESE
Correlatore:
Dott.ssa ELENA BACHINI

Laureando: MATTIA ZURINI
2036526

ANNO ACCADEMICO 2023-2024

SOMMARIO

L'evoluzione dei modelli geofisici basati sulle equazioni delle onde lunghe in acque basse (Shallow Water Equations, SWE) ha tradizionalmente trascurato le caratteristiche geometriche del fondo, quali la curvatura, sul quale si sviluppano. Questo studio dunque si concentra sul confronto tra i risultati ottenuti da un modello classico, che adotta un approccio di derivazione standard per le SWE ossia per mezzo dell'integrazione lungo la direzione verticale, e un nuovo approccio intrinseco alle stesse.

Il nuovo modello è ottenuto da un'approssimazione al secondo ordine delle equazioni di Navier-Stokes, cercando di mantenere la dipendenza della geometria del fondo e per questo valido a rigore per piccole altezze del pelo libero. Si tratta di uno schema ai volumi finiti, implementato con la tecnica upwind alla Godunov, intrinsecamente definito sulla superficie del fondo.

Lo scopo principale di questa ricerca è dimostrare l'importanza di considerare la geometria del fondo anche in presenza di curvature relativamente lievi e costanti. Questo obiettivo viene raggiunto mediante l'analisi dei risultati ottenuti da questo nuovo modello numerico, confrontati con uno schema ai volumi finiti basato sulle SWE convenzionali, tratto dalla letteratura, e con dati sperimentali.

È inoltre preso in considerazione nelle analisi e nei successivi confronti anche un modello numerico ottenuto dalla semplificazione delle equazioni bidimensionali mediate sulla normale, questo si basa sulla propagazione dell'onda diffusiva detta più propriamente approssimazione non inerziale.

Le simulazioni, condotte su due superfici appositamente modellate, includono quindi sia dati numerici sia esperimenti effettuati presso il laboratorio di idraulica dell'Università di Padova.

INDICE

1	INTRODUZIONE	1
1.1	Obiettivi della ricerca.....	4
1.2	Struttura del documento.....	5
2	EQUAZIONI DEL MOTO	7
2.1	Derivazione dei modelli semplificati.....	11
2.1.1	Integrazione lungo la verticale.....	11
2.1.2	Integrazione lungo la normale.....	14
3	MODELLI.....	19
3.1	Modello sperimentale	19
3.1.1	Strumenti dell'apparato sperimentale	20
3.1.2	Descrizione del modello sperimentale	23
3.1.3	Schema dell'apparato sperimentale.....	25
3.1.4	Dati sperimentali raccolti a moto stazionario.....	28
3.1.5	Stima del coefficiente di resistenza.....	29
3.2	Modelli numerici.....	33
3.2.1	Griglia di calcolo.....	34
3.2.2	Descrizione dei modelli numerici	36
3.2.3	Condizioni al contorno.....	41
3.2.4	Determinazione del K_s ideale.....	42

4	VALIDAZIONE NEL PIANO INCLINATO.....	47
5	CASO STUDIO	53
5.1	Moto stazionario	54
5.1.1	Condizioni al contorno.....	54
5.1.2	Confronto dei tiranti.....	55
5.1.3	Confronto delle velocità.....	61
6	CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI	63
6.1	Conclusioni	63
6.2	Sviluppi futuri.....	65
	BIBLIOGRAFIA.....	67
	APPENDICE.....	71

INDICE DELLE FIGURE

Figura 1 – Esempio di punto singolare Q . La figura rappresenta una sezione verticale di un intorno locale di un punto P appartenente alla parabola S_B	5
Figura 2 – Forze applicate ad un volume infinitesimo di fluido	8
Figura 3 – Esempio di campo di moto turbolento	10
Figura 4 - Schema dell'anemometro ad ultrasuoni per la misura di due componenti della velocità.....	22
Figura 5 – Strumento di misurazione delle velocità (ADV) durante una delle prove sul piano inclinato.....	23
Figura 6 – Rappresentazione del piano inclinato	24
Figura 7 – Rappresentazione della superficie tridimensionale.....	24
Figura 8 – Schema apparato sperimentale per moto stazionario su piano inclinato...26	
Figura 9 – Posizione dell'ADV per la misura delle velocità e dell'idrometro a punta per la misura dei tiranti al di sopra del piano inclinato	26
Figura 10 - Schema apparato sperimentale per moto stazionario su superficie tridimensionale	26
Figura 11 - Schema apparato sperimentale per moto vario su superficie tridimensionale	27
Figura 12 – Posizione dell'ADV per la misura delle velocità al di sopra della superficie tridimensionale.....	27

Figura 13 - Posizione delle sonde acustiche per la misura in continuo dei tiranti al di sopra della superficie tridimensionale	27
Figura 14 – Diagramma di Moody per i dati di ottenuti dalle prove di laboratorio con il piano inclinato. Dal confronto del numero di Reynolds e della scabrezza relativa nel diagramma di Moody per i diversi regimi di portata analizzati si evince che il moto è in regime di transizione	31
Figura 15 - Diagramma di Moody per i dati di ottenuti dalle prove di laboratorio con la superficie tridimensionale. Dal confronto del numero di Reynolds e della scabrezza relativa nel diagramma di Moody per i diversi regimi di portata analizzati si evince che il moto è in regime di transizione	32
Figura 16 – Scala delle portate per i dati raccolti dalle prove di laboratorio con il piano inclinato e interpolazione del coefficiente di resistenza mediante l'utilizzo dell'equazione di Gauckler-Strickler	33
Figura 17 – Mesh relativa alla superficie tridimensionale utilizzata nei nuovi modelli numerici ISWE e IDW	35
Figura 18 – Mesh relativa alla superficie tridimensionale utilizzata nel modello numerico 2DVF. È' possibile notare la presenza di un tratto a monte della superficie da esaminare che simula il fondo della canaletta	36
Figura 19 – Andamento del RMSE in funzione del K_s e valore ottimale per modello numerico ISWE	43
Figura 20 - Andamento del RMSE in funzione del K_s e valore ottimale per modello numerico IDW	43
Figura 21 - Andamento del RMSE in funzione del K_s e valore ottimale per modello numerico 2DVF	44
Figura 22 – Risultati della calibrazione del coefficiente K_s per il modello ISWE sul piano inclinato. Questa calibrazione evidenzia il legame inversamente proporzionale tra tirante e K_s	45
Figura 23 – Risultati dell'analisi teorica e numerica che evidenzia la differenza nell'approssimazione del tirante considerando una differente distribuzione delle pressioni, per diverse pendenze del fondo	46
Figura 24 – Confronto tra le soluzioni migliori per i diversi modelli numerici e i dati sperimentali a stato stazionario per ognuna delle prove effettuate.....	47

Figura 25 – Valori di RMSE, ottenuti dai diversi modelli numerici, per confronto con i tiranti misurati	48
Figura 26 – Valori di RMSE, ottenuti dai modelli numerici ISWE e 2DVF, per confronto con i tiranti misurati	49
Figura 27 - Confronto tra i modelli numerici ISWE e 2DVF, caratterizzati entrambi da un coefficiente di resistenza $43,5 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, e i dati sperimentali a stato stazionario per ognuna delle prove effettuate	49
Figura 28 - Valori di RMSE, ottenuti dai modelli numerici ISWE e 2DVF, per confronto con i tiranti misurati	50
Figura 29 - Confronto tra i modelli numerici ISWE e 2DVF, caratterizzati entrambi da un coefficiente di resistenza $66,5 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, e i dati sperimentali a stato stazionario per ognuna delle prove effettuate	50
Figura 30 - Relazioni portata-velocità per i diversi modelli numerici e i dati sperimentali a stato stazionario, con i relativi intervalli di confidenza al 95%, per ognuna delle prove effettuate	51
Figura 31 - Valori di RMSE, ottenuti dai modelli numerici ISWE e 2DVF, per confronto con le velocità misurate.....	52
Figura 32 – Posizione dei punti sperimentali nei quali sono state eseguite le misure di tirante. Il punto 3 è caratterizzato sia da misure di tirante sia da misure di velocità..	54
Figura 33 – Relazioni portata-tirante per i diversi modelli numerici e i dati sperimentali a stato stazionario per ognuna delle prove effettuate.....	58
Figura 34 - Valori di RMSE, ottenuti dai modelli numerici ISWE e 2DVF, per confronto con i tiranti misurati per ognuno dei punti di misura.....	59
Figura 35 - Soluzione grafica dei tiranti per la simulazione 6 in stato stazionario per il modello IDW	60
Figura 36 – Soluzione grafica dei tiranti per la simulazione 6 in stato stazionario per il modello ISWE.....	60
Figura 37 - Soluzione grafica dei tiranti per la simulazione 6 in stato stazionario per il modello 2DVF.....	61
Figura 38 - Relazioni portata-velocità per i diversi modelli numerici e i dati sperimentali a stato stazionario, con i relativi intervalli di confidenza al 95%, nel punto di misura 3, per ognuna delle prove effettuate	61

Figura 39 - Valori di RMSE, ottenuti dai modelli numerici ISWE e 2DVF, per confronto con le velocità misurate nel punto di misura 362

INDICE DELLE TABELLE

Tabella 1 – Dati di tirante e velocità ottenuti dalle prove di laboratorio con il piano inclinato	28
Tabella 2 - Dati di tirante e velocità ottenuti dalle prove di laboratorio con la superficie tridimensionale.....	28
Tabella 3 – Dati di tirante sul bordo di monte della superficie tridimensionale	55

1

INTRODUZIONE

Negli ultimi anni si è assistito a una crescente diffusione dell'impiego di codici di simulazione numerica in tutte le attività riguardanti l'ambito dell'idraulica fluviale. Questa spazia dagli studi di supporto alla progettazione, alla valutazione del rischio idraulico, dall'analisi del trasporto solido, fino ai sistemi di previsione e gestione in tempo reale. Tale crescente utilizzo di piattaforme di supporto decisionale è sostenuto da tre fattori principali: l'evoluzione delle normative a livello nazionale e comunitario, i progressi nel campo tecnico-scientifico e le significative innovazioni nel settore dell'informatica.

Sul fronte normativo si nota una crescente necessità di adottare approcci sempre più standardizzati nelle procedure e nelle modalità di gestione delle risorse idriche. Questo include la previsione degli eventi estremi, la gestione del rischio, l'ottimizzazione delle risorse disponibili, il monitoraggio della qualità dell'acqua e la pianificazione di interventi sia strutturali che non. Tale approccio, orientato verso un paradigma deterministico e quantitativo, richiede sempre più frequentemente l'utilizzo di codici di simulazione in grado di rappresentare dettagliatamente le fenomenologie fisiche di interesse, consentendo lo studio e il confronto di molteplici scenari.

Dal punto di vista tecnico-scientifico, oltre all'aumento delle conoscenze sulle fenomenologie complesse come la morfologia fluviale e i processi qualitativi, si è assisti-

to a un miglioramento nella rappresentazione di tali fenomeni attraverso robusti e affidabili codici di simulazione numerica. Questo ha permesso l'utilizzo sempre più diffuso di modelli bidimensionali, una volta riservati a un numero limitato di utilizzatori.

Il terzo elemento chiave di questa evoluzione è rappresentato dai significativi sviluppi nel campo dell'informatica degli ultimi decenni, sia in termini di software che di hardware. Grazie alla disponibilità di calcolatori sempre più potenti e a metodologie di programmazione sempre più raffinate, è ora possibile realizzare modelli in grado di rappresentare fenomeni complessi su aree estese, con una risoluzione spaziotemporale estremamente dettagliata.

Attraverso schemi di risoluzione avanzati come i volumi finiti, è oggi possibile simulare il comportamento idrodinamico di reticoli fluviali, naturali o artificiali, con un elevato livello di dettaglio e in tempi rapidi, includendo anche processi di trasporto solido, evoluzione morfologica, aspetti qualitativi e interazioni con la rete di drenaggio.

Dalla progettazione alla gestione delle emergenze, i codici di simulazione numerica costituiscono oggi, dunque, uno strumento indispensabile per garantire la qualità tecnica delle attività di studio e di progettazione, nonché il rispetto delle normative vigenti.

Il progetto di tesi di seguito esposto prevede di analizzare dei nuovi modelli matematico-numeriche sviluppati da Bachini e Putti [1] che si basano su una diversa semplificazione delle equazioni di Navier-Stokes, e confrontarne i risultati con un classico solutore ampiamente convalidato. Al fine di realizzare questo confronto sono state svolte sia analisi sperimentali presso il laboratorio di idraulica dell'Università di Padova sia analisi numeriche.

Mediante l'integrazione delle equazioni di Navier-Stokes precedentemente menzionate è possibile ricondursi alle più semplici equazioni bidimensionali, spesso citate come equazioni delle acque basse, note in letteratura anche con il nome di *shallow water equations* (SWE), le quali sono utilizzate largamente nella modellazione fluidodinamica ambientale.

Queste equazioni sono un sistema di due leggi di conservazione iperboliche per la massa e la quantità di moto mediate sulla profondità, derivate dall'implementazione

delle cosiddette ipotesi delle acque basse anche note con il nome di *shallow water hypotheses*, ovvero (i) la componente orizzontale della velocità è indipendente dalla coordinata verticale, (ii) la componente verticale della velocità è nulla, (iii) la distribuzione della pressione è idrostatica, (iv) la turbolenza è trascurata.

Le applicazioni delle SWE spaziano dalla modellazione oceanica su larga scala alla circolazione atmosferica, dalla morfodinamica dei fiumi alle frane e ai flussi granulari, fino alle valanghe.

La derivazione comune di questo sistema iperbolico di leggi di equilibrio prevede dapprima l'integrazione delle equazioni di Navier-Stokes (NS) sul tempo che porta ad ottenere le equazioni di Reynolds (RANS), successivamente si procede all'integrazione di queste nella direzione verticale, dal fondo alla superficie libera, nelle ipotesi di poter confondere la verticale con la normale al fondo e di poter trascurare le accelerazioni e gli sforzi in direzione verticale, trascurando inoltre gli effetti legati all'accelerazione di Coriolis. Nel procedimento di integrazione sulla profondità si utilizzano le condizioni cinematiche sulla superficie libera e al fondo. Il procedimento per la loro derivazione è riportato da Defina [2].

L'approssimazione di acque basse è valida solo per angoli relativamente piccoli, comunemente stimati a circa sei gradi rispetto all'orizzontale, e per curvature trascurabili del rilievo del fondo, mentre il limite più rilevante, che riguarda principalmente le correnti rapide, è costituito dalle ipotesi di distribuzione idrostatica delle pressioni lungo la verticale. Per migliorare l'accuratezza sono spesso introdotte correzioni apposite della pressione, per tenere conto delle deviazioni del profilo della pressione dal comportamento idrostatico lungo la verticale dovuto alla variabilità del fondo. La presenza di una topografia di fondo curva, dunque, gioca un ruolo importante in quanto aumenta la complessità geometrica delle linee di flusso del fluido.

Sono quindi state proposte in letteratura, nel corso degli anni, varie metodologie per affrontare la modellazione delle SWE su superfici di fondo generiche. Inizialmente i modelli fornivano soluzioni valide solo per correnti caratterizzate da numeri di Reynolds (R_e) sufficientemente bassi, ad esempio la modellazione proposta da Ruyser-Quil e Manneville [3] [4], i primi lavori di Savage e Hutter [5] [6] invece hanno posto le basi per lo studio di letti non planari, sviluppando una formulazione del modello SW in coordinate curvilinee locali basata sull'integrazione lungo la normale alla

topografia del fondo. Questo approccio è valido però solo per curvature del fondo piccole ed essenzialmente monodimensionali e, in pratica, presuppone che la superficie del fluido sia parallela al fondo. Più recentemente Bouchut e Westdickenberg [7] hanno esteso la metodologia per considerare curvature bidimensionali e geometrie del fondo meno restrittive, ma i limiti teorici e pratici non sono stati ampiamente studiati, così come la soluzione numerica.

Nella nuova formulazione proposta, partendo dalle equazioni di NS, la componente di velocità del flusso perpendicolare al fondo viene considerata trascurabile e si assume una distribuzione della pressione idrostatica lungo le normali locali. Le SWE risultanti sono derivate dall'integrazione in profondità lungo la direzione normale, sotto le ulteriori ipotesi di una distribuzione lineare della velocità (equivalente all'assunzione di una velocità media costante sulla profondità) e di una profondità del fluido sufficientemente piccola da garantire l'invertibilità della trasformazione delle coordinate.

1.1 OBIETTIVI DELLA RICERCA

Gli studi che hanno cercato di quantificare l'accuratezza dell'approssimazione dell'integrazione lungo la verticale per fondi non planari o a forte pendenza sono scarsi, dunque questo elaborato si pone come obiettivo quello di fornire un primo confronto in tal senso.

Un nuovo approccio per una formulazione geometricamente intrinseca delle SWE viene presentato nell'articolo di Bachini e Putti [1]; l'obiettivo dello stesso è quello di derivare un sistema di equazioni in ipotesi di acque basse adatto per superfici di fondo non planari, affrontando le limitazioni e le ipotesi che caratterizzano i lavori di Bouchut e Westdickenberg [7] e Fent et al. [8] da cui l'articolo trae ispirazione, nonché studiare una struttura matematica e una soluzione numerica attraverso la discretizzazione ai volumi finiti.

A differenza degli altri lavori si ottiene un sistema completamente intrinseco alla geometria del fondo, con un termine sorgente che contiene informazioni sulla pendenza e sulla curvatura del fondo. L'insieme di equazioni risultante è caratterizzato da funzioni di flusso e sorgenti legate al fondo che variano spazialmente. Le SWE

scritte in coordinate intrinseche, ossia descritte per mezzo di un sistema di riferimento locale e caratterizzate dall'assumere il profilo della velocità normale alla direzione del flusso trasversale, si adattano a terreni generali e complessi, con particolare attenzione all'influenza della geometria del fondo sulla soluzione. Le ipotesi a cui ancora non è possibile prescindere sono la distribuzione lineare della velocità e la limitazione, molto restrittiva, di una profondità del fluido sufficientemente piccola da escludere l'insorgenza di punti singolari, come l'intersezione dei vettori normali uscenti da punti appartenenti ad un intorno del punto P sulla generica superficie S_B , come esemplificato in Figura 1, dove è mostrato un intorno di un punto appartenente ad una parabola.

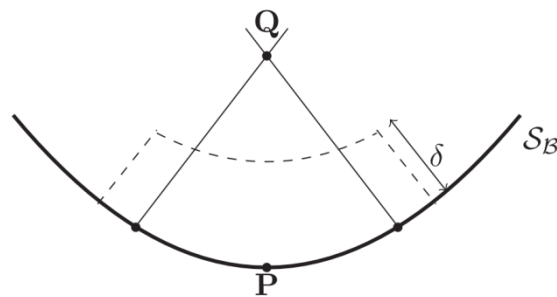


Figura 1 – Esempio di punto singolare Q. La figura rappresenta una sezione verticale di un intorno locale di un punto P appartenente alla parabola S_B

La spiegazione intuitiva di questa condizione, pertanto, è che la profondità del flusso in direzione normale deve essere minore del raggio minimo di curvatura.

I risultati numerici descritti nell'articolo, infine, mostrano che trascurare le informazioni sulla curvatura del fondo porta a differenze significative. Lo scopo di questo lavoro di tesi è dunque quello di verificare e valutare quantitativamente l'entità di queste differenze confrontando i risultati ottenuti dal modello proposto con altri modelli già in commercio che si basano sulla classica semplificazione delle SWE.

1.2 STRUTTURA DEL DOCUMENTO

Il documento è organizzato come segue: nel capitolo 2 si riportano le equazioni del moto da cui sono derivati i diversi modelli numerici; nel capitolo 3 si descrivono i modelli e le loro proprietà intrinseche; nel capitolo 4 sono riportati i risultati relativi alle simulazioni sul piano inclinato che hanno permesso di validare i dati; nel capito-

lo 5 sono riportati i risultati delle simulazioni numeriche e sperimentali per il caso studio, nonché i confronti; nel capitolo 6 sono infine riportate le conclusioni e i possibili sviluppi futuri.

2

EQUAZIONI DEL MOTO

Questa sezione è dedicata alla descrizione delle equazioni del moto sulla base delle quali tutti i modelli utilizzati nel lavoro di tesi e di seguito descritti fanno riferimento. Le equazioni del moto che permettono di descrivere il moto della corrente all'interno dei corsi d'acqua possono ricavarsi applicando ad un opportuno volume di controllo i seguenti principi fondamentali:

1. Conservazione della massa;
2. Conservazione dell'energia;
3. Conservazione della quantità di moto.

In realtà l'applicazione del principio di conservazione dell'energia e/o del principio della quantità di moto ad un volume di controllo infinitesimo conduce, nella pratica, agli stessi risultati ovvero alle equazioni di Navier-Stokes.

Le equazioni di Navier-Stokes dunque si possono ottenere operando l'equilibrio alla traslazione e alla rotazione di un volume infinitesimo di fluido viscoso, avvalendosi della analogia Fluido-Solido per la definizione in termini cinematici degli sforzi superficiali. Di seguito si riporta la classica forma differenziale delle suddette equazioni in ipotesi di fluido incomprimibile (i.e. $\rho = \text{cost}$):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \vec{g} - \nu \nabla^2 \vec{u} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

(2.1)

che in forma estesa si scrivono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g - \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Le equazioni sono riportate trascurando il contributo della forza apparente di Coriolis. Nella precedente con (u_x, u_y, u_z) si indicano le componenti del vettore velocità nelle direzioni x , y e z rispettivamente, p è la pressione, ρ la densità, il vettore \vec{g} indica la forza di gravità ed è scritto come:

$$\vec{g} = [0, 0, -g]^T$$

Infine ν è la viscosità cinematica.

Per ricavare le equazioni precedenti si prende in esame una porzione del campo fluido costituita da un parallelepipedo elementare di spigoli δx , δy , δz paralleli agli assi di una terna cartesiana di riferimento (Figura 2).

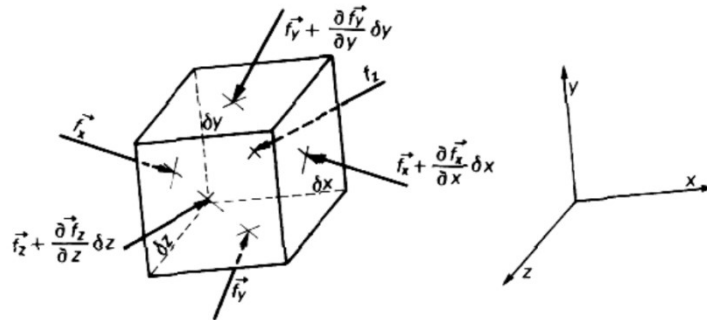


Figura 2 – Forze applicate ad un volume infinitesimo di fluido

Agiscono su questo elemento le seguenti forze:

- La forza di gravità, applicata al baricentro;
- Le forze trasmesse dal restante corpo fluido;
- La forza d'inerzia, applicata al baricentro.

L'equilibrio dinamico dell'elemento fluido considerato impone che la somma della forza di gravità e delle forze superficiali applicate, proiettate sugli assi coordinati, sia uguale alla rispettiva proiezione della forza d'inerzia e che altrettanto avvenga per i rispettivi momenti presi ad esempio rispetto al centro di figura.

Le equazioni di Navier-Stokes, come precedentemente esposto, costituiscono la base teorica per affrontare i problemi relativi al moto dei fluidi reali tenendo debitamente conto della viscosità. La loro forma complessa, tuttavia, espressa in un sistema di equazioni alle derivate parziali non lineari, presenta notevoli sfide nella risoluzione pratica, soprattutto quando si considerano tutti i termini, inclusi sia quelli legati all'inerzia (come nelle equazioni di Eulero) che quelli derivanti dalle resistenze viscosive.

È interessante notare che ponendo il coefficiente di viscosità ν uguale a zero, le equazioni di Navier-Stokes si identificano esattamente con le equazioni di Eulero, valide per un fluido ideale non viscoso.

D'altra parte le equazioni di Navier-Stokes costituiscono un sistema composto da quattro equazioni differenziali nelle quattro incognite (u_x, u_y, u_z, p) . La soluzione di questo sistema, con adeguate condizioni iniziali e al contorno, dovrebbe offrire una descrizione istantanea e puntuale del campo di moto in qualsiasi regime idrodinamico, che possa essere laminare, di transizione o turbolento.

Nel caso di un moto laminare uniforme le equazioni di Navier-Stokes possono presentare una soluzione analitica esatta, come evidenziato nei casi di flusso di Couette e Poiseuille. In generale per affrontare condizioni più complesse è necessario risolverle numericamente. In linea di principio ciò consente di catturare in modo completo e dettagliato il carattere turbolento del moto (come illustrato in Figura 3), evidenziando le sue molteplici caratteristiche, tra cui l'irregolarità nel tempo e nello spazio, la dissipazione, la rotazionalità, la tridimensionalità, la non omogeneità, l'anisotropia e la non linearità.



Figura 3 – Esempio di campo di moto turbolento

La maggiore o minore importanza dei termini di viscosità nelle equazioni di Navier-Stokes, nei confronti dei termini di inerzia, è in dipendenza dal valore numerico che il numero di Reynolds assume. Nel caso il numero di Reynolds tenda a zero si ricade nelle equazioni di Eulero, facendo riferimento dunque ad un fluido perfetto e per quei moti nei quali diviene grandissima la prevalenza della forza d'inerzia sulla resistenza viscosa.

Per numeri di Reynolds elevati e domini di calcolo estesi, quali quelli che in genere si incontrano nell'ambito dell'ingegneria ambientale, l'onere computazionale associato ad una soluzione numerica diretta (DNS) delle equazioni di Navier-Stokes è troppo elevato, ed è quindi necessario ricorrere ad altre strategie di soluzione quali:

- La Large Eddy Simulation (LES);
- Le Reynolds Averaged Navier-Stokes equations (RANS).

Queste strategie di semplificazione rientrano nella vasta famiglia delle metodologie per la semplificazione delle equazioni di Navier-Stokes che in senso più generale possono essere ricondotte a due tipi:

- a) Soppressione diretta di alcuni termini che compaiono nelle equazioni, o perché tali termini mancano effettivamente (moti permanenti, moti piani, moti con simmetrie assiali o radiali, ecc.), oppure perché tali termini sono considerati trascurabili rispetto agli altri. In quest'ultimo caso occorre essere molto cauti nel valutare l'effettiva importanza dei termini che s'intende sopprimere.
- b) Riduzione del numero delle variabili indipendenti (spaziali e temporale) quando di una certa variabile dipendente ci si accontenti di valutare il valore

medio nello spazio o nel tempo. Ciò si ottiene attraverso una integrazione preliminare delle equazioni rispetto alla variabile indipendente che si vuole eliminare.

2.1 DERIVAZIONE DEI MODELLI SEMPLIFICATI

I modelli numerici utilizzati per questa tesi si basano su versioni semplificate delle equazioni di Navier-Stokes.

A partire dalle (2.1) e usando la relazione:

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nabla(\vec{u} \otimes \vec{u})$$

essendo $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ è possibile riscrivere le equazioni di Navier-Stokes per un fluido incomprimibile:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla(\vec{u} \otimes \vec{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbb{T} + \vec{g}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

(2.3)

in cui \mathbb{T} rappresenta il tensore deviatorico dovuto alle forze esterne. Utilizzando la media standard di Reynolds nel tempo e la semplificazione di Boussinesq, è possibile mettere in relazione il termine $\nabla \cdot \mathbb{T}$ con il più consueto $\nu \Delta \vec{u}$, per recuperare la formulazione più classica vista nell'eq. (2.1).

Le ipotesi comuni alla base di queste semplificazioni sono 1) condizioni di fondo fisso; 2) trascurabilità di tutti gli sforzi ad eccezione dello sforzo al fondo.

2.1.1 INTEGRAZIONE LUNGO LA VERTICALE

Nell'ipotesi di assumere ora pendenze trascurabilmente piccole così da poter confondere la normale al fondo con la verticale si possono ottenere le equazioni bidimensionali, mediate sulla verticale, dette equazioni delle acque basse, o più spesso, *shallow water equations* (SWE):

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial t} + \frac{\hat{u}_x}{g} \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{\hat{u}_y}{g} \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial y} - i_{fx} + j_x = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial t} + \frac{\hat{u}_x}{g} \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial x} + \frac{\hat{u}_y}{g} \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} - i_{fy} + j_y = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}_x Y}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_y Y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

in cui Y è la profondità della corrente, (\hat{u}_x, \hat{u}_y) , (i_{fx}, i_{fy}) , (j_x, j_y) sono le componenti della velocità media sulla verticale, della pendenza locale del fondo e della dissipazione continua di energia, nelle direzioni x e y , rispettivamente.

Queste equazioni si ottengono per integrazione delle equazioni di Reynolds nella direzione verticale, dal fondo alla superficie libera.

Definendo $\vec{\hat{q}} = \vec{\hat{u}}Y$ la portata specifica per unità di larghezza e indicando con S_{0x} e S_{0y} le componenti della pendenza del fondo, con $\kappa_b \hat{q}_x$ e $\kappa_b \hat{q}_y$ le componenti della dissipazione continua di energia, nelle direzioni x e y rispettivamente si può scrivere una relazione analoga alle (2.4):

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial t} + \frac{\hat{u}_x}{g} \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{\hat{u}_y}{g} \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial y} - S_{0x} + \kappa_b \hat{q}_x = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial t} + \frac{\hat{u}_x}{g} \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial x} + \frac{\hat{u}_y}{g} \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} - S_{0y} + \kappa_b \hat{q}_y = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Nelle precedenti relazioni κ_b è dato dalla seguente espressione:

$$\kappa_b = \frac{|\hat{q}|}{k_s^2 \cdot H^{10/3}}$$

in cui k_s è il coefficiente di resistenza secondo Strickler.

Moltiplicando ora le prime due per gY si ottengono le equazioni differenziali delle onde lunghe in acque basse, utilizzate dal modello ai volumi finiti 2DVF:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{q}_x}{\partial t} + \frac{1}{Y} \frac{\partial \hat{q}_x^2}{\partial x} + \frac{1}{2} g \frac{\partial Y^2}{\partial x} + \frac{1}{Y} \frac{\partial \hat{q}_x \hat{q}_y}{\partial y} = gY S_{0x} - gY \kappa_b \hat{q}_x \\ \frac{\partial \hat{q}_y}{\partial t} + \frac{1}{Y} \frac{\partial \hat{q}_x \hat{q}_y}{\partial x} + \frac{1}{Y} \frac{\partial \hat{q}_y^2}{\partial y} + \frac{1}{2} g \frac{\partial Y^2}{\partial y} = gY S_{0y} - gY \kappa_b \hat{q}_y \\ \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

(2.6)

Le quali scritte in forma conservativa diventano:

$$\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial y} = \mathbb{S} - gY(\mathbb{K} \cdot \mathbb{U})$$

(2.7)

in cui:

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} \hat{q}_x \\ \hat{q}_y \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} \hat{q}_x^2/Y + gY^2/2 \\ \hat{q}_x \hat{q}_y / Y \\ \hat{q}_x \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} \hat{q}_x \hat{q}_y / Y \\ \hat{q}_y^2/Y + gY^2/2 \\ \hat{q}_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} gYS_{0x} \\ gYS_{0y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} \kappa_b & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In conclusione, si ritiene opportuno riportare anche le equazioni bidimensionali che descrivono l'approssimazione dell'onda diffusiva, le quali si possono ottenere come ulteriore semplificazione delle (2.4), eliminando i termini di accelerazione locale e convettiva (termini inerziali). Si ottiene così il sistema di equazioni dell'onda diffusiva utilizzato nei modelli di propagazione parabolico-diffusivi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial x} - i_{fx} + j_x = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial y} - i_{fy} + j_y = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial u_x Y}{\partial x} + \frac{\partial u_y Y}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

(2.8)

2.1.2 INTEGRAZIONE LUNGO LA NORMALE

Si rende ora possibile rimuovere l'assunzione di pendenze trascurabilmente piccole, poiché l'integrazione delle equazioni di Navier-Stokes (2.3) viene eseguita lungo la direzione normale al fondo. Questo nuovo approccio è descritto nel lavoro di tesi di dottorato realizzato da Elena Bachini [9]. Per implementare questa modifica, si definisce un sistema di riferimento curvilineo locale (LCS) ancorato alla superficie che rappresenta la topografia del fondo. Tutti gli sviluppi, compresa l'integrazione sulla profondità, sono eseguiti rispetto a questo sistema di riferimento locale.

Ad ogni punto del fondo viene associata una tripla di vettori di base locale, (t_1, t_2, t_3) , in cui i primi due vettori sono tangenti al fondo e ortogonali tra loro, mentre $t_3 = N$ rappresenta la normale al fondo ed è quindi ortogonale agli altri due e tale da soddisfare la regola della mano destra.

In questo contesto, un vettore $\vec{x} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3$, dove (x_1, x_2, x_3) rappresenta un sistema di coordinate globali cartesiane (GCS) in cui x_3 si assume allineato con l'azione della gravità ma avente direzione opposta, rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 , (e_1, e_2, e_3) , può essere espresso come $\vec{x} = s_1 \cdot t_1 + s_2 \cdot t_2 + s_3 \cdot N$, dove (s_1, s_2, s_3) indica il sistema di coordinate curvilinee locali rispetto ai vettori di base (t_1, t_2, N) associati ad uno specifico punto del fondo.

Questo approccio permette di considerare pendenze di qualsiasi entità, migliorando la flessibilità del modello e consentendo un'analisi più accurata del flusso lungo la direzione normale al fondo.

Il tensore metrico associato \mathcal{G} , come conseguenza della proprietà di ortogonalità, diventa la matrice diagonale data da:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} h_{(1)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_{(2)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove i coefficienti $h_{(i)}$ sono dati dal prodotto scalare dei vettori t_i , ossia:

$h_{(1)}^2 = \langle t_1, t_1 \rangle$, $h_{(2)}^2 = \langle t_2, t_2 \rangle$ e $h_{(3)} = 1$ poiché N è anche normale, cioè di norma unitaria.

Dividendo il vettore velocità e il tensore deviatorico, dovuto alle forze esterne, come somma dei corrispondenti valori medi \vec{U} e \mathcal{T} e delle fluttuazioni \tilde{u} e $\tilde{\tau}$ intorno alla media è possibile scrivere:

$$\vec{u} = \vec{U} + \vec{u}, \text{ dove } \vec{U}(s_1, s_2, t) = \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \vec{u}(\vec{s}, t) ds_3, \quad \int_0^\eta \vec{u}(\vec{s}, t) ds_3 = 0$$

$$\mathbb{T} = \mathcal{T} + \vec{\tau}, \text{ dove } \mathcal{T}(s_1, s_2, t) = \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \mathbb{T}(\vec{s}, t) ds_3, \quad \int_0^\eta \vec{\tau}(\vec{s}, t) ds_3 = 0$$

Gli operatori differenziali presenti nelle equazioni adottano ora il nuovo simbolo $\nabla_{\mathcal{G}}$, al fine di sottolineare che si tratta di operatori definiti nel sistema di riferimento curvilineo locale (LCS), e dunque tengono in considerazione la metrica specifica di tale sistema.

Approssimando in questo caso il percorso di integrazione ottimale, denominato percorso "cross-flow", con la direzione normale al fondo, sono state ottenute le *intrinsic shallow water equations* (ISWE), utilizzate nell'omonimo modello ai volumi finiti, che possono così scriversi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{G}} \cdot \left(\frac{1}{\eta} (\vec{q} \otimes \vec{q}) \circ \mathbb{A}_{sw} + \left(\frac{g\eta^2}{2} \frac{\partial x_3}{\partial s_3} \right) \mathcal{G}_{sw}^{-1} \right) \\ = -\frac{g\eta^2}{2} \nabla_{\mathcal{G}} \left(\frac{\partial x_3}{\partial s_3} \right) - g\eta \nabla_{\mathcal{G}}(x_3) + \frac{1}{\rho} (\nabla_{\mathcal{G}} \cdot \mathcal{T}_{sw} + f_B) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{G}} \cdot \vec{q} = 0$$

(2.9)

nelle quali η è la profondità del fluido in direzione normale alla superficie del fondo, il vettore $\vec{q} = [\eta u_1, \eta u_2]$ indica il vettore velocità, mediata in profondità, dove u_1, u_2 sono le componenti della velocità nelle rispettive direzioni 1 e 2, \mathcal{G}_{sw} , \mathbb{A}_{sw} e \mathcal{T}_{sw} sono sottomatrici principali di ordine 2 di \mathcal{G} , \mathbb{A} e \mathcal{T} rispettivamente, in particolare $\mathcal{T}_{sw} = \eta \cdot \mathcal{T}$.

Il vettore $f_B = [\tau_{b1}, \tau_{b2}]^T$ è il campo vettoriale che tiene conto dell'attrito sul fondo.

Mentre il tensore "fluttuazione ridotta" associato a \vec{u} è definito come:

$$\mathbb{A} = \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \mathbb{I} + \vec{u} \otimes \vec{u}$$

nella quale \mathbb{I} è la matrice identità e \vec{u} si può scrivere come:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1/U_1 \\ \tilde{u}_2/U_2 \\ \tilde{u}_3/U_3 \end{bmatrix}$$

Il sistema ISWE definito dalle (2.9) è irrotazionale, conserva l'energia in assenza di tensioni ed è ben bilanciato.

Il sistema di equazioni corrispettivo a quello trovato sono le classiche SWE (2.4).

Si vuole ora riportare il sistema ISWE scritto in forma conservativa, in questo modo si evidenzia la sua formulazione come legge di equilibrio ed è inoltre utile per descrivere la discretizzazione numerica affrontata nel capitolo successivo.

$$\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial t} + \text{div}_{\mathcal{G}} \mathbb{F} = \mathbb{S}$$

in cui

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} \eta \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

La funzione di flusso \mathbb{F} prende la forma

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{\eta} + \frac{g\eta^2}{2h_{(1)}^2} \frac{\partial x_3}{\partial s_3} & \frac{q_1 \cdot q_2}{\eta} \\ \frac{q_1 \cdot q_2}{\eta} & \frac{q_2}{\eta} + \frac{g\eta^2}{2h_{(2)}^2} \frac{\partial x_3}{\partial s_3} \end{bmatrix}$$

Si fa notare come il flusso \mathbb{F} sia funzione di \vec{s} e dunque della geometria del fondo, a causa della comparsa delle componenti $h_{(i)}$ del tensore metrico \mathcal{G}_{sw} e della presenza della pendenza di fondo $\partial x_3 / \partial s_3$.

La funzione sorgente \mathbb{S} comprende i coefficienti del tensore metrico, la pendenza del fondo e le sue derivate, il tensore di sforzo medio bidimensionale \mathcal{T}_{sw} , il parametro di attrito del fondo τ_b e la profondità η . Questa dipendenza viene esplicitamente espressa scrivendo \mathbb{S} come:

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g\eta^2}{2h_{(1)}^2} \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial x_3}{\partial s_3} \right) - \frac{g\eta}{h_{(1)}^2} \frac{\partial x_3}{\partial s_1} + \frac{1}{\rho} (\nabla_{\mathcal{G}} \cdot \mathcal{T}_{sw})_1 + \frac{\tau_{b1}}{\rho} \\ -\frac{g\eta^2}{2h_{(2)}^2} \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{\partial x_3}{\partial s_3} \right) - \frac{g\eta}{h_{(2)}^2} \frac{\partial x_3}{\partial s_2} + \frac{1}{\rho} (\nabla_{\mathcal{G}} \cdot \mathcal{T}_{sw})_2 + \frac{\tau_{b2}}{\rho} \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso è possibile applicare l'approssimazione non inerziale, detta impropriamente diffusiva, ottenendo così una forma intrinseca corrispondente alle (2.8), la semplificazione si realizza eliminando la dipendenza dal tempo e i termini non lineari. Si ottiene così l'equazione dell'onda diffusiva intrinseca (IDW), utilizzata nell'omonimo modello agli elementi finiti:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{G}} \cdot \left(-\frac{\eta^{5/3}}{n |\nabla_{\mathcal{G}} H_{\mathcal{G}}|_{\mathcal{G}}^{1/2}} \nabla_{\mathcal{G}} H_{\mathcal{G}} \right) = f$$

(2.10)

nella quale $H_{\mathcal{G}} = \eta \frac{\partial x_3}{\partial s_3} + x_{3B}$ rappresenta la profondità totale rispetto al fondo, x_{3B} è l'altezza della superficie rispetto al sistema di riferimento globale (GCS), n è il coefficiente di Manning mentre f indica le forze esterne applicate al sistema.

3

MODELLI

3.1 MODELLO SPERIMENTALE

Si riportano in questo capitolo i risultati di una serie di esperimenti effettuati nella canaletta di laboratorio dell'Università di Padova al fine di confrontare i dati sperimentali ottenuti con quelli ricavati dai diversi modelli numerici e permettere dunque la calibrazione del coefficiente di resistenza.

Sono stati sviluppati due differenti casi test con lo scopo di analizzare l'influenza della geometria del fondo (pendenza e curvatura) nella soluzione delle SWE. Il design delle superfici deve essere coerente con l'ipotesi di una topografia che varia lentamente con piccole curvature e con le assunzioni che hanno portato alla formulazione dei nuovi modelli. Allo stesso tempo le condizioni al contorno e iniziali dovrebbero avere effetti minimi sull'accuratezza della soluzione numerica.

Il primo caso test considera un piano inclinato con inclinazione di $14,6^\circ$, utilizzato per la calibrazione del coefficiente di resistenza da applicare ai modelli, nonché per la validazione dei risultati. Il secondo caso test esamina invece una superficie di fondo tridimensionale, caratterizzata da lievi curvature, sulla quale si eseguono i confronti e le analisi a moto permanente.

3.1.1 STRUMENTI DELL'APPARATO SPERIMENTALE

3.1.1.1 *Canaletta*

La canaletta impiegata per le prove in laboratorio è realizzata in plexiglass trasparente, caratterizzata da una sezione rettangolare larga 0,3 m e un'altezza di 0,6 m, si estende per una lunghezza totale di circa 5 metri. La pendenza del fondo può essere regolata manualmente ma per tutte le prove questa è stata mantenuta pari a zero. Nella parte sommitale della canaletta è presente un carrello che si muove su binari paralleli e orizzontali; su uno dei lati è presente un metro, mentre sul lato opposto è posizionato un trasduttore di posizione lineare magnetostrittivo, entrambi utilizzati per determinare la posizione del carrello.

L'approvvigionamento idrico avviene tramite un sistema di pompe e condotte a circuito chiuso, il livello a valle è mantenuto costante grazie a una paratoia regolabile a ventola, che funge da sfioratore, in tutte le prove questa è stata mantenuta abbattuta.

3.1.1.2 *Misuratore elettromagnetico*

I misuratori di portata elettromagnetici, applicati alle due condotte di mandata DN 50 e DN 150 rispettivamente, basano il loro funzionamento sulla legge di Faraday, la quale riguarda l'induzione magnetica. Questi strumenti misurano la velocità del flusso di un liquido attraverso la forza elettromotrice generata quando il liquido si sposta in un campo magnetico trasversale. Questo metodo consente la misurazione della portata di liquidi che presentano una conduttività elettrica considerevole.

L'acqua contenuta nel condotto non magnetico attraversa le espansioni polari di un elettromagnete che genera un campo magnetico perpendicolare al flusso del liquido. Questo campo magnetico agisce sul movimento degli ioni presenti nel liquido, inducendoli a cedere le loro cariche agli elettrodi di misurazione. Ciò crea una forza elettromotrice proporzionale alla velocità del flusso del liquido.

La differenza di potenziale (V) può essere definita come:

$$V = uBD$$

dove u rappresenta la velocità del flusso del liquido, B indica l'intensità del campo magnetico, e D è il diametro del condotto. Questa relazione consente di determinare la caratteristica lineare dello strumento, espressa come:

$$Q = \frac{\pi D}{4B} V$$

dove Q rappresenta la portata.

3.1.1.3 *Idrometro a punta*

La misura dei livelli nelle analisi a moto permanente è stata ottenuta con l'idrometro a punta, strumento composto da un'asta rigida dotata di una scala graduata e una punta sulla parte inferiore. Questa asta è sostenuta da un supporto stabile che permette il suo movimento verticale tramite una cremagliera, azionata manualmente tramite una ruota dentata. Il supporto anteriore è dotato di un nonio, consentendo la lettura dell'indicazione con una precisione di 0,1 mm.

3.1.1.4 *Sonda acustica*

Le sonde acustiche rientrano nel gruppo di misuratori di livello detti limnometri elettronici, questi strumenti sono trasduttori elettronici di livello che presentano notevoli vantaggi rispetto agli strumenti tradizionali ovvero seguire fenomeni rapidamente variabili nel tempo, trasmettere facilmente a distanza la misura e che essendo la misura di natura elettrica questa si presta particolarmente a successive elaborazioni mediante elaboratore.

La caratteristica di questi strumenti è:

$$cT = 2h$$

dove c è la celerità di propagazione del suono in aria, circa 330 m/s, T è il tempo di trasmissione del segnale e h la distanza da misurare.

Lo svantaggio principale di questi strumenti è che il pelo libero da rilevare deve essere poco inclinato, il segnale riflesso infatti deve poter tornare alla ricevente e questo non accade per pendenze del pelo libero superiori a 4° .

3.1.1.5 *Acoustic Doppler Velocimeter*

La misura delle velocità è affidata all'ADV (*Acoustic Doppler Velocimeter*), un anemometro ad ultrasuoni il cui schema è riportato in Figura 4.

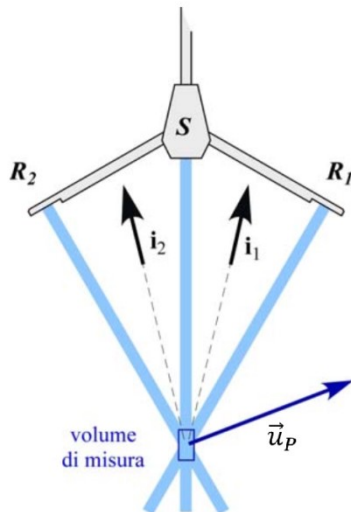


Figura 4 - Schema dell'anemometro ad ultrasuoni per la misura di due componenti della velocità

La testa della sonda è composta da un trasmettitore (S) centrale e da due ricevitori (R_i). Il volume di campionamento remoto si trova a circa 5 cm dalla punta del trasmettitore. Il volume di campionamento è pari a circa un cilindro d'acqua con un diametro di 6 mm e un'altezza di 9 mm.

La frequenza Doppler f_D può essere ricavata utilizzando l'equazione:

$$f_D = \frac{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\lambda_s} \vec{u}_P \cdot \vec{i}$$

dove \vec{i} è il versore che individua la direzione della bisettrice dell'angolo $S\hat{P}R$, \vec{u}_P è la velocità della particella P , λ_s la lunghezza dell'onda emessa.

Con riferimento alla generica coppia $S - R_i$ è possibile valutare la componente della velocità nella direzione individuata dal versore i_i . Essendo fisse e note le posizioni delle diverse stazioni, mediante semplici relazioni trigonometriche è possibile proiettare le componenti di velocità così determinate lungo prefissati assi ortogonali. Il dispositivo utilizzato (SonTek ADV) essendo dotato di due riceventi consente di ottenere le componenti della velocità in un piano individuato dalla sorgente e dalle due riceventi (Figura 5).

Un tipico sistema ADV dotato di N ricevitori registra simultaneamente $4 \cdot N$ valori per ogni campione; ossia per ogni ricevitore: una componente di velocità, un valore di intensità del segnale, un valore di segnale-rumore (SNR) e un valore di correlazione. I valori di intensità del segnale (SNR) e correlazione sono utilizzati principalmente per determinare la qualità e l'accuratezza dei dati di velocità, sebbene l'intensità del

segnale (intensità di retrodiffusione acustica) possa essere correlata alla concentrazione istantanea di sedimenti in sospensione con un'adeguata calibrazione.

Benché la velocimetria Doppler acustica sia diventata una tecnica popolare in laboratorio e nelle applicazioni sul campo, diversi ricercatori hanno sottolineato con precisione che i risultati del segnale ADV includono gli effetti combinati delle fluttuazioni di velocità turbolenta, del rumore Doppler, dell'aliasing del segnale, del taglio turbolento e di altri disturbi. Nei flussi turbolenti le misure di velocità ADV sono dunque una combinazione di questi fattori. Il segnale può essere ulteriormente influenzato negativamente dal taglio di velocità attraverso il volume di campionamento e la prossimità del confine. I picchi possono essere causati dall'aliasing del segnale Doppler e vengono chiamati "spikes".

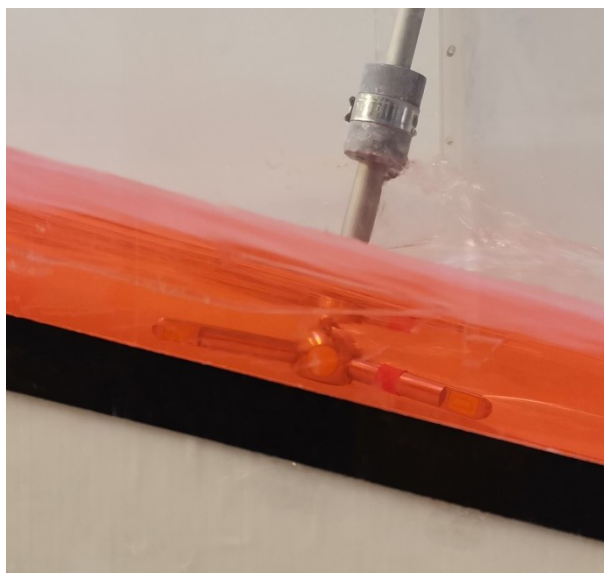


Figura 5 – Strumento di misurazione delle velocità (ADV) durante una delle prove sul piano inclinato

3.1.2 DESCRIZIONE DEL MODELLO SPERIMENTALE

Le due superfici, un piano inclinato e una superficie tridimensionale, utilizzate per gli esperimenti sono state realizzate in materiale plastico mediante l'utilizzo di una stampante 3D.

Si riportano di seguito le equazioni matematiche utilizzate per descrivere tali superfici, ricordando però che al fine di poterle inserire all'interno della canaletta queste sono state scalate al fine di ottenere una larghezza pari a 0,3 m.

Il piano inclinato (Figura 6), il quale è costruito a partire da un sottoinsieme rettangolare con le seguenti dimensioni: $AB = 10$ m, $AD = 1$ m, è caratterizzato dalla seguente funzione altezza:

$$z(x_1, x_2) = -\frac{1}{10}x_1 + 1$$

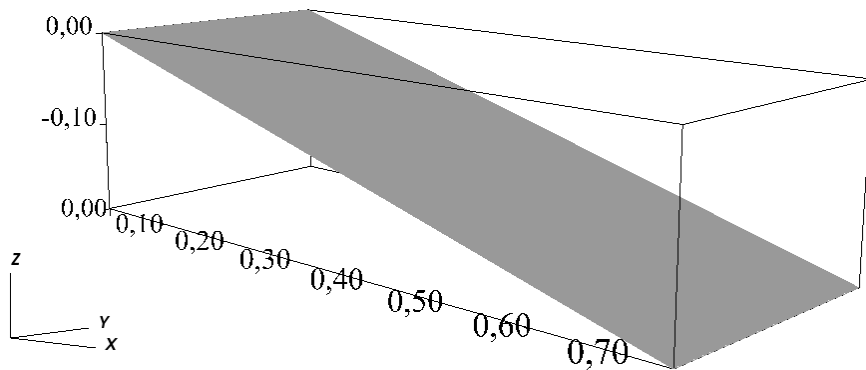


Figura 6 – Rappresentazione del piano inclinato

La superficie tridimensionale (Figura 7), costruita a partire da un sottoinsieme rettangolare con le seguenti dimensioni: $AB = 20$ m, $AD = 8$ m, $AF = 1,50$ m, è caratterizzata dalla seguente funzione altezza:

$$z(x_1, x_2) = -\frac{1}{500}x_1^3 - \frac{1}{100}x_1x_2^2$$

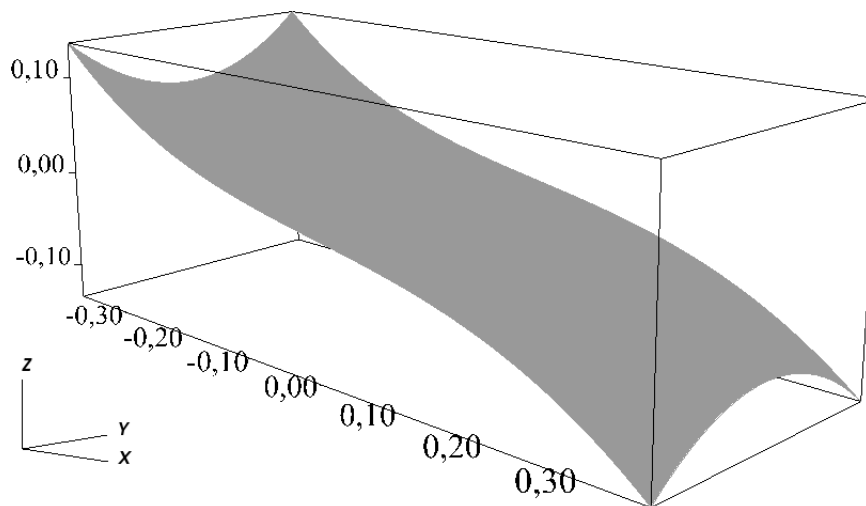


Figura 7 – Rappresentazione della superficie tridimensionale

Inizialmente è stato previsto il montaggio delle superfici nella canaletta didattica attraverso la realizzazione di due gargami da fissare, previa realizzare dei fori filettati, sulle pareti laterali il cui spessore è di 4 mm.

La tenuta all'acqua è stata garantita mediante l'applicazione di un nastro in EPDM adesivo della larghezza di 1 cm lungo tutto il perimetro delle superfici a contatto con la canaletta, questo ha permesso di rendere trascurabili le perdite da infiltrazione laterale e al fondo.

Successivamente ci si è resi conto che la sola pressione laterale di confinamento esercitata dalle pareti della canaletta era sufficiente ad impedire qualsiasi movimento delle superfici, rendendo superflua la realizzazione dei gargami.

Gli esperimenti sono stati eseguiti a moto permanente, per entrambe le superfici, e a moto vario per la sola superficie tridimensionale.

Gli esperimenti eseguiti a moto permanente consistono nel portare a regime il sistema con una prefissata portata, la quale viene misurata in continuazione dai misuratori elettromagnetici. Una volta raggiunta la condizione voluta si eseguono le misure di tirante mediante l'idrometro a punta e successivamente di velocità con l'utilizzo dell'ADV. L'attrezzatura è disposta come in Figura 8 per il piano inclinato e come in Figura 10 per la superficie tridimensionale.

Per quanto riguarda gli esperimenti a moto vario, sono state eseguite diverse simulazioni di dam break. Queste consistono nel rilasciare repentinamente un volume d'acqua accumulato a monte di una paratoia piana che viene rapidamente sollevata. La paratoia è situata in una sezione posta a contatto con la faccia di monte della superficie su cui è eseguita la prova e circa 3,5 m dallo sbocco di valle. Il fenomeno è seguito tramite 3 sonde acustiche posizionate lungo la canaletta (Figure Figura 11 e Figura 13) in corrispondenza dell'asse, per la misura dei livelli, poste alle distanze $x = -0,74$ m, $x = -0,035$ m ed $x = 0,345$ m dalla sezione in cui è presente la paratoia ($x = 0$ m). La misura delle velocità è invece ottenuta mediante l'ausilio dell'ADV posto alla distanza $x = 0,345$ m dalla sezione in cui è presente la paratoia.

3.1.3 SCHEMA DELL'APPARATO SPERIMENTALE

La disposizione dell'attrezzatura per le diverse prove è riprodotta schematicamente nelle seguenti figure.

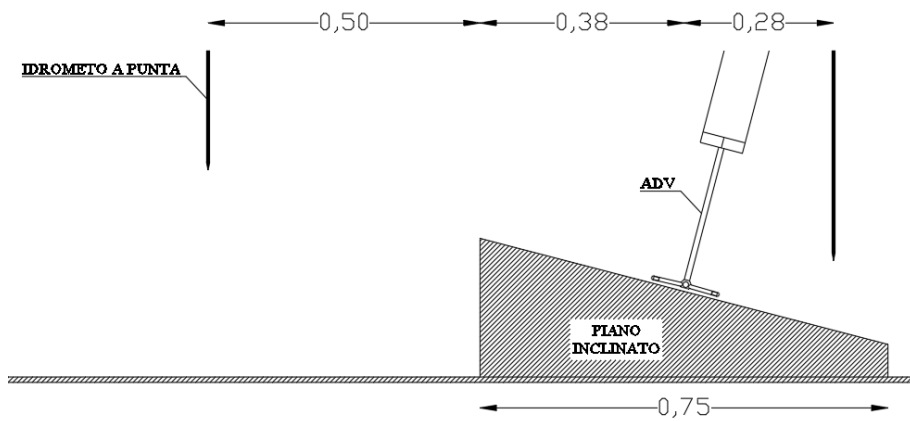


Figura 8 – Schema apparato sperimentale per moto stazionario su piano inclinato

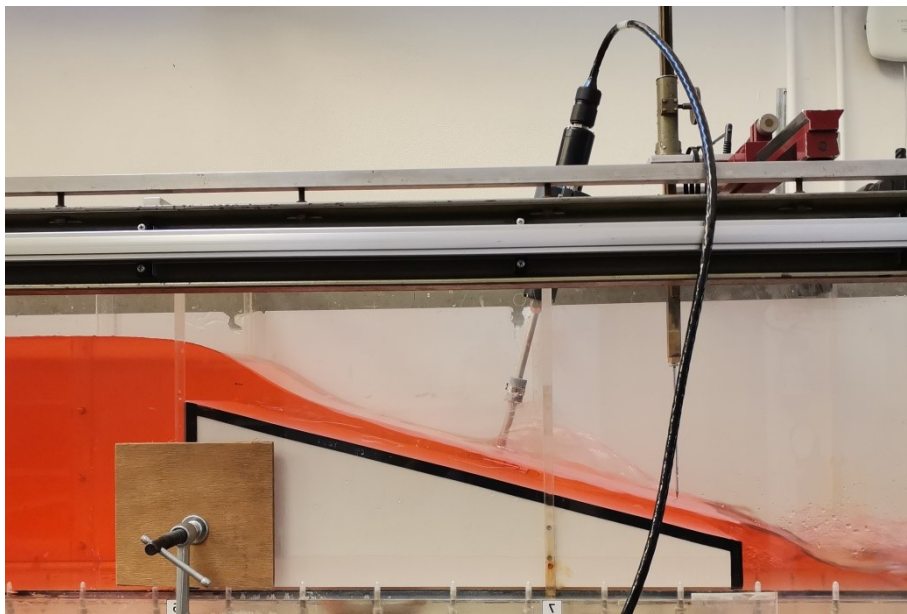


Figura 9 – Posizione dell'ADV per la misura delle velocità e dell'idrometro a punta per la misura dei tiranti al di sopra del piano inclinato

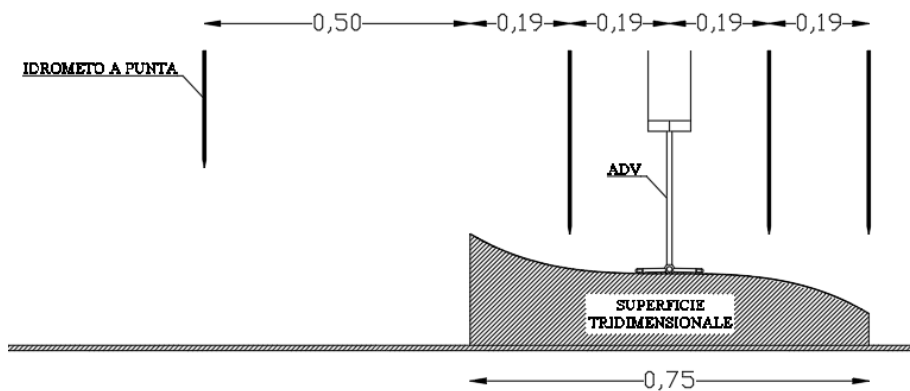


Figura 10 - Schema apparato sperimentale per moto stazionario su superficie tridimensionale

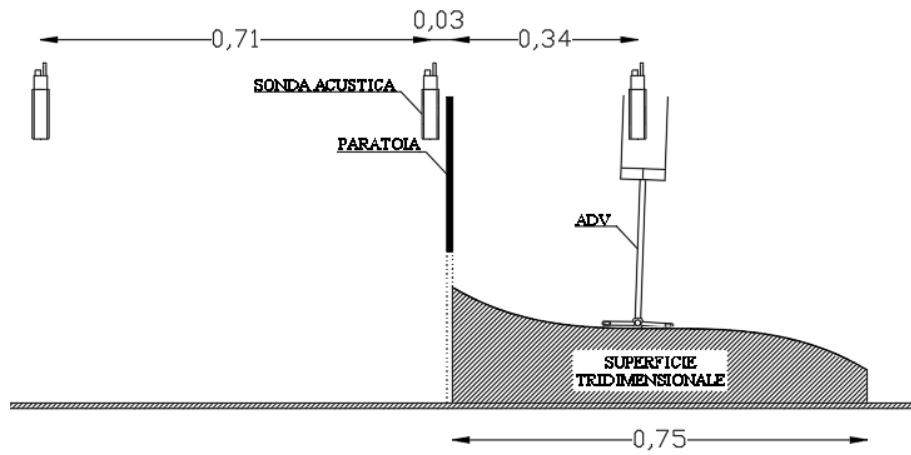


Figura 11 - Schema apparato sperimentale per moto vario su superficie tridimensionale

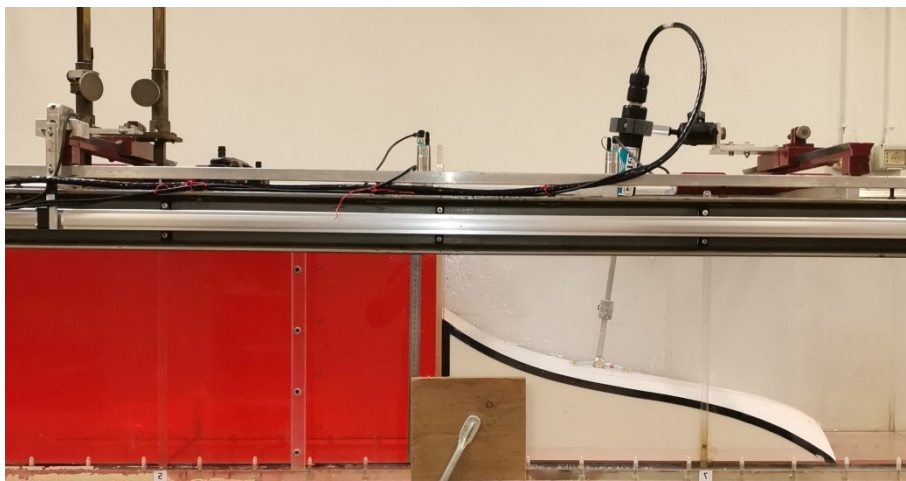


Figura 12 – Posizione dell'ADV per la misura delle velocità al di sopra della superficie tridimensionale

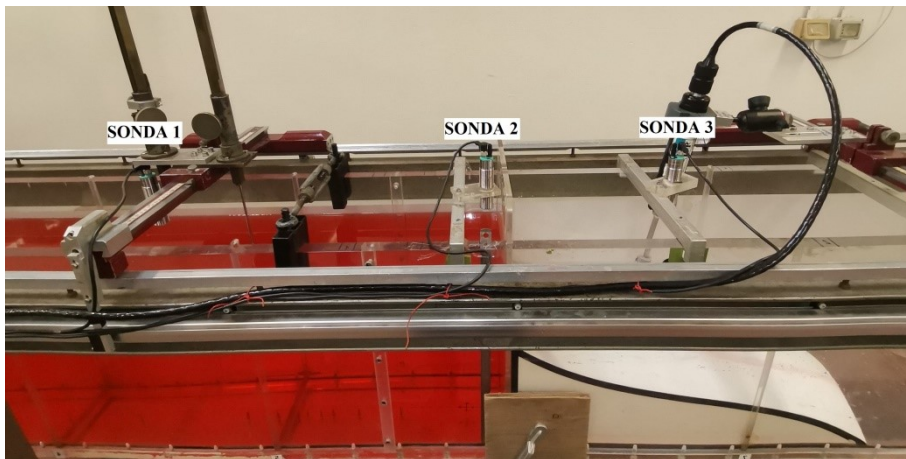


Figura 13 - Posizione delle sonde acustiche per la misura in continuo dei tiranti al di sopra della superficie tridimensionale

3.1.4 DATI SPERIMENTALI RACCOLTI A MOTO STAZIONARIO

Gli esperimenti svolti in laboratorio a moto permanente hanno consentito di raccogliere i dati dei tiranti e delle velocità, mediate nel tempo, per entrambe le superfici. Questi sono riportati nelle tabelle seguenti dopo aver svolto preliminarmente un'operazione di media sulla velocità.

N°	Carico idraulico di monte [m]	Portata misurata [m ³ /s]	Tirante misurato [m]	Velocità misurata [m/s]
Numero identificativo della sezione			1	1
Distanza progressiva della sezione [m]			0.65	0.38
1	0.2866	0.0025	0.0062	-
2	0.2940	0.0050	0.0107	-
3	0.3164	0.0075	0.0143	-
4	0.3289	0.0100	0.0189	1.2481
5	0.3398	0.0125	0.0233	1.2104
6	0.3491	0.0150	0.0273	1.1400
7	0.3588	0.0175	0.0314	1.3750
8	0.3679	0.0200	0.0345	1.4341
9	0.3764	0.0225	0.0385	1.4825
10	0.3853	0.0250	0.0419	1.5228
11	0.3931	0.0275	0.0460	1.5370
12	0.4003	0.0300	0.0488	1.5293
13	0.4081	0.0325	0.0533	1.5234
14	0.4160	0.0350	0.0564	1.5881

Tabella 1 – Dati di tirante e velocità ottenuti dalle prove di laboratorio con il piano inclinato

Il tirante e la velocità nel piano inclinato sono determinati nella sezione 1 posta a 10 cm a monte rispetto al bordo di valle della superficie stessa.

Con carico idraulico di monte si intende il livello misurato a partire dal piano di riferimento, che per entrambe le superfici è il fondo della canaletta, in una sezione posta sufficientemente a monte da non risentire dell'effetto localizzato di chiamata.

Per le portate più basse non è stato possibile determinare i valori di velocità in quanto lo strumento necessita che gli elementi di trasmissione e ricezione del segnale siano completamente immersi.

N°	Carico idraulico monte [m]	Portata misurata [m ³ /s]	Tirante misurato in punti significativi [m]							Velocità misurata [m/s]	
			1	2	3	4	5	6	7		8
Numero identificativo della sezione			1	2	3	4	5	6	7	8	3
Distanza progressiva della sezione [m]			0.1875	0.1875	0.3750	0.3750	0.5625	0.5625	0.7500	0.7500	0.3750
1	0.2748	0.0050	0.0255	0.0000	0.0145	0.0135	0.0135	0.0233	0.0072	0.0343	-
2	0.2877	0.0075	0.0292	0.0033	0.0195	0.0238	0.0138	0.0288	0.0114	0.0404	1.0708
3	0.2996	0.0100	0.0368	0.0132	0.0222	0.0307	0.0153	0.0322	0.0126	0.0441	1.1192
4	0.3098	0.0125	0.0454	0.0212	0.0245	0.0357	0.0192	0.0368	0.0168	0.0489	1.1542
5	0.3199	0.0150	0.0513	0.0284	0.0305	0.0395	0.0230	0.0406	0.0235	0.0516	1.1540
6	0.3286	0.0175	0.0600	0.0350	0.0354	0.0448	0.0269	0.0470	0.0281	0.0591	1.2386
7	0.3375	0.0200	0.0682	0.0422	0.0406	0.0509	0.0311	0.0504	0.0320	0.0623	1.0952
8	0.3462	0.0225	0.0773	0.0490	0.0449	0.0552	0.0370	0.0546	0.0348	0.0688	1.2998
9	0.3543	0.0250	0.0863	0.0551	0.0512	0.0586	0.0404	0.0602	0.0400	0.0715	1.2894
10	0.3626	0.0275	0.0961	0.0639	0.0619	0.0636	0.0462	0.0649	0.0421	0.0797	1.3316
11	0.3703	0.0300	0.1053	0.0742	0.0714	0.0657	0.0536	0.0688	0.0486	0.0837	1.1165
12	0.3780	0.0325	0.1160	0.0838	0.0745	0.0695	0.0594	0.0732	0.0513	0.0882	1.3406
13	0.3852	0.0350	0.1219	0.0945	0.0764	0.0727	0.0628	0.0761	0.0537	0.0921	1.3043

Tabella 2 - Dati di tirante e velocità ottenuti dalle prove di laboratorio con la superficie tridimensionale

Con riferimento alle misure di tirante eseguite sulla superficie tridimensionale, si vuole evidenziare la grande incertezza relativa in particolare alle alte portate, questo è dovuto alla non perfetta stazionarietà del moto causata dalla nascita di fronti d'onda non trascurabili, dall'attrito con le pareti della canaletta e all'inglobamento di aria che rende il pelo libero increspato.

3.1.5 STIMA DEL COEFFICIENTE DI RESISTENZA

La stima delle dissipazioni continue di energia (j) legate al moto di una corrente liquida all'interno di un dominio generico viene tipicamente fatta utilizzando le formule di moto uniforme quali, ad esempio, la formula di Darcy-Weisbach (3.1), la formula di Gauckler-Strickler (3.2) o la formula di Chézy (3.3):

$$j = \frac{f}{4R_H} \cdot \frac{u^2}{2g} \quad (3.1)$$

$$j = \frac{u^2}{K_S^2 \cdot R_H^{4/3}} \quad (3.2)$$

$$j = \frac{u^2}{\chi^2 \cdot R_H} \quad (3.3)$$

dove R_H è il raggio idraulico (rapporto tra l'area della sezione liquida e il perimetro bagnato), u la velocità media nella sezione, f il coefficiente di resistenza di Darcy, K_S il coefficiente di resistenza secondo Strickler e χ il coefficiente di resistenza secondo Chézy.

Le formule proposte da Gauckler-Strickler e Chézy sono interamente basate su dati sperimentali, derivanti principalmente da esperimenti svolti in canali a pelo libero. Per entrambe le formule i coefficienti di resistenza risultano essere dimensionali e dipendono esclusivamente dalle caratteristiche di rugosità della sezione trasversale. Questo implica che non tengono conto delle caratteristiche idrauliche del moto.

Diversamente, la formula di Darcy-Weisbach è stata dedotta teoricamente tramite l'applicazione del teorema di Buckingham oppure dall'integrazione delle equazioni di

Navier-Stokes per condotti di sezioni circolari, e successivamente è stata validata sperimentalmente attraverso gli esperimenti di Nikuradse. Essa è largamente impiegata per descrivere il flusso nelle condotte in pressione. Il coefficiente di resistenza f , in questo caso, è determinato tramite il diagramma di Moody o attraverso la formula di Colebrook-White,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{f}} + \frac{e_s/4R_H}{3,71} \right)$$

ed è influenzato dal numero di Reynolds del flusso e dalla scabrezza relativa equivalente (e.g. $e_s/4R_H$, con e_s la scabrezza equivalente in sabbia di Nikuradse).

Questo significa che f dipende sia dalla rugosità delle pareti del condotto che dalle caratteristiche idrodinamiche associate al numero di Reynolds.

La presunta contraddizione tra i coefficienti di resistenza presenti nelle diverse formule (Gauckler-Strickler e Chézy dipendono solo dalla rugosità delle pareti e Darcy-Weisbach dipende anche dalle caratteristiche del flusso) è dovuta proprio all'origine diversa delle formule stesse. La formula di Gauckler-Strickler, in particolare, è stata sviluppata per condizioni di flusso turbolento completamente sviluppato e in regime di parete idraulicamente scabra, condizioni che caratterizzano la quasi totalità dei moti a pelo libero. Analizzando attentamente la dipendenza del coefficiente di resistenza di Darcy (f) dal numero di Reynolds e dalla scabrezza relativa equivalente (vedi diagramma di Moody), emerge come anche f dipenda principalmente dalla rugosità delle pareti in situazioni di flusso turbolento in regime di parete idraulicamente scabra, simile a quanto accade per K_S .

Questo implica che la formula di Gauckler-Strickler dovrebbe essere usata rigorosamente solo per flussi turbolenti completamente sviluppati.

Ad ogni modo questa considerazione si applica solamente nel senso stretto dei coefficienti di resistenza, ovvero nel loro ruolo di misurare le perdite di energia causate dall'attrito con la superficie che delimita la sezione attraversata dal flusso (ad esempio, un condotto o una sezione di un corso d'acqua). Nella pratica, il valore del coefficiente di resistenza di Strickler assume un significato più ampio che considera anche fenomeni che producono dissipazioni ad una scala inferiore rispetto a quella presa in considerazione esplicitamente per il calcolo o legati a processi fisici non esplici-

tamente descritti. Questi fenomeni includono resistenze causate da oggetti nell'alveo, vegetazione, repentini cambi di sezione o flussi secondari in curva.

Tenendo inoltre presente che le superfici su cui sono stati eseguiti gli esperimenti non sono sufficientemente lunghe per garantire la formazione al di sopra di esse del moto uniforme, non è possibile applicare rigorosamente le formulazioni viste precedentemente. Tutti i modelli utilizzano la formula di Gauckler-Strickler per descrivere la resistenza del flusso sul fondo:

$$\tau = \frac{1}{ks^2} \frac{u}{Rh^{4/3}}$$

con un coefficiente di resistenza K_s che varia a seconda del modello utilizzato.

Quindi si è opportunamente scelto di calibrare le superfici secondo questo parametro, comunque consci del fatto che il moto che si sviluppa al di sopra delle superfici, in qualsiasi condizione di moto, non è mai di flusso turbolento pienamente sviluppato, si ricade infatti sempre nel regime di transizione come mostrato nei diagrammi di Moody in Figura 14 e Figura 15.

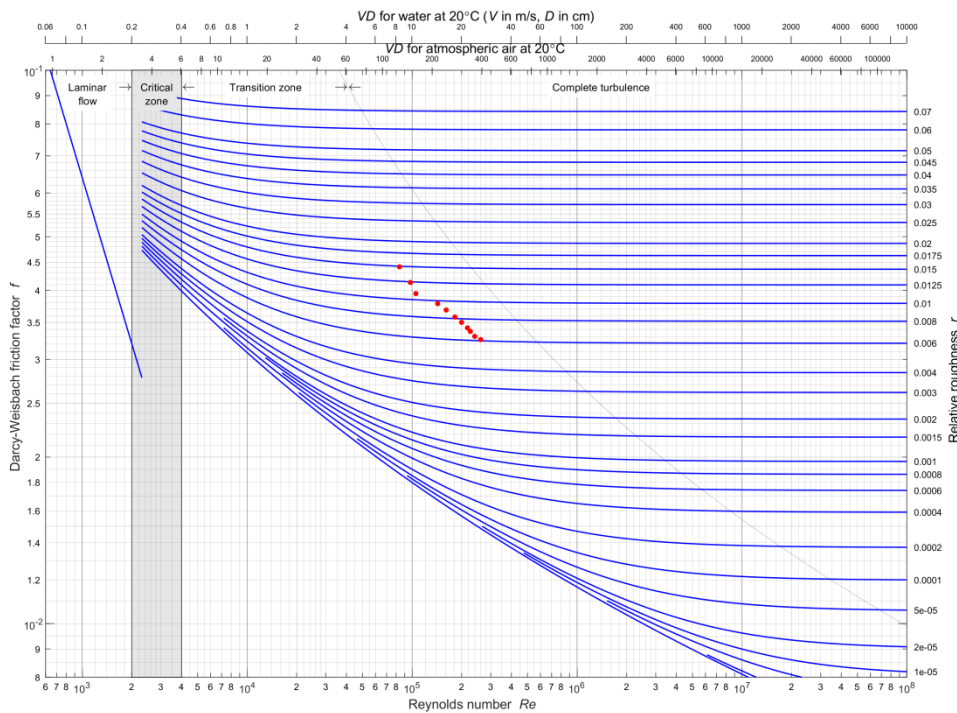


Figura 14 – Diagramma di Moody per i dati di ottenuti dalle prove di laboratorio con il piano inclinato. Dal confronto del numero di Reynolds e della scabrezza relativa nel diagramma di Moody per i diversi regimi di portata analizzati si evince che il moto è in regime di transizione

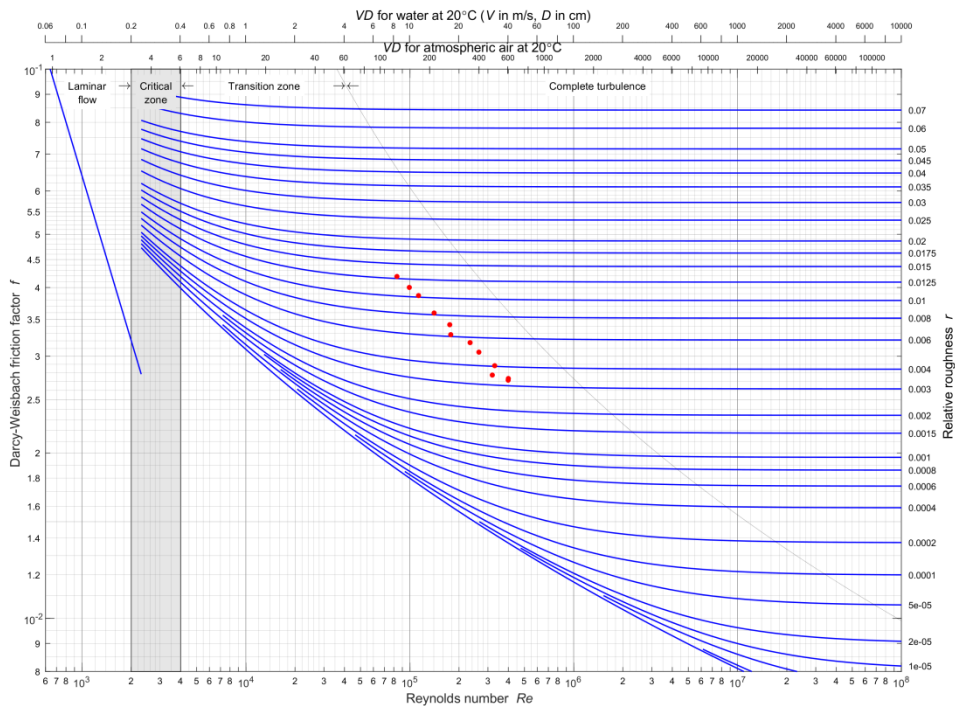


Figura 15 - Diagramma di Moody per i dati di ottenuti dalle prove di laboratorio con la superficie tridimensionale. Dal confronto del numero di Reynolds e della scabrezza relativa nel diagramma di Moody per i diversi regimi di portata analizzati si evince che il moto è in regime di transizione

Al fine di determinare un valore univoco del parametro K_S , indipendentemente dal numero di Reynolds della corrente, che sia valido per entrambe le superfici fisiche utilizzate in laboratorio, in quanto realizzate con il medesimo materiale e lo stesso procedimento, dalla scala delle portate ottenuta dai dati raccolti si cerca la migliore interpolazione del coefficiente di resistenza mediante l'utilizzo dell'equazione di Gauckler-Strickler.

Sostanzialmente si procede eseguendo una regressione polinomiale dei dati sperimentali mediante una curva la cui equazione è proprio quella di Gauckler-Strickler.

Si ricorda che l'utilizzo di un valore costante per il coefficiente di resistenza è valido solo se si è in campo turbolento pienamente sviluppato, questa condizione però nelle simulazioni in laboratorio, a differenza di quanto accade realmente in natura, è difficilmente ottenibile poiché tiranti e velocità sono piuttosto bassi.

L'utilizzo della formulazione di Gauckler-Strickler inoltre presuppone che il moto instauratosi sulla superficie sia uniforme, condizione che però come già accennato in precedenza non si realizza, poiché l'effetto del profilo di corrente instauratosi non si

esaurisce nella breve lunghezza del piano inclinato, ciò nonostante è stato possibile ottenere una buona interpolazione dei dati.

Il valore del coefficiente ottimale che si ottiene dall'analisi risulta essere $36.8 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ (Figura 16).

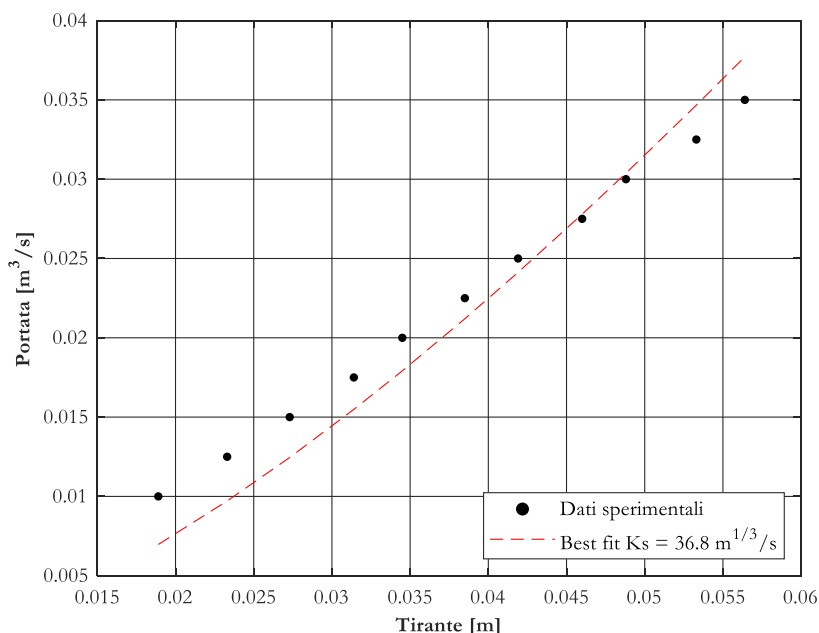


Figura 16 – Scala delle portate per i dati raccolti dalle prove di laboratorio con il piano inclinato e interpolazione del coefficiente di resistenza mediante l'utilizzo dell'equazione di Gauckler-Strickler

Il valore del coefficiente K_s da utilizzare invece nei diversi modelli numerici è ottenuto mediante un'analisi di sensibilità eseguita su ciascuno di essi, come descritto nel prossimo capitolo.

3.2 MODELLI NUMERICI

I modelli numerici messi a confronto si basano sulle equazioni esposte nel capitolo 2.

Essi sono:

1. Modello ISWE ai volumi finiti, ottenuto dall'integrazione sulla normale delle equazioni di Navier-Stokes sfruttando un sistema di coordinate curvilinee locale;
2. Modello 2DVF ai volumi finiti, ottenuto dalle equazioni di Navier-Stokes integrate sulla verticale;

3. Modello IDW agli elementi finiti, ottenuto dalla semplificazione dei termini inerziali e mediante integrazione sulla normale.

3.2.1 GRIGLIA DI CALCOLO

Le equazioni della fluidodinamica non sono in genere risolvibili analiticamente in forma chiusa nel loro dominio di definizione. Pertanto per l'analisi del flusso dei fluidi coinvolti in un dato processo ci si avvale di tecniche di soluzione numerica, quali: volumi finiti, elementi finiti o differenze finite. L'idea che sta alla base di queste tecniche consiste nel suddividere il dominio iniziale in sottodomini più piccoli e di geometria più semplice, di risolvere le equazioni all'interno di ciascun sottodominio e di raccordare le soluzioni ai bordi in maniera tale da rispettare le condizioni iniziali fissate sul bordo del dominio originale. Con il termine mesh si indica l'insieme dei sottodomini (o celle) in cui è stato suddiviso il dominio iniziale. La scomposizione della geometria originaria può avvenire secondo vari criteri che dipendono dal particolare caso che si vuole studiare.

Durante le analisi condotte si è riscontrato che nel modello numerico 2DVF l'utilizzo di una mesh quattro volte più fitta, non comporta sostanziali differenze nei risultati ottenuti dunque per limitare l'uso di risorse computazionali si è mantenuta la mesh iniziale per tutte le analisi.

Il reticolo grafico utilizzato per descrivere le superfici nei modelli matematici utilizzati rimane dunque il medesimo, questo consente un migliore confronto dei risultati.

La mesh determina il passo di integrazione spaziale per la soluzione delle equazioni discretizzate che descrivono il comportamento del sistema.

Una mesh di buona qualità è essenziale per ottenere risultati affidabili da parte del solutore.

La discretizzazione mediante elementi finiti tipicamente si avvale di figure geometriche bidimensionali quali: triangoli e poligoni. Normalmente si utilizzano mesh triangolari, questo perché è facile creare un quadrilatero i cui vertici non giacciono tutti sullo stesso piano, mentre c'è sempre un piano passante per tre vertici. Inoltre, lavorare esclusivamente con *triangle meshes* semplifica la memorizzazione, e riduce il numero degli algoritmi.

Per quanto riguarda i volumi finiti, invece, sono normalmente utilizzati prismi, tetraedri, esaedri o piramidi.

Una mesh può assumere diverse configurazioni a seconda della disposizione delle celle, si possono distinguere due categorie principali, le mesh strutturate e quelle non strutturate. Le prime sono caratterizzate da celle ordinate e facilmente numerabili, poco adatte però a geometrie complesse e curvilinee. Nelle seconde invece non esiste alcun ordine tra le celle il che le rende adatte alla discretizzazione di geometrie più complesse.

Nei modelli in esame è stata adottata una mesh non strutturata, ottenuta mediante la triangolazione di Delaunay, che prende il nome dal matematico sovietico Boris Nikolaevič Delone. Questo metodo prevede che dato un gruppo di punti P su un piano, la triangolazione è tale che nessun punto appartenente a P sia all'interno del circuncerchio di ogni triangolo. Questa triangolazione dunque massimizza il più piccolo angolo di ciascun triangolo nella triangolazione.

Si riporta quindi la mesh utilizzata per i diversi modelli numerici, facendo una distinzione per quella utilizzata nel modello 2DVF nella quale è stata aggiunta a monte una porzione di mesh che simula la canaletta utilizzata negli esperimenti.

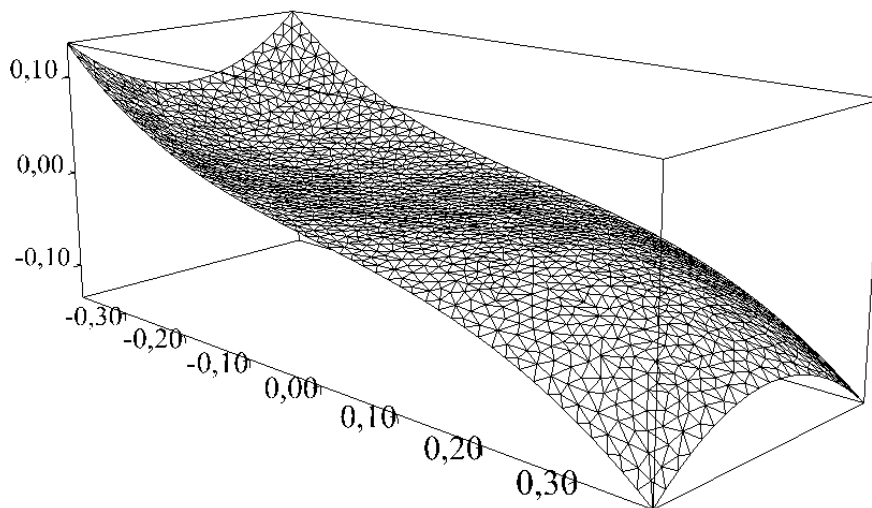


Figura 17 – Mesh relativa alla superficie tridimensionale utilizzata nei nuovi modelli numerici ISWE e IDW

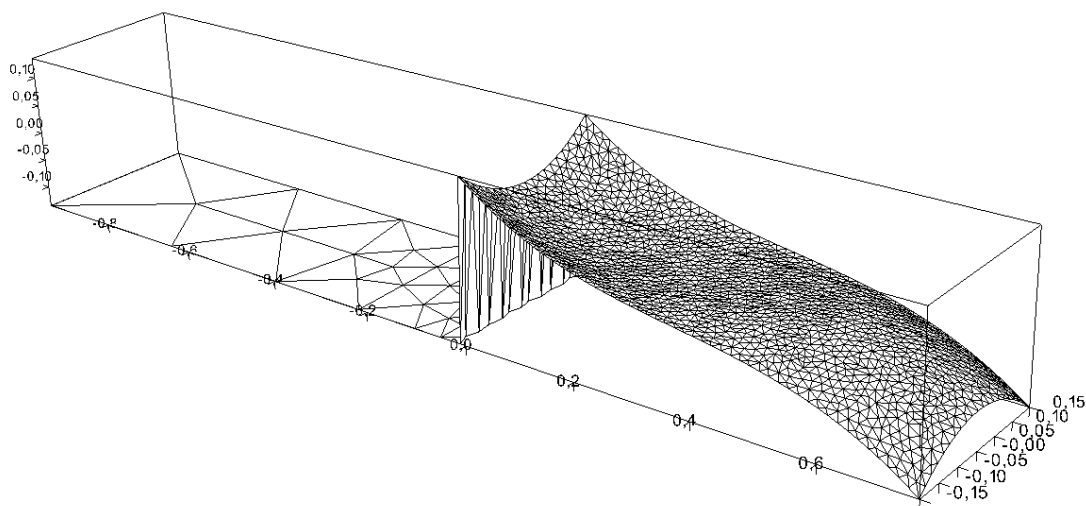


Figura 18 – Mesh relativa alla superficie tridimensionale utilizzata nel modello numerico 2DVF. È possibile notare la presenza di un tratto a monte della superficie da esaminare che simula il fondo della canaletta

3.2.2 DESCRIZIONE DEI MODELLI NUMERICI

Nei casi in cui si instaurano condizioni idrauliche caratterizzate da valori elevati del numero di Froude, come accade per le correnti supercritiche, oppure fenomeni di transizione attraverso la condizione critica, si rende necessario l'impiego di modelli ai volumi finiti.

3.2.2.1 Il modello matematico ISWE

La derivazione delle intrinsic SWE parte dalla formulazione delle equazioni di Navier-Stokes espresse nel sistema di coordinate curvilinee locali (LCS). In seguito, viene eseguita l'integrazione in profondità lungo la direzione localmente normale alla superficie del terreno che si estende tra il fondo e la superficie libera.

Assumiamo che il fondo sia inerodibile e quindi mantenga una geometria fissa, mentre la superficie fluida è funzione del tempo. Le condizioni cinematiche postulano che la superficie libera si muova con il fluido e che il fondo sia impermeabile.

La natura intrinseca delle SWE sviluppate consente la formulazione di una discretizzazione intrinseca ai volumi finiti (FV), con alcune complicazioni dovute alla presenza di flussi non autonomi e termini sorgente variabili nello spazio. Rossmanith et al. [10] sono stati tra i primi a studiare la soluzione numerica di un sistema iperbolico su una varietà (spazio topologico che localmente è simile a uno spazio topologico ben conosciuto, ma che globalmente può avere proprietà geometriche differenti) ge-

nerale mediante uno schema FV definito su una griglia quadrilatera. La discretizzazione delle grandezze geometriche basate sulle forme fondamentali della superficie mediante maglie quadrilatere si rivela però non compatibile. Per questo motivo nel modello sono state utilizzate griglie triangolari per ricavare un metodo FV del primo ordine di Godunov.

Si presenta ora lo schema completo ai volumi finiti in forma discreta basato sulla geometria espressa nel sistema di riferimento LCS (2.9). Si utilizza uno schema temporale esplicito di Eulero del primo ordine. Per mantenere lo schema equilibrato, si utilizza un adattamento dell'approccio proposto da Audusse et al. [11] e si includono i termini sorgente nel flusso. Quindi, le equazioni ai FV, per ogni elemento T_i , sono definite per ciascun istante come:

$$\mathbb{U}_i^{k+1} = \mathbb{U}_i^k - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{j=1}^{N_{\sigma(i)}} l_{ij} [\mathbb{F}_{ij}(\mathbb{U}_i^k, \mathbb{U}_j^k) + \mathbb{S}_{ij}(\mathbb{U}_i^k, \mathbb{U}_j^k)]$$

in cui gli apici k e $k + 1$ caratterizzano le grandezze all'istante attuale e al passo di calcolo successivo, A_i è l'area della cella i -esima e Δt è il passo di integrazione temporale. \mathbb{F}_{ij} è l'approssimazione numerica del flusso normale mediato sugli edge σ_{ij} . l_{ij} rappresenta la lunghezza del generico edge, mentre \mathbb{S}_{ij} l'approssimazione numerica della funzione sorgente.

Proprietà del modello:

Il modello ISWE è simile al modello proposto da Bouchut e Westdickenberg [7]. Il miglioramento più significativo della nuova formulazione è che nel termine sorgente \mathbb{S} compaiono solo termini geometrici (e non derivate della η) e che la forma completa della divergenza è mantenuta per le quantità conservate. Oltre a garantire una forma più compatta delle equazioni, la formulazione consente lo sviluppo di una discretizzazione completamente intrinseca.

Il modello proposto presenta alcune interessanti proprietà matematiche fondamentali, ovvero che è irrotazionale, ammette un'equazione dell'energia ed è ben bilanciato.

È possibile utilizzare due diversi tipi di risolutori del problema di Riemann approssimati. Il primo è un'estensione al caso curvilineo del solutore di Riemann esatto descritto in Toro [12]. Il secondo è il classico HLL e la sua variante HLLC [13] [14]. Nei casi in esame, per semplicità, viene sempre utilizzato il solutore Riemann ap-

prossimato HLL invece del risolutore esatto, poiché tutti i Riemann solver danno comunque buoni risultati.

L'integrazione temporale è effettuata mediante uno schema esplicito, è necessario dunque che venga rispettato il criterio di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) per ottenere la convergenza della soluzione.

In fluidodinamica numerica, la condizione di Courant-Friedrichs-Lewy, spesso abbreviata con CFL ed il cui nome è dovuto a Richard Courant, Kurt Friedrichs e Hans Lewy, è una condizione necessaria per la convergenza numerica della soluzione di alcune equazioni alle derivate parziali (di solito, equazioni di tipo iperbolico) ricavata nel 1928.

Questa condizione è sfruttata nell'impiego di schemi numerici espliciti temporali. Come conseguenza, il passo temporale deve essere più piccolo di un certo intervallo di tempo, altrimenti la simulazione produrrà risultati ampiamente scorretti.

La condizione di CFL è comunemente imposta per quei termini delle equazioni alle derivate parziali che rappresentano la convezione (o meglio, per i termini advettivi, relativi, cioè, ai moti orizzontali o prevalentemente orizzontali).

Operativamente, il passo temporale viene stimato ad ogni passo di calcolo in modo tale che una piccola perturbazione gravitazionale non possa compiere in un passo temporale uno spostamento maggiore rispetto al raggio del cerchio inscritto in ognuno degli elementi di calcolo. Di conseguenza, all'aumentare dei tiranti idraulici e delle velocità della corrente, il passo temporale di calcolo si riduce sensibilmente, comportando un aumento dei tempi di calcolo.

Per un caso unidimensionale la condizione di CFL è scritta come:

$$C = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} < C_{max}$$

dove u rappresenta la velocità di flusso, Δt è l'intervallo temporale e Δx è l'intervallo spaziale. La costante C_{max} dipende dalla tipologia di equazione che deve essere risolta e dal tipo di schema numerico utilizzato per la soluzione (esplicito o implicito). Se si utilizza uno schema esplicito allora C_{max} è dell'ordine di 1. Gli schemi impliciti invece sono meno sensibili alle instabilità numeriche, dunque sono tollerati valori di C_{max} più elevati.

Il numero adimensionale C è chiamato numero di Courant.

In un caso bidimensionale la condizione di CFL può scriversi come:

$$C = \frac{\|u\| \cdot \Delta t}{h} < C_{max}$$

dove h è il parametro della mesh.

In questo nuovo solutore non è ancora presente la possibilità di sfruttare un passo temporale adattivo, al variare del rapporto di CFL locale. Per questo motivo si considera una mesh con elementi caratterizzati da area abbastanza uniforme.

3.2.2.2 Il modello matematico 2DVF

Il modello 2DVF si basa sul sistema di equazioni (2.7), il quale viene mediato su ciascun volume finito, costituito da un prisma a base triangolare, che discretizza. Il dominio è riscritto, a seguito dell'applicazione del teorema di Gauss, nella seguente forma discreta:

$$\mathbb{U}^{k+1} = \mathbb{U}^k - \frac{\Delta t}{A} \sum_{j=1,3} (\mathbb{F}_j^* \cdot n_j) l_j + \frac{\Delta t}{A} \left\{ \int_A \mathbb{S} dA - g \int_A Y(\mathbb{K} \cdot \mathbb{U}) dA \right\}$$

in cui gli apici k e $k + 1$ caratterizzano le grandezze all'istante attuale e al passo di calcolo successivo, A è l'area di base dell'elemento triangolare e Δt è il passo di integrazione temporale. Il flusso attraverso il contorno del generico elemento viene scomposto nella somma dei flussi \mathbb{F} attraverso i tre lati dell'elemento stesso di lunghezza l_j e normale uscente n_j .

Al flusso $\mathbb{F} = (\mathbb{E}, \mathbb{G})$ viene sostituito il cosiddetto flusso numerico \mathbb{F}^* la cui espressione dipende dal particolare solutore del problema di Riemann. Nel caso in esame è stato scelto il risolutore esatto del problema di Riemann proposto e implementato da Toro [12]. A fronte di un onere computazionale leggermente maggiore rispetto ai più diffusi solutori approssimati (es. HLL, HLLC), il solutore esatto offre una precisione maggiore e tratta correttamente il caso di fondo parzialmente asciutto.

Caratteristiche generali del modello:

Nei codici di calcolo ai volumi finiti la corretta valutazione dei termini sorgente (pendenza del fondo e dissipazioni di energia) risulta molto importante. In particolare, la corretta schematizzazione dei termini dovuti alla pendenza del fondo è necessaria per ottenere uno schema bilanciato. Nel caso di fluido in quiete, le forze di pressione che agiscono sui lati di ogni singolo volume finito devono essere esattamente bilanciate dalla forza dovuta alla pendenza del fondo: se questo bilanciamento è ga-

rantito, il fluido in quiete rimane fermo (si tratta della cosiddetta C-property), altrimenti nascono correnti anomale che possono alterare significativamente il calcolo del campo di moto.

Le dissipazioni di energia sono valutate, per via semi-implicita, in funzione delle portate specifiche all'istante di calcolo successivo per ottenere una maggiore stabilità numerica.

Poiché l'integrazione temporale è effettuata mediante uno schema esplicito al primo ordine di accuratezza, è necessario che venga rispettato il criterio di CFL per ottenere la convergenza della soluzione. La condizione più sfavorevole per il calcolo del passo temporale è normalmente imposta dagli elementi di calcolo di piccole dimensioni, mentre sulla restante parte del dominio di calcolo le equazioni potrebbero essere integrate con un passo temporale molto maggiore. Per ridurre i tempi di calcolo, senza compromettere la correttezza e l'accuratezza della soluzione, è stato dunque implementato un algoritmo adattivo che consente di risolvere con diversi passi temporali le medesime equazioni, a seconda del rapporto di CFL locale, proposto in Sanders [15]. La descrizione dell'andamento spaziale delle quote del fondo è accurata al secondo ordine: note le quote del fondo dei nodi del reticolo di calcolo, all'interno di ogni elemento triangolare il fondo assume andamento lineare (Begnudelli and Sanders, [16]).

Le variabili sono considerate costanti all'interno di ogni singolo volume finito (accuratezza spaziale del primo ordine), avendo però cura di operare l'extrapolazione ai lati di livelli e portate specifiche nel caso di corrente lenta, tirante e velocità nel caso di corrente rapida, in funzione del numero di Froude della corrente in ogni singolo volume finito (Begnudelli et al., [17]).

Studi riportati in letteratura hanno mostrato come, nella simulazione di propagazione di piene, questo tipo di schemi adattivi al primo ordine offra la migliore combinazione in termini di robustezza, efficienza e accuratezza (Begnudelli et al., [17]).

3.2.2.3 *Il modello matematico IDW*

Il modello dell'onda diffusiva intrinseca, più propriamente detto approssimazione non inerziale, è un solutore agli elementi finiti, ottenuto tramite la semplificazione della dipendenza dal tempo e dei termini non lineari (2.10).

Ricorrere ad un solutore agli elementi finiti si rende necessario non essendo ancora stato sviluppato un omologo solutore per le stesse equazioni ai volumi finiti, tuttavia questa limitazione non ne preclude la possibilità di descrivere il fenomeno analizzato.

È doveroso ricordare però che le semplificazioni introdotte in questo modello numerico, in particolare l'aver trascurato i termini cinetici, comporta un non trascurabile errore anche dal punto di vista teorico nel caso di correnti supercritiche. Sono infatti i termini cinetici, i quali discendendo dall'equazione di Bernoulli, quelli di maggior rilevanza nel campo delle correnti supercritiche. Le correnti supercritiche per loro natura infatti non sono diffusive.

Il presente modello matematico è il solo, tra quelli esaminati che adottano l'approssimazione diffusiva, quali ad esempio 2DEF ed HEC-RAS, a permettere una soluzione numerica stabile anche in caso di correnti supercritiche e pertanto si è ritenuto opportuno eseguire un confronto al fine di quantificare gli errori commessi.

3.2.3 CONDIZIONI AL CONTORNO

Le condizioni al contorno utilizzate nelle simulazioni a moto permanente si differenziano a seconda del modello numerico preso in esame.

3.2.3.1 *Condizioni al contorno di monte*

Nel modello IDW la condizione al contorno consiste nell'imporre il tirante sui nodi, nel modello ISWE si impone invece il tirante sugli edge delle celle, nel modello 2DVF infine, essendo caratterizzato da una mesh in cui è stato introdotto un breve tratto piano a monte che simula il modello sperimentale (Figura 18), si impone la sola portata sugli edge.

3.2.3.2 *Condizioni al contorno di valle*

Nel modello IDW è stata utilizzata la condizione di *normal depth*, che rappresenta la profondità alla quale si verifica il moto uniforme. Nel modello ISWE viene imposta invece una condizione di deflusso libero, anche nota in letteratura con il nome di *non-reflecting boundary condition*, Toro [12].

Per quanto riguarda il modello 2DVF invece la condizione assegnata è detta *radiation*, la quale è anch'essa una condizione di deflusso libero.

3.2.3.3 Condizioni al contorno sulle pareti

Presenti solo nei modelli ai volumi finiti, sono note con il nome di *solid reflective boundaries* Toro [12]. Queste sono ottenute imponendo:

$$\eta^{out} = \eta^{in}$$

$$\vec{q}^{out} = \vec{q}^{in}$$

3.2.4 DETERMINAZIONE DEL K_S IDEALE

La calibrazione del coefficiente di Gauckler-Strickler per i diversi modelli numerici, non essendo rigorosamente valida l'ipotesi di moto uniforme, dovrebbe condurre alla definizione di un valore variabile con il tirante e dunque diverso per ogni prova. Questa condizione però non è possibile a meno che non si implementi nel codice dei modelli numerici la formulazione di Darcy-Weisbach che consentirebbe di calcolare il coefficiente di resistenza λ (funzione del numero di Reynolds). In questo modo sarebbe possibile effettuare l'analisi di sensibilità sulla scabrezza relativa (e_s).

La calibrazione dunque avviene sotto questa approssimazione ed è effettuata sul piano inclinato attraverso il confronto dei risultati di laboratorio.

L'analisi di sensibilità ha come obiettivo valutare quanto tiranti e portate siano influenzati dalla scabrezza, ciò che ci si aspetta è che se il K_S aumenta, si riduce la scabrezza e quindi la resistenza al flusso e il tirante si abbassa, viceversa se il K_S diminuisce, aumenta la scabrezza e quindi la resistenza al flusso e il tirante si alza.

La calibrazione si è svolta confrontando i risultati ottenuti mediante prove con differenti condizioni di tiranti al bordo e differenti valori del coefficiente di Gauckler-Strickler.

Per determinare il K_S che minimizza lo scarto tra i tiranti ottenuti delle simulazioni numeriche e quelli ottenuti dai dati sperimentali si utilizza il *Root Mean Square Error* (RMSE) che consiste nell'applicazione della seguente equazione:

$$RMSE = \left[\sum_{i=1}^N (\hat{y}(i) - y(i))^2 / N \right]^{1/2}$$

in cui \hat{y} rappresenta il tirante misurato sperimentalmente, y rappresenta il tirante calcolato con il modello numerico e interpolato per far riferimento alla medesima portata di quello sperimentale, N è invece il numero di dati.

I risultati ottenuti sono:

1. Modello numerico ISWE $K_s = 66,7 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$;
2. Modello numerico IDW $K_s = 37,9 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$;
3. Modello numerico 2DVF $K_s = 43,5 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$.

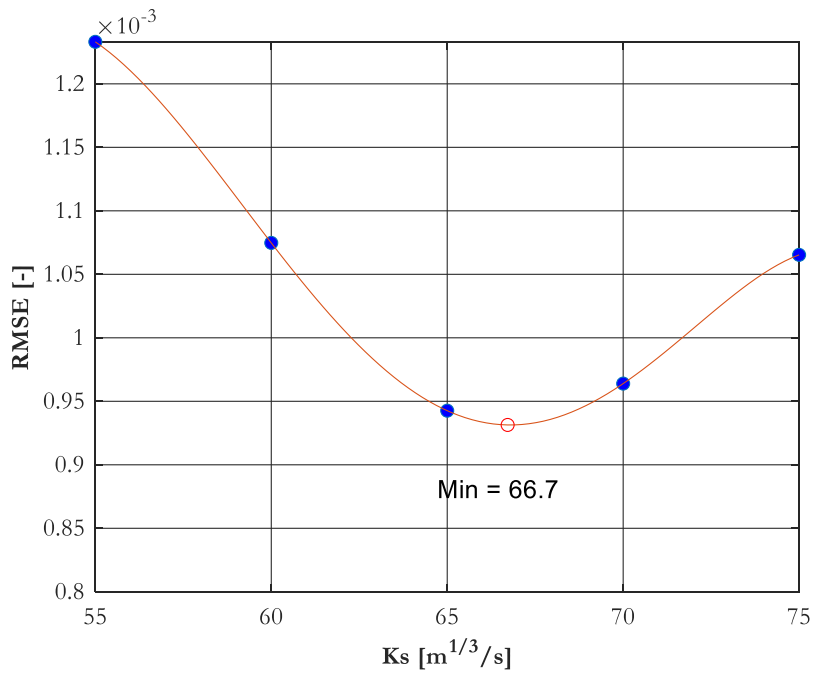


Figura 19 – Andamento del RMSE in funzione del K_s e valore ottimale per modello numerico ISWE

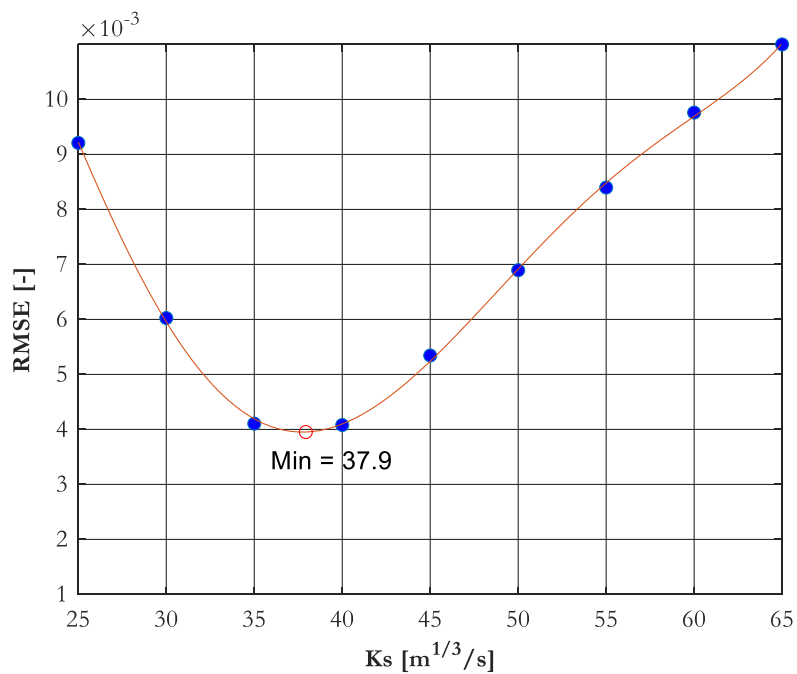


Figura 20 - Andamento del RMSE in funzione del K_s e valore ottimale per modello numerico IDW

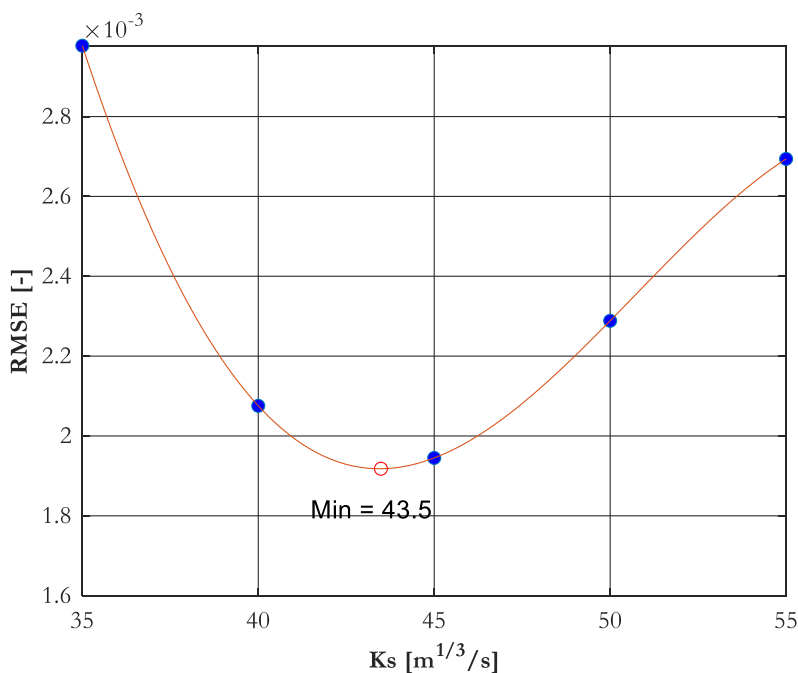


Figura 21 - Andamento del RMSE in funzione del K_s e valore ottimale per modello numerico 2DVF

Il motivo di queste differenze va ricercato nelle equazioni, considerato che l'equazione dell'onda diffusiva (o parabolica) e l'equazione del moto uniforme si ricavano dalle SWE per semplificazioni successive, è congruo che mediante le due approssimazioni si ottengano valori simili di K_s . Se consideriamo, inoltre, la condizione di moto stazionario, le due approssimazioni si differenziano solo per pochi termini, il che porta ad avere K_s quasi uguali. Questo è confermato dai risultati ottenuti, vedi Figura 16 e Figura 20.

Per quanto riguarda i modelli ISWE e 2DVF il coefficiente di resistenza risulta diverso poiché nel classico solutore delle SWE esso ingloba al suo interno anche altri fenomeni, in particolare in questo caso il non aver considerato la distribuzione delle pressioni idrostatica sulla normale. Per fondi a forte pendenza come per il piano inclinato esaminato ($i_f = 0,26$), non è più valida l'ipotesi alla base delle equazioni bi-dimensionali ottenute dall'integrazione lungo la verticale, non considerare infatti la distribuzione delle pressioni in direzione normale alla superficie del fondo comporta una sottostima dei tiranti, come evidenziato nel prossimo capitolo.

Essendo il coefficiente di Strickler legato inversamente al tirante (Figura 22), ossia all'aumentare del K_s i tiranti diminuiscono e viceversa, al fine di compensare l'errore provocato dall'aver trascurato la distribuzione delle pressioni idrostatica lungo la

normale, si rende necessario per il modello 2DVF diminuire il K_s . Questo dunque spiega la differenza considerevole nel coefficiente di resistenza ottimale calibrato per i due modelli numerici.

Il coefficiente K_s dunque, come detto in precedenza, ingloba al suo interno tutte le semplificazioni introdotte, ci si deve pertanto chiedere fino a che punto questo coefficiente sia in grado di sopperire alle semplificazioni introdotte nelle equazioni.

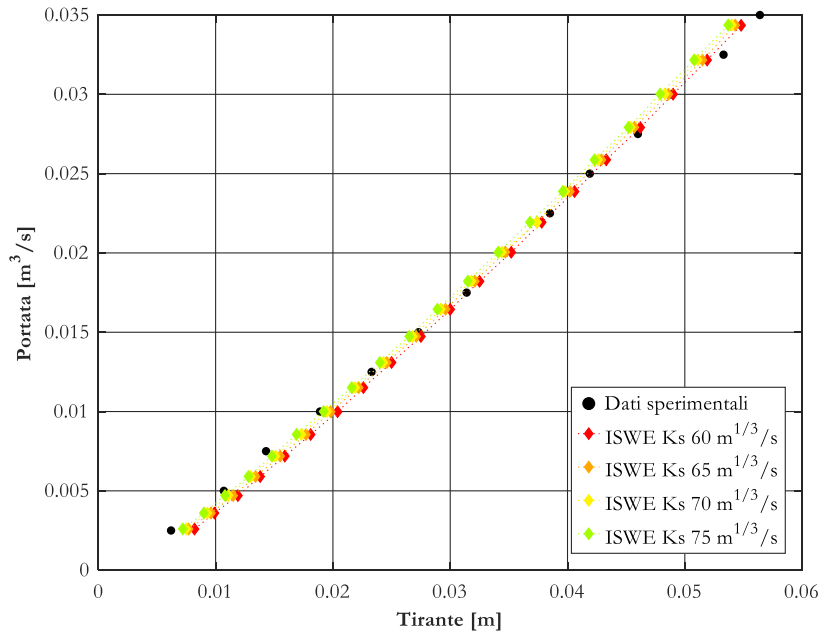


Figura 22 – Risultati della calibrazione del coefficiente K_s per il modello ISWE sul piano inclinato. Questa calibrazione evidenzia il legame inversamente proporzionale tra tirante e K_s

Con l'obiettivo di chiarire il legame che sussiste tra il coefficiente di resistenza e il tirante si propone di seguito un'analisi teorica e numerica.

Considerando l'equazione di Gauckler-Strickler senza correzioni dovute alla forte pendenza, si può scrivere che

$$Y^{SWE} = \left(\frac{q}{K_s^{SWE} \cdot \sqrt{\tan \vartheta}} \right)^{3/5}$$

nella quale Y^{SWE} rappresenta il tirante calcolato in direzione verticale, K_s^{SWE} il coefficiente di Strickler come nel modello 2DVF che implementa le classiche SWE, q la portata per unità di larghezza, $\tan \vartheta$ la pendenza del fondo.

Considerando ora un fondo a forte pendenza, in cui la distribuzione delle pressioni è idrostatica in direzione normale al fondo, in cui è possibile approssimare $\tan \vartheta$ con $\sin \vartheta$, si può scrivere

$$Y^{FP} \cdot \cos \vartheta = \left(\frac{q}{K_s^{FP} \cdot \sqrt{\sin \vartheta}} \right)^{3/5}$$

in cui Y^{FP} rappresenta il tirante calcolato in direzione verticale, K_s^{FP} il coefficiente di Strickler entrambi riferiti alla condizione di forte pendenza.

Affinché $Y^{SWE} = Y^{FP}$ allora dovrà essere

$$K_s^{SWE} = K_s^{FP} \cos^{13/6} \vartheta$$

Questa relazione conferma che per avere il medesimo tirante in direzione verticale il K_s^{SWE} utilizzato nel modello 2DVF deve essere inferiore al K_s^{FP} teorico, nel caso di aver assunto condizioni di forte pendenza.

Si riporta quindi anche in forma grafica (Figura 23) l'analisi condotta su alcuni piani inclinati aventi diversa pendenza. Sono state definite per ogni prova una portata di $0,50 \text{ m}^3/\text{s}$ ed un coefficiente di resistenza $K_s^{SWE} = K_s^{FP} = 50 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$.

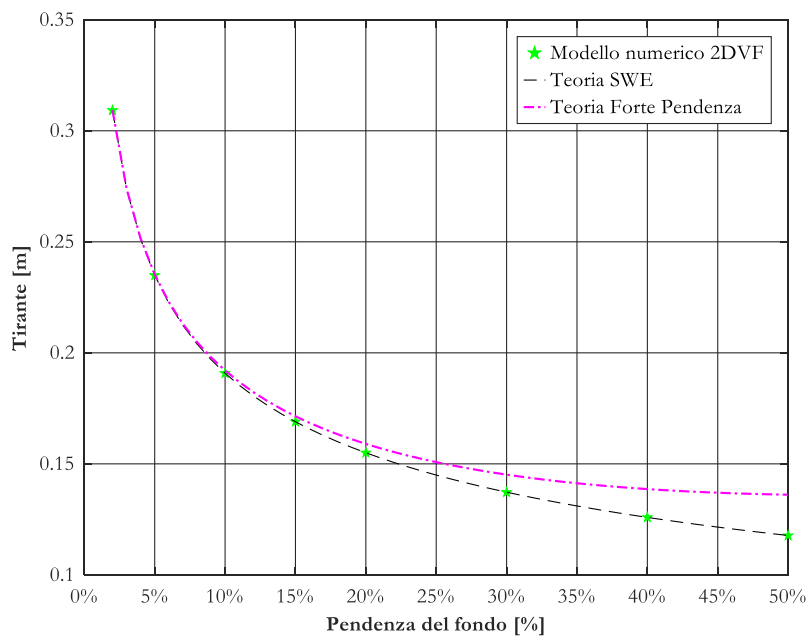


Figura 23 – Risultati dell'analisi teorica e numerica che evidenzia la differenza nell'approssimazione del tirante considerando una differente distribuzione delle pressioni, per diverse pendenze del fondo

4

VALIDAZIONE NEL PIANO INCLINATO

Dopo aver determinato il valore del K_s che meglio approssima i risultati per ogni modello numerico si procede analizzando i dati ottenuti, quindi si realizzano le scale delle portate (Figura 24) per ogni modello numerico e successivamente si esegue un confronto con l'ausilio del RMSE (Figura 25) rispetto ai tiranti misurati.

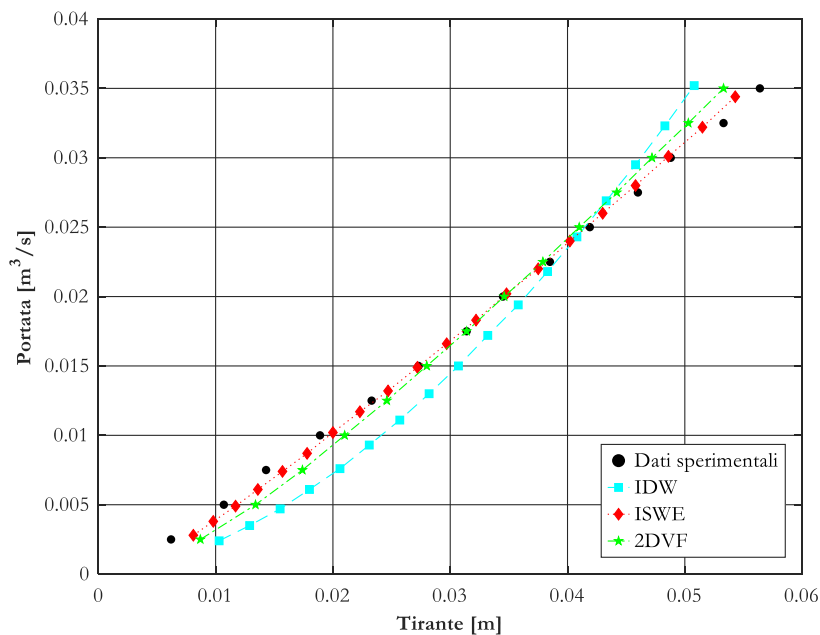


Figura 24 – Confronto tra le soluzioni migliori per i diversi modelli numerici e i dati sperimentali a stato stazionario per ognuna delle prove effettuate

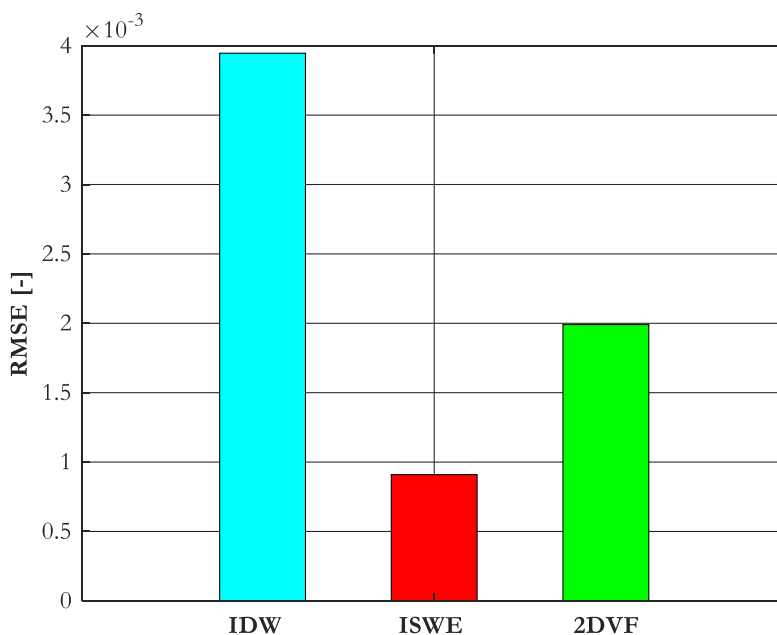


Figura 25 – Valori di RMSE, ottenuti dai diversi modelli numerici, per confronto con i tiranti misurati

È possibile attraverso questi confronti evidenziare la migliore soluzione ottenuta con il modello ISWE, è poi opportuno evidenziare come l'approssimazione diffusiva che teoricamente non è consistente, ma in pratica fornisce ancora risultati piuttosto accettabili.

Si fa notare inoltre che i tiranti ottenuti dai modelli numerici ISWE e IDW sono calcolati lungo la normale alla superficie, quindi vanno riportati nella direzione verticale per un corretto confronto con i dati sperimentali e quelli ottenuti dal modello 2DVF.

Le portate calcolate per le diverse prove con i modelli ISWE e IDW non risultano allineate a quelle dei dati sperimentali in virtù delle diverse condizioni al contorno applicate. I tiranti nodali o di edge inseriti infatti vengono preliminarmente proiettati dal modello nel nuovo sistema di riferimento locale, perdendo la congruenza. Si conferma comunque che i nuovi modelli ai volumi finiti risultano conservativi avendo confrontato le portate calcolate nelle sezioni di monte e di valle.

La scelta di calibrare il coefficiente di resistenza sulle analisi del piano inclinato è stata forzata dall'influenza della geometria del fondo sulla calibrazione stessa.

Al fine di mostrare la variazione dell'errore al variare del coefficiente K_s si riporta il confronto, eseguito sui modelli numerici ISWE e 2DVF mediante il RMSE, per due diversi valori del coefficiente di resistenza (Figura 26 e Figura 28).

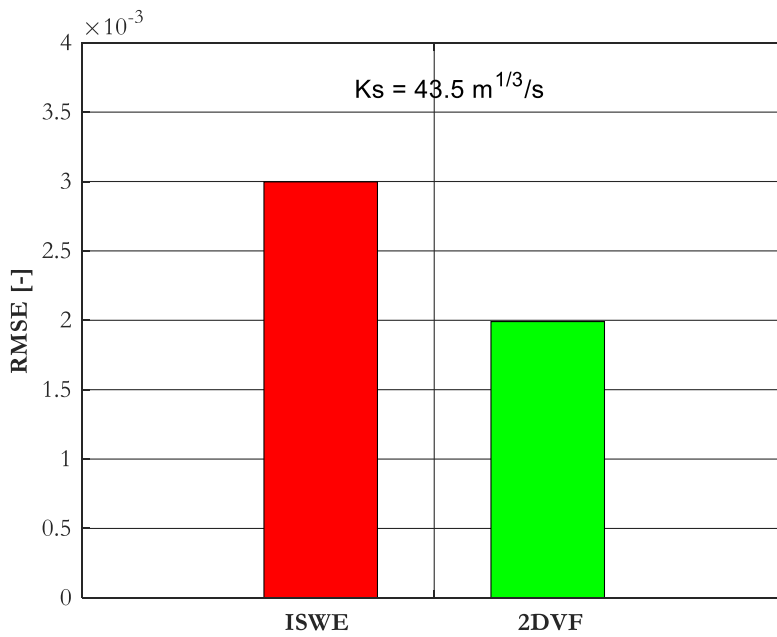


Figura 26 – Valori di RMSE, ottenuti dai modelli numerici ISWE e 2DVF, per confronto con i tiranti misurati

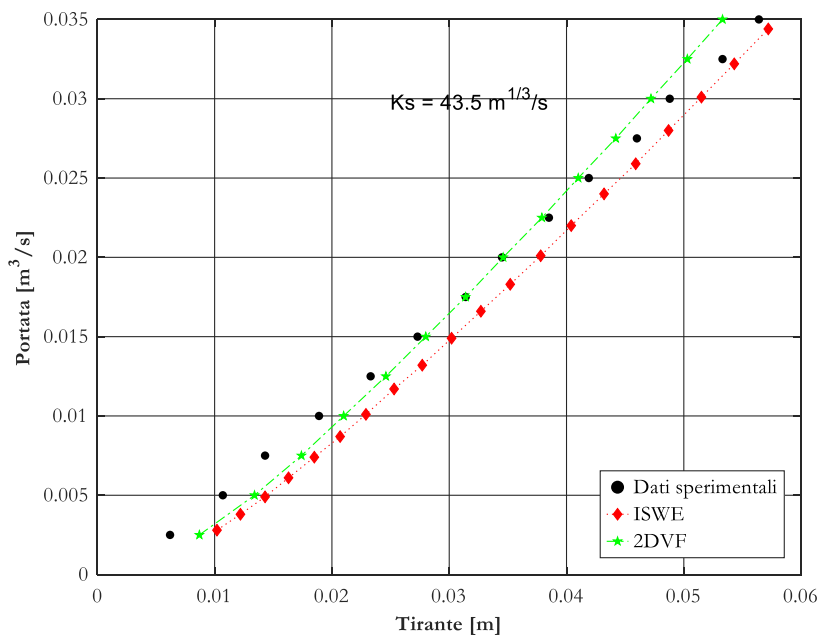


Figura 27 - Confronto tra i modelli numerici ISWE e 2DVF, caratterizzati entrambi da un coefficiente di resistenza $43,5 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, e i dati sperimentali a stato stazionario per ognuna delle prove effettuate

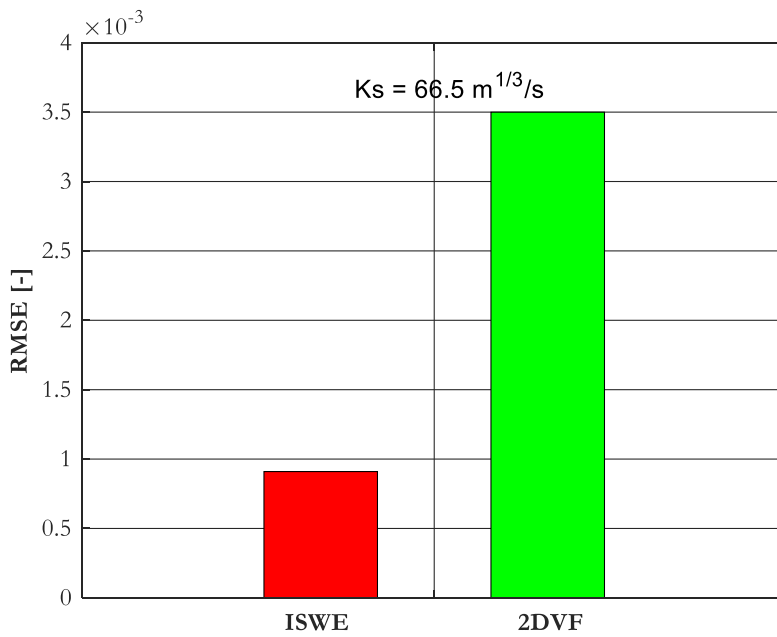


Figura 28 - Valori di RMSE, ottenuti dai modelli numerici ISWE e 2DVF, per confronto con i tiranti misurati

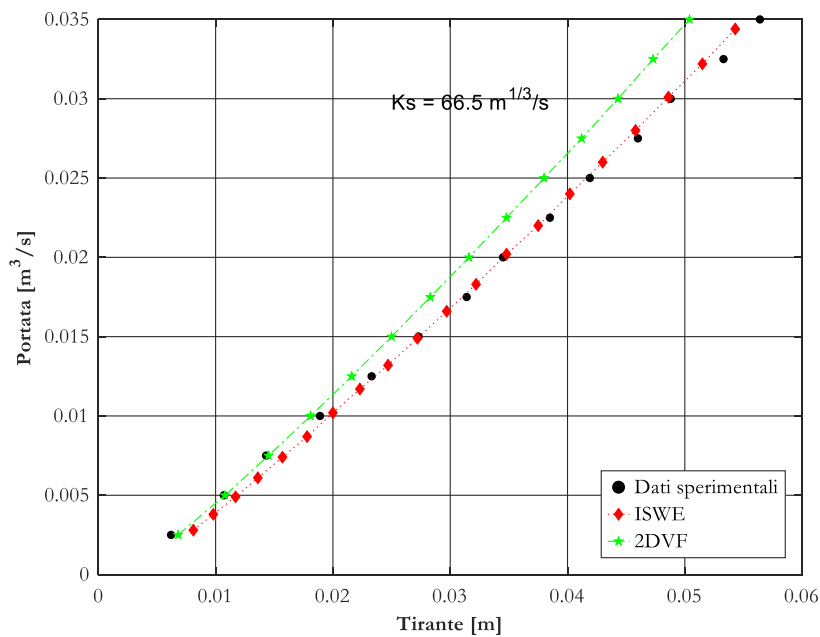


Figura 29 - Confronto tra i modelli numerici ISWE e 2DVF, caratterizzati entrambi da un coefficiente di resistenza $66,5 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, e i dati sperimentali a stato stazionario per ognuna delle prove effettuate

Con questa analisi si dimostra come il K_s influenzi i risultati ottenuti e possa dunque sopperire al diverso metodo di integrazione.

Non considerare la distribuzione delle pressioni idrostatica in direzione normale conduce inoltre ad una sottostima dei tiranti, come è possibile notare dalla Figura 27 e dalla Figura 29.

Per concludere l'analisi effettuata sul piano inclinato e dunque validare i dati di input e le condizioni al contorno da utilizzare successivamente nella superficie tridimensionale, si riportano anche i confronti eseguiti sulle velocità (Figura 30).

Le misure di velocità sono misurate mediante il dispositivo ADV, in un punto posto a 0,38 m dalla sezione di monte come mostrato in Figura 8.

Per quanto concerne i solutori ISWE e IDW la componente della velocità scritta nel sistema di riferimento globale, è ottenuta dividendo i flussi per la depth corrispondente nella cella, ossia

$$u_{x,i} = \frac{q_{x,i}}{\eta_i} \cdot h_{(1)}$$

in cui $h_{(1)}$ è il primo coefficiente della metrica.

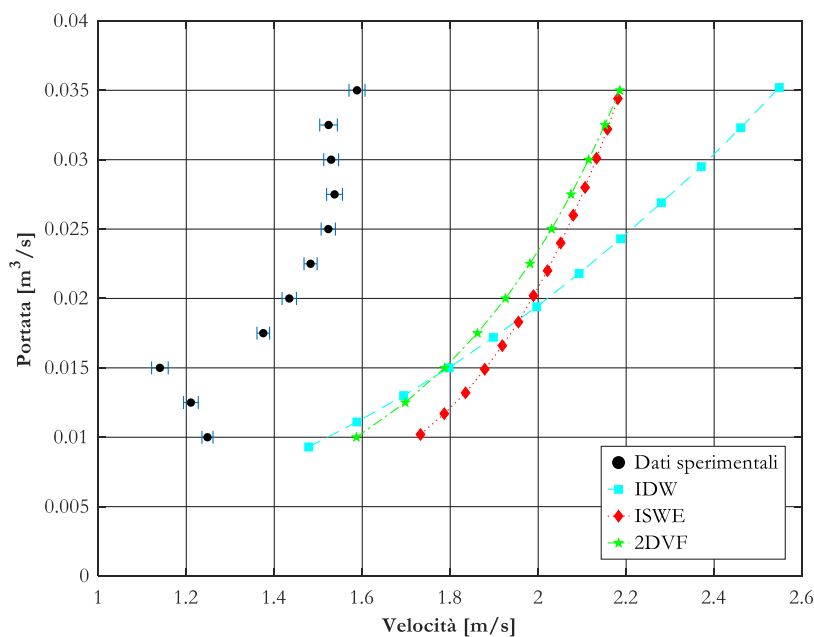


Figura 30 - Relazioni portata-velocità per i diversi modelli numerici e i dati sperimentali a stato stazionario, con i relativi intervalli di confidenza al 95%, per ognuna delle prove effettuate

Da quest'ultima analisi si può notare come i modelli numerici ISWE e 2DVF convergano alla medesima soluzione per le portate più alte, questo consente di affermare che all'aumentare della portata la differenza nell'integrazione delle equazioni bidi-

mensionali si fa sempre meno significativa. Si nota però come i risultati sperimentali si discostino notevolmente dalle soluzioni numeriche.

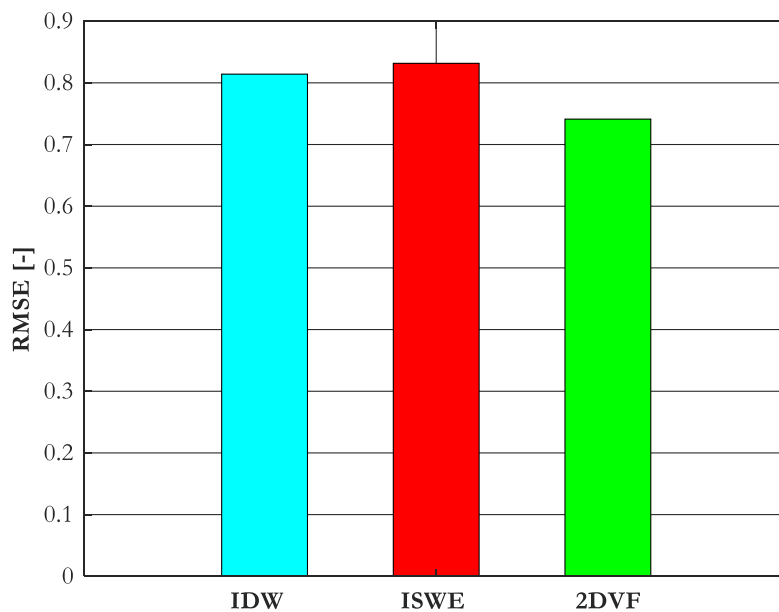


Figura 31 - Valori di RMSE, ottenuti dai modelli numerici ISWE e 2DVF, per confronto con le velocità misurate

Dall'analisi quantitativa dell'errore sulle velocità è facile rendersi conto che le differenze in termini quantitativi nell'utilizzo dei diversi solutori sono minime, pur essendo comunque distanti dalle misure sperimentali.

L'utilizzo dunque nel piano inclinato di una integrazione delle equazioni in direzione normale al fondo non porta a miglorie significative nella stima delle velocità.

5

CASO STUDIO

In questo capitolo sono riportati i risultati delle simulazioni numeriche e sperimentali relative ai rispettivi solutori descritti al capitolo 3 e concernenti la superficie tridimensionale.

Le analisi numeriche sono state svolte solo a moto permanente, in quanto i nuovi modelli al momento non consentono una corretta descrizione del fenomeno di dam break. Essendo questo un fenomeno impulsivo, non è infatti possibile assumere di imporre condizioni di bordo ma è invece necessario definire delle condizioni iniziali a monte della superficie stessa.

Si ritiene comunque opportuno inserire in Appendice i risultati sperimentali relativi al tirante misurato in continuo tramite sonde ad ultrasuoni.

La geometria analizzata è caratterizzata da un fondo con curvatura variabile in entrambe le direzioni. La discretizzazione è ottenuta con una triangolazione di Delaunay, generando un totale di 1605 nodi e 3068 celle di superficie.

Le condizioni iniziali considerano una profondità uniforme dell'acqua di 0,03 m su tutta la mesh, al fine di minimizzare l'influenza di algoritmi numerici critici, ma non rilevanti per gli effetti geometrici, come la transizione asciutto-bagnato.

5.1 MOTO STAZIONARIO

L'analisi svolta riguarda il confronto tra il modello ISWE, il modello approssimato IDW e il modello 2DVF.

I risultati relativi al tirante ottenuti dai modelli numerici e il confronto con i dati sperimentali sono stati eseguiti in otto punti significativi (Figura 32).

Per quanto riguarda il confronto delle velocità il punto di misura è univoco per limiti strumentali e coincide con il punto 3.

L'obiettivo è quantificare le differenza tra i tiranti e le velocità, calcolati con i tre modelli rispetto ai dati sperimentali, in modo oggettivo tramite RMSE.

Inoltre ci si chiede se alle differenze riscontrate è associato un pattern relativo ad esempio alla curvatura locale della superficie.

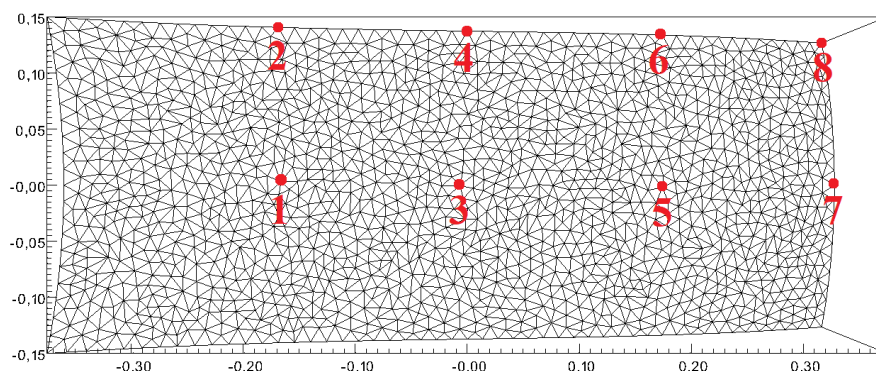


Figura 32 – Posizione dei punti sperimentali nei quali sono state eseguite le misure di tirante. Il punto 3 è caratterizzato sia da misure di tirante sia da misure di velocità

5.1.1 CONDIZIONI AL CONTORNO

Il tirante da inserire nei modelli numerici IDW e ISWE è ottenuto a partire dai risultati sperimentali raccolti con le sonde acustiche. Non essendo però questo costante al di sopra del bordo di monte della superficie in esame, poiché il moto risulta essere bidimensionale, ne sono stati ricavati i valori per alcuni punti (Tabella 3) e mediante una regressione polinomiale è stato così possibile assegnare ad ogni nodo o edge rispettivamente l'opportuno tirante.

Carico idraulico monte [m]	Portata misurata [m ³ /s]	Tirante sul bordo di monte della superficie tridimensionale [m]			
		1	2	3	4
Numero identificativo della sezione					
Distanza progressiva della sezione [m]		0.00	0.04	0.08	0.12
0.2748	0.0050	0.0548	0.0509	0.0399	0.0222
0.2877	0.0075	0.0661	0.0624	0.0514	0.0326
0.2996	0.0100	0.0767	0.0729	0.0620	0.0427
0.3098	0.0125	0.0854	0.0817	0.0707	0.0515
0.3199	0.0150	0.0939	0.0902	0.0792	0.0596
0.3286	0.0175	0.1018	0.0981	0.0871	0.0675
0.3375	0.0200	0.1098	0.1061	0.0948	0.0754
0.3462	0.0225	0.1168	0.1131	0.1024	0.0828
0.3543	0.0250	0.1242	0.1208	0.1103	0.0905
0.3626	0.0275	0.1314	0.1275	0.1171	0.0981
0.3703	0.0300	0.1384	0.1347	0.1246	0.1049
0.378	0.0325	0.1449	0.1425	0.1316	0.1124
0.3852	0.0350	0.1518	0.1472	0.1385	0.1193

Tabella 3 – Dati di tirante sul bordo di monte della superficie tridimensionale

La portata per unità di larghezza afferente a ciascun edge, da inserire insieme al tirante come condizione di bordo nel modello numerico ISWE, è stata calcolata suddividendo la portata complessiva relativa ad ogni prova sperimentale in modo tale questa fosse pesata dai valori di tirante.

La relazione utilizzata per pesare la portata è la seguente:

$$q_i = \frac{Y_i}{\sum Y_i} Q \cdot l_i$$

È stato inoltre eseguito un test inserendo come condizioni al contorno tiranti e portate ottenuti dal modello 2DVF, il quale per come è stata realizzata la mesh calcola autonomamente questi valori per ogni volume finito a fronte dell'inserimento di un valore di portata a monte. Il confronto non ha messo in luce particolari differenze tra le due soluzioni.

5.1.2 CONFRONTO DEI TIRANTI

In questa sezione sono riportati i risultati ottenuti dalle analisi a moto stazionario. Nella pagina seguente sono riportate le foto relative agli esperimenti svolti in laboratorio per ognuna delle prove esaminate.

Prova N°1
 $Q=0,0050 \text{ m}^3/\text{s}$



Prova N°8
 $Q=0,0225 \text{ m}^3/\text{s}$



Prova N°2
 $Q=0,0075 \text{ m}^3/\text{s}$



Prova N°9
 $Q=0,0250 \text{ m}^3/\text{s}$



Prova N°3
 $Q=0,0100 \text{ m}^3/\text{s}$



Prova N°10
 $Q=0,0275 \text{ m}^3/\text{s}$



Prova N°4
 $Q=0,0125 \text{ m}^3/\text{s}$



Prova N°11
 $Q=0,0300 \text{ m}^3/\text{s}$



Prova N°5
 $Q=0,0150 \text{ m}^3/\text{s}$



Prova N°12
 $Q=0,0325 \text{ m}^3/\text{s}$



Prova N°6
 $Q=0,0175 \text{ m}^3/\text{s}$



Prova N°13
 $Q=0,0350 \text{ m}^3/\text{s}$



Prova N°7
 $Q=0,0200 \text{ m}^3/\text{s}$



È poco apprezzabile dalle foto il forte carattere bidimensionale della corrente che scorre al di sopra della superficie tridimensionale.

In Figura 33 sono riportate le relazioni portata-tirante ottenute dal confronto con i modelli numerici ISWE e 2DVF.

Non si ritiene opportuno inserire in questo confronto anche i risultati ottenuti con il modello IDW in quanto questi si discostano significativamente dai dati sperimentali, confermando come le semplificazioni introdotte in questo modello numerico limitino la sua applicabilità ai soli casi di fondo piano.

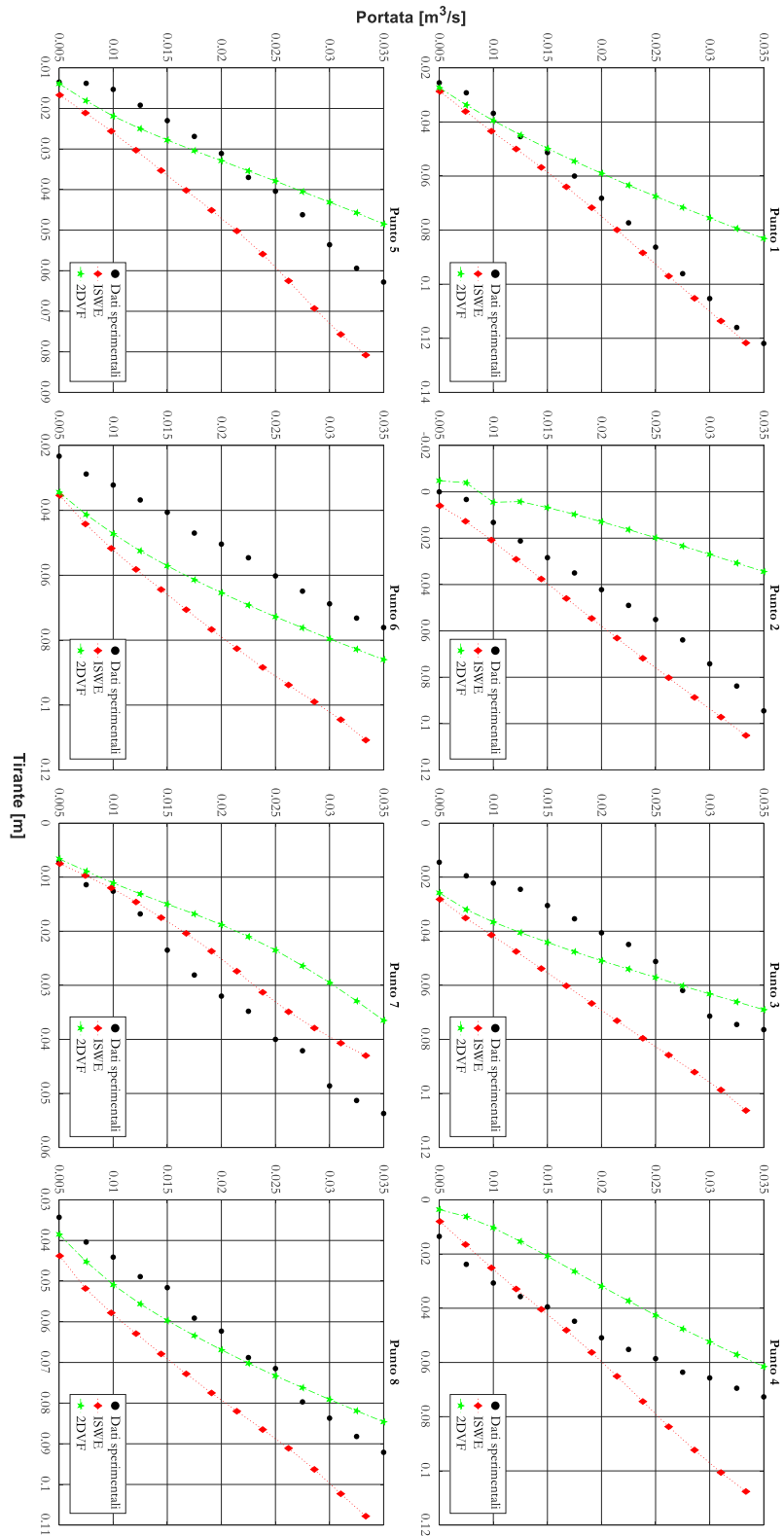


Figura 33 – Relazioni portata-tirante per i diversi modelli numerici e i dati sperimentali a stato stazionario per ognuna delle prove effettuate

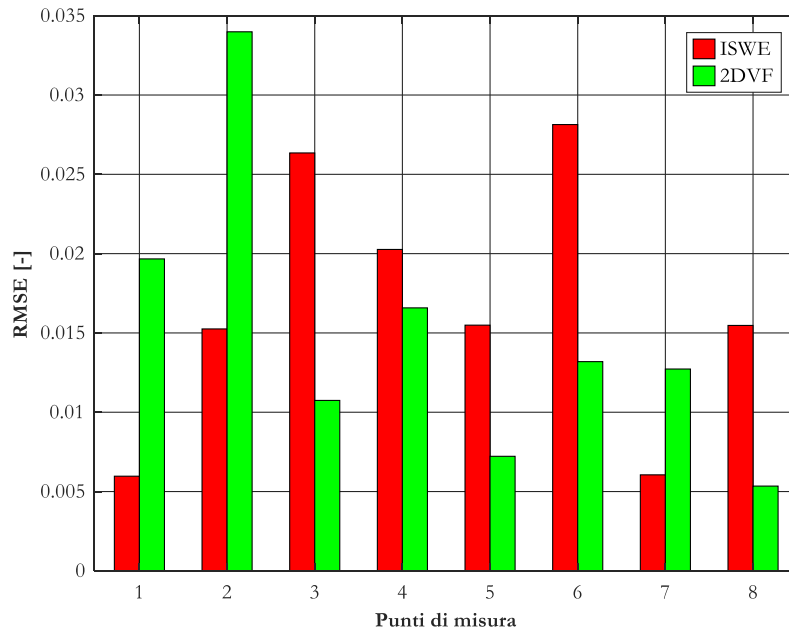


Figura 34 - Valori di RMSE, ottenuti dai modelli numerici ISWE e 2DVF, per confronto con i tiranti misurati per ognuno dei punti di misura

È importante riconoscere le numerose assunzioni fatte nella derivazione delle SWE normalmente mediate sul sistema di riferimento locale curvilineo. In particolare, si ricordano due importanti semplificazioni. La prima è legata alla scelta di utilizzare la direzione normale per approssimare il percorso di integrazione del flusso trasversale. L'influenza di questa assunzione è quantificata mediante l'analisi degli errori (Figura 34), in relazione all'ipotesi di una distribuzione lineare della pressione lungo i diversi percorsi di integrazione (lungo le direzioni verticale o normale). Dalla media degli errori per i diversi punti esaminati si ottiene:

- Per il modello ISWE: RMSE medio = 0,0166;
- Per il modello 2DVF: RMSE medio = 0,0149

Quantitativamente dunque dal confronto degli errori non sembra esserci un miglioramento dovuto al diverso metodo di integrazione delle equazioni. Qualitativamente, invece, guardando i risultati in Figura 33 si può notare come nella quasi totalità dei punti esaminati l'andamento dei risultati del modello ISWE sia molto simile a quello dei risultati sperimentali a meno di una traslazione lungo l'asse orizzontale.

La seconda importante semplificazione è legata al fatto di trascurare i termini contenenti le componenti dello sforzo di taglio che comprendono i termini differenziali advettivi e le sollecitazioni turbolente e viscosse. Questi termini contengono informa-

zioni geometriche che potrebbero alterare la loro importanza in caso di grandi curvature del fondo.

Rispetto alle differenze riscontrate tra i due modelli (Figura 33) risulta difficile definire una relazione con la curvatura locale della superficie.

Si ritiene utile riportare i risultati in forma grafica, relativi al tirante, di una delle simulazioni, in particolare si fa riferimento alla simulazione numero 6, per i diversi modelli numerici. Si evidenzia come per i nuovi modelli numerici i risultati si riferiscano al tirante lungo la direzione normale al fondo di ciascuna cella, mentre per il modello 2DVF il tirante è considerato in direzione verticale.

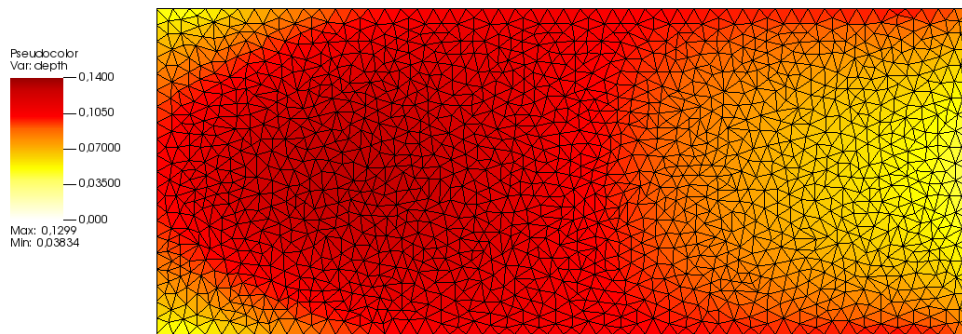


Figura 35 - Soluzione grafica dei tiranti per la simulazione 6 in stato stazionario per il modello IDW

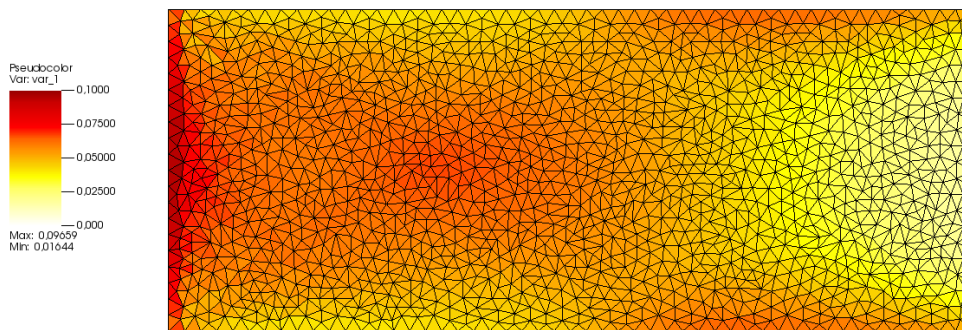


Figura 36 – Soluzione grafica dei tiranti per la simulazione 6 in stato stazionario per il modello ISWE

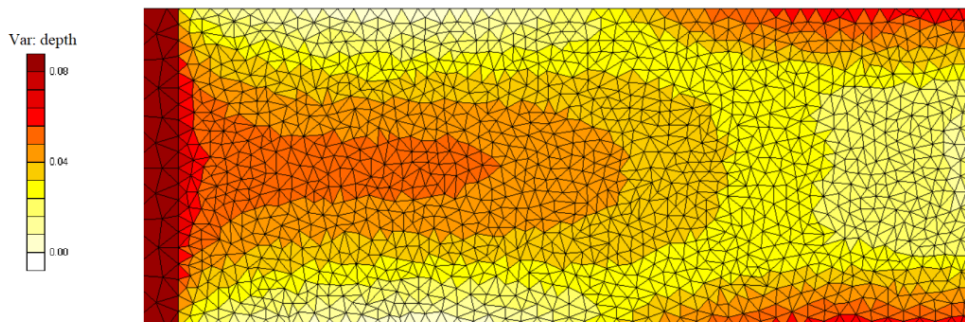


Figura 37 - Soluzione grafica dei tiranti per la simulazione 6 in stato stazionario per il modello 2DVF

È evidente come i risultati del modello IDW si discostino da quelli ottenuti con gli altri modelli numerici, a dimostrazione del fatto che questo modello non sia adatto all'applicazione in queste condizioni.

Per quanto riguarda i modelli ISWE e 2DVF si notano invece molte analogie nella distribuzione spaziale dei tiranti.

5.1.3 CONFRONTO DELLE VELOCITÀ

Si riporta di seguito il confronto delle velocità nel punto di misura 3 (vedi Figura 32) al fine di valutare la qualità dei risultati ottenuti.

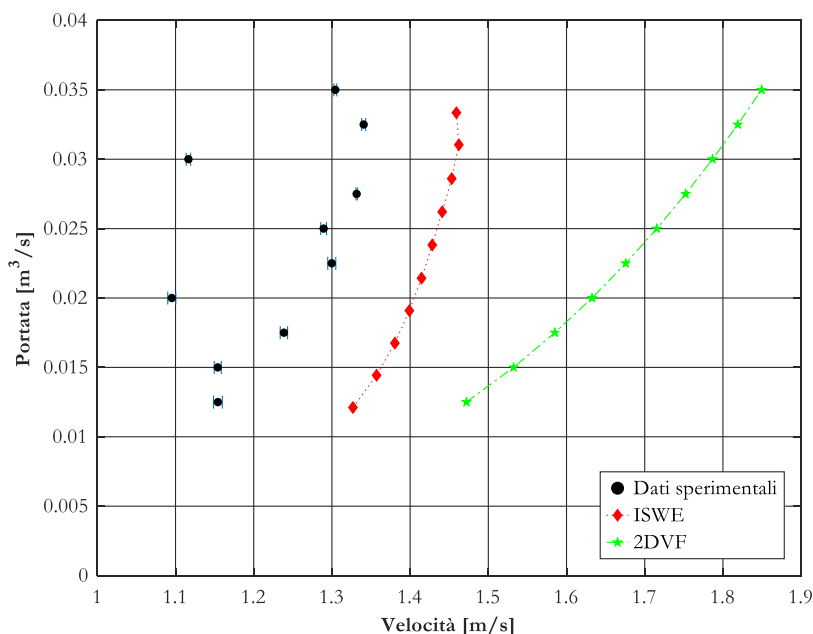


Figura 38 - Relazioni portata-velocità per i diversi modelli numerici e i dati sperimentali a stato stazionario, con i relativi intervalli di confidenza al 95%, nel punto di misura 3, per ognuna delle prove effettuate

È immediato riscontrare come il modello ISWE si avvicini ai dati sperimentali rispetto al modello 2DVF, consentendo dunque di valutare positivamente l'uso del diverso metodo di integrazione. Risulta inoltre evidente come la distribuzione delle velocità assuma un andamento qualitativamente più simile ai dati sperimentali. Questo non accade con il modello 2DVF le cui velocità tendono ad allontanarsi dai risultati sperimentali all'aumentare della portata.

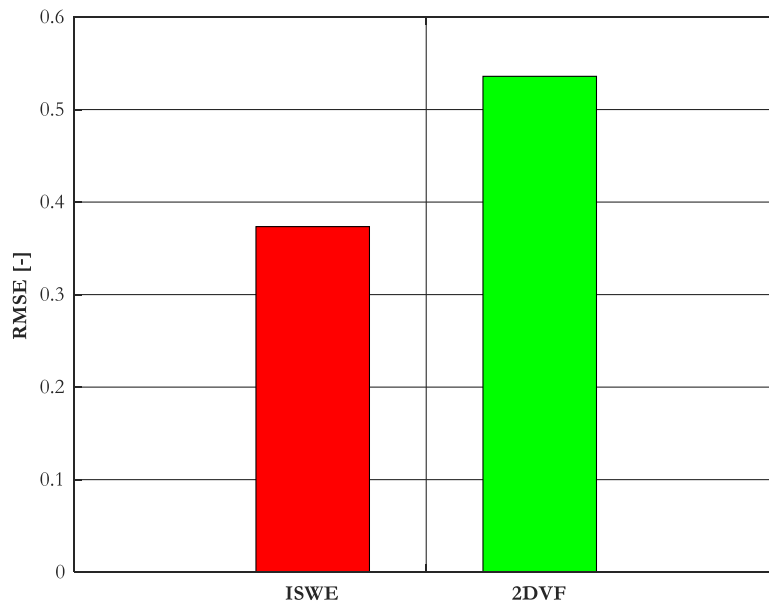


Figura 39 - Valori di RMSE, ottenuti dai modelli numerici ISWE e 2DVF, per confronto con le velocità misurate nel punto di misura 3

Dai valori di RMSE è quindi possibile confermare la migliore stima delle velocità e quantificare l'errore commesso.

6

CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

6.1 CONCLUSIONI

Le analisi svolte confermano l'importanza di tenere in considerazione gli effetti geometrici della topografia del fondo e l'impossibilità di poter confondere la normale al fondo con la verticale nel caso di fondi a forte pendenza, in particolare per le applicazioni reali, dove i fluidi si muovono su terreni generalmente accidentati, come accade, ad esempio, nelle aree montuose.

La presenza delle curvature di fondo inoltre modifica sensibilmente la risposta dei modelli numerici.

Nel piano inclinato, dove le curvature sono nulle, la differenza tra i modelli ISWE e 2DVF in termini di velocità (Figura 30) e tiranti (Figura 24) è poco significativa, questo è dovuto al fatto che la pendenza utilizzata, pur essendo di modesta entità non è ancora sufficiente al fine di mettere in luce le differenze di una diversa integrazione (Figura 23). Nella superficie tridimensionale invece, dove sono presenti lievi curvature, il nuovo modello ISWE ha un rendimento migliore, sia dal punto di vista quantitativo che qualitativo, rispetto ad un classico solutore delle SWE se confrontiamo le velocità (Figura 38), mentre per quanto riguarda i tiranti (Figura 33) non vi sono grandi differenze dal punto di vista quantitativo.

Il nuovo modello numerico basato sulle ISWE presenta delle limitazioni relative ai tiranti che si vengono a sviluppare su superfici curvilinee, questo infatti non può essere troppo elevato, in quanto le normali lungo cui è integrata la soluzione non devono intersecarsi (Figura 1) al fine di giungere ad una soluzione corretta. Queste limitazioni si risolverebbero implementando un percorso di integrazione ottimale, il percorso cross-flow.

L'obiettivo per cui è stato sviluppato questo nuovo modello, ossia tenere in considerazione la geometria del fondo entra quindi in contrasto con la limitazione sopra esposta quando si fa riferimento a geometrie che presentano una concavità accentuata.

Questo solutore risulta in ogni caso più preciso e fornisce una soluzione più vicina alla realtà in tutti quei casi di moto supercritico su fondi a forte pendenza (Figura 25) o con zone a curvatura convessa, in cui la distribuzione delle pressioni in direzione normale alla superficie del fondo non può essere più confusa con la verticale.

Esempi applicativi in questi campi sono: scivoli di dighe, sfioratori, collettori a forte pendenza.

In merito all'approssimazione diffusiva, come già ribadito in precedenza, le semplificazioni introdotte sono estremamente forti, in particolare nel caso di geometrie di fondo curvilinee. I risultati ottenuti nel piano inclinato in esame confermano però la possibilità di utilizzare ancora questa approssimazione senza commettere grandi errori.

Alcune delle problematiche riscontrate nell'utilizzo del nuovo modello riguardano la sua sensibilità alla variazione delle condizioni al contorno applicate, con riferimento particolare alla condizione iniziale e al parametro di CFL.

Il modello attualmente non è ottimizzato con un algoritmo adattivo che gli consenta di modificare il passo di integrazione temporale al variare della dimensione degli elementi.

Nel nuovo modello numerico al momento non è possibile definire i soli tiranti come condizione di bordo e questo complica la definizione delle boundary conditions e comporta la possibilità di commettere errori nella definizione delle portate. Considerando la notevole sensibilità del modello alle condizioni al contorno questo risulta essere un difetto non trascurabile.

In questo lavoro sono state utilizzate formule esplicite per descrivere la geometria delle superfici, così da ottenere il calcolo esatto del tensore metrico, in quanto queste sono state create appositamente per evitare ulteriori errori dati dall'approssimazione della geometria.

6.2 SVILUPPI FUTURI

La ricerca futura si concentrerà sullo studio degli aspetti critici precedentemente citati al fine di realizzare un modello numerico stabile e robusto, che possa in futuro contribuire a simulazioni più accurate dei flussi geofisici. Nel prossimo futuro meritano quindi attenzione anche gli effetti geometrici della topografia sui letti formati da sedimenti erodibili e, quindi, di natura mobile.

L'applicazione del modello a casi di geometrie costruite a partire da dati reali, come mappe altimetriche digitali (DTM), e dunque senza dover definire delle formule esplicite per descrivere la geometria delle superfici, è già in fase di studio. Questo consentirà in futuro di analizzare la propagazione di onde di piena reali, con particolare riferimento ai bacini montani, e confrontare ancora una volta i risultati con un classico solutore delle SWE. Con semplici modifiche al codice sarà inoltre possibile definire una variazione spaziale del parametro K_S , al momento non implementata.

Nel prossimo futuro infine lo sviluppo dovrà concentrarsi anche sulla implementazione delle condizioni al contorno adatte all'analisi delle condizioni di moto vario, con particolare riferimento alla condizione di dam break. Al momento le simulazioni non risultano infatti attendibili, poiché non è possibile descrivere correttamente il processo impulsivo mediante l'utilizzo dell'attuale modello, risultano pertanto necessari degli approfondimenti in questa direzione. Si mostrano in Appendice i risultati sperimentali, i quali potrebbero essere utili ad un confronto, non appena le limitazioni del modello saranno superate.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. Bachini e M. Putti, «Geometrically intrinsic modeling of shallow water flows,» *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, vol. 54, p. 2125–2157, 2020.
- [2] A. Defina, *Correnti rapide in moto stazionario*, Società Editrice Esculapio, 2020.
- [3] C. Ruyer-Quil e P. Manneville, «Modeling film flows down inclined planes,» *The European Physical Journal B*, vol. 6, pp. 277-292, November 1998.
- [4] C. Ruyer-Quil e P. Manneville, «Improved modeling of flows down inclined planes,» *The European Physical Journal B*, vol. 15, pp. 357-369, May 2000.
- [5] S. B. Savage e K. Hutter, «The motion of a finite mass of granular material down a rough incline,» *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 199, p. 177–215, 1989.
- [6] S. B. Savage e K. Hutter, «The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. Part I: Analysis,» *Acta Mechanica*, vol. 86, p. 201–223, 1991.
- [7] F. Bouchut e M. Westdickenberg, «Gravity driven shallow water models for arbitrary topography,» *Communications in Mathematical Sciences*, vol. 2, p.

- 359–389, 2004.
- [8] I. Fent, M. Putti, C. Gregoretti e S. Lanzoni, «Modeling shallow water flows on general terrains,» *Advances in water resources*, vol. 121, p. 316–332, 2018.
- [9] E. Bachini e others, «Numerical methods for Shallow Water Equations on regular surfaces,» 2019.
- [10] J. A. Rossmann, D. S. Bale e R. J. LeVeque, «A wave propagation algorithm for hyperbolic systems on curved manifolds,» *Journal of Computational Physics*, vol. 199, p. 631–662, 2004.
- [11] E. Audusse, F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein e B. t. Perthame, «A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows,» *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 25, p. 2050–2065, 2004.
- [12] E. F. Toro e others, *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*, Wiley and Sons Ltd., 2001.
- [13] A. Harten, P. D. Lax e B. v. Leer, «On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws,» *SIAM review*, vol. 25, p. 35–61, 1983.
- [14] E. F. Toro, M. Spruce e W. Speares, «Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver,» *Shock waves*, vol. 4, p. 25–34, 1994.
- [15] B. F. Sanders, «Integration of a shallow water model with a local time step,» *Journal of Hydraulic Research*, vol. 46, p. 466–475, 2008.
- [16] L. Begnudelli e B. F. Sanders, «Unstructured grid finite-volume algorithm for shallow-water flow and scalar transport with wetting and drying,» *Journal of hydraulic engineering*, vol. 132, p. 371–384, 2006.
- [17] L. Begnudelli, B. F. Sanders e S. F. Bradford, «Adaptive Godunov-based model for flood simulation,» *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 134, p. 714–725, 2008.

- [18] A. Ghetti, *Idraulica*, Libreria Cortina, 1980.
- [19] V. T. Chow, *Open-channel hydraulics*, Mcgraw-Hill, 1959.
- [20] F. Bouchut, *Nonlinear stability of finite Volume Methods for hyperbolic conservation laws: And Well-Balanced schemes for sources*, Springer Science & Business Media, 2004.

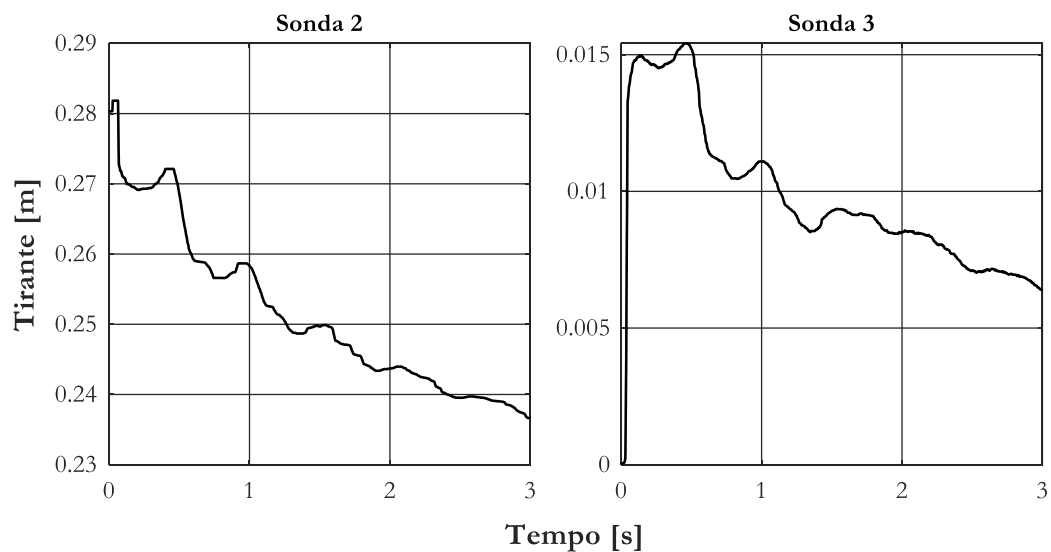
APPENDICE

In questa appendice, vengono presentati i risultati ottenuti delle analisi sperimentali condotte per studiare il fenomeno del dam break sulla superficie tridimensionale appositamente modellata per lo studio in oggetto. Tali esperimenti sono stati ideati con l'obiettivo di investigare anche in condizione di moto vario le differenze tra i diversi solutori e valutare la dipendenza della soluzione dalla geometria del fondo. L'applicazione dei modelli numerici si è rivelata però non adatta per i limiti che ancora caratterizzano i modelli stessi, con particolare riferimento alle condizioni di input. Pertanto, si presentano di seguito esclusivamente i dati sperimentali raccolti, i quali potranno risultare utili per il proseguimento della ricerca.

Le prove sono state eseguite con diversi carichi idraulici a monte della paratoia, questi sono 0,28 m, 0,31 m, 0,34 m, 0,37 m e 0,40 m. Per ognuna di esse si riportano di seguito le misure di tirante nel tempo ottenute dalle sonde 2 e 3 rispettivamente poste immediatamente a monte della paratoia e al centro della superficie tridimensionale, come mostrato in Figura 13.

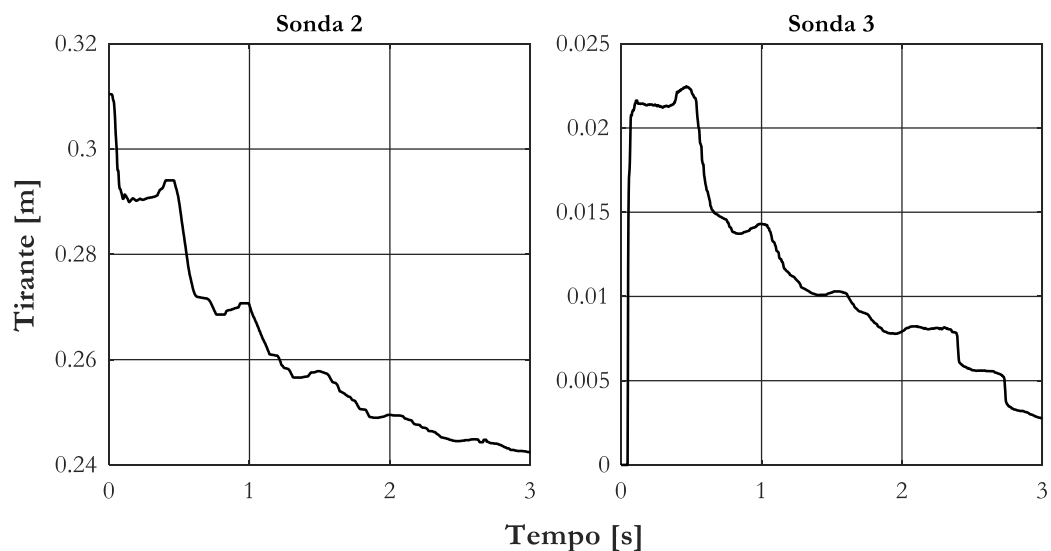
Il segnale è stato adeguatamente filtrato al fine di eliminare il rumore e ottenere dati più chiari.

Simulazione 1 Carico idraulico 0,28 m

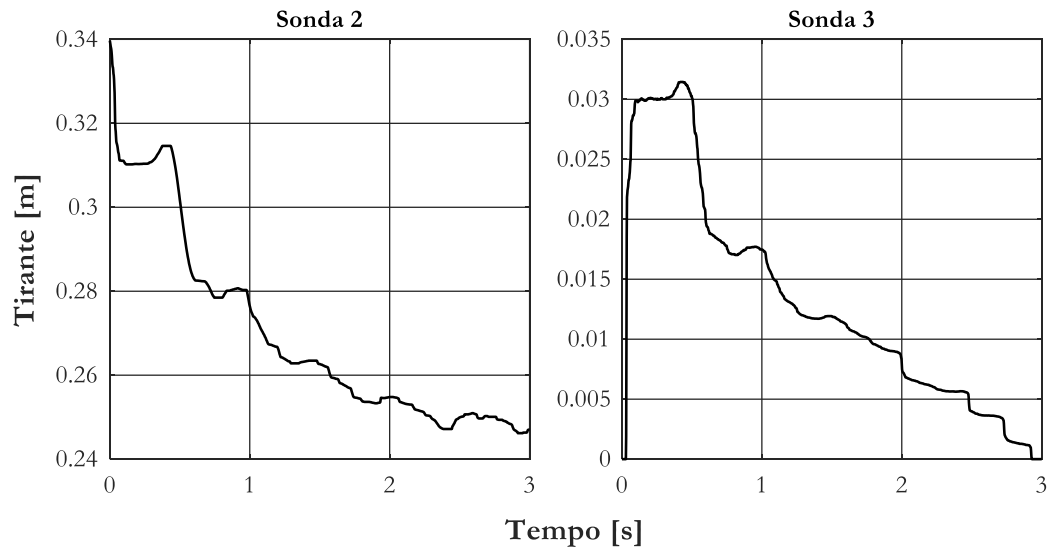


Si può notare come la decrescita del livello non sia costante ma siano presenti dei picchi, separati dallo stesso intervallo temporale. Questi sono dovuti alla riflessione dell'onda negativa, che si viene a generare dall'apertura istantanea della paratoia, avente direzione di propagazione inversa a quella del moto.

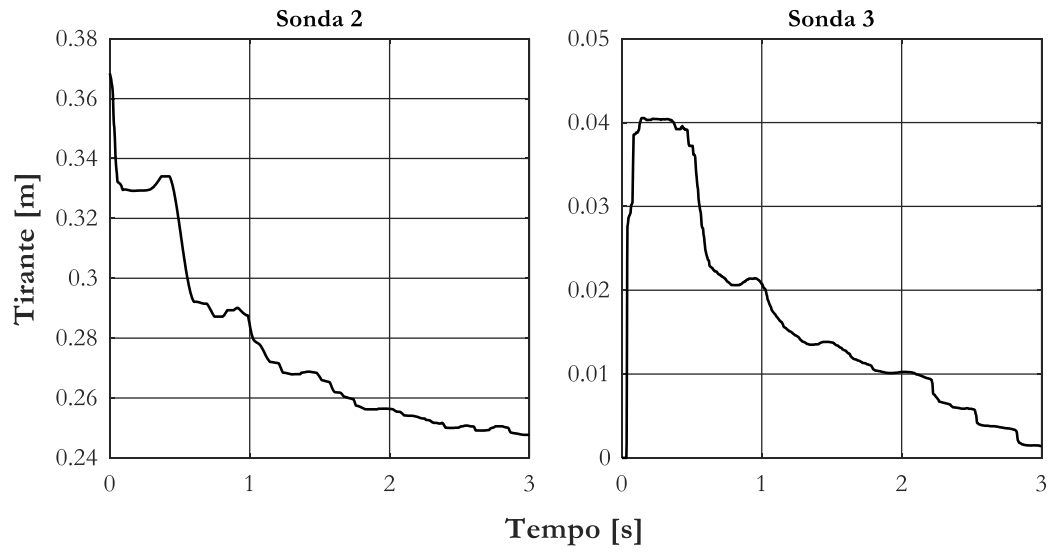
Simulazione 2 Carico idraulico 0,31 m



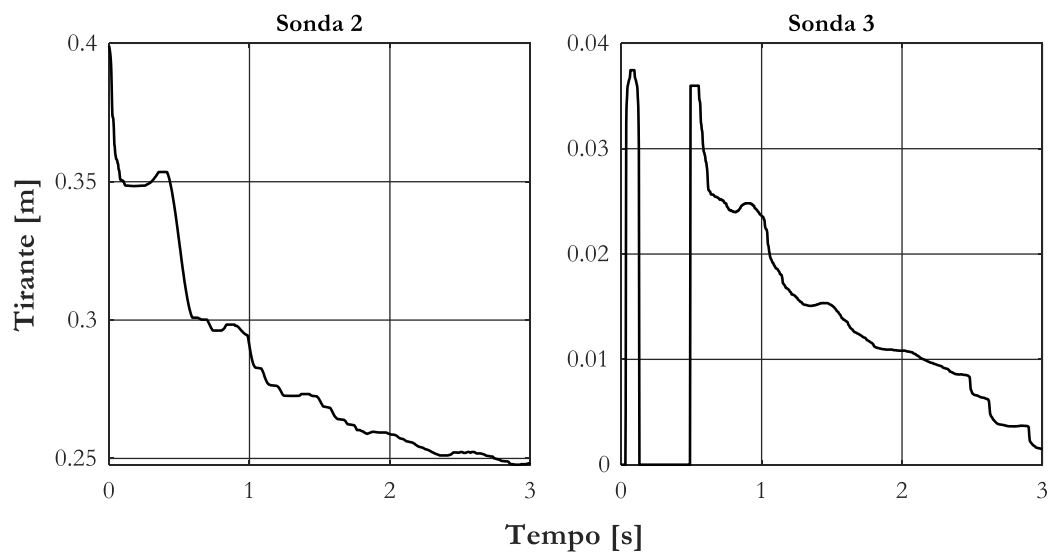
Simulazione 3
Carico idraulico 0,34 m



Simulazione 4
Carico idraulico 0,37 m

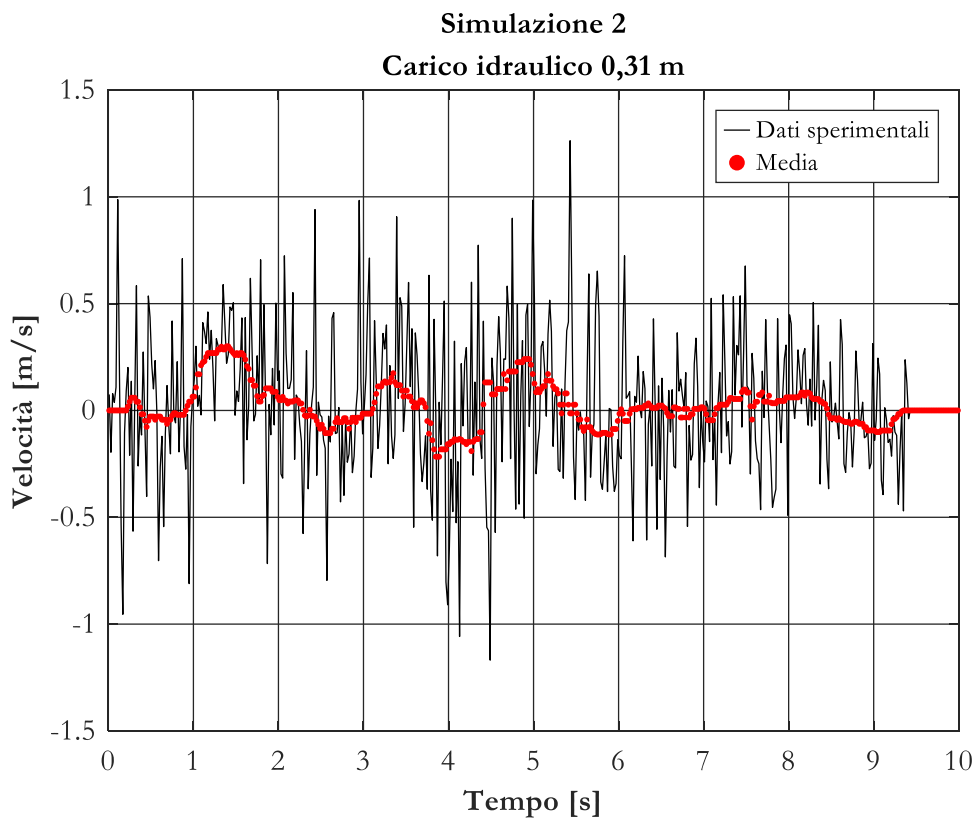
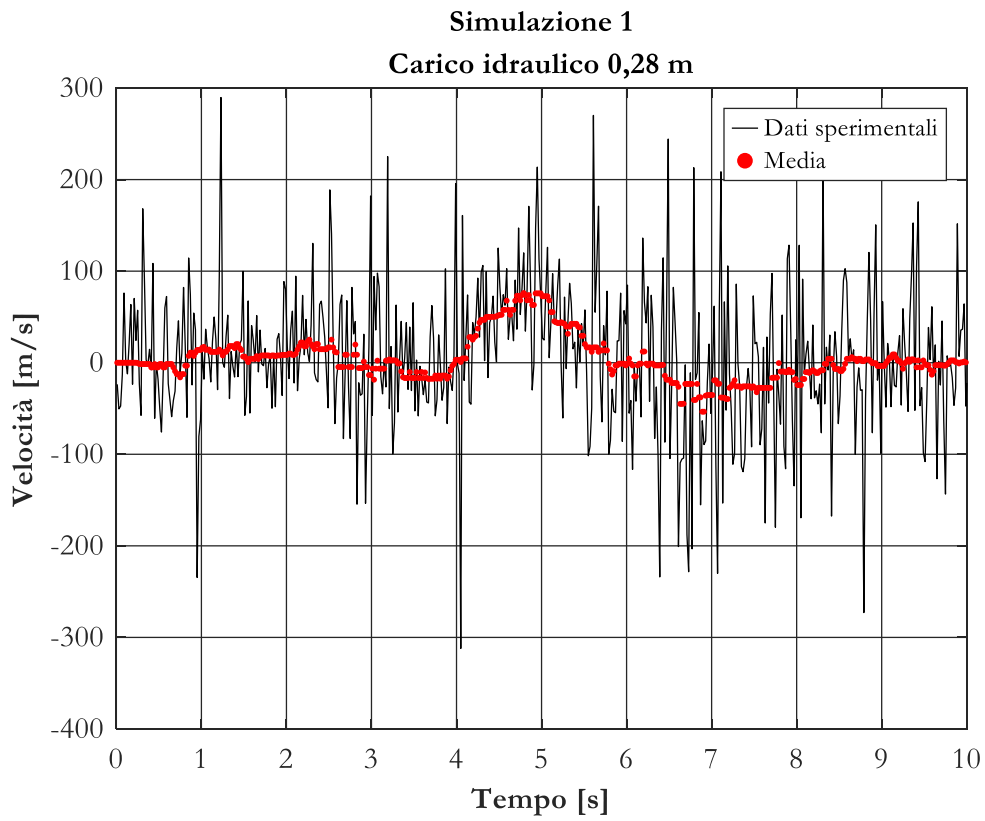


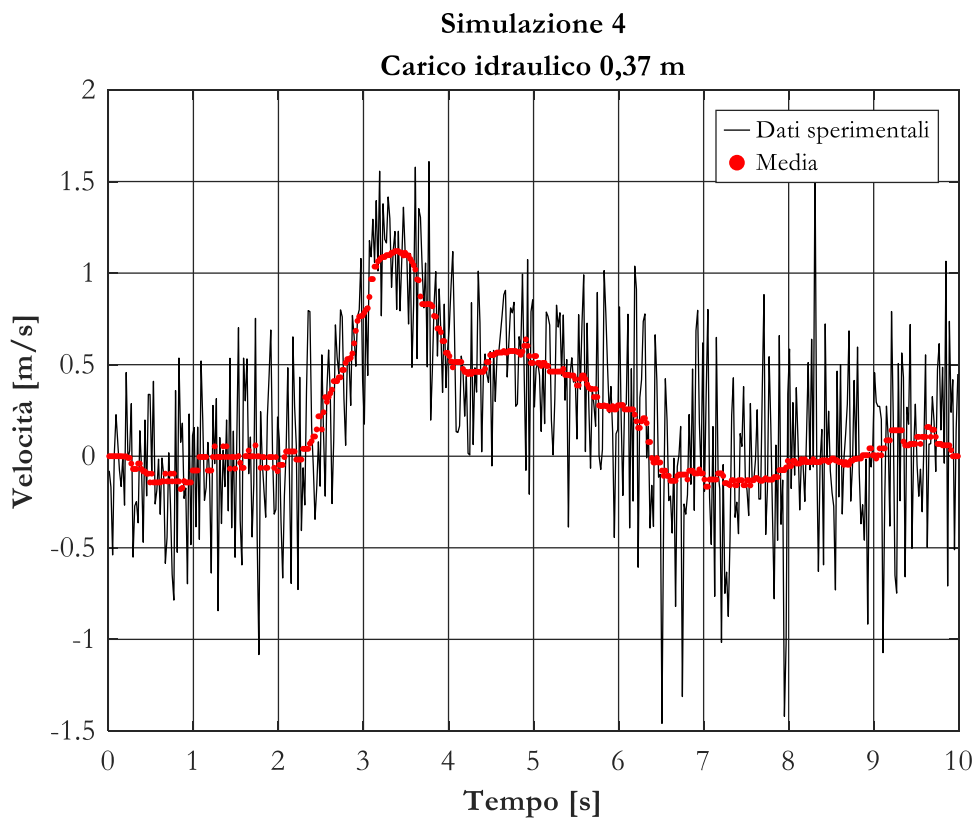
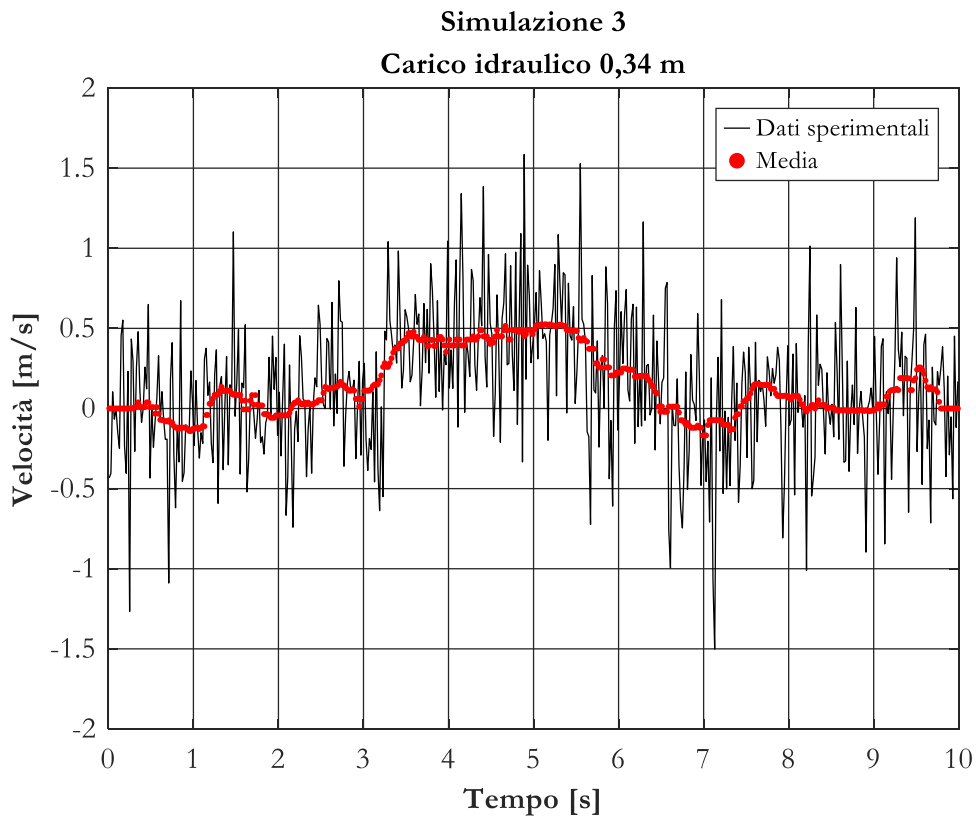
Simulazione 5 Carico idraulico 0,40 m



In quest'ultima simulazione è evidente la perdita di segnale che caratterizza la sonda 3 nei primi istanti del passaggio dell'onda.

In conclusione si riportano anche i dati sperimentali che riguardano le velocità, misurate con ADV nel punto di misura 3 (vedi Figura 32). Il segnale risulta essere molto rumoroso, motivo per cui è stato scelto di sovrapporre il risultato ottenuto dall'applicazione di un filtro mediano.





Simulazione 5
Carico idraulico 0,40 m

