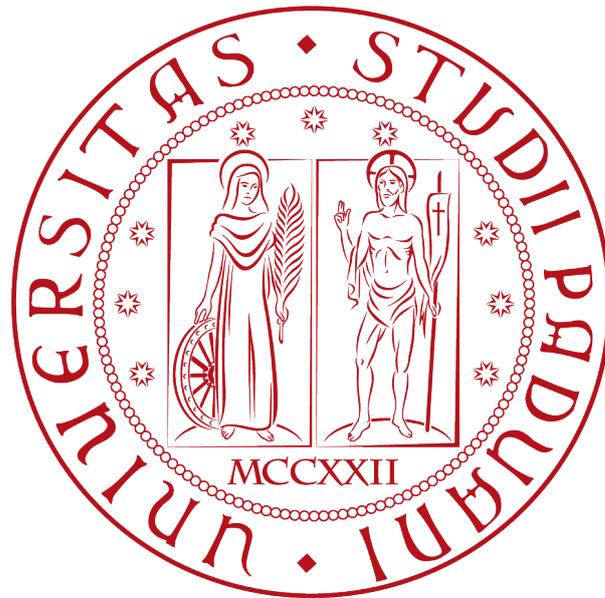


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

Corso di Laurea Magistrale in Fisica



TESI DI LAUREA

Lo Spettro della Teoria M sulla Varietà di Stiefel

Relatore:

CH.MO PROF.
GIANGUIDO DALL'AGATA

Laureando:

CARLO DE TONI

Anno Accademico 2014/2015

A mia madre

RINGRAZIAMENTI

I ringraziamenti sono la parte che preferisco. Non per il bisogno di riconoscenza, che certo andrebbe persa in poche righe che leggono in pochissimi. E nemmeno per orgoglio, come se fosse un conseguimento troppo importante per non dividerlo. Ma forse per il tempo che è passato, e se anche tutto non è andato come avrei voluto, so per certo che finora ho imparato soltanto quando ho sbagliato. Nonostante la mia capacità di mancare le scadenze, di deludere le attese e fallire le imprese, mi riesce altrettanto facile dire grazie. Sono ringraziamenti sinceri, ancorché poco formali, e, mi auguro, non siano fuori luogo, ma se non è questo il luogo, non saprei quale altro.

Grazie in particolar modo al Professor Dall'Agata per la costante disponibilità, l'invidiabile pazienza, e l'ancor più invidiabile professionalità. Assieme a lui vorrei ringraziare tutti quelli che lavorano con dedizione nella ricerca, e soprattutto nell'insegnamento, sperando di ripagarli, almeno in parte, con la stessa dedizione.

Grazie alla mia cara famiglia, che non sa mai dove trovarmi, ma che sa sempre come farsi trovare. E in particolare grazie a mia sorella Michela, la cui luminosa esistenza rischiara la mia. Grazie anche ai miei nonni, e alla loro eco, che si ricompongono in dolci ricordi.

Grazie a tutti i miei amici per la vostra incantevole pienezza, grazie a quelli con cui parlo poco, quelli che vedo spesso, quelli di prima e quelli di adesso. Vi metterò simpaticamente in ordine alfabetico: Alessandro, Andrea, Anna, Arthur, Daniele, Larissa, Luca, Marco, Martino, Matteo, Spike, Stefano, Valerio, Wilbur e Ylenia. Cercherò di non perdervi, per non perdermi, in questo mondo, la cui comprensione elegantemente ci sfugge.

Grazie poi a tutti gli altri: lontani eppure così vicini, dimenticati eppure così presenti. Un grazie agli astanti e a questa festa, che non è mai iniziata, perché non è mai finita.

Colors blind the eye.

Sounds deafen the ear.

Flavors numb the taste.

Thoughts weaken the mind.

Desires wither the heart.

The Master observes the world

but trusts his inner vision.

He allows things to come and go.

His heart is open as the sky.

Tao Te Ching, Lao-tsu

traduzione di Stephen Mitchell

Venezia, 2 Dicembre 2014

SOMMARIO

Lo scopo di questa tesi è di studiare lo spettro di Kaluza–Klein della Teoria M compattificata sulla varietà di Stiefel reale, data dal quoziente $SO(5)/SO(3)$. Nel caso di specie la supersimmetria risultante nella teoria compattificata è $\mathcal{N} = 2$, pertanto lo spettro si presenta variegato, consentendo così una verifica interessante della corrispondenza AdS_4/CFT_3 .

Un ruolo essenziale nello studio dello spettro per questo tipo di compattificazioni è giocato dalla struttura algebrica degli spazi interni, che sono varietà quozienti. La prima parte è quindi dedicata allo studio della geometria dei quozienti e, più in particolare, della varietà di Stiefel. Successivamente sono presentate la riduzione dimensionale di Kaluza–Klein e la Supergravità in undici dimensioni, che rappresenta il limite di bassa energia della Teoria M. Si descrive poi la soluzione di compattificazione spontanea, attorno alla quale si linearizzano le equazioni del moto della teoria. Per il calcolo dello spettro si fa uso dell’analisi armonica, che è una tecnica matematica che permette una risoluzione del problema per via algebrica. Ad una trattazione generale della procedura, fa seguito lo studio dell’analisi armonica per la varietà di Stiefel.

Il calcolo esplicito degli autovalori è stato effettuato per l’armonica scalare e l’armonica vettoriale, mentre è stato avviato, ma non terminato per l’armonica della 3-forma, essendo proprio quest’ultima interessante giacché permette di completare lo spettro, grazie alle proprietà dei supermultipletti di $OSp(4|2)$.

INDICE

| | |
|--|-----|
| RINGRAZIAMENTI | v |
| SOMMARIO | vii |
| 1 INTRODUZIONE | 1 |
| 2 LA VARIETÀ DI STIEFEL | 7 |
| 2.1 Geometria Differenziale delle Varietà Quozienti | 8 |
| 2.1.1 Geometria Riemanniana su G/H | 9 |
| 2.1.2 Isometrie e Riscalamenti | 10 |
| 2.2 Geometria della Varietà di Stiefel | 12 |
| 3 TEORIA M SU $AdS_4 \times M_7$ | 17 |
| 3.1 Riduzione Dimensionale di Kaluza–Klein | 18 |
| 3.1.1 Gravità in $5D$ | 20 |
| 3.2 Supergravità in $11D$ e Soluzione di Freund–Rubin | 22 |
| 3.2.1 Lagrangiana della Supergravità in $11D$ | 23 |
| 3.2.2 Compattificazione Spontanea | 24 |
| 3.2.3 Supersimmetria e Olonomia | 27 |
| 3.3 Equazioni Linearizzate per lo Spettro su M_7 e Organizzazione in Multipletti | 28 |
| 3.3.1 Linearizzazione delle Equazioni della Supergravità in $11D$ | 29 |
| 3.3.2 Espansione in Armoniche e Relazioni fra le Masse | 30 |
| 4 ANALISI ARMONICA SU G/H | 35 |
| 4.1 Armoniche su G/H e Operatori Differenziali | 35 |
| 4.1.1 Armoniche Irriducibili e Campi di $SO(d)$ | 36 |
| 4.1.2 Costruzione degli Operatori Differenziali | 37 |
| 4.2 Armoniche per la Varietà di Stiefel ed Autovalori | 39 |
| 4.2.1 Armonica Scalare | 40 |
| 4.2.2 Armonica Vettoriale | 43 |
| 4.2.3 Armonica della 3-forma | 54 |
| 5 CONCLUSIONI | 59 |
| A I MULTIPLETTI SUPERSIMMETRICI AdS_4 E $N = 2$ | 63 |
| B NOTAZIONI E CONVENZIONI | 69 |
| Bibliografia | 71 |

 INTRODUZIONE

L'unificazione della gravità con le altre interazioni fondamentali resta ad oggi una delle maggiori sfide della fisica teorica. Infatti, la Relatività Generale come teoria quantistica di campo non è rinormalizzabile, e pertanto si ha una perdita inevitabile di potere predittivo. La ricerca di una teoria quantistica della gravitazione consistente ha condotto alla costruzione di modelli che, sorprendentemente, hanno avuto un forte impatto in ambiti molto diversi, che esulano della gravità stessa o dalla fisica delle alte energie più in generale.

Uno dei risultati più affascinanti riguarda lo studio dei buchi neri, in cui gravità e meccanica quantistica si incontrano in modo naturale. È stato mostrato che le leggi che regolano la dinamica dei buchi neri possono essere messe in corrispondenza con le leggi della termodinamica. In particolare, si può associare l'area dell'orizzonte degli eventi all'entropia, la grandezza che in meccanica statistica conta il numero di stati microscopici di un sistema. Questa scoperta suggerisce che l'informazione sui gradi di libertà gravitazionali, posseduta da un oggetto tridimensionale come un buco nero, sia in realtà contenuta nella sua superficie. Una formulazione compiuta di questa idea prende il nome di *Principio Olografico*. Secondo tale principio, gli effetti gravitazionali sono codificati in una teoria che vive in uno spazio dotato di una dimensione in meno.

Il principio olografico trova una realizzazione formale nella corrispondenza *gauge/gravità*¹.

Nell'ambito della teoria delle stringhe, candidata a unificare la gravità quantistica e le altre interazioni, la corrispondenza nasce da una congettura dovuta a J. Maldacena, riguardante l'equivalenza fra una teoria di superstringa in dieci dimensioni, su un vuoto contenente uno spazio di Anti de Sitter (*AdS*), e una teoria di gauge superconforme (*SCFT*) in quattro dimensioni. Si può mostrare infatti che la metrica di un insieme di N *D3*-brane coincidenti è data da

$$ds^2 = \left(1 + \frac{L^4}{y^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \left(1 + \frac{L^4}{y^4}\right)^{\frac{1}{2}} (dy^2 + y^2 d\Omega_5^2), \quad (1.1)$$

in cui: $\eta = (1, -1, -1, -1)$, $d\Omega_5$ è l'elemento di angolo solido in cinque dimensioni,

¹ Cfr. [1], [2], [3].

mentre $L \sim g_s N$, dove g_s è la costante d'accoppiamento di stringa. Prendendo il limite $y \rightarrow 0$ (andando cioè vicino all'orizzonte), è facile vedere che si ha

$$ds^2 \sim \frac{y^2}{L^2} \eta_{\mu\nu} - \frac{L^2}{y^2} dy^2 - L^2 d\Omega_5^2. \quad (1.2)$$

Con il cambio di variabili:

$$\rho = \frac{L^2}{y}, \quad (1.3)$$

otteniamo finalmente la seguente espressione per la metrica:

$$ds^2 = L^2 \left(\frac{1}{\rho^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \frac{d\rho^2}{\rho^2} - d\Omega_5^2 \right), \quad (1.4)$$

che corrisponde a $AdS_5 \times S^5$. La dinamica delle $D3$ -brane, invece, vive naturalmente in una dimensione in meno rispetto alla geometria dell'orizzonte, e, a bassa energia, è descritta da una teoria di super-Yang–Mills con supersimmetria $\mathcal{N} = 4$ e gruppo di gauge $SU(N)$ (che è una teoria conforme), in cui sussiste l'identificazione fra gli accoppiamenti: $g_{YM} = g_s^2$. L'approssimazione di supergravità della teoria delle stringhe è valida quando il raggio di curvatura è grande, ovvero $g_s N \rightarrow \infty$, mentre la teoria di gauge perturbativa ha senso per $g_{YM} \rightarrow 0$. È sensato quindi supporre che l'accoppiamento forte della teoria di gauge sia descritto da una teoria su $AdS_5 \times S^5$. Notiamo anche che le due descrizioni godono delle stesse simmetrie: essendo infatti $SO(2,4)$ il gruppo conforme, e $SU(4)_R \simeq SO(6)_R$ il gruppo associato alla R-simmetria, la teoria superconforme in quattro dimensioni con $\mathcal{N} = 4$ ha simmetria $SO(2,4) \times SU(4)_R$, che corrisponde all'isometria di $AdS_5 \times S^5$.

Più in generale, la corrispondenza AdS_{d+1}/CFT_d fornisce una prescrizione per correlare la fisica nello spazio Anti de Sitter, che costituisce il *bulk*, e la dinamica di una teoria di campo conforme in assenza di gravità, localizzata al *bordo*. La corrispondenza stabilisce che la funzione di partizione on-shell della teoria di stringa, o del suo limite di bassa energia dato dalla supergravità, con la soluzione dei campi valutata al bordo, sia uguale al generatore delle funzioni di correlazione connesse della teoria conforme. Esplicitamente

$$\langle \exp \left[\int d^d x \phi_0(x) \mathcal{O}(x) \right] \rangle_{CFT} = Z_{\text{sugra}}[\phi_0(x)], \quad (1.5)$$

dove $\phi_0(x)$ è la soluzione dell'equazione del moto in AdS_{d+1} per il generico campo $\phi(x, z)$, nel limite

$$\phi_0(x) = \lim_{z \rightarrow 0} \phi(x, z), \quad (1.6)$$

che corrisponde al bordo di AdS_{d+1} , con coordinate

$$ds^2 = L^2 \left(\frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2}{z^2} \right). \quad (1.7)$$

Ciò implica inoltre una relazione precisa tra la massa dei campi nell' AdS e la dimensione di scala, Δ , degli operatori conformi. Per dare un'idea di questo fatto, consideriamo per semplicità un campo scalare di massa m . L'equazione del moto ammette due soluzioni che vicino al bordo vanno come

$$\phi(x, z) \sim z^{d-\Delta} \phi_0(x) \quad \text{e} \quad \phi(x, z) \sim z^\Delta \phi_0(x), \quad (1.8)$$

dove abbiamo utilizzato la definizione (1.6) e

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(d + \sqrt{d^2 + 4L^2 m^2} \right). \quad (1.9)$$

Ora, dato che ϕ_0 è la sorgente per l'operatore \mathcal{O} , si deduce che Δ corrisponde alla dimensione conforme di tale operatore e la (1.9) ci dà il legame tra tale dimensione conforme e la massa del campo ϕ in AdS_{d+1} . Queste considerazioni possono essere estese a campi di diverso spin, valgono infatti le seguenti relazioni (con $L = 1$) fra la dimensione conforme e le masse in AdS_{d+1} :

$$\begin{aligned} \Delta_{\pm} &= \frac{1}{2} \left(d \pm \sqrt{d^2 + 4m^2} \right) && \text{spin } 0, \\ \Delta &= \frac{1}{2}(d + 2|m|) && \text{spin } \frac{1}{2}, \\ \Delta &= \frac{1}{2} \left(d + \sqrt{(d-2)^2 + 4m^2} \right) && \text{spin } 1, \\ \Delta &= \frac{1}{2}(d + 2|m|) && \text{spin } \frac{3}{2}, \\ \Delta &= d && \text{spin } 2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

L'aspetto di carattere generale che davvero rende la dualità gauge/gravità significativa e di estesa applicabilità è il fatto che mette in relazione teorie a regimi d'accoppiamento opposti. Ad esempio, è possibile inferire le proprietà di una teoria di campo fortemente accoppiata (basti pensare alla QCD ad energie dell'ordine del GeV) facendo dei calcoli classici o semi-classici in supergravità. Questa è anche la caratteristica che fa sì che tale corrispondenza sia difficile da dimostrare rigorosamente, e dunque, allo stato dell'arte, si tratti appunto di una congettura.

Sebbene non ne esista una dimostrazione, i limiti di validità della dualità sono stati ampliati a casi più generali in cui la dimensione sia diversa da cinque, e in cui la supersimmetria e la simmetria conforme siano rotte parzialmente o del tutto.

D'altra parte, nello studio dei vuoti delle teorie di stringa e della Teoria M emergono naturalmente soluzioni con geometria

$$AdS_5 \times M_5 \quad (1.11)$$

per la teoria IIB, e

$$AdS_4 \times M_7 \quad (1.12)$$

per la Teoria M, il cui interesse è precedente e indipendente dall'evidenza della dualità gauge/gravità. Fra le varie configurazioni nelle quali è possibile testare la corrispondenza, è naturale dunque interessarsi al caso AdS_4/CFT_3 : infatti, sono stati sviluppati modelli di materia condensata basati su teoria di campo in tre dimensioni, per i quali la relazione gauge/gravità risulta un potente strumento d'analisi². Possiamo quindi studiare l' AdS_4/CFT_3 partendo dalla compattificazione della Teoria M su una generica varietà M_7 . Dato che le simmetrie di gauge nel bulk sono mappate dalla corrispondenza in simmetrie di flavour, è interessante studiare le compattificazioni sulle diverse varietà e le loro proprietà. Il ruolo assunto dalle isometrie suggerisce naturalmente di scegliere spazi omogenei, ovvero quozienti.

Lo spazio interno preso in considerazione in questa tesi è $M_7 = V_{5,2}$, la varietà di Stiefel. Questa varietà è descritta algebricamente dal quoziente $SO(5)/SO(3) \equiv G/H$ in cui l'immersione di $SO(3)$ in $SO(5)$ è canonica, ed è di particolare interesse per il fatto di preservare una supersimmetria $\mathcal{N} = 2$, cioè non massimale.³

Infine, è bene sottolineare che l'analisi precedentemente condotta in [5] sulla varietà di Stiefel risulta incompleta, come è stato evidenziato in [6]. In questa ottica, sarebbe importante rivedere e completare gli studi dal lato della supergravità, al fine di capire se ci si trovi di fronte ad una discrepanza rispetto al risultato predetto dalla corrispondenza, oppure se, più semplicemente, alcune risonanze sono state mancate. Poiché la relazione fra le masse in AdS e la dimensione anomala Δ degli operatori della teoria di campo conforme è fissata per ogni campo in 4d, bisogna calcolare lo spettro di Kaluza–Klein (KK) e la relativa organizzazione in supermultipletti.

Dopo aver fornito con questa premessa le motivazioni per la tesi e il contesto in cui si colloca, andiamo ad illustrarne brevemente lo sviluppo. Dal punto di vista operativo, è stata calcolata una parte dello spettro di KK della Teoria M compattificata sulla varietà di Stiefel.

Si è proceduto su due lati. Da una parte sono stati trattati gli aspetti geometrico/algebrici: infatti nel capitolo 2 è stata studiata in generale la geometria differenziale degli spazi quoziente, e in più in particolare della varietà di Stiefel; tali risultati sono stati poi impiegati nel capitolo 4, dove abbiamo sviluppato l'*armonica armonica* sui quozienti. Dall'altra invece, nel capitolo 3, è stata studiata la supergravità in undici dimensioni e la sua riduzione di KK della quale si vuole calcolare lo spettro. Ciò pone il problema di calcolare gli autovalori per gli operatori differenziali dello spazio interno, per cui il capitolo 4 fa da raccordo per le due trattazioni.

Come spiegato nel capitolo 3, lo spettro si ottiene a partire dall'espansione dei campi della supergravità in $11D$ attorno ad una soluzione, che ne determina la geometria. La supergravità in $11D$ è una teoria costruita a partire da tre campi fondamentali: g_{MN} , il gravitino ψ_M e la 3-forma A_{MNP} . Se vogliamo che i vuoti abbiano invarianza per il

² Per queste applicazioni si veda ad esempio [4].

³ L'immersione canonica di $SO(3) \subset SO(5)$ è definita dalla decomposizione della rappresentazione fondamentale di $SO(5)$ nella fondamentale di $SO(3)$: $\mathbf{5} \rightarrow \mathbf{3} + \mathbf{1} + \mathbf{1}$.

gruppo di Lorentz $SO(1,3)$, il valore d'aspettazione del gravitino dovrà essere nullo. La lagrangiana del settore bosonico assume quindi la semplice espressione:

$$\mathcal{L}_b = \frac{1}{2}\sqrt{g}R - \frac{3}{4}\sqrt{g}F_{MNPQ}F^{MNPQ} + \frac{1}{48}\sqrt{g}\varepsilon^{M_1\dots M_{11}}F_{M_1\dots M_4}F_{M_5\dots M_8}A_{M_9\dots M_{11}}, \quad (1.13)$$

dove $F = dA$. La soluzione di Freund–Rubin alle equazioni del moto di questa lagrangiana è data da

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu\rho\sigma} &= e\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} && \text{spazio quadridimensionale,} \\ F_{mnpq} &= 0 && \text{spazio interno,} \end{aligned} \quad (1.14)$$

per la *field strength*, dove e è una costante con le dimensioni di una massa, mentre

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= -24e^2g_{\mu\nu}, \\ R_{mn} &= 12e^2g_{mn}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

per il tensore di Ricci nei due spazi. Sicché si ha un vuoto del tipo:

$$AdS_4 \times M_7, \quad (1.16)$$

come avevamo anticipato.

Si linearizzano quindi le equazioni per le fluttuazioni attorno ai valori di *background*:

$$g_{MN}(x, y) = \hat{g}_{MN}(x, y) + h_{MN}(x, y), \quad (1.17)$$

$$\psi_M(x, y) = 0 + \psi_M(x, y), \quad (1.18)$$

$$A_{MNP}(x, y) = \hat{A}_{MNP}(x, y) + a_{MNP}(x, y). \quad (1.19)$$

Schematicamente si ottiene:

$$(\square_x + \boxtimes_y)\Phi(x, y) = 0, \quad (1.20)$$

dove \square_x e \boxtimes_y sono rispettivamente gli operatori cinetici di AdS_4 e $V_{5,2}$. L'operatore cinetico invariante, essendo un operatore di Laplace–Beltrami, ammette un insieme completo di autofunzioni date dalle armoniche di G/H , tali per cui

$$\boxtimes_y Y^I(y) = m_I^2 Y^I(y), \quad (1.21)$$

dove l'indice I etichetta genericamente le rappresentazioni irriducibili di G .

A questo punto, è possibile formulare un ansatz di riduzione sviluppando in armoniche i campi della supergravità in undici dimensioni:

$$\Phi(x, y) = \sum_I \Phi_I(x) Y^I(y), \quad (1.22)$$

in modo da fattorizzare la dipendenza dalle coordinate interne. Ora, utilizzando l'ansatz (1.22), la (1.20) si riscrive:

$$(\square_x \Phi_I(x) + m_I^2 \Phi_I(x)) Y^I(y) = 0. \quad (1.23)$$

Dalla (1.23) otteniamo allora le masse per gli stati associati agli operatori $\Phi_I(x)$ nello spazio AdS, espresse tramite m_I^2 . Dalla struttura generale dei supermultipletti di $OSp(4|2)$, il supergruppo dello spazio di Anti de Sitter con supersimmetria $\mathcal{N} = 2$, possiamo confrontare le masse calcolate con quelle previste per i vari multipletti, ricostruendo così lo spettro.

Giacché il nucleo del calcolo è costituito dall'equazione (1.21), il capitolo 4 è dedicato alla soluzione di questo problema per via algebrica: infatti la struttura di quoziente della varietà interna permette di utilizzare tecniche gruppali, ovvero l'analisi armonica. Essenzialmente, si considerano le $Y(y)$ come rappresentazioni del gruppo di isometria G decomposte in rappresentazioni irriducibili di H , scriveremo pertanto le $Y(y)$ come tableaux di Young: questa notazione si rivela infatti molto pratica dal punto di vista computazionale. Allo stesso modo gli operatori \boxtimes_y si possono riscrivere tramite i generatori G/H , la cui azione sui tableaux (e quindi sulle $Y(y)$) è facilmente calcolabile.

Abbiamo calcolato quindi le masse che si ottengono dall'armonica scalare e vettoriale, confrontando i risultati con quelli ottenuti precedentemente. È stata poi studiata, senza però terminare il calcolo delle masse, l'armonica della 3-forma, come spiegheremo infatti i suoi autovalori permettono di completare lo spettro, e in definitiva a stabilire la corrispondenza.

 LA VARIETÀ DI STIEFEL

Come anticipato nell'Introduzione, questa tesi si propone di studiare lo spettro della Teoria M compattificata su una varietà di Stiefel reale. Nel capitolo 3 discuteremo come nella supergravità in undici dimensioni, che rappresenta il limite di bassa energia della Teoria M, esistano soluzioni dette di *compattificazione spontanea*. Mostriamo infatti che esiste una soluzione per il tensore metrico data dal prodotto $M_4 \times M_7$, dove M_4 e M_7 sono entrambi spazi di Einstein. In particolare vedremo che M_4 è AdS_4 , ovvero lo spazio di Anti de Sitter in quattro dimensioni, mentre M_7 è una varietà compatta.

Nel nostro caso scegliamo $M_7 \equiv V_{5,2}$, la varietà di Stiefel. Questo spazio è descritto algebricamente dal quoziente:

$$V_{5,2} \equiv \frac{SO(5)}{SO(3)}, \quad (2.1)$$

dove $SO(3)$ è immerso canonicamente in $SO(5)$ (il significato di questa affermazione sarà reso più chiaro in seguito).

Le varietà quozienti furono impiegate inizialmente nelle teorie di supergravità con dimensioni "extra" compatte in virtù dell'idea di una geometrizzazione delle simmetrie interne, ossia interpretando i gruppi di gauge delle teorie in quattro dimensioni come gruppi di isometria della varietà interna. In una visuale moderna le varietà quozienti sono interessanti perché godono di una struttura geometrica relativamente semplice dovuta alle loro proprietà algebriche; inoltre, scegliendo opportunamente la connessione di spin, esse sono naturalmente degli spazi di Einstein. Tuttavia, la caratteristica più accattivante dei quozienti, è che essi permettono di utilizzare l'*analisi armonica*, che, come vedremo, è una potente tecnica matematica per calcolare lo spettro in massa della teoria ridotta.

A tal proposito, in questo capitolo riepiloghiamo brevemente alcune nozioni basilari della geometria differenziale dei quozienti di gruppi, sia per fissare la notazione, che per rendere più comprensibile l'esposizione, per concentrarci infine sulla varietà di Stiefel, per la quale ricaviamo i principali elementi geometrici.

Per una discussione più dettagliata sull'argomento si vedano [7] e [8].

2.1 GEOMETRIA DIFFERENZIALE DELLE VARIETÀ QUOZIENTI

Si dice che un gruppo G agisce *transitivamente* su uno spazio, se ogni punto può essere raggiunto da un altro tramite l'azione del gruppo. Uno spazio metrico è *omogeneo* se le sue isometrie possono essere identificate con l'azione transitiva di un gruppo.

Uno spazio omogeneo è naturalmente descritto da un quoziente G/H dove tutti i punti che restano invariati sotto l'azione di un sottogruppo H (detto di *isotropia*) di G sono identificati. Se G è un gruppo di Lie, allora G/H è una varietà quoziente di dimensione $D = \dim(G) - \dim(H)$.

Possiamo quindi dividere l'algebra associata a G nel modo seguente:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{K}, \quad (2.2)$$

con

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \{T_i\} \quad \text{generatori della sotto-algebra,} \\ \mathfrak{K} &= \{T_a\} \quad \text{"generatori" del quoziente.} \end{aligned}$$

Nel seguito considereremo solamente quozienti *riduttivi*, per cui vale cioè

$$[\mathfrak{H}, \mathfrak{K}] \subset \mathfrak{K}. \quad (2.3)$$

Tali quozienti si ottengono quando

$$\mathfrak{G} = \text{semisemplice} \oplus \text{abeliana}. \quad (2.4)$$

Senza perdere di generalità, possiamo definire il rappresentativo del quoziente come l'elemento del gruppo $L(y) \in G$ ottenuto per esponenziazione dei generatori del quoziente (con abuso di linguaggio):

$$L(y) \equiv \exp(y^a T_a), \quad (2.5)$$

parametrizzati dalle coordinate $y = (y_1, \dots, y_D)$. L'equazione fondamentale per il rappresentativo così definito è quindi

$$gL(y) = L(y')h, \quad (2.6)$$

la quale stabilisce che sotto l'azione di G (da sinistra) il rappresentativo viene mandato in un altro coset. Infatti, dato che G/H non è un gruppo, $gL(y)$ in generale non è l'esponenziale dei generatori del quoziente, ma, essendo un elemento del gruppo, può essere espresso dal prodotto

$$\exp(y'^a T_a) \exp(x^i T_i), \quad (2.7)$$

da cui segue¹ la (2.6).

¹ A rigore, la (2.7) vale per H compatto. Cfr. [9].

2.1.1 Geometria Riemanniana su G/H

Definiamo la 1-forma a valori nell'algebra

$$V(y) = L^{-1}dL. \quad (2.8)$$

L'espansione di $V(y)$ negli elementi dell'algebra si legge

$$V(y) = V^a(y)T_a + \Omega^i(y)T_i, \quad (2.9)$$

e contiene anche i generatori di \mathbb{H} . La *vielbein* su G/H è $V^a(y) = V^a_\alpha(y)dy^\alpha$, mentre $\Omega^i(y) = \Omega^i_a(y)dy^\alpha$ è detta *connessione di H*.

La 1-forma $V(y)$ soddisfa automaticamente le equazioni di Maurer–Cartan (MC) per il quoziente, ovvero

$$dV + V \wedge V = 0. \quad (2.10)$$

In componenti (2.10) diventa

$$dV^a + \frac{1}{2}C^a_{bc}V^b \wedge V^c + C^a_{bi}V^b \wedge \Omega^i = 0, \quad (2.11)$$

$$d\Omega^i + \frac{1}{2}C^i_{ab}V^a \wedge V^b + \frac{1}{2}C^i_{jk}\Omega^j \wedge \Omega^k = 0, \quad (2.12)$$

dove C^{\dots} sono le costanti di struttura di G . Dato che V^a sono le vielbein del quoziente, possiamo identificare le equazioni di MC con l'equazione di *torsione* nulla, scegliendo opportunamente la 1-forma di *connessione*. Confrontando infatti (2.11) e

$$T^a = dV^a - B^a_b V^b = 0, \quad (2.13)$$

dove T^a è la torsione, troviamo

$$B^a_b = \frac{1}{2}C^a_{bc}V^c + C^a_{bi}\Omega^i. \quad (2.14)$$

La 2-forma di *curvatura* è definita in termini di B^a_b da

$$R^a_b = dB^a_b - B^a_c \wedge B^c_b \equiv R^a_{bcd}V^c \wedge V^d. \quad (2.15)$$

Sfruttando l'identità di Jacobi per le costanti di struttura e le equazioni (2.11) e (2.14), otteniamo

$$R^a_{bcd} = -\frac{1}{4}C^a_{be}C^e_{cd} - \frac{1}{2}C^a_{bi}C^i_{cd} - \frac{1}{8}C^a_{ec}C^e_{bd} + \frac{1}{8}C^a_{ed}C^e_{bc}. \quad (2.16)$$

2.1.2 *Isometrie e Riscalamenti*

Utilizzando l'equazione (2.6), possiamo calcolare la trasformazione infinitesima delle vielbein sotto l'azione di $g \in G$ costante:

$$V(y') = hL(y)^{-1}g^{-1}d(gL(y)h^{-1}) = hV(y)h^{-1} + hdh^{-1}. \quad (2.17)$$

Indicando con $D_B^A(g)$ la rappresentazione aggiunta, la proiezione sui generatori del quoziente diventa

$$V^a(y') = (hV(y)h^{-1})^a = V^b(y)D_b^a(h^{-1}), \quad (2.18)$$

da cui possiamo estrarre la variazione delle vielbein

$$\delta V^a(y) \sim C^a_{ib} V^b(y). \quad (2.19)$$

Per un G/H riduttivo, C^a_{ib} è antisimmetrico nei tre indici, quindi dall'equazione (2.19) possiamo definire la metrica G -invariante da sinistra

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{ab} V^a_\alpha(y) V^b_\beta(y), \quad (2.20)$$

dove

$$\eta_{ab} = \text{diag}\left\{\underbrace{+1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q\right\}. \quad (2.21)$$

Infatti vediamo che la variazione di g è nulla:

$$\delta g \sim \eta_{ab} (C^a_{ic} V^c V^b + C^b_{ic} V^a V^c) = 0. \quad (2.22)$$

Ora che abbiamo una metrica G -invariante da sinistra su G/H , possiamo chiederci se essa sia unica oppure no. D'altra parte, la più generale trasformazione lineare e non-singolare con cui possiamo agire sulle vielbein è data dalla matrice (nella decomposizione di Iwasawa)

$$M = OD, \quad (2.23)$$

dove O è una matrice (pseudo)ortogonale, mentre D è reale e diagonale. La matrice (pseudo)ortogonale è una "rotazione" in $SO(p, q)$, ma la metrica (2.21) è per costruzione invariante per queste trasformazioni. Dunque la parte interessante è D , che comporta un *riscalamento* delle vielbein: $V^a = r^a V'^a$. Riscalamenti diversi definiscono metriche diverse, e quindi spazi diversi, ma non tutti preservano le isometrie di G . Consideriamo la variazione della metrica per le vielbein riscalate:

$$\delta g \sim \eta_{ab} \left(\frac{r_c}{r_a} C^a_{ic} V^c V^b + \frac{r_c}{r_b} C^b_{ic} V^a V^c \right) = 0. \quad (2.24)$$

La metrica riscalata è ancora invariante per $r_c \neq r_a$ se corrispondentemente $(C_i)^a_c = 0$. Questo significa che possiamo assegnare un parametro di riscalamento ad ogni

sottospazio irriducibile dei generatori (i generatori del quoziente e le vielbein sono in corrispondenza biunivoca).

Finora abbiamo considerato unicamente le isometrie relative all'azione di G da sinistra sul rappresentativo del quoziente. Tuttavia, anche all'azione di G da destra è associata un'isometria di G/H , data dal *normalizzatore* di H in G , $N(H)$, tale che

$$gHg^{-1} = H \quad \text{se e solo se} \quad g \in N(H). \quad (2.25)$$

In conclusione dunque le isometrie del quoziente G/H sono descritte da

$$G \times N(H)/H. \quad (2.26)$$

Da un punto di vista operativo il risultato di questa discussione ci dice che un riscaldamento delle vielbein

$$\begin{aligned} V^{a_1} &\rightarrow r_{a_1} V^{a_1}, \\ V^{a_2} &\rightarrow r_{a_2} V^{a_2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

preserva il gruppo totale di isometria del coset se e solo se parametri di riscaldamento diversi tra loro sono assegnati a blocchi irriducibili di $(C_M)^a{}_b$, dove ora l'indice M corre sul normalizzatore $N(H)$, o, equivalentemente, se $(C_M)^a{}_b$ è diagonale a blocchi nello spazio generato da $\{V^{a_1}, V^{a_2}, \dots\}$.

Esistono delle eccezioni alla (2.26), in particolare il gruppo di isometria può essere più piccolo se ci sono dei fattori $U(1)$ comuni sia a G che a $N(H)/H$. In questo caso si ha

$$G' \times N(H)/H, \quad G = G' \times (\text{fattori } U(1)). \quad (2.27)$$

Utilizzando le vielbein riscalate possiamo costruire la nuova connessione

$$B^a{}_b = \frac{1}{2} \frac{r_b r_c}{r_a} C^a{}_{bc} V^c + \frac{r_b}{r_a} C^a{}_{bi} \Omega^i + S^a{}_{bc} V^c, \quad (2.28)$$

in cui ora abbiamo aggiunto un tensore S simmetrico nella coppia di indici $\{bc\}$. Richiedendo che la connessione sia antisimmetrica:

$$B^a{}_b + B_b{}^a = 0, \quad (2.29)$$

otteniamo

$$B^a{}_b = \frac{1}{2} C^a{}_{bc} V^c \binom{ab}{c} + C^a{}_{bi} \frac{r_b}{r_a} \Omega^i, \quad (2.30)$$

con

$$\binom{ab}{c} = \frac{r_a r_c}{r_b} + \frac{r_b r_c}{r_a} - \frac{r_a r_b}{r_c}. \quad (2.31)$$

Dalla (2.15) otteniamo l'espressione per la curvatura riscalata:

$$R^a{}_{bcd} = -\frac{1}{2}C^a{}_{be}C^e{}_{cd} \begin{pmatrix} ab \\ e \end{pmatrix} \frac{r_c r_d}{r_e} - \frac{1}{2}C^a{}_{bi}C^i{}_{cd} r_c r_d - \frac{1}{8}C^a{}_{ec}C^e{}_{bd} \begin{pmatrix} ae \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} be \\ d \end{pmatrix} + \frac{1}{8}C^a{}_{ed}C^e{}_{bc} \begin{pmatrix} ae \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} be \\ c \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

2.2 GEOMETRIA DELLA VARIETÀ DI STIEFEL

Consideriamo la varietà di Stiefel reale $V_{5,2}$ espressa in una parametrizzazione che, come vedremo, rende manifesta l'isometria totale del quoziente,

$$V_{5,2} = \frac{SO(5) \times SO(2)_R}{SO(3) \times SO(2)_H}. \quad (2.33)$$

Nella definizione (2.33) il sottogruppo $SO(3)$ è immerso canonicamente, cioè la rappresentazione fondamentale di $SO(5)$ si decompone in rappresentazioni irriducibili di $SO(3)$ secondo

$$\mathbf{5} \xrightarrow{SO(3)} \mathbf{3} + \mathbf{1} + \mathbf{1}; \quad (2.34)$$

mentre l'immersione di $SO(2)_H \simeq U(1)_H$ è diagonale, ed assegna semplicemente una "carica" alle rappresentazioni irriducibili di $SO(3)$, ad esempio quindi la (2.34) diventa

$$\mathbf{5} \xrightarrow{H} \mathbf{3}_0 + \mathbf{1}_+ + \mathbf{1}_-. \quad (2.35)$$

Moltiplicando per se stessi entrambi i lati della (2.35) e prendendo la parte antisimmetrica, si trova la decomposizione secondo H della rappresentazione aggiunta di $SO(5)$:

$$\mathbf{10} \rightarrow \mathbf{3}_0 + \mathbf{3}_+ + \mathbf{3}_- + \mathbf{1}_0 \quad (2.36)$$

Dato che la rappresentazione aggiunta agisce proprio sui generatori, la (2.36) ci dice che i generatori di $SO(5)$ si separano in tre triplette e un singoletto di $SO(3)$:

| | | |
|---|------------|------------------------------|
| generatori di $\mathfrak{so}(3)$ | T_i | $\{J_{23}, J_{13}, J_{12}\}$ |
| generatore di $\mathfrak{so}(2)_H$ | T_0 | $J_{45} + U$ |
| generatori del quoziente $\mathbb{K} = \mathbb{G} - \mathbb{H}$ | T_a | $\{J_{14}, J_{24}, J_{34}\}$ |
| . | T_α | $\{J_{15}, J_{25}, J_{35}\}$ |
| . | T_7 | $J_{45} - U$ |

dove

$$(J_{ij})^{kl} = 2\delta_{[i}^k \delta_{j]}^l, \quad (2.37)$$

k e l indicano rispettivamente le righe e le colonne delle matrici J , mentre U è il generatore di $SO(2)_R$. Da cui seguono le relazioni di commutazione fra i generatori

$$[J_{ij}, J_{kl}] = -J_{ik}\delta_{jl} - J_{jl}\delta_{ik} + J_{il}\delta_{jk} + J_{ik}\delta_{il}, \quad (2.38)$$

le quali ci permettono di scrivere le costanti di struttura:

$$\begin{aligned} C^i{}_{jk} &= \varepsilon_{ijk}, \\ C^a{}_{jb} &= -\varepsilon_{ajb}, \\ C^\alpha{}_{j\beta} &= -\varepsilon_{\alpha j\beta}, \\ C^i{}_{ab} &= -\varepsilon_{iab}, \\ C^i{}_{\alpha\beta} &= -\varepsilon_{i\alpha\beta}, \\ C^0{}_{a\alpha} &= C^7{}_{a\alpha} = -\frac{1}{2}\delta_{a\alpha}, \\ C^a{}_{0\alpha} &= C^a{}_{7\alpha} = \delta_{a\alpha}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

e tutte le altre entrate nulle².

Vogliamo trovare un riscaldamento delle vielbein tale che $V_{5,2}$ sia uno spazio di Einstein. In primo luogo, dobbiamo capire quanti parametri di riscaldamento possiamo fissare indipendentemente. Seguendo il ragionamento della sottosezione 2.1.2, il normalizzatore di $SO(3) \times SO(2)$ (immerso come sopra in G) è

$$N(H) \simeq SO(3) \times SO(2)_H \times SO(2)_7, \quad (2.40)$$

dove $SO(2)_7$ è il sottogruppo abeliano generato da T_7 . Sicché, ricordando la (2.27), il gruppo totale isometria sarà

$$G' \times N(H)/H = SO(5) \times SO(2)_R. \quad (2.41)$$

Guardando alle costanti di struttura $(C_7)^A{}_B$, possiamo dedurre che i parametri di riscaldamento relativi ai sottospazi $\{T_a\}$ e $\{T_\alpha\}$ devono essere uguali. Rimangono allora solamente due parametri: $r \equiv r_a = r_\alpha$ e r_7 .

Notiamo che non possiamo derivare l'espressione del tensore di Ricci tramite la (2.32) perché non tiene conto del fatto che le costanti di struttura non sono completamente antisimmetriche. Ad ogni modo, con simili passaggi, possiamo ottenere una formula leggermente diversa:

$$R^D{}_{AEB} = -\frac{1}{4}C^D{}_{AF}C^F{}_{EB}\frac{r_E r_B}{r_F} - \frac{1}{2}C^D{}_{AI}C^I{}_{EB}r_D r_B - \frac{1}{8}C^D{}_{FE}C^F{}_{AB} + \frac{1}{8}C^D{}_{FB}C^F{}_{AE}, \quad (2.42)$$

² Adottiamo la seguente notazione per gli indici: $\{M, N, \dots\}$ si riferiscono genericamente ai generatori di G , mentre $\{A, B, \dots\}$ e $\{I, J, \dots\}$ si riferiscono rispettivamente agli indici del quoziente e a quelli di \mathbb{H} . In questo caso evidentemente $\{I, J, \dots\} \equiv \{i, j, \dots\}$.

dove abbiamo introdotto

$$\mathbf{C}^A{}_{BC} = \frac{r_B r_C}{r_A} \mathbf{C}^A{}_{BC} + \frac{r_A r_C}{r_B} \mathbf{C}^B{}_{CA} - \frac{r_A r_B}{r_C} \mathbf{C}^C{}_{AB}. \quad (2.43)$$

Elenchiamo quindi le \mathbf{C} per l'algebra dello Stiefel

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^a{}_{7\alpha} &= \frac{1}{2} \frac{r^2}{r_7} \delta_{a\alpha}, \\ \mathbf{C}^\alpha{}_{a7} &= 2r_7 \delta_{a\alpha} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{r_7} \delta_{a\alpha}, \\ \mathbf{C}^7{}_{\alpha a} &= \frac{1}{2} \frac{r^2}{r_7} \delta_{a\alpha}, \\ \mathbf{C}^7{}_{aa} &= -\frac{1}{2} \frac{r^2}{r_7} \delta_{aa}, \\ \mathbf{C}^\alpha{}_{7a} &= -\frac{1}{2} \frac{r^2}{r_7} \delta_{a\alpha}, \\ \mathbf{C}^a{}_{\alpha 7} &= -2r_7 \delta_{a\alpha} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{r_7} \delta_{a\alpha}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

le quali, al pari delle costanti di struttura, sono antisimmetriche per lo scambio di $\{a\alpha\}$. Servendoci ora delle \mathbf{C} , siamo in grado di calcolare il tensore di Ricci, le cui componenti sono

$$R_{ab} = R_{\alpha\beta} = -\delta_{ab} r^2 \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{16} \frac{r^2}{r_7^2} \right], \quad (2.45)$$

e

$$R_{77} = -\frac{3}{16} \frac{r^4}{r_7^2}. \quad (2.46)$$

Il coset è uno spazio di Einstein se si impone

$$\frac{r^2}{r_7^2} = 6, \quad (2.47)$$

per cui le (2.45) e (2.46) diventano

$$\begin{aligned} R_{ab} = R_{\alpha\beta} &= -\frac{9}{8} r^2 \delta_{ab}, \\ R_{77} &= -\frac{9}{8} r^2. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Con questa richiesta il tensore di curvatura si scrive

$$\begin{aligned}
 R^a{}_{bde} &= R^{\alpha}{}_{\beta\delta\epsilon} = -\frac{1}{2}(\delta_d^a\delta_{be} - \delta_e^a\delta_{bd})r^2, \\
 R^a{}_{b\alpha\beta} &= -\frac{5}{16}(\delta_\alpha^a\delta_{b\beta} - \delta_\beta^a\delta_{b\alpha})r^2, \\
 R^a{}_{\alpha b\beta} &= -\frac{1}{8}(\delta_\alpha^a\delta_{b\beta} - \frac{3}{2}\delta_\beta^a\delta_{b\alpha})r^2, \\
 R^7{}_{a7b} &= R^7{}_{\alpha7\beta} = -\frac{3}{16}\delta_{ab}r^2.
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Come spiegheremo nella sezione 3.2, vogliamo che questo quoziente compatto sia una soluzione di compattificazione spontanea della supergravità in undici dimensioni, di conseguenza scegliamo r^2 in modo che soddisfi la condizione (la seconda delle (3.54))

$$R^A{}_B = 12e^2\delta_B^A. \tag{2.50}$$

Le equazioni (2.48) e (2.50) porgono

$$r^2 = \frac{32}{3}e^2 \quad \text{e} \quad r_7^2 = \frac{16}{9}e^2. \tag{2.51}$$

È importante osservare che questa richiesta non fissa il valore di r e r_7 , ma solo del loro quadrato. Precisamente, il segno è determinato da argomenti di supersimmetria.³ Anticipiamo, senza fornire una dimostrazione, i loro valori:

$$r = 4\sqrt{\frac{2}{3}}e \quad \text{e} \quad r_7 = -\frac{4}{3}e. \tag{2.52}$$

Infine, le componenti della curvatura sono

$$\begin{aligned}
 R^{ab}{}_{de} &= R^{\alpha\beta}{}_{\delta\epsilon} = \frac{16}{3}(\delta_d^a\delta_e^b - \delta_e^a\delta_d^b)e^2, \\
 R^{ab}{}_{\alpha\beta} &= \frac{10}{3}(\delta_\alpha^a\delta_\beta^b - \delta_\beta^a\delta_\alpha^b)e^2, \\
 R^{a\alpha}{}_{b\beta} &= \left(\frac{4}{3}\delta_\alpha^a\delta_\beta^b - 2\delta_\beta^a\delta_\alpha^b\right)e^2, \\
 R^{7a}{}_{7b} &= R^{7\alpha}{}_{7\beta} = 2\delta_b^a e^2.
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Calcoliamo anche la connessione riscalata, dato che ci sarà utile in seguito. Come per la curvatura modifichiamo la (2.30) in

$$B^A{}_B = \frac{1}{2}C^A{}_{BC}V^C + \frac{r_B}{r_A}C^A{}_{BI}\Omega^I. \tag{2.54}$$

³ Cfr. 3.2.3

Sostituendo (2.39), (2.44) e i parametri di riscaldamento, otteniamo

$$\begin{aligned} B^a{}_b &= B^\alpha{}_\beta = \varepsilon^a{}_{bj} \Omega^j, \\ B^a{}_\alpha &= -\frac{2}{3} \delta_\alpha^a (eV^7 - \Omega^0), \\ B^a{}_7 &= -2eV^\alpha \delta_\alpha^a, \\ B^\alpha{}_7 &= 2eV^a \delta_a^\alpha. \end{aligned} \tag{2.55}$$

 TEORIA M SU $AdS_4 \times M_7$

La supergravità è un'estensione della relatività generale in cui viene realizzata l'invarianza per trasformazioni di supersimmetria locale, la quale obbliga l'introduzione di un campo massless di spin 2 che propaga, e dunque ciò include automaticamente la gravità. Sebbene nasca come una teoria di campo autonoma, la supergravità nella visione attuale rappresenta una teoria effettiva associata alle teorie di stringa e fornisce uno strumento per studiare una grande varietà di sistemi di interesse che vanno dai buchi neri alla corrispondenza AdS/CFT .

Teorie consistenti di supergravità possono essere costruite al più in undici dimensioni [10]. Infatti in questo caso la dimensione degli spinori è 32 e questo è il numero massimo di supercariche per non includere particelle di elicità maggiore di 2. La supergravità in $11D$ assume quindi una rilevanza particolare, poiché il numero di dimensioni dello spaziotempo non è arbitrario, ma dato come vincolo dalla supersimmetria. Le teorie di stringa tuttavia esistono unicamente in dieci dimensioni, pertanto l'analogo in undici non è una teoria di stringa e prende il nome di Teoria M. Il fascino per la Teoria M può essere rintracciato, se non altro, nel fatto che le teorie di supergravità in dieci dimensioni possono essere ottenute direttamente, o indirettamente tramite *dualità*, dalla supergravità in $11D$, che in particolare emerge come regime di forte accoppiamento della teoria di stringa di tipo IIA.

Ci sono quindi buoni motivi per formulare teorie di supergravità in uno spaziotempo con dimensioni extra, che immaginiamo compatte se vogliamo ricondurci alle quattro dimensioni ordinarie. Il meccanismo con cui si passa da una teoria in D dimensioni ad una in $D - d$ è chiamato *riduzione dimensionale*.

Questa idea fu originariamente impiegata nelle cosiddette teorie di Kaluza-Klein (da cui prende il nome) [11, 12], dove le dimensioni extra avevano lo scopo di unificare la gravità alle altre interazioni fondamentali. Si può mostrare infatti che con questa procedura il gruppo di isometria dello spazio interno diviene il gruppo di gauge della teoria ridotta. L'interesse per questo approccio si ravvivò nello studio della supergravità in 11 dimensioni, la quale prevede come soluzione classica la metrica fattorizzata $AdS_4 \times M_7$ [13]; infatti 7 è la dimensione minima affinché si abbia come gruppo di isometria il prodotto $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, tale da includere il gruppo del

Modello Standard [14].¹

Sebbene tale prospettiva sia molto appetibile, in questo tipo di compatteficazioni emergono vari problemi di carattere fenomenologico: fra cui la presenza di una costante cosmologica negativa incompatibile con le osservazioni cosmologiche ed una generica assenza di fermioni chirali nello spettro della teoria ridotta. Le soluzioni adottate per ottenere fermioni chirali prevedono l'inclusione nella teoria di brane e singolarità. Nonostante tali difficoltà, la riduzione dimensionale rimane una tecnica privilegiata per la costruzione delle teorie in dimensione ridotta a partire dalle teorie di stringa o di supergravità, e lo studio delle compatteficazioni delle stesse ha particolare rilevanza nel contesto della corrispondenza Gauge/Gravità.

Oggetto di questo capitolo è lo studio della Teoria M compatteficata su una varietà M_7 . La prima parte quindi ha lo scopo di presentare la riduzione dimensionale alla Kaluza–Klein, che funge da paradigma per le compatteficazioni di tutte le teorie in dimensioni extra. La seconda sezione è invece dedicata alla supergravità in undici dimensioni e come la sua struttura ammetta in maniera naturale la compatteficazione a quattro o sette dimensioni. L'ultima parte infine è strettamente legata all'obiettivo della tesi, ovvero si scrivono le equazioni del moto linearizzate per le fluttuazioni attorno al vuoto che sono il punto di partenza per il calcolo dello spettro in massa della teoria.

I concetti esposti e molti risultati utilizzati nella sintesi presentata in questo capitolo si trovano in letteratura. Ci limitiamo qui a segnalare le fonti principali: [16–20] per le prime due sezioni e [16, 21] per la sezione 3.3, insieme ai riferimenti contenuti in esse. Per le convenzioni non espressamente riportate nel testo si veda l'appendice B (per gli indici in particolare si fa riferimento alla tabella 8).

3.1 RIDUZIONE DIMENSIONALE DI KALUZA–KLEIN

La riduzione dimensionale di Kaluza–Klein è il meccanismo tramite il quale si ottiene la teoria ridotta, ad esempio in dimensione quattro, a partire da una teoria in $D = 4 + d$ dimensioni. Si considera la soluzione di una generica teoria con d dimensioni extra del tipo $M_{D-d} \times M_d$, dove M_d è una varietà compatta di coordinate y , mentre associamo a M_{D-d} le coordinate x . L'ansatz di cui ci avvaliamo consiste nel fattorizzare la dipendenza dei campi $\Phi(x, y)$ dalle coordinate, in generale:

$$\Phi(x, y) = \sum_k \phi^k(x) Y^k(y). \quad (3.1)$$

La teoria ridotta si ottiene integrando nell'azione le coordinate y :

$$S = \int d^d y d^{D-d} x \mathcal{L}(x, y) = \int d^{D-d} x \mathcal{L}'(x). \quad (3.2)$$

¹ Gli spazi omogenei ascrivibili come varietà compatta M_7 sono stati classificati e studiati in [15].

Affinché l'espressione formale (3.2) sia consistente, le equazioni del moto ottenute dalla lagrangiana ridotta devono essere derivabili da \mathcal{L} utilizzando (3.1).

Per capire cosa succede, consideriamo l'azione per un campo scalare (complesso) in $D = 4 + d$ dimensioni:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x d^d y \partial_M \Phi^* \partial^M \Phi, \quad (3.3)$$

dove, per semplicità, immaginiamo una metrica piatta. Scriviamo allora l'equazione del moto espandendo i campi secondo l'ansatz (3.1)

$$\begin{aligned} 0 = \partial_M \partial^M \Phi(x, y) &= \partial_\mu \partial^\mu \Phi(x, y) + \partial_m \partial^m \Phi(x, y) \\ &= \sum_k [\gamma^k(y) \partial_\mu \partial^\mu \phi^k(x) + \phi^k(x) \partial_m \partial^m \gamma^k(y)]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Evidentemente la (3.4) è l'equazione per la teoria ridotta se e solo se

$$\partial_m \partial^m \gamma^k(y) = c^k \gamma^k(y) \quad \forall k, \quad (3.5)$$

in questo modo si ha infatti

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^k(x) + c^k \phi^k(x) = 0. \quad (3.6)$$

Le autofunzioni $\gamma^k(y)$ che soddisfano (3.5) sono dette *armoniche* di M_d .

Consideriamo per semplicità una sola dimensione compatta, lo spazio ha pertanto la topologia di S^1 . Le armoniche in questo caso sono date dalle rappresentazioni del gruppo $U(1)$, cioè

$$\gamma^k(y) = \exp\left(\frac{iky}{r}\right), \quad \text{dove } r \text{ è il raggio di } S^1. \quad (3.7)$$

I coefficienti c^k sono interpretati come masse per i campi $\phi^k(x)$,

$$m_k^2 = \frac{k^2}{r^2}. \quad (3.8)$$

Abbiamo quindi una "torre" infinita di stati prodotti dalla riduzione dimensionale. Notiamo che, eccezion fatta per lo stato a massa nulla $k = 0$, le masse sono inversamente proporzionali alla dimensione caratteristica dello spazio compatto. Da un punto di vista fisico, immaginando che la dimensione compatta sia molto piccola, le masse saranno molto grandi e crescenti con k , e dunque gli stati corrispondenti possono non essere osservabili.

3.1.1 *Gravità in 5D*

Per mostrare la proprietà forse più interessante delle compattificazioni alla Kaluza–Klein, studiamo ora una teoria di pure gravità in cinque dimensioni, che è il caso più semplice che possiamo analizzare². L'azione per questa teoria è

$$S = -\frac{1}{4\mathcal{K}^2} \int d^5z \sqrt{-g} \mathcal{R}, \quad (3.9)$$

dove scegliamo come spaziotempo il prodotto

$$\mathbb{M}_4 \times S^1, \quad (3.10)$$

dove \mathbb{M}_4 è lo spazio di Minkowski quadridimensionale, con coordinate x^μ , mentre indichiamo con ϑ la coordinata sul cerchio di raggio r . Scriviamo le vielbein separando gli indici:

$$V_M^A = \begin{pmatrix} V_\mu^\alpha & V_\mu^5 \\ V_\vartheta^\alpha & V_\vartheta^5 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

L'azione è invariante per

$$V_M^A = \frac{\partial z^N}{\partial z'^M} V_N^A \quad \text{diffeomorfismi}, \quad (3.12)$$

$$V_M^A = O^A_B V_M^B \quad \text{trasformazioni locali di } SO(1,4). \quad (3.13)$$

Con una trasformazione di Lorentz possiamo mettere a zero V_ϑ^α , ruotando V_ϑ^A nella direzione 5. Ridefiniamo anche

$$V_\mu^5 = \kappa A_\mu, \quad (3.14)$$

dove abbiamo introdotto una costante che per ora serve solamente a dare la giusta dimensione al campo A_μ , ma che, come vedremo, sarà proprio la costante gravitazionale nella teoria ridotta. Per gli scopi di questa sezione facciamo l'ipotesi semplificativa³ $V_\vartheta^5 \equiv 1$. La (3.11) perciò diventa

$$V_M^A = \begin{pmatrix} V_\mu^\alpha & \kappa A_\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (V_M^A)^{-1} = V_A^M = \begin{pmatrix} V_\alpha^\mu & -\kappa A_\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

da cui possiamo scrivere la metrica

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} - \kappa^2 A_\mu A_\nu & -\kappa A_\mu \\ -\kappa A_\nu & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

² La trattazione segue essenzialmente il capitolo V.2 di [18].

³ In generale si ha $V_\vartheta^5 = \phi(x, y)$, tuttavia la presenza del campo scalare, seppur naturale, non è rilevante per il risultato che ci interessa.

Per determinare la teoria ridotta espandiamo i campi in armoniche di $U(1)$:

$$V_\mu^\alpha = \sum_k (V_{(k)})_\mu^\alpha(x) \exp\left(\frac{iky}{r}\right), \quad (3.17)$$

$$A_{(k)\mu} = \sum_k A_{(k)\mu}(x) \exp\left(\frac{iky}{r}\right), \quad (3.18)$$

dove la condizione di realtà implica

$$\begin{aligned} (V_{(k)})_\mu^\alpha(x) &= (V_{(-k)}^*)_\mu^\alpha(x), \\ A_{(k)\mu}(x) &= A_{(-k)\mu}^*(x). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Scartiamo quindi tutti i modi massivi $k \neq 0$, vale a dire che eliminiamo la dipendenza dalle coordinate interne (riduzione dimensionale *triviale*). Calcoliamo le componenti della connessione a partire dalle vielbein, omettendo il pedice 0 dei campi:

$$\begin{aligned} \Omega_\mu^{\alpha\beta} &= \omega_\mu^{\alpha\beta}, \\ \Omega_\mu^{\alpha 5} &= \kappa F_{\mu\nu} V^{\alpha\nu}, \\ \Omega_\theta^{\alpha\beta} &= -\kappa F^{\mu\nu} V_\mu^\alpha V_\nu^\beta. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Allora sostituendo (3.20) in (3.9) si ottiene

$$S = \int_0^{2\pi r} d\theta \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4\mathcal{K}^2} R - \frac{\kappa^2}{4\mathcal{K}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (3.21)$$

Ora possiamo integrare la coordinata θ , ottenendo finalmente

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4\kappa^2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (3.22)$$

dove κ assume il significato di costante di Newton della teoria quadridimensionale, e vale

$$\kappa^2 = \frac{\mathcal{K}^2}{2\pi r}. \quad (3.23)$$

Notiamo che le costanti κ e \mathcal{K} sono legate fra loro dal volume dello spazio interno.

L'azione (3.22) contiene, oltre al termine della gravità in quattro dimensioni, un termine cinetico per il campo A_μ , come conseguenza della riduzione dimensionale. Consideriamo ora la versione infinitesima di (3.12):

$$\delta V_M^A = (\partial_M \zeta^N) V_N^A + \zeta^N \partial_N V_M^A, \quad (3.24)$$

e supponiamo di trasformare solo la quinta coordinata: $\zeta(x) = (0, 0, 0, 0, \lambda(x))$, allora

$$\delta A_\mu(x) = -\frac{1}{\kappa} \partial_\mu \lambda. \quad (3.25)$$

Dunque per diffeomorfismi infinitesimi la trasformazione di A_μ è quella di un campo di gauge abeliano. Osserviamo che il gruppo di gauge coincide con il gruppo di isometria del cerchio, $U(1)$. Questo fatto non è né accidentale né ristretto al caso specifico che abbiamo esaminato, ma è una caratteristica di tutte le compattificazioni di Kaluza–Klein. Vale infatti, più in generale, il seguente risultato: gli stati massless di una teoria compattificata su una varietà M_7 , con gruppo di isometria G , includono i campi di Yang–Mills del gruppo di gauge G .

3.2 SUPERGRAVITÀ IN 11D E SOLUZIONE DI FREUND–RUBIN

La supergravità in 11D è relativamente semplice, essendo la teoria costruita unicamente con la metrica g_{MN} , un gravitino ψ_M e una 3-forma A_{MNP} ; in particolare è stato mostrato che, preservando la supersimmetria, non può essere aggiunto nessun altro campo, né una costante cosmologica⁴. La presenza del campo A_{MNP} può essere dedotta mediante un conteggio dei gradi di libertà che si propagano. Tale numero è dato dalla dimensione della rappresentazione del piccolo gruppo $SO(D - 2)$ in cui il campo risiede. Riassumiamo il risultato in tabella 1. La metrica è un tensore di ran-

| campo | | gradi di libertà D | g.d.l. $D = 11$ |
|-----------------|-----------|---|-----------------|
| tensore metrico | g_{MN} | $\frac{(D-2)(D-1)}{2} - 1 = \frac{D(D-3)}{2}$ | 44 |
| gravitino | ψ_M | $(D-3)2^{\lfloor \frac{D-2}{2} \rfloor}$ | 128 |
| 3-forma | A_{MNP} | $\frac{(D-2)(D-3)(D-4)}{3!}$ | 84 |

Tabella 1.: Campi della supergravità in 11D e gradi di libertà (*on shell*) associati. Il simbolo [...] indica la *parte intera*.

go 2 simmetrico a traccia nulla, mentre il gravitino è un vettore di spinori (campo di Rarita–Schwinger) di Majorana. In totale mancano quindi 84 gradi di libertà bosonici di cui possiamo tener conto includendo proprio la 3-forma. In generale infatti una p -forma in D dimensioni contiene $\binom{D-2}{p}$ gradi di libertà.

⁴ I riferimenti bibliografici per questa sezione sono [13, 16–19, 22].

3.2.1 Lagrangiana della Supergravità in 11D

Senza entrare nel dettaglio della derivazione, riportiamo l'espressione esplicita della lagrangiana per la supergravità in undici dimensioni:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\sqrt{g}R(\omega) - \frac{1}{2}i\sqrt{g}\bar{\psi}_M\Gamma^{MNP}D_N\left[\frac{1}{2}(\omega + \tilde{\omega})\right]\psi_P \\ & - \frac{3}{4}\sqrt{g}F_{MNPQ}F^{MNPQ} + \frac{1}{48}\sqrt{g}\varepsilon^{M_1\dots M_{11}}F_{M_1\dots M_4}F_{M_5\dots M_8}A_{M_9\dots M_{11}} \\ & + \frac{1}{32}\sqrt{g}[\bar{\psi}_M\Gamma^{MNPQRS}\psi_N + 12\bar{\psi}^P\Gamma^{QR}\psi^S](F_{PQRS} + \tilde{F}_{PQRS}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

dove

$$\omega_{MAB} = \omega_{MAB}(V) + K_{MAB}, \quad (3.27)$$

$$K_{MAB} = \frac{i}{4}[-\bar{\psi}_N\Gamma_{MAB}\psi_P + 2(\bar{\psi}_M\Gamma_B\psi_A - \bar{\psi}_M\Gamma_A\psi_B + \bar{\psi}_B\Gamma_M\psi_N)], \quad (3.28)$$

$$\tilde{\omega}_{MAB} = \omega_{MAB} + \frac{i}{4}\bar{\psi}_N\Gamma_{MAB}\psi_P, \quad (3.29)$$

$$F_{MNPQ} = 4\partial_{[M}A_{NPQ]}, \quad (3.30)$$

$$\tilde{F}_{MNPQ} = F_{MNPQ} - \frac{1}{2}\bar{\psi}_{[M}\Gamma_{NP}\psi_{Q]}. \quad (3.31)$$

La lagrangiana (3.26) è invariante per trasformazioni di supersimmetria locale $\mathcal{N} = 1$ date da

$$\begin{aligned} \delta V_M{}^A &= -i\bar{\epsilon}\Gamma^A\psi_M, \\ \delta\psi_M &= D_M(\tilde{\omega})\epsilon - \frac{i}{24}(\Gamma^{PQRS}{}_M - 8\Gamma^{QRS}\delta_M^P)\tilde{F}_{PQRS}\epsilon, \\ \delta A_{MNP} &= \frac{1}{4}\bar{\epsilon}\Gamma_{[MN}\psi_{P]}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Descriviamo ora brevemente i passaggi principali secondo i quali si può procedere per determinare la (3.26)⁵.

- Partiamo dalla lagrangiana nello spazio piatto per il gravitino e per la 3-forma, non interagenti:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}i\bar{\psi}_M\Gamma^{MNP}\partial_N\psi_P + \frac{3}{4}F_{MNPQ}F^{MNPQ}, \quad (3.33)$$

in cui i coefficienti sono stati inseriti per comodità.

- Richiediamo che questa azione sia invariante per trasformazioni globali di supersimmetria date dall'ansatz:

$$\begin{aligned} \delta'\psi_M &= -i(A\Gamma^{PQRS}{}_M + B\Gamma^{QRS}\delta_M^P)F_{PQRS}\epsilon, \\ \delta'A_{MNP} &= C\bar{\epsilon}\Gamma_{[MN}\psi_{P]}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

⁵ Si veda il capitolo 10 di [19].

in questo modo possiamo calcolare le costanti: $A = \frac{1}{24}$, $B = -8A$ e $C = \frac{1}{4}$.

- Ora promuoviamo la supersimmetria a simmetria locale, includendo l'azione per il gravitone e l'accoppiamento $J^M \psi_M$, dove

$$J^M = \frac{1}{32} [\Gamma^{MNPQRS} F_{PQRS} + 12 \Gamma^{QR} F^{MN}{}_{QR}] \psi_N \quad (3.35)$$

è la supercorrente associata alla conservazione della supersimmetria globale. Pertanto la lagrangiana diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'' = \frac{1}{2} \sqrt{g} R - \frac{1}{2} i \sqrt{g} \bar{\psi}_M \Gamma^{MNP} D_N \psi_P - \frac{3}{4} \sqrt{g} F_{MNPQ} F^{MNPQ} \\ + \frac{1}{32} \sqrt{g} [\bar{\psi}_M \Gamma^{MNPQRS} \psi_N + 12 \bar{\psi}^P \Gamma^{QR} \psi^S] F_{PQRS}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Aggiungiamo le trasformazioni delle vielbein (nel formalismo al secondo ordine) e modifichiamo la variazione del gravitino:

$$\begin{aligned} \delta'' V_M{}^A &= -i \bar{\epsilon} \Gamma^A \psi_M, \\ \delta'' \psi_M &= D_M \epsilon - \frac{i}{24} (\Gamma^{PQRS}{}_{M} - 8 \Gamma^{QRS} \delta_M^P) F_{PQRS} \epsilon. \end{aligned} \quad (3.37)$$

- Calcolando esplicitamente i termini di ordine $\bar{\epsilon} F F \psi$ nella variazione, si vede che essi non si cancellano, ma danno un termine

$$\delta_{\bar{\epsilon} F F \psi} \mathcal{L}'' = -\frac{1}{64} \sqrt{g} \epsilon^{M_1 \dots M_8 N P Q} F_{M_1 \dots M_4} F_{M_5 \dots M_8} (\bar{\epsilon} \Gamma_{NP} \psi_Q), \quad (3.38)$$

che è possibile cancellare includendo una lagrangiana di Chern-Simons per la 3-forma:

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{48} \sqrt{g} \epsilon^{M_1 \dots M_{11}} F_{M_1 \dots M_4} F_{M_5 \dots M_8} A_{M_9 \dots M_{11}}. \quad (3.39)$$

- A questo punto abbiamo delineato la struttura della lagrangiana completa, con ulteriori calcoli si giunge alla (3.26) e si definiscono le (3.32).

3.2.2 Compattificazione Spontanea

Siamo interessati alla teoria ridotta in uno spaziotempo a quattro dimensioni che abbia simmetria massimale, ovvero che sia invariante per uno dei seguenti gruppi di isometria

$$\begin{array}{ll} ISO(1,3) & \text{Minkowski } (\mathbb{M}_4) \\ SO(1,4) & \text{de Sitter } (dS_4) \\ SO(2,3) & \text{Anti de Sitter } (AdS_4) \end{array} \quad (3.40)$$

cui è associato lo spazio indicato a destra.

Lo spettro in massa della teoria, che vogliamo calcolare, sarà determinato espandendo i campi attorno ad un vuoto classico. Cerchiamo quindi delle soluzioni alle equazioni del moto che corrispondano ad un'isometria massimale per lo spazio quadridimensionale.

Gli spazi indicati in (3.40) sono quozienti con sottogruppo di isotropia $SO(1,3)$, hanno cioè invarianza di Lorentz locale. Ciò significa che, ancor prima di scrivere le equazioni del moto, sappiamo già che il valore di aspettazione del gravitino sul vuoto deve essere nullo⁶:

$$\langle \psi_M \rangle = 0. \quad (3.41)$$

Questa considerazione comporta una notevole semplificazione, almeno per il settore bosonico. Infatti il campo del gravitino entra sempre a coppie nella lagrangiana, sicché per scrivere le equazioni del moto per g_{MN} e per A_{MNP} possiamo considerare direttamente

$$\mathcal{L}_b = \frac{1}{2}\sqrt{g}R - \frac{3}{4}\sqrt{g}F_{MNPQ}F^{MNPQ} + \frac{1}{48}\sqrt{g}\varepsilon^{M_1\dots M_{11}}F_{M_1\dots M_4}F_{M_5\dots M_8}A_{M_9\dots M_{11}}, \quad (3.42)$$

dove ora la connessione in R è a torsione nulla. Variando la lagrangiana (3.42) rispetto alla metrica e alla 3-forma si ottengono le equazioni

$$R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R = 6F_{MPQR}F_N{}^{PQR} - \frac{3}{4}g_{MN}F^{PQRS}F_{PQRS}, \quad (3.43)$$

$$\nabla_M F^{MPQR} = -\frac{1}{96}\varepsilon^{PQRN_1\dots N_8}F_{N_1\dots N_4}F_{N_5\dots N_8}. \quad (3.44)$$

Le simmetrie del vuoto implicano che tutti i tensori debbano essere invariante per i diffeomorfismi infinitesimi $\delta_i x^\mu = k_i^\mu$ generati dai vettori di Killing di uno dei gruppi di isometria elencati nella (3.40). Ovvero le derivate di Lie sulla metrica e sul campo F devono essere nulle

$$\mathcal{L}_{k_i^\mu} g_{MN}(x, y) = k_i^\mu \partial_\mu g_{MN}(x, y) + (\partial_M k_i^\mu) g_{\mu N} + (\partial_N k_i^\mu) g_{\mu M} = 0, \quad (3.45)$$

$$\mathcal{L}_{k_i^\mu} F_{MNPQ}(x, y) = k_i^\mu \partial_\mu F_{MNPQ} - 4\partial_{[M} k_i^\mu F_{NPQ]\mu} = 0. \quad (3.46)$$

Le equazioni (3.45) e (3.46) danno come unica soluzione

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x, y) &= g_{\mu\nu}(x)f(y), \\ g_{mn}(x, y) &= g_{mn}(y), \\ F_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}h(y), \\ F_{mnpq}(x, y) &= F_{mnpq}(y), \end{aligned} \quad (3.47)$$

⁶ Nel seguito ometteremo la notazione $\langle \dots \rangle$, giacché dovrebbe essere chiaro dal contesto quando ci si sta riferendo alla soluzione.

e tutte le altre entrate nulle. Per quanto segue imponiamo $f(y) = 1$, infatti non ci sono soluzioni con fattore di *warp* che diano spazi M_7 descritti da quozienti, che invece sono quelli ai quali siamo interessati. Utilizzando il risultato in (3.47), l'identità di Bianchi

$$\partial_{[M}F_{NPQR]} = 0 \quad (3.48)$$

dice che

$$\partial_m F_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_m h(y) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu F_{mnpq}(x, y) = 0,$$

da cui

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) &= e \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \\ F_{mnpq}(x, y) &= F_{mnpq}(y), \end{aligned} \quad (3.49)$$

dove e è una costante.

Passiamo ora a risolvere le equazioni del moto. Sostituendo le (3.49) in (3.44) abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu\nu\rho\sigma} &= 0, \\ \nabla_m F^{mnpq} &= -\frac{2}{96} e \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma n p q a b c d} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{abcd} = \frac{1}{2} e \varepsilon^{n p q a b c d} F_{abcd}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Una soluzione semplice è data da

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu\rho\sigma} &= e \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \\ F_{mnpq} &= 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Contraendo l'equazione (3.43) con la metrica si ottiene

$$R = \frac{1}{2} F^{MNPQ} F_{MNPQ}. \quad (3.52)$$

Possiamo quindi riscrivere la (3.43) come

$$R_{MN} = 6 F_{MPQR} F_N{}^{PQR} - \frac{1}{2} g_{MN} F^{PQRS} F_{PQRS}. \quad (3.53)$$

Sostituiamo la soluzione per F_{MNPQ} (3.51) nella (3.53) trovando le seguenti equazioni per il tensore di Ricci

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= 6e^2 \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \varepsilon_\nu{}^{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2} 24e^2 g_{\mu\nu} = -24e^2 g_{\mu\nu}, \\ R_{mn} &= -\frac{1}{2} g_{mn} e^2 (-24) = 12e^2 g_{mn}, \\ R_{\mu n} &= 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Le (3.54) descrivono due spazi di Einstein rispettivamente di quattro e sette dimensioni. L'insieme delle (3.54) e (3.51) prende il nome di soluzione di Freund–Rubin.

Dalla (3.54) vediamo che la varietà quadridimensionale ha curvatura negativa, e quindi corrisponde allo spazio Anti de Sitter, mentre g_{mn} è la metrica di uno spazio compatto. Perciò è la teoria stessa ad ammettere una metrica fattorizzata

$$AdS_4 \times M_7 \quad (3.55)$$

come soluzione alle equazioni del moto: ovvero si ha compattificazione spontanea. La dimensione quattro qui non è stata imposta e fondamentale si deve al fatto che il tensore $F_{MNPQ} = 4\partial_{[M}A_{NPQ]}$ ha rango quattro.

Per completezza, notiamo che dalla (3.44) possiamo dedurre che anche

$$\begin{aligned} F_{mnpq} &= e' \varepsilon_{mnpq}, \\ F_{\mu\nu\rho\sigma} &= 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

rappresenta una soluzione, con la richiesta che ora lo spazio sette dimensionale sia massimamente simmetrico. Utilizzando la (3.53), la soluzione (3.56) porge

$$AdS_7 \times M_4. \quad (3.57)$$

3.2.3 Supersimmetria e Olonomia

Vogliamo studiare l'invarianza della soluzione di Freund–Rubin rispetto alle trasformazioni (3.32). Avendo posto nella (3.41) $\Psi_M = 0$, le variazioni δV_M^A e δA_{MNP} sono identicamente nulle. Dunque le trasformazioni di supersimmetria preservano il vuoto se e solo se la condizione $\Psi_M = 0$ è invariante, ovvero

$$\delta\psi_M = \tilde{D}_M \epsilon \equiv D_M \epsilon - \frac{i}{24} (\Gamma^{PQRS}{}_M - 8\Gamma^{QRS} \delta_M^P) F_{PQRS} \epsilon = 0, \quad (3.58)$$

con tutti i campi valutati sul vuoto.

Cerchiamo una soluzione fattorizzata dell'equazione (3.58):

$$\epsilon(x, y) = \epsilon(x) \eta(y). \quad (3.59)$$

Sostituendo in (3.58) le (3.51) e dalle definizioni delle matrici gamma, otteniamo le equazioni⁷

$$(D_\mu + 2eV_\mu{}^\alpha \gamma^* \gamma_\alpha) \epsilon(x) = 0, \quad (3.60)$$

$$(D_m - eV_m{}^a \gamma_a) \eta(y) = 0. \quad (3.61)$$

La condizione di integrabilità $[\tilde{D}_M, \tilde{D}_N] \epsilon = 0$ fornisce

$$\left(-\frac{1}{4} R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} - 4e^2 V_\mu{}^\alpha V_\nu{}^\beta \gamma_{\alpha\beta} \right) \epsilon(x) = 0, \quad (3.62)$$

⁷ Si è posto $\gamma^* = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ come in (B.18).

$$\left(-\frac{1}{4}R_{mn}{}^{ab}\gamma_{ab} - e^2V_m{}^aV_n{}^b\gamma_{ab} \right) \eta(y) = 0. \quad (3.63)$$

La prima equazione è soddisfatta identicamente per $AdS_4 \times M_7$, dacché la curvatura dello spazio di Anti de Sitter è data da

$$R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} = -16e^2\delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma}. \quad (3.64)$$

Riscriviamo allora la (3.63) tramite il tensore di Weyl:

$$[\tilde{D}_m, \tilde{D}_n]\eta = -\frac{1}{4}C_{mn}{}^{ab}\gamma_{ab}\eta = 0. \quad (3.65)$$

Il sottogruppo di $Spin(7)$ generato dalle combinazioni lineari dei generatori γ_{ab} date dalla (3.65), prende il nome di gruppo di ologonia di Weyl \mathcal{H} . Essendo l'integrabilità una condizione necessaria, l'equazione (3.63) determina il numero massimo di supersimmetrie del vuoto \mathcal{N}_{max} , date dal numero di soluzioni indipendenti della (3.63) stessa. In altri termini \mathcal{N}_{max} corrisponde al numero di singoletti che compaiono nella decomposizione della rappresentazione spinoriale $(\mathbf{8})$ di $SO(7)$ sotto \mathcal{H} . Il numero effettivo di supersimmetrie è infine dato dal numero di spinori indipendenti η che soddisfano la (3.61).

Per la varietà di Stiefel è possibile mostrare che il gruppo di ologonia è $\mathcal{H} = SU(3)$. Decomponendo quindi la rappresentazione spinoriale di $SO(7)$ sotto $SU(3)$, abbiamo

$$\mathbf{8} \xrightarrow{SU(3)} \mathbf{3} + \mathbf{3} + \mathbf{1} + \mathbf{1}, \quad (3.66)$$

da cui segue $\mathcal{N}_{max} = 2$.

È interessante notare che, mentre nell'equazione (3.63) il segno della costante e è irrilevante, si può provare che il cambio di segno $e \rightarrow -e$ in (3.61) comporta in generale una rottura della supersimmetria; questo fatto è essenziale nella scelta dei riscalamanti delle vielbein della varietà interna.

3.3 EQUAZIONI LINEARIZZATE PER LO SPETTRO SU M_7 E ORGANIZZAZIONE IN MULTIPLETTI

Lo spettro della teoria compattificata si ottiene individuando i termini di massa per i campi in AdS_4 leggendoli direttamente dalle equazioni. Ciò avviene essenzialmente attraverso tre passaggi:

- si linearizzano le equazioni della teoria in $11D$ attorno al vuoto;
- si espandono le fluttuazioni dei campi in $11D$ in armoniche;
- si calcola l'azione sulle armoniche degli operatori differenziali della varietà compatta che compaiono nelle equazioni.

Gli stati così ottenuti per i vari campi in quattro dimensioni possono essere organizzati in supermultipletti, nel caso di specie di $OSp(4|2)$, conoscendo le relazioni generali fra le masse dei campi che li compongono. La struttura generale dei multipletti di $OSp(4|2)$ è mostrata nell'appendice A.

3.3.1 Linearizzazione delle Equazioni della Supergravità in 11D

Definiamo le fluttuazioni per i campi della supergravità in undici dimensioni, indicando con il simbolo $\hat{\cdot}$ i campi valutati sulla soluzione di Freund–Rubin (ordine zero nelle fluttuazioni):

$$g_{MN}(x, y) = \hat{g}_{MN}(x, y) + h_{MN}(x, y), \quad (3.67)$$

$$\psi_M(x, y) = 0 + \psi_M(x, y), \quad (3.68)$$

$$A_{MNP}(x, y) = \hat{A}_{MNP}(x, y) + a_{MNP}(x, y). \quad (3.69)$$

Per il settore bosonico possiamo utilizzare direttamente le (3.53) e (3.44), dato che all'ordine lineare il contributo dei fermioni è nullo. Si ottengono così le equazioni:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \hat{\nabla}^P \hat{\nabla}_P h_{MN} + \hat{\nabla}_{(M} \hat{\nabla}^P h_{P)N} - \frac{1}{2} \hat{\nabla}_M \hat{\nabla}_N h^P{}_P - 2 \hat{R}_{MPNQ} h^{PQ} + 2 \hat{R}_{(M}{}^P h_{N)P} \\ & = 12 \hat{F}_{(M}{}^{PQR} f_{N)PQR} - \hat{g}_{MN} \hat{F}^{PQRS} f_{PQRS} - 18 \hat{F}_{QR(M}{}^P f_{N)}{}^{SQR} h_{PS} \\ & \quad - \frac{1}{2} h_{MN} \hat{F}_{PQRS} \hat{F}^{PQRS} + 3 \hat{g}_{MN} \hat{F}_{PQRS} \hat{F}{}^{QRS} h^{PT}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} & \hat{\nabla}_Q f^{QMNP} + \frac{1}{2} \hat{F}^{QMNP} \hat{\nabla}_Q (h^{QR} \hat{F}_R{}^{MNP}) - 3 \hat{\nabla}^Q (h^{S[M} \hat{F}_{QS}{}^{NP]}) \\ & = -\frac{1}{48} \hat{\epsilon}^{MNPQ_1 \dots Q_8} \hat{F}_{Q_1 \dots Q_4} f_{Q_5 \dots Q_8}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

dove f è la fluttuazione del tensore F . Per ricavare l'equazione linearizzata per il gravitino non abbiamo bisogno dell'equazione completa, infatti al primo ordine è sufficiente considerare la seguente lagrangiana:

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{1}{2} i \sqrt{\hat{g}} \bar{\psi}_M \hat{\Gamma}^{MNP} \hat{D}_N \psi_P + \frac{1}{16} \sqrt{\hat{g}} [\bar{\psi}_M \hat{\Gamma}^{MNPQRS} \psi_N + 12 \bar{\psi}^P \hat{\Gamma}^{QR} \psi^S] \hat{F}_{PQRS}. \quad (3.72)$$

Variando rispetto al campo fermionico la (3.72) troviamo

$$\hat{\Gamma}^{MNP} \hat{D}_N \psi_P = \hat{\Gamma}^{MNP} \left[\hat{D}_N - \frac{i}{24} (\hat{\Gamma}^{QRST}{}_N - 8 \Gamma^{RST} \delta_N^Q) \hat{F}_{QRST} \right] \psi_P = 0. \quad (3.73)$$

3.3.2 *Espansione in Armoniche e Relazioni fra le Masse*

Seguendo la trattazione in [21], espandiamo i campi che compaiono nelle equazioni (3.70), (3.71), (3.73) in armoniche. Tale espansione, sebbene complicata, è convenzionale, ed è scelta in maniera che i campi in quattro dimensioni siano autostati di massa. Per di più, vogliamo che siano univocamente determinati a meno di trasformazioni locali della teoria quadridimensionale. A tal proposito, dobbiamo rompere delle simmetrie associate alla teoria in undici dimensioni, ovvero fissiamo una gauge. Ciò è del tutto analogo a quanto fatto in 3.1.1, dove abbiamo posto $V_\theta^\alpha = 0$.

Riportiamo esplicitamente, senza fornire una derivazione, la forma generale dell'espansione dei campi⁸:

$$h_{\alpha\beta} = \left\{ h_{\alpha\beta}^k - \frac{3}{M_{(0)^3} + 32} D_{(\alpha} D_{\beta)} \left[\left(2 + \sqrt{M_{(0)^3} + 36} \right) S^k + \left(2 - \sqrt{M_{(0)^3} + 36} \right) \Sigma^k \right] + \frac{5}{4} \delta_{\alpha\beta} \left[\left(6 - \sqrt{M_{(0)^3} + 36} \right) S^k + \left(6 + \sqrt{M_{(0)^3} + 36} \right) \Sigma^k \right] \right\} Y^k, \quad (3.74)$$

$$h_{\alpha b} = \left[\left(\sqrt{M_{(1)(0)^2} + 16} - 4 \right) A_\alpha^k + \left(\sqrt{M_{(1)(0)^2} + 16} + 4 \right) W_\alpha^k \right] Y_b^k, \quad (3.75)$$

$$h_{ab} = \varphi^k Y_{ab}^k - \delta_{ab} \left[\left(6 - \sqrt{M_{(0)^3} + 36} \right) S^k + \left(6 + \sqrt{M_{(0)^3} + 36} \right) \Sigma^k \right] Y^k, \quad (3.76)$$

$$a_{\alpha\beta\gamma} = 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} D^\delta (S^k + \Sigma^k) Y^k, \quad (3.77)$$

$$a_{\alpha\beta c} = \left[\frac{2}{3} \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} (D_\gamma A_\delta^k + D_\gamma a_\delta^k) \right] Y_c^k, \quad (3.78)$$

$$a_{abc} = Z_\alpha^k Y_{[bc]}^k, \quad (3.79)$$

$$a_{abc} = \pi^k Y_{[abc]}^k, \quad (3.80)$$

$$\psi_\alpha = \left[\chi_\alpha + \frac{(4/7)M_{(1/2)^3} + 8}{M_{(1/2)^3} + 8} (D_\alpha + 2e\gamma^* \gamma_\alpha) \lambda_L^k - \left(6 + \frac{3}{7} M_{(1/2)^3} \right) \gamma^* \gamma_\alpha \lambda_L^k \right] \Xi^k, \quad (3.81)$$

$$\psi_a = \lambda_T^k \Xi_a^k + \lambda_L^k (D_a - e\gamma_a) \Xi^k, \quad (3.82)$$

⁸ D'ora in avanti ometteremo il simbolo $\hat{\cdot}$, che sarà sempre sottinteso, così come è sottintesa la somma sul generico indice k .

dove le armoniche trasverse, $D^a Y_{ab\dots} = 0$, e a traccia nulla, $Y_{aa} = 0$. Le condizioni che definiscono la scelta della gauge sono invece

$$\gamma^a \psi_a = 0, \quad (3.83)$$

$$D^a \left(h_{ab} - \frac{1}{7} \delta_{ab} h^c{}_c \right) = 0, \quad (3.84)$$

$$D^a h_{a\beta} = 0, \quad (3.85)$$

$$5M_{(0)^3} D^\alpha h_{\alpha\beta} = \left(216 - M_{(0)^3} + 36\sqrt{M_{(0)^3} + 36} \right) D_\beta h^\gamma{}_\gamma, \quad (3.86)$$

$$D^a a_{a\beta\gamma} = D^a a_{ab\gamma} = D^a a_{abc}. \quad (3.87)$$

I parametri M , che abbiamo introdotto formalmente, sono gli autovalori sulle varie armoniche degli operatori differenziali della varietà interna (Hodge–de Rham per i bosoni e Dirac–Rarita–Schwinger per i fermioni). In particolare, le armoniche appartengono ad una rappresentazione irriducibile del gruppo $SO(7)$, la quale può essere etichettata da tre numeri quantici $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ relativi al generico tableau di Young con $2\lambda_i + 1$ blocchetti nella i -esima riga. Elenchiamo di seguito la definizione degli autovalori e dei relativi operatori:

$$[0, 0, 0] \quad \boxtimes_{(0)^3} Y = \square_y Y \equiv D^a D_a Y = M_{(0)^3} Y, \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} [1, 0, 0] \quad \boxtimes_{(1)(0)^2} Y_a &= 2D^b D_{[b} Y_{a]} = \square_y Y_a + 2R_a{}^b Y_b \\ &= (\square_y + 24e^2) Y_a = M_{(1)(0)^2} Y_a, \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} [1, 1, 0] \quad \boxtimes_{(1)^2(0)} Y_{[ab]} &= 3D^c D_{[c} Y_{ab]} \\ &= [(\square_y + 40e^2) \delta_{ab}^{dc} - 2C_{ab}{}^{cd}] Y_{[cd]} = M_{(1)^2(0)} Y_{[ab]}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$[1, 1, 1] \quad \boxtimes_{(1)^3} Y_{[abc]} = \frac{1}{24} \varepsilon_{abc}{}^{defg} D_a Y_{efg} = M_{(1)^3} Y_{[abc]}, \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} [2, 0, 0] \quad \boxtimes_{(2)(0)^2} Y_{(ab)} &= 3D^c D_{(c} Y_{ab)} \\ &= [(\square_y + 40e^2) \delta_{(ab)}^{(dc)} - 4C_{ab}{}^{cd}] Y_{(cd)} = M_{(2)(0)^2} Y_{(ab)}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad \boxtimes_{(1/2)^3} \Xi = \gamma^a (D_a - \gamma_a) \Xi = (\not{D} - 7) \Xi = M_{(1/2)^3} \Xi, \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad \boxtimes_{(3/2)(1/2)^2} \Xi_a &= \left(\gamma^{abc} - \frac{5}{7} \gamma^a \gamma^{bc} \right) (D_b - \gamma_b) \Xi_c \\ &= (\not{D} - 5) \Xi_a = M_{(3/2)(1/2)^2} \Xi_a. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Osserviamo che, a differenza delle altre equazioni con operatori di Hodge–de Rham, la (3.91) è del primo ordine nelle derivate. Questa proprietà è generale per le armoniche

trasverse associate a p -forme in spazi di dimensione $d = 2p + 1$. Facendo riferimento all'appendice B si ha infatti:

$$*dY_p = \lambda Y_p, \quad (3.95)$$

e quindi

$$|\Delta Y_p| = |(d\delta + \delta d)Y_p| = |\delta dY_p| = (*d)^2 Y_p = \lambda^2 Y_p, \quad (3.96)$$

dove abbiamo utilizzato la trasversalità di Y_p : $d^*Y_p = 0$.

Con le convenzioni adottate, possiamo sostituire le espansioni dei campi a_{MNP} , h_{MN} e ψ_M nelle (3.70), (3.71), (3.73) e leggere dalle equazioni ottenute le masse per i campi in quattro dimensioni. Alla fine si ha

$$\begin{aligned} m_S^2 &= M_{(0)^3} + 176 - 24\sqrt{M_{(0)^3} + 36}, \\ m_\Sigma^2 &= M_{(0)^3} + 176 + 24\sqrt{M_{(0)^3} + 36}, \\ m_\varphi^2 &= -M_{(2)(0)^2}, \\ \text{bosoni } m_\pi^2 &= 16(M_{(1)^3} - 2)(M_{(1)^3} - 1), \\ m_A^2 &= M_{(1)(0)^2} + 48 - 12\sqrt{M_{(1)(0)^2} + 16}, \\ m_W^2 &= M_{(1)(0)^2} + 48 + 12\sqrt{M_{(1)(0)^2} + 16}, \\ m_Z^2 &= M_{(1)^2(0)}, \\ m_h^2 &= M_{(0)^3}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \text{fermioni } m_{\lambda_L} &= -(M_{(1/2)^3} + 16), \\ m_{\lambda_T} &= M_{(3/2)(1/2)^2} + 8, \\ m_\chi &= M_{(1/2)^3}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Dalle (3.97) e (3.98) vediamo che, calcolando gli autovalori degli operatori di M_7 sulle armoniche, possiamo determinare lo spettro della compattificazione.

Dato che i campi sono legati dalla supersimmetria e che le equazioni trasformano le une nelle altre, qualunque sia lo spazio compatto (purché $\mathcal{N} \geq 1$), valgono le seguenti relazioni generali fra le masse⁹:

$$\begin{aligned} m_h^2 &= m_\chi(m_\chi + 12), \\ m_A^2 &= m_\chi(m_\chi + 4) & \text{se } m_\chi \geq -8, \\ m_A^2 &= m_\chi^2 + 2m_\chi + 192 & \text{se } m_\chi \leq -8, \\ m_W^2 &= m_\chi^2 + 2m_\chi + 192 & \text{se } m_\chi \geq -8, \\ m_W^2 &= m_\chi(m_\chi + 4) & \text{se } m_\chi \leq -8, \\ m_Z^2 &= (m_\chi + 8)(m_\chi + 4), \end{aligned} \quad (3.99)$$

⁹ Per una derivazione dettagliata delle (3.99), (3.100), (3.101) si veda [21].

3.3 EQUAZIONI LINEARIZZATE PER LO SPETTRO SU M_7 E ORGANIZZAZIONE IN MULTIPLIETTI

$$\begin{aligned}
 m_\pi^2 &= m_{\lambda_T}(m_{\lambda_T} + 4), \\
 m_\varphi^2 &= m_{\lambda_T}(m_{\lambda_T} - 4), \\
 m_A^2 &= m_{\lambda_T}^2 - 20 m_{\lambda_T} + 96 & \text{se } m_{\lambda_T} \geq 4, \\
 m_A^2 &= m_{\lambda_T}(m_{\lambda_T} + 4) & \text{se } m_{\lambda_T} < 4, \\
 m_W^2 &= m_{\lambda_T}(m_{\lambda_T} + 4) & \text{se } m_{\lambda_T} \geq 4, \\
 m_W^2 &= m_{\lambda_T}^2 - 20 m_{\lambda_T} + 96 & \text{se } m_{\lambda_T} < 4, \\
 m_Z^2 &= m_{\lambda_T}(m_{\lambda_T} - 4),
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}
 m_\pi^2 &= m_{\lambda_L}(m_{\lambda_L} + 4), \\
 m_\Sigma^2 &= (m_{\lambda_L} + 24)(m_{\lambda_L} + 20) & \text{se } m_{\lambda_L} < -10, \\
 m_\Sigma^2 &= m_{\lambda_L}(m_{\lambda_L} - 4) & \text{se } m_{\lambda_L} \geq -10, \\
 m_\Sigma^2 &= m_{\lambda_L}(m_{\lambda_L} - 4) & \text{se } m_{\lambda_L} < -10, \\
 m_\Sigma^2 &= (m_{\lambda_L} + 24)(m_{\lambda_L} + 20) & \text{se } m_{\lambda_L} \geq -10, \\
 m_A^2 &= m_{\lambda_L}^2 - 2 m_{\lambda_L} + 192 & \text{se } m_{\lambda_L} < -8, \\
 m_A^2 &= m_{\lambda_L}(m_{\lambda_L} + 4) & \text{se } m_{\lambda_L} \geq -8, \\
 m_W^2 &= m_{\lambda_L}(m_{\lambda_L} + 4) & \text{se } m_{\lambda_L} < -8, \\
 m_W^2 &= m_{\lambda_L}^2 - 2 m_{\lambda_L} + 192 & \text{se } m_{\lambda_L} \geq -8.
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

La figura 3.3.2 rappresenta graficamente le relazioni (3.99), (3.100) e (3.101).

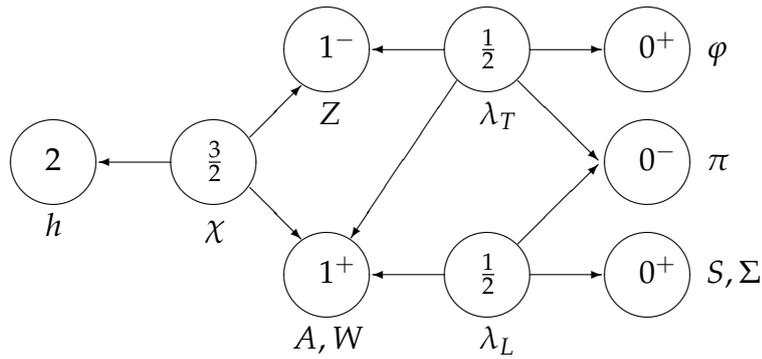


Figura 1.: Relazioni di supersimmetria fra i campi. Le frecce partono dai fermioni che compaiono nelle trasformazioni dei bosoni su cui arrivano.

Ottenute le masse per i vari campi, possiamo utilizzare le relazioni (3.99), (3.100) e (3.101) per organizzare gli stati riempiendo i multipletti “ad esaurimento”. Essenzialmente, si parte dalle masse per gli stati a spin 2, ottenute dagli autovalori dell’armonica scalare e si completano i multipletti relativi ai gravitoni, secondo le tabelle riportate in appendice A, scegliendo opportunamente le masse ottenute per gli altri campi, che sono legate agli autovalori delle altre armoniche. Le masse restanti per gli stati a spin più basso vanno poi a riempire i multipletti dei gravitini, dei vettori, e così via.

Il numero di multipletti e la presenza di multipletti *corti* (che contengono cioè un numero inferiore di stati) dipendono dalle caratteristiche della varietà interna scelta, e ciò fa sì che le relazioni fra le masse non siano utili a ricostruire lo spettro completo a partire solamente da alcuni autovalori, come invece si potrebbe pensare.

ANALISI ARMONICA SU G/H

Abbiamo visto che, per ottenere tutto lo spettro di una teoria compattificata, è necessario calcolare l'azione degli operatori differenziali interni sulle armoniche, ovvero

$$\boxtimes Y_{ab\dots} \quad (4.1)$$

In questo capitolo descriviamo brevemente come si possa risolvere il problema posto in (4.1) tramite l'analisi armonica su un quoziente generico, per poi adottare questa tecnica per la varietà di Stiefel, fornendo dettagli sul calcolo. Riferimenti sull'analisi armonica su varietà quozienti e sulla sua applicazione alle compattificazioni di teorie di supergravità sono: [18, 23–30]

4.1 ARMONICHE SU G/H E OPERATORI DIFFERENZIALI

Per definire le armoniche partiamo dal fatto che una funzione su un gruppo G si può espandere negli elementi di matrice delle rappresentazioni irriducibili (unitarie) di G , vale a dire

$$\varphi(g) = \sum_{(\mu)} \sum_{m,n}^{\dim(\mu)} c_{m,n}^{(\mu)} \mathbb{D}_{m,n}^{(\mu)}(g), \quad (4.2)$$

dove $\{\mu\}$ indica la rappresentazione e m, n sono indici matriciali. Le armoniche di G sono date dalla base funzionale $\mathbb{D}_{m,n}^{(\mu)}(g)$. Per generalizzare questa definizione alle varietà quozienti, torniamo all'equazione (2.6) scritta in una rappresentazione $\{\mu\}$ di G :

$$\mathbb{D}(g)^m_n \mathbb{D}(L(y))^n_{k_i} = \mathbb{D}(L(y))^m_{h_i} \mathbb{D}(h)^{h_i}_{k_i}, \quad (4.3)$$

m, n corrono su N valori possibili, dove $N = \dim(\mu)$. Se la rappresentazione $\{\mu\}$ di G si decompone sotto H secondo

$$\{\mu\} \longrightarrow \{\alpha_1\} + \{\alpha_2\} + \dots + \{\alpha_M\}, \quad (4.4)$$

allo stesso modo la rappresentazione matriciale $\mathbb{D}(h)$ può essere decomposta in M sottospazi con indici h_i , dove $i = 1, \dots, M$ e $h_i = 1, \dots, n_i = \dim(\alpha_i)$. A questo punto possiamo definire l'*armonica irriducibile* come

$$\left[Y_{\{\alpha_i\}}^{\{\mu\}}(y) \right]_{h_i}^m \equiv \mathbb{D}^m_{h_i}(L^{-1}(y)). \quad (4.5)$$

Ricordiamo che stiamo considerando lo spettro in massa di Kaluza–Klein di una teoria in D dimensioni compattificata su AdS_{D-d} , dove d è la dimensione dello spazio compatto. Quindi, per poter utilizzare la definizione (4.5), dobbiamo capire come mettere in relazione le armoniche irriducibili e i campi della nostra teoria, e determinare l'azione degli operatori differenziali sui campi stessi, espressi tramite le armoniche.

4.1.1 Armoniche Irriducibili e Campi di $SO(d)$

Ogni campo nella teoria D dimensionale ha dei numeri quantici, $\{J\}$, associati allo spazio AdS_{D-d} , inoltre indichiamo la rappresentazione di $SO(d)$, in cui il campo risiede, con $[\lambda]$, essendo quest'ultima proprio quella che ci interessa per calcolare lo spettro.¹

Se vogliamo espandere i campi di $SO(d)$ in armoniche di G/H , H deve essere un sottogruppo di $SO(d)$, ed infatti così è, essendo l'immersione di H in $SO(d)$ definita da

$$(T_H)^m_n = C_H^{ab} (t_{ab})^m_n, \quad (4.6)$$

dove $C_H^{ab} = C_{Hc}^b \eta^{ca}$, e T_H e t_{ab} sono rispettivamente i generatori di H e $SO(d)$. Sicché possiamo decomporre $[\lambda]$ rispetto a H ottenendo una serie di N rappresentazioni irriducibili di H , simbolicamente

$$[\lambda] \xrightarrow{H} \{\beta_1\} + \{\beta_2\} + \dots + \{\beta_N\}. \quad (4.7)$$

Secondo la decomposizione (4.7), nell'espansione dei campi dobbiamo tenere in considerazione solo quelle rappresentazioni $\{\mu\}$ di G che contengono almeno un frammento $\{\beta_j\} = \{\alpha_j\}$, quando decomposte rispetto ad H .

¹ Si può pensare a $[\lambda]$ come un tableau di Young con $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{[d/2]}]$ che specificano il numero di blocchi in ogni riga. Si veda 3.3.2.

A questo punto possiamo scrivere la generica espansione in armoniche per un campo di $SO(d)$ (omettendo gli indici della rappresentazione $\{J\}$):

$$\Phi_{ab\dots}^{[\lambda]}(x, y) = \sum_{\{v\}} \sum_m \sum_{i=1}^N \Phi_{h_i}^{\{v\}, m}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{h_i}(y) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}^{\{v\}, m}, \quad (4.8)$$

dove ora

$$Y_{h_i}^{\{v\}, m}(y) \quad (4.9)$$

coincide con la definizione di armonica irriducibile data in (4.5). Il contenuto di armoniche irriducibili di ogni campo della teoria è dato dalla (4.8), una volta nota la regola di decomposizione della rappresentazione di $SO(d)$, in cui il campo risiede, in rappresentazioni irriducibili di H .

4.1.2 Costruzione degli Operatori Differenziali

Come mostrano le equazioni (3.88), (3.89), (3.90), (3.91), (3.92), (3.93), (3.94), tutti gli operatori differenziali che appaiono nelle equazioni linearizzate per i campi sono costruiti tramite la derivata covariante (negli indici piatti), più eventuali termini di curvatura.

L'azione sulle armoniche di questi operatori differenziali può essere espressa in termini dei generatori di G/H e di $SO(d)$, riducendo così il calcolo dello spettro ad un problema algebrico. Per mostrare questa proprietà consideriamo la 1-forma definita in (2.8), espressa secondo la decomposizione $\mathbb{G} = \mathbb{H} + \mathbb{K}$:

$$L^{-1}dL = T_a V^a + \omega^H T_H, \quad (4.10)$$

che diventa, facendo uso di $L^{-1}dL = -dL^{-1}L$ e moltiplicando a destra per L^{-1} ,

$$dL^{-1} = -V^a T_a L^{-1} - \omega^H T_H L^{-1}. \quad (4.11)$$

Consideriamo le armoniche per i frammenti irriducibili $\{\alpha_i\}$, allora l'azione dei generatori di \mathbb{G} si decompone a blocchi sotto \mathbb{H} :

$$(T_a L^{-1})^m_{h_i} = (T_a)^n_{h_i} (L^{-1})^m_n = \sum_{j=1}^M (T_a)_{h_i}^{h_j} Y_{h_j}^{\{v\}, m}, \quad (4.12)$$

$$(T_H L^{-1})^m_{h_i} = (T_H)^{k_i}_{h_i} (L^{-1})^m_{k_i} = (T_H)_{h_i}^{k_i} Y_{k_i}^{\{v\}, m}. \quad (4.13)$$

Dunque, ricordando la (4.5) e tenendo conto delle (4.12) e (4.13), riscriviamo la (4.11):

$$dY_{h_i}^m = -V^a \sum_{j=1}^M (T_a)_{h_i}{}^{h_j} Y_{h_j}^m - \omega^H (T_H)_{h_i}{}^{k_i} Y_{k_i}^m. \quad (4.14)$$

Dalla definizione generale di derivata covariante di $SO(d)$ si ha

$$DY_{h_i}^m = dY_{h_i}^m + (\mathcal{B}^{cd})(t_{cd})_{h_i}{}^{k_i} Y_{k_i}^m, \quad (4.15)$$

dove ora abbiamo invece decomposto in blocchi irriducibili di H i generatori di $SO(d)$. In generale possiamo sviluppare \mathcal{B} sulle vielbein di G/H e sulla connessione di H :

$$\mathcal{B}^{cd} t_{cd} = \omega^H T_H + \mathcal{M}^{cd} t_{cd}, \quad (4.16)$$

dove \mathcal{M} contiene solamente le componenti della connessione sulle vielbein di G/H . Sostituendo quindi la (4.16) nella (4.15), otteniamo

$$DY_{h_i}^m = dY_{h_i}^m + \omega^H (T_H)_{h_i}{}^{k_i} Y_{k_i}^m + \mathcal{M}^{cd} (t_{cd})_{h_i}{}^{k_i} Y_{k_i}^m. \quad (4.17)$$

Confrontando con la (4.14), possiamo eliminare la derivata covariante di H :

$$D(\omega_H) Y_{h_i}^m = dY_{h_i}^m + \omega^H (T_H)_{h_i}{}^{k_i} Y_{k_i}^m, \quad (4.18)$$

da cui

$$DY_{h_i}^m = -V^a \sum_{j=1}^M (T_a)_{h_i}{}^{h_j} Y_{h_j}^m + \mathcal{M}^{cd} (t_{cd})_{h_i}{}^{k_i} Y_{k_i}^m. \quad (4.19)$$

Introducendo i riscalamanti delle vielbein, abbiamo finalmente l'espressione

$$D_a Y_{h_i}^m = -r_a \sum_{j=1}^M (T_a)_{h_i}{}^{h_j} Y_{h_j}^m + \mathcal{M}_a^{cd} (t_{cd})_{h_i}{}^{k_i} Y_{k_i}^m, \quad (4.20)$$

che ci permette di costruire gli operatori differenziali della varietà interna in termini dei generatori, la cui azione sui frammenti irriducibili è algebrica. Dunque in generale avremo

$$\boxtimes Y_{h_i}^{[\lambda]} = M_{h_i}{}^{k_j} Y_{k_j}^{[\lambda]}, \quad (4.21)$$

dove $M_{h_i}{}^{k_j}$ è la matrice che determina, al variare delle armoniche considerate, lo spettro della teoria, attraverso le equazioni (3.97) e (3.98).

In generale tuttavia, avremo diversi frammenti che corrispondono alla stessa rappresentazione di H sotto cui $SO(d)$ e G si rompono, quindi, almeno in linea di principio, avremo tanti autovalori nella (4.21) quanti sono i frammenti *distinti* che compongono l'armonica.

4.2 ARMONICHE PER LA VARIETÀ DI STIEFEL ED AUTOVALORI

In questa sezione applichiamo i risultati che abbiamo ricavato in generale alla varietà quoziente $V_{5,2}$. A questo proposito dobbiamo decomporre le rappresentazioni di $SO(7)$, che corrispondono ai campi della teoria, in rappresentazioni di $SO(3) \times SO(2)_H \equiv H$.

In questa tesi siamo interessati solamente allo spettro bosonico, in particolare, calcolando gli autovalori per l'armonica $Y_{[abc]}$ è possibile determinare tutti gli stati mancanti, facendo questi parte necessariamente di multipletti che contengono il campo π associato proprio alle 3-forma. Prima di passare allo studio dell'armonica $Y_{[abc]}$, illustriamo l'analoga procedura per l'armonica scalare e per l'armonica vettoriale. Vedremo infatti che tutti gli autovalori possono essere espressi in termini dell'autovalore dell'armonica scalare.

Seguono le decomposizioni delle varie rappresentazioni di $SO(7)$ (*branching rules*) a partire dalla rappresentazione fondamentale, cioè vettoriale, $SO(7) \rightarrow SO(3) \times SO(2)_H$:

- vettore Y_a :

$$7 \rightarrow 3_+ + 3_- + 1_0, \quad (4.22)$$

- 2-forma $Y_{[ab]}$:

$$21 = (7 \times 7)_A \rightarrow 3_{++} + 3_{--} + 3_+ + 3_- + 5_0 + 3_0 + 1_0, \quad (4.23)$$

- 3-forma $Y_{[abc]}$:

$$35 = (7 \times 7 \times 7)_A \rightarrow 1_{+++} + 5_+ + 3_+ + 1_+ + 3_{++} + 1_{---} + 5_- + 3_- + 1_- + 3_{--} + 5_0 + 3_0 + 1_0, \quad (4.24)$$

- 2-forma simmetrica $Y_{(ab)}$:

$$27 = (7 \times 7)_S \rightarrow 5_{++} + 1_{++} + 5_{--} + 1_{--} + 3_+ + 3_- + 5_0 + 3_0 + 1_0. \quad (4.25)$$

Il passaggio successivo consiste nel costruire direttamente le armoniche irriducibili associate ai frammenti che compaiono nelle (4.22), (4.23), (4.24), (4.25), relativi alla decomposizione delle varie rappresentazioni di $SO(7)$. Seguendo la trattazione della sezione 4.1, scriviamo dapprima le rappresentazioni di $SO(5) \times SO(2)_R \simeq SO(5) \times U(1)_R$ utilizzando il formalismo dei tableaux di Young, ovvero:

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \dots & & \\ \hline & \dots & & \\ \hline \end{array}}_M \otimes \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \dots & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}}_N \otimes e^{iQ\phi},$$

dove $M, N \in \mathbb{N}$ e $Q \in \mathbb{Z}$, per poi decomporle in rappresentazioni irriducibili del sottogruppo $SO(3) \times SO(2)_H$.

4.2.1 *Armonica Scalare*

L'armonica scalare, essendo un singoletto di $SO(7)$ è anche un singoletto di $SO(3) \times SO(2)_H$. Il frammento corrispondente alla rappresentazione 1_0 è

$$Y_0^{\{M,N,Q\}} = \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline - \\ \hline \end{array}^m \begin{array}{|c|c|} \hline + & - \\ \hline \end{array}^{k/2} \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline \end{array}^n e^{-in\phi}, \quad (4.26)$$

dove indichiamo con

$$\begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} + i \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array}, \quad (4.27)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline - \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} - i \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad (4.28)$$

le combinazioni a carica definita. Dalla (4.26) vediamo anche che i numeri quantici di $SO(5) \times U(1)_R$ sono

$$M = m, \quad (4.29)$$

$$N = k + n, \quad (4.30)$$

$$Q = n. \quad (4.31)$$

L'operatore che agisce sull'armonica scalare è particolarmente semplice essendo dato unicamente da²:

$$D^a D_a \equiv \square = -r^2(T^a T_a + T^\alpha T_\alpha) - r_7^2 T^7 T_7, \quad (4.32)$$

che, utilizzando i valori dei riscalamanti dati da (2.52), diventa

$$\square = -\frac{32}{3} e^2 (T_a T^a + T_\alpha T^\alpha) - \frac{16}{9} e^2 T_7 T^7. \quad (4.33)$$

Per calcolare l'azione di (4.33) conviene riscrivere il frammento (4.26) utilizzando le relazioni

$$\begin{array}{|c|c|} \hline + & - \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array}, \quad (4.34)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline - \\ \hline \end{array} = -2i \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}, \quad (4.35)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline + \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} + i \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad (4.36)$$

che si ricavano facilmente dalle (4.27) e (4.28), ottenendo così, a meno di fattori irrilevanti,

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}^m (\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array})^n (\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline + \\ \hline i \\ \hline 5 \\ \hline \end{array})^k e^{-ik\phi}. \quad (4.37)$$

² In questo capitolo definiamo per convenienza $\square \equiv (D^a D_a)_{\text{scalare}}$, cioè tramite la (4.33).

L'azione dei generatori del coset $\{J_{i4} = T_a, J_{i5} = T_\alpha, J_{45} - U = T_7\}$ su un tableau è data dalla regola di Leibniz per i singoli blocchetti. Sfruttando le identità

$$J_{i4} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}, \quad (4.38)$$

$$J_{i4} \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} = 2 \begin{array}{|c|c|} \hline i & 4 \\ \hline \end{array}, \quad (4.39)$$

$$J_{i4} \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \end{array} = -\delta_{ij} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}, \quad (4.40)$$

$$J_{45} \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline \end{array}, \quad (4.41)$$

$$J_{45} \begin{array}{|c|} \hline - \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{|c|} \hline - \\ \hline \end{array}, \quad (4.42)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i & i \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array} \quad (4.43)$$

(analoghe per J_{i5}), e le proprietà di simmetria dei tableaux, abbiamo:

$$\begin{aligned} J_{i4} 1_0 &= m \begin{array}{|c|c|} \hline i & 4 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array}^{m-1} (\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array})^n (\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} + i \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array})^k e^{-ik\phi} \\ &+ 2n \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}^m \begin{array}{|c|c|} \hline i & 4 \\ \hline \end{array} (\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array})^{n-1} (\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} + i \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array})^k e^{-ik\phi} \\ &+ k \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}^m (\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array})^n \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array} (\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} + i \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array})^{k-1} e^{-ik\phi}, \quad (4.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{i5} 1_0 &= m \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline i & 5 \\ \hline \end{array}^{m-1} (\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array})^n (\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} + i \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array})^k e^{-ik\phi} \\ &+ 2n \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}^m \begin{array}{|c|c|} \hline i & 5 \\ \hline \end{array} (\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array})^{n-1} (\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} + i \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array})^k e^{-ik\phi} \\ &+ ik \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}^m (\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array})^n \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array} (\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} + i \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array})^{k-1} e^{-ik\phi}, \quad (4.45) \end{aligned}$$

e

$$(J_{45} - U) 1_0 = 2ik \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}^m (\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array})^n (\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} + i \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array})^k e^{-ik\phi}. \quad (4.46)$$

Da cui seguono

$$(J_{45} - U)^2 1_0 = -4k^2 \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}^m (\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array})^n (\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} + i \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array})^k e^{-ik\phi}, \quad (4.47)$$

e

$$\begin{aligned}
 J_{i4}^2 1_0 &= -3m \frac{4}{5}^m (\boxed{44} + \boxed{55})^n (\boxed{4} + i\boxed{5})^k e^{-ik\phi} \\
 &\quad + m(m-1) \frac{i}{5} \frac{i}{5} \frac{4}{5}^{m-2} (\boxed{44} + \boxed{55})^n (\boxed{4} + i\boxed{5})^k e^{-ik\phi} \\
 &\quad + 2nm \frac{i}{5} \frac{4}{5}^{m-1} \boxed{i4} (\boxed{44} + \boxed{55})^{n-1} (\boxed{4} + i\boxed{5})^k e^{-ik\phi} \\
 &\quad \quad + km \frac{i}{5} \frac{4}{5}^{m-1} \boxed{i4} (\boxed{44} + \boxed{55})^n \boxed{i} (\boxed{4} + i\boxed{5})^{k-1} e^{-ik\phi} \\
 &\quad + 2nm \frac{i}{5} \frac{4}{5}^{m-1} \boxed{i4} (\boxed{44} + \boxed{55})^{n-1} (\boxed{4} + i\boxed{5})^k e^{-ik\phi} \\
 &\quad \quad - 6n \frac{4}{5}^m \boxed{44} (\boxed{44} + \boxed{55})^{n-1} (\boxed{4} + i\boxed{5})^k e^{-ik\phi} \\
 &\quad \quad \quad - 2n \frac{4}{5}^m (\boxed{44} + \boxed{55})^n (\boxed{4} + i\boxed{5})^k e^{-ik\phi} \\
 &\quad + 4n(n-1) \frac{4}{5}^m \boxed{i4i4} (\boxed{44} + \boxed{55})^{n-2} (\boxed{4} + i\boxed{5})^k e^{-ik\phi} \\
 &\quad \quad + 2nk \frac{4}{5}^m (\boxed{44} + \boxed{55})^{n-1} \boxed{i} (\boxed{4} + i\boxed{5})^{k-1} e^{-ik\phi} \\
 &\quad \quad \quad + km \frac{i}{5} \frac{4}{5}^{m-1} (\boxed{44} + \boxed{55})^n \boxed{i} (\boxed{4} + i\boxed{5})^{k-1} e^{-ik\phi} \\
 &\quad + 2kn \frac{4}{5}^m \boxed{i4} (\boxed{44} + \boxed{55})^{n-1} \boxed{i} (\boxed{4} + i\boxed{5})^{k-1} e^{-ik\phi} \\
 &\quad \quad - 3k \frac{4}{5}^m (\boxed{44} + \boxed{55})^n \boxed{4} (\boxed{4} + i\boxed{5})^{k-1} e^{-ik\phi} \\
 &\quad \quad \quad + k(k-1) \frac{4}{5}^m (\boxed{44} + \boxed{55})^n \boxed{ii} (\boxed{4} + i\boxed{5})^{k-2} e^{-ik\phi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -(2m + m^2) \frac{4}{5}^m (\boxed{4\ 4} + \boxed{5\ 5})^n \boxed{4} + i \boxed{5}^k e^{-ik\phi} \\
 &\quad - (4nm + 4n + 4n^2) \frac{4}{5}^m \boxed{4\ 4} (\boxed{4\ 4} + \boxed{5\ 5})^{n-1} (\boxed{4} + i \boxed{5})^k e^{-ik\phi} \\
 &\quad - (2km + 4nk + 3k) \frac{4}{5}^m (\boxed{4\ 4} + \boxed{5\ 5})^n \boxed{4} (\boxed{4} + i \boxed{5})^{k-1} e^{-ik\phi} \\
 &\quad - k(k-1) \frac{4}{5}^m (\boxed{4\ 4} + \boxed{5\ 5})^{n+1} (\boxed{4} + i \boxed{5})^{k-2} e^{-ik\phi}. \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

Sommiamo ora il risultato per $J_{i5}^2 1_0$:

$$\begin{aligned}
 (J_{i4}^2 + J_{i5}^2) 1_0 &= -(4m + 2m^2 + 4nm + 6n + 4n^2 + 2km + 4nk + 3k) \\
 &\quad \frac{4}{5}^m (\boxed{4\ 4} + \boxed{5\ 5})^n (\boxed{4} + i \boxed{5})^k e^{-ik\phi}. \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

Introducendo i parametri di riscaldamento come in (4.33), possiamo infine scrivere

$$\square Y_0 = e^2 H_0(M, N, Q) Y_0, \quad (4.50)$$

dove

$$H_0(M, N, Q) = \frac{32}{9} (6M^2 + 12M + 6MN + 9N + 3N^2 - Q^2), \quad (4.51)$$

espresso in termini dei numeri quantici di $SO(5) \times U(1)_R$.

Dalle (3.97) vediamo che $H_0(M, N, Q) = M_{(0)3} \equiv m_h^2$, di conseguenza troviamo la massa per il campo a spin 2 h e per gli scalari S e Σ , per i quali, utilizzando le (3.97), abbiamo

$$m_S^2 = H_0 + 176 - 24\sqrt{H_0 + 36}, \quad (4.52)$$

e

$$m_\Sigma^2 = H_0 + 176 + 24\sqrt{H_0 + 36}. \quad (4.53)$$

4.2.2 Armonica Vettoriale

L'armonica vettoriale è data da

$$Y_a^{\{v\}} = \begin{pmatrix} 3_+ \\ 3_- \\ 1_0 \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

I frammenti relativi alla (4.54) non possono stare tutti nella stessa rappresentazione di $SO(5) \times U(1)_R$, in altri termini non esiste una scelta della terna (M, N, Q) che permetta di scriverli tutti. In particolare abbiamo due *serie* distinte.

Serie I

Per la prima serie scriviamo i seguenti frammenti (la 3_- è la complessa coniugata della 3_+):

$$3_+ \quad A = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}^{m+1} (\boxed{4\ 4} + \boxed{5\ 5})^{k/2} \boxed{+}^{n+2} \boxed{i} e^{-i(n+1)\phi}, \quad (4.55)$$

$$B = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}^{m+1} (\boxed{4\ 4} + \boxed{5\ 5})^{k/2+1} \boxed{-}^n \boxed{i} e^{+i(n+1)\phi}, \quad (4.56)$$

$$C = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}^m (\boxed{4\ 4} + \boxed{5\ 5})^{k/2+1} \boxed{+}^{n+1} e^{-i(n+1)\phi}, \quad (4.57)$$

$$D = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}^m \frac{\boxed{i}}{\boxed{+}} (\boxed{4\ 4} + \boxed{5\ 5})^{k/2+1} \boxed{-}^{n+1} e^{+i(n+1)\phi}, \quad (4.58)$$

$$1_0 \quad 7 = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}^{m+1} (\boxed{4\ 4} + \boxed{5\ 5})^{k/2+1} \boxed{+}^{n+1} e^{-i(n+1)\phi}, \quad (4.59)$$

dove abbiamo fissato la rappresentazione di $SO(5) \times U(1)_R$:

$$M = m + 1, \quad (4.60)$$

$$N = k + n + 3, \quad (4.61)$$

$$Q = n + 1. \quad (4.62)$$

Notiamo che (4.60) è la scelta più generale in modo tale che siano presenti tutti i frammenti ammessi nella serie, infatti, se ad esempio ponessimo $M = 0$, avremmo soltanto i frammenti A e B , con una conseguente riduzione degli stati.

Serie II

La seconda serie che possiamo scrivere risiede invece nella rappresentazione irriducibile di $SO(5) \times U(1)_R$ data da:

$$M = m + 1, \quad (4.63)$$

$$N = k + n + 3, \quad (4.64)$$

$$Q = n + 2. \quad (4.65)$$

In particolare la seconda serie non ha il frammento relativo alla rappresentazione 1_0 , i restanti sono

$$3_+ \quad A' = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}^m \frac{\boxed{j}}{\boxed{k}} (\boxed{4\ 4} + \boxed{5\ 5})^{k/2} \boxed{+}^{n+3} e^{-i(n+2)\phi} \varepsilon^{ijk}, \quad (4.66)$$

$$B' = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}^m \frac{\boxed{j}}{\boxed{k}} (\boxed{4\ 4} + \boxed{5\ 5})^{k/2+1} \boxed{-}^{n+1} e^{+i(n+2)\phi} \varepsilon^{ijk}. \quad (4.67)$$

Giacché l'analisi dell'armonica vettoriale ci serve come esempio (essendo il risultato già noto), ci limitiamo a calcolare gli autovalori solamente per la prima serie.

Operatore

L'operatore differenziale sulla 1-forma è dato dalla (3.89):

$$2D^b D_{[b} Y_a]^{v\}} = (D^b D_b + 24e^2) Y_a^{v\}. \quad (4.68)$$

Dalle componenti della connessione, che abbiamo calcolato per la varietà di Stiefel nel capitolo 2 (equazioni (2.55)), ricaviamo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{a\alpha} &= \frac{2}{3} e \delta_\alpha^a V^7, \\ \mathcal{M}^{a7} &= 2e V^\alpha \delta_\alpha^a, \\ \mathcal{M}^{\alpha 7} &= -2e V^a \delta_a^\alpha, \\ \mathcal{M}^{ab} &= \mathcal{M}^{\alpha\beta} = 0. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Sicché la derivata covariante si scrive

$$\begin{aligned} D_a &= \left(-4\sqrt{\frac{2}{3}} T_a - 4\delta_a^\alpha t_{\alpha 7} \right) e, \\ D_\alpha &= \left(-4\sqrt{\frac{2}{3}} T_\alpha + 4\delta_\alpha^a t_{a 7} \right) e, \\ D_7 &= \left(\frac{4}{3} T_7 + \frac{4}{3} \delta^{a\alpha} t_{a\alpha} \right) e, \end{aligned} \quad (4.70)$$

dove, nella rappresentazione vettoriale,

$$(t_{AB})^{CD} = -\delta_{AB}^{CD}. \quad (4.71)$$

Possiamo quindi scrivere l'operatore (4.68) che agisce sull'armonica vettoriale come un matrice (di operatori)³:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} \square + 28 + \frac{4}{9} & & & \frac{16}{9} T_7 & & & -16\sqrt{\frac{2}{3}} T_4 \\ & \square + 28 + \frac{4}{9} & & & \frac{16}{9} T_7 & & -16\sqrt{\frac{2}{3}} T_5 \\ & & \square + 28 + \frac{4}{9} & & & \frac{16}{9} T_7 & -16\sqrt{\frac{2}{3}} T_6 \\ \hline -\frac{16}{9} T_7 & & & \square + 28 + \frac{4}{9} & & & 16\sqrt{\frac{2}{3}} T_1 \\ & -\frac{16}{9} T_7 & & & \square + 28 + \frac{4}{9} & & 16\sqrt{\frac{2}{3}} T_1 \\ & & -\frac{16}{9} T_7 & & & \square + 28 + \frac{4}{9} & 16\sqrt{\frac{2}{3}} T_1 \\ \hline 16\sqrt{\frac{2}{3}} T_4 & 16\sqrt{\frac{2}{3}} T_5 & 16\sqrt{\frac{2}{3}} T_6 & -16\sqrt{\frac{2}{3}} T_1 & -16\sqrt{\frac{2}{3}} T_2 & -16\sqrt{\frac{2}{3}} T_3 & \square + 48 \end{array} \right). \quad (4.72)$$

³ Da qui in poi poniamo $e = 1$

Dato che le armoniche sono state scritte in una base complessa, utilizziamo la matrice

$$U = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_3 & i\mathbb{1}_3 & 0 \\ \mathbb{1}_3 & -i\mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

per riscrivere (4.72) nella medesima base:

$$\begin{pmatrix} \square + 28 + \frac{4}{9} - i\frac{16}{9}T_7 & -16\sqrt{\frac{2}{3}}(T_\alpha\delta_a^\alpha - iT_b\delta_a^b) \\ & \square + 28 + \frac{4}{9} + i\frac{16}{9}T_7 & -16\sqrt{\frac{2}{3}}(iT_a\delta_\alpha^a + T_\beta\delta_\alpha^b) \\ 8\sqrt{\frac{2}{3}}(T_\alpha\delta_b^\alpha + iT_a\delta_b^a) & -8\sqrt{\frac{2}{3}}(iT_a\delta_\beta^a - T_\alpha\delta_\beta^\alpha) & \square + 48 \end{pmatrix}. \quad (4.74)$$

Abbiamo visto che diversi frammenti corrispondono alla rappresentazione 3_+ , pertanto l'armonica vettoriale sarà una sovrapposizione di questi stati, dato che gli operatori, in generale, mescolano i vari termini. Conviene quindi calcolare l'azione della (4.74) sui tutti i frammenti che compongono l'armonica Y_a e poi costruire una matrice M_{ij} con $i = A, B, C, D, A^*, B^*, C^*, D^*, 7, 7^*$, di cui calcolare gli autovalori. Riportiamo in quanto segue il calcolo degli elementi di M .

Tableaulogia

Già nel caso più semplice, ovvero l'armonica scalare, il calcolo degli autovalori delle armoniche risulta laborioso. Di conseguenza, da qui in poi nei calcoli adatteremo la notazione più compatta:

$$\begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline - \\ \hline \end{array}^m \begin{array}{|c|c|} \hline + & - \\ \hline \end{array}^{k/2} \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline \end{array}^n \equiv \{m, k/2, n\}, \quad (4.75)$$

lasciando sottinteso l'esponentiale quando non necessario, ed inserendo di volta in volta i blocchetti che non vengono automaticamente inclusi in questa notazione, come sarà chiaro a breve.

Si tratta ora essenzialmente di calcolare l'azione dei generatori $\{J_{i4}, J_{i5}, J_{45} - U\}$ e dei loro quadrati sui frammenti corrispondenti alla rappresentazione 3_+ , per la 1_0 infatti utilizziamo i risultati dell'armonica scalare. Procediamo dunque in maniera sistematica.

$$\begin{aligned} J_{i4}A &= (m+1) \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \{m, k/2, n+2\} + k \begin{array}{|c|c|c|} \hline i & 4 & j \\ \hline \end{array} \{m+1, k/2-1, n+2\} \\ &+ (n+2) \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline \end{array} \{m+1, k/2, n+1\} - \delta_{ij} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \{m+1, k/2, n+2\}, \quad (4.76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{i4}B &= (m+1) \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \{m, k/2+1, n\} + (k+2) \begin{array}{|c|c|c|} \hline i & 4 & j \\ \hline \end{array} \{m+1, k/2, n\} \\ &+ n \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline \end{array} \{m+1, k/2, n-1\} - \delta_{ij} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \{m+1, k/2+1, n\}, \quad (4.77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{i4}C &= m \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline 5 & + \\ \hline \end{array} \{m-1, k/2+1, n+1\} - \delta_{ij} \{m+1, k/2+1, n+1\} \\
 &+ \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline j \\ \hline \end{array} \{m, k/2+1, n+1\} + (k+2) \begin{array}{|c|c|c|} \hline j & i & 4 \\ \hline + & & \\ \hline \end{array} \{m, k/2, n+1\} \\
 &+ (n+1) \begin{array}{|c|c|} \hline j & i \\ \hline + & \\ \hline \end{array} \{m, k/2+1, n\}, \quad (4.78)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{i4}D &= m \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline 5 & + \\ \hline \end{array} \{m-1, k/2+1, n+1\} - \delta_{ij} \{m+1, k/2+1, n+1\} \\
 &+ \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline j \\ \hline \end{array} \{m, k/2+1, n+1\} + (k+2) \begin{array}{|c|c|c|} \hline j & i & 4 \\ \hline + & & \\ \hline \end{array} \{m, k/2, n+1\} \\
 &+ (n+1) \begin{array}{|c|c|} \hline j & i \\ \hline + & \\ \hline \end{array} \{m, k/2+1, n\}. \quad (4.79)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{i5}A &= (m+1) \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & j \\ \hline i & \\ \hline \end{array} \{m, k/2, n+2\} + k \begin{array}{|c|c|c|} \hline i & 5 & j \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \{m+1, k/2-1, n+2\} \\
 &+ i(n+2) \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline & \\ \hline \end{array} \{m+1, k/2, n+1\} - \delta_{ij} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \{m+1, k/2, n+2\}, \quad (4.80)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{i5}B &= (m+1) \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & j \\ \hline i & \\ \hline \end{array} \{m, k/2+1, n\} + (k+2) \begin{array}{|c|c|c|} \hline i & 5 & j \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \{m+1, k/2, n\} \\
 &- in \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline & \\ \hline \end{array} \{m+1, k/2, n-1\} - \delta_{ij} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \{m+1, k/2+1, n\}, \quad (4.81)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{i5}C &= m \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & j \\ \hline i & + \\ \hline \end{array} \{m-1, k/2+1, n+1\} + \delta_{ij} \{m+1, k/2+1, n+1\} \\
 &+ i \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline j \\ \hline \end{array} \{m, k/2+1, n+1\} + (k+2) \begin{array}{|c|c|c|} \hline j & i & 5 \\ \hline + & & \\ \hline \end{array} \{m, k/2, n+1\} \\
 &+ i(n+1) \begin{array}{|c|c|} \hline j & i \\ \hline + & \\ \hline \end{array} \{m, k/2+1, n\}, \quad (4.82)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{i5}D &= m \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & j \\ \hline i & + \\ \hline \end{array} \{m-1, k/2+1, n+1\} + \delta_{ij} \{m+1, k/2+1, n+1\} \\
 &+ i \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline j \\ \hline \end{array} \{m, k/2+1, n+1\} + (k+2) \begin{array}{|c|c|c|} \hline j & i & 5 \\ \hline + & & \\ \hline \end{array} \{m, k/2, n+1\} \\
 &- i(n+1) \begin{array}{|c|c|} \hline j & i \\ \hline + & \\ \hline \end{array} \{m, k/2+1, n\}. \quad (4.83)
 \end{aligned}$$

$$(J_{45} - U)A = i(2n + 3)A, \quad (4.84)$$

$$(J_{45} - U)B = -i(2n + 1)B, \quad (4.85)$$

$$(J_{45} - U)C = i(2n + 3)C, \quad (4.86)$$

$$(J_{45} - U)D = -i(2n + 1)D. \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} J_{i4}^2 A = & -[(m+3)(m+1) + k + 1] \overline{j} \{m+1, k/2, n+2\} \\ & - [2(m+1) + (k+2) + 5] k \overline{4} \overline{4} \overline{j} \{m+1, k/2-1, n+2\} \\ & - [2(m+1) + 2k + 5] (n+2) \overline{4} \overline{j} \{m+1, k/2, n+1\} \\ & - (n+2)(n+1) \overline{j} \{m+1, k/2+1, n\} \\ & - 2(m+1) \overline{j} \overline{4} \overline{5} \{m, k/2, n+2\}, \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} J_{i4}^2 B = & -[(m+3)(m+1) + (k+2) + 1] \overline{j} \{m+1, k/2+1, n\} \\ & - [2(m+1) + k + 5] (k+2) \overline{4} \overline{4} \overline{j} \{m+1, k/2, n\} \\ & - [2(m+1) + 2(k+2) + 5] n \overline{4} \overline{j} \{m+1, k/2+1, n-1\} \\ & - n(n-1) \overline{j} \{m+1, k/2+2, n-2\} \\ & - 2(m+1) \overline{j} \overline{4} \overline{5} \{m, k/2+1, n\}, \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} J_{i4}^2 C = & -[m(m-1) + 3m + (k+2)] \overline{j} \overline{+} \{m, k/2+1, n+1\} \\ & - i(2m+1) \overline{j} \overline{5} \{m, k/2+1, n+1\} - 2(m+1) \overline{j} \overline{4} \{m, k/2+1, n+1\} \\ & - (2m+k+3)(k+2) \overline{j} \overline{4} \overline{4} \overline{+} \{m, k/2, n+1\} = \end{aligned}$$

Abbiamo infine

$$\square A = \left[\frac{32}{3}(2m^2 + 24 + 14m + k^2 + 11k + 2km + 2mn + 2kn + 7n) + \frac{16}{9}(2n + 3)^2 \right] A, \quad (4.99)$$

$$\square B = \left[\frac{32}{3}(2m^2 + 28 + 14m + k^2 + 11k + 2km + 2mn + 2kn + 11n) + \frac{16}{9}(2n + 1)^2 \right] B, \quad (4.100)$$

$$\square C = \left[\frac{32}{3}(2m^2 + 24 + 14m + k^2 + 11k + 2km + 2mn + 2kn + 7n) + \frac{16}{9}(2n + 3)^2 \right] C, \quad (4.101)$$

$$\square D = \left[\frac{32}{3}(2m^2 + 28 + 14m + k^2 + 11k + 2km + 2mn + 2kn + 11n) + \frac{16}{9}(2n + 1)^2 \right] D, \quad (4.102)$$

$$\square 7 = \left[\frac{32}{3}(2m^2 + 29 + 14m + k^2 + 11k + 2km + 2mn + 2kn + 9n) + \frac{16}{9}(2n + 3)^2 \right] 7. \quad (4.103)$$

Autovalori e Masse Corrispondenti

Con i risultati ottenuti possiamo ora costruire la matrice M :

$$M_{AA} = \frac{32}{3} (k^2 + 2km + 2kn + 11k + 2m^2 + 2mn + 14m + 7n + 24) + \frac{16}{9}(2n + 3)^2 + \frac{16}{9}(2n + 3) + \frac{4}{9} + 24 + 4, \quad (4.104)$$

$$M_{BB} = \frac{32}{3} (k^2 + 2km + 2kn + 11k + 2m^2 + 2mn + 14m + 11n + 28) + \frac{16}{9}(2n + 1)^2 - \frac{16}{9}(2n + 1) + \frac{4}{9} + 24 + 4, \quad (4.105)$$

$$M_{CC} = \frac{32}{3} (k^2 + 2km + 2kn + 11k + 2m^2 + 2mn + 14m + 7n + 24) + \frac{16}{9}(2n + 3)^2 + \frac{16}{9}(2n + 3) + \frac{4}{9} + 24 + 4, \quad (4.106)$$

$$M_{DD} = \frac{32}{3} (k^2 + 2km + 2kn + 11k + 2m^2 + 2mn + 14m + 11n + 28) + \frac{16}{9}(2n + 1)^2 - \frac{16}{9}(2n + 1) + \frac{4}{9} + 24 + 4, \quad (4.107)$$

$$M_{77} = \frac{32}{3} (k^2 + 2km + 2kn + 11k + 2m^2 + 2mn + 14m + 9n + 29) + \frac{16}{9} (2n + 2)^2 + 48, \quad (4.108)$$

$$M_{7^*7^*} = \frac{32}{3} (k^2 + 2km + 2kn + 11k + 2m^2 + 2mn + 14m + 9n + 29) + \frac{16}{9} (2n + 2)^2 + 48, \quad (4.109)$$

$$M_{A7} = 16\sqrt{\frac{2}{3}}i(k + 2), \quad (4.110)$$

$$M_{7A} = -8i\sqrt{\frac{2}{3}}(k + m + 2n + 8), \quad (4.111)$$

$$M_{B7^*} = 16\sqrt{\frac{2}{3}}i(k + 2n + 4), \quad (4.112)$$

$$M_{7^*B} = -8i\sqrt{\frac{2}{3}}(k + m + 6), \quad (4.113)$$

$$M_{C7} = 16\sqrt{\frac{2}{3}}(m + 1), \quad (4.114)$$

$$M_{7C} = 8\sqrt{\frac{2}{3}}(k + 2m + 2n + 10), \quad (4.115)$$

$$M_{D7^*} = 16\sqrt{\frac{2}{3}}(m + 1), \quad (4.116)$$

$$M_{7^*D} = 8\sqrt{\frac{2}{3}}(k + 2m + 8). \quad (4.117)$$

Il calcolo degli autovalori per la matrice così costruita fornisce il seguente risultato

$$\lambda_1 = \frac{32}{9} (6M^2 + 9N + 3N^2 + 6M(2 + N) - Q^2) = H_0, \quad (4.118)$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{32}{9} (6M^2 + 9N + 3N^2 + 6M(2 + N) - Q(Q \pm 3)) = H_0 \mp \frac{32}{3}Q, \quad (4.119)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{4,5} &= \frac{8}{9} (27 + 24M^2 + 36N + 12N^2 + 24M(2 + N) - 4Q^2 \\ &\quad \pm 3\sqrt{81 + 48M^2 + 72N + 24N^2 + 48M(2 + N) - 8Q^2}) \\ &= H_0 + 24 \pm \sqrt{H_0 + 36}. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Notiamo che l'armonica vettoriale che abbiamo scritto non è trasversa (infatti non abbiamo imposto la condizione $D^a Y_a = 0$), pertanto in realtà si ha

$$(\square + 24)Y_a = M_{(1)(0)^2}Y_a + D_a D^b Y_b. \quad (4.121)$$

Consideriamo allora un'armonica longitudinale, ovvero $Y_b = D_b Y$. Il secondo termine a destra della (4.121) diventa

$$D_a D^b D_b Y = D_a \square Y = M_{(0)^3} D_a Y = M_{(0)^3} Y_a. \quad (4.122)$$

Dunque fra gli autovalori dell'operatore che abbiamo diagonalizzato troviamo quello dell'armonica scalare: λ_1 , relativo al grado di libertà longitudinale, che possiamo scartare.

I restanti autovalori forniscono le masse per i vettori A e W , che inseriamo nei supermultipletti, per ogni autovalore si otterrà un valore per la massa di A e uno per la massa di W . Partiamo dal multipletto del gravitone (tabella 2 dell'appendice A), e fissiamo la massa dello stato a spin 2 che è individuata univocamente dall'autovalore $M_{(0)3}$:

$$m_h^2 = H_0 = 16(E_0 + 1)(E_0 - 2), \quad (4.123)$$

da cui otteniamo

$$E_0 = \frac{1}{4}(2 \pm \sqrt{H_0 + 36}), \quad (4.124)$$

che, sostituito nelle espressioni (tabella 2):

$$\begin{aligned} m_W^2 &= 16E_0(E_0 + 1), \\ m_A^2 &= 16(E_0 - 1)(E_0 - 2), \end{aligned} \quad (4.125)$$

dà

$$m_{A/W}^2 = H_0 + 48 \mp 8\sqrt{H_0 + 36}. \quad (4.126)$$

Confrontando la (4.126) con le equazioni per le masse di A e W in (3.97):

$$m_A^2 = M_{(1)(0)^2} + 48 - 12\sqrt{M_{(1)(0)^2} + 16}, \quad (4.127)$$

$$m_W^2 = M_{(1)(0)^2} + 48 + 12\sqrt{M_{(1)(0)^2} + 16}, \quad (4.128)$$

in cui sostituiamo $M_{(1)(0)^2}$ con gli autovalori λ_4 e λ_5 dati dalla (4.120), abbiamo

$$m_A^2(\lambda_4) = H_0 + 48 - 8\sqrt{H_0 + 36}, \quad (4.129)$$

$$m_W^2(\lambda_5) = H_0 + 48 + 8\sqrt{H_0 + 36}. \quad (4.130)$$

Dall'analisi svolta in [5] e dalle tabelle 3, 4 ci aspettiamo

$$m_{A/W}^2 = H_0 + 56 \pm 12\sqrt{H_0 + 24} \quad (4.131)$$

per la massa dei vettori nei multipletti dei gravitini, in cui $y_0 = \frac{2}{3}Q$. Prendiamo quindi gli autovalori λ_2 e λ_3 valutati in $Q \pm \frac{3}{2}$ che corrisponde a $y_0 \pm 1$ e, sostituendo in (3.97), troviamo

$$m_{A/W}^2(\lambda_3) = H_0 + 56 \mp 12\sqrt{H_0 + 24} \quad y_0 + 1, \quad (4.132)$$

$$m_{A/W}^2(\lambda_2) = H_0 + 56 \mp 12\sqrt{H_0 + 24} \quad y_0 - 1. \quad (4.133)$$

I restanti valori delle masse sono

$$m_A^2(\lambda_5) = H_0 + 96 - 16\sqrt{H_0 + 36}, \quad (4.134)$$

$$m_W^2(\lambda_4) = H_0 + 96 + 16\sqrt{H_0 + 36}, \quad (4.135)$$

che quindi definiscono le masse per gli stati relativi ai campi A e W nei multipletti vettoriali.

Per concludere, è bene osservare che, in linea di principio, gli autovalori relativi alla seconda serie (che qui non è stata presa in esame) possono fornire ulteriori stati, che, dall'analisi appena fatta, possono definire nuovi multipletti vettoriali, essendo gli altri multipletti già completi. Il calcolo diretto, effettuato in [5], mostra tuttavia che non ci sono autovalori distinti da quelli già trovati nella prima serie.

4.2.3 Armonica della 3-forma

Anche in questo caso si presentano due serie che riportiamo per esteso. Nei tableaux che seguono si intende, con abuso di notazione,

$$\boxed{i \mid j} \equiv \boxed{i \mid j} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\boxed{+ \mid -}, \quad (4.136)$$

giacché la rappresentazione 5 di $SO(3)$ è simmetrica e a traccia nulla. Nelle serie dei frammenti e successivamente ometteremo i complessi coniugati.

Serie I

La rappresentazione di $SO(5) \times U(1)_R$ è

$$\{M = m + 2, \quad N = k + n + 6, \quad Q = n + 3\} \quad (4.137)$$

$$5_+ \quad A = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+2} \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2} \boxed{+}^{n+4} e^{-i(n+3)\phi}, \quad (4.138)$$

$$B = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+2} \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2+1} \boxed{-}^{n+2} e^{i(n+3)\phi}, \quad (4.139)$$

$$C = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{+} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2+1} \boxed{+}^{n+3} e^{-i(n+3)\phi}, \quad (4.140)$$

$$D = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{+} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2+1} \boxed{-}^{n+3} e^{i(n+3)\phi}, \quad (4.141)$$

$$E = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^m \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2+1} \boxed{+}^{n+4} e^{-i(n+3)\phi}, \quad (4.142)$$

$$F = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^m \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2+2} \boxed{-}^{n+2} e^{i(n+3)\phi}, \quad (4.143)$$

$$G = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^m \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{+} \quad \boxed{+} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2+2} \boxed{+}^{n+2} e^{-i(n+3)\phi}, \quad (4.144)$$

$$H = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^m \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{-} \quad \boxed{-} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2+3} \boxed{-}^n e^{i(n+3)\phi}, \quad (4.145)$$

$$5_0 \quad A = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{k} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2+1} \boxed{+}^{n+3} e^{-i(n+3)\phi}, \quad (4.146)$$

$$B = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{k} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2+1} \boxed{-}^{n+3} e^{i(n+3)\phi}, \quad (4.147)$$

$$C = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^m \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{k} \quad \boxed{+} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2+2} \boxed{+}^{n+2} e^{-i(n+3)\phi}, \quad (4.148)$$

$$D = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^m \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{k} \quad \boxed{+} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2+1} \boxed{-}^{n+4} e^{i(n+3)\phi}, \quad (4.149)$$

$$3_{++} \quad A = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+2} \begin{array}{c} \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2} \boxed{+}^{n+5} \boxed{i} e^{-i(n+3)\phi}, \quad (4.150)$$

$$B = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+2} \begin{array}{c} \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2+2} \boxed{-}^{n+1} \boxed{i} e^{i(n+3)\phi}, \quad (4.151)$$

$$C = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{i} \\ \boxed{+} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2+1} \boxed{+}^{n+4} e^{-i(n+3)\phi}, \quad (4.152)$$

$$D = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{i} \\ \boxed{+} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \quad \boxed{-} \end{array}^{k/2+2} \boxed{-}^{n+2} e^{i(n+3)\phi}, \quad (4.153)$$

$$3_+ \quad A = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{j} \\ \boxed{k} \end{array} \boxed{+} \boxed{-}^{k/2+1} \boxed{+}^{n+4} \boxed{i} e^{-i(n+3)\phi} \epsilon^{ijk}, \quad (4.154)$$

$$B = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{j} \\ \boxed{k} \end{array} \boxed{+} \boxed{-}^{k/2+2} \boxed{-}^{n+2} \boxed{i} e^{i(n+3)\phi} \epsilon^{ijk}, \quad (4.155)$$

$$3_0 \quad A = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+2} \boxed{+} \boxed{-}^{k/2+1} \boxed{+}^{n+3} \boxed{i} e^{-i(n+3)\phi}, \quad (4.156)$$

$$B = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{i} \\ \boxed{+} \end{array} \boxed{+} \boxed{-}^{k/2+2} \boxed{+}^{n+2} e^{-i(n+3)\phi}, \quad (4.157)$$

$$C = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{i} \\ \boxed{+} \end{array} \boxed{+} \boxed{-}^{k/2+1} \boxed{-}^{n+4} e^{i(n+3)\phi}, \quad (4.158)$$

$$1_{+++} \quad A = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+2} \boxed{+} \boxed{-}^{k/2} \boxed{+}^{n+6} e^{-i(n+3)\phi}, \quad (4.159)$$

$$B = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+2} \boxed{+} \boxed{-}^{k/2+3} \boxed{-}^n e^{i(n+3)\phi}, \quad (4.160)$$

$$1_+ \quad A = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+2} \boxed{+} \boxed{-}^{k/2+1} \boxed{+}^{n+4} e^{-i(n+3)\phi}, \quad (4.161)$$

$$B = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+2} \boxed{+} \boxed{-}^{k/2+2} \boxed{-}^{n+2} e^{i(n+3)\phi}, \quad (4.162)$$

Serie II

La rappresentazione di $SO(5) \times U(1)_R$ è

$$\{M = m + 2, \quad N = k + n + 6, \quad Q = n + 2\} \quad (4.163)$$

$$5_+ \quad A = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{k} \end{array} \boxed{+} \boxed{-}^{k/2+1} \boxed{+}^{n+3} e^{-i(n+2)\phi}, \quad (4.164)$$

$$B = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{k} \end{array} \boxed{+} \boxed{-}^{k/2+2} \boxed{-}^{n+1} e^{i(n+2)\phi}, \quad (4.165)$$

$$C = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^m \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{k} \quad \boxed{+} \end{array} \boxed{+} \boxed{-}^{k/2+2} \boxed{+}^{n+2} e^{-i(n+2)\phi}, \quad (4.166)$$

$$D = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^m \begin{array}{c} \boxed{i} \quad \boxed{j} \\ \boxed{k} \quad \boxed{+} \end{array} \boxed{+} \boxed{-}^{k/2+2} \boxed{-}^{n+2} e^{i(n+2)\phi}, \quad (4.167)$$

4.2 ARMONICHE PER LA VARIETÀ DI STIEFEL ED AUTOVALORI

$$5_0 \quad A = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+2} \begin{array}{c} \boxed{i} \boxed{j} \\ \boxed{+} \boxed{-} \end{array}^{k/2+1} \boxed{+}^{n+2} e^{-i(n+2)\phi}, \quad (4.168)$$

$$B = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{i} \boxed{j} \\ \boxed{+} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \boxed{-} \\ \boxed{+} \end{array}^{k/2+2} \boxed{+}^{n+1} e^{-i(n+2)\phi}, \quad (4.169)$$

$$C = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{i} \boxed{j} \\ \boxed{+} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \boxed{-} \\ \boxed{+} \end{array}^{k/2+1} \boxed{-}^{n+3} e^{i(n+2)\phi}, \quad (4.170)$$

$$D = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^m \begin{array}{c} \boxed{i} \boxed{j} \\ \boxed{+} \boxed{-} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \boxed{-} \\ \boxed{+} \end{array}^{k/2+2} \boxed{+}^{n+2} e^{-i(n+2)\phi}, \quad (4.171)$$

$$E = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^m \begin{array}{c} \boxed{i} \boxed{j} \\ \boxed{+} \boxed{+} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \boxed{-} \\ \boxed{+} \end{array}^{k/2+3} \boxed{+}^n e^{-i(n+2)\phi}, \quad (4.172)$$

$$3_{++} \quad A = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{j} \\ \boxed{k} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \boxed{-} \\ \boxed{+} \end{array}^{k/2+1} \boxed{+}^{n+4} \boxed{i} e^{-i(n+2)\phi} \epsilon^{ijk}, \quad (4.173)$$

$$B = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{j} \\ \boxed{k} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \boxed{-} \\ \boxed{+} \end{array}^{k/2+3} \boxed{-}^n \boxed{i} e^{i(n+2)\phi} \epsilon^{ijk}, \quad (4.174)$$

$$3_+ \quad A = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+2} \begin{array}{c} \boxed{+} \boxed{-} \\ \boxed{+} \end{array}^{k/2+1} \boxed{+}^{n+3} \boxed{i} e^{-i(n+2)\phi}, \quad (4.175)$$

$$B = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+2} \begin{array}{c} \boxed{+} \boxed{-} \\ \boxed{-} \end{array}^{k/2+2} \boxed{-}^{n+1} \boxed{i} e^{i(n+2)\phi}, \quad (4.176)$$

$$C = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{i} \\ \boxed{+} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \boxed{-} \\ \boxed{+} \end{array}^{k/2+2} \boxed{+}^{n+2} e^{-i(n+2)\phi}, \quad (4.177)$$

$$D = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{i} \\ \boxed{+} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \boxed{-} \\ \boxed{-} \end{array}^{k/2+2} \boxed{-}^{n+2} e^{i(n+2)\phi}, \quad (4.178)$$

$$3_0 \quad A = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+1} \begin{array}{c} \boxed{j} \\ \boxed{k} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{+} \boxed{-} \\ \boxed{+} \end{array}^{k/2+2} \boxed{+}^{n+2} e^{-i(n+2)\phi} \epsilon^{ijk}, \quad (4.179)$$

$$1_0 \quad A = \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-} \end{array}^{m+2} \begin{array}{c} \boxed{+} \boxed{-} \\ \boxed{+} \end{array}^{k/2+2} \boxed{+}^{n+2} e^{-i(n+2)\phi}. \quad (4.180)$$

Notiamo che nella prima serie è assente il frammento 1_0 , mentre nella seconda serie sono assenti i frammenti 1_+ e 1_{+++} .

Definendo i generatori nella base complessa

$$\begin{aligned} J_{k+} &= J_{k4} + iJ_{k5}, \\ J_{k-} &= J_{k4} - iJ_{k5}, \end{aligned} \quad (4.181)$$

possiamo suddividere gli indici $a = 1, \dots, 7$ in $\{i, \bar{i}, 7\}$. Allora le armoniche, costruite con i frammenti che abbiamo elencato sopra, si scrivono:

$$\begin{aligned}
 Y_{+++}^{ijk} &= 1_{+++}^I \varepsilon_{ijk}, \\
 Y_{++-}^{ijk} &= 5_{+lk}^I \varepsilon_{ijl}, (5_{+ijk}^{II} - 5_{+jik}^{II}), 3_{+il}^I \varepsilon_{ljk}, (3_{+ij}^{II} \delta_{jk} - 3_{+j}^{II} \delta_{ik}), 1_{+}^I \varepsilon_{ijk}, \\
 Y_{++7}^{ijk} &= 3_{++k}^I \varepsilon_{ijk}, 3_{++ij}^{II}, \\
 Y_{+-7}^{ijk} &= 5_{0ikl}^I \varepsilon_{klj}, 5_{0ij}^{II}, 3_{0k}^I \varepsilon_{ijk}, 3_{0ij}^{II}, 1_0^{II} \delta_{ij}
 \end{aligned} \tag{4.182}$$

dove gli apici I e II si riferiscono rispettivamente alla prima e alla seconda serie.

Operatore

Scriviamo l'equazione (3.91) per le armoniche (4.182) esplicitando gli indici:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{24} \varepsilon_{+++}^{ijk} {}^7l_{mn} D_7 Y_{+++}^{lmn} + \frac{1}{8} \varepsilon_{+++}^{ijk} {}^{lmn7} D_l Y_{+++}^{mn7} &= M_{(1)^3} Y_{+++}^{ijk}, \\
 \frac{1}{8} \varepsilon_{++-}^{ijl} {}^{7mnk} D_7 Y_{++-}^{mnk} + \frac{1}{4} \varepsilon_{++-}^{ijl} {}^{mn-7} D_m Y_{+--}^{nk7} + \frac{1}{8} \varepsilon_{++-}^{ijl} {}^{-mn7} D_k Y_{+++}^{mn7} &= M_{(1)^3} Y_{++-}^{ijl}, \\
 \frac{1}{8} \varepsilon_{++7}^{ij7} {}^{mnl-} D_m Y_{+++}^{nlk} + \frac{1}{24} \varepsilon_{++7}^{ij7} {}^{-mnl} D_k Y_{+++}^{mnl} &= M_{(1)^3} Y_{++7}^{ij7}, \\
 \frac{1}{8} \varepsilon_{+-7}^{im7} {}^{njkl} D_n Y_{+-+}^{jkl} + \frac{1}{8} \varepsilon_{+-7}^{im7} {}^{jnlk} D_j Y_{+-+}^{nlk} &= M_{(1)^3} Y_{+-7}^{im7}.
 \end{aligned} \tag{4.183}$$

Calcolando l'azione degli operatori presenti nelle (4.183) sui tutti i frammenti è possibile costruire, per entrambe le serie, una matrice analoga a quella ottenuta nell'analisi dell'armonica vettoriale⁴.

Diagonalizzando tale matrice ed utilizzando l'espressione per la massa del campo π in (3.97), si completa l'analisi dello spettro. Anche in questo caso si troverebbero degli autovalori corrispondenti ai gradi di libertà longitudinali in numero pari agli autovalori dell'armonica della 2-forma. Tali autovalori devono essere nulli come si vede da

$$\varepsilon^{abcdefgh} D_d D_e Y_{fg} \equiv 0, \tag{4.184}$$

dove l'armonica longitudinale è $Y_{efg} = D_{[e} Y_{fg]}$.

⁴ Questo calcolo non è stato completato, dunque, avendo a disposizione solamente risultati parziali, non è possibile fornire gli autovalori.

CONCLUSIONI

In questa tesi abbiamo analizzato lo spettro di Kaluza–Klein risultante dalla compattificazione della Teoria M sulla varietà $V_{5,2}$. A questo scopo abbiamo studiato

- la geometria differenziale degli spazi quoziente;
- la supergravità in undici dimensioni, e la sua riduzione dimensionale che segue dall’espansione dei campi attorno alla soluzione di Freund–Rubin;
- l’analisi armonica sui quozienti di gruppi, che permette il calcolo degli autovalori degli operatori di Hodge–de Rham sullo spazio interno.

Abbiamo visto che la supersimmetria, che la teoria possiede quando sia stata scelta la varietà interna, determina la struttura dei supermultipletti e le relazioni fra le masse dei campi in AdS . Tuttavia, il calcolo diretto delle masse è necessario perché il numero dei multipletti stessi dipende dalle caratteristiche della varietà. Infatti, non è noto a priori il numero degli autovalori indipendenti nella diagonalizzazione dei vari operatori invarianti.

Una volta calcolate le masse per alcuni campi opportunamente scelti, e quindi individuati gli stati ad esse relativi, questi dovranno necessariamente appartenere, o a qualcuno dei multipletti già scritti, o ad un nuovo multipletto. In questo modo è possibile esaurire gli stati senza calcolare tutte le masse.

In virtù di questa proprietà, è stato possibile dedurre che, per completare l’analisi dello spettro, è sufficiente calcolare tutti gli autovalori dell’armonica della 3-forma. Essi infatti forniscono le masse per gli (pseudo)scalari π , i cui stati sono presenti in tutti i multipletti restanti. In particolare, è stato mostrato in [6], seguendo un approccio differente, che è presente un solo multipletto vettoriale Z .

Un’altra informazione interessante sul multipletto del campo Z viene dalle caratteristiche topologiche del quoziente in esame. La varietà di Stiefel, infatti, ha numero di Betti $b_2 = 0$, vale a dire che non ci sono 2-forme chiuse non esatte. Infatti, seguendo la tabella a pagina 494 di [31], si ha che il polinomio di Poincaré per il quoziente $SO(5)/SO(3)$ è

$$P(t) = 1 + t^7. \quad (5.1)$$

CONCLUSIONI

Ricordando che il numero di Betti b_p è dato dal coefficiente del termine di grado p del polinomio (5.1), si evince che

$$b_p = 0 \quad \text{per } p = 1, \dots, 6 \quad \text{e} \quad b_p = 1 \quad \text{per } p = 0, 7. \quad (5.2)$$

Di conseguenza, grazie al teorema di Hodge, per armoniche trasverse si ha

$$\boxtimes_{(1)^2(0)} Y_{ab} = M_{(1)^2(0)} Y_{ab} \neq 0, \quad (5.3)$$

e questo implica, essendo proprio $m_Z^2 = M_{(1)^2(0)}$, che il multipletto della Z debba essere massivo.

Per concludere, il confronto in [5] era stato fatto con gli operatori conformi relativi ad una teoria di Yang–Mills, la quale però non era stata costruita in maniera soddisfacente, data l'impossibilità di scrivere un superpotenziale consistente. Solo successivamente è stata proposta una teoria in tre dimensioni conforme del tipo Chern–Simons, per cui la dualità con la Teoria M compattificata su $AdS_4 \times M_7$ risulta significativamente diversa.

In particolare in [32] è stata sviluppata la teoria $\mathcal{N} = 2$ duale alla soluzione $AdS_4 \times V_{5,2}$. In [32] è stata inoltre verificata la corrispondenza per l'ipermultipletto costituito da (S, π, λ_L) , che si ottiene come una rappresentazione "corta" del multipletto vettoriale del campo A . Tuttavia, per testare completamente la corrispondenza AdS_4/CFT_3 per questa particolare compattificazione, è necessario completare lo spettro con gli stati mancanti, e stabilire, ad esempio, se gli operatori duali corrispondenti sono rilevanti, marginali o irrilevanti.

APPENDICI E BIBLIOGRAFIA

A

I MULTIPLETTI SUPERSIMMETRICI AdS_4 E $N = 2$

In questa appendice riportiamo i supermultipletti nello spazio AdS_4 con supersimmetria $\mathcal{N} = 2$. Per una trattazione esaustiva si vedano il capitolo II.5 di [7] e [33]. I supermultipletti di $OSp(4|2)$ si possono costruire a partire dalla parte bosonica della superalgebra, ovvero

$$G_b = Sp(4, \mathbb{R}) \oplus SO(2)_R \subseteq OSp(4|2), \quad (A.1)$$

dove R sta per R-simmetria, alla quale associamo il numero quantico y . Una rappresentazione unitaria irriducibile di $OSp(4|2)$ si compone di un numero finito di rappresentazioni unitarie di G_b , in cui le particelle saranno date dalle rappresentazioni irriducibili unitarie di $SO(2, 3) \simeq Sp(4, \mathbb{R})$.

Utilizziamo dunque il metodo delle rappresentazioni indotte di Wigner, considerando il sottogruppo compatto massimale di G_b :

$$G_{\text{comp}} = SO(2)_E \oplus SO(3)_S \oplus SO(2)_R \subset G_b, \quad (A.2)$$

dove $SO(2)_E$ e $SO(3)_S$ sono rispettivamente i sottogruppi cui è associata l'energia e lo spin della particella. Un generico stato è quindi individuato dai numeri quantici (E_0, s_0, y) , che ne caratterizzano il vuoto di Clifford.

La richiesta di unitarietà (stati a norma non negativa) porge la disuguaglianza

$$|E_0| \geq |y_0| + s_0 + 1, \quad (A.3)$$

la quale permette di distinguere tre tipi di multipletti:

- multipletti *lunghi*,
- multipletti *corti*,
- multipletti *massless*.

Infine, facendo uso delle seguenti relazioni fra la massa e l'energia per le particelle in Anti de Sitter (che mostriamo senza derivare):

$$\text{spin } 0 \quad m_{(0)}^2 = 16(E_0 - 2)(E_0 - 1), \quad (\text{A.4})$$

$$\text{spin } \frac{1}{2} \quad |m_{(1/2)}| = 4E_0 - 6, \quad (\text{A.5})$$

$$\text{spin } 1 \quad m_{(1)}^2 = 16(E_0 - 2)(E_0 - 1), \quad (\text{A.6})$$

$$\text{spin } \frac{3}{2} \quad |m_{(3/2)} + 4| = 4E_0 - 6, \quad (\text{A.7})$$

$$\text{spin } 2 \quad m_{(2)}^2 = 16E_0(E_0 - 3), \quad (\text{A.8})$$

elenchiamo nelle tabelle 2, 3, 4, 5, 6, 7 la struttura generale dei multipletti¹. I multipletti corti e massless si ottengono quando vale l'uguaglianza nella (A.3) e sono rispettivamente segnalati con i simboli † e ‡; i multipletti massless soddisfano inoltre la condizione aggiuntiva $y_0 = 0$.

| Spin | Energia | $SO(2)_R$ | Massa | Campo |
|---------------|---------------------|-----------|------------------------|---------------|
| 2 | $E_0 + 1$ | y_0 | $16(E_0 + 1)(E_0 - 2)$ | h †‡ |
| $\frac{3}{2}$ | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 - 1$ | $-4E_0 - 4$ | χ^- † |
| | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 + 1$ | $-4E_0 - 4$ | χ^- |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 - 1$ | $4E_0 - 8$ | χ^+ †‡ |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 + 1$ | $4E_0 - 8$ | χ^+ †‡ |
| 1 | $E_0 + 2$ | y_0 | $16E_0(E_0 + 1)$ | W |
| | $E_0 + 1$ | $y_0 - 2$ | $16E_0(E_0 - 1)$ | Z † |
| | $E_0 + 1$ | $y_0 + 2$ | $16E_0(E_0 - 1)$ | Z |
| | $E_0 + 1$ | y_0 | $16E_0(E_0 - 1)$ | Z † |
| | $E_0 + 1$ | y_0 | $16E_0(E_0 - 1)$ | Z |
| | E_0 | y_0 | $16(E_0 - 1)(E_0 - 2)$ | A †‡ |
| $\frac{1}{2}$ | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 - 1$ | $4E_0$ | λ_T |
| | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 + 1$ | $4E_0$ | λ_T |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 - 1$ | $-4E_0 + 4$ | λ_T † |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 + 1$ | $-4E_0 + 4$ | λ_T |
| 0 | $E_0 + 1$ | y_0 | $16E_0(E_0 - 1)$ | φ |

Tabella 2.: Multipletto del gravitone, $|E_0| \geq |y_0| + 2$.

¹ Nelle tabelle è riportata la massa per i fermioni e la massa al quadrato per i bosoni.

| Spin | Energia | $SO(2)_R$ | Massa | Campo |
|---------------|---------------------|-----------|--|---------------------------|
| $\frac{3}{2}$ | $E_0 + 1$ | y_0 | $4E_0 - 6$ | $\chi^+ \quad \dagger$ |
| 1 | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 - 1$ | $16(E_0 - \frac{1}{2})(E_0 + \frac{1}{2})$ | $Z \quad \dagger$ |
| | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 + 1$ | $16(E_0 - \frac{1}{2})(E_0 + \frac{1}{2})$ | Z |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 - 1$ | $16(E_0 - \frac{3}{2})(E_0 - \frac{1}{2})$ | $A \quad \dagger$ |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 + 1$ | $16(E_0 - \frac{3}{2})(E_0 - \frac{1}{2})$ | $A \quad \dagger$ |
| $\frac{1}{2}$ | $E_0 + 2$ | y_0 | $4E_0 + 2$ | λ_T |
| | $E_0 + 1$ | $y_0 - 2$ | $-4E_0 + 2$ | $\lambda_T \quad \dagger$ |
| | $E_0 + 1$ | y_0 | $-4E_0 + 2$ | $\lambda_T \quad \dagger$ |
| | $E_0 + 1$ | $y_0 + 2$ | $-4E_0 + 2$ | λ_T |
| | $E_0 + 1$ | y_0 | $-4E_0 + 2$ | λ_T |
| | E_0 | y_0 | $4E_0 - 6$ | $\lambda_L \quad \dagger$ |
| 0 | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 - 1$ | $16(E_0 - \frac{1}{2})(E_0 + \frac{1}{2})$ | φ |
| | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 + 1$ | $16(E_0 - \frac{1}{2})(E_0 + \frac{1}{2})$ | $\varphi \quad \dagger$ |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 - 1$ | $16(E_0 - \frac{3}{2})(E_0 - \frac{1}{2})$ | π |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 + 1$ | $16(E_0 - \frac{3}{2})(E_0 - \frac{1}{2})$ | π |

 Tabella 3.: Multipletto del gravitino con segno positivo nella (A.7), $|E_0| \geq |y_0| + \frac{3}{2}$.

| Spin | Energia | $SO(2)_R$ | Massa | Campo |
|---------------|---------------------|-----------|--|-------------|
| $\frac{3}{2}$ | $E_0 + 1$ | y_0 | $-4E_0 - 2$ | χ^- |
| 1 | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 - 1$ | $16(E_0 - \frac{1}{2})(E_0 + \frac{1}{2})$ | W |
| | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 + 1$ | $16(E_0 - \frac{1}{2})(E_0 + \frac{1}{2})$ | W |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 - 1$ | $16(E_0 - \frac{3}{2})(E_0 - \frac{1}{2})$ | Z |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 + 1$ | $16(E_0 - \frac{3}{2})(E_0 - \frac{1}{2})$ | Z |
| $\frac{1}{2}$ | $E_0 + 2$ | y_0 | $-4E_0 - 2$ | λ_L |
| | $E_0 + 1$ | $y_0 - 2$ | $-4E_0 - 2$ | λ_T |
| | $E_0 + 1$ | y_0 | $4E_0 - 2$ | λ_T |
| | $E_0 + 1$ | $y_0 + 2$ | $4E_0 - 2$ | λ_T |
| | $E_0 + 1$ | y_0 | $-4E_0 + 6$ | λ_T |
| | E_0 | y_0 | $4E_0 - 2$ | λ_T |
| 0 | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 - 1$ | $16(E_0 - \frac{1}{2})(E_0 + \frac{1}{2})$ | π |
| | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 + 1$ | $16(E_0 - \frac{1}{2})(E_0 + \frac{1}{2})$ | π |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 - 1$ | $16(E_0 - \frac{3}{2})(E_0 - \frac{1}{2})$ | φ |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 + 1$ | $16(E_0 - \frac{3}{2})(E_0 - \frac{1}{2})$ | φ |

 Tabella 4.: Multipletto del gravitino con segno negativo nella (A.7), $|E_0| \geq |y_0| + \frac{3}{2}$.

| Spin | Energia | $SO(2)_R$ | Massa | Campo | | |
|---------------|---------------------|-----------|---------------------------|-------------|------------------|-------------|
| 1 | $E_0 + 1$ | y_0 | $16E_0(E_0 - 1)$ | A | $\dagger\dagger$ | W |
| $\frac{1}{2}$ | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 - 1$ | $-4E_0$ | λ_T | $\dagger(*)$ | λ_L |
| | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 + 1$ | $-4E_0$ | λ_T | $\dagger(*)$ | λ_L |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 - 1$ | $4E_0 - 4$ | λ_L | $\dagger\dagger$ | λ_T |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 + 1$ | $4E_0 - 4$ | λ_L | $\dagger\dagger$ | λ_T |
| 0 | $E_0 + 2$ | y_0 | $16E_0(E_0 + 1)$ | φ | | Σ |
| | $E_0 + 1$ | $y_0 - 2$ | $16E_0(E_0 - 1)$ | π | \dagger | π |
| | $E_0 + 1$ | $y_0 + 2$ | $16E_0(E_0 - 1)$ | π | | π |
| | $E_0 + 1$ | y_0 | $16E_0(E_0 - 1)$ | π | $\dagger\dagger$ | π |
| | E_0 | y_0 | $16E_0(E_0 - 2)(E_0 - 1)$ | S | $\dagger\dagger$ | φ |

 Tabella 5.: Multipletti vettoriali A e W , $E_0 \geq |y_0| + 1$. (*): uno dei due.

| Spin | Energia | $SO(2)_R$ | Massa | Campo | |
|---------------|---------------------|-----------|---------------------------|-------------|------------|
| 1 | $E_0 + 1$ | y_0 | $16E_0(E_0 - 1)$ | Z | \ddagger |
| $\frac{1}{2}$ | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 - 1$ | $4E_0$ | λ_T | \ddagger |
| | $E_0 + \frac{3}{2}$ | $y_0 + 1$ | $4E_0$ | λ_T | \ddagger |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 - 1$ | $-4E_0 + 4$ | λ_T | |
| | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 + 1$ | $-4E_0 + 4$ | λ_T | |
| 0 | $E_0 + 2$ | y_0 | $16E_0(E_0 + 1)$ | π | |
| | $E_0 + 1$ | $y_0 - 2$ | $16E_0(E_0 - 1)$ | φ | |
| | $E_0 + 1$ | $y_0 + 2$ | $16E_0(E_0 - 1)$ | φ | |
| | $E_0 + 1$ | y_0 | $16E_0(E_0 - 1)$ | φ | \ddagger |
| | E_0 | y_0 | $16E_0(E_0 - 2)(E_0 - 1)$ | π | \ddagger |

 Tabella 6.: Multipletto vettoriale Z , $E_0 \geq |y_0| + 1$.

| Spin | Energia | $SO(2)_R$ | Massa | Campo |
|---------------|---------------------|------------|---------------------------|-------------|
| $\frac{1}{2}$ | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $y_0 - 1$ | $4E_0 - 4$ | λ_L |
| 0 | $E_0 + 1$ | $y_0 - 2$ | $16E_0(E_0 - 1)$ | π |
| | E_0 | y_0 | $16E_0(E_0 - 2)(E_0 - 1)$ | S |
| $\frac{1}{2}$ | $E_0 + \frac{1}{2}$ | $-y_0 + 1$ | $4E_0 - 4$ | λ_L |
| 0 | $E_0 + 1$ | $-y_0 + 2$ | $16E_0(E_0 - 1)$ | π |
| | E_0 | $-y_0$ | $16E_0(E_0 - 2)(E_0 - 1)$ | S |

Tabella 7.: Ipermultipletti, $|E_0| = |y_0| \geq \frac{1}{2}$.

B

NOTAZIONI E CONVENZIONI

Diamo di seguito l'elenco delle definizioni nelle convenzioni adottate. Nel capitolo 3 gli indici seguono la notazione riportata in tabella 8. Laddove sorga ambiguità, si faccia riferimento a tale tabella. La segnatura dello spazio a quattro dimensioni si intende sempre

$$\eta_{ab} = (+, -, -, -). \quad (\text{B.1})$$

| Spazio | Curvi | Piatti |
|---------------|-------------------|------------------------|
| D | M, N, \dots | A, B, \dots |
| $D - d$ | μ, ν, \dots | α, β, \dots |
| d (interno) | m, n, \dots | a, b, \dots |

Tabella 8.: Convenzione Indici

Geometria Differenziale

$$\text{p-forma:} \quad \omega_p = a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad (\text{B.2})$$

$$\text{contrazione:} \quad i_v \omega_p(v_1, \dots, v_{p-1}) = \omega_p(v, v_1, \dots, v_{p-1}), \quad (\text{B.3})$$

$$\text{derivata esterna:} \quad d\omega_p = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^{i_{p+1}}} dx^{i_{p+1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad (\text{B.4})$$

$$\text{derivata di Lie:} \quad \mathcal{L}_k \omega = (d i_k + i_k) \omega, \quad (\text{B.5})$$

$$\text{duale di Hodge:} \quad \omega_p^* = \frac{1}{(n-p)!} \varepsilon^{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{n-p}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-p}}, \quad (\text{B.6})$$

dove n è la dimensione della varietà. Il simbolo di Levi–Civita è un *tenore* e non una densità tensoriale.

$$\text{Aggiunta della derivata esterna: } \delta = (-1)^{np+n+1} d^* \text{ segnatura euclidea, (B.7)}$$

$$\delta = (-1)^{np+n} d^* \text{ segnatura lorentziana, (B.8)}$$

$$\text{operatore di Hodge–de Rahm: } \Delta = (d + \delta)^2 = dd + \delta d. \quad (\text{B.9})$$

$$\text{torsione: } T^A = dV^A - \omega^A{}_B \wedge V^B, \quad (\text{B.10})$$

$$\text{curvatura: } R^{AB} = d\omega^{AB} - \omega^A{}_C \wedge \omega^{CB}. \quad (\text{B.11})$$

Se $T^i = 0$ la (B.10) dà la relazione fra la connessione e le vielbein:

$$\omega_M{}^{AB}(V) = -(2V^{N[A} \partial_{[M} V_{N]}{}^{B]} - V^{N[A} V^{B]P} V_{MC} \partial_N V_P{}^C). \quad (\text{B.12})$$

Per una p-forma a in una generica rappresentazione \mathbb{D} di $SO(1, n-1)$, definiamo la derivata covariante come:

$$Da = da + \omega^{ij} \mathbb{D}(T_{ij})a, \quad (\text{B.13})$$

dove T_{ij} sono i generatori di $SO(1, n-1)$.

Matrici Gamma

$$\{\Gamma_A, \Gamma_B\} = 2\eta_{AB}, \quad \text{dove } \eta_{AB} = \text{diag}(+, -, \dots, -), \quad (\text{B.14})$$

$$\Gamma^{A_1, \dots, A_n} = \Gamma^{[A_1} \Gamma^{A_2} \dots \Gamma^{A_n]}. \quad (\text{B.15})$$

In particolare, in $11D$, abbiamo utilizzato la seguente definizione:

$$\Gamma^M = \begin{cases} \Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes \mathbb{1}_8 \\ \Gamma^m = \gamma^* \otimes \gamma^m \end{cases}, \quad (\text{B.16})$$

dove

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}, \quad (\text{B.17})$$

$$\gamma^* = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \quad (\text{B.18})$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Martin Maldacena, Hirosi Ooguri, and Yaron Oz. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys.Rept.*, 323:183–386, 2000.
- [2] Eric D’Hoker and Daniel Z. Freedman. Supersymmetric gauge theories and the AdS / CFT correspondence. pages 3–158, 2002.
- [3] A. Zaffaroni. Introduction to the AdS-CFT correspondence. *Class.Quant.Grav.*, 17:3571–3597, 2000.
- [4] Sean A. Hartnoll. Lectures on holographic methods for condensed matter physics. *Class.Quant.Grav.*, 26:224002, 2009.
- [5] Anna Ceresole, Gianguido Dall’Agata, Riccardo D’Auria, and Sergio Ferrara. M-theory on the stiefel manifold and 3d conformal field theories. *Journal of High Energy Physics*, 2000(03):011, 2000.
- [6] Krzysztof Pilch and Isaiah Yoo. On perturbative instability of Pope-Warner solutions on Sasaki-Einstein manifolds. *JHEP*, 1309:124, 2013.
- [7] Riccardo D’Auria Leonardo Castellani and Pietro Fré. *Supergravity and Superstrings. A Geometric Perspective. Vol. 1: Mathematical Foundations*. World Scientific, P O Box 128, Farrer Road, Singapore 9128, 1991.
- [8] L Castellani. On G/H Geometry and its Use in M-theory Compactifications. *Ann. Phys.*, 287(hep-th/9912277. DFTT-99-74):1–13. 12 p, Dec 1999.
- [9] Robert Gilmore. *Lie Groups, Physics, and Geometry*. Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK, 2008.
- [10] W. Nahm. Supersymmetries and their Representations. *Nucl.Phys.*, B135:149, 1978.
- [11] Theodor Kaluza. On the Problem of Unity in Physics. *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.)*, 1921:966–972, 1921.
- [12] Oskar Klein. Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. *Z.Phys.*, 37:895–906, 1926.
- [13] Peter G.O. Freund and Mark A. Rubin. Dynamics of Dimensional Reduction. *Phys.Lett.*, B97:233–235, 1980.

BIBLIOGRAFIA

- [14] Edward Witten. Search for a Realistic Kaluza-Klein Theory. *Nucl.Phys.*, B186:412, 1981.
- [15] L. Castellani, L.J. Romans, and N.P. Warner. A Classification of Compactifying Solutions for $d = 11$ Supergravity. *Nucl.Phys.*, B241:429, 1984.
- [16] M.J. Duff, B.E.W. Nilsson, and C.N. Pope. Kaluza-Klein Supergravity. *Phys.Rept.*, 130:1–142, 1986.
- [17] E. Cremmer, B. Julia, and Joel Scherk. Supergravity Theory in Eleven-Dimensions. *Phys.Lett.*, B76:409–412, 1978.
- [18] Riccardo D’Auria Leonardo Castellani and Pietro Fré. *Supergravity and Superstrings. A Geometric Perspective. Vol. 2: Supergravity*. World Scientific, P O Box 128, Farrer Road, Singapore 9128, 1991.
- [19] Daniel Z. Freedman and Antoine Van Proeyen. *Supergravity*. Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK, 2012.
- [20] Henning Samtleben. Introduction to Supergravity, Lectures at the 13th Saalburg School on Fundamentals and New Methods, <http://www.itp.uni-hannover.de/~lechtenf/Events/Lectures/samtleben.pdf>, 2007.
- [21] R. D’Auria and P. Fre. Universal Bose-Fermi Mass Relations in Kaluza-Klein Supergravity and Harmonic Analysis on Coset Manifolds with Killing Spinors. *Annals Phys.*, 162:372, 1985.
- [22] L. Castellani, R. D’Auria, P. Fre, K. Pilch, and P. van Nieuwenhuizen. The Bosonic Mass Formula for Freund-rubin Solutions of $d = 11$ Supergravity on General Coset Manifolds. *Class.Quant.Grav.*, 1:339–348, 1984.
- [23] L. Castellani, R. D’Auria, and P. Fre. $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ from $D = 11$ Supergravity. *Nucl.Phys.*, B239:610–652, 1984.
- [24] L. Castellani, L.J. Romans, and N.P. Warner. Symmetries of Coset Spaces and Kaluza-Klein Supergravity. *Annals Phys.*, 157:394, 1984.
- [25] Leonardo Castellani. The Mass Spectrum in the $SU(3) \times U(1)$ Compactifications of $d = 11$ Supergravity. *Nucl.Phys.*, B254:266, 1985.
- [26] Anna Ceresole, Gianguido Dall’Agata, and Riccardo D’Auria. K K Spectroscopy of Type IIB Supergravity on $AdS(5) \times T^{**}11$. *JHEP*, 9911:009, 1999.
- [27] Anna Ceresole, Gianguido Dall’Agata, Riccardo D’Auria, and Sergio Ferrara. Spectrum of type IIB supergravity on $AdS(5) \times T^{**}11$: Predictions on $N=1$ SCFT’s. *Phys.Rev.*, D61:066001, 2000.

- [28] Davide Fabbri, Pietro Fre, Leonardo Gualtieri, and Piet Termonia. M theory on $AdS(4) \times M^{11}$: The Complete $Osp(2|4) \times SU(3) \times SU(2)$ spectrum from harmonic analysis. *Nucl.Phys.*, B560:617–682, 1999.
- [29] Piet Termonia. The Complete $N=3$ Kaluza-Klein spectrum of 11-D supergravity on $AdS(4) \times N^{10}$. *Nucl.Phys.*, B577:341–389, 2000.
- [30] Leonardo Gualtieri. *Harmonic analysis and superconformal gauge theories in three-dimensions from AdS / CFT correspondence*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 1999, hep-th/0002116.
- [31] Ray Vanstone Werner Greub, Stephen Halperin. *Connections, Curvature and Cohomology. Vol. III: Cohomology of Principal Bundles and Homogeneous Spaces*. Academic Press Inc, 1975.
- [32] Dario Martelli and James Sparks. AdS_4 / CFT_3 duals from m2-branes at hypersurface singularities and their deformations. *Journal of High Energy Physics*, 2009(12):017, 2009.
- [33] Anna Ceresole, P. Fre, and H. Nicolai. Multiplet Structure and Spectra of $N = 2$ Supersymmetric Compactifications. *Class.Quant.Grav.*, 2:133, 1985.