

**Università degli Studi di Padova**

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"  
Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

## **Nuclei esotici: aspetti di struttura e di reazione del nucleo di elio-6**

Laureando:  
**Andrea Marangoni**

Relatore:  
**Prof. Lorenzo Fortunato**



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Caratteristiche dei nuclei esotici</b>	<b>3</b>
1.1 Tecniche di produzione dei nuclei esotici . . . . .	6
<b>2 Struttura del nucleo di elio-6</b>	<b>9</b>
2.1 Il metodo HHE . . . . .	10
2.2 Considerazioni sul momento angolare . . . . .	12
2.3 Risultati . . . . .	13
<b>3 Reazione di produzione dell'elio-6</b>	<b>17</b>
3.1 Presentazione del problema . . . . .	17
3.2 Discussione dei risultati . . . . .	19
<b>Conclusioni</b>	<b>23</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>25</b>



# Introduzione

Se ad oggi la fisica nucleare ‘tradizionale’, basata sullo studio dei nuclei stabili, può essere considerata consolidata avendo trovato nel modello a shell di Maria Goeppert-Mayer e di Haxel, Jensen e Suess una descrizione teorica elegante e soddisfacente, con lo sviluppo di nuove tecniche si è giunti alla scoperta di nuovi nuclei, che presentano caratteristiche differenti da quelli della valle di stabilità, come, ad esempio, una pronunciata tendenza a decadere rapidamente, aprendo così una nuova frontiera della fisica nucleare, la fisica dei nuclei esotici.

Il termine ‘esotico’ rende bene l’idea di una regione (in questo caso della carta dei nuclidi) ancora non perfettamente conosciuta.

I nuclei esotici presentano infatti energie di legame dell’ordine della frazione del MeV e, a causa di questo, una struttura differente dai classici nuclei stabili e tempi di dimezzamento molto brevi.

Il lavoro di questa tesi consiste nello studio del nucleo di elio-6, primo nucleo esotico prodotto in laboratorio negli anni ‘30 del Novecento. Tale nucleo può essere considerato il rappresentante della categoria dei nuclei esotici essendo il più semplice nucleo ricco di neutroni.

Il Capitolo 1 fornirà una panoramica delle caratteristiche generali dei nuclei esotici, dando una prima semplice descrizione teorica di alcune di queste ed esponendo brevemente le tecniche ad oggi note e utilizzate nella produzione di tali nuclei.

Il Capitolo 2 si focalizzerà sul nucleo di elio-6, in particolare sui suoi aspetti di struttura, confrontando i risultati ottenuti attraverso il metodo di espansione con armoniche ipersferiche con i dati sperimentali.

Infine, nel Capitolo 3 verrà studiata la dinamica evolutiva di un sistema di reazioni di possibile interesse astrofisico che conduce un plasma caldissimo di trizio e particelle alfa alla formazione di elio-6.

Sebbene questa semplificata rete di reazioni sia solo un esercizio accademico, piuttosto che un tentativo di modellizzare un sistema reale, essa permette di fare alcune osservazioni interessanti.



# Capitolo 1

## Caratteristiche dei nuclei esotici

Con l'espressione 'nuclei esotici' si indicano nuclei ricchi di neutroni (o, più raramente, di protoni), costituiti da basse energie di legame, da raggi superiori alle previsioni teoriche e da instabilità per decadimenti  $\beta$ .

Ricordando la relazione che intercorre tra energia e massa di un sistema a riposo,  $E = mc^2$ , si definisce l'energia di separazione di un nucleone dal nucleo come segue:

$$S_n = [m({}^A_{Z-1}X_{N-1}) + m_n - m({}^A_ZX_N)] c^2 \quad (1.1)$$

$$S_p = [m({}^A_{Z-1}X_N) + m_p - m({}^A_ZX_N)] c^2 \quad (1.2)$$

Nella carta dei nuclidi, riportata in Figura 1.1, i nuclei stabili, maggiormente legati, si trovano lungo la valle di stabilità. Procedendo verso l'esterno, risalendo i pendii, si incontrano nuclei sempre meno legati, tra cui i nuclei esotici, prossimi alla cima, fino alla dripline neutronica/protonica, definita come la linea che connette nuclei in cui l'energia di separazione dei neutroni/protoni è nulla.

Lo studio sistematico dei nuclei esotici ha inizio nel 1985, anno in cui Tanihata e il suo gruppo conducono esperimenti ai laboratori di Berkeley per misurare la sezione d'urto degli isotopi di litio in processi di interazione con bersagli di berillio, carbonio e alluminio [1]. Da tali misure è stato possibile ricavare il raggio quadratico medio nucleare  $R_{rms}^m$  a partire da calcoli con modelli di Glauber.

Dai risultati, riportati in Fig. 1.2, si nota che il  ${}^{11}\text{Li}$  ha un raggio molto superiore a quello previsto dalla dipendenza  $R \propto A^{1/3}$ . Ciò suggerisce l'esistenza di una lunga coda nella distribuzione della materia, dovuta ai nucleoni debolmente legati.

Jonson e Hansen [2] diedero una spiegazione delle dimensioni di  ${}^{11}\text{Li}$  introducendo il concetto di alone, effetto dovuto al debole legame esistente tra i due neutroni di valenza e il core stabile  ${}^9\text{Li}$  contenente i restanti nucleoni.

Le deboli energie di legame e il fatto che le forze nucleari siano a corto raggio fanno sì che i neutroni possano penetrare nella zona classicamente proibita.

Nel caso più semplice di nucleo esotico, descritto da un sistema a due corpi (core + neutrone di valenza), la funzione d'onda nucleare può essere fattorizzata nel seguente modo:

$$\Phi_A \approx \phi_{core}(\xi)\psi(\vec{r}) \quad (1.3)$$

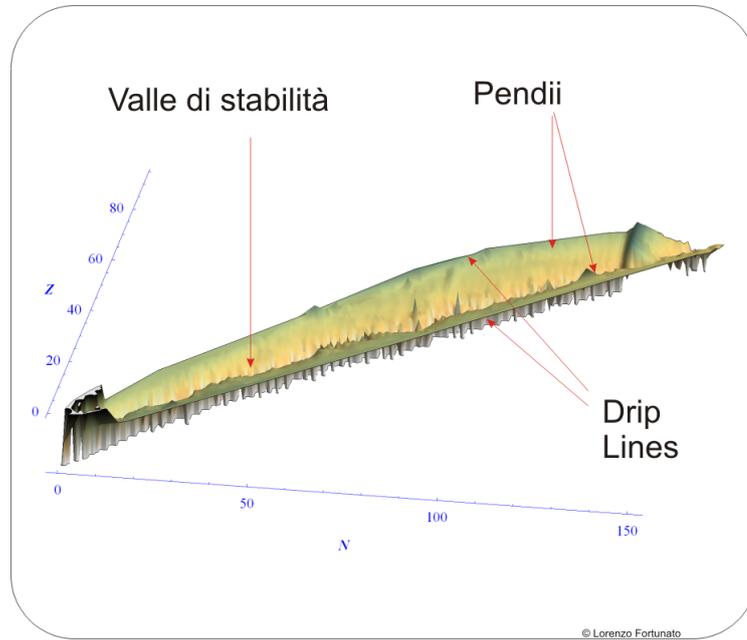


Figura 1.1: *Carta dei nuclidi tridimensionale. I nuclei stabili si trovano nella valle di stabilità mentre, risalendo i pendii, si incontrano nuclei sempre meno legati. Le driplines rappresentano il confine tra nuclei legati e non legati. Immagine tratta da [9].*

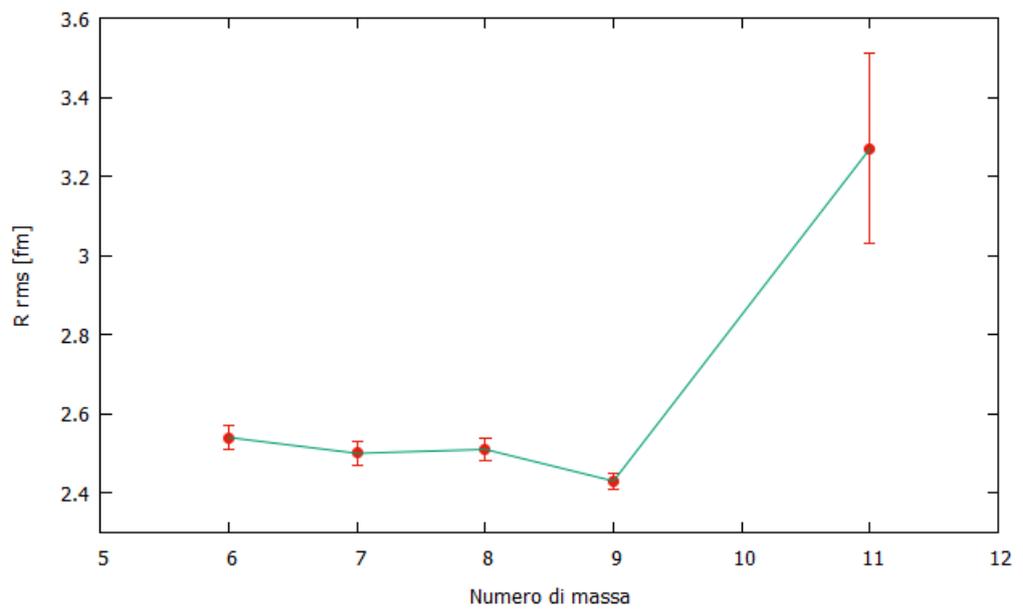


Figura 1.2: *Raggio materiale degli isotopi di litio, ottenuto a partire da misure della sezione d'urto di interazione di tali isotopi con diversi bersagli. Dati tratti da [1].*

dove con  $\xi$  si indicano le coordinate intrinseche del core, mentre  $\psi$  è la funzione d'onda dello stato legato del moto relativo di core e neutrone di valenza.

All'esterno del potenziale la funzione d'onda ha la forma asintotica

$$\psi(r) = N \frac{e^{-kr}}{kr} \quad (1.4)$$

con

$$k = \frac{\sqrt{2\mu S_n}}{\hbar} \quad (1.5)$$

dove  $\mu$  è la massa ridotta del sistema e  $S_n$  è l'energia di legame.

Quindi, minore è l'energia di legame  $S_n$ , più lentamente decade l'autofunzione e, di conseguenza, più elevata è la probabilità di trovare il neutrone a maggiore distanza dal core. Infatti il raggio quadratico medio può essere messo in relazione con  $S_n$  come segue:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int (e^{-kr}/kr)^2 r^4 dr}{\int (e^{-kr}/kr)^2 r^2 dr} = \frac{\hbar^2}{4\mu S_n} \quad (1.6)$$

Condizione necessaria per avere un alone è che il neutrone di valenza si trovi in un'orbita con basso momento angolare relativo al core ( $l = 0, 1$ ). Infatti, la presenza di elevati valori di momento angolare dà luogo a una barriera centrifuga che confina i neutroni di valenza, diminuendo l'effetto di alone [3].

Caratteristica di alcuni nuclei esotici di massa medio-alta è la presenza di una 'pelle' di neutroni. Tale effetto si deve al fatto che vi è una grande differenza tra il numero di protoni e di neutroni. Allora, le densità protonica e neutronica calano con una pendenza differente. In particolare, per nuclei ricchi di neutroni, la densità protonica calerà più rapidamente di quella neutronica.

La pelle di neutroni si distingue dall'alone perché nel secondo caso la densità dei neutroni superficiali cala più lentamente, su una regione di spazio maggiore. Invece, nel caso della pelle di neutroni, le due densità (protonica e neutronica) calano allo stesso modo ma, essendo il numero di neutroni maggiore, questi mantengono la densità di saturazione a raggi più grandi, come si può osservare in Figura 1.3, in cui la pelle di neutroni forma un guscio attorno al core.

Dal punto di vista delle reazioni, a causa delle estese dimensioni dei nuclei esotici, si ha un aumento della sezione d'urto per i processi d'interazione con bersagli, essendo:

$$\sigma_I(p, t) = \pi[R_I(p) + R_I(t)]^2 \quad (1.7)$$

dove  $R_I(p)$  è il raggio nucleare d'interazione del proiettile, mentre  $R_I(t)$  è il raggio nucleare d'interazione del bersaglio [1].

Non solo le interazioni, ma anche la dissociazione coulombiana è favorita a causa delle basse energie di legame. Infatti, considerando un nucleo esotico con massa del core  $M_h$  e carica  $Z_h$ , che si muove a velocità  $v$  interagendo con un nucleo bersaglio di carica  $Z_t$  si ha:

$$\sigma_C = \frac{2\pi Z_h Z_t e^4 \mu_n}{3v^2 M_h^2 S_n} \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \quad (1.8)$$

dove  $\mu_n$  è la massa ridotta del neutrone, mentre  $b_{max}$  e  $b_{min}$  sono i parametri d'impatto massimo e minimo [4, p. 423].

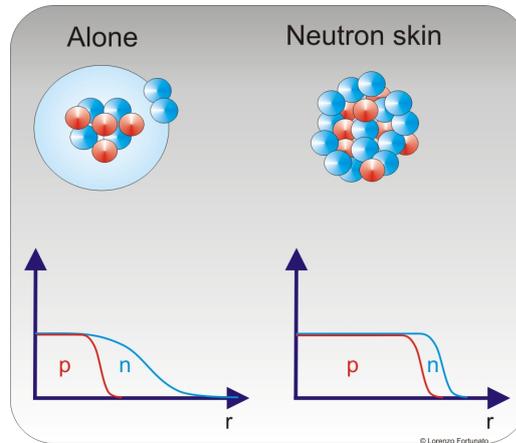


Figura 1.3: *Andamento delle densità protonica e neutronica in funzione della distanza dal centro nei casi di nucleo con alone e con pelle di neutroni. Immagine tratta da [9].*

## 1.1 Tecniche di produzione dei nuclei esotici

L'elevata instabilità dei nuclei esotici fa sì che per studiarne le caratteristiche, questi debbano essere prodotti in laboratorio.

Il primo nucleo esotico prodotto in laboratorio fu  ${}^6\text{He}$ , ottenuto in modo abbastanza semplice. Un bersaglio veniva irradiato con un fascio di particelle, producendo così vari nuclei radioattivi attraverso differenti reazioni. Il bersaglio irradiato era portato in un laboratorio chimico, dove si estraeva l'elemento contenente l'isotopo d'interesse. In seguito, il campione elementalmente puro veniva portato ad un separatore d'isotopi, dove si otteneva un campione isotopicamente puro. Infine, tale campione veniva esaminato con tecniche spettroscopiche.

Nella produzione di nuclei esotici si incontrano principalmente due problemi:

- I nuclei esotici sono prodotti in piccola percentuale, insieme a molti altri nuclei più stabili.
- Le vite medie dei nuclei esotici sono tipicamente molto brevi.

Per ovviare a tali problemi sono state sviluppate moderne tecniche e tecnologie.

Il primo metodo, ISOL (Isotope Separation On Line), consiste nel bombardare uno spesso bersaglio con un fascio di protoni o neutroni. Avendo necessità di tempi rapidi, il bersaglio è mantenuto ad elevate temperature ed è poroso, in modo da facilitare la diffusione dei prodotti di reazione sotto forma di gas.

In seguito gli atomi contenenti i nuclei radioattivi vengono selezionati con processi chimici, ionizzati e accelerati fino a raggiungere il separatore elettromagnetico di isotopi.

Il secondo metodo per la produzione di nuclei radioattivi è la tecnica IN-FLIGHT. In tale metodo un fascio energetico di ioni pesanti viene frammentato al passaggio attraverso un sottile bersaglio e i frammenti sono portati a un separatore elettromagnetico di frammenti, ove avviene una selezione degli atomi in base a massa, carica e quantità di moto.

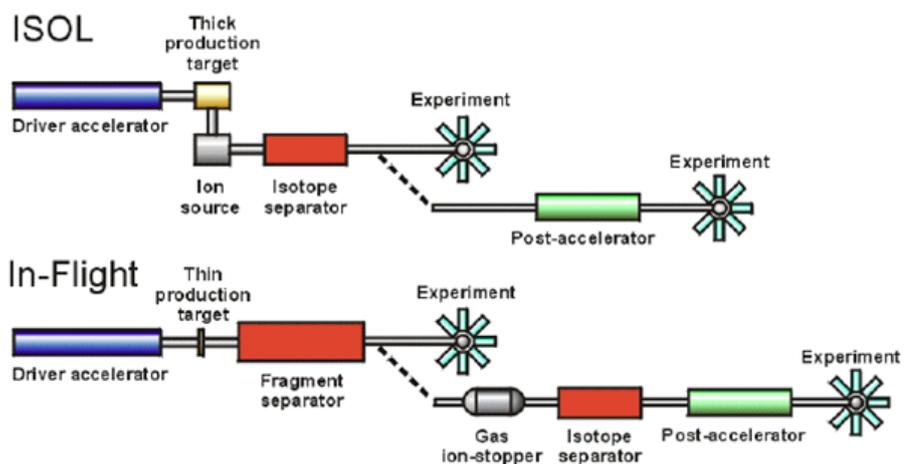


Figura 1.4: *Schema delle principali tecniche di produzione dei nuclei esotici. Dal confronto tra le due tecniche si nota che, almeno nella fase di separazione degli isotopi, il metodo INFLIGHT non richiede ionizzazione dei prodotti di reazione. Immagine tratta da M.Kowalska, 'Nuclear Physics: the ISOLDE facility'.*

Il vantaggio nell'uso di tale tecnica è che i prodotti di reazione non richiedono ionizzazione [5].

I due metodi di produzione vengono schematicamente illustrati in Figura 1.4.



## Capitolo 2

# Struttura del nucleo di elio-6

Il più semplice nucleo ricco di neutroni e dotato di alone è il nucleo di elio-6.

A causa della sua abbondanza di neutroni tale nucleo è esotico e, in quanto tale, presenta una piccola energia di legame. Infatti, a differenza di  ${}^4\text{He}$ , che ha energia di legame di circa 28 MeV,  ${}^6\text{He}$  è legato con energia  $(0.973 \pm 0.040)$  MeV [6].

Inoltre, i due neutroni di valenza a cui si deve la presenza di alone, fanno sì che il raggio di  ${}^6\text{He}$  sia  $(2.57 \pm 0.10)$  fm, molto grande se confrontato con quello della particella  $\alpha$  (circa 1.7 fm) [6].

Il nucleo di elio-6 può essere modellizzato come un sistema a 3 corpi, con una particella  $\alpha$  stabile e due neutroni di valenza. Compariranno quindi nell'Hamiltoniana interazioni  $n - n$  e interazioni  $\alpha - n$ .

Si osserva che se si estrae un neutrone dal nucleo, il sistema risultante (un nucleo di elio-5) non esiste come stato legato, ma solamente come risonanza, che si scinde in una particella  $\alpha$  e un neutrone.

Questa è un'altra caratteristica che distingue alcuni nuclei esotici dai nuclei stabili. Infatti, estraendo un neutrone da un nucleo nella valle di stabilità, si ottiene un isotopo dell'elemento esistente come stato legato.

Il fatto che i sottosistemi binari (nuclei di  ${}^5\text{He}$  e dineutrone) di  ${}^6\text{He}$  non esistano come stati legati ha fatto sì che a tale nucleo venisse attribuito il nome di nucleo Borromeo. Tale denominazione è legata allo stemma araldico della casata dei Borromeo, che presentava tre anelli congiunti tra loro in modo tale che se uno solo si fosse sfilato, l'intero sistema si sarebbe sciolto (Fig. 2.1).

Oltre allo stato fondamentale, legato, del nucleo di elio-6, avente momento angolare e parità  $J^\pi = 0^+$ , esistono altri stati risonanti. In ordine di energia crescente vi è lo stato  $2^+$  a 1.797 MeV, ampio 113 keV. Un'altra risonanza si trova a 5.6 MeV con ampiezza di 12.1 MeV. Per tale stato vi è incertezza nell'assegnazione di momento angolare e parità (possibili valori sono  $2^+, 1^-, 0^+$ ). Ulteriori risonanze si trovano oltre i 14 MeV [10].

Dopo questa rassegna di proprietà, si passerà alla descrizione teorica del sistema utilizzando il metodo HHE (Hyperspherical Harmonics Expansion) e si esporranno i risultati ottenuti dal gruppo di Zhukov [6] e di Khan [8].



Figura 2.1: *Stemma della casata dei Borromeo, da cui deriva il nome di nucleo Borromeano. Se si prova a togliere uno dei tre anelli, l'intero sistema non è più legato. Immagine tratta da <http://www.liv.ac.uk/~spm02/rings/>*

## 2.1 Il metodo HHE

Modellizzando il nucleo di  ${}^6\text{He}$  come sistema a 3 corpi, sia '1' il core di  ${}^4\text{He}$  e siano '2' e '3' i due neutroni esterni.

Considerando interazioni binarie in cui una particella è spettatrice, ci sono tre possibili partizioni, indicate con  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Nella partizione  $i$ , la particella  $i$  è spettatrice, mentre le particelle  $j$  e  $k$  sono la coppia interagente ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ).

Scelta una partizione  $i$ , si introducono le coordinate di Jacobi, definite nel seguente modo:

$$\begin{cases} \vec{x}_i = \left[ \frac{m_j m_k M}{m_i (m_j + m_k)^2} \right]^{1/4} (\vec{r}_j - \vec{r}_k) \\ \vec{y}_i = \left[ \frac{m_i (m_j + m_k)^2}{m_j m_k M} \right]^{1/4} \left( \vec{r}_i - \frac{m_j \vec{r}_j + m_k \vec{r}_k}{m_j + m_k} \right) \\ \vec{R} = \frac{1}{M} (m_i \vec{r}_i + m_j \vec{r}_j + m_k \vec{r}_k) \end{cases} \quad (2.1)$$

ove  $M = m_i + m_j + m_k$  è la massa totale del sistema.

Una rappresentazione di tali coordinate è data in Fig. 2.2.

Con tali coordinate, l'equazione di Schrödinger per il sistema è

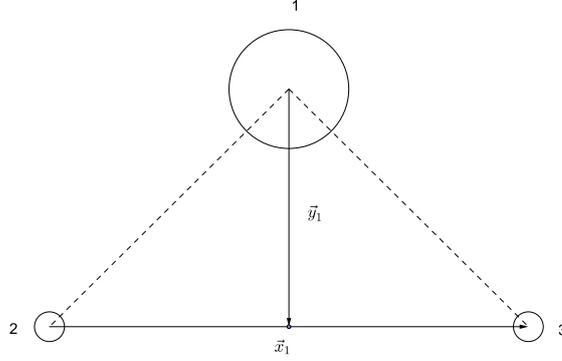
$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \vec{\nabla}_{x_i}^2 + \vec{\nabla}_{y_i}^2 \right) + V_{jk}(x_i) + V_{ki}(x_i, y_i) + V_{ij}(x_i, y_i) - E \right] \Psi(x_i, y_i) = 0 \quad (2.2)$$

con  $\mu = \left[ \frac{m_i m_j m_k}{M} \right]^{1/2}$ .

A questo punto si introducono le variabili ipersferiche, date da

$$\begin{cases} x_i = \rho \cos \Phi_i \\ y_i = \rho \sin \Phi_i \end{cases} \quad (2.3)$$

dove  $\rho = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$  è l'iper-raggio e  $\Phi_i = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i}\right)$  è l'angolo ipersferico. Altre variabili ipersferiche sono gli angoli polari  $(\theta_{x_i, \zeta_{x_i}})$  e  $(\theta_{y_i, \zeta_{y_i}})$ . L'angolo ipersferico e gli angoli polari sono collettivamente indicati con  $\Omega_i \equiv \{\Phi_i, \theta_{x_i, \zeta_{x_i}}, \theta_{y_i, \zeta_{y_i}}\}$ .

Figura 2.2: Coordinate di Jacobi per la partizione  $i = 1$ 

Utilizzando le variabili ipersferiche, l'equazione di Schrödinger diventa

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{1}{\rho^5} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^5 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{\hat{\mathcal{K}}^2(\Omega_i)}{\rho^2} \right\} + V(\rho, \Omega_i) - E \right] \Psi(\rho, \Omega_i) = 0 \quad (2.4)$$

con  $V(\rho, \Omega_i) = V_{jk}(\vec{x}_i) + V_{ki}(\vec{x}_i, \vec{y}_i) + V_{ij}(\vec{x}_i, \vec{y}_i)$  potenziale d'interazione totale e  $\hat{\mathcal{K}}^2(\Omega_i)$  quadrato dell'operatore iper-momento angolare, dato da

$$\hat{\mathcal{K}}^2(\Omega_i) = -\frac{\partial^2}{\partial \Phi_i^2} - 4 \cot(2\Phi_i) \frac{\partial}{\partial \Phi_i} + \frac{1}{\cos^2 \Phi_i} \hat{l}^2(\hat{x}_i) + \frac{1}{\sin^2 \Phi_i} \hat{l}^2(\hat{y}_i) \quad (2.5)$$

dove  $\hat{l}^2(\hat{x}_i)$  e  $\hat{l}^2(\hat{y}_i)$  sono i quadrati degli operatori di momento angolare orbitale.

L'operatore di Casimir  $\hat{\mathcal{K}}^2$  del gruppo SO(6) che soggiace alla descrizione in termini di 5 angoli soddisfa la seguente equazione agli autovalori:

$$\hat{\mathcal{K}}^2(\Omega_i) \mathcal{Y}_{K\alpha_i}(\Omega_i) = K(K+4) \mathcal{Y}_{K\alpha_i}(\Omega_i) \quad (2.6)$$

con  $\alpha_i \equiv \{l_{x_i}, l_{y_i}, L, M\}$  e  $K = 2n_i + l_{x_i} + l_{y_i}$  numero quantico di iper-momento angolare, ove  $n_i$  è un numero intero non negativo.

Le autofunzioni  $\mathcal{Y}_{K\alpha_i}(\Omega_i)$  che soddisfano tale equazione agli autovalori sono le armoniche ipersferiche

$$\mathcal{Y}_{K\alpha_i}(\Omega_i) = P_K^{l_{y_i}, l_{x_i}}(\Phi_i) [Y_{l_{x_i}}(\hat{x}_i) \otimes Y_{l_{y_i}}(\hat{y}_i)]_{LM} \quad (2.7)$$

dove

$$P_K^{l_{y_i}, l_{x_i}}(\Phi_i) = N_K^{l_{x_i}, l_{y_i}} (\cos \Phi_i)^{l_{x_i}} (\sin \Phi_i)^{l_{y_i}} P_{n_i}^{l_{y_i}+1/2, l_{x_i}+1/2}(\cos(2\Phi_i)) \quad (2.8)$$

in cui  $N_K^{l_{x_i}, l_{y_i}}$  è una costante di normalizzazione e  $P_{n_i}^{l_{y_i}+1/2, l_{x_i}+1/2}(\cos(2\Phi_i))$  è il polinomio di Jacobi.

Si può allora espandere la funzione d'onda di 2.4 nella base completa delle armoniche ipersferiche, separando la parte iper-radiale dalla parte iper-angolare, ottenendo:

$$\Psi(\rho, \Omega_i) = \sum_{K\alpha_i} \frac{U_{K\alpha_i}(\rho)}{\rho^{5/2}} \mathcal{Y}_{K\alpha_i}(\Omega_i) \quad (2.9)$$

Andando a sostituire 2.9 in 2.4 si ottiene:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\mathcal{L}_K(\mathcal{L}_K + 1)}{\rho^2} \right) - E \right] U_{K\alpha_i}(\rho) + \sum_{K'\alpha'_i} \langle K\alpha_i | V(\rho, \Omega_i) | K'\alpha'_i \rangle U_{K'\alpha'_i}(\rho) = 0 \quad (2.10)$$

con  $\mathcal{L}_K = K + 3/2$  e

$$\langle K\alpha_i | V(\rho, \Omega_i) | K'\alpha'_i \rangle = \int_{\Omega_i} \mathcal{Y}_{K\alpha_i}^*(\Omega_i) V(\rho, \Omega_i) \mathcal{Y}_{K'\alpha'_i}(\Omega_i) d\Omega_i \quad (2.11)$$

A questo punto si devono scegliere potenziali d'interazione opportuni.

Essendo i nucleoni fermioni, si deve includere nel calcolo anche il principio di esclusione di Pauli. Ciò viene fatto introducendo una parte repulsiva nella componente  $s$  dell'interazione tra neutroni di valenza e neutroni del core, che occupano già lo stato  $0s$ .

A tal proposito si sceglie un potenziale d'interazione  $\alpha - n$  con la seguente forma:

$$V_{\alpha n}(\vec{r}) = \sum_l V_{\alpha n}^{(l)} \exp(-r^2/b_{\alpha n}^2) + V^{(ls)}(\vec{l} \cdot \vec{s}) \exp(-r^2/b_{\alpha n}^2) \quad (2.12)$$

in cui  $V_{\alpha n}^{(l)}$  è un parametro dipendente da  $l$  e il secondo addendo rappresenta il termine di spin-orbita. La scelta numerica dei parametri è stata effettuata sulla base di accordo con i dati sperimentali, ottenendo così  $V_{\alpha n}^{(0)} = +50$  MeV,  $V_{\alpha n}^{(1)} = -47.32$  MeV,  $V_{\alpha n}^{(2)} = -23.0$  MeV,  $V^{(ls)} = -5.855$  MeV e  $b_{\alpha n} = 2.3$  fm.

Per l'interazione  $n - n$  si è invece scelto il potenziale GPT (potenziale di Gogny-Pires-de Tourreil)[11]. Tale potenziale, costruito dalla somma di tre gaussiane, include termini centrali, termini di spin-orbita e componenti tensoriali.

## 2.2 Considerazioni sul momento angolare

Lo stato fondamentale del nucleo di  ${}^6\text{He}$  ha momento angolare totale e parità  $J^\pi = 0^+$ . Avendo ogni nucleone spin  $1/2$ , lo spin totale dei neutroni di valenza può essere solamente  $S = 0, 1$ .

Segue quindi che, se  $S = 0$ , anche il momento angolare orbitale sarà  $L = 0$ , mentre se  $S = 1$  anche  $L = 1$ .

Nel caso di singoletto di spin ( $S = 0$ ) la parte di spin della funzione d'onda è antisimmetrica rispetto allo scambio di spin dei due neutroni. Dovendo essere la funzione d'onda complessiva antisimmetrica, la parte spaziale dovrà essere simmetrica rispetto allo scambio dei due neutroni. Segue quindi che  $l_{x_1}$  deve

essere pari. Inoltre, poiché  $L = 0$ , deve anche essere  $l_{y_1} = l_{x_1}$  pari. Dalla definizione di  $K$ , anche questo sarà pari. Riassumendo:

$$l_{x_1} = l_{y_1} = \begin{cases} 0, 2, 4, \dots, K/2 & \text{se } K/2 \text{ è pari} \\ 0, 2, 4, \dots, (K/2 - 1) & \text{se } K/2 \text{ è dispari} \end{cases} \quad (2.13)$$

Invece, nel caso di tripletto di spin ( $S = 1$ ) la parte di spin della funzione d'onda è simmetrica rispetto allo scambio di spin dei due neutroni, quindi la parte spaziale dovrà essere antisimmetrica. Questo richiede che  $l_{x_1}$  sia dispari, mentre  $l_{y_1}$  potrebbe assumere i valori  $l_{x_1} - 1, l_{x_1}, l_{x_1} + 1$ . Tuttavia, per conservazione della parità, deve essere  $l_{y_1} = l_{x_1}$ . Anche in tal caso  $K$  sarà pari. Riassumendo:

$$l_{x_1} = l_{y_1} = \begin{cases} 1, 3, 5, \dots, K/2 & \text{se } K/2 \text{ è dispari} \\ 1, 3, 5, \dots, (K/2 - 1) & \text{se } K/2 \text{ è pari} \end{cases} \quad (2.14)$$

Con queste regole di selezione ed espandendo fino a un  $K_{max}$  l'equazione 2.10 diventa:

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\mathcal{L}_K(\mathcal{L}_K + 1)}{\rho^2} \right) - E \right] U_{KlLS}(\rho) + \\ & + \sum_{K'=0,2,\dots}^{K_{max}} \sum_{l' \text{ (permessi)}} \sum_{(L',S')=(0,0),(1,1)} \langle Kl|V(\rho, \Omega_i)|K'l' \rangle U_{K'l'L'S'}(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

ove  $l \equiv l_{x_1}, l_{y_1}$  e  $l' \equiv l'_{x_1}, l'_{y_1}$ .

La risoluzione numerica di 2.15 fornisce l'energia  $E$  e la parte iper-radiale  $U_{K\alpha_i}(\rho)$  della funzione d'onda.

## 2.3 Risultati

Il metodo esposto presenta la caratteristica di avere convergenza tanto più rapida quanto più è corto il raggio del potenziale d'interazione.

Quando il metodo viene applicato a calcoli per nuclei con alone, in cui la funzione d'onda si estende oltre le tipiche dimensioni nucleari, la convergenza risulta lenta. L'espansione va quindi estesa a  $K_{max}$  maggiori.

Nel caso di [8], avendo utilizzato interazioni di tipo Gaussiano, si sono calcolati i valori dell'energia di legame fino a  $K_{max} = 20$  e poi, osservando l'andamento esponenziale della convergenza, si sono estrapolati i successivi valori dell'energia fino a un valore di  $K_{max} = 80$  oltre il quale l'aumento di energia di legame è più piccolo dell'errore stimato per il metodo HHE.

Il gruppo di Khan è così giunto ad una stima dell'energia di legame pari a 0.5854 MeV, migliorando la precedente stima di Zhukov (0.4 MeV).

Seppur migliore, tale stima è ancora lontana dal valore sperimentale ( $0.973 \pm 0.040$ ) MeV. Ciò indica che l'interazione  $\alpha - n$  effettiva è più forte di quella adottata nel calcolo.

Altra grandezza che si riesce a calcolare con il metodo HHE è il raggio nucleare. Vi è infatti una relazione che connette il raggio quadratico medio  $R_A$

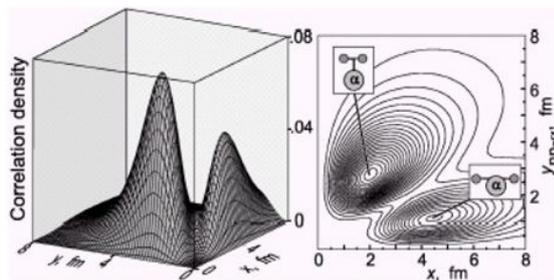


Figura 2.3: Grafico della funzione densità di correlazione per il nucleo di  ${}^6\text{He}$ , in cui  $x_1 \equiv r_{nn}$  e  $y_1 \equiv r_{(nn)c}$ . Nel plot sono presenti due picchi a ognuno dei quali corrisponde una data configurazione: configurazione a dineutrone se  $x_1 < y_1$ , configurazione a sigaro se  $x_1 > y_1$ . Immagine tratta da [6].

del sistema a tre corpi con il raggio quadratico medio del core e del sistema a tre corpi contenente solo particelle puntiformi ( $\rho$ ). Tale relazione è la seguente:

$$R_A = \left[ \frac{A_c R_c^2 + \langle \rho^2 \rangle}{A_c + 2} \right]^{1/2} \quad (2.16)$$

con

$$\langle \rho^2 \rangle = \sum_{Kl_x l_y LS} \int_0^\infty \rho^2 [U_{Kl_x l_y LS}(\rho)]^2 d\rho \quad (2.17)$$

Nel caso del nucleo di  ${}^6\text{He}$  il gruppo di Zhukov ha ottenuto il valore  $R({}^6\text{He}) = 2.59$  fm, molto prossimo al valore sperimentale ottenuto di  $(2.57 \pm 0.10)$  fm.

Si sono inoltre calcolati i contributi dei vari momenti angolari orbitali  $l_{x_1} = l_{y_1} = l$  alla distribuzione di probabilità dell'elio-6 nel suo stato fondamentale, ottenendo che il contributo maggiore è dovuto alla componente  $l = 0$  (più del 90%) [8].

Come si può notare da Tabella 2.1 il contributo dovuto all'onda  $d$  ( $l = 2$ ) è maggiore di quello dovuto all'onda  $p$  ( $l = 1$ ) come ci si aspetterebbe per questioni di simmetria. Lo stesso ragionamento spiega il maggior contributo dovuto all'onda  $g$  rispetto all'onda  $f$ .

Infine, è stata calcolata la funzione densità di correlazione, ossia la probabilità di avere determinate distanze tra i due neutroni e tra questi e il core del nucleo. Tale probabilità è calcolata nel seguente modo:

$$P(r_{nn}, r_{(nn)c}) = r_{nn}^2 r_{(nn)c}^2 \frac{1}{2J+1} \sum_M \int |\Psi_{JM}(x_1, y_1)|^2 d\hat{x}_1 d\hat{y}_1 \quad (2.18)$$

ove  $r_{nn}$  è la distanza tra i due neutroni, mentre  $r_{(nn)c}$  è la distanza tra la particella  $\alpha$  e il centro di massa dei due neutroni.

Tale calcolo mostra l'esistenza di due possibili configurazioni in base alla disposizione dei due neutroni di valenza rispetto al core, come riportato in Fig. 2.3.

Le possibili due configurazioni sono:

- Configurazione a dineutrone, in cui i due neutroni di valenza sono vicini tra loro nell'alone nucleare ( $r_{nn} < r_{(nn)c}$ ).

		Teorico	Sperimentale
B.E. [MeV]		0.585	$0.973 \pm 0.040$
$R_{rms}^{matter}$ [fm]		2.59	$2.57 \pm 0.10$
$l_x$ ( $K_{max}=20$ )	0	0.9157	-
	1	0.0158	-
	2	0.0640	-
	3	0.0002	-
	4	0.0039	-
Config. preferita		dineutrone	-

Tabella 2.1: *Tabella riassuntiva delle principali grandezze del nucleo di elio-6. Dati tratti da [6] e [8].*

- Configurazione a sigaro, in cui i neutroni di valenza sono collocati in punti diametralmente opposti nell'alone nucleare ( $r_{nn} > r_{(nn)c}$ ).

Come si può osservare in Fig. 2.3 vi è una differenza nell'altezza dei due picchi, dovuta principalmente all'interazione tra i neutroni di valenza. Ciò fa sì che la configurazione a dineutrone sia più probabile rispetto alla configurazione a sigaro.



## Capitolo 3

# Reazione di produzione dell'elio-6

### 3.1 Presentazione del problema

Si supponga di avere un gas costituito da trizio e particelle  $\alpha$  e si consideri la catena di reazioni nucleari (Fig.3.1) che porta alla formazione di elio-6:



La prima reazione, che conduce alla formazione di litio-7 con emissione di energia a partire da trizio e particelle  $\alpha$ , è presente in ambito astrofisico sin dalla fase di nucleosintesi primordiale, in cui l'energia termica è inferiore a 1 MeV.

Nel processo che si sta prendendo in esame consideriamo un gas monoterme avente energia  $E_g \approx 400$  keV, energia minima per cui sono disponibili dati per la reazione  ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ .

Indichiamo con 'A' la reazione  ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$  e con 'B' la reazione  ${}^7\text{Li}({}^3\text{H}, \alpha){}^6\text{He}$ . Poniamo inoltre  $1 \equiv {}^3\text{H}$ ,  $2 \equiv \alpha$ ,  $3 \equiv {}^7\text{Li}$ ,  $4 \equiv {}^6\text{He}$ .

Allora, le reazioni considerate in 3.1 si possono scrivere nel seguente modo:



Si vuole calcolare la concentrazione finale di elio-6 a partire da date concentrazioni iniziali di trizio e particelle  $\alpha$ .

Semplificheremo il problema assumendo che le due reazioni indicate siano le uniche che avvengono, escludendo così altre possibili reazioni come  ${}^4\text{He}(\alpha, p){}^7\text{Li}$ .

Si può immediatamente notare che nei casi estremi in cui la concentrazione iniziale di trizio o di particelle  $\alpha$  sia nulla la reazione non inizia e, quindi,  $[{}^6\text{He}] \equiv [N_4] = 0$ .

In una reazione del tipo  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  le concentrazioni di un elemento (consideriamo, ad esempio, l'elemento 3) variano nel tempo secondo l'equazione [12]:

$$\frac{d[N_3]}{dt} = \langle \sigma v \rangle_{12} [N_1][N_2] \quad (3.4)$$

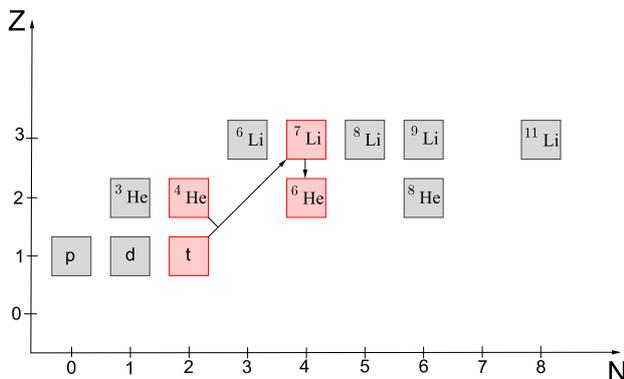


Figura 3.1: In figura è mostrata una parte della carta dei nuclidi in cui sono messe in evidenza le reazioni di interesse:  $t(\alpha, \gamma)^7\text{Li}$  e  $^7\text{Li}(t, \alpha)^6\text{He}$ . I nuclei coinvolti nelle reazioni sono evidenziati in rosso.

in cui  $\langle \sigma v \rangle_{12}$  è il tasso di reazione.

Nel caso in esame si ha un sistema di equazioni differenziali, dato da:

$$\begin{cases} \frac{d[N_4]}{dt} = \langle \sigma v \rangle_B [N_3][N_1] - \frac{[N_4]}{\tau_4} \\ \frac{d[N_3]}{dt} = \langle \sigma v \rangle_A [N_1][N_2] - \langle \sigma v \rangle_B [N_3][N_1] \\ \frac{d[N_2]}{dt} = -\langle \sigma v \rangle_A [N_1][N_2] + \langle \sigma v \rangle_B [N_3][N_1] \\ \frac{d[N_1]}{dt} = -\langle \sigma v \rangle_A [N_1][N_2] - \langle \sigma v \rangle_B [N_1][N_3] - \frac{[N_1]}{\tau_1} \end{cases} \quad (3.5)$$

con condizioni iniziali da imporre  $[N_1(0)] = x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ),  $[N_2(0)] = 1 - [N_1(0)]$ ,  $[N_3(0)] = [N_4(0)] = 0$ .

Nel sistema di equazioni 3.5  $\tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2}$  è la vita media del nucleo.

Per quanto riguarda i tassi di reazione,  $\sigma_A = 6.5 \cdot 10^{-7}$  b e  $\sigma_B = 8.8 \cdot 10^{-6}$  b [13], mentre le velocità relative tra i reagenti sono state calcolate con la formula classica

$$v = \sqrt{\frac{2E_g}{\mu}} \quad (3.6)$$

ove  $\mu$  è la massa ridotta dei reagenti.

Si sono così ottenute le velocità  $v_A = 6.7 \cdot 10^6$  m/s e  $v_B = 6.1 \cdot 10^6$  m/s.

Nei calcoli svolti verranno utilizzate unità di misura nucleari, con dimensioni in fermi (fm) e tempi in fm/c, con:

$$1 \frac{\text{fm}}{c} = \frac{10^{-15}}{3 \cdot 10^8} \frac{\text{m}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-23} \text{ s} \quad (3.7)$$

Si ha inoltre  $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 100 \text{ fm}^2$ .

Quindi, i tassi di reazione espressi in queste unità risultano essere  $\langle \sigma v \rangle_A = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ fm}^2 \text{c}$  e  $\langle \sigma v \rangle_B = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ fm}^2 \text{c}$ .

### 3.2 Discussione dei risultati

Il sistema di equazioni 3.5 è stato risolto numericamente con *Mathematica*, incrementando (decrementando) la concentrazione iniziale di trizio (di particelle  $\alpha$ ) a step di  $0.1 \text{ fm}^{-3}$  fino ad una concentrazione di trizio di  $0.9 \text{ fm}^{-3}$ . Si sono poi considerate concentrazioni iniziali di trizio pari a  $0.99 \text{ fm}^{-3}$  e  $0.999 \text{ fm}^{-3}$  per trovare il valore asintotico cui tende la concentrazione di regime di elio-6.

Il plasma in esame ha quindi una densità totale di una particella ( $\alpha$  o trizio) per  $\text{fm}^3$ . Tuttavia, ricordando che la densità della materia nucleare è di  $0.17$  nucleoni/ $\text{fm}^3$ , notiamo che il gas è molto denso. Tale densità è raggiunta in casi estremi, come nei primi secondi di vita dell'Universo, e a tale periodo si farà riferimento in questa sezione.

Si sono ottenuti grafici della concentrazione dei vari elementi in funzione del tempo al variare della concentrazione iniziale di trizio e particelle  $\alpha$ . Alcuni di questi plot sono riportati in Fig. 3.2.

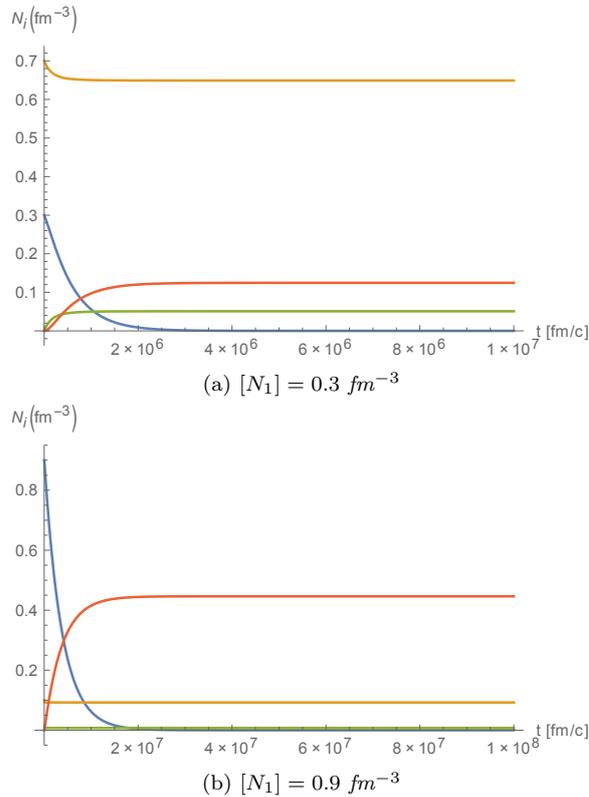


Figura 3.2: Grafici delle concentrazioni di reagenti e prodotti coinvolti nella rete di reazioni in esame in funzione del tempo. In blu è rappresentato il trizio, in giallo le particelle  $\alpha$ , in verde il litio-7 e in rosso l'elio-6.

Dalla quarta delle 3.5 e dai grafici riportati si nota che, data una determinata concentrazione iniziale di trizio nel gas, questa si esaurirà in un certo intervallo di tempo, conducendo così la reazione a spegnimento. Si avrà quindi una situazione

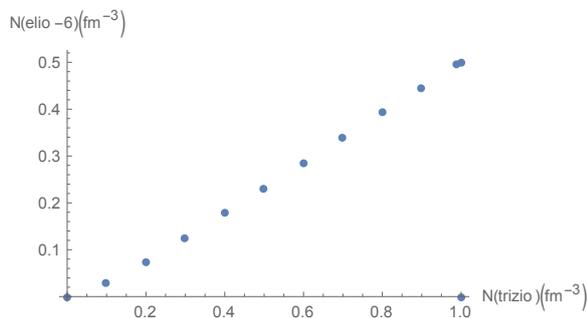


Figura 3.3: Grafico della concentrazione di equilibrio dell'elio-6 in funzione della concentrazione iniziale di trizio

[ <sup>3</sup> H] (fm <sup>-3</sup> )	[ <sup>6</sup> He] (fm <sup>-3</sup> )	[ <sup>3</sup> H] (fm <sup>-3</sup> )	[ <sup>6</sup> He] (fm <sup>-3</sup> )
0	0	0.7	0.339
0.1	0.027	0.8	0.393
0.2	0.073	0.9	0.446
0.3	0.125	0.99	0.495
0.4	0.178	0.999	0.499
0.5	0.231	1	0
0.6	0.285		

Tabella 3.1: In tabella sono riportate le concentrazioni iniziali del trizio e le corrispondenti concentrazioni di regime dell'elio-6.

di regime dopo tale intervallo di tempo, con una concentrazione di regime di elio-6.

Si nota anche come i termini legati al decadimento  $\beta$  nella prima e nella quarta delle 3.5 influiscano poco sulla variazione delle concentrazioni nel tempo. Infatti, prendendo ad esempio l'elio-6, il contributo dovuto al termine di decadimento è molto piccolo, essendo  $\tau = 3.48 \cdot 10^{23}$  fm/c.

Andando ad osservare la concentrazione di elio-6 in funzione della concentrazione iniziale (di trizio, ad esempio, come in Fig. 3.3) si nota che la situazione non è simmetrica, ossia la concentrazione di elio-6 cresce monotonicamente da zero fino al valore asintotico di  $0.5 \text{ fm}^{-3}$  per annullarsi poi bruscamente quando il gas di partenza è costituito di solo trizio.

Quindi, in presenza di poco trizio e molte particelle  $\alpha$  l'elio-6 è prodotto in scarsa quantità, mentre in presenza di poche particelle  $\alpha$  e molto trizio la concentrazione finale di elio-6 è più elevata.

Ciò è dovuto al fatto che, mentre le particelle  $\alpha$  sono distrutte nella prima reazione, nella seconda vengono ricreate, mantenendo così una concentrazione di equilibrio di tali particelle simile a quella iniziale. Ciò è visibile nei grafici di Fig. 3.2 in cui si nota che la concentrazione di particelle  $\alpha$  (in giallo nella figura), a parte una leggera decrescita iniziale, rimane sostanzialmente simile alla concentrazione iniziale.

Il trizio, invece, è consumato in entrambe le reazioni. Quindi, una piccola concentrazione iniziale di trizio non può portare alla formazione di molto elio-6 proprio perché una volta distrutto, il trizio non è più ricreato.

Viceversa, se inizialmente si hanno a disposizione poche particelle  $\alpha$  ma molto trizio si può comunque giungere a concentrazioni significative di elio-6.

Osservando i grafici di Fig. 3.2 è possibile notare come all'aumentare della concentrazione iniziale di trizio presente nel gas, i tempi per raggiungere la situazione di regime aumentano. Infatti, mentre per  $[N_1] = 0.3 \text{ fm}^{-3}$  si giunge a regime in circa  $2 \cdot 10^6 \text{ fm/c}$ , per  $[N_1] = 0.9 \text{ fm}^{-3}$  si giunge a regime in circa  $2 \cdot 10^7 \text{ fm/c}$ .

Di nuovo, ciò si deve al fatto che il trizio è solamente consumato, mentre le particelle  $\alpha$  vengono ricreate. Infatti, dato poco trizio, questo si consumerà velocemente e si raggiungerà presto la situazione di regime. Invece, date poche particelle  $\alpha$ , queste vengono ricreate nella fase di formazione dell'elio-6 e, quindi, non si giungerà all'equilibrio finché tutto il trizio non sarà stato consumato.

Infine, il fatto che i due tassi di reazione differiscano di poco tra loro, fa sì che per  $[N_1] \rightarrow 1$  si abbia  $[N_4] \rightarrow 0.5$ , in quanto il trizio è consumato in ambo le reazioni, mentre l'elio-6 è generato solamente in una reazione.



# Conclusioni

In questa tesi si è approfondito lo studio dei nuclei esotici, capitolo abbastanza recente della fisica nucleare.

Dopo una prima introduzione generale sulle caratteristiche dei nuclei esotici, si è passati allo studio di uno di questi, il nucleo di elio-6, analizzandone la struttura mediante il metodo di espansione con armoniche ipersferiche, seguendo quanto fatto dai gruppi di Zhukov e Khan.

Tale metodo risulta essere uno dei più potenti in quanto aumentando la base di espansione si può, in linea di principio, raggiungere la precisione voluta nel calcolo dell'energia di legame. Tuttavia, a causa di problemi computazionali, si è costretti a troncare l'espansione a un certo livello, ottenendo comunque risultati abbastanza soddisfacenti.

Il metodo HHE, come mostrato nel Capitolo 2, ha permesso inoltre di raggiungere ottimi risultati nel calcolo del raggio quadratico medio del nucleo di elio-6.

Si è infine studiato l'aspetto di reazione di tale nucleo e, in particolare, la sua possibile produzione in un plasma caldo di trizio e particelle  $\alpha$ . Il processo studiato presenta piccole sezioni d'urto e, di conseguenza, tempi lunghi per il raggiungimento della situazione di regime.

Si è inoltre notato che la produzione di elio-6 è tanto maggiore quanto più trizio è presente nel gas di partenza, a patto che vi sia anche una piccola concentrazione di particelle  $\alpha$ .



# Bibliografia

- [1] I. Tanihata et al., Phys. Rev. Lett. **55**, 2676 (1985)
- [2] P.G. Hansen, B. Jonson, Europhys. Lett. **4**, 409 (1987)
- [3] J. Al-Khalili, *An Introduction to Halo Nuclei*, Lect. Notes Phys. **651**, 77 (Springer, Berlin Heidelberg, 2004)
- [4] K. Heyde, *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics. An Introductory Approach*, (IOP, 2 ed., 1999)
- [5] B. Jonson, *Experiments with Radioactive Nuclear Beams*, Lect. Notes Phys. **652**, 97 (Springer, Berlin Heidelberg, 2004)
- [6] M.V. Zhukov et al., Phys. Rep. **231**, 151 (1993)
- [7] K.S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, (Wiley, 2 ed., 1987)
- [8] Md Abdul Khan, Tapan Kumar Das, PRAMANA- Journal of Physics **57**, 701 (2001)
- [9] L. Fortunato, arXiv:1104.0482
- [10] TUNL, Nuclear Data Evaluation, <http://www.tunl.duke.edu/nucldata/chain/06.shtml>
- [11] D. Gogny, P. Pires, R. Tourriel, Phys. Lett. B **32**, 591 (1970)
- [12] C. Iliadis, *Nuclear Physics of Stars*, (Wiley-VCH, 1 ed., 2007)
- [13] EXFOR, Experimental Nuclear Reaction Data, <https://www-nds.iaea.org/exfor/exfor.htm>