



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Le conseguenze della sensibilità ambientale dei consumatori
in una catena produttiva:
due modelli di gioco differenziale

Relatrice:
Prof.ssa Alessandra Buratto

Laureando:
Beatrice Marisa Dal Corso
Matricola: 2008980

Anno Accademico 2023/2024

19 Luglio 2024

Indice

1	Introduzione	5
2	La Teoria dei Giochi	7
2.1	Introduzione ai Giochi Differenziali	8
2.2	Equilibri di un Gioco Differenziale	11
3	Modello	13
3.1	Introduzione di un Prodotto	13
3.2	Elementi Fondamentali del Modello	14
3.2.1	Domanda	14
3.2.2	Emissioni	14
3.2.3	Attività Promozionali e Costo Pubblicitario	15
3.2.4	Reputazione ecologica (EGR)	16
4	Wholesale Pricing	21
4.1	Caso con attenzione all'aspetto ambientale	21
4.2	Caso senza attenzione all'ambiente ($\sigma = 0$)	28
5	Revenue Sharing	35
5.1	Caso con attenzione all'aspetto ambientale	35
5.2	Caso senza attenzione all'ambiente ($\sigma = 0$)	40
6	Rivenditore Miope	45
6.1	Caso di Wholesale Pricing	45
6.1.1	Caso senza attenzione all'aspetto ambientale	52
6.2	Caso di Revenue Sharing	52
7	Approfondimenti e Conclusioni	53
7.1	Variante nella definizione di \bar{e}	53
7.2	Confronto dei contratti nello scenario senza attenzione all'aspetto ambientale	56
7.3	Risultati Numerici	58

Capitolo 1

Introduzione

Obiettivo di questa tesi è quello di esaminare l'impatto della preoccupazione ambientale dei consumatori sulle strategie di una data catena produttiva, partendo dall'analisi dell'articolo "Accounting for consumers' environmental concern in supply chain contract" [14]. Con il peggioramento delle condizioni ambientali ed il conseguente cambiamento climatico, i consumatori realizzano i propri acquisti tenendo conto della sostenibilità dei prodotti e delle prestazioni ambientali delle aziende produttrici. L'interesse positivo per la salvaguardia dell'ambiente ha ridefinito il termine di "consumo" in "consumo ecologico", il quale si focalizza sulla preferenza dei consumatori nell'acquisto di prodotti con un minore impatto ambientale. La produzione ecologica, nonostante la crescita degli ultimi decenni, non è tuttora il fondamento principale costituente la catena produttiva di molte aziende. Nell'articolo "Ethical Consumerism Report", [6] già nel 2000 Cowe e Williams hanno affrontato questo problema tutt'ora cogente. In tale lavoro gli autori affermano che l'industria ecologica è soggetta alla sindrome "30:3" : sebbene il 30% dei consumatori si dichiara preoccupato per la responsabilità sociale-ambientale delle imprese, solo il 3% dei prodotti sul mercato rispettano i canoni di un ridotto impatto ambientale.

Nella presente tesi analizziamo il modello produttivo proposto dai suddetti autori; esso è costituito da due agenti: un produttore, il quale risponde ed anticipa le preoccupazioni dei consumatori adottando tecniche produttive più ecologiche, ed un rivenditore, con un'influenza diretta nelle vendite attraverso le politiche sui prezzi. La domanda del prodotto dipende dalla reputazione ambientale del produttore.



Figure 1.1: Catena Produttiva

Il problema è modellizzato come un gioco dinamico tra due giocatori, confrontando ed

analizzando le strategie di equilibrio ed i risultati rispetto a due possibili differenti contratti. Il primo consiste in un contratto di prezzo all'ingrosso (Wholesale Pricing Contract, successivamente abbreviato con WPC), il secondo invece è un contratto di spartizione delle entrate (Revenue Sharing Contract, RSC). Per entrambi i contratti viene analizzato nei dettagli il caso in cui il rivenditore agisca con un comportamento "miope" nella definizione del prezzo finale. Un soggetto, nella catena produttiva, è definito come "miope" quando ignora l'effetto di una decisione odierna sui risultati futuri.

La reputazione del produttore è costruita nel tempo, richiedendo uno sforzo continuo di risorse, di conseguenza qualsiasi modello che la rappresenti deve essere dinamico. L'evoluzione della reputazione di un marchio, che nello studio viene chiamata "goodwill", è una funzione dipendente da vari fattori, in particolare dalla pubblicità ed in alcuni studi anche dalla reputazione ambientale citata precedentemente.

Le interazioni dinamiche nella catena produttiva vengono rappresentate tramite un gioco differenziale con due agenti, ipotizzando una modalità di gioco alla Stackelberg ed analizzandone lo sviluppo in due scenari differenti. Nel primo, il contratto WSC, il produttore fissa il prezzo all'ingrosso ed il budget pubblicitario ed il rivenditore sceglie il prezzo di mercato del prodotto. Nel secondo scenario, il contratto RSC, il produttore fissa un prezzo minimo per il prodotto e successivamente il rivenditore condivide una parte finale dei ricavi della vendita, riuscendo così ad attenuare l'effetto della doppia marginalizzazione. Questo effetto si sviluppa in un processo produttivo in cui si ha una situazione di doppio monopolio, provocandone l'incremento del prezzo di vendita del bene sul mercato e riducendone la quantità prodotta.

In primo luogo a fronte del modello che analizzeremo in seguito, sarà necessario approfondire alcuni aspetti, uno tra tutti il problema di "Introduzione di un prodotto" analizzato da Nerlove ed Arrow.

La seguente tesi, composta da 7 Capitoli, è strutturata come segue.

Al Capitolo 2 è riportata una breve introduzione rispetto alla Teoria dei Giochi, essendo quest'ultima strettamente legata al modello analizzato nei capitoli successivi.

Nel Capitolo 3 è presentato il modello in esame, in particolare dopo aver ricordato il problema analizzato da Nerlove ed Arrow, vengono descritti gli elementi fondamentali ed i relativi contratti di Wholesale Pricing e Revenue Sharing.

I Capitoli 4 e 5 descrivono le applicazioni del modello nei vari contratti e nella situazione dove non viene considerato l'aspetto ambientale.

Al Capitolo 6 è trattato il caso in cui il rivenditore, in entrambi i contratti, agisca come miope e le relative conseguenze rispetto a questa scelta.

Infine, al Capitolo 7, sono presentate delle conclusioni rispetto ai risultati numerici del modello ed alcuni confronti tra i contratti nel caso senza attenzione all'ambiente. Inoltre, è riportato un breve approfondimento personale relativo alla situazione in cui la variabile \bar{e} , considerata in tutta la tesi come una costante, ai fini di ridurre la complessità dei calcoli, sia considerata come una funzione decrescente nel tempo, illustrando le relative conseguenze nella ridefinizione del modello.

Capitolo 2

La Teoria dei Giochi

Il presente capitolo fornisce una breve introduzione alla Teoria dei Giochi, la quale formalizza i concetti matematici necessari per comprendere e risolvere i modelli descritti nella seguente tesi. I testi di riferimento utilizzati nella stesura del capitolo sono: A. Buratto, L. Grosset e B. Viscolani, *Ottimizzazione Dinamica. Modelli economici e gestionali* [2]; N. V. Long, *A survey of dynamic games in economics* [13]; E. Dockner, *Differential games in economics and management science* [7]; J. Carpenter e A. Robbett, *Game theory and behavior* [5].

La Teoria dei Giochi è una teoria fondata sullo studio dei conflitti e della cooperazione tra soggetti decisori (come individui, parti politiche, governi, organizzazioni, ...) che utilizzano la razionalità nelle loro azioni; se ne trovano applicazioni in diversi contesti economici, aziendali, scientifici, sociali, politici, ambientali e militari. Lo studio delle decisioni di un singolo soggetto è formalizzato attraverso l'ottimizzazione dinamica, mentre nel caso del coinvolgimento di più attori/decisori è necessaria una teoria che utilizzi i giochi dinamici come base per l'analisi. Gli economisti utilizzano, in diversi campi di studio, i giochi dinamici nell'analisi di situazioni economiche che coinvolgono uno o più soggetti, definiti nel seguito come giocatori. Quest'ultimi, spesso, hanno dei conflitti di interesse e di conseguenza devono considerare le azioni degli altri quando scelgono il comportamento da adottare.

Definizione 1. La teoria dei giochi si basa su assiomi fondamentali secondo i quali i giocatori sono soggetti razionali, intelligenti e che agiscono in modo strategico.

“Razionali” significa che un giocatore ha preferenze chiare, rappresentate da un funzionale obiettivo o payoff ed agisce in relazione ad esse, con l'obiettivo di massimizzarle ed ottimizzarle. Inoltre la razionalità include la conoscenza del numero di individui coinvolti nel gioco dinamico e dell'insieme delle strategie possibili. “Intelligenti” significa che sono consapevoli della situazione in cui si trovano e riescono ad agire di conseguenza in maniera logica e coerente, con la consapevolezza che tutti gli altri giocatori sono soggetti razionali che conoscono le regole del gioco e non dimenticano le informazioni in proprio possesso. Infine il giocatore che agisce con strategia utilizza le conoscenze riguardanti gli altri giocatori quando progetta la propria strategia di gioco.

Osservazione 1. Le decisioni dei giocatori, in riferimento agli assiomi precedentemente descritti, in particolare la razionalità, sono caratterizzate da alcuni elementi fondamentali:

- azioni e conseguenze: è possibile descrivere un insieme di tutte le scelte possibili a disposizione del giocatore e delle relative conseguenze ;
- preferenze: è sempre possibile classificare i risultati delle azioni sulla base della preferenza del giocatore, ogni conseguenza è differente dalle altre ed in un gioco dinamico non è presente l'indecisione nelle scelte dell'attore, egli riesce sempre a comparare due risultati e determinarne il migliore.

Inoltre le decisioni possono essere individuali o collettive e sono interdipendenti: non influenzano esclusivamente il giocatore ma hanno conseguenze anche sugli altri soggetti, rispetto agli propri obiettivi ed al capitale.

Esistono due tipologie di giochi dinamici: cooperativi e non cooperativi. In un *gioco non cooperativo* i giocatori non possono o non sono interessati ad accordarsi su una linea d'azione congiunta, essi sono rivali e agiscono sulla base del proprio interesse. In questa situazione l'incertezza strategica, ovvero la non conoscenza delle risposte degli altri giocatori, costituisce un problema fondamentale che i teorici hanno cercato di risolvere. Nel caso di un *gioco cooperativo* i giocatori sono consapevoli dei benefici che derivano dall'agire come un unico soggetto e coordinando le proprie azioni.

Inoltre si definiscono *giochi simultanei* le situazioni nelle quali i giocatori agiscono nel medesimo istante e nessuno di essi è consapevole delle scelte degli altri attori al momento della propria decisione. Si parla di *giochi sequenziali* quando esiste un ordine di azioni nelle scelte dei giocatori e nel caso di un gioco sequenziale di tipo gerarchico è presente una gerarchia nell'ordine delle azioni dei giocatori.

Nel caso di un *gioco gerarchico* è di particolare importanza il *duopolio di Stackelberg*, che descrive un modello caratterizzato da asimmetria informativa: una delle parti coinvolte ha accesso a conoscenze, dati o informazioni che l'altra parte non possiede e ciò crea uno squilibrio nel processo decisionale. In tale gioco il soggetto che sceglie la strategia da adottare prima degli altri giocatori è detto *leader*, mentre il secondo *follower*. Il leader è consapevole che in ogni momento e stato delle proprie variabili di controllo il follower agirà di conseguenza, quindi determina la propria decisione considerando l'eventuale reazione del follower.

2.1 Introduzione ai Giochi Differenziali

I giochi dinamici includono i *giochi differenziali*, nei quali il tempo è una variabile continua e si estendono in un orizzonte temporale, eventualmente illimitato.

Definizione 2. Un gioco differenziale è caratterizzato dai seguenti elementi:

- un *insieme finito* di giocatori $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$, $N \geq 2$, nel caso di un solo giocatore si tratta di un problema probabilistico risolubile con l'ottimizzazione dinamica;

- una *variabile temporale* continua, t , definita nell'intervallo $[t_0, t_1]$ o eventualmente illimitato $[t_0, +\infty]$, ove il valore $t_0 \geq 0$;
- una *variabile di stato* $x(t) \in \mathbb{R}^n$, che descrive lo stato del sistema dinamico in ogni istante. Un controllo è ammissibile se assume valori in un insieme $U_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$, $i \in \mathcal{I}$ e l'insieme dei controlli ammissibili è indicato con \mathcal{U}_i ;
- una *variabile di controllo* $u_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ che rappresenta le decisioni del giocatore ad ogni istante del gioco, ove $i \in \mathcal{I}$ indica il giocatore i -esimo;
- un insieme di *equazioni del moto*, ovvero equazioni differenziali dipendenti dalla variabile temporale t , che descrivono l'evoluzione delle variabili di stato in relazione alle variabili di controllo,

$$\dot{x}_j(t) = f_j(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t), \quad x_j(0) = x_j^0, \quad j = 1, \dots, n$$

queste ultime permettono ad ogni giocatore di influenzare lo stato degli eventi tramite la scelta del controllo u_i . Il vettore $u(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t)) \in \mathbb{R}^M$ ove $M = \sum_{i=1}^N m_i$, indica l'insieme delle scelte dei giocatori in ogni istante t ;

- un *funzionale obiettivo* o *payoff*, è relativo ad ogni giocatore ed è un'espressione dei propri obiettivi e preferenze, il cui scopo finale è la massimizzazione,

$$J_i = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho_i t} f_{0i}(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t) dt + e^{-\rho_i t_1} S_i(x(t_1));$$

- una *struttura informativa* che caratterizza le informazioni a disposizione di ogni giocatore in ogni istante del gioco. Un gioco con "informazione perfetta" è strutturato sulla base di una sequenza di azioni dei giocatori, che in ogni momento sono a conoscenza delle scelte degli altri attori e della relativa evoluzione del gioco. Al contrario, un gioco è ad "informazione imperfetta" se i giocatori non hanno certezza rispetto alle azioni degli altri e di conseguenza non dispongono di tutte le informazioni del gioco;
- un *insieme di strategie* $\Phi_i, i \in \mathcal{I}$, ove una strategia φ_i per un giocatore i -esimo è una struttura decisionale che definisce le scelte u_i sulla base delle informazioni a disposizione.

Definizione 3. Il problema di ottimizzazione per il singolo giocatore i -esimo, ove $i = 1, \dots, N$, ha la seguente forma

$$\begin{aligned} \max \quad & J_i = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho_i t} f_{0i}(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t) dt + e^{-\rho_i t_1} S_i(x(t_1)) \\ \text{s.a.} \quad & \dot{x}(t) = f(x(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t), t), \\ & x(t_0) = x^0 \\ & u_i(t) \in U_i \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si ottengono in questo modo N problemi di ottimizzazione dinamica indipendenti, rispettivamente degli N giocatori. Un gioco differenziale può essere interpretato come una N -upla di problemi di controllo ottimo. Tuttavia in ogni problema di ottimizzazione vengono considerate le scelte degli altri giocatori, ciò rende lo studio molto complicato e di conseguenza non è possibile applicare i concetti dell'ottimizzazione dinamica ma bisogna definirne di appropriati: ovvero gli *equilibri*, che verranno analizzati nella sezione 2.2 del presente capitolo.

Definizione 4. Si consideri un gioco differenziale a N giocatori, la cui massimizzazione è definito in (2.1), esso è detto *lineare-quadratico* se:

- la funzione $f_{0i}(x, u_1, \dots, u_N, t)$ è additivamente separabile in nella variabile di stato x e nelle variabili di controllo (u_1, u_2, \dots, u_N) . Inoltre, sia quadratica in x, u_1, \dots, u_N e concava in u_i ;
- la scrap-value $S_i(x)$ è quadratica in x ;
- la funzione $f(x, u_1, \dots, u_N, t)$ è congiuntamente lineare nelle variabili di stato e di controllo.

Relativamente al concetto di strutture informative, precedentemente descritte, due sono particolare importanza: la struttura *open-loop* e la struttura *feedback*.

Struttura informativa *open-loop*: ogni giocatore conosce lo stato iniziale x^0 del sistema ed osserva il tempo t . La funzione $\varphi_i^{OP} : \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ indica la *strategia open-loop* del giocatore i -esimo, la variabile di controllo al tempo t è data dalla seguente espressione

$$u_i(t) = \varphi_i^{OP}(x^0, t)$$

Struttura informativa *feedback*: ogni giocatore conosce la posizione del sistema $(t, x(t))$. La funzione $\varphi_i^F : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ indica la *strategia feedback* del giocatore i -esimo, la variabile di controllo al tempo t è data dalla seguente espressione

$$u_i(t) = \varphi_i^F(t, x(t))$$

Struttura informativa *feedback stazionario (o di Markov)*: ogni giocatore conosce la posizione del sistema $(t, x(t))$. La funzione $\varphi_i^{FS} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ indica la *strategia feedback di tipo stazionario* del giocatore i -esimo, sia la strategia che la variabile di controllo non dipendono esplicitamente dalla variabile temporale t

$$u_i(t) = \varphi_i^{FS}(x(t))$$

Osservazione 2. Il risultato di equilibrio in un gioco dinamico varia con la struttura informativa adottata dai giocatori. In questa tesi assumiamo una struttura informativa di tipo feedback, ovvero le strategie dipendono dallo stato. Inoltre, poiché i problemi di ottimizzazione dei due giocatori sono autonomi (non compare esplicitamente la variabile temporale t), cercheremo strategie feedback di tipo stazionario (o di Markov). Questo approccio è comunemente adottato in giochi differenziali autonomi e ad orizzonte infinito.

2.2 Equilibri di un Gioco Differenziale

Definizione 5. (Equilibrio di Nash) Si denoti con Φ_i l'insieme delle strategie del giocatore i -esimo, con $i \in \mathcal{I}$. Un'equilibrio di Nash è una combinazione di strategie $(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_N) \in \times_{i=1}^N \Phi_i$, tale che valga la seguente disuguaglianza

$$J_i(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_N) \geq J_i(\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_{i-1}, \varphi_i, \hat{\varphi}_{i+1}, \dots, \hat{\varphi}_N)$$

per ogni $\varphi_i \in \Phi_i, i = 1, \dots, N$. In questa situazione nessun giocatore può trarre beneficio dal cambiare unilateralmente la propria strategia.

Tutti i giocatori sono razionali ed intelligenti, ognuno prevede che gli altri utilizzino le strategie ottime (per l'equilibrio di Nash), di conseguenza adottano la propria strategia ottima di equilibrio. La strategia $\hat{\varphi}_i$ appartiene ad un equilibrio di Nash, se essa determina un controllo ottimo per il problema del giocatore i -esimo; in caso contrario, una qualunque scelta differente del controllo $u_i(t)$ può peggiorare o lasciare invariato il payoff. Quest'ultimo aspetto evidenzia che la razionalità individuale è prioritaria rispetto a quella comune, si raggiunge l'equilibrio quando tutti i giocatori agiscono con l'obiettivo di massimizzare il proprio payoff; di conseguenza gli equilibri di Nash sono detti equilibri *non cooperativi*. L'utilizzo dell'equilibrio di Nash non garantisce un risultato ottimo in ogni circostanza ma permette di escludere le situazioni meno realistiche.

Osservazione 3. La scrittura semplificata

$$[u_i, \hat{u}_{-i}] = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{i-1}, u_i, \hat{u}_{i+1}, \dots, \hat{u}_N)$$

verrà utilizzata nelle successive definizioni, al fine di rendere le formule più sintetiche

$$J_i(\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_N) \geq J_i([u_i, \hat{\varphi}_{-i}])$$

Le strutture informative di tipo open-loop e feedback descrivono equilibri di Nash differenti, li riportiamo di seguito.

Definizione 6. (Equilibrio di Nash open-loop) L' N -upla di controlli $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N)$, dove $\hat{u}_i : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$, si definisce equilibrio di Nash open-loop, se per ogni giocatore $i \in \mathcal{I}$ e per ogni strategia $u_i : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ vale la disuguaglianza

$$J_i(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N) \geq J_i([u_i, \hat{u}_{-i}]) \quad (2.2)$$

Equivalentemente, $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N)$ è un equilibrio se, per ogni $i \in \mathcal{I}$, la funzione di controllo \hat{u}_i è ottima per il problema di controllo

$$\begin{aligned} \max \quad & \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho_i t} f_{0i}(x(t), [u_i(t), \hat{u}_{-i}(t)], t) dt + e^{-\rho_i t_1} S_i(x(t_1)) \\ \text{s.a.} \quad & \dot{x}_j(t) = f_j(x(t), [u_i(t), \hat{u}_{-i}(t)], t), \\ & x_j(t_0) = x_j^0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.3)$$

che descrive la massimizzazione del payoff del giocatore i -esimo, condizionato dalla strategie degli altri agenti.

Nel caso di una struttura informativa di tipo open-loop ogni strategia si identifica con un controllo.

Un equilibrio di Nash open-loop si contraddistingue per le seguenti caratteristiche:

- *debolmente consistente nel tempo*: lungo la traiettoria di equilibrio nessun giocatore, in qualsiasi istante temporale, è stimolato a deviare dal piano originale d'azione. Infatti, se esso fosse incentivato a deviare dalla strategia φ_i gli altri giocatori non crederebbero, in primo luogo, alla strategia annunciata φ_i . Di conseguenza, i giocatori definirebbero le strategie sulla base della deviazione del giocatore i -esimo, creando così nuove strategie φ_j ;
- *non è robusto (rispetto a perturbazioni)*: se per errore un giocatore modifica il suo percorso d'equilibrio, il piano d'azione originale non è più ottimo, per il giocatore o per un altro attore.

Definizione 7. (Equilibrio di Nash feedback) L' N -upla di controlli $(\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_N)$, dove $\hat{\varphi}_i : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$, si definisce equilibrio di Nash feedback, se per ogni giocatore $i \in \mathcal{I}$ e per ogni strategia $\varphi_i : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ vale la disuguaglianza

$$J_i(\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_N) \geq J_i([\varphi_i, \hat{\varphi}_{-i}]) \quad (2.4)$$

Equivalentemente, $(\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_N)$ è un equilibrio se, per ogni $i \in \mathcal{I}$, la funzione di controllo $u_i = \hat{\varphi}_i$ è ottima per il problema di controllo

$$\begin{aligned} \max \quad & \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho_i t} f_{0i}(x(t), [u_i(t, x(t)), \hat{\varphi}_{-i}(t, x(t))], t) dt + e^{-\rho_i t_1} S_i(x(t_1)) \\ \text{s.a.} \quad & \dot{x}_j(t) = f_j(x(t), [u_i(t, x(t)), \hat{\varphi}_{-i}(t, x(t))], t), \\ & x_j(t_0) = x_j^0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.5)$$

che descrive la massimizzazione del payoff del giocatore i -esimo, condizionato dalla strategie degli altri agenti.

Un equilibrio di Nash feedback si contraddistingue per le seguenti caratteristiche:

- *robusto rispetto a perturbazioni*;
- *perfetto nei sottogiochi*: la sua restrizione ad un sottointervallo che inizia in un tempo intermedio τ e termina al tempo finale T è ancora un equilibrio di Nash feedback per il gioco dinamico, ristretto a tale intervallo temporale.

Osservazione 4. La ricerca degli equilibri di Nash di un gioco dinamico con N giocatori equivale alla risoluzione di N problemi interdipendenti di controllo ottimo, con l'utilizzo di due approcci differenti. Gli approcci in questione sono il Principio del Massimo di Pontryagin e l'Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman; il primo metodo è utilizzato per la risoluzione di equilibri di Nash per strategie open-loop, mentre il secondo per le strategie di tipo feedback.

Capitolo 3

Modello

3.1 Introduzione di un Prodotto

Nell'introduzione di un nuovo prodotto nel mercato gioca un ruolo fondamentale l'investimento delle aziende (nel modello analizzato in questa tesi tale ruolo è rivestito dal produttore) nelle attività promozionali o pubblicitarie del prodotto. Secondo gli economisti Nerlove ed Arrow [12], la domanda di un prodotto dipende da vari fattori, in particolare dalle attività promozionali. Si denoti con $G(t)$ il goodwill, esso descrive l'impatto delle attività pubblicitarie (dinamiche rispetto alla variabile temporale) intraprese nel corso degli anni; è possibile descriverlo tramite la seguente equazione differenziale:

$$\dot{G}(t) = A(t) - \delta G(t). \quad (3.1)$$

la funzione $A(t)$ indica l'intensità di spesa investita nella pubblicità al tempo t .

La generalizzazione di questa equazione sarà la base del modello che verrà analizzato in questa tesi, al fine di comprenderlo è necessario citare altre importanti varianti dell'equazione $\dot{G}(t)$. Una prima generalizzazione, ad opera di B.Viscolani e S.Mosca [11], è la seguente

$$\dot{G}(t) = f(A(t)) - \delta G(t) \quad (3.2)$$

La funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è una funzione strettamente crescente e concava, che descrive come lo sforzo pubblicitario produca goodwill.

Una ulteriore generalizzazione si ottiene dalla precedente, ad opera di A.Buratto e B.Viscolani [3, 4], esplicitando la funzione $f(A(t))$ come: $f(A(t)) = [A(t)]^\alpha$ ove $\alpha \in (0, 1]$ è una costante. L'equazione, con le precedenti ipotesi, ha la scrittura

$$\dot{G}(t) = \beta[A(t)]^\alpha - \delta G(t). \quad (3.3)$$

Infine, in alcune situazioni, i consumatori sono motivati dall'acquisto dei prodotti solamente dopo averli provati; la caratteristica principale alla base della loro scelta è la qualità del prodotto, intesa come materiali utilizzati ed efficienza. Il precedente caso può essere descritto, equivalentemente in termini di goodwill, come di seguito

$$\dot{G}(t) = \theta A(t) + kp(t) - \delta G(t) \quad (3.4)$$

ove $p(t)$ descrive il prezzo del prodotto al tempo t . L'equazione (3.4) ha una forma analoga al goodwill nel modello presentato in questa tesi, tuttavia la differenza principale riguarda il termine $kp(t)$, il quale è sostituito con un termine che analizza le prestazioni ambientali del produttore.

In questa tesi, come espresso nel capitolo precedente, la catena produttiva è costituita da un produttore (giocatore M) e da un rivenditore (giocatore R) e l'analisi dei modelli si sviluppa sull'intervallo temporale $[0, +\infty)$. Il produttore fabbrica il bene ad un costo unitario c , mentre il rivenditore vende il suddetto prodotto ai consumatori ad un prezzo unitario p .

3.2 Elementi Fondamentali del Modello

Il modello è fondato sui concetti di: Domanda, Emissioni, Attività Promozionale (o Pubblicitaria) e EGR (la reputazione ecologica del produttore, dall'inglese Environmental Green Reputation), i quali variano nel tempo e sono interdipendenti.

3.2.1 Domanda

La domanda $D(t)$ dipende negativamente dal prezzo fissato dal rivenditore e positivamente dalla reputazione ecologica del produttore (EGR). Nel modello analizzato in questa tesi $D(t)$ corrisponde alla quantità dei beni prodotti: non si produce in maggiore quantità di quanto richiesto, evitando così costi aggiuntivi non necessari. Denotando con $p(t)$ il prezzo e $G(t)$ l'EGR, la domanda ha la forma

$$D(t) = \alpha + \gamma G(t) - \beta p(t) \quad (3.5)$$

ove le costanti α, γ e β sono positive, con $\alpha > \beta c$ in modo da garantire che la domanda $D(t)$ sia positiva se $G(t) = 0$ ed il prezzo $p(t)$ coincide con il costo unitario (marginale) c . Un'analisi generale delle componenti dell'equazione identifica $\alpha + \gamma G(t)$ come il potenziale di mercato ed il termine β descrive la sensibilità del consumatore rispetto al prezzo.

La dipendenza temporale, qui contenuta nelle funzioni $G(t)$ e $p(t)$, è un aspetto molto comune nei modelli economici o di marketing, al fine di considerare le variazioni di prezzo dei prodotti nel mercato.

3.2.2 Emissioni

Le emissioni inquinanti, definite di seguito con $e(t)$, sono un sottoprodotto della produzione con ripercussioni sia a breve sia a lungo termine. Gli studi di S. Jørgensen [9], i quali analizzano la problematica dell'inquinamento nella dinamica dei giochi differenziali, permettono di supporre che le emissioni siano proporzionali alla domanda, ricordando la forma di $D(t)$ hanno la seguente scrittura

$$e(t) = \mu D(t) = \mu(\alpha + \gamma G(t) - \beta p(t)) \quad (3.6)$$

ove $\mu > 0$. Il valore di μ , definito come il parametro di ridimensionamento delle emissioni, è posto costante nel tempo; al Capitolo 7 si discuterà il caso in cui questa restrizione

non si ponga. Di seguito si riportano alcuni termini inerenti al concetto di emissioni di carbonio, utilizzati dalle aziende o dai governi al fine di descrivere le situazioni di sostenibilità ambientale.

Osservazione 5. (Terminologia)

- **carbon neutral:** situazione di bilancio tra le emissioni di CO₂ nell'atmosfera e la relativa rimozione con l'utilizzo di "serbatoi di carbonio" (carbon sinks). I serbatoi o depositi comprendono tutti i sistemi naturali che assorbono l'anidride carbonica riducendone la quantità nell'atmosfera; gli esempi più importanti comprendono le foreste, gli oceani ed il terreno. Le aziende in questa categoria non riducono le loro emissioni ma le bilanciano con dei progetti sostenibili o acquistando dei crediti di carbonio. I progetti comprendono: conservazione e rimboschimento delle foreste, sostituzione di energie di origine fossile con quelle rinnovabili, progetti di efficienza energetica al fine di ridurre il consumo di energia ed altri;
- **net zero (carbon):** in questo caso le aziende rimuovono dal pianeta tanto carbonio quanto quello emesso in un dato periodo di tempo: un mese, un anno o dall'inizio della loro creazione (come l'azienda multinazionale statunitense Microsoft, la quale ha l'obiettivo di rimuovere dall'ambiente, entro il 2050, tutto il carbonio emesso dalla sua fondazione nel 1975);
- **carbon negative:** lo scopo delle aziende è la rimozione di una quantità maggiore di carbonio rispetto a quella emessa (annualmente);
- **carbon free:** l'energia utilizzata nella produzione di beni o servizi è interamente emessa da fonti rinnovabili e non emette carbonio nell'atmosfera.

3.2.3 Attività Promozionali e Costo Pubblicitario

La pubblicità è un comune metodo di comunicazione che permette di indurre i consumatori all'acquisto di prodotti sul mercato. Le tecniche pubblicitarie sono dinamiche e rispecchiano le evoluzioni degli interessi dei consumatori, questo permette ad alcune marche o firme di mantenere il loro prestigio negli anni. Le attività promozionali $A(t)$ sono intraprese dal produttore al fine di migliorare la propria EGR presso i consumatori. Queste attività (che possono includere: siti web, stand informativi, brochure ed altro) per semplicità si definiscono come sforzo pubblicitario e presentano l'attenzione del produttore nei confronti dell'ambiente ai consumatori.

Il costo pubblicitario è supposto essere convesso e crescente, definito tramite l'equazione quadratica

$$C(A) = \frac{k}{2}A^2 \quad (3.7)$$

ove $k > 0$.

3.2.4 Reputazione ecologica (EGR)

La reputazione ecologica del produttore (precedentemente definita come EGR) evolve nel tempo, dipendendo dall'impiego di risorse nelle attività promozionali e dal record ambientale del produttore stesso.

Il record ambientale è una valutazione obiettiva, descritta tramite un valore numerico, determinata da un soggetto differente dal produttore (per esempio un ente statale). Questo record descrive obiettivamente i risultati del produttore e le politiche ambientali da esso adottate, differenziandosi dalla pubblicità realizzata dall'azienda stessa perché evidenzia in maniera soggettiva la preoccupazione per l'ambiente.

Si definisca come \bar{e} lo standard o livello di riferimento delle emissioni per un determinato settore produttivo e con $\bar{e} - e(t)$ il valore delle prestazioni ambientali del produttore al tempo t , ricordando che $t \in [0, +\infty)$. La dinamica dell'EGR è approssimata dal seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = \theta A(t) + \sigma(\bar{e} - e(t)) - \delta G(t) \\ G(0) = G_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

ove θ, σ e δ sono parametri positivi. La costante θ indica l'efficienza pubblicitaria, σ il record ambientale del produttore e δ il tasso di decadimento dell'EGR.

Osservazione 6. Se $\sigma = 0$ allora le emissioni non hanno alcun impatto nel modello e le dinamiche sono equivalenti al modello pubblicitario standard di Nerlove ed Arrow.

Osservazione 7. Se il potenziale di mercato aumenta, la domanda può ugualmente incrementare, sebbene i prezzi al dettaglio crescano, questo effetto è definito come "Effetto Veblen"; la cui conseguenza è l'aumento di emissioni nella produzione, che porta al danneggiamento delle prestazioni ambientali ed alla reputazione del produttore. Thorstein Veblen (1899) [1] analizzò la necessità degli individui abbienti di acquistare beni materiali ad un prezzo maggiore, al fine di incrementare il proprio status sociale, nonostante la presenza nel mercato di beni equivalenti e ad un prezzo minore. Questo effetto è interessante in economia, perché rappresenta una violazione della classica legge della domanda, che si basa sulla relazione inversa tra prezzo e domanda.

Nella seguente analisi caratterizzeremo e confronteremo le strategie di equilibrio ed i risultati nei seguenti due modelli di business

- Wholesale Pricing (WP), tradotto come contratto di prezzo all'ingrosso;
- Revenue Sharing (RS), tradotto come contratto con condivisione dei ricavi.

In entrambi i modelli si assumono inoltre i seguenti aspetti:

- i. ogni giocatore (M o R) massimizza il proprio flusso di profitto attualizzato su un orizzonte di pianificazione infinito;
- ii. il modello si basa sul gioco alla Stackelberg, con il produttore che agisce come leader ed il rivenditore come follower;

- iii. si assume che il tasso di sconto sia costante e comune ai due giocatori; esso per inoltre definito positivo ($r > 0$).

L'articolo di riferimento per la presente tesi è incentrato sullo studio delle conseguenze di azioni e strategie del rivenditore rispetto ai risultati di un modello dinamico, di tipo Stackelberg. Il rivenditore, nel seguito, si distinguerà in lungimirante o miope; quest'ultimo, in una situazione di ottimizzazione statica, trascura l'impatto delle decisioni attuali sull'evoluzione dello stato del problema.

Prezzo

L'articolo di Martín-Herrán, Sokri e Zaccour [10] descrive come il prezzo al dettaglio non influenzi solamente la domanda per il brand di un produttore, ma allo stesso modo la percezione del consumatore sulla qualità del marchio. Il prezzo è il risultato di due politiche di agenti differenti, il produttore ed il rivenditore, esso viene utilizzato come indicatore di qualità per un prodotto, associando prezzi elevati a qualità migliore. I consumatori pensano in termini relativi quando osservano un prezzo, paragonando i prodotti sulla base di qualsiasi loro aspetto (prezzo, qualità, utilità, colore, ...). In letteratura si è arrivati alla conclusione che i confronti evolvono nel tempo in accordo ad un processo di apprendimento intuitivo ed alla ricerca di prodotti che soddisfino le preferenze personali.

Record Ambientale

Il concetto di record ambientale, precedentemente introdotto, è stato analizzato dagli autori Martín-Herrán, Sokri e Zaccour [8], quest'ultimi studiano l'impatto delle tradizionali ed emergenti regolazioni sulle strategie delle aziende al fine di ottenere una produzione sostenibile. Le regolazioni ambientali, come precedentemente descritto, si suddividono schematicamente in due categorie principali. La prima, la quale verrà solitamente indicata come regolazioni tradizionali, si focalizza sul monitoraggio dell'azienda ed impone riduzioni sulle emissioni inquinanti (utilizzando strumenti come: tasse, quote di emissioni, sussidi). Il secondo approccio, definito come regolazioni emergenti, forzano le aziende a fornire le informazioni relative al loro record ambientale, conosciuto come "Public Disclosure Program (PDP)". La logica alla base delle regolazioni è la seguente: i consumatori ed i mercati finanziari reagiscono e prendono le loro decisioni consistentemente alla prestazione produttiva delle aziende.

Nella letteratura si hanno le seguenti opinioni:

- coloro che supportano il paradigma del "win-win", definito come l'ipotesi Porter, suggeriscono che severe leggi ambientali porterebbero ad un positivo effetto sulle aziende, stimolandone l'innovazione;
- coloro che supportano il paradigma tradizionale considerano che le regolazioni ambientali, paragonabili ad un costo, danneggiano i profitti e rovinano la competitività.

In definitiva l'articolo afferma che le regolazioni, indipendentemente dalla tipologia, corrispondono a notizie negative per le aziende. Nelle regolamentazioni fiscali, il produttore

scarica sul consumatore l'aumento di prezzo dovuto alle tasse per la tutela ambientale, il che viola il principio di "chi inquina paga" su cui è fondata la tassazione ambientale. Inoltre, le simulazioni mostrano che un PDP sembra essere più efficiente nel frenare le emissioni, rispetto ad un sistema di tassazione. In conclusione, le tipologie di regolazioni congiuntamente, conseguono dei risultati ambientali migliori rispetto alle stesse applicate separatamente.

Contratto di Wholesale Pricing

Nel contratto WP il valore delle spese pubblicitarie $A(t)$ ed il prezzo all'ingrosso $w(t)$ sono definiti dal produttore, mentre il rivenditore seleziona il prezzo di mercato $p(t)$ per i consumatori.

Definizione 8. I problemi di ottimizzazione, rispetto ai giocatori M ed R , sono i seguenti:

- Produttore

$$\begin{aligned} \max_{\omega \geq 0, A \geq 0} J_M^W &= \int_0^\infty e^{-rt} \left[(\alpha + \gamma G(t) - \beta p(t))(\omega(t) - c) - \frac{k}{2} A^2(t) \right] dt \\ \text{s.a. } \dot{G}(t) &= \theta A(t) + \sigma(\bar{e} - e(t)) - \delta G(t) \\ G(0) &= G_0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

- Rivenditore

$$\begin{aligned} \max_{p \geq 0} J_R^W &= \int_0^\infty e^{-rt} (\alpha + \gamma G(t) - \beta p(t))(p(t) - \omega(t)) dt \\ \text{s.a. } \dot{G}(t) &= \theta A(t) + \sigma(\bar{e} - e(t)) - \delta G(t) \\ G(0) &= G_0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

I problemi (3.9) e (3.10) descrivono un gioco differenziale, ad orizzonte infinito, con una variabile di stato $G(t)$ e tre variabili di controllo: $p(t)$ per il rivenditore ed $A(t)$, $w(t)$ per il produttore. L'apice W , nelle funzioni di payoff J , identifica la tipologia di contratto in esame, i pedici M , R indicano il soggetto dell'analisi nel problema di ottimizzazione.

Contratto di Revenue Sharing

Nel contratto RS il produttore, in primo luogo, sceglie il livello pubblicitario $A(t)$ e successivamente il rivenditore fissa il prezzo al dettaglio $p(t)$. Si indichi con $\theta \in (0, 1)$ la quota del ricavo destinata al produttore, in ogni istante di tempo; conformemente la quota del rivenditore sarà $1 - \theta$.

Definizione 9. I problemi di ottimizzazione, rispetto ai giocatori M ed R , sono i seguenti:

- Produttore

$$\begin{aligned} \max_{A \geq 0} J_M^S &= \int_0^\infty e^{-rt} \left[(\alpha + \gamma G(t) - \beta p(t))(\phi p(t) - c) - \frac{k}{2} A^2(t) \right] dt \\ \text{s.a. } \dot{G}(t) &= \theta A(t) + \sigma(\bar{e} - e(t)) - \delta G(t) \\ G(0) &= G_0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

- Rivenditore

$$\begin{aligned} \max_{p \geq 0} J_R^W &= \int_0^\infty e^{-rt} (\alpha + \gamma G(t) - \beta p(t))(1 - \phi)p(t) dt \\ \text{s.a. } \dot{G}(t) &= \theta A(t) + \sigma(\bar{e} - e(t)) - \delta G(t) \\ G(0) &= G_0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Le equazioni (3.11) e (3.12), in modo analogo al contratto WP, descrivono un gioco differenziale, ad orizzonte infinito, con una variabile di stato $G(t)$ e due variabili di controllo: $p(t)$ per il rivenditore ed $A(t)$ per il produttore. L'apice S , nelle funzioni di payoff, identifica la tipologia di contratto in esame ed i pedici M, R conservano il significato precedente.

Osservazione 8. Precedentemente, abbiamo assunto che lo standard di emissioni \bar{e} sia costante nel tempo. Una definizione più realistica, che enfatizzi l'obiettivo delle industrie di ridurre le proprie emissioni, si potrebbe ottenere tramite una funzione decrescente nel tempo (per un approfondimento consultare il Capitolo 7). Tuttavia, al fine di ridurre la complessità dello studio, continueremo ad interpretare \bar{e} come una costante.

Capitolo 4

Wholesale Pricing

In questo capitolo analizzeremo il contratto di Wholesale Pricing, risolvendo il problema di ottimizzazione enunciato nel capitolo precedente, in differenti situazioni. Il caso generale analizzerà i problemi descritti in (3.9) e (3.10) senza definire alcun vincolo nello studio. Successivamente, a partire dal caso generale, ponendo $\sigma = 0$, si studierà la situazione in cui le emissioni non influiscano nell'ottimizzazione del problema. Infine, al Capitolo 7, analizzeremo il caso in cui il rivenditore agisca da giocatore miope, sia nel caso generale che nella situazione in cui non si consideri l'ambiente.

4.1 Caso con attenzione all'aspetto ambientale

Proposizione 1. Si assuma una soluzione interna, le strategie di equilibrio di Stackelberg con feedback nello scenario WP risultano essere le seguenti

$$w^W(G) = \frac{\gamma + \sigma\mu\beta (M_1^W - R_1^W)}{2\beta}G + \frac{\alpha + \beta c + \sigma\mu\beta (M_2^W - R_2^W)}{2\beta} \quad (4.1)$$

$$A^W(G) = \frac{\theta M_1^W}{k}G + \frac{\theta M_2^W}{k} \quad (4.2)$$

$$p^W(G) = \frac{3\gamma + \sigma\mu\beta (M_1^W + R_1^W)}{4\beta}G + \frac{3\alpha + \beta c + \sigma\mu\beta (M_2^W + R_2^W)}{4\beta} \quad (4.3)$$

i termini M_i^W e R_i^W ove $i = 1, 2, 3$ sono i coefficienti delle funzioni valore $V_M^W(G)$ e $V_R^W(G)$. Le funzioni, rispettivamente del produttore e del rivenditore, hanno la forma

$$V_M^W(G) = \frac{M_1^W}{2}G^2 + M_2^W G + M_3^W \quad (4.4)$$

$$V_R^W(G) = \frac{R_1^W}{2}G^2 + R_2^W G + R_3^W \quad (4.5)$$

i coefficienti M_i^W e R_i^W ove $i = 1, 2, 3$ sono soluzioni di un sistema di Riccati.

Dimostrazione Utilizziamo l'approccio della Programmazione Dinamica, utilizzando l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) per un problema di controllo autonomo. Si supponga che esista un'unica soluzione assolutamente continua $G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = \theta A(t) + \sigma(\bar{e} - e(t)) - \delta G(t) \\ G(0) = G_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

ove $e(t) = \mu D(t) = \mu(\alpha + \gamma G(t) - \beta p(t))$ dipende esplicitamente da $G(t)$.

Inoltre si ipotizzi che esistano due funzioni valore continue e differenziabili $V_j^W : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, ove $j \in M, R$ che soddisfano le seguenti equazioni HJB:

$$rV_M^W(G) = \max_{w \geq 0, A \geq 0} \left[(\alpha + \gamma G - \beta p)(w - c) - \frac{k}{2} A^2 + \frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} (\theta A + \sigma(\bar{e} - \mu\alpha - \mu\gamma G + \mu\beta p) - \delta G) \right] \quad (4.7)$$

$$rV_R^W(G) = \max_{p \geq 0} \left[(\alpha + \gamma G - \beta p)(p - w) + \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} (\theta A + \sigma(\bar{e} - \mu\alpha - \mu\gamma G + \mu\beta p) - \delta G) \right] \quad (4.8)$$

Analizziamo in primo luogo l'equazione (4.8) e calcoliamo il massimo valore della funzione all'interno delle parentesi chiamandola $g(p)$. La derivata della funzione $g(p)$ rispetto alla variabile p si annulla nel punto stazionario

$$\hat{p}(G) = \frac{\alpha + \beta w + \gamma G + \sigma \mu \beta \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G}}{2\beta} \quad (4.9)$$

La funzione $g(p)$ è concava nel seguente insieme di definizione: $Dom(g) = \{p \in \mathbb{R} : p \geq 0\}$, infatti $\frac{\partial^2 g(p)}{\partial p^2} = -2\beta$, $\forall p \in Dom(g)$ che risulta un numero negativo perché la costante β è positiva. Le condizioni sufficienti del secondo ordine per un punto di massimo locale sono quindi soddisfatte: la derivata di $g(p)$ nel punto stazionario $\hat{p}(G)$ è uguale a zero e la derivata seconda di $g(p)$ in $\hat{p}(G)$ è negativa. Inoltre $\hat{p}(G)$ è anche di massimo globale su tutto l'insieme del dominio perché si verifica la condizione $g(\hat{p}(G)) \geq g(p)$, $\forall p \geq 0$.

Dovendo tenere conto del vincolo di non negatività per la variabile p , il punto di massimo $p^W(G)$ dell'equazione (4.8) risulta essere

$$p^W(G) = \max \{0, \hat{p}(G)\}. \quad (4.10)$$

Gli autori dell'articolo di riferimento per questa tesi dichiarano di essere interessati a politiche di prezzo non banali e non nulle, pertanto si procede nell'analisi considerando solo la parte positiva in 4.10 e quindi inserendo il punto stazionario trovato al punto (4.9) nell'espressione (4.7).

Come nel caso precedente, è necessario calcolare i punti di massimo della funzione tra

parentesi (4.7).

$$rV_M^W(G) = \max_{w \geq 0, A \geq 0} \left[\frac{1}{2} \left(\alpha + \gamma G - \beta w - \sigma \mu \beta \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} \right) (w - c) - \frac{k}{2} A^2 + \frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} \left(\theta A - \delta G + \sigma \bar{e} + \frac{1}{2} \left(\sigma \mu \beta w + \sigma \mu \gamma G + \sigma^2 \mu^2 \beta \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} - \sigma \mu \gamma G - \sigma \mu \alpha \right) \right) \right] \quad (4.11)$$

In questo caso la funzione è in due variabili e si utilizza la funzione Hessiana per studiare la natura dei punti stazionari. Definiamo a tale scopo la funzione in due variabili $f : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(w, A) = \frac{1}{2} \left(\alpha + \gamma G - \beta w - \gamma \mu \beta \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} \right) (w - c) - \frac{k}{2} A^2 + \frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} \left(\theta A - \delta G + \sigma \bar{e} + \frac{1}{2} \left(\sigma \mu \beta w + \sigma \mu \gamma G + \sigma^2 \mu^2 \beta \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} - \sigma \mu \gamma G - \sigma \mu \alpha \right) \right) \quad (4.12)$$

il cui gradiente è

$$\nabla(f(w, A)) = \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \beta c + \gamma G - 2\beta w + \sigma \mu \beta \left(\frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} - \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} \right) \right), -kA + \theta \frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} \right) \quad (4.13)$$

il quale si annulla nei punti

$$\hat{w}(G) = \frac{\alpha + \beta c + \gamma G + \sigma \mu \beta \left(\frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} - \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} \right)}{2\beta} \quad (4.14)$$

$$\hat{A}(G) = \frac{\theta}{k} \frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} \quad (4.15)$$

I valori trovati sono punti di massimo perchè la matrice Hessiana valutata in $\hat{w}(G)$ e $\hat{A}(G)$ è definitiva negativa, in particolare è strettamente definita negativa che implica l'unicità del punto di massimo. La matrice Hessiana vale infatti

$$Hf(w, A) = \begin{pmatrix} f_{ww}(w, A) & f_{wA}(w, A) \\ f_{Aw}(w, A) & f_{AA}(w, A) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$= \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} = Hf(\hat{w}(G), \hat{A}(G)) \quad (4.17)$$

In definitiva i punti di massimo delle equazioni di HJB sono i seguenti

$$w^W(G) = \max \{0, \hat{w}(G)\}, \quad A^W(G) = \max \{0, \hat{A}(G)\}, \quad p^W(G) = \max \{0, \hat{p}(G)\}.$$

Come precedentemente espresso si è interessati ad analizzare solamente le soluzioni interne al problema e non banali, ottenendo in definitiva i punti di massimo per le HJB

$$w^W(G) = \frac{\alpha + \beta c + \gamma G + \sigma\mu\beta \left(\frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} - \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} \right)}{2\beta} \quad (4.18)$$

$$A^W(G) = \frac{\theta}{k} \frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} \quad (4.19)$$

$$p^W(G) = \frac{3\alpha + \beta c + 3\gamma G + \sigma\mu\beta \left(\frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} + \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} \right)}{4\beta} \quad (4.20)$$

ove si è sostituito alla (4.9) il valore della (4.14) data la dipendenza di $p^W(G)$ da $w^W(G)$. Successivamente, inserendo questi valori nelle equazioni (4.7) e (4.8) e con opportune operazioni si ottengono le equazioni nella forma

- Produttore

$$\begin{aligned} rV_M^W(G) = & \frac{\gamma^2}{8\beta} G^2 + \left[\frac{\gamma}{4\beta} \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \left(\frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} + \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} \right) \right) - \delta \frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} \right] G + \\ & \frac{1}{8\beta} \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \left(\frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} + \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} \right) \right)^2 + \\ & \frac{\theta^2}{2k} \left(\frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} \right)^2 + \theta \bar{e} \frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} \end{aligned} \quad (4.21)$$

- Rivenditore

$$\begin{aligned} rV_R^W(G) = & \frac{\gamma^2}{16\beta} G^2 + \left[\frac{\gamma}{8\beta} \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \left(\frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} + \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} \right) \right) - \delta \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} \right] G + \\ & \frac{1}{16\beta} \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \left(\frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} + \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} \right) \right)^2 + \\ & \frac{\theta^2}{k} \left(\frac{\partial V_M^W(G)}{\partial G} \right) \left(\frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} \right) + \theta \bar{e} \frac{\partial V_R^W(G)}{\partial G} \end{aligned} \quad (4.22)$$

I secondi membri di tali equazioni sono quadratiche nella variabile G , pertanto andremo a cercare funzioni valore pure di tipo quadratico in G . Di conseguenza le strategie ottime saranno in forma di feedback e polinomiali di grado massimo 2 nella funzione di stato G . Si supponga che abbiano la forma definita in (4.4) e (4.5) che citiamo di seguito:

$$V_M^W(G) = \frac{M_1^W}{2} G^2 + M_2^W G + M_3^W$$

$$V_R^W(G) = \frac{R_1^W}{2} G^2 + R_2^W G + R_3^W$$

Conseguentemente i valori di $p^W(G)$, $A^W(G)$ e $w^W(G)$ diventano

$$A^W(G) = \frac{\theta M_1^W}{k} G + \frac{\theta M_2^W}{k} \quad (4.23)$$

$$w^W(G) = \frac{\gamma + \sigma\mu\beta (M_1^W - R_1^W)}{2\beta} G + \frac{\alpha + \beta c + \sigma\mu\beta (M_2^W - R_2^W)}{2\beta} \quad (4.24)$$

$$p^W(G) = \frac{3\gamma + \sigma\mu\beta (M_1^W + R_1^W)}{\beta} G + \frac{3\alpha + \beta c + \sigma\mu\beta (M_2^W + R_2^W)}{4\beta} \quad (4.25)$$

ed, allo stesso modo, anche le equazioni del Produttore e del Rivenditore hanno una forma differente

- Produttore

$$\begin{aligned} r \left(\frac{M_1^W}{2} G^2 + M_2^W G + M_3^W \right) &= \frac{\gamma^2}{8\beta} G^2 + \frac{\gamma}{4\beta} (\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta (M_1^W G + M_2^W + R_1^W G + R_2^W)) G + \\ &\quad \frac{1}{8\beta} (\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta (M_1^W G + M_2^W + R_1^W G + R_2^W))^2 + \\ &\quad \frac{\theta^2}{2k} (M_1^W G + M_2^W)^2 + (M_1^W G + M_2^W) (\theta\bar{e} - \delta G) \end{aligned} \quad (4.26)$$

- Rivenditore

$$\begin{aligned} r \left(\frac{R_1^W}{2} G^2 + R_2^W G + R_3^W \right) &= \frac{\gamma^2}{16\beta} G^2 + \frac{\gamma}{8\beta} (\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta (M_1^W G + M_2^W + R_1^W G + R_2^W)) G + \\ &\quad \frac{1}{16\beta} (\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta (M_1^W G + M_2^W + R_1^W G + R_2^W))^2 + \\ &\quad \frac{\theta^2}{k} (M_1^W G + M_2^W) (R_1^W G + R_2^W) + (R_1^W G + R_2^W) (\theta\bar{e} - \delta G) \end{aligned} \quad (4.27)$$

A questo punto, sviluppando tutti i termini ed eguagliandone, per entrambe le situazioni, i termini dello stesso grado, si ottiene il seguente sistema di Riccati. I coefficienti M_i^W e R_i^W ove $i = 1, 2, 3$ possono essere determinati esplicitamente risolvendone il sistema e soddisfano le equazioni di HJB per i valori $G \geq 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{r}{2}M_1^W = \frac{\gamma^2}{8\beta} - \frac{\gamma\sigma\mu(M_1^W + R_1^W) + 4\delta M_1^W}{4} + \frac{\sigma^2\mu^2\beta(M_1^W + R_1^W)^2}{8} + \frac{\theta^2(M_1^W)^2}{2k} \\
rM_2^W = \frac{(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta(M_2^W + R_2^W))(\gamma - \sigma\mu\beta(M_1^W + R_1^W)) - 4\beta\delta M_2^W}{4\beta} + \frac{\theta^2 M_1^W M_2^W}{k} + \bar{e}\sigma M_1^W \\
rM_3^W = \frac{(\alpha - \beta c\sigma\mu\beta(M_2^W + R_2^W))^2}{8\beta} + \frac{\theta^2(M_2^W)^2}{2k} + \sigma\bar{e}M_2^W \\
\frac{r}{2}R_1^W = \frac{\gamma^2}{16\beta} - \frac{\gamma\sigma\mu(M_1^W + R_1^W) + 8\delta R_1^W}{8} + \frac{\sigma^2\mu^2\beta(M_1^W + R_1^W)^2}{16} + \frac{\theta^2 M_1^W R_1^W}{k} \\
rR_2^W = \frac{(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta(M_2^W + R_2^W))(\gamma - \sigma\mu\beta(M_1^W + R_1^W)) - 8\beta\delta R_2^W}{8\beta} + \frac{\theta^2(M_1^W R_2^W + M_2^W R_1^W)}{k} \\
rM_3^W = \frac{(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta(M_2^W + R_2^W))^2}{16\beta} + \frac{\theta^2 M_2^W R_2^W}{k} + \sigma\bar{e}R_2^W
\end{array} \right. \quad (4.28)$$

■

Proposizione 2. La traiettoria di equilibrio EGR nello scenario WP è data da

$$G^W(t) = (G_0 - G_\infty^W) e^{\frac{Z}{4k}t} + G_\infty^W \quad (4.29)$$

ove Z è definito come di seguito

$$Z \triangleq 4\theta^2 M_1^W + \sigma\mu k (3\gamma + \sigma\mu\beta(M_1^W + R_1^W)) - 4k(\sigma\mu\gamma + \delta) \quad (4.30)$$

Il valore dell' EGR a regime stazionario risulta

$$G_\infty^W = \frac{4(\theta^2 M_2^W + k\sigma\bar{e}) - \sigma\mu k(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta(M_2^W R_2^W))}{4k(\sigma\mu\gamma + \delta) - 4\theta^2 M_1^W - \sigma\mu k(3\gamma + \sigma\mu\beta(M_1^W + R_1^W))} \quad (4.31)$$

quest'ultimo è globalmente ed asintoticamente stabile se e solo se $Z < 0$

$$4\theta M_1^W + \sigma\mu k(3\gamma + \sigma\mu\beta(M_1^W + R_1^W)) < 4k(\sigma\mu\gamma + \delta). \quad (4.32)$$

Dimostrazione Dalla proposizione precedente la soluzione assolutamente continua $G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ deve soddisfare il problema

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = \theta A(t) + \sigma(\bar{e} - e(t)) - \delta G(t) \\ G(0) = G_0 \end{cases} \quad (4.33)$$

ove $e(t) = \mu D(t) = \mu(\alpha + \gamma G(t) - \beta p(t))$ dipende esplicitamente da $G(t)$. Riscrivendo il termine $e(t)$ e successivamente evidenziando i termini dipendenti da G , l'equazione risulta

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= \theta A(t) + \sigma(\bar{e} - \mu(\alpha + \gamma G(t) - \beta p(t))) - \delta G(t) \\ &= -(\mu\gamma + \delta)G(t) + (\theta A(t) + \sigma\bar{e} - \sigma\mu\alpha + \sigma\mu\beta p(t)) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Notiamo che l'equazione differenziale ha la seguente forma

$$\dot{G}(t) = a(t)G + b(t) \quad (4.35)$$

con integrale generale

$$G(t) = e^{A(t)} \left(\int e^{-A(t)} b(t) dt + c \right) \quad (4.36)$$

la cui soluzione esplicita nel caso in cui $a(t)$ e $b(t)$ non dipendano esplicitamente da t , ovvero esse siano costanti, è:

$$G(t) = -\frac{b}{a} + ce^{at} \quad (4.37)$$

e la funzione $A(t)$ indica l'integrale generale di $a(t)$.

Sostituendo i valori di A, p trovati ai punti (4.23) e (4.25) per $\dot{G}(t)$ in (4.34) otteniamo un'equazione della forma (4.35) ove le funzioni $a(t)$ e $b(t)$ sono equivalenti alle costanti a, b a causa dell'indipendenza dal tempo, che risultano

$$a = \frac{4\theta M_1^W + \sigma\mu k (3\gamma + \sigma\mu\beta (M_1^W + R_1^W)) - 4k(\sigma\mu\gamma + \delta)}{4k} \quad (4.38)$$

$$b = \frac{4(\theta^2 M_1^W + k\sigma\bar{e}) - \sigma\mu k (\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta (M_2^W + R_2^W))}{4k} \quad (4.39)$$

ed $A(t) = at$. Il valore iniziale $G_0 = G(0)$ permette di determinare la costante $c = G_0 + \frac{b}{a}$, sostituendo c in (4.37) si ottiene

$$G(t) = -\frac{b}{a} + \left(G_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at} \quad (4.40)$$

Il limite di quest'ultima espressione ci permette di ottenere il valore G_∞^W che indica lo stato stazionario di EGR. A questo proposito

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{b}{a} + \left(G_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at} = -\frac{b}{a} = G_\infty^W \quad (4.41)$$

possiamo così riscrivere

$$G(t) = G_\infty^W + (G_0 - G_\infty^W) e^{at} \quad (4.42)$$

ove

$$G_\infty^W = \frac{4(\theta^2 M_1^W + k\sigma\bar{e}) - \sigma\mu k (\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta (M_2^W + R_2^W))}{4k(\sigma\mu\gamma + \delta) - 4\theta M_1^W - \sigma\mu k (3\gamma + \sigma\mu\beta (M_1^W + R_1^W))} \quad (4.43)$$

Lo stato stazionario G_∞^W di EGR è globalmente ed asintoticamente stabile se e solo se $a < 0$, ovvero

$$\frac{4\theta M_1^W + \sigma\mu k (3\gamma + \sigma\mu\beta (M_1^W + R_1^W)) - 4k(\sigma\mu\gamma + \delta)}{4k} < 0, \quad (4.44)$$

o equivalentemente,

$$4\theta M_1^W + \sigma\mu k (3\gamma + \sigma\mu\beta (M_1^W + R_1^W)) < 4k(\sigma\mu\gamma + \delta). \quad (4.45)$$

Si osservi che tale disequazione coincide con la condizione su Z definita nell'enunciato della proposizione. ■

I risultati ottenuti dalla proposizione precedente meritano i seguenti commenti:

Osservazione 9. Una funzione valore fornisce il payoff di equilibrio che qualsiasi valore di EGR potrebbe raggiungere. Nel modello precedentemente analizzato le funzioni $V_M^W(G)$ ed $V_R^W(G)$ sono descritte con formule quadratiche nel termine G , mentre le strategie sono lineari in G .

Quest'ultimo risultato è deducibile dalla struttura lineare-quadratica del gioco alla Stackelberg, analizzato al Capitolo 2.

Osservazione 10. I coefficienti delle due funzioni valore, ottenibili risolvendo il sistema di Riccati, non sono esprimibili esplicitamente in termini di parametri del modello. Questa difficoltà deriva dalla interdipendenza delle sei equazioni non lineari del sistema, rendendo difficile l'esistenza di una forma chiusa per i coefficienti, pertanto verranno ricavati numericamente.

Osservazione 11. La complessità dell'equilibrio è conseguenza della presenza, nel problema di ottimizzazione, di entrambe le strategie per i giocatori M e R. Presumendo che contribuisca esclusivamente la reputazione del produttore nella pubblicità, senza considerare le emissioni nella catena produttiva, ovvero ponendo $\sigma = 0$, il sistema di Riccati diventa

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{r}{2} \tilde{M}_1^W = \frac{\gamma^2}{8\beta} - \frac{4\delta \tilde{M}_1^W}{4\beta} + \frac{\theta^2 (\tilde{M}_1^W)^2}{2k} \\ r \tilde{M}_2^W = \frac{(\alpha - \beta c)\gamma - 4\beta\delta \tilde{M}_2^W}{4\beta} + \frac{\theta^2 \tilde{M}_1^W \tilde{M}_2^W}{k} \\ r \tilde{M}_3^W = \frac{(\alpha - \beta c)^2}{8\beta} + \frac{\theta^2 (\tilde{M}_2^W)^2}{2k} \\ \frac{r}{2} \tilde{R}_1^W = \frac{\gamma^2}{16\beta} - \frac{8\delta \tilde{R}_1^W}{8} + \frac{\theta^2 \tilde{M}_1^W \tilde{R}_1^W}{k} \\ r \tilde{R}_2^W = \frac{(\alpha - \beta c)\gamma - 8\beta\delta \tilde{R}_2^W}{8\beta} + \frac{\theta^2 (\tilde{M}_1^W \tilde{R}_2^W + \tilde{M}_2^W \tilde{R}_1^W)}{k} \\ r \tilde{M}_3^W = \frac{(\alpha - \beta c)^2}{16\beta} + \frac{\theta^2 \tilde{M}_2^W \tilde{R}_2^W}{k} \end{array} \right. \quad (4.46)$$

Il sistema può essere risolto analiticamente e verrà studiato nella sezione successiva.

4.2 Caso senza attenzione all'ambiente ($\sigma = 0$)

Proposizione 3. Si assuma una soluzione interna, nel caso in cui $\sigma = 0$. Le strategie di equilibrio possono risciversi nel seguente modo:

$$\tilde{w}^W(G) = \frac{\gamma}{2\beta}G + \frac{\alpha + \beta c}{2\beta} \quad (4.47)$$

$$\tilde{A}^W(G) = \frac{\theta \tilde{M}_1^W}{k} + \frac{\theta \tilde{M}_2^W}{k} \quad (4.48)$$

$$\tilde{p}^W(G) = \frac{3\gamma}{4\beta}G + \frac{3\alpha + \beta c}{4\beta} \quad (4.49)$$

In modo equivalente al caso precedente, i termini M_i^W e R_i^W ove $i = 1, 2, 3$ sono i coefficienti delle funzioni valore

$$\tilde{V}_M^W(G) = \frac{\tilde{M}_1^W}{2}G^2 + \tilde{M}_2^W G + \tilde{M}_3^W \quad (4.50)$$

$$\tilde{V}_R^W(G) = \frac{\tilde{R}_1^W}{2}G^2 + \tilde{R}_2^W G + \tilde{R}_3^W \quad (4.51)$$

I quali valori sono

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1^W &= \frac{k}{\theta^2} \Lambda_1, & \tilde{M}_2^W &= \frac{(\alpha - \beta c)\gamma}{4\beta(r + \delta - \Lambda_1)}, & \tilde{M}_3^W &= \frac{(\alpha - \beta c)^2}{8r\beta} \left(1 + \frac{\theta^2 \gamma^2}{4k\beta(r + \delta - \Lambda_1)^2}\right) \\ \tilde{R}_1^W &= \frac{\gamma^2}{16\beta\left(\frac{r}{2} + \delta - \Lambda_1\right)}, & \tilde{R}_2^W &= \frac{(\alpha - \beta c)\gamma}{8\beta(r + \delta - \Lambda_1)} \Phi_1, & \tilde{R}_3^W &= \frac{(\alpha - \beta c)^2}{16r\beta} \left(1 + \frac{\theta^2 \gamma^2}{2k\beta(r + \delta - \Lambda_1)} \Phi_1\right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

ove

$$\Lambda_1 = \frac{r}{2} + \delta - \left(\left(\frac{r}{2} + \delta \right)^2 - \frac{\theta^2 \gamma^2}{4k\beta} \right)^{1/2} \quad (4.53)$$

$$\Phi_1 = 1 + \frac{\theta^2 \gamma^2}{8k\beta(r + \delta - \Lambda_1)\left(\frac{r}{2} + \delta - \Lambda_1\right)} \quad (4.54)$$

Dimostrazione Riprendendo l'osservazione (11), con la sostituzione $\sigma = 0$, abbiamo ottenuto il sistema (4.46)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{r}{2} \tilde{M}_1^W &= \frac{\gamma^2}{8\beta} - \delta \tilde{M}_1^W + \frac{\theta^2 \left(\tilde{M}_1^W\right)^2}{2k} \end{aligned} \right. \quad (4.55)$$

$$\left\{ \begin{aligned} r \tilde{M}_2^W &= \frac{\alpha\gamma}{4\beta} - \frac{\gamma c}{4} - \delta \tilde{M}_2^W + \frac{\theta^2 \tilde{M}_1^W \tilde{M}_2^W}{k} \end{aligned} \right. \quad (4.56)$$

$$\left\{ \begin{aligned} r \tilde{M}_3^W &= \frac{\alpha^2}{8\beta} + \frac{\beta c^2}{8} - \frac{\alpha c}{4} + \frac{\theta^2 \left(\tilde{M}_2^W\right)^2}{2k} \end{aligned} \right. \quad (4.57)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{r}{2} \tilde{R}_1^W &= \frac{\gamma^2}{16\beta} - \delta \tilde{R}_1^W + \frac{\theta^2 \tilde{M}_1^W \tilde{R}_1^W}{k} \end{aligned} \right. \quad (4.58)$$

$$\left\{ \begin{aligned} r \tilde{R}_2^W &= \frac{\alpha\gamma}{8\beta} - \frac{\gamma c}{8} - \delta \tilde{R}_2^W + \frac{\theta^2 \left(\tilde{M}_1^W \tilde{R}_2^W + \tilde{M}_2^W \tilde{R}_1^W\right)}{k} \end{aligned} \right. \quad (4.59)$$

$$\left\{ \begin{aligned} r \tilde{R}_3^W &= \frac{\alpha^2}{16\beta} + \frac{\beta c^2}{16} - \frac{\alpha c}{8} + \frac{\theta^2 \tilde{M}_2^W \tilde{R}_2^W}{k} \end{aligned} \right. \quad (4.60)$$

Riscrivendo la prima equazione (4.55)

$$\frac{\theta^2}{2k} \left(\tilde{M}_1^W \right)^2 - \left(\delta + \frac{r}{2} \right) \tilde{M}_1^W + \frac{\gamma^2}{8\beta} = 0 \quad (4.61)$$

la forma corrisponde ad un'equazione di secondo grado, ove l'incognita è la variabile \tilde{M}_1^W e le cui soluzioni sono

$$\left(\tilde{M}_1^W \right)_{1,2} = \frac{\delta + \frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2} \right)^2 - \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta}}}{\frac{\theta^2}{k}} \quad (4.62)$$

la radice ammette soluzioni quando si verifica la seguente disequazione

$$\delta + \frac{r}{2} \geq \frac{\gamma\theta}{2\sqrt{k\beta}} \quad (4.63)$$

Dalla proposizione precedente G_∞^W è globalmente asintoticamente stabile se e solo se

$$4\theta^2 \tilde{M}_1^W + \sigma\mu k \left(3\gamma\sigma\mu\beta \left(\tilde{M}_1^W + \tilde{R}_1^W \right) \right) < 4k(\sigma\mu\gamma + \delta)$$

con la condizione $\sigma = 0$

$$\tilde{M}_1^W < \frac{k\delta}{\theta^2} \quad (4.64)$$

Analizziamo le possibili soluzioni e verifichiamo che rispettino le condizioni:

- **Caso $\tilde{M}_1^W = \tilde{M}_2^W$**

La radice deve essere nulla, ovvero la condizione di disuguaglianza (4.63) diventa un'uguaglianza, verificando $\delta + \frac{r}{2} = \frac{\gamma\theta}{2\sqrt{k\beta}}$. Le soluzioni sono $\left(\tilde{M}_1^W \right)_{1,2} = \frac{k}{\theta^2} \left(\delta + \frac{r}{2} \right)$ e per la condizione (4.64) abbiamo

$$\frac{k}{\theta^2} \left(\delta + \frac{r}{2} \right) < \frac{k}{\theta^2} \delta \iff r < 0 \quad (4.65)$$

ma r è un parametro fissato e positivo, quindi non è ammissibile la situazione di un'unica soluzione.

- **Caso \tilde{M}_1^W e \tilde{M}_2^W diversi**

La prima soluzione

$$\left(\tilde{M}_1^W \right)_1 = \frac{k}{\theta^2} \left(\delta + \frac{r}{2} + \underbrace{\sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2} \right)^2 - \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta}}}_{>0} \right) < \frac{k}{\theta^2} \delta \quad (4.66)$$

non è ammissibile dato che la quantità evidenziata è positiva e non rispetta la disuguaglianza.

La seconda soluzione da analizzare ha la scrittura

$$(\tilde{M}_1^W)_2 = \frac{k}{\theta^2} \left(\delta + \underbrace{\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta}}}_{\Delta} \right) < \frac{k}{\theta^2} \delta \quad (4.67)$$

Affinchè sia ammissibile è necessario che $\Delta < 0$

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta}} &< 0 \\ \frac{r}{2} &< \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta}} \\ \frac{r^2}{4} &< \left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta} \\ \frac{r^2}{4} &< \delta^2 + \frac{r^2}{4} + \delta r - \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta} \\ \delta^2 + \delta r - \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta} &> 0 \end{aligned}$$

Si ottiene così la condizione

$$\delta(\delta + r) > \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta} \quad (4.68)$$

la quale rende vera la condizione (4.63) relativa all'esistenza delle soluzioni e possiamo ometterla.

In definitiva l'unica soluzione è:

$$\tilde{M}_1^W = \frac{k}{\theta^2} \left(\delta + \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta}} \right) = \frac{k}{\theta^2} \Lambda_1 \quad (4.69)$$

ove $\Lambda_1 = \delta + \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta}}$.

La seconda equazione (4.56) con la sostituzione del valore di \tilde{M}_1^W ed una riscrittura, diventa

$$\tilde{M}_2^W = \frac{\gamma(\alpha - \beta c)}{4\beta(r + \delta - \Lambda_1)} \quad (4.70)$$

La terza equazione (4.57) con il precedente valore di \tilde{M}_2^W ha la forma

$$\tilde{M}_3^W = \frac{(\alpha - \beta c)^2}{8\beta r} \left(1 + \frac{\theta^2 \gamma^2}{4k\beta(r + \delta - \Lambda_1)^2} \right) \quad (4.71)$$

Le restanti equazioni del sistema si risolvono con la sostituzione dei valori precedenti e tramite delle semplici operazioni di riscrittura, in questo modo si ottengono

$$\tilde{R}_1^W = \frac{\gamma^2}{16\beta \left(\frac{r}{2} + \delta - \Lambda_1\right)} \quad (4.72)$$

$$\tilde{R}_2^W = \frac{(\alpha - \beta c)\gamma}{8\beta (r + \delta - \Lambda_1)} \Phi_1 \quad (4.73)$$

$$\tilde{R}_3^W = \frac{(\alpha - \beta c)^2}{16r\beta} \left(1 + \frac{\theta^2 \gamma^2}{2k\beta (r + \delta - \Lambda_1)} \Phi_1\right) \quad (4.74)$$

$$\text{ove } \Phi_1 = 1 + \frac{\theta^2 \gamma^2}{8k\beta (r + \delta - \Lambda_1) \left(\frac{r}{2} + \delta - \Lambda_1\right)}.$$

■

Proposizione 4. La traiettoria di equilibrio EGR, con \tilde{G}_∞^W lo stato stazionario a regime, è:

$$\tilde{G}^W(t) = \left(\tilde{G}_0 - \tilde{G}_\infty^W\right) e^{-\left(\delta - \frac{\theta^2}{k} \tilde{M}_1^W\right)t} + \tilde{G}_\infty^W \quad (4.75)$$

Lo stato stazionario \tilde{G}_∞^W è globalmente ed asintoticamente stabile se e solo se

$$\delta(\delta + r) > \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta} \quad (4.76)$$

Dimostrazione La traiettoria di equilibrio EGR nello scenario WP è data da (4.29)

$$\tilde{G}^W(t) = \left(\tilde{G}_0 - \tilde{G}_\infty^W\right) e^{\frac{Z}{4k}t} + \tilde{G}_\infty^W \quad (4.77)$$

con il valore di EGR a regime stazionario, ottenuto dall'equazione (4.31) con la sostituzione $\sigma = 0$

$$\tilde{G}_\infty^W = \frac{4\theta^2 \tilde{M}_2^W}{4k\delta - 4\theta^2 \tilde{M}_1^W} = \frac{\theta^2 \tilde{M}_2^W}{k\delta - \theta^2 \tilde{M}_1^W} \quad (4.78)$$

ove quest'ultimo è il livello EGR a regime stazionario. Questo stato stazionario è globalmente ed asintoticamente stabile se e solo se $Z < 0$ ove Z (già precedentemente analizzato) è definito nel seguente modo:

$$Z \triangleq 4\theta^2 \tilde{M}_1^W - 4k(\sigma\mu\gamma + \delta) \quad (4.79)$$

Infine verifichiamo la condizione su Z

$$\begin{aligned}
4\theta^2 \tilde{M}_1^W - 4k\delta &< 0 \\
\theta^2 \tilde{M}_1^W &< k\delta \\
\theta^2 \frac{k}{\theta^2} \Lambda_1 &< k\delta \\
\frac{r}{2} + \delta - \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta}} &< \delta \\
\frac{r^2}{4} &< \left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta} \\
\frac{r^2}{4} &< \frac{r^2}{4} + \delta^2 + \delta r - \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta} \\
\delta(\delta + r) &> \frac{\gamma^2 \theta^2}{4k\beta}
\end{aligned}$$

con l'ultimo passaggio abbiamo ritrovato la condizione (4.68). ■

Osservazione 12. Nella situazione in esame, la dipendenza di $\tilde{p}^W(G)$ dal prezzo $\tilde{w}^W(G)$ è ottenibile ponendo $\sigma = 0$ nella formula (4.9). Di conseguenza

$$\tilde{p}^W(G, \tilde{w}^W) = \frac{\alpha + \beta \tilde{w}^W + \gamma G}{2\beta} \quad (4.80)$$

questa scrittura sottolinea la reciproca dipendenza dei termini \tilde{p}^W e \tilde{w}^W . Inoltre, con $\tilde{p}^W > \tilde{w}^W$, è possibile calcolare la differenza tra i termini, ottenendo

$$\tilde{p}^W(G) - \tilde{w}^W(G) = \frac{1}{4\beta}(\alpha + \gamma G - \beta c) = \frac{1}{4\beta} D|_{p=c} \quad (4.81)$$

dove D indica la domanda del prodotto.

Capitolo 5

Revenue Sharing

Le dimostrazioni presenti in questa sezione utilizzano gli stessi metodi e teoremi citati precedentemente, di conseguenza esse risulteranno maggiormente sintetiche, tuttavia non meno precise, al fine rendere il testo meno prolisso.

5.1 Caso con attenzione all'aspetto ambientale

Proposizione 5. Si assuma una soluzione interna, le strategie di equilibrio di Stackelberg con feedback nello scenario RS risultano le seguenti:

$$A^S(G) = \frac{\theta M_1^S}{k} G + \frac{\theta M_2^S}{k} \quad (5.1)$$

$$p^S(G) = \frac{(1-\phi)\gamma + \sigma\mu\beta R_1^S}{2\beta(1-\phi)} G + \frac{(1-\phi)\alpha + \sigma\mu\beta R_2^S}{2\beta(1-\phi)} \quad (5.2)$$

i termini M_i^S e R_i^S ove $i = 1, 2, 3$ sono i coefficienti delle funzioni valore $V_M^S(G)$ e $V_R^S(G)$. Le funzioni rispettivamente dei due soggetti hanno la seguente scrittura

$$V_M^S(G) = \frac{M_1^S}{2} G^2 + M_2^S G + M_3^S \quad (5.3)$$

$$V_R^S(G) = \frac{R_1^S}{2} G^2 + R_2^S G + R_3^S \quad (5.4)$$

i coefficienti M_i^S e R_i^S ove $i = 1, 2, 3$ sono definiti nella dimostrazione come soluzioni di un sistema di Riccati.

Dimostrazione Utilizziamo il metodo di Programmazione Dinamica tramite l'equazione di HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) per un problema autonomo. Si supponga che esista un'unica soluzione assolutamente continua $G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ per il problema di Cauchy citato precedentemente (4.6). Inoltre esistono due funzioni valore continue e differenziabili $V_j^S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, ove $j \in M, R$ che soddisfano le seguenti equazioni di HJB:

$$rV_M^S(G) = \max_{A \geq 0} \left[(\alpha + \gamma G - \beta p)(\phi p - c) - \frac{k}{2} A^2 + \frac{\partial V_M^S(G)}{\partial G} (\theta A + \sigma(\bar{e} - \mu\alpha - \mu\gamma G + \mu\beta p) - \delta G) \right] \quad (5.5)$$

$$rV_R^S(G) = \max_{p \geq 0} \left[(\alpha + \gamma G - \beta p)(1 - \phi)p + \frac{\partial V_R^S(G)}{\partial G} (\theta A + \sigma(\bar{e} - \mu\alpha - \mu\gamma G + \mu\beta p) - \delta G) \right] \quad (5.6)$$

Analizziamo le equazioni (5.5) e (5.6) e calcoliamo il massimo valore delle funzioni all'interno delle parentesi, la prima denotata con $f(A)$ mentre la seconda con $g(p)$. Derivandole rispetto alle variabili A e p ed analizzandone l'annullarsi della derivata prima delle equazioni si ottengono i seguenti valori stazionari

$$\tilde{A}(G) = \frac{\theta}{k} \frac{\partial V_M^S(G)}{\partial G} \quad (5.7)$$

$$\tilde{p}(G) = \frac{(\alpha + \gamma G)(1 - \phi) + \sigma\mu\beta \frac{\partial V_R^S(G)}{\partial G}}{2\beta(1 - \phi)} \quad (5.8)$$

Le funzioni all'interno delle parentesi sono concave nei rispettivi insiemi di definizione, la prima in $\mathcal{D}_1 = \{A \in \mathbb{R} : A \geq 0\}$ e la seconda in $\mathcal{D}_2 = \{p \in \mathbb{R} : p \geq 0\}$. Entrambi i valori in (5.7) e (5.8) soddisfano le condizioni sufficienti per i punti di massimo, le derivate seconde, nelle variabili A e p , delle rispettive funzioni valutate nei punti stazionari sono negative. Inoltre i punti sono di massimo globale su \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 perché verificano le condizioni: $f(\tilde{A}(G)) \geq f(A), \forall A \geq 0$ e $g(\tilde{p}(G)) \geq g(p), \forall p \geq 0$

Riassumendo, i punti di massimo, ricordando la condizione di non negatività, sono i seguenti

$$A^S(G) = \max \{0, \tilde{A}(G)\}, \quad p^S(G) = \max \{0, \tilde{p}(G)\}$$

L'interesse dello studio è rivolto al caso della soluzione interna e non banale, assumeremo, seguendo l'analisi dell'articolo di riferimento, che i punti di massimo per le equazioni di HJB siano: $A^S(G) = \tilde{A}(G)$ e $p^S(G) = \tilde{p}(G)$; inserendo questi valori nelle equazioni (5.5) e (5.6) e con opportune operazioni si ottengono le equazioni nella forma

- Produttore

$$\begin{aligned} rV_M^S(G) = & \frac{\phi\gamma^2}{4\beta} G^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \left(\frac{\phi\alpha}{\beta} - c \right) - \frac{\partial V_M^S(G)}{\partial G} (\sigma\mu + \delta) \right) G \\ & + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\phi\alpha}{2\beta} - c - \sigma\mu \frac{\partial V_M^S(G)}{\partial G} \right) + \frac{\theta^2}{2k} \left(\frac{\partial V_M^S(G)}{\partial G} \right)^2 + \sigma\bar{e} \frac{\partial V_M^S(G)}{\partial G} \\ & + \frac{\sigma\mu\beta}{1 - \phi} \left(c \frac{\partial V_R^S(G)}{\partial G} - \frac{\sigma\mu\phi}{4(1 - \phi)} \left(\frac{\partial V_R^S(G)}{\partial G} \right)^2 + \frac{\sigma\mu}{2(1 - \phi)} \frac{\partial V_M^S(G)}{\partial G} \frac{\partial V_R^S(G)}{\partial G} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

- Rivenditore

$$\begin{aligned}
rV_R^S(G) &= \frac{\gamma^2(1-\phi)}{4\beta}G^2 + \left(\frac{\alpha\gamma(1-\phi)}{2\beta} - \frac{\partial V_R^S(G)}{\partial G} \left(\delta + \frac{\sigma\mu\gamma}{2} \right) \right) G \\
&+ \frac{\alpha^2(1-\phi)}{4\beta} + \frac{\theta^2}{k} \frac{\partial V_M^S(G)}{\partial G} \frac{\partial V_R^S(G)}{\partial G} + \frac{\sigma^2\mu^2\beta}{4(1-\phi)} \left(\frac{\partial V_R^S(G)}{\partial G} \right)^2 \\
&+ \sigma\bar{e} \frac{\partial V_R^S(G)}{\partial G} - \frac{\sigma\mu\alpha}{2} \frac{\partial V_R^S(G)}{\partial G}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Le precedenti equazioni sono quadratiche nella variabile G di conseguenza le soluzioni sono polinomiali di grado massimo 2. Si supponga che abbiamo la forma definita in (5.3) e (5.4)

$$V_M^S(G) = \frac{M_1^S}{2}G^2 + M_2^S G + M_3^S \tag{5.11}$$

$$V_R^S(G) = \frac{R_1^S}{2}G^2 + R_2^S G + R_3^S \tag{5.12}$$

di conseguenza i valori di A^S e p^S diventano

$$A^S(G) = \frac{\theta M_1^S}{k}G + \frac{\theta M_2^S}{k} \tag{5.13}$$

$$p^S(G) = \frac{\gamma(1-\phi) + \sigma\mu\beta R_1^S}{2\beta(1-\phi)}G + \frac{\alpha(1-\phi) + \sigma\mu\beta R_2^S}{2\beta(1-\phi)} \tag{5.14}$$

e le equazioni del Produttore e del Rivenditore hanno una forma differente

- Produttore

$$\begin{aligned}
r \left(\frac{M_1^S}{2}G^2 + M_2^S G + M_3^S \right) &= \frac{\phi\gamma^2}{4\beta}G^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \left(\frac{\phi\alpha}{\beta} - c \right) - (M_1^S G + M_2^S) (\sigma\mu + \delta) \right) G \\
&+ \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\phi\alpha}{2\beta} - c - \sigma\mu (M_1^S G + M_2^S) \right) + \frac{\theta^2}{2k} (M_1^S G + M_2^S)^2 \\
&+ \sigma\bar{e} (M_1^S G + M_2^S) + \frac{\sigma\mu\beta}{1-\phi} c (R_1^S G + R_2^S) \\
&- \frac{\sigma\mu\phi}{4(1-\phi)} (R_1^S G + R_2^S)^2 + \frac{\sigma\mu}{2(1-\phi)} (M_1^S G + M_2^S) (R_1^S G + R_2^S)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

- Rivenditore

$$\begin{aligned}
r \left(\frac{R_1^S}{2}G^2 + R_2^S G + R_3^S \right) &= \frac{\gamma^2(1-\phi)}{4\beta}G^2 + \left(\frac{\alpha\gamma(1-\phi)}{2\beta} - (R_1^S G + R_2^S) \left(\delta + \frac{\sigma\mu\gamma}{2} \right) \right) G \\
&+ \frac{\alpha^2(1-\phi)}{4\beta} + \frac{\theta^2}{k} (M_1^S G + M_2^S) (R_1^S G + R_2^S) + \\
&\frac{\sigma^2\mu^2\beta}{4(1-\phi)} (R_1^S G + R_2^S)^2 + \sigma\bar{e} (R_1^S G + R_2^S) - \frac{\sigma\mu\alpha}{2} (R_1^S G + R_2^S)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

A questo punto tramite opportune modifiche si ricava il seguente sistema di Riccati e risolvendolo si ottengono i coefficienti M_i^S e R_i^S ove $i = 1, 2, 3$, i quali soddisfano le equazioni di HJB per i valori $G \geq 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} rM_1^S = \frac{((1-\phi)\gamma - \sigma\mu\beta R_1^S) ((1-\phi)(\phi\gamma - 2\sigma\mu\beta M_1^S) + \sigma\mu\beta\phi R_1^S)}{4\beta(1-\phi)^2} + \frac{(\theta M_1^S)^2}{2k} - \delta M_1^S \\ rM_2^S = \frac{((1-\phi)\alpha - \sigma\mu\beta R_2^S) ((1-\phi)(\phi\gamma - 2\sigma\mu\beta M_1^S) + \sigma\mu\beta\phi R_1^S)}{4\beta(1-\phi)^2} \\ \quad + \frac{((1-\phi)\gamma - \sigma\mu\beta R_1^S) ((1-\phi)(\phi\alpha - 2\beta c - 2\sigma\mu\beta M_2^S) + \sigma\mu\beta\phi R_2^S)}{4\beta(1-\phi)^2} \\ \quad + \frac{\theta^2 M_1^S M_2^S}{k} + \sigma\bar{e}M_1^S - \delta M_2^S \\ rM_3^S = \frac{((1-\phi)\alpha - \sigma\mu\beta R_1^S) ((1-\phi)(\phi\alpha - 2\beta c - 2\sigma\mu\beta M_2^S) + \sigma\mu\beta\phi R_2^S)}{4\beta(1-\phi)^2} + \frac{(\theta M_2^S)^2}{2k} + \sigma\bar{e}M_2^S \\ \frac{r}{2}R_1^S = \frac{((1-\phi)\gamma - \sigma\mu\beta R_1^S)^2}{4\beta(1-\phi)} + \frac{\theta^2 M_1^S R_1^S}{k} - \delta R_1^S \\ rR_2^S = \frac{((1-\phi)\alpha - \sigma\mu\beta R_2^S) ((1-\phi)\gamma - \sigma\mu\beta R_1^S)}{2\beta(1-\phi)} + \frac{\theta^2 (M_1^S R_2^S + M_2^S R_1^S)}{k} + \sigma\bar{e}R_1^S - \delta R_2^S \\ rM_3^S = \frac{((1-\phi)\alpha - \sigma\mu\beta R_2^S)^2}{4\beta(1-\phi)} + \frac{\theta^2 (M_2^S R_2^S)}{k} + \sigma\bar{e}R_2^S \end{array} \right. \quad (5.17)$$

■

Proposizione 6. La traiettoria di equilibrio EGR nello scenario RS ha la seguente forma

$$G^S(t) = (G_0 - G_\infty^S) e^{\frac{Y}{2(1-\phi)k}t} + G_\infty^S \quad (5.18)$$

ove Y è definito come di seguito

$$Y \triangleq 2(1-\phi) (\theta^2 M_1^S - k(\sigma\mu\gamma + \delta)) + \sigma\mu k ((1-\phi)\gamma + \sigma\mu\beta R_1^S) \quad (5.19)$$

Il valore dell' EGR a regime stazionario risulta

$$G_\infty^S = \frac{\sigma\mu k ((1-\phi)\alpha - \sigma\mu\beta R_2^S) - 2(1-\phi) (\theta^2 M_2^S + k\sigma\bar{e})}{2(1-\phi) (\theta^2 M_1^S - k(\sigma\mu\gamma + \delta)) + \sigma\mu k ((1-\phi)\gamma + \sigma\mu\beta R_1^S)} \quad (5.20)$$

il quale è globalmente ed asintoticamente stabile se e solo se $Y < 0$.

Dimostrazione Nella proposizione precedente si era supposta l'esistenza di una soluzione assolutamente continua $G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, la quale soddisfa il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = \theta A(t) + \sigma(\bar{e} - e(t)) - \delta G(t) \\ G(0) = G_0 \end{cases} \quad (5.21)$$

ove $e(t) = \mu D(t) = \mu(\alpha + \gamma G(t) - \beta p(t))$ dipende esplicitamente da $G(t)$. Riscrivendo il termine $e(t)$ e successivamente evidenziando i termini dipendenti da $G(t)$ successivamente indicata con G , l'equazione diventa

$$\begin{aligned}\dot{G}(t) &= \theta A(t) + \sigma(\bar{e} - \mu(\alpha + \gamma G(t) - \beta p(t))) - \delta G(t) \\ &= -(\mu\gamma + \delta)G + (\theta A(t) + \sigma\bar{e} - \sigma\mu\alpha + \sigma\mu\beta p(t))\end{aligned}\quad (5.22)$$

Inoltre precedentemente ai punti (5.13) e (5.14) abbiamo definito il valore di $A(t)$ e $p(t)$, sostituendolo nell'equazione precedente (5.22) e con opportune modifiche la forma di $G(t)$ è la seguente

$$\dot{G}(t) = \left(\frac{\theta^2}{k} M_2^S + \frac{\sigma\mu\alpha}{2} + \frac{\sigma^2\mu^2\beta}{2(1-\phi)} R_2^S + \sigma\bar{e} - \sigma\mu\alpha \right) + \left(\frac{\theta^2}{k} M_1^S + \frac{\sigma\mu\gamma}{2} + \frac{\sigma^2\mu^2\beta}{2(1-\phi)} R_1^S - \sigma\mu\gamma - \delta \right) G \quad (5.23)$$

Notiamo che l'equazione differenziale ha la seguente forma

$$\dot{G}(t) = a(t)G + b(t) \quad (5.24)$$

con integrale generale

$$G(t) = e^{A(t)} \left(\int e^{-A(t)} b(t) dt + c \right) \quad (5.25)$$

e la funzione $A(t)$ indica l'integrale generale di $a(t)$. Nel caso in esame i termini $a(t)$ e $b(t)$ non dipendono esplicitamente dalla variabile temporale t , di conseguenza l'integrale $A(t) = at$ e la forma di $G(t)$ è

$$G(t) = -\frac{b}{a} + ce^{at} \quad (5.26)$$

In definitiva le costanti a e b possono essere riscritte nella seguente forma

$$a = \frac{2\theta^2(1-\phi)M_1^S - \sigma\mu\gamma k(1-\phi) + \sigma^2\mu^2\beta k R_1^S + 2\delta k(1-\phi)}{2k(1-\phi)} \quad (5.27)$$

$$b = \frac{2\theta^2(1-\phi)M_2^S - \sigma\mu\alpha k(1-\phi) + \sigma^2\mu^2\beta k R_2^S + 2\sigma\bar{e}k(1-\phi)}{2k(1-\phi)} \quad (5.28)$$

ed $A(t) = at$. Il valore iniziale $G_0 = G(0)$ permette di determinare la costante $c = G_0 + \frac{b}{a}$, sostituendo c in (5.26) si ottiene

$$G(t) = -\frac{b}{a} + \left(G_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at} \quad (5.29)$$

Il limite di quest'ultima espressione ci permette di ottenere il valore G_∞^S che indica lo stato stazionario di EGR, possiamo così riscrivere

$$G(t) = G_\infty^S + (G_0 - G_\infty^S) e^{at} \quad (5.30)$$

ove

$$G_\infty^S = \frac{\sigma\mu\alpha k(1-\phi) - 2\theta^2(1-\phi)M_2^S - \sigma^2\mu^2\beta k R_2^S - 2\sigma\bar{e}k(1-\phi)}{2\theta^2(1-\phi)M_1^S - \sigma\mu\gamma k(1-\phi) + \sigma^2\mu^2\beta k R_1^S + 2\delta k(1-\phi)} \quad (5.31)$$

Lo stato stazionario G_∞^S di EGR è globalmente ed asintoticamente stabile se e solo se $a < 0$

$$\frac{2\theta^2(1-\phi)M_1^S - \sigma\mu\gamma k(1-\phi) + \sigma^2\mu^2\beta k R_1^S + 2\delta k(1-\phi)}{2k(1-\phi)} < 0 \quad (5.32)$$

equivalentemente,

$$2\theta^2(1-\phi)M_1^S + \sigma^2\mu^2\beta k R_1^S < k(1-\phi)(2\delta + \sigma\mu\gamma) \quad (5.33)$$

che coincide con la condizione su Y definita nell'enunciato della proposizione. ■

5.2 Caso senza attenzione all'ambiente ($\sigma = 0$)

Proposizione 7. Si assuma una soluzione interna, nel caso in cui $\sigma = 0$. Le strategie di equilibrio posso risciversi nel seguente modo

$$\tilde{A}^S(G) = \frac{\theta\tilde{M}_1^S}{k}G + \frac{\theta\tilde{M}_2^S}{k} \quad (5.34)$$

$$\tilde{p}^S(G) = \frac{\gamma}{2\beta}G + \frac{\alpha}{2\beta} \quad (5.35)$$

Equivalentemente al caso precedente, i termini M_i^S e R_i^S ove $i = 1, 2, 3$ sono i coefficienti delle funzioni valore

$$\tilde{V}_M^S(G) = \frac{\tilde{M}_1^S}{2}G^2 + \tilde{M}_2^S G + \tilde{M}_3^S \quad (5.36)$$

$$\tilde{V}_R^S(G) = \frac{\tilde{R}_1^S}{2}G^2 + \tilde{R}_2^S G + \tilde{R}_3^S \quad (5.37)$$

I quali valori risultano:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1^S &= \frac{k}{\theta^2}\Lambda_2, & \tilde{M}_2^S &= \frac{(\phi\alpha - \beta c)\gamma}{2\beta(r + \delta - \Lambda_2)}, & \tilde{M}_3^S &= \frac{1}{4r\beta} \left(\alpha(\phi\alpha - 2\beta c) + \frac{(\phi\alpha - \beta c)^2\theta^2\gamma^2}{2\beta k(r + \delta - \Lambda_2)^2} \right), \\ \tilde{R}_1^S &= \frac{(1-\phi)\gamma^2}{4\beta\left(\frac{r}{2} + \delta - \Lambda_2\right)}, & \tilde{R}_2^S &= \frac{\gamma(1-\phi)}{2\beta(r - \delta - \Lambda_2)}\Phi_2, & \tilde{R}_3^S &= \frac{1-\phi}{4r\beta} \left(\alpha^2 + \frac{(\phi\alpha - \beta c)\theta^2\gamma^2}{k\beta(r + \delta - \Lambda_2)^2}\Phi_2 \right) \end{aligned} \quad (5.38)$$

ove

$$\Lambda_2 = \frac{r}{2} + \delta - \left(\left(\frac{r}{2} + \delta \right)^2 - \frac{\phi\theta^2\gamma^2}{2k\beta} \right)^{1/2} \quad (5.39)$$

$$\Phi_2 = \alpha + \frac{\theta^2(\phi\alpha - \beta c)\gamma^2}{4k\beta(r + \delta - \Lambda_2)} \left(\frac{r}{2} + \delta - \Lambda_2 \right) \quad (5.40)$$

Dimostrazione I passaggi successivi seguono la dimostrazione della proposizione (5); imponendo la condizione $\sigma = 0$ si ottiene il sistema di Riccati presentato di seguito

$$\left\{ \begin{array}{l} r \tilde{M}_1^S = \frac{\gamma^2 \phi}{4\beta} + \frac{(\theta \tilde{M}_1^S)^2}{2k} - \delta \tilde{M}_1^S \end{array} \right. \quad (5.41)$$

$$r \tilde{M}_2^S = \frac{(\phi\alpha - \beta c) \gamma}{2\beta} + \frac{\theta^2 \tilde{M}_1^S \tilde{M}_2^S}{k} - \delta \tilde{M}_2^S \quad (5.42)$$

$$r \tilde{M}_3^S = \frac{\alpha(\phi\alpha - 2\beta c)}{4\beta} + \frac{(\theta \tilde{M}_2^S)^2}{2k} \quad (5.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r \tilde{R}_1^S = \frac{(1-\phi) \gamma^2}{4\beta} + \frac{\theta^2 \tilde{M}_1^S \tilde{R}_1^S}{k} - \delta \tilde{R}_1^S \end{array} \right. \quad (5.44)$$

$$r \tilde{R}_2^S = \frac{\alpha\gamma(1-\phi)}{2\beta} + \frac{\theta^2 (\tilde{M}_1^S \tilde{R}_2^S + \tilde{M}_2^S \tilde{R}_1^S)}{k} - \delta \tilde{R}_2^S \quad (5.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r \tilde{R}_3^S = \frac{\alpha^2(1-\phi)}{4\beta} + \frac{\theta^2 \tilde{M}_2^S \tilde{R}_2^S}{k} \end{array} \right. \quad (5.46)$$

Tramite una riscrittura della prima equazione (5.41) si ottiene un'equazione di secondo grado con incognita \tilde{M}_1^S , le soluzioni sono

$$\left(\tilde{M}_1^S \right)_{1,2} = \frac{\delta + \frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\phi\gamma^2\theta^2}{2k\beta}}}{\frac{\theta^2}{k}} \quad (5.47)$$

la cui condizioni di esistenza è

$$\delta + \frac{r}{2} \geq \gamma\theta \sqrt{\frac{\phi}{2k\beta}} \quad (5.48)$$

Dalla proposizione precedente, in particolare dalla formula (5.33), il requisito dello stato stazionario globalmente ed asintoticamente stabile con la condizione $\sigma = 0$ ha la forma

$$\tilde{M}_1^S < \frac{k}{\theta^2} \delta \quad (5.49)$$

Studiamo le soluzioni in (5.47) e verifichiamo che rispettino la condizione precedente in (5.49)

• **Caso** $\tilde{M}_1^S = \tilde{M}_2^S$

La radice è nulla e di conseguenza la condizione in (5.48) è un'uguaglianza. Le soluzioni risultano $\left(\tilde{M}_1^S \right)_{1,2} = \frac{k}{\theta^2} \left(\delta + \frac{r}{2} \right)$ ed applicando la condizione (5.49) si ottiene

$$\frac{k}{\theta^2} \left(\delta + \frac{r}{2} \right) < \frac{k}{\theta^2} \delta \iff r < 0 \quad (5.50)$$

ma r è un parametro positivo fissato, di conseguenza questo caso non è ammissibile.

• **Caso \tilde{M}_1^S e \tilde{M}_2^S diversi**

La prima soluzione

$$\left(\tilde{M}_1^S\right)_1 = \frac{k}{\theta^2} \left(\delta + \frac{r}{2} + \underbrace{\sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\phi\gamma^2\theta^2}{2k\beta}}}_{>0} \right) < \frac{k}{\theta^2}\delta \quad (5.51)$$

non è ammissibile perché non rispetta la condizione.

La seconda soluzione è la seguente

$$\left(\tilde{M}_1^S\right)_{1,2} = \frac{k}{\theta^2} \left(\delta + \frac{r}{2} - \underbrace{\sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\phi\gamma^2\theta^2}{2k\beta}}}_{\diamond} \right) < \frac{k}{\theta^2}\delta \quad (5.52)$$

Affinché sia ammissibile è necessario che $\diamond < 0$

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} &< \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\phi\gamma^2\theta^2}{2k\beta}} \\ \frac{r^2}{4} &< \left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\phi\gamma^2\theta^2}{2k\beta} \\ \delta^2 + \delta r - \frac{\phi\gamma^2\theta^2}{2k\beta} &> 0 \end{aligned}$$

si ottiene questa importante condizione

$$\delta(\delta + r) > \frac{\gamma^2\theta^2}{4k\beta} \quad (5.53)$$

la quale soddisfa la condizione esistenza (5.48).

In conclusione l'unica soluzione è:

$$\tilde{M}_1^S = \frac{k}{\theta^2} \left(\delta + \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\phi\gamma^2\theta^2}{2k\beta}} \right) = \frac{k}{\theta^2}\Lambda_2 \quad (5.54)$$

ove $\Lambda_2 = \delta + \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\phi\gamma^2\theta^2}{2k\beta}}$.

Le restanti equazioni (5.41)-(5.46), risolvibili seguendo l'ordine del sistema, utilizzano i valori dei precedenti coefficienti \tilde{M}_i^W e \tilde{R}_i^W con $i = 1, 2, 3$ e dei calcoli algebrici. Le

riportiamo di seguito:

$$\tilde{M}_2^S = \frac{\gamma(\phi\alpha - \beta c)}{2\beta(r + \delta - \Lambda_2)} \quad (5.55)$$

$$\tilde{M}_3^S = \frac{\alpha(\phi\alpha - 2\beta c)}{4r\beta} \left(1 + \frac{\theta^2\gamma^2(\phi\alpha - \beta c)}{2\alpha\beta k(r + \delta - \Lambda_2)^2} \right) \quad (5.56)$$

$$\tilde{R}_1^S = \frac{\gamma^2(1 - \phi)}{4\beta\left(\frac{r}{2} + \delta - \Lambda_2\right)} \quad (5.57)$$

$$\tilde{R}_2^S = \frac{\alpha\gamma(1 - \phi)}{2\beta(r + \delta - \Lambda_2)}\Phi_2 \quad (5.58)$$

$$\tilde{R}_3^S = \frac{\alpha^2(1 - \phi)}{4r\beta} \left(1 + \frac{\theta^2\gamma^2(\phi\alpha - \beta c)}{k\alpha\beta(r + \delta - \Lambda_2)^2}\Phi_2 \right) \quad (5.59)$$

$$\text{ove } \Phi_2 = 1 + \frac{\theta^2\gamma^2(\phi\alpha - \beta c)}{4k\alpha\beta(r + \delta - \Lambda_2)\left(\frac{r}{2} + \delta - \Lambda_2\right)} \quad \blacksquare$$

Proposizione 8. La traiettoria di equilibrio EGR nello scenario RS è

$$\tilde{G}^S(t) = (\tilde{G}_0 - \tilde{G}_\infty^S)e^{-(\delta - \frac{\theta^2}{k}\tilde{M}_1^S)t} + \tilde{G}_\infty^S \quad (5.60)$$

il cui valore dell' EGR a regime stazionario risulta

$$\tilde{G}_\infty^S = \frac{\theta^2\tilde{M}_2^S}{k\delta - \theta^2\tilde{M}_1^S} \quad (5.61)$$

Questo stato stazionario è globalmente ed asintoticamente stabile se e solo se

$$\delta(r + \delta) > \frac{\phi\theta^2\gamma^2}{2k\beta} \quad (5.62)$$

Dimostrazione La traiettoria di equilibrio EGR \tilde{G}_∞^S nello scenario RS si ottiene dall'espressione (5.20) con la sostituzione $\sigma = 0$ ed è la seguente

$$\tilde{G}_\infty^S = \frac{\theta^2\tilde{M}_2^S}{k\delta - \theta^2\tilde{M}_1^S} \quad (5.63)$$

Questo stato stazionario è globalmente ed asintoticamente stabile se e solo se l'esponente della funzione esponenziale in (5.60) è minore di 0, in particolare se

$$\frac{\theta^2\tilde{M}_1^S - k\delta}{k} < 0 \quad (5.64)$$

è possibile riscriverla con i seguenti passaggi

$$\begin{aligned}\theta^2 \tilde{M}_1^S &< k\delta \\ \theta^2 \frac{K}{\theta^2} \Lambda_2 &< K\delta \\ \Lambda_2 &< \delta \\ \delta + \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\phi\gamma^2\theta^2}{2k\beta}} &< \delta \\ \frac{r^2}{4} &< \delta^2 + \frac{\eta}{4} + \delta r - \frac{\gamma^2\theta^2}{4k\beta} \\ \delta(\delta + r) &> \frac{\gamma^2\theta^2}{4k\beta}\end{aligned}$$

e con l'ultimo passaggio abbiamo ritrovato la condizione (5.53) di esistenza della soluzione. ■

Capitolo 6

Rivenditore Miope

La miopia si riferisce alla situazione ove uno o più membri di una catena produttiva, coinvolti nella scelta delle decisioni di marketing in un ambiente dinamico, agiscono come se l'orizzonte fosse ridotto ad un singolo periodo. L'opposto di questo comportamento è la lungimiranza, con una differente capacità di osservazione delle dinamiche di stato delle loro scelte.

Il rivenditore miope sceglie un prezzo minore per il prodotto, rispetto ad un rivenditore che agisce in modo lungimirante; focalizzandosi sui periodi brevi in maniera oggettiva, in tal modo le politiche pubblicitarie hanno un immediato effetto sulle vendite. Al contrario, il produttore, può ugualmente concentrarsi sul breve periodo, cercando sempre di creare una base per le vendite future rispetto alla qualità del proprio marchio, in modo da comprendere le preferenze dei consumatori.

Infine consideriamo le condizioni per le quali un comportamento miope, sia esogeno che endogeno, sia uno strumento di profitto per la catena produttiva. Nel caso del comportamento miope esogeno, il soggetto non può osservare le conseguenze delle proprie scelte. Nel secondo caso, sceglie il comportamento da adottare (miope o lungimirante) optando per l'opzione con maggiori profitti; in questa situazione la miopia è un metodo strategico per aumentare il profitto.

6.1 Caso di Wholesale Pricing

Proposizione 9. Si assuma una soluzione interna, le strategie di equilibrio nello scenario WP nel caso del rivenditore miope, sono date da:

$$\hat{w}^W(G) = \frac{\gamma + \sigma\mu\beta\hat{M}_1^W}{2\beta}G + \frac{\alpha + \beta c + \sigma\mu\beta\hat{M}_2^W}{2\beta} \quad (6.1)$$

$$\hat{A}^W(G) = \frac{\theta\hat{M}_1^W}{k}G + \frac{\theta\hat{M}_2^W}{k} \quad (6.2)$$

$$\hat{p}^W(G) = \frac{3\gamma + \sigma\mu\beta\hat{M}_1^W}{4\beta}G + \frac{3\alpha + \beta c + \sigma\mu\beta\hat{M}_2^W}{4\beta} \quad (6.3)$$

ove $\hat{M}_i^W(G)$ e $\hat{R}_i^W(G)$ con $i = 1, 2, 3$ sono i coefficienti delle funzioni valore $\hat{V}_M^W(G)$ del produttore e $\hat{V}_R^W(G)$ del rivenditore, rispettivamente definite

$$\hat{V}_M^W(G) = \frac{\hat{M}_1^W}{2}G^2 + \hat{M}_2^W G + \hat{M}_3^W \quad (6.4)$$

$$\hat{V}_R^W(G) = \frac{\hat{R}_1^W}{2}G^2 + \hat{R}_2^W G + \hat{R}_3^W \quad (6.5)$$

i coefficienti $\hat{M}_i^W(G)$ e $\hat{R}_i^W(G)$ sono dati in forma esplicita nella dimostrazione e sono soluzioni di un sistema di Riccati.

Dimostrazione Le ipotesi della dimostrazione equivalgono a quelle della dimostrazione della Proposizione 1 alla sezione 4.1, in particolare si utilizzano le equazioni di HJB e si ipotizza che esistano due funzioni valore $\hat{V}_i^W : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ con $i \in \{M, R\}$. Il rivenditore miope si focalizza sui brevi periodi nella definizione del prezzo e delle strategie di vendita, di conseguenza ignora l'evoluzione dello stato nell'ottimizzazione delle equazioni (4.7) e (4.8), la formule $\frac{\partial \hat{V}_R^W}{\partial G}$ non è considerata.

Riportiamo la riscrittura delle equazioni con la condizione precedente

$$r\hat{V}_M^W(G) = \max_{w \geq 0, A \geq 0} \left[(\alpha + \gamma G - \beta p)(w - c) - \frac{k}{2}A^2 + \frac{\partial \hat{V}_M^W(G)}{\partial G}(\theta A + \sigma(\bar{e} - \mu\alpha - \mu\gamma G + \mu\beta p) - \delta G) \right] \quad (6.6)$$

$$r\hat{V}_R^W(G) = \max_{p \geq 0} [(\alpha + \gamma G - \beta p)(p - w)] \quad (6.7)$$

L'equazione tra parentesi quadre $h(p)$ di (6.7), nella variabile p , ha la forma di una parabola con la concavità verso il basso, il cui punto di massimo valore equivale al vertice. Il punto di massimo globale corrisponde al punto stazionario, che verifica $\frac{\partial h(p)}{\partial p} = 0$,

$$\hat{p}(G) = \frac{\alpha + \gamma G + \beta w}{2\beta} \quad (6.8)$$

Considerando la condizione di non negatività, il valore massimo del prezzo è

$$\hat{p}^W(G) = \max \{0, \hat{p}(G)\} \quad (6.9)$$

Il prezzo di riferimento che verrà inserito nell'espressione (6.6) è il valore (6.8) perché l'interesse dello studio è per politiche di prezzo non banali e non nulle.

I punti di massimo dell'espressione (6.7) equivalgono all'espressioni (4.14) e (4.15) con la condizione $\frac{\partial \hat{V}_R^W}{\partial G} = 0$

$$\hat{w}(G) = \frac{\alpha + \beta c + \gamma G + \sigma\mu\beta \left(\frac{\partial \hat{V}_M^W(G)}{\partial G} - \frac{\partial \hat{V}_R^W(G)}{\partial G} \right)}{2\beta} = \frac{\alpha + \beta c + \gamma G + \sigma\mu\beta \frac{\partial \hat{V}_M^W(G)}{\partial G}}{2\beta} \quad (6.10)$$

$$\hat{A}(G) = \frac{\theta}{k} \frac{\partial \hat{V}_M^W(G)}{\partial G} \quad (6.11)$$

La matrice Hessiana, valutata in questi punti, è strettamente definita negativa e si ha l'unicità dei valori di massimo.

In definitiva, con la condizione di non negatività, i punti di massimo delle equazioni di HJB sono i seguenti

$$\hat{w}^W(G) = \max \{0, \hat{w}(G)\}, \quad \hat{A}^W(G) = \max \{0, \hat{A}(G)\}, \quad \hat{p}^W(G) = \max \{0, \hat{p}(G)\}.$$

In seguito, inserendo i precedenti valori nelle equazioni di HJB e con opportune riscritture si hanno le seguenti equazioni

- Produttore

$$\begin{aligned} r\hat{V}_M^W(G) = & \frac{\gamma^2}{8\beta}G^2 + \left[\frac{\gamma}{4\beta} \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \frac{\partial \hat{V}_M^W(G)}{\partial G} \right) - \delta \frac{\partial \hat{V}_M^W(G)}{\partial G} \right] G + \\ & \frac{1}{8\beta} \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \frac{\partial \hat{V}_M^W(G)}{\partial G} \right)^2 + \frac{\theta^2}{2k} \left(\frac{\partial \hat{V}_M^W(G)}{\partial G} \right)^2 + \theta\bar{e} \frac{\partial \hat{V}_M^W(G)}{\partial G} \end{aligned} \quad (6.12)$$

- Rivenditore

$$r\hat{V}_R^W(G) = \frac{\gamma^2}{16\beta}G^2 + \left[\frac{\gamma}{8\beta} \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \frac{\partial \hat{V}_M^W(G)}{\partial G} \right) \right] G + \frac{1}{16\beta} \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \frac{\partial \hat{V}_M^W(G)}{\partial G} \right)^2 \quad (6.13)$$

Le equazioni sono quadratiche nella variabile G, pertanto le funzioni valore saranno anch'esse quadratiche in G, la cui forma è stata precedentemente definita nell'enunciato della Proposizione 1, ai punti (6.4) e (6.5). Di conseguenza i valori delle espressioni di HJB sono differenti e valgono

- Produttore

$$\begin{aligned} r \left(\hat{M}_1^W G^2 + \hat{M}_2^W G + \hat{M}_3^W \right) = & \frac{\gamma^2}{8\beta}G^2 + \frac{\gamma}{4\beta} \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \left(\hat{M}_1^W G + \hat{M}_2^W \right) \right) G \\ & - \delta \left(\hat{M}_1^W G + \hat{M}_2^W \right) G + \frac{1}{8\beta} \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \left(\hat{M}_1^W G + \hat{M}_2^W \right) \right)^2 + \\ & \frac{\theta^2}{2k} \left(\hat{M}_1^W G + \hat{M}_2^W \right)^2 + \theta\bar{e} \left(\hat{M}_1^W G + \hat{M}_2^W \right) \end{aligned} \quad (6.14)$$

- Rivenditore

$$\begin{aligned} r \left(\hat{R}_1^W G^2 + \hat{R}_2^W G + \hat{R}_3^W \right) = & \frac{\gamma^2}{16\beta}G^2 + \left[\frac{\gamma}{8\beta} \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \left(\hat{M}_1^W G + \hat{M}_2^W \right) \right) \right] G + \\ & \frac{1}{16\beta} \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \left(\hat{M}_1^W G + \hat{M}_2^W \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Tramite le opportune operazioni, sviluppando tutti i termini ed uguagliandone i rispettivi per ogni grado della variabile G , si ottiene il sistema di Riccati riportato di seguito. I coefficienti \hat{M}_i^W e \hat{R}_i^W ove $i = 1, 2, 3$ si ottengono esplicitamente risolvendone il sistema e soddisfano le equazioni di HJB per i valori di $G \geq 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} r \frac{\hat{M}_1^W}{2} = \frac{(\gamma - \sigma\mu\beta\hat{M}_1^W)^2}{8\beta} + \frac{(\theta\hat{M}_1^W)^2}{2k} - \delta\hat{M}_1^W \end{array} \right. \quad (6.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r \hat{M}_2^W = \frac{(\gamma - \sigma\mu\beta\hat{M}_1^W)(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta\hat{M}_2^W)}{4\beta} + \frac{\theta^2\hat{M}_1^W\hat{M}_2^W}{k} + \sigma\bar{e}\hat{M}_1^W - \delta\hat{M}_2^W \end{array} \right. \quad (6.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r \hat{M}_3^W = \frac{(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta\hat{M}_2^W)^2}{8\beta} + \frac{(\theta\hat{M}_2^W)^2}{2k} + \sigma\bar{e}\hat{M}_2^W \end{array} \right. \quad (6.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r \frac{\hat{R}_1^W}{2} = \frac{(\gamma - \sigma\mu\beta\hat{M}_1^W)^2}{16\beta} \end{array} \right. \quad (6.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r \hat{R}_2^W = \frac{(\gamma - \sigma\mu\beta\hat{M}_1^W)(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta\hat{M}_2^W)}{8\beta} \end{array} \right. \quad (6.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r \hat{R}_3^W = \frac{(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta\hat{M}_2^W)^2}{16\beta} \end{array} \right. \quad (6.21)$$

Il sistema è risolvibile analiticamente, di seguito sono riportati i passaggi.

Osservazione : La Proposizione 2 del capitolo 4 stabilisce che lo stato stazionario G_∞^W è globalmente ed asintoticamente stabile se e solo se Z , definito come in (4.32), è minore di zero. Tuttavia, nel caso del rivenditore miope, la condizione non risulta la corretta ma è necessario studiare la traiettoria di equilibrio EGR $\hat{G}^W(t)$. Di seguito, senza previa dimostrazione, si utilizzerà la condizione espressa in (6.39), per un approfondimento si consulti la dimostrazione della Proposizione 10 del presente capitolo.

Mediante una riscrittura dei termini della prima equazione (6.16), si ottiene un'equazione di secondo grado nell'incognita \hat{M}_1^W

$$\left(\frac{\sigma^2\mu^2\beta}{8} + \frac{\theta^2}{2k} \right) (\hat{M}_1^W)^2 - \left(\delta + \frac{\gamma\sigma\mu}{4} + \frac{r}{2} \right) \hat{M}_1^W + \frac{\gamma^2}{8\beta} = 0 \quad (6.22)$$

le cui soluzioni hanno la forma:

$$\left(\hat{M}_1^W \right)_{1,2} = \frac{4k}{\sigma^2\mu^2\beta + 4\theta^2} \left[\delta + \frac{\gamma\sigma\mu}{4} + \frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\delta + \frac{\gamma\sigma\mu}{4} + \frac{r}{2} \right)^2 - \frac{\gamma^2}{2\beta} \left(\frac{\sigma^2\mu^2\beta}{8} + \frac{\theta^2}{2k} \right)} \right] \quad (6.23)$$

La radice ammette soluzioni quando si verifica la disequazione

$$\delta + \frac{r}{2} + \frac{\gamma\sigma\mu}{4} \geq \frac{\gamma}{4} \sqrt{\frac{\sigma^2\mu^2\beta k + 4\theta^2}{\beta k}} \quad (6.24)$$

e come espresso nell'osservazione precedente si ha l'ulteriore condizione su \hat{M}_1^W

$$\hat{M}_1^W < \frac{k(\sigma\mu\gamma + 4\delta)}{4\theta^2 + \sigma^2\mu^2\beta k} = \frac{4k\left(\delta + \frac{\sigma\mu\gamma}{4}\right)}{4\theta^2 + \sigma^2\mu^2\beta k} \quad (6.25)$$

Analizziamo le possibili soluzioni e verifichiamo che le condizioni sia rispettate

- **Caso** $\hat{M}_1^W = \hat{M}_2^W$

La radice deve essere nulla e di conseguenza le soluzioni sono $(\hat{M}_1^W)_{1,2} = \frac{(4\delta + \gamma\sigma\mu + 2r)k}{\sigma^2\mu^2\beta k + 4\theta^2}$, per la condizione (6.25) si ottiene la disuguaglianza

$$\frac{(4\delta + \gamma\sigma\mu + 2r)k}{\sigma^2\mu^2\beta k + 4\theta^2} < \frac{k(\sigma\mu\gamma + 4\delta)}{4\theta^2 + \sigma^2\mu^2\beta k} \iff r < 0 \quad (6.26)$$

ma r è fissato ed è una costante positiva, quindi questo caso non è ammissibile.

- **Caso** $\hat{M}_1^W \neq \hat{M}_2^W$

La prima soluzione

$$(\hat{M}_1^W)_{1,2} = \frac{4k}{\sigma^2\mu^2\beta + 4\theta^2} \left[\delta + \frac{\gamma\sigma\mu}{4} + \frac{r}{2} + \underbrace{\sqrt{\left(\delta + \frac{\gamma\sigma\mu}{4} + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{2\beta} \left(\frac{\sigma^2\mu^2\beta}{8} + \frac{\theta^2}{2k}\right)}}_{>0} \right] < \frac{4k\left(\delta + \frac{\sigma\mu\gamma}{4}\right)}{4\theta^2 + \sigma^2\mu^2\beta k} \quad (6.27)$$

non rispetta la condizione e di conseguenza non è ammissibile.

La seconda soluzione

$$(\hat{M}_1^W)_{1,2} = \frac{4k}{\sigma^2\mu^2\beta + 4\theta^2} \left[\delta + \frac{\gamma\sigma\mu}{4} + \frac{r}{2} - \underbrace{\sqrt{\left(\delta + \frac{\gamma\sigma\mu}{4} + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{2\beta} \left(\frac{\sigma^2\mu^2\beta}{8} + \frac{\theta^2}{2k}\right)}}_{\circ} \right] < \frac{4k\left(\delta + \frac{\sigma\mu\gamma}{4}\right)}{4\theta^2 + \sigma^2\mu^2\beta k} \quad (6.28)$$

ed affinché sia ammissibile è necessario che $\circ < 0$

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\delta + \frac{\gamma\sigma\mu}{4} + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{2\beta} \left(\frac{\sigma^2\mu^2\beta}{8} + \frac{\theta^2}{2k}\right)} &< 0 \\ \frac{r^2}{4} &< \left(\delta + \frac{\gamma\sigma\mu}{4} + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{2\beta} \left(\frac{\sigma^2\mu^2\beta}{8} + \frac{\theta^2}{2k}\right) \\ \frac{r^2}{4} &< \left(\delta + \frac{\gamma\sigma\mu}{4}\right)^2 + \frac{r^2}{4} + r\left(\delta + \frac{\gamma\mu\sigma}{4}\right) - \frac{\gamma^2}{2\beta} \left(\frac{\sigma^2\mu^2\beta}{8} + \frac{\theta^2}{2k}\right) \\ \left(\delta + \frac{\gamma\mu\sigma}{4}\right) \left(r + \delta + \frac{\gamma\mu\sigma}{4}\right) &> \frac{\gamma^2}{2\beta} \left(\frac{\sigma^2\mu^2\beta}{8} + \frac{\theta^2}{2k}\right) \end{aligned}$$

Si ottiene la condizione

$$\left(\delta + \frac{\gamma\mu\sigma}{4}\right) \left(r + \delta + \frac{\gamma\mu\sigma}{4}\right) > \frac{\gamma^2}{16\beta} \left(\frac{4\theta^2 + \sigma^2\mu^2\beta}{k}\right) \quad (6.29)$$

la cui validità rende vera la condizione (6.24) e si può omettere.

In definitiva, l'unica soluzione ammissibile è la seguente

$$\left(\hat{M}_1^W\right)_{1,2} = \frac{4k}{\sigma^2\mu^2\beta+4\theta^2} \left[\delta + \frac{\gamma\sigma\mu}{4} + \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\delta + \frac{\gamma\sigma\mu}{4} + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{2\beta} \left(\frac{\sigma^2\mu^2\beta}{8} + \frac{\theta^2}{2k}\right)} \right] = \frac{4k}{\sigma^2\mu^2\beta+4\theta^2} \Lambda_3 \quad (6.30)$$

ove $\Lambda_3 = \delta + \frac{\gamma\sigma\mu}{4} + \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\delta + \frac{\gamma\sigma\mu}{4} + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{2\beta} \left(\frac{\sigma^2\mu^2\beta}{8} + \frac{\theta^2}{2k}\right)}$ Le restanti equazioni (6.17)-(6.21), risolvibili seguendo l'ordine di scrittura delle equazioni del sistema, utilizzano ognuna i valori dei precedenti coefficienti \hat{M}_i^W e \hat{R}_i^W con $i = 1, 2, 3$ e dei calcoli algebrici. Le riportiamo di seguito:

$$\hat{M}_2^W = \frac{4}{4r + 4\delta - 4\Lambda_3 + \gamma\sigma\mu} \Phi_3 \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_3^W = \frac{1}{8r\beta} \left[\alpha - \beta c - \frac{4\sigma\mu\beta}{4r + 4\delta - 4\Lambda_3 + \gamma\sigma\mu} \Phi_3 \right]^2 \\ + \frac{8\theta^2}{rk(4r + 4\delta - 4\Lambda_3 + \gamma\sigma\mu)^2} \Phi_3^2 + \frac{4\sigma\bar{e}}{r(4r + 4\delta - 4\Lambda_3 + \sigma\gamma\mu)} \Phi_3 \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\hat{R}_1^W = \frac{1}{8r\beta} \left(\gamma - \sigma\mu\beta \frac{4k}{4\theta^2 + \sigma^2\mu^2\beta k} \Lambda_3 \right)^2 \quad (6.33)$$

$$\hat{R}_2^W = \frac{1}{8r\beta} \left(\gamma - \frac{4\sigma\mu\beta\Lambda_3 k}{4\theta^2 + \sigma^2\mu^2\beta k} \right) \left[\alpha - \beta c - \frac{4\sigma\mu\beta}{4r + 4\delta - 4\Lambda_3 + \gamma\sigma\mu} \Phi_3 \right] \quad (6.34)$$

$$\hat{R}_3^W = \frac{1}{16r\beta} \left[\alpha - \beta c - \frac{4\sigma\mu\beta}{4r + 4\delta - 4\Lambda_3 + \gamma\sigma\mu} \Phi_3 \right]^2 \quad (6.35)$$

$$\text{ove } \Phi_3 = \frac{\gamma(\alpha-\beta c)}{4\beta} + \frac{\sigma\Lambda_3 k(4\bar{e}-\mu(\alpha-\beta c))}{4\theta^2 + \sigma^2\mu^2\beta k}. \quad \blacksquare$$

Proposizione 10. La traiettoria di equilibrio EGR nel caso del rivenditore miope è la seguente

$$\hat{G}^W(t) = \left(\tilde{G}_0 - \hat{G}_\infty^W \right) e^{\frac{\hat{Z}}{4k}t} + \hat{G}_\infty^W \quad (6.36)$$

la variabile \hat{Z} è definita di seguito

$$\hat{Z} \triangleq (4\theta^2 + \sigma^2\mu^2\beta k) \hat{M}_1^W - k(\sigma\mu\gamma + 4\delta) \quad (6.37)$$

Il valore dell' EGR a regime stazionario \hat{G}_∞^W risulta

$$\hat{G}_\infty^W = \frac{4 \left(\theta^2 \hat{M}_2^W + k\sigma\bar{e} \right) - \sigma\mu k \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \hat{M}_2^W \right)}{4 \left(k(\sigma\mu\gamma + \delta) - \theta^2 \hat{M}_1^W \right) - \sigma\mu k \left(3\gamma + \sigma\mu\beta \hat{M}_1^W \right)} \quad (6.38)$$

ed è globalmente e asintoticamente stabile se e solo se $\hat{Z} < 0$,

$$(4\theta^2 + \sigma^2\mu^2\beta k) \hat{M}_1^W < k(\sigma\mu\gamma + 4\delta) \quad (6.39)$$

Dimostrazione La soluzione assolutamente continua $G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ deve soddisfare il problema

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = -(\mu\gamma + \delta)G(t) + (\theta A(t) + \sigma\bar{e} - \sigma\mu\alpha + \sigma\mu\beta p(t)) \\ G(0) = G_0 \end{cases} \quad (6.40)$$

L'equazione differenziale ha la seguente forma

$$\dot{G}(t) = a(t)G + b(t) \quad (6.41)$$

con integrale generale

$$G(t) = e^{A(t)} \left(\int e^{-A(t)} b(t) dt + c \right) \quad (6.42)$$

la cui soluzione esplicita nel caso in cui $a(t)$ e $b(t)$ non dipendano esplicitamente da t , ovvero esse siano costanti, è:

$$G(t) = -\frac{b}{a} + ce^{at} \quad (6.43)$$

e la funzione $A(t)$ indica l'integrale generale di $a(t)$.

Sostituendo i valori di \hat{p}^W , \hat{A}^W trovati ai punti (6.11) e (6.8) in (6.40) otteniamo un'equazione della forma (6.41) ove le funzioni $a(t)$ e $b(t)$ sono equivalenti alle costanti a, b a causa dell'indipendenza dal tempo, che risultano

$$a = \frac{4 \left(\theta^2 \hat{M}_1^W - k(\sigma\mu\gamma - \delta) \right) + \sigma\mu k \left(3\gamma + \sigma\mu\beta \hat{M}_1^W \right)}{4k} \quad (6.44)$$

$$b = \frac{4 \left(\theta^2 \hat{M}_2^W + k\sigma\bar{e} \right) - \sigma\mu k \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \hat{M}_2^W \right)}{4k} \quad (6.45)$$

ed $A(t) = at$. Il valore iniziale $G_0 = G(0)$ permette di determinare la costante $c = G_0 + \frac{b}{a}$, sostituendo c in (6.43) si ottiene

$$G(t) = -\frac{b}{a} + \left(G_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at} \quad (6.46)$$

Il limite di quest'ultima espressione ci permette di ottenere il valore G_∞^W che indica lo stato stazionario di EGR, riscrivendo si ottiene l'espressione

$$G(t) = G_\infty^W + (G_0 - G_\infty^W) e^{at} \quad (6.47)$$

ove

$$\hat{G}_\infty^W = \frac{4 \left(\theta^2 \hat{M}_2^W + k\sigma\bar{e} \right) - \sigma\mu k \left(\alpha - \beta c - \sigma\mu\beta \hat{M}_2^W \right)}{4 \left(k(\sigma\mu\gamma + \delta) - \theta^2 \hat{M}_1^W \right) - \sigma\mu k \left(3\gamma + \sigma\mu\beta \hat{M}_1^W \right)} \quad (6.48)$$

Lo stato stazionario G_∞^W di EGR è globalmente ed asintoticamente stabile se e solo se $a < 0$, ovvero

$$\frac{4 \left(\theta^2 \hat{M}_1^W - k(\sigma\mu\gamma - \delta) \right) + \sigma\mu k \left(3\gamma + \sigma\mu\beta \hat{M}_1^W \right)}{4k} < 0 \quad (6.49)$$

o equivalentemente,

$$(4\theta^2 + \sigma^2\mu^2\beta k) \hat{M}_1^W < k(\sigma\mu\gamma + 4\delta) \quad (6.50)$$

Si osservi che tale disequazione coincide con la condizione su \hat{Z} definita in (6.39). ■

6.1.1 Caso senza attenzione all'aspetto ambientale

Nella situazione di un contratto Wholesale Pricing, con le caratteristiche di un rivenditore miope e senza attenzione all'aspetto ambientale ($\sigma = 0$); è possibile confrontare i dati con i rispettivi della situazione di WP con $\sigma = 0$, analizzati al Capitolo 4.2 .

In particolare, tutti i valori rimarrebbero invariati ad eccezione della funzione valore del rivenditore. Denotando con $\check{R}_i^W, i = 1, 2, 3$ le nuove variabili, le riscritture risultano:

$$\check{R}_1^W = \frac{1}{8r\beta}\gamma^2 \quad (6.51)$$

$$\check{R}_2^W = \frac{1}{8r\beta}\gamma(\alpha - \beta c) \quad (6.52)$$

$$\check{R}_3^W = \frac{1}{16r\beta}(\alpha - \beta c)^2 \quad (6.53)$$

6.2 Caso di Revenue Sharing

La situazione di miopia, per uno o più agenti, nel contratto di Revenue Sharing non può essere analizzata. In questo contratto i due agenti, al fine di ottenere un guadagno maggiore, confrontano le proprie conoscenze rispetto ai prodotti ed al loro valore di mercato. Di conseguenza, le attività promozionali sono concordate da entrambi e agire come miopi sarebbe controproducente, venendo meno ai principi del contratto.

Capitolo 7

Approfondimenti e Conclusioni

7.1 Variante nella definizione di \bar{e}

Nella sezione “Elementi Fondamentali del Modello: Reputazione Ecologica (EGR)” del capitolo 3, è stata introdotta la nozione di “livello delle emissioni” (indicato con \bar{e}). Lo standard delle emissioni, per un settore produttivo, indica un valore limite nel rilascio di agenti inquinanti nell’ambiente, derivanti dalla produzione di beni e/o servizi. La funzione $\bar{e} - e(t)$ indica il valore delle prestazioni ambientali del produttore al tempo t .

Nei capitoli precedenti, in particolare nell’analisi dei contratti WP e RS, il valore di \bar{e} è supposto costante nel tempo. Tuttavia, un’analisi più realistica, dovrebbe considerare \bar{e} come una funzione decrescente nel tempo; mediante tale azione, è possibile enfatizzare il proposito delle industrie di ridurre le proprie emissioni nel tempo.

Funzioni utilizzate

La funzione più semplice che rispetti la condizione di decrescenza (differente da una retta) è: $\bar{e} = -t^2 + c$, ove $c > 0$.

Il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{e} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t^2 + c = -\infty$ è soggetto alla condizione $\bar{e} \geq 0$, di conseguenza dopo aver raggiunto l’istante temporale $t = +\sqrt{c}$ la funzione è costantemente nulla, non costituendo un’interpretazione realistica della struttura produttiva.

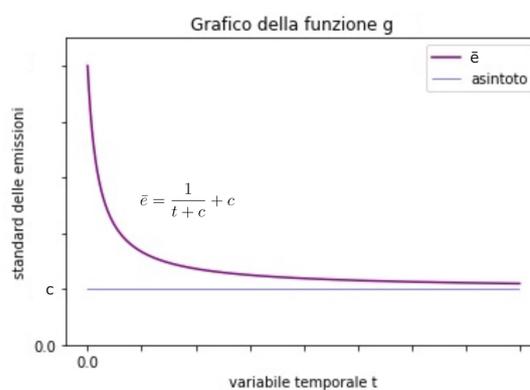
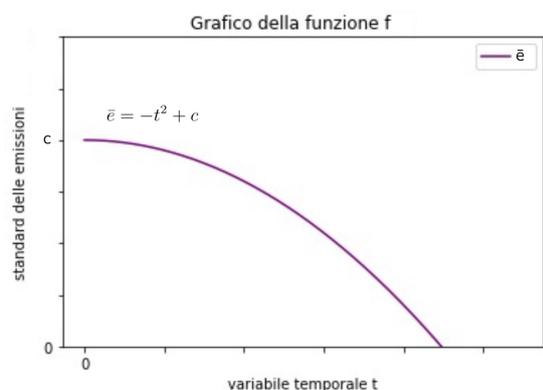
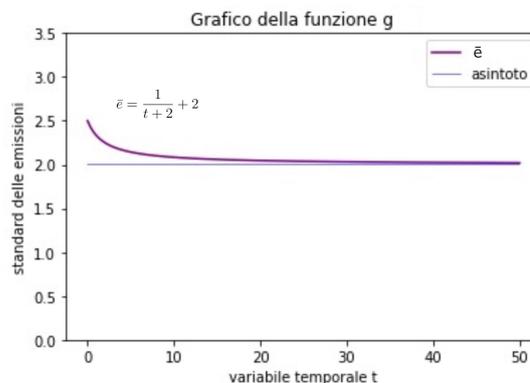
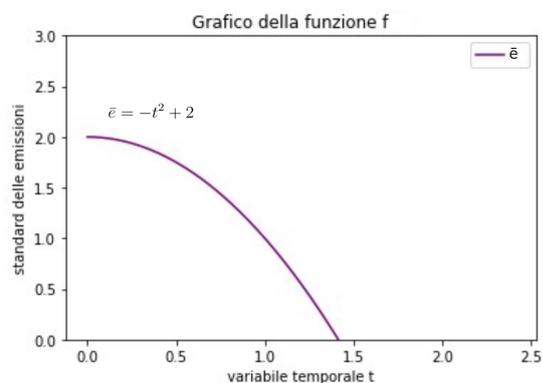
Pertanto, utilizzando una funzione decrescente ed asintotica, si evidenzia maggiormente l’obiettivo di ridurre le emissioni nel tempo, fino al raggiungimento di un valore standard $c > 0$. Il valore standard c può essere interpretato come il livello minimo di emissioni tecnologicamente raggiungibili. A questo proposito, maggiore sono le competenze scientifiche e tecnologiche impiegate da un’azienda per la produzione sostenibile, minore è l’impatto sull’ambiente. La funzione, che verrà utilizzata nella sezione è:

$$\bar{e} = \frac{1}{t+c} + c \tag{7.1}$$

il relativo limite è: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{e} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t+c} + c = c$.

Grafici

Nei grafici di seguito sono state analizzate le situazioni in cui la costante c è posta uguale a 2 e successivamente il caso generico.



Analisi del Modello

Le conseguenze del modello dinamico, a seguito dell'introduzione della funzione (7.1), possono essere sintetizzate:

- il problema dinamico non è più autonomo;
- il modello dipende esplicitamente dalla variabile temporale t e si analizzerà il problema di tempo finito, con stato finale fissato T ;
- le funzioni valore $V_M^i(G, t; T), V_R^i(G, t; T)$ con $i \in \{W, R\}$, per entrambi i contratti analizzati, devono essere ridefinite di conseguenza.

Proposizione 11. In riferimento alle affermazioni precedenti, dove $i \in \{W, R\}$ indica rispettivamente i contratti di “Wholesale Pricing” e di “Revenue Sharing”, si riporta di

seguito la scrittura delle funzioni valore

$$V_M^i(G, t; T) = \frac{M_1^i(t)}{2}G^2 + M_2^i(t)G + M_3^i(t), \quad (7.2)$$

$$V_R^i(G, t; T) = \frac{R_1^i(t)}{2}G^2 + R_2^i(t)G + R_3^i(t) \quad (7.3)$$

con le condizioni al limite per il tempo finito

$$V_M^i(G, T; T) = \frac{M_1^i(T)}{2}G^2 + M_2^i(T)G + M_3^i(T) = 0, \quad (7.4)$$

$$V_R^i(G, T; T) = \frac{R_1^i(T)}{2}G^2 + R_2^i(T)G + R_3^i(T) = 0 \quad (7.5)$$

ed essendo nel caso di $G \geq 0$ risultano

$$M_1^i(T) = M_2^i(T) = M_3^i(T) = R_1^i(T) = R_2^i(T) = R_3^i(T) = 0 \quad (7.6)$$

Proposizione 12. Le equazioni di Hamilton Jacobi Bellman, nel problema non autonomo, risultano le seguenti:

- **Contratto di Wholesale Pricing**

$$rV_M^W(G, t; T) - \frac{\partial V_M^W(G, t; T)}{\partial t} = \max_{w \geq 0, A \geq 0} \left[(\alpha + \gamma G - \beta p)(w - c) - \frac{k}{2}A^2 \right. \\ \left. + \frac{\partial V_M^W(G, t; T)}{\partial G}(\theta A + \sigma(\bar{e} - \mu\alpha - \mu\gamma G + \mu\beta p) - \delta G) \right] \quad (7.7)$$

$$rV_R^W(G, t; T) - \frac{\partial V_R^W(G, t; T)}{\partial t} = \max_{p \geq 0} \left[(\alpha + \gamma G - \beta p)(p - w) \right. \\ \left. + \frac{\partial V_R^W(G, t; T)}{\partial G}(\theta A + \sigma(\bar{e} - \mu\alpha - \mu\gamma G + \mu\beta p) - \delta G) \right] \quad (7.8)$$

- **Contratto di Revenue Sharing**

$$rV_M^S(G, t; T) - \frac{\partial V_M^S(G, t; T)}{\partial t} = \max_{A \geq 0} \left[(\alpha + \gamma G - \beta p)(\phi p - c) - \frac{k}{2}A^2 \right. \\ \left. + \frac{\partial V_M^S(G, t; T)}{\partial G}(\theta A + \sigma(\bar{e} - \mu\alpha - \mu\gamma G + \mu\beta p) - \delta G) \right] \quad (7.9)$$

$$rV_R^S(G, t; T) - \frac{\partial V_R^S(G, t; T)}{\partial t} = \max_{p \geq 0} \left[(\alpha + \gamma G - \beta p)(1 - \phi)p + \frac{\partial V_R^S(G, t; T)}{\partial G} (\theta A + \sigma(\bar{e} - \mu\alpha - \mu\gamma G + \mu\beta p) - \delta G) \right] \quad (7.10)$$

Proposizione 13. Nel caso di un problema autonomo, le condizioni aggiuntive sono le seguenti

$$\frac{\partial V_M^i(G, t; T)}{\partial t} = \frac{dM_1^i(t)}{dt} \frac{G^2}{2} + \frac{dM_2^i(t)}{dt} G + \frac{dM_3^i(t)}{dt} = 0, \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial V_R^i(G, t; T)}{\partial t} = \frac{dR_1^i(t)}{dt} \frac{G^2}{2} + \frac{dR_2^i(t)}{dt} G + \frac{dR_3^i(t)}{dt} = 0 \quad (7.12)$$

In conclusione, nelle proposizioni precedenti è stato citato il modello in analisi e le sue caratteristiche. Tuttavia, al fine di rendere il testo meno prolisso, il modello è analizzato con un approccio generale, omettendo dimostrazioni ed espressioni esplicite delle funzioni valore.

7.2 Confronto dei contratti nello scenario senza attenzione all'aspetto ambientale

Proposizione 14. Il prezzo del rivenditore nel caso del WP è maggiore rispetto al rispettivo del contratto RS, per ogni dato valore di G .

Dimostrazione Confrontiamo i risultati ottenuti in (4.49) e (5.35)

$$\begin{aligned} \tilde{p}^W(G) - \tilde{p}^S(G) &= \frac{3\gamma}{4\beta} G + \frac{3\alpha + \beta c}{4\beta} - \frac{\gamma}{2\beta} G - \frac{\alpha}{2\beta} = \\ &= \frac{3\gamma - 2\gamma}{4\beta} G + \frac{3\alpha + \beta c - 2\alpha}{4\beta} = \\ &= \frac{\gamma}{4\beta} G + \frac{\alpha + \beta c}{4\beta} = \frac{1}{4\beta} (\alpha + \beta c + \gamma G) > 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

segue dalla definizione di α, β, γ, c come variabili positive e da $G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$. ■

Proposizione 15. Se si verifica la condizione: $\phi \leq \frac{1}{2}$ allora $\tilde{G}_\infty^W \geq \tilde{G}_\infty^S$, per ogni dato valore di G . Inoltre, il valore dello sforzo pubblicitario nello scenario del WP è maggiore rispetto al caso di RS, $\tilde{A}^W(G) \geq \tilde{A}^S(G), \forall G$.

Dimostrazione Ricordando la scrittura (4.78) e (5.61), la disequazione $\tilde{G}_\infty^W \geq \tilde{G}_\infty^S$ è

$$\tilde{G}_\infty^W \geq \tilde{G}_\infty^S \iff \frac{\theta^2 \tilde{M}_2^W}{k\delta - \theta^2 \tilde{M}_1^W} \geq \frac{\theta^2 \tilde{M}_2^S}{k\delta - \theta^2 \tilde{M}_1^S} \iff \tilde{M}_2^W (k\delta - \theta^2 \tilde{M}_1^S) \geq (k\delta - \theta^2 \tilde{M}_1^W) \tilde{M}_2^S \quad (7.14)$$

ed i valori delle variabili \tilde{M}_i^j con $i \in \{1, 2\}, j \in \{W, R\}$ sono riportati di seguito

$$\begin{aligned}\tilde{M}_1^W &= \frac{k}{\theta^2} \Lambda_1, & \tilde{M}_2^W &= \frac{(\alpha - \beta c)\gamma}{4\beta(r + \delta - \Lambda_1)}, \\ \tilde{M}_1^S &= \frac{k}{\theta^2} \Lambda_2, & \tilde{M}_2^S &= \frac{(\phi\alpha - \beta c)\gamma}{2\beta(r + \delta - \Lambda_2)}.\end{aligned}$$

Riscrivendo la disequazione (7.14) risulta

$$\begin{aligned}\frac{(\alpha - \beta c)\gamma}{4\beta(r + \delta - \Lambda_1)} \left(k\delta - \theta^2 \frac{k}{\theta^2} \Lambda_2 \right) &\geq \left(k\delta - \theta^2 \frac{k}{\theta^2} \Lambda_1 \right) \frac{(\phi\alpha - \beta c)\gamma}{2\beta(r + \delta - \Lambda_2)} \\ \frac{\alpha - \beta c}{2(r + \delta - \Lambda_1)} \mathcal{K}(\delta - \Lambda_2) &\geq (\delta - \Lambda_1) \mathcal{K} \frac{\phi\alpha - \beta c}{r + \delta - \Lambda_2}\end{aligned}\quad (7.15)$$

Al fine di analizzare (7.15), è possibile dimostrare la seguente relazione tra i fattori $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ quando $\phi \leq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \delta + \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2\theta^2}{4k\beta}}, & \Lambda_2 &= \delta + \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\phi\gamma^2\theta^2}{2k\beta}} \\ \Lambda_1 \geq \Lambda_2 &\iff \delta + \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2\theta^2}{4k\beta}} \geq \delta + \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\delta + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{\phi\gamma^2\theta^2}{2k\beta}} \\ &\iff \left(\frac{r}{2} + \delta\right)^2 - \frac{\theta^2\gamma^2}{4k\beta} \leq \left(\frac{r}{2} + \delta\right)^2 - \frac{\phi\theta^2\gamma^2}{2k\beta} \\ &\iff \frac{1}{4} \frac{\theta^2\gamma^2}{k\beta} \geq \frac{\phi}{2} \frac{\theta^2\gamma^2}{k\beta} \\ &\iff \phi \leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Equivalentemente $-\Lambda_2 \geq -\Lambda_1$, di conseguenza:

- (1.) $\delta - \Lambda_2 \geq \delta - \Lambda_1$,
- (2.) $r + \delta - \Lambda_2 \geq r + \delta - \Lambda_1$,
- (3.) $\frac{1}{r + \delta - \Lambda_2} \leq \frac{1}{r + \delta - \Lambda_1}$,
- (4.) $\tilde{M}_1^W \geq \tilde{M}_1^S$.

Utilizzando i precedenti risultati, la disuguaglianza (7.15) è verificata quando

$$\frac{\alpha - \beta c}{2(r + \delta - \Lambda_1)} (\delta - \Lambda_2) \geq (\delta - \Lambda_1) \frac{\phi\alpha - \beta c}{r + \delta - \Lambda_2} \iff \frac{\alpha - \beta c}{2} \geq \phi\alpha - \beta c$$

in particolare se: $\alpha(1 - 2\phi) + \beta c \geq 0$, a causa della positività delle variabili α, β, c , la disuguaglianza è verificata con la condizione $\phi \leq \frac{1}{2}$; di conseguenza, si ottiene l'ulteriore

condizione:

$$(5.) \quad \tilde{M}_2^W \geq \tilde{M}_2^S .$$

Infine, per provare $\tilde{A}^W(G) \geq \tilde{A}^S(G)$ sono necessarie le condizioni (4.) e (5.)

$$\tilde{A}^W(G) = \frac{\theta}{k} \left(\tilde{M}_1^W G + \tilde{M}_2^W \right) \geq \frac{\theta}{k} \left(\tilde{M}_1^S G + \tilde{M}_2^S \right) = \tilde{A}^S(G) \quad (7.16)$$

■

Proposizione 16. Nel caso le variabili ϕ, α verifichino $\phi > \frac{1}{2}$ e $\alpha > \frac{\beta c}{2\phi - 1}$ allora: $\tilde{G}_\infty^W < \tilde{G}_\infty^S$ e $\tilde{A}^W(G) < \tilde{A}^S(G), \forall G$.

Dimostrazione Se $\phi > \frac{1}{2}$, allora $\Lambda_1 < \Lambda_2$ e le condizioni ottenute dalla proposizione precedente si riformulano

$$(1.) \quad \delta - \Lambda_2 < \delta - \Lambda_1 ,$$

$$(2.) \quad r + \delta - \Lambda_2 < r + \delta - \Lambda_1 ,$$

$$(3.) \quad \frac{1}{r + \delta - \Lambda_2} > \frac{1}{r + \delta - \Lambda_1} ,$$

$$(4.) \quad \tilde{M}_1^W > \tilde{M}_1^S .$$

La dimostrazione della disuguaglianza: $\tilde{G}_\infty^W < \tilde{G}_\infty^S$ si avvale delle condizioni (1.) e (3.)

$$\frac{\alpha - \beta c}{2(r + \delta - \Lambda_1)} (\delta - \Lambda_2) < (\delta - \Lambda_1) \frac{\phi \alpha - \beta c}{r + \delta - \Lambda_2} \iff \frac{\alpha - \beta c}{2} < \phi \alpha - \beta c \quad (7.17)$$

$$\alpha(1 - 2\phi) < -\beta c \iff \alpha > \frac{-\beta c}{1 - 2\phi} = \frac{\beta c}{2\phi - 1} \quad (7.18)$$

l'ultima implicazione è verificata sotto la condizione $\phi > \frac{1}{2}$ e di conseguenza:

$$(5.) \quad \tilde{M}_2^W < \tilde{M}_2^S .$$

Infine, utilizzando (4.) e (5.) si prova $\tilde{A}^W(G) < \tilde{A}^S(G)$. ■

7.3 Risultati Numerici

Nell'articolo di riferimento sono riportati ed analizzati alcuni risultati numerici, le ipotesi rispetto ai valori delle variabili sono riportate di seguito.

I 13 parametri del modello sono:

Parametri della Domanda :	α, β, γ
Parametri dei Costi :	c, k
Parametri dinamici EGR :	$\theta, \sigma, \mu, \bar{e}, \delta, G_0$
Tasso di attualizzazione :	r
Parametro di RS :	ϕ

Le ipotesi sono:

$$\alpha = \beta = \theta = \mu = 1; \quad c = 0.2; \quad r = 0.1; \quad \delta = 0.35; \quad G_0 = 1; \quad (7.19)$$

i restanti parametri variano:

$$\begin{aligned} \gamma &= \{0.2, 0.4, 0.6\} \\ k &= \{0.15, 0.2, 0.25\} \\ \bar{e} &= \{0.3, 1, 1.7\} \\ \sigma &\in \{0, 0.1, \dots, 0.9, 1\} \\ \phi &\in \{0.1, \dots, 0.9\} \end{aligned}$$

Sulla base dei risultati ottenuti è possibile affermare che un contratto di Revenue Sharing è “Pareto improving” rispetto ad un Wholesale Pricing, quando è verificata la condizione $\phi \in [0.65, 0.8]$. In questa circostanza il contratto RS è migliore per entrambi gli agenti e maggiore è la quota ϕ per il produttore, minore è il rispettivo guadagno per il rivenditore. Infine, con l’utilizzo dei risultati, è possibile concludere che agire come miope non è nel miglior interesse del rivenditore; nonostante il produttore utilizzi la situazione a proprio vantaggio. La situazione di miopia ha conseguenze maggiori sul rivenditore rispetto al produttore e, nel caso $\sigma = 0$, il comportamento del rivenditore non ha alcun impatto sul profitto del produttore; perché lo stato dinamico del problema diventa indipendente dalla strategia del rivenditore. Nel caso del rivenditore miope, il produttore fissa il prezzo ad un livello superiore rispetto alla situazione del rivenditore lungimirante, conseguentemente il prezzo di vendita risulta invariato rispetto al contratto ordinario.

Osservazione 13. Il termine “Pareto”, utilizzato nel contesto di un contratto di produzione WP o RS, descrive la distribuzione del profitto nella catena produttiva. Il “Principio Pareto 80/20” descrive come una piccola percentuale di cause abbia un effetto sproporzionato, ovvero l’80% delle conseguenze proviene dal 20% delle cause.

Alcuni esempi sono i seguenti:

- i. l’80% della ricchezza mondiale è in possesso al 20% della popolazione;
- ii. l’80% del valore di un deposito aziendale è determinato dal 20% degli articoli totali;
- iii. il 20% di una pianta produce l’80% dei frutti;
- iv. l’80% dei visitatori di un sito consulta solo il 20% degli articoli.

I siti di riferimento utilizzati per la definizione precedente sono: <https://w.wiki/8Hkm> e <https://asana.com/it/resources/pareto-principle-80-20-rule>.

Bibliografia

- [1] Laurie Simon Bagwell and B Douglas Bernheim. Veblen effects in a theory of conspicuous consumption. *The American economic review*, pages 349–373, 1996.
- [2] Alessandra Buratto, Luca Grosset, Bruno Viscolani, et al. *Ottimizzazione Dinamica. Modelli economici e gestionali*. Libreria Progetto snc, 2013.
- [3] Alessandra Buratto and Bruno Viscolani. An optimal control student problem and a marketing counterpart. *Mathematical and Computer Modelling*, 20(6):19–33, 1994.
- [4] Alessandra Buratto and Bruno Viscolani. New product introduction: goodwill, time and advertising cost. *Mathematical Methods of Operations Research*, 55:55–68, 2002.
- [5] Jeffrey Carpenter and Andrea Robbett. *Game theory and behavior*. MIT Press, 2022.
- [6] Roger Crowe and Williams Simon. *Who are the ethical consumers?* Citeseer, 2000.
- [7] Engelbert Dockner. *Differential games in economics and management science*. Cambridge University Press, 2000.
- [8] Martín-Herrán Guiomar, Sokri Abderrahmane, and Zaccour Georges. Dynamic oligopoly competition with public environmental information disclosure. *Contributions to Game Theory and Management*, 1:326–345, 2007.
- [9] Steffen Jørgensen, Guiomar Martín-Herrán, and Georges Zaccour. Dynamic games in the economics and management of pollution. *Environmental Modeling & Assessment*, 15:433–467, 2010.
- [10] Guiomar Martín-Herrán, Sihem Taboubi, and Georges Zaccour. Dual role of price and myopia in a marketing channel. *European Journal of Operational Research*, 219(2):284–295, 2012.
- [11] S Mosca and Bruno Viscolani. Optimal goodwill path to introduce a new product. *Journal of optimization theory and applications*, 123:149–162, 2004.
- [12] Marc Nerlove and Kenneth J Arrow. Optimal advertising policy under dynamic conditions. *Economica*, pages 129–142, 1962.
- [13] Ngo Van Long. *A survey of dynamic games in economics*, volume 1. World Scientific, 2010.

- [14] Fanjun Yao, Elena Parilina, Georges Zaccour, and Hongwei Gao. Accounting for consumers' environmental concern in supply chain contracts. *European Journal of Operational Research*, 301(3):987–1006, 2022.