



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Psicologia Generale

Corso di laurea in Scienze Psicologiche Cognitive e Psicobiologiche

Elaborato finale

Riconoscere i dati falsi con la legge di Benford

Recognizing fake data with Benford's law

Relatore: Prof. Massimo Nucci

Laureando: Michael Ferrarese

Matricola: 1191194

Anno Accademico: 2020/2021

Indice:

| | |
|--|----|
| 1. Introduzione..... | 3 |
| 2. La frode scientifica..... | 5 |
| 3. La legge dei numeri anomali..... | 11 |
| 3.1 La spiegazione geometrica della legge..... | 14 |
| 3.2 Sessant'anni dopo..... | 15 |
| 4. Questa legge funziona?..... | 17 |
| 5. Evidenze empiriche e possibili utilizzi della legge di Benford..... | 19 |
| 6. Quando la legge di Benford non funziona..... | 23 |
| 7. Una nota su R e la legge di Benford..... | 25 |
| 7.1 La funzione $rnorm()$ | 26 |
| 8. Conclusione..... | 29 |
| 9. Bibliografia..... | 31 |
| 9.1 Sitografia..... | 32 |

1. Introduzione

In questo elaborato sono state discusse principalmente la frode scientifica e la legge di Benford. La frode scientifica ha portato con sé molte domande a cui si è provato a dare risposta. Tra le molte domande che hanno trovato risposta, sono stati analizzati: i motivi che spingono un ricercatore o ricercatrice a commettere una frode; i metodi attualmente in uso per combattere le frodi e il perché essi non funzionano; come ridurre i casi di frode. In seguito, è stata analizzata la legge di Benford, una legge di distribuzione dei numeri, che tra le sue caratteristiche vanta la possibilità di discriminare set di dati falsi da set di dati veri. Questa legge è stata prima spiegata e successivamente, con l'ausilio di prove scientifiche, è stato discusso il suo possibile utilizzo in campo scientifico e dei limiti che presenta. È stato anche descritto come usare, in modo semplice, la legge di Benford nel linguaggio di programmazione e software R.

2. La frode scientifica

La frode scientifica è divisa in tre gruppi principali: la fabbricazione, la falsificazione ed il plagio. Queste tre azioni sono commesse intenzionalmente o in seguito a negligenza del ricercatore o della ricercatrice. Con il termine fabbricazione si intende l'invenzione totale di un set di dati, cioè non raccogliere neanche un dato. La falsificazione si riferisce alla manipolazione di uno strumento di laboratorio in maniera non consona all'esperimento, il quale comporta dei dati non reali, oppure si riferisce alla modificazione di dati dopo la raccolta. Il plagio invece si riferisce all'appropriazione del lavoro altrui senza darne credito (National Science Foundation, 2001, in Stroebe, Postmes, & Spears, 2012).

Una frode scientifica, quando viene scoperta, ha quattro conseguenze maggiori, la prima è che danneggia la carriera delle persone che hanno collaborato alla ricerca, inconsapevoli della frode in atto. La seconda è che causa cattiva informazione sull'efficacia, ad esempio, di un trattamento o sulla somministrazione di un farmaco, causando in questo caso potenzialmente anche dei danni in chi assume quel farmaco. La terza è che provoca una perdita di denaro e di tempo, entrambe queste risorse potrebbero essere investite meglio, cioè in esperimenti che non comprendono un'attività di frode scientifica. Un esempio di perdita di soldi è Diederik Stapel, un famoso ricercatore olandese di psicologia sociale, che ha ricevuto come fondo di ricerca dal Netherlands Organization for Scientific Research (NWO) più di due milioni di euro, il problema è che Stapel fabbricava i dati delle sue ricerche. NWO ha poi fatto causa a Stapel per appropriazione indebita di fondi. Il tempo perso ad esempio è il tempo impiegato da altri ricercatori per cercare di replicare il risultato di un esperimento condotto con dati falsi. La replica molto probabilmente non riuscirà. Il quarto e ultimo danno è quello fatto all'immagine del campo (es. medicina, psicologia, ecc.) in cui viene commessa la frode (Stroebe et al., 2012).

La persona che viene scoperta a commettere una frode scientifica riceve una sorta di pena, ma varia da paese a paese e alcune volte anche dalla situazione o dal caso. Quello però che succede quasi sempre è che la persona perde il lavoro e viene esiliato/a dalla comunità scientifica. Alcuni scienziati si sono visti revocati il dottorato, altri invece hanno ricevuto delle condanne e sono finiti in carcere. Alcune università trattano i casi di frode in maniera privata per evitare scandali e danni d'immagine.

Abbiamo elencato i danni principali causati a se stessi e alla comunità dalle frodi, ma come si diventa frodatori?

Si pensa che all'inizio, il frodatore o frodatrice cominci con piccole cose (sì, come un bambino che commette un furto) per esempio aggiungendo un dato, creato da lui/lei, ad un set di dati in cui manca magari un solo dato di un soggetto, poi in un altro esperimento inventando i dati di un intero soggetto e piano piano avanzando fino ad arrivare a fabbricare di sana pianta l'intero set di dati. Nelle prime fasi, cioè inventare un dato o un soggetto, non ha enormi benefici. Ad esempio, inventare un dato su trecento non cambierà di molto il risultato di un esperimento. Quindi l'ipotesi di partenza dev'essere comunque fondata e l'esperimento dev'essere comunque fatto con un certo rigore metodologico, per ottenere il risultato atteso. La situazione cambia però se si inventano cinquanta dati su trecento perché in questo caso si possono alterare i parametri della distribuzione facendo avvicinare il risultato a quello atteso. Inventando un set di dati totalmente si ottiene, per forza, il risultato atteso. Quindi una persona falsifica i dati per ottenere un determinato risultato in un esperimento, ma qual è il guadagno effettivo nel fare tutto ciò?

Ci sono vari motivi che spingono una persona a commettere una frode scientifica. Uno dei primi è certamente legato alla misura con cui si valuta la produttività di un ricercatore, quest'ultima viene valutata principalmente in base alle citazioni ricevute, ovvero quanti altri ricercatori citano un suo lavoro; più è citato, più è importante nel suo campo. Una ricercatrice con molte citazioni sarà certamente favorita per un posto di lavoro rispetto ad una ricercatrice con poche citazioni. Per ottenere le citazioni principalmente serve una pubblicazione su un giornale importante del settore. Maggior importanza del giornale significa maggiori lettori e di conseguenza maggior probabilità di essere citati. Per pubblicare su questi giornali non basta una buona ipotesi e un buon metodo, servono anche dei risultati che supportino l'ipotesi e che la supportino quasi perfettamente, in caso contrario non si riesce a pubblicare su un giornale importante. Se non pubblici rischi di perdere il lavoro come ricercatore. Quindi il lavoro di chi fa ricerca è legato a doppio filo con la sua capacità di pubblicare articoli di qualità. I ricercatori o ricercatrici che hanno più citazioni di solito ottengono lavori migliori, il quale comporta aumenti di stipendio o magari ottengono più fondi per fare ricerca. In sostanza, un giovane ricercatore che vuole fare carriera nell'ambito della ricerca scientifica deve pubblicare articoli e una volta che viene riconosciuto come ricercatore promettente deve continuare a pubblicare articoli di

qualità. Se qualche esperimento non riesce, per mantenere lo status di ricercatore promettente questa persona dovrà modificare dei set di dati o fabbricarli totalmente, col fine di ottenere buoni articoli.

Fanelli (2009) ha eseguito una meta-analisi su 18 articoli scientifici multidisciplinari, pubblicati tra il 1987 ed il 2008, in cui si analizzava la frode scientifica e quanto era usata nella ricerca. In questi articoli dei ricercatori chiedevano a dei colleghi (soggetti), ad esempio, se avessero mai falsificato dati, se avessero mai visto qualcuno commettere una frode e altre domande simili. I dati raccolti poi sarebbero stati trattati in forma anonima. “Alla domanda esplicita se avessero mai fabbricato o falsificato o alterato o modificato dei dati per migliorare il risultato tra lo 0,3% e il 4,9% dei soggetti ha detto di sì, con una media ponderata di 1,97%”. Il 33,7% dei soggetti ha ammesso di aver usato metodi non consoni nella raccolta dei dati. Un numero maggiore di soggetti ha risposto affermativamente di aver modificato i dati per migliorare i risultati rispetto a quelli che hanno ammesso di aver riportato risultati che sapevano essere falsi. Questo significa che, nonostante l’azione fatta sia la medesima, i ricercatori vedono la modifica dei dati per migliorare i risultati come più legittima o migliore, da un punto di vista etico, rispetto al riportare dati falsi. Tra il 5,2% ed il 33,3% dei soggetti, con una media ponderata di 14,12%, ha risposto affermativamente alla domanda se era a conoscenza di un collega che avesse falsificato dei dati (Fanelli, 2009). I dati sopracitati sono di certo da prendere con cautela in quanto sono oggetto di vari fattori come la desiderabilità sociale. Per questo motivo i dati di Fanelli (2009) possono essere visti potenzialmente come la punta di un iceberg, perché un ricercatore onesto non avrebbe motivo di ammettere di aver falsificato dei dati, quando non l’ha fatto. Un frodatore, invece, ha più motivi per non ammettere di aver falsificato dei dati quando l’ha fatto.

La ricerca di Stroebe et al. (2012) riporta come la scienza usi due modi principali per scoprire le frodi, ovvero il processo di peer review e la replicazione degli esperimenti.

Il processo di peer review serve ai giornali scientifici prima di pubblicare un articolo per capire se questo è valido. I giornali fanno leggere l’articolo ad altri esperti di un settore per avere la loro opinione, questi ultimi molto spesso sono ricercatori e non hanno il compito esplicito di trovare frodi, devono solamente dire se un articolo rappresenta il progresso scientifico o no. Se però qualche ricercatore leggendo l’articolo trovasse incongruenze sui dati o qualche potenziale segnale di allarme per una frode, sarebbe

comunque estremamente cauto nel comunicare la cosa in quanto le conseguenze per chi ha scritto l'articolo potrebbero danneggiare la sua carriera irreparabilmente, anche se la frode non fosse avvenuta. Tuttavia, molte ricerche fraudolente non vengono riconosciute nel processo di peer review, anche perché i frodatori spesso producono dati simili a quelli che ci si aspetta di ottenere nella reale raccolta dei dati. L'altro modo principale per scoprire le frodi è la replicazione degli esperimenti, questo metodo però ha molti limiti. Ripetere un esperimento ed ottenere risultati diversi da quelli dell'esperimento originale non significa che l'esperimento originale sia falso. Ci possono essere molti motivi dietro una replicazione fallita, come una mancata descrizione accurata del metodo nell'esperimento originale o una mancata replicazione corretta del metodo originale o una mancanza di abilità nello sperimentatore che tenta di replicare l'esperimento o migliaia di altri motivi. Specie in una disciplina come psicologia non si può dire, neanche dopo molteplici tentativi falliti di replicazione, che un esperimento sia falso al 100% basandosi solo sulla replicazione dello stesso. Di certo la replicazione è uno strumento utile per dare un segnale d'allarme, molto forte, su una possibile frode. Tuttavia, viene poco usata perché ci sono pochi vantaggi per un ricercatore che replica un esperimento, rispetto ad un ricercatore che crea un esperimento nuovo. Una replica di un esperimento viene difficilmente pubblicata in un giornale di prestigio elevato e soprattutto riceverà, potenzialmente, meno citazioni di un esperimento nuovo.

La scienza si basa sulla fiducia, un ricercatore non pensa subito ad una frode nel mentre sta leggendo l'articolo di un collega. Un solo articolo è, molto spesso, insufficiente per dire che un ricercatore o ricercatrice stia commettendo una frode. Peer review e replicazione, che sono ritenuti i principali metodi per scovare frodi, in verità non sono i metodi più efficaci per trovare frodatori o frodatrici. Il metodo che risulta migliore per scovare le frodi sono gli informatori, cioè anche solo una persona, spesso dottorando o dottoranda o coautore o coautrice, che è vicina al ricercatore o ricercatrice che commette la frode. Questa persona informa dei suoi sospetti una seconda persona, magari incaricata dall'università, a volte anche il rettore o la rettrice, e questa seconda persona controllerà se si tratta di frode o meno. Un esempio concreto del funzionamento di questo meccanismo è la scoperta del frodatore D. Stapel. Tre suoi dottorandi nel corso di tre anni hanno raccolto dubbi su determinati comportamenti e affermazioni negli articoli del loro professore. La prova più schiacciante era che una riga di punteggi in uno studio, era

identica ad una riga di punteggi di un altro studio. Quindi i tre studenti hanno fatto presente dei loro sospetti al capo dipartimento, che a sua volta ha contattato il rettore (Stroebe et al., 2012).

Quindi un solo articolo spesso non basta per definire una frode e i due metodi, replicazione e peer review, funzionano se si tratta di un unico articolo considerato falso. Un ricercatore o ricercatrice che vuole pubblicare un articolo scientifico ha due strade principali: mandare l'articolo ad un giornale scientifico normale (dove poi tramite abbonamenti o comprando l'articolo lo si ottiene, anche se è frutto del lavoro di un ricercatore pagato, ma non dal giornale) oppure mandarlo ad una rivista open access. Queste riviste si fanno pagare dal ricercatore che vuole pubblicare l'articolo per pubblicarlo, però tutti lo possono leggere senza doverlo comprare. Questo significa che, se il giornale scientifico normale si può permettere di rifiutare un articolo, perché magari trova incongruenze nei dati o qualche altra cosa; la rivista open access più difficilmente rifiuterà un articolo perché il suo ricavo si basa direttamente sulla sua capacità di pubblicare e non su quanto è interessante l'articolo.

3. La legge dei numeri anomali

Nel 1881 un astronomo, di nome Simon Newcomb, nota che in un libro con le tavole dei logaritmi le pagine che iniziavano con il numero 1 erano più consumate delle pagine che iniziavano con il numero 2, le pagine con il 2 di quelle con il 3 e così via fino al numero 9. Questo lo porta a pubblicare un articolo (Newcomb, 1881) in cui dà una spiegazione matematica al perché i numeri minori sono più consumati dei numeri maggiori. Nell'articolo fa anche il primo calcolo della probabilità di occorrenza dei numeri, cioè ha calcolato la probabilità che un numero, preso a caso da un insieme, abbia come prima cifra a e seconda cifra b . Nella Tabella 1 sono riportati i suoi calcoli. Si noti che divide la prima cifra di un numero e la seconda cifra in quanto hanno probabilità diverse e che non continua con la terza cifra in quanto “nel caso del terzo numero la probabilità diventerà circa uguale per ogni cifra, e dalla quarta in poi la differenza sarà impercettibile” (Newcomb, 1881, p. 39, traduzione mia).

Tabella 1. Probabilità occorrenza numeri di Newcomb.

| Cifra | Prima Cifra | Seconda Cifra |
|-------|-------------|---------------|
| 0 | | 0,1197 |
| 1 | 0,3010 | 0,1139 |
| 2 | 0,1761 | 0,1088 |
| 3 | 0,1249 | 0,1043 |
| 4 | 0,0969 | 0,1003 |
| 5 | 0,0792 | 0,0967 |
| 6 | 0,0669 | 0,0934 |
| 7 | 0,0580 | 0,0904 |
| 8 | 0,0512 | 0,0876 |
| 9 | 0,0458 | 0,0850 |

Dal 1881 l'articolo di Newcomb viene dimenticato, successivamente viene pubblicato Benford (1938) in cui l'autore, Frank Benford, descrive la legge dei numeri anomali. L'articolo presenta un'evidente ispirazione da quello di Newcomb, ma Benford non cita mai l'astronomo. L'articolo stabilisce alcune delle fondamenta sulle quali si basa la legge di Benford o la legge dei numeri anomali, modo in cui Benford chiama la legge. Il

fondamento più importante è che prendendo un grande insieme di numeri senza relazione tra loro di cui consideriamo solo la prima cifra, questo sarà in buon accordo con la legge di distribuzione di Benford. Facciamo un esempio, prendiamo un giornale, possibilmente un giornale di economia in modo da avere più numeri possibili. Segniamo quindi tutti, o meglio quasi tutti, i numeri che vediamo, saranno numeri legati a prezzi, percentuali, ecc., ma comunque numeri che potremmo definire “naturali”. Evitiamo di segnare invece, tutti i numeri che non sono “naturali” come il numero delle pagine o numeri di telefono. Ora contiamo quanti numeri “naturali” iniziano con il numero 1, quanti con il numero 2 e così via fino al 9. Inseriamo i numeri in una tabella di frequenza, calcolando anche la frequenza percentuale. Si noterà la tendenza dei numeri a conformarsi alla legge di Benford.

Benford (1938) fa molti esempi di insiemi di numeri su cui la legge si conforma, ad esempio area dei fiumi, popolazione, peso atomico, ecc., in totale ha usato più di 20 mila numeri. Nella scelta degli insiemi di numeri Benford ha scelto insiemi che potenzialmente non avessero un limite e che non fossero troppo ristretti. Per limite si intende che non si può scegliere volontariamente, ad esempio, di prendere solo i dati da 1 a 1000. Per troppo ristretti si intende che sarebbe bene i numeri non fossero concentrati attorno ad un punto o attorno ad una media, ad esempio un insieme molto grande di numeri con solo dati concentrati tra i numeri 300 e 400 non va bene.

Benford (1938, p. 554, traduzione mia) afferma che “La frequenza della prima cifre segue la seguente relazione logaritmica

$$F_a = \log \left(\frac{a + 1}{a} \right)$$

dove F_a è la frequenza della cifra a nel primo posto dei numeri usati”. Questa è la formula con cui Benford spiega la distribuzione di probabilità della prima cifra. È da notare che la prima cifra ha nove possibili numeri, da 1 a 9, nel mentre la cifra che è nei posti successivi al primo ha dieci possibili numeri, da 0 a 9. La cifra nei posti successivi al primo dipende dalla cifra o dalle cifre precedenti. Ad esempio, prendiamo un numero con più di una cifra e chiamiamo la prima cifra a e la seconda cifra b . Se questo numero fosse a due cifre potremmo scriverlo come ab (es. 11) e il numero che lo segue sarebbe $ab + 1$ (es. 11+1). Benford (1938, p. 555, traduzione mia) inoltre afferma che “L’intervallo logaritmico tra ab e $ab+1$ è $\log(ab+1) - \log ab$, mentre l’intervallo coperto dai dieci

possibili numeri che stanno al secondo posto è $\log(a+1) - \log a$. Quindi la frequenza F_b della cifra al secondo posto b che segue la cifra al primo posto a è

$$F_b = \log\left(\frac{ab+1}{ab}\right) / \log\frac{a+1}{a}$$

ne segue che la probabilità di una cifra nella posizione q di un numero è

$$F_b = \frac{\log\frac{abc \cdots p(q+1)}{abc \cdots pq}}{\log\frac{abc \cdots o(p+1)}{abc \cdots p}}$$

La frequenza di q dipende da tutte le cifre che la precedono, più cifre ha davanti e maggiore sarà la probabilità di q di avere equa probabilità di occorrenza per i dieci numeri possibili, che la compongono. Ad esempio, un numero composto da moltissime cifre avrà l'ultima cifra che ha la stessa probabilità, pari a 0,1, di avere il numero 0, 3 o 9, cosa che non accade ovviamente con le prime cifre.

La legge tra le sue caratteristiche presenta anche l'invarianza di scala, ovvero prendendo un insieme di numeri che si conforma alla legge di Benford e moltiplicando tutti i numeri dell'insieme per un valore prefissato, otterremo come risultato un nuovo insieme di numeri che a sua volta si conformerà alla legge di Benford.

Nella Figura 1 si vede la distribuzione logaritmica delle frequenze percentuali di probabilità di occorrenza dei numeri della prima cifra. Le frequenze riportate nella Figura 1 sono le stesse, però in percentuale, della Tabella 1 con i dati di Newcomb.

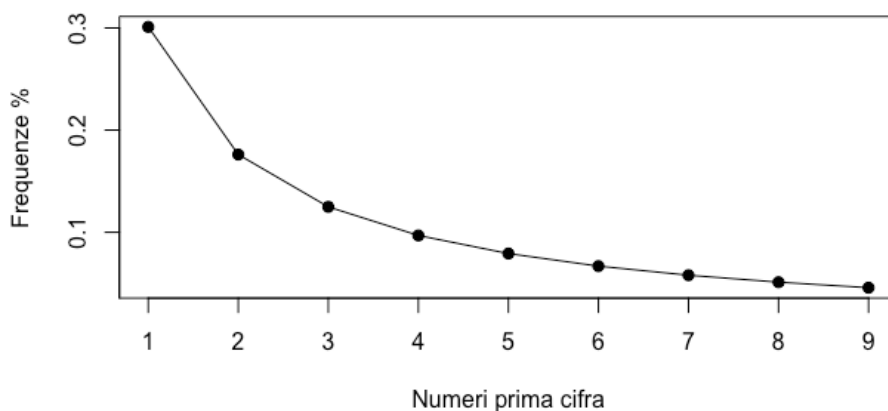


Figura 1. Probabilità di occorrenza dei numeri della prima cifra in percentuale.

3.1 La spiegazione geometrica della legge

Il motivo per cui la legge funziona e gli insiemi di numeri si conformano ad una distribuzione logaritmica, risiede nelle basi geometriche della legge. Per spiegare queste basi, Benford (1938, pp. 557-558, traduzione mia) afferma che se noi “Iniziamo con il numero 1 e contiamo fino a 10.000, per esempio, l’1 sarebbe stato usato (come prima cifra) 1.112 volte o 11,12% di tutte le volte. Se estendessimo il conteggio a 19.999 si aggiungerebbero 9.999 numeri 1, portando l’1 ad un uso del 55,55% dei 19.999 numeri. Quando si raggiunge il numero 20.000 bisogna aspettare di aggiungere altri 90.000 numeri prima di ritrovare l’1 come prima cifra di un numero, che avviene con il 100.000. A questo punto la percentuale di 1 presenti si è ridotta a 11,112%”. Nella Figura 2 si vede rappresentato quanto appena detto. Adesso consideriamo tre parti o sezioni di questo conteggio: 10.000-20.000, 20.000-99.999, 99.999-100.000. Queste tre sezioni hanno percentuali di occorrenza dell’1 come prima cifra differenti, ma se fossero scritte tre equazioni, una per sezione per definire la curva della Figura 2, l’area sotto la curva sarebbe molto vicina a 0,30103 o 30,103%, mentre tutta l’area del grafico ha un’area di 1 (Benford, 1938).

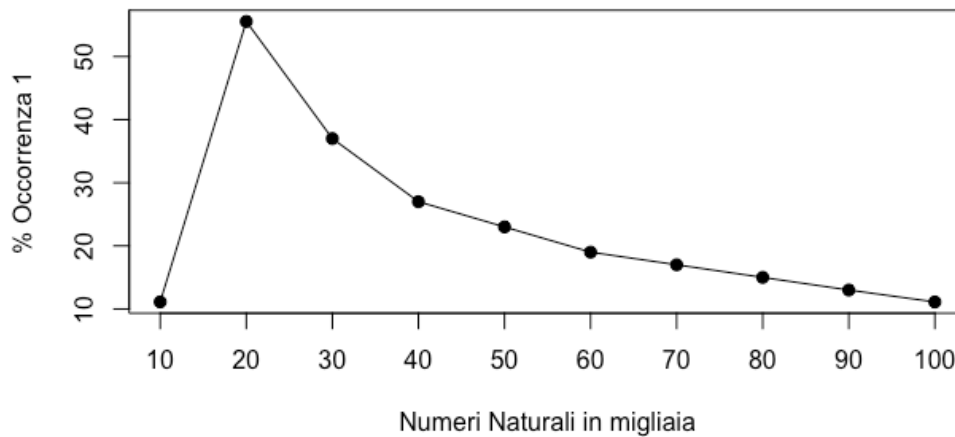


Figura 2. Percentuale di occorrenza del numero 1 come prima cifra nei numeri da 10.000 a 100.000.

3.2 Sessant'anni dopo

Benford pubblica il suo articolo nel 1938, ma la sua pubblicazione viene trattata con scetticismo dal mondo scientifico in quanto certi set di dati soddisfano la legge di Benford e altri non la soddisfano. Successivamente venne scoperto il teorema “campioni random da distribuzioni random”, selezionando a random delle distribuzioni, ossia in un modo senza bias e prendendo dei campioni a random da queste distribuzioni, l'unione di questi campioni seguirà la legge di Benford, anche se le distribuzioni prese singolarmente non la seguissero (Hill, 1998). Non c'è ancora un metodo che riesca a prevedere quali set presi singolarmente potrebbero soddisfare la legge e quali no.

4. Questa legge funziona?

La legge di Benford fino agli anni '90 circa del secolo scorso, veniva chiamata principalmente "il fenomeno della prima cifra", in quanto veniva considerata come un'osservazione matematica, non come una legge vera e propria. In seguito, ha preso piede l'idea che si potesse applicare a moltissimi set di dati e che le sue funzioni fossero ancora da scoprire, cambiando anche la percezione della stessa, da osservazione a legge. Quando si fabbricano dei dati si tende a crearli in maniera non uniforme alla legge di Benford, cioè dati che non seguono la distribuzione logaritmica. Questo può portare a scoprire una possibile frode.

Assumiamo che un set di dati veri si conformi alla legge di Benford, un set di dati falso, perché fabbricato, invece non si conforma. La differenza sostanziale è ovviamente nel fatto che le prime cifre del set falso, non seguiranno le percentuali di distribuzione viste nella Tabella 1 o nella Figura 1. Chi fabbrica dati tende principalmente a seguire due strade. La prima è credere che i numeri da 1 a 9 siano equiprobabili o uniformi come prima cifra, quindi avranno tutti una probabilità di occorrenza, secondo il frodatore, di 0,111 o 11,1%. L'altra strada, molto più usata, è sovrastimare la presenza dei numeri 4, 5, 6, come prima cifra, rendendoli molto più presenti in un set falso di quanto lo siano in verità in un set (Hill, 1996).

Un esempio concreto di questo meccanismo è descritto in Hill (1988). Nell'articolo l'autore conduce un esperimento nel quale chiedeva a più di settecento studenti di calcolo di scrivere un numero di sei cifre su un foglio di carta. Questo numero doveva essere "spontaneo", cioè non doveva uscire, ad esempio, da una calcolatrice. Di queste sei cifre solo le prime due erano importanti ai fini dell'esperimento e queste venivano messe in una tabella di frequenza con le relative percentuali di occorrenza per ogni prima cifra e per ogni seconda cifra. Poi le frequenze percentuali osservate venivano confrontate con le frequenze della legge di Benford e le frequenze attese, che sono uniformi o equiprobabili. I risultati si possono vedere nella Tabella 2. Guardando la Tabella 2 e dopo aver fatto un test chi-quadrato per quanto riguarda la prima cifra, con $\alpha=0,05$ si può rigettare l'ipotesi nulla che le frequenze osservate seguano la legge di Benford. La seconda cifra invece permette, dopo un test chi-quadrato con $\alpha=0,05$, di accettare l'ipotesi nulla che la frequenza osservata segua la legge. Quindi la prima cifra non è conforme, la seconda cifra invece lo è.

Tabella 2. Frequenze di Hill (1988).

| Prima Cifra | Osservate | Benford (1) | Uniformi | Seconda Cifra | Osservate | Benford (2) | Uniformi |
|----------------|-----------|----------------|----------|------------------|-----------|----------------|----------|
| | | | | 0 | 0,058 | 0,120 | 0,100 |
| 1 | 0,147 | 0,301 | 0,111 | 1 | 0,106 | 0,114 | 0,100 |
| 2 | 0,100 | 0,176 | 0,111 | 2 | 0,117 | 0,109 | 0,100 |
| 3 | 0,104 | 0,125 | 0,111 | 3 | 0,109 | 0,104 | 0,100 |
| 4 | 0,133 | 0,097 | 0,111 | 4 | 0,105 | 0,100 | 0,100 |
| 5 | 0,097 | 0,079 | 0,111 | 5 | 0,100 | 0,097 | 0,100 |
| 6 | 0,157 | 0,067 | 0,111 | 6 | 0,112 | 0,093 | 0,100 |
| 7 | 0,120 | 0,058 | 0,111 | 7 | 0,128 | 0,090 | 0,100 |
| 8 | 0,084 | 0,051 | 0,111 | 8 | 0,073 | 0,088 | 0,100 |
| 9 | 0,058 | 0,046 | 0,111 | 9 | 0,092 | 0,085 | 0,100 |

Dai risultati si possono trarre tre conclusioni che i numeri fabbricati da questi studenti hanno in comune con la legge di Benford: la prima è che la frequenza del numero 1 è più elevata rispetto agli altri e anche di quella attesa o uniforme; la seconda è che la frequenza dei numeri 8 e 9 è comunque molto bassa rispetto agli altri; terza conclusione, la seconda cifra è più uniforme nella distribuzione rispetto alla prima cifra (Hill, 1988).

Si ricorda che la prima cifra non segue la distribuzione, la seconda cifra invece la segue un po'. E guardando i dati si hanno già dei segnali dall'allarme in quanto il numero 1 è presente la metà delle volte in cui dovrebbe esserci e invece i numeri 4 e 6, sono eccessivamente presenti, il 6 perfino più dell'1. Segnali dall'allarme che potrebbero far drizzare le antenne riguardo una possibile frode in un esperimento.

Nella seconda cifra l'unico numero che si discosta notevolmente da Benford è lo 0, invece il 7 è leggermente più presente del dovuto.

5. Evidenze empiriche e possibili utilizzi della legge di Benford

Dal 2000 in poi, la legge di Benford ha acquisito un po' di notorietà in campo scientifico, quindi qualche ricercatore ha cominciato a studiare i possibili utilizzi della legge in maniera più efficiente e più applicata alla letteratura scientifica rispetto agli esperimenti del passato. Diekmann (2007) ha fatto proprio quanto appena descritto. L'autore è un sociologo e si è interrogato circa come la legge potesse essere usata nella ricerca scientifica. I suoi ambiti di ricerca erano sociologia e psicologia, ma ha scelto per l'esperimento di usare i coefficienti di regressione in quanto sono "ubiquitari" nella letteratura scientifica. Ha formulato quindi due ipotesi: la prima è che i coefficienti di regressione o altre stime statistiche si conformassero alla legge di Benford; la seconda è che si possono distinguere i coefficienti di regressione veri da quelli falsi. Diekmann ha raccolto circa cinquemila cifre da due giornali scientifici, col fine di creare vari set di dati standard per testare la prima ipotesi. I dati raccolti comprendevano stime statistiche, nello specifico erano medie, coefficienti di regressione standardizzati e non standardizzati, deviazioni standard, coefficienti di correlazione. Il set di dati composto da circa mille numeri e formato da coefficienti di correlazione non standardizzati, si conforma quasi perfettamente alla distribuzione di Benford. La prima ipotesi è stata confermata. Nella Figura 3 si possono vedere le due distribuzioni, quella di Benford e quella ottenuta dai dati dei giornali, considerando solo i coefficienti di correlazione non standardizzati.

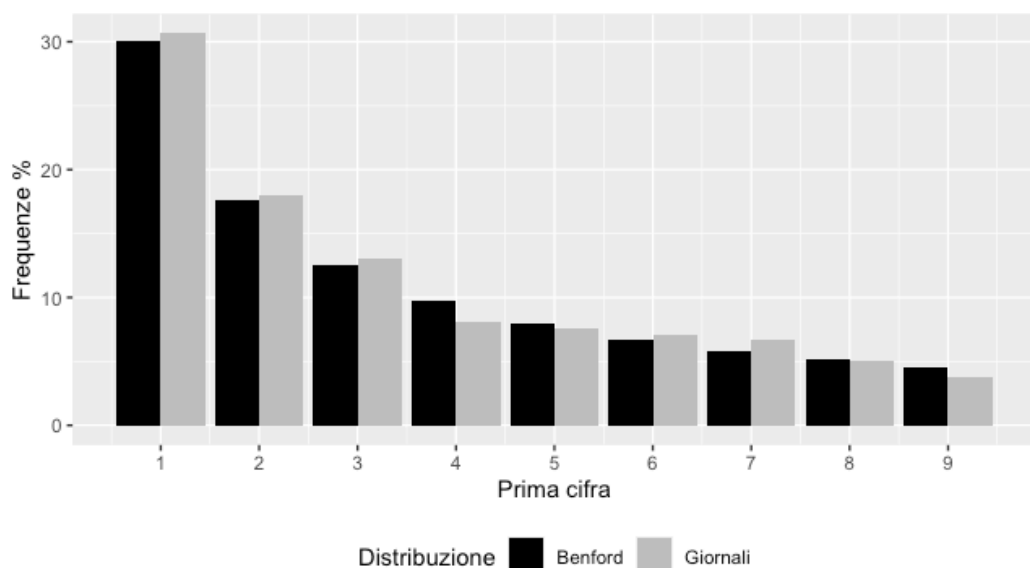


Figura 3. Distribuzione dei coefficienti di correlazione non standardizzati e Benford.

Gli altri confronti tra Benford e le altre stime statistiche sopracitate (medie, coefficienti di regressione standardizzati, deviazioni standard, coefficienti di correlazione) non hanno dato un esito positivo. In seguito, Diekmann (2007) ha eseguito un altro confronto tra la distribuzione di Benford e tra quasi millecinquecento numeri di cui però ha considerato sia la prima cifra, sia la seconda cifra. Un test chi-quadrato rigetta l'ipotesi nulla che i dati della prima cifra di questo nuovo confronto si conformino a Benford, tuttavia questo è dovuto al fatto che il 5 è eccessivamente presente nei dati (la proporzione è Benford=0,079, Giornali=0,101). La seconda cifra invece mostra maggior accordo con la distribuzione di Benford a livello statistico. Graficamente, prima e seconda cifra mostrano la curva discendente che ci si aspetterebbe di vedere, il grafico della prima cifra sarebbe molto simile a quello della Figura 3. Quindi anche questo secondo test, sui coefficienti di regressione non standardizzati reali, sembra confermare che questo tipo di stima statistica tende a conformarsi alla legge di Benford. Ora bisogna testare la seconda ipotesi cioè se tramite Benford si riesce a distinguere i coefficienti di regressione non standardizzati falsi da quelli veri. A degli studenti e studentesse di statistica è stato chiesto di inventare dei coefficienti di regressione che supportassero certe ipotesi. I coefficienti inventati dovevano essere di quattro cifre. I soggetti sono stati divisi in tre gruppi, nel primo e secondo gruppo ogni soggetto doveva creare dieci coefficienti, nel terzo gruppo ogni soggetto creava dieci set e ogni set conteneva dieci coefficienti, quindi ogni soggetto del terzo gruppo doveva fare cento coefficienti. Il primo ed il secondo gruppo sono stati analizzati insieme. Il test chi-quadrato tra prima cifra dei coefficienti del primo e secondo gruppo e tra la legge di Benford non ha permesso di rigettare l'ipotesi nulla. Quindi non è stato possibile discriminare i dati falsi. Nella Figura 4 sono rappresentati i dati del test appena svolto, si può constatare come la prima cifra inventata dei coefficienti di regressione non standardizzati segua la curva discendente, cosa inaspettata. Invece, la seconda cifra dei coefficienti del primo e secondo gruppo devia in modo statisticamente significativo dalla legge di Benford, permettendo il riconoscimento dei dati falsi. Nella Figura 5 si può vedere la seconda cifra inventata e la sua non conformità alla legge di Benford. Ricapitolando, solo la seconda cifra inventata dei coefficienti di regressione non standardizzati si discosta dalla distribuzione di Benford, la prima cifra inventata al contrario, non si discosta in maniera statisticamente significativa. Il terzo gruppo invece ha permesso allo sperimentatore di fare un'analisi su singolo soggetto, in modo da

confrontare i risultati del primo e del secondo gruppo con i singoli soggetti del terzo gruppo per cogliere discrepanze. I risultati ottenuti dai singoli erano in linea con quelli ottenuti dai gruppi. In questo caso, con i coefficienti di regressione non standardizzati, quindi non è la prima cifra che conta come indicatore di possibile frode, ma è la seconda cifra (Diekmann, 2007).

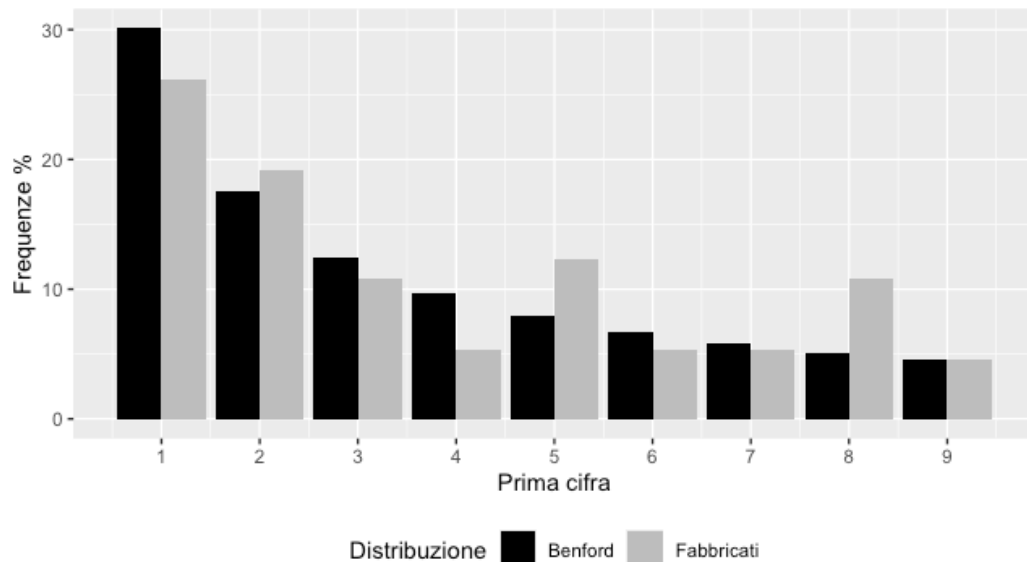


Figura 4. Distribuzione (conforme) della prima cifra nei dati inventati e Benford.

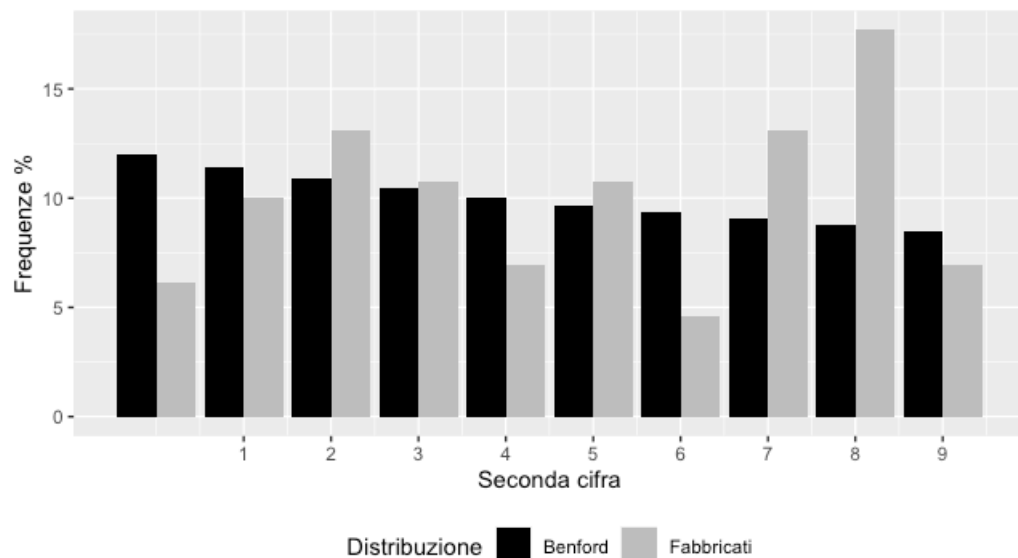


Figura 5. Distribuzione (non conforme) della seconda cifra nei dati inventati e Benford.

Alcuni autori (Horton, Kumar, & Wood, 2020) hanno trovato un'altra evidenza empirica del funzionamento della legge. Nella ricerca di Horton et al. (2020) si sono confrontati i

dati delle ricerche del Professor James Hunton e la loro conformità alla legge di Benford. James Hunton era un Professore di contabilità che fabbricava dati. La sua frode è stata scoperta quando uno scrupoloso lettore o una lettrice ha inviato una lettera ad un giornale che aveva pubblicato un articolo di Hunton. Il lettore, nella lettera, ha espresso dubbi riguardo l'irrealistica grandezza del campione usato nell'esperimento di Hunton. Questa lettera ha scatenato una cascata di reazioni che ha portato al ritiro di trentasette articoli. In questo caso quindi la legge di Benford dovrebbe essere in grado di intervenire, di evidenziare una possibile frode, prima che una lettrice scrupolosa o un lettore si faccia delle domande. Horton et al. (2020) hanno considerato gli articoli di Hunton, cinquantacinque in totale, di cui trentasette ritirati e diciotto non ritirati. Questi articoli hanno fatto parte di due gruppi sperimentali, uno con articoli ritirati ed uno con quelli non ritirati. Nel gruppo di controllo hanno messo quasi duecentocinquanta articoli, tutti non ritirati, pubblicati nei giornali dove pubblicava Hunton e simili metodologicamente a quelli dei gruppi sperimentali. Il confronto, della prima cifra dei dati, tra gli articoli di Hunton ritirati, gli articoli del gruppo di controllo e la legge di Benford ha dato come risultato che la legge di Benford è in grado di discriminare gli articoli ritirati da quelli di controllo, in quanto quelli ritirati deviano in modo statisticamente significativo rispetto a Benford. Quelli di controllo invece si conformano. Gli articoli di Hunton non ritirati, nel confronto con il gruppo di controllo e Benford, danno risultati misti, in quanto in alcuni test mostrano devianza dal gruppo di controllo, in altri test invece no. Per questo gli articoli non ritirati di Hunton necessiterebbero di un maggior esame. Dopo l'analisi di Hunton, gli autori si sono chiesti se questo metodo potesse andar bene anche per altri ricercatori con articoli ritirati. Quindi hanno raccolto gli articoli ritirati del Professor Stapel (psicologia sociale), Professor Walumbwa (gestione aziendale), Professor Lichtenthaler (gestione aziendale), Professor Sato (medicina). Il gruppo di controllo era costituito nello stesso modo del gruppo di controllo di Hunton. Questi nuovi articoli ritirati mostrano devianza dalla legge di Benford, anche se in forma minore rispetto agli articoli ritirati di Hunton (Horton et al., 2020). In conclusione, i risultati di questo esperimento sono stati molto soddisfacenti in quanto prendendo un insieme di articoli falsi e confrontandoli con un altro insieme di articoli, presumibilmente veri, si sono potuti distinguere i due insiemi di articoli tramite Benford. Tutto questo non sembra limitato ad economia.

6. Quando la legge di Benford non funziona

Alcuni psicometristi (Hartgerink, Voelkel, Wicherts, & van Assen, 2019) hanno cercato un metodo per rilevare dati fabbricati usando strumenti statistici come analisi dei p-value, analisi della varianza, effect-size estremi, analisi delle cifre. L'analisi delle cifre include l'analisi della prima cifra, seguendo la distribuzione di Benford e comprende anche l'analisi dell'ultima cifra. L'ultima cifra in un numero di molte cifre ha una probabilità di occorrenza, dei numeri da 0 a 9, uniforme (0,1 o 10%), quindi se la distribuzione non fosse uniforme potrebbe indicare una possibile frode. La legge di Benford ha dei limiti alla sua applicabilità: *i* si può applicare solo con scale di misura a rapporti (cosa non sempre possibile in psicologia); *ii* ha bisogno di un set di dati abbastanza ampio per essere applicata (un'autrice (Fewster, 2009, in Hartgerink et al., 2019) afferma che la legge funziona se i dati sono da 1 a 1.000.000, tuttavia, funziona anche con set molto meno ampi), si può dire che più è ampio un set di dati, maggiore è la sua probabilità di conformarsi a Benford; *iii* i numeri non devono essere soggetti a preferenze di cifre (“per esempio dovuto alla preferenza psicologica dei numeri arrotondati”); *iiii* i numeri non devono essere sottoposti a limiti (Hartgerink et al., 2019). Una violazione di queste quattro condizioni porta ad una compromissione dei risultati della legge. Nella ricerca di Hartgerink et al. (2019) è stato richiesto a 28 partecipanti, familiari con il compito Stroop, di creare dei possibili dati di un esperimento sul compito Stroop. Un piccolo esempio dei dati falsificati si può vedere nella Tabella 3. I dati falsificati sono la media e la deviazione standard. Il test della prima cifra, confrontato con Benford, è stato un test chi-quadrato in quattro condizioni: media (congruente), deviazione standard (congruente), media (incongruente), deviazione standard (incongruente). I dati sia veri che falsi sono entrambi attorno ad una media, come risultato non si conformano alla distribuzione di Benford, quindi è sconsigliato fare test di conformità con Benford su dati che si concentrano su un punto, come in questo caso. I tempi di reazione sono una misura senza limiti in teoria, nella pratica i limiti ci sono, come dimostrato da questo esperimento. Ci sono varie condizioni che un set di dati deve soddisfare per essere conforme alla distribuzione di Benford, però anche una volta che le condizioni sono soddisfatte non è sicuro che un set si conformi. Non si può prevedere quale set si conformerà prima di fare il test. Alcuni set si conformano, altri no. La cosa

più efficace è il teorema “campioni random da distribuzioni random”, in quanto la legge di Benford è quasi certamente verificata quando si applica questo teorema.

Tabella 3. Esempio di dati falsi in un compito Stroop.

| Id | Congruente (ms) | | | Incongruente (ms) | | |
|----|-----------------|---------------------|-----------------|-------------------|---------------------|-----------------|
| | Media | Deviazione standard | Numero di prove | Media | Deviazione standard | Numero di prove |
| 1 | 150 | 21 | 30 | 300 | 300 | 30 |
| 2 | 152 | 21 | 30 | 304 | 304 | 30 |
| 3 | 154 | 21 | 30 | 308 | 308 | 30 |
| 4 | 156 | 22 | 30 | 312 | 312 | 30 |
| 5 | 158 | 22 | 30 | 316 | 316 | 30 |
| 6 | 160 | 22 | 30 | 320 | 320 | 30 |

7. Una nota su R e la legge di Benford

Il noto linguaggio di programmazione e software di analisi statistica R, tra le sue numerose funzioni, presenta una libreria installabile denominata “benford.analysis”. Questa libreria permette in maniera semplice di analizzare un insieme di dati confrontandoli con la distribuzione di Benford. Una volta installata la libreria, basta inserire come argomento della funzione “benford()” la variabile/colonna (del dataframe, ecc.) che si vuole confrontare con la distribuzione. È consigliato passare anche l’argomento “number.of.digits” in quanto semplifica la visione del grafico che la funzione va a creare. È bene mettere tutta la funzione “benford()” dentro una variabile, es. “x”. Scrivendo solo “x” vengono mostrati i risultati dei test fatti, es. test chi-quadrato. Per vedere la variabile graficamente serve il codice “plot(x)”. L’output grafico in questo caso comprende cinque grafici con funzioni diverse: la distribuzione delle cifre, la distribuzione delle cifre del test di secondo ordine, la somma delle distribuzioni secondo le cifre, la differenza del chi-quadrato, la somma delle differenze. Quello che segue sono esempi di confronti di dati veri e falsi con Benford.

In questo confronto sono stati utilizzati dei dati creati dal Prof. Vicovaro a scopo didattico. I dati sono stati usati nell’anno scolastico 2020/2021 nel corso dell’Università di Padova “Tecniche di Ricerca Psicologica”, corso di laurea in Scienze Psicologiche Cognitive e Psicobiologiche. L’argomento “number.of.digits = 1” permette di fare il confronto con solo la prima cifra. Nella Figura 6A si può vedere un grafico dell’output. La linea rossa è la distribuzione di Benford, le barre sono i dati. Come si vede i dati non si conformano alla distribuzione.

In questo altro confronto sono stati usati dei dati di un esperimento vero di Dalmaso e Vicovaro (2021). Nella Figura 6B sono esposti i risultati, che non si conformano alla distribuzione di Benford. Non lo fanno per un motivo preciso, ovvero sono tempi di reazione, più genericamente sono dati attorno ad una media (557), quindi con dei limiti. Un’osservazione da fare è che i dati della Figura 6A sono visivamente più sparsi rispetto alla Figura 6B (anche se non riportano entrambi lo stesso tipo di dato). Nella ricerca di Hartgerink et al. (2019) che comprendeva la creazione di tempi di risposta, i ricercatori hanno notato come i dati finti tendessero ad avere una dispersione maggiore rispetto ai dati veri.

In questo altro esempio sono stati utilizzati i dati di un esperimento vero di Rugani e Regolin (2021). I dati riportati nella Figura 6C, tendono a conformarsi, anche se non totalmente. Nella Figura 6D invece, ci sono gli stessi dati della Figura 6C però considerando le prime due cifre insieme, si può vedere come i risultati siano molto diversi.

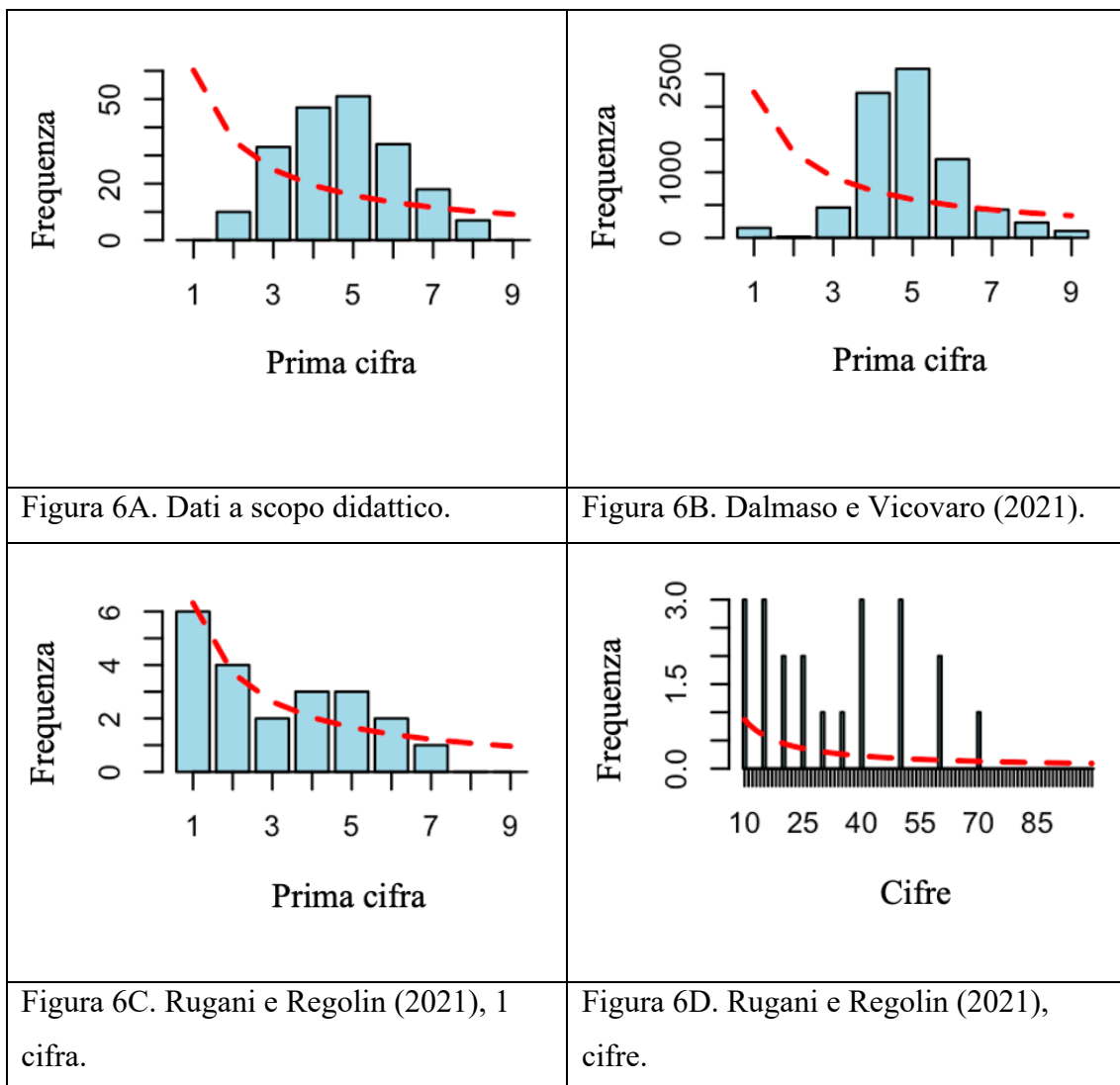


Figura 6. L'uso della funzione "benford()" su R.

7.1 La funzione `rnorm()`

Bisogna fare un appunto sulla funzione "`rnorm()`", che per sua natura ha dei limiti in quanto ha bisogno di una media e di una deviazione standard. Tuttavia, se i limiti vengono in qualche modo allentati, il risultato della funzione si conformerà alla distribuzione di Benford. Facciamo qualche esempio. Innanzitutto, per rispettare le regole

di Benford bisogna scegliere un insieme di numeri abbastanza ampio, il limite di quanti numeri estrarre o della media o della deviazione standard ci sarà sempre. Nella Figura 7A si può vedere quello che accade mettendo “`rnorm(20,5,4)`”, un insieme decisamente non ampio abbastanza, in quanto i numeri non seguono ancora la distribuzione. Nella Figura 7B “`rnorm(100,1000,999)`”, l’insieme tende già maggiormente a conformarsi. Nella Figura 7C “`rnorm(2000,10000,9999)`”, la distribuzione non si conforma perfettamente, ma è la distribuzione che si otterrà aumentando i numeri negli argomenti della funzione. Dopo una certa soglia che è tra i dati usati per fare la Figura 7B e quelli usati per la Figura 7C, la distribuzione dei dati di `rnorm()` tenderà a conformarsi ai dati che possiamo vedere nella Figura 7C. Questi dati a loro volta si conformano anche se non perfettamente con Benford, però tenderanno ad avere molte prime cifre 1, 2 e poi dai numeri successivi al 3 (questo compreso) ad essere distribuiti quasi uniformemente. Una distribuzione identica alla Figura 7C si otterrebbe mettendo due cifre come argomento “`number.of.digits`” nei dati usati per lo stesso grafico.

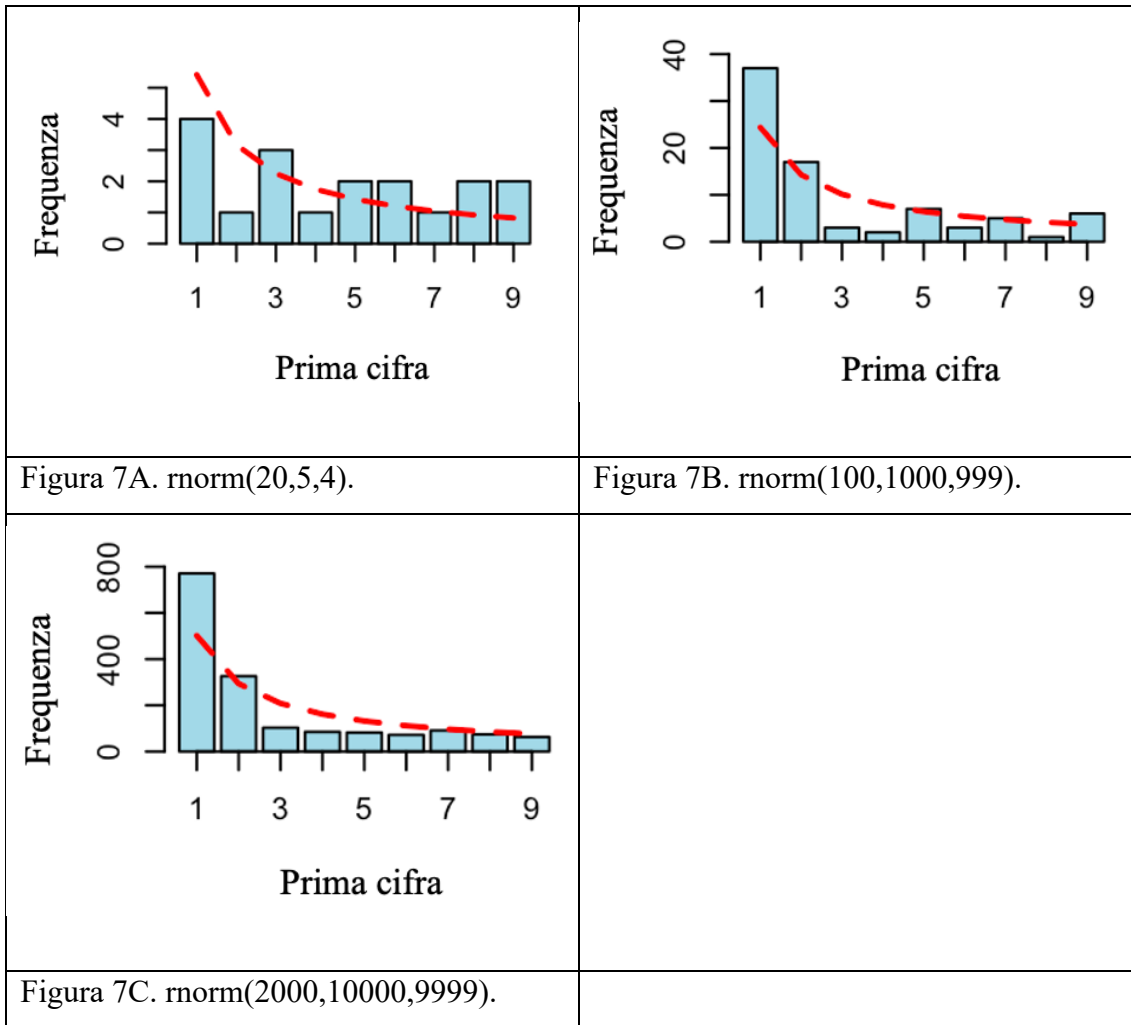


Figura 7. La funzione $\text{rnorm}()$ e la distribuzione di Benford.

8. Conclusione

In questo momento storico in cui un ricercatore viene valutato in base alla sua capacità di pubblicare articoli e di ottenere citazioni, la frode scientifica è un grave problema che affligge il mondo della ricerca scientifica. Si è visto quanto essa sia presente e anche che le frodi note potrebbero essere la punta di un iceberg. È evidente la necessità di un sistema di controllo dei dati pubblicati dai ricercatori e anche di metodi più efficaci per contrastare le frodi. Ogni metodo che può efficacemente contrastare le frodi dovrebbe essere sfruttato. Attualmente il metodo più efficace per contrastare le frodi sono gli informatori o segnalatori, qualcuno che ha visto commettere una frode e informa qualcun altro in grado di intervenire. Per questo molte università hanno aperto degli uffici per l'ascolto anonimo o delegato delle persone per farlo (di solito è il rettore stesso). Una maggior sensibilizzazione nei ricercatori al tema frode, unita a dei punti di ascolto, già potrebbe ridurre i casi.

Albers (2014) ha fatto notare molti problemi della frode scientifica e anche come i giornali non stiano aiutando a combatterla, principalmente favorendo un articolo nuovo ad una replicazione di un esperimento. L'autore suggerisce anche una maggior condivisione dei dati raccolti negli esperimenti, dei codici utilizzati e dei dettagli del metodo. Questi tre favorirebbero le replicazioni degli esperimenti e la condivisione dei dati raccolti permetterebbe un'analisi di terze parti con lo scopo di individuare possibili dati artificiali.

In questo elaborato la legge di Benford è stata spiegata e proposta come un metodo da utilizzare per una scansione dei dati dei ricercatori. I limiti della legge sono tanti, ma ci sono anche molte buone caratteristiche che potrebbero essere usate contro la frode scientifica. Una delle principali cose positive della legge è il fatto che può essere utilizzata su dati senza saperne il tipo. Ad esempio, un ingegnere e una psicologa sono coautori di un articolo, l'ingegnere ha raccolto i dati. La psicologa (assumiamo che non sappia il tipo di dato raccolto) per tutelarsi da una possibile fabbricazione dei dati in un articolo di cui è coautrice, effettua un confronto tra i dati raccolti dall'ingegnere e la distribuzione di Benford. Come già detto in precedenza i dati, anche quelli veri, possono conformarsi o meno, solo dopo un test di confronto si può esserne certi. Se non si conformassero la psicologa potrebbe indagare sul tipo di dato e sulla raccolta effettuata. Per esempio, il dato raccolto dall'ingegnere è un tempo di reazione con una media e una bassa

dispersione, a questo punto la psicologa capirebbe che i limiti di Benford non sono rispettati dal tipo di dato. Oppure, i dati raccolti si conformano quasi perfettamente e la psicologa non indaga oltre.

Come dimostrato si riescono a distinguere gli insiemi di dati fabbricati dai dati veri. Ad esempio, un ricercatore che ha pubblicato trenta articoli falsi avrà un insieme di dati abbastanza ampio per poter effettuare un confronto con dati di articoli simili presumibilmente veri. Il sistema usato in Horton et al. (2020) riesce a fare proprio quanto appena descritto. Questo sistema, dopo una verifica del suo funzionamento, potrebbe essere introdotto dalle università come controllo sui suoi ricercatori. Accusare un ricercatore di frode con un solo articolo che non si conforma è impossibile, però una buona dose di articoli non conformanti potrebbero diventare un sistema d'allarme a cui far seguire maggiori investigazioni, prima di essere certi della frode.

La legge di Benford potrebbe anche essere unita ad altri sistemi di riconoscimento di dati falsi. Ad esempio, la distribuzione di Benford potrebbe venire applicata a tutti i tipi di dati, poi per ogni tipo potrebbero venir applicati uno o più sistemi di riconoscimento di dati falsi più specifici per quel tipo di dato. Un esempio banale, di uno schema specifico di un tipo di dato vero, è che si riesce a riconoscere una serie di duecento lanci di moneta veri da falsi, semplicemente controllando se ci sono serie da sei lanci di fila con lo stesso risultato, testa o croce. Chi falsifica duecento lanci di testa o croce non pensa che sia molto probabile ottenere sei volte di fila testa e quindi non inserirà nei risultati una serie continua così lunga. Tuttavia, in verità le serie lunghe e continue accadono (Hill, 1999). Molto probabilmente ci sono altri schemi all'interno di altri dati che permettono la discriminazione di quelli veri da quelli falsi. Successivamente Benford potrebbe venire unito ad altri sistemi di riconoscimento di dati falsi, magari anche più specifici per tipo di dato, per creare un segnale d'allarme unico (come una somma spaziale che crea un potenziale d'azione) che significherebbe una necessità di maggior investigazione in quei dati.

Ovviamente la legge di Benford necessita ancora di studi e di esperimenti.

9. Bibliografia

Albers, S. (2014). Preventing unethical publication behavior of quantitative empirical research by changing editorial policies. *Journal of Business Economics*, 84(9), 1151-1165.

Benford, F. (1938). The law of anomalous numbers. *Proceedings of the American philosophical society*, 78(4), 551-572.

Diekmann, A. (2007). Not the first digit! using benford's law to detect fraudulent scientific data. *Journal of Applied Statistics*, 34(3), 321-329.

Fanelli, D. (2009). How many scientists fabricate and falsify research? A systematic review and meta-analysis of survey data. *PloS one*, 4(5), e5738.

Fewster, R. M. (2009). A simple explanation of benford's law. *The American Statistician*, 63(1), 26–32. <http://doi.org/10.1198/tast.2009.0005>

Hill, T. P. (1988). Random-number guessing and the first digit phenomenon. *Psychological Reports*, 62(3), 967-971.

Hill, T. P. (1996). A note on distributions of true versus fabricated data. *Perceptual and motor skills*, 83(3), 776-778.

Hill, T. P. (1998). The first digit phenomenon: A century-old observation about an unexpected pattern in many numerical tables applies to the stock market, census statistics and accounting data. *American Scientist*, 86(4), 358-363.

Hill, T. P. (1999). The difficulty of faking data. *Chance*, 12(3), 27-31.

Horton, J., Kumar, D. K., & Wood, A. (2020). Detecting academic fraud using Benford law: The case of Professor James Hunton. *Research Policy*, 49(8), 104084.

Newcomb, S. (1881). Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers. *American Journal of Mathematics*, 4(1), 39-40.

Stroebe, W., Postmes, T., & Spears, R. (2012). Scientific misconduct and the myth of self-correction in science. *Perspectives on psychological science*, 7(6), 670-688.

9.1 Sitografia

Siti controllati/dati presi in data 03/09/2021

Set di dati di Dalmaso e Vicovaro (2021)

<https://osf.io/ewgsf/>

Hartgerink, C. H., Voelkel, J. G., Wicherts, J., & van Assen, M. A. (2019). Detection of data fabrication using statistical tools. DOI: [10.31234/osf.io/jkws4](https://doi.org/10.31234/osf.io/jkws4).

National Science Foundation. (2001). *New research misconduct policies*. Retrieved from https://www.nsf.gov/oig/_pdf/presentations/session.pdf

Set di dati di Rugani e Regolin (2021)

http://researchdata.cab.unipd.it/514/6/Approach_SagittalTest.csv