

Università degli studi di Padova  
Dipartimento di Scienze Statistiche  
Corso di Laurea Triennale in  
Statistica e Gestione delle Imprese



RELAZIONE FINALE

**IDENTIFICAZIONE DI VARIAZIONI DEL CICLO DI VITA DEL PRODOTTO DOVUTE A  
SCELTE AZIENDALI E POSIZIONAMENTO NEL MERCATO**

Relatore Dott.ssa Mariangela Guidolin  
Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureanda: Elena Foroni  
Matricola N. 1074214

Anno Accademico 2015/2016



# ***Indice***

## **Introduzione**

### **1. Presentazione Azienda**

1.1. Storia

1.2. Attuale posizionamento nel mercato, Mission e Punti di forza

1.3 Prodotti analizzati

### **2. Modelli di diffusione per ciclo di vita del prodotto**

2.1 Ciclo di vita del prodotto

2.2 Modello di Bass Standard o BM (1969)

2.3 Modello di Bass Generalizzato o GBM (1994)

2.4 Identificazione statistica dei modelli non lineari

2.5 Adattamento del modello ai dati e confronto fra modelli annidati

2.6 Analisi dei residui e statistica di Durbin-Watson

2.7 Affinamento ARMAX

### **3. Analisi delle variazioni del ciclo di vita attraverso l'applicazione dei modelli ai dati**

3.1 Shock intervenuti a causa di decisioni interne all'azienda

3.2 Shock intervenuti a causa di fattori esogeni: la concorrenza

### **4. Conclusioni**

## **Bibliografia**



## ***Introduzione***

L'elaborato nasce dall'esperienza di stage della durata di dieci settimane presso l'ufficio commerciale di un'azienda leader nel settore arredamento bagno con sede a Bagnolo San Vito nella Provincia di Mantova.

L'azienda opera all'interno del mercato nazionale ed internazionale e propone numerose linee di prodotti che vanno ad occupare l'intero panorama del settore in cui essa si posiziona: docce, lavabi, rubinetti, sanitari, vasche, specchi, lampade, mobili ed accessori.

Prendendo in considerazione nella fattispecie due prodotti di linee distinte, la vasca Vieques e la vasca Normal, obiettivo della relazione è quello di studiare l'andamento delle vendite quando, durante la commercializzazione, intervengono fattori endogeni come il lancio da parte dell'azienda di un prodotto complementare o fattori esogeni come l'introduzione nel mercato da parte di un concorrente di una linea che occupa una fascia qualità-prezzo inferiore a quella del prodotto oggetto di analisi.

Nonostante non siano l'unica scelta possibile, gli strumenti utilizzati ai fini analitici sono i modelli di diffusione, in quanto si assume che i prodotti presi in esame siano caratterizzati da un ciclo di vita limitato.

La relazione è strutturata in quattro capitoli.

Il *primo capitolo* è dedicato alla presentazione dell'azienda: la storia, l'attuale posizione sul mercato, la strategia e gli aspetti caratterizzanti. Nell'ultimo sotto paragrafo vengono descritti i prodotti oggetto di analisi e le motivazioni per le quali sono stati selezionati.

Nel *secondo capitolo* vengono presentati la teoria del ciclo di vita del prodotto e i modelli di diffusione utilizzati ai fini dell'analisi previsiva: Modello di Bass Standard (BM) e Modello di Bass Generalizzato (GBM). Vengono inoltre forniti alcuni

approfondimenti relativamente ad aspetti di stima, identificazione statistica ed analisi dei residui.

L'applicazione di tali modelli ai dati di vendita avviene invece nel *terzo capitolo*, dove il sopracitato obiettivo della tesi viene approfonditamente esaminato ed affrontato.

Infine, con il *quarto capitolo*, si concluderà l'elaborato con alcune considerazioni relative ai risultati ottenuti e più in generale, alle politiche aziendali adottate e al mercato di riferimento.

## **Capitolo 1**

### **Presentazione Azienda**

#### **1.1 Storia**

L'azienda è di tipo familiare, fu fondata a Verona nei primi anni Settanta e spostata in seguito nella Provincia di Mantova. Ora ha sede legale a Correggio Micheli di Bagnolo San Vito e sede operativa a Governolo di Roncoferraro, nella medesima Provincia.

All'inizio la catena di distribuzione era locale, rappresentata per lo più dai parenti della famiglia fondatrice, che erano distributori del settore termoidraulico nell'area veneta. L'azienda cominciò in breve tempo a varcare i confini nazionali, acquisendo clienti in Spagna e Germania fino ad arrivare, alla fine degli anni Settanta, alla produzione di mobili modulari per l'arredo bagno estremamente innovativi per l'epoca, con i quali si poteva costruire una stanza da bagno su misura per il cliente.

Se, in un certo senso, la produzione di questi mobili apparve molto moderna per i tempi, certamente risultava essere molto complessa per l'azienda, che vide insorgere diversi problemi legati all'utilizzo di tecnologie inusuali.

Fin dall'inizio quindi l'innovazione ha rappresentato una delle caratteristiche dominanti dell'attività.

La produzione di mobili da bagno modulari fu la prima vera affermazione sul mercato dell'azienda, ma ciò che rappresentò la svolta per il marchio fu piuttosto il lancio di lavabi alternativi per forma e funzione, che permise ben presto alla famiglia di posizionarsi in una nicchia di mercato di fascia molto alta.

## ***1.2 Attuale Posizionamento nel Mercato, Mission e Punti di Forza***

Con i suoi 51 dipendenti e un fatturato superiore a 12 milioni di euro, l'azienda è classificata come PMI (piccole-medie imprese), collocazione tipica della maggior parte delle aziende italiane operanti nel settore del design.

Il fatturato è generato per il 20% sul mercato italiano e per l'80% sul mercato internazionale in più di 60 paesi: i clienti più importanti sono in Europa, Stati Uniti, Russia, Australia, Giappone ed Estremo Oriente.

La produzione è affidata a piccole aziende, anche a livello artigianale, in quanto la collaborazione diretta tra progettisti e produttori è garanzia di qualità e permette l'uso innovativo di materiali.

La gamma di prodotti è estremamente varia e personalizzabile e permette quindi al cliente la possibilità di ottenere progetti unici e non convenzionali.

L'obiettivo di fondo dell'azienda è di proporre una soluzione in grado di risolvere ogni necessità progettuale legata alla stanza da bagno e i suoi punti di forza sono la flessibilità delle proposte, la qualità dei prodotti, l'innovazione e la continua ricerca di materiali evoluti.



### **1.3 Prodotti Analizzati**

L'analisi svolta prende in considerazione le serie storiche dei dati di vendita di due prodotti appartenenti a linee distinte: la vasca Vieques e la vasca Normal.

La vasca Vieques è stata pensata e progettata per un hotel di lusso nell'omonima località sulla costa di Puerto Rico da una designer di origine spagnola e residente a Milano, che collabora da molto tempo con l'azienda. Essa è stata presentata per la prima volta in occasione del Cersaie 2008<sup>1</sup> a Bologna e rappresenta una rivisitazione in chiave contemporanea delle antiche vasche da bagno.

La designer stessa descrive la sua idea come segue: "Vieques è un'isola molto bella, selvaggia e protetta, dove il contatto con la natura è onnipresente, quasi intimo. Questa contaminazione si trasferisce nel progetto della vasca."

Proprio per la sua unicità, la vasca Vieques simboleggia un'icona dell'azienda e la scelta di analizzare i dati relativi ad essa trova ragione nell'andamento delle sue vendite, che ha subito variazioni nel corso degli anni. Nel 2011 è stato infatti introdotto sul mercato il lavabo della stessa linea, il quale corrisponde ad un prodotto complementare e fornisce la possibilità di creare una combinazione, mentre nel 2013 è stata progettata la vasca Vieques XS di dimensioni ridotte rispetto all'originale.



*Figura 1: Vasca Vieques*

---

<sup>1</sup> Salone Internazionale della Ceramica Made in Italy

La vasca Normal, come la precedente, è entrata a far parte della gamma prodotti nel 2008 ed è stata disegnata dal fratello dell'attuale titolare, il quale è ora a capo di uno studio di design che collabora a stretto contatto con il team aziendale.

La vasca ha una forma avvolgente e accogliente, con dimensioni compatte ed un profilo particolarmente arrotondato alla base, e si distingue per essere facilmente ambientabile in qualsiasi spazio, dai contesti più tradizionali a quelli più originali.

Le motivazioni che hanno portato allo studio e all'analisi del comportamento della serie dei dati di vendita della vasca sono riconducibili alla sua linea classica e quindi imitabile dai concorrenti, fattore che può essere causa di grandi variazioni nel ciclo di vita della stessa.



*Figura 2: Vasca Normal*

Si evidenzia come le ragioni fornite per giustificare l'analisi svolta, sia per la vasca Vieques che per la vasca Normal, rappresentino due fonti diverse del cambiamento a livello di ciclo di vita del prodotto: nel primo caso si è davanti a una scelta strategica aziendale, mentre nel secondo caso si tratta di un aspetto legato al mercato in cui opera l'azienda.

## Capitolo 2

### Modelli di Diffusione per Ciclo di Vita del Prodotto

#### 2.1 Ciclo di Vita del Prodotto

Il ciclo di vita del prodotto è un concetto che viene elaborato negli anni sessanta da Vernon (1966). In analogia con la vita degli organismi biologici, la teoria intende riconoscere fasi distinte nella storia delle vendite e dei profitti del prodotto in funzione del tempo, dall'introduzione al declino. Le fasi riflettono il comportamento aggregato dei consumatori relativamente all'acquisto e al successivo abbandono di un prodotto.

Il ciclo di vita viene rappresentato da un modello ideale caratterizzato da una curva a campana, dunque dapprima crescente con il raggiungimento di un picco massimo, poi decrescente (Figura 3).

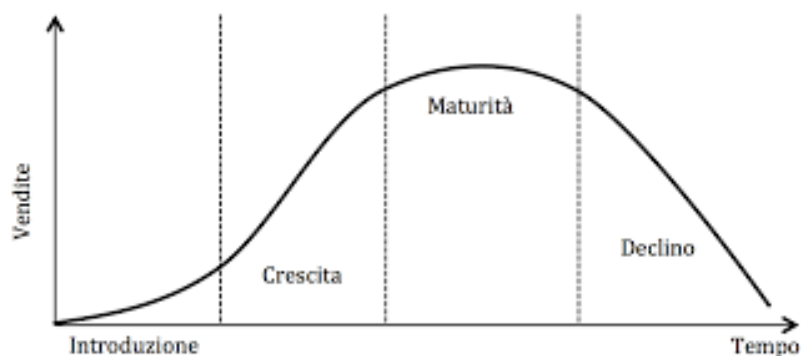


Figura 3: Ciclo di vita del prodotto

Tale teoria ipotizza l'esistenza di quattro fasi:

1. **Introduzione:** lancio del prodotto sul mercato, le vendite crescono rapidamente e i profitti risultano negativi. Lo sforzo promozionale è finalizzato ad informare ed incoraggiare la prova del prodotto.

2. **Crescita:** il prodotto si diffonde sul mercato. Lo sforzo promozionale incoraggia la ripetizione dell'adozione.
3. **Maturità:** rallentamento della crescita delle vendite e raggiungimento del punto massimo della curva, in relazione alla progressiva saturazione del mercato potenziale. Lo sforzo promozionale è rivolto a stimolare la fedeltà al marchio.
4. **Declino:** le vendite e i profitti diminuiscono, le imprese tendono a eliminare il prodotto dalla gamma.

Nello specifico, si rileva che il ciclo di vita del prodotto dipende da due aspetti:

- le strategie di marketing;
- il comportamento dei consumatori.

Le maggiori applicazioni di tale teoria si hanno pertanto in due ambiti: da una parte si ha l'adattamento e la pianificazione delle diverse leve del marketing mix rispetto alla fase del ciclo in cui si trova il prodotto, dall'altra è possibile la previsione delle vendite attraverso una specifica classe di modelli, detti modelli per ciclo di vita del prodotto, che saranno trattati nei paragrafi che seguono.

## 2.2 Modello di Bass Standard o BM (1969)

L'idea sottostante a tale modello consiste nella suddivisione della popolazione dei consumatori in due sottogruppi: gli innovatori, che adottano istantaneamente il nuovo prodotto e comprano per primi sulla base di un convincimento personale, e gli imitatori, che utilizzano il prodotto soltanto in tempi successivi, a seguito dell'effetto del passaparola.

Si ipotizza che i due gruppi di potenziali adottanti siano raggiunti da canali di comunicazione diversi tra di loro. Da un lato, si assume che gli innovatori siano sottoposti unicamente all'influenza di fattori esogeni alla popolazione di appartenenza, come la pubblicità e i mass media. Dall'altro lato, il comportamento degli imitatori è influenzato dai flussi di comunicazione interpersonale.

Il modello di Bass è espresso da un'equazione differenziale del primo ordine

$$z'(t) = \left(p + q \frac{z(t)}{m}\right) (m - z(t)) \quad (1)$$

Le vendite istantanee  $z'(t)$  sono proporzionali al mercato residuo  $(m - z(t))$ , moltiplicato per due fattori,  $p$  e  $(q \frac{z(t)}{m})$ , che descrivono il comportamento dei due gruppi di consumatori, gli innovatori ( $p$ ) e gli imitatori ( $q$ ). Il mercato potenziale  $m$  agisce come parametro di scala del processo di diffusione ed è assunto sempre costante.

La soluzione in forma chiusa del modello di Bass è definita come

$$z(t) = mF(t; p, q) = m \frac{(1 - e^{-(p+q)t})}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \quad (2)$$

A partire dall'equazione (2), si può notare come le vendite cumulate  $z(t)$  siano espresse come funzione dei parametri  $p$  e  $q$ . Il controllo dell'asintoto superiore è dovuto a  $m$ .

Il modello di Bass presenta i seguenti limiti:

- non tiene conto dell'effetto sul ciclo di vita del prodotto di variabili esogene che possono modificare la velocità della diffusione;
- è un modello pensato per prodotti che presentano un ciclo di vita finito e dunque la sua applicazione comporta quindi un'ipotesi di fondo circa l'evoluzione delle vendite del prodotto;
- il processo di diffusione non presenta sempre una forma a campana liscia, ma ha un comportamento perturbato.

Per ovviare a tali problemi, viene introdotto nel 1994 il modello di Bass Generalizzato, descritto nel paragrafo seguente.

### 2.3 Modello di Bass Generalizzato o GBM (1994)

In un articolo pubblicato nel 1994 gli autori Bass, Krishnan e Jain propongono un'estensione del modello di Bass che introduce una funzione di intervento  $x(t)$  integrabile e non negativa.

$$z'(t) = (p + q \frac{z(t)}{m})(m - z(t))x(t) \quad (3)$$

La soluzione in forma chiusa del modello di Bass Generalizzato è definita, per  $t > 0$ , come

$$z(t) = m \frac{1 - e^{-(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}}{1 + \frac{p}{q} e^{-(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}} \quad (4)$$

La funzione  $x(t)$  agisce sulla forma naturale della diffusione, modificandone la sua struttura temporale ma non i valori dei suoi parametri interni. L'effetto rilevante di  $x(t)$  è di anticipare o ritardare le adozioni, ma non di aumentarle o diminuirle.

In particolare, se  $0 < x(t) < 1$  si assiste a un *rallentamento* del processo di diffusione, mentre un valore  $x(t) > 1$  indica una sua *velocizzazione*. Se  $x(t) = 1$  il modello si riduce a un modello di Bass Standard.

La funzione  $x(t)$  può essere descritta in vari modi a seconda delle necessità di modellazione (si veda a tal proposito Guseo 2004):

- **IMPULSO ESPONENZIALE**

Una perturbazione drastica, il cui effetto è forte e veloce, può essere modellata attraverso una funzione a componente esponenziale come

$$x(t) = 1 + c_1 e^{b_1(t-a_1)} I_{t \geq a_1} \quad (5)$$

dove il parametro  $c_1$  rappresenta il segno e l'intensità dello shock,  $b_1$  descrive la durata degli effetti provocati, è negativo se la memoria delle perturbazioni decade alla

posizione stazionaria (lo shock si riassorbe), e  $a_1$  denota il tempo di inizio della perturbazione, quindi deve essere positivo. La funzione indicatrice assume il valore 1 se l'evento indicato a deponente è verificato e 0 altrimenti.

L'uso dell'impulso esponenziale risulta particolarmente utile quando si vuole identificare l'effetto positivo di strategie di marketing o meccanismi di incentivo tesi a velocizzare le adozioni. Allo stesso modo, un impulso esponenziale di segno negativo può descrivere efficacemente la drastica diminuzione nelle vendite dovuta, ad esempio, all'entrata nel mercato di un prodotto concorrente.

- **IMPULSO RETTANGOLARE**

Un intervento stabile che influisce sul processo di diffusione per un periodo relativamente lungo, può essere descritto da una funzione a componente rettangolare come

$$x(t) = 1 + c_1 I_{t \geq a_1} I_{t \leq b_1} \quad (6)$$

In questo caso il parametro  $c_1$  descrive l'intensità della perturbazione e può essere sia positivo che negativo, mentre i parametri  $a_1$  e  $b_1$  definiscono l'intervallo temporale nel quale avviene lo shock. Una tale formalizzazione traduce un comportamento transitorio stazionario. Come in precedenza, la funzione indicatrice assume valore 1 se l'evento indicato a deponente è verificato e 0 altrimenti.

L'uso dell'impulso rettangolare risulta utile quando si vuole identificare l'effetto di politiche regolatorie caratterizzate da una finestra temporale definita. Inoltre, un impulso rettangolare di segno negativo può essere utilizzato per descrivere la fase di depressione iniziale della serie.



- **IMPULSO MISTO**

In determinati casi la funzione può contenere al suo interno interventi di natura differente che descrivono localmente perturbazioni dovute a cause molto diverse.

È quindi possibile combinare insieme gli shock descritti in precedenza al fine di modellare il processo di diffusione nel modo più adeguato possibile. Un caso semplice è costituito da una coppia di impulsi, uno rettangolare e l'altro esponenziale,

$$x(t) = 1 + c_1 I_{t \geq a_1} I_{t \leq b_1} + c_2 e^{b_2(t-a_2)} I_{t \geq a_2} \quad (7)$$

dove i parametri coinvolti hanno lo stesso significato descritto in precedenza.

## **2.4 Identificazione Statistica dei Modelli non Lineari: Minimi Quadrati Non Lineari**

I modelli descritti nei paragrafi 2.2 e 2.3 sono di tipo non lineare.

Si sintetizzano di seguito alcuni concetti relativi al criterio dei minimi quadrati non lineari tratti da Guseo (2004).

Il modello concettuale di riferimento è basato sulla nozione di funzione: un carattere in uscita è ritenuto funzione esplicita o, più raramente, implicita di altri caratteri in ingresso in parte noti e quindi controllabili, in parte stocastici, in parte non rilevabili. Il tipico modello di regressione non lineare nei parametri è detto modello a regressori fissi ed è rappresentabile come somma di due componenti,

$$Z(t) = f(\beta, t) + \varepsilon(t) \quad (8)$$

dove  $Z(t)$  è la risposta del sistema dipendente dal tempo  $t$ ,  $f(\beta, t)$  è la componente deterministica, funzione reale nota dell'incognito parametro multiplo  $\beta \in \mathbb{R}^k$  e del tempo  $t$ . La seconda componente,  $\varepsilon(t)$ , è definita come un processo stocastico che rappresenta il disturbo residuale e che non può quindi essere rilevato direttamente. Si richiede che gli errori  $\varepsilon(t)$  siano di media nulla,  $M(\varepsilon(t)) = 0$ . Se a questa assunzione si aggiunge il vincolo della varianza omoschedastica ( $\text{Var}(\varepsilon(t)) = \delta^2$ ) e di incorrelazione dei residui ( $\delta_{\varepsilon(t), \varepsilon(t')} = 0, t \neq t'$ ) si ha il processo cosiddetto *white noise*.

Ad ogni modo, già la prima caratteristica degli errori  $\varepsilon(t)$  è sufficiente per l'introduzione del criterio di stima dei minimi quadrati, che ha un ruolo centrale tra i metodi di stima in quanto si pone alla base degli stessi.

Si consideri il modello

$$y(t) = f(t; \vartheta) + \varepsilon(t) \quad (9)$$

dove  $\varepsilon(t) \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$  e  $f(t; \vartheta)$  è una funzione di  $t$  non lineare nel vettore  $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k)'$ . Adottando il criterio dei minimi quadrati, la quantità da minimizzare rispetto a  $\vartheta$  è

$$S(\vartheta) = \sum_{t=1}^n [y(t) - f(t; \vartheta)]^2 \quad (10)$$

Le equazioni normali risultano

$$\frac{\partial S(\vartheta)}{\partial \vartheta_i} = -2 \sum_{t=1}^n [y(t) - f(t; \vartheta)] \frac{\partial f(t; \vartheta)}{\partial \vartheta_i} = 0, i = 1, \dots, k \quad (11)$$

Risolvendo il sistema (11) rispetto a  $\vartheta$  si ottiene la stima  $\hat{\vartheta}$  dei minimi quadrati del vettore dei parametri  $\vartheta$ .

Sotto l'ipotesi di normalità degli errori, il vettore  $\hat{\vartheta}$  che minimizza la (11) è anche stima di massima verosimiglianza di  $\vartheta$ .

La soluzione di un sistema di equazioni non lineari (come la (11)) è difficile da ricavare per via analitica: nella maggior parte dei casi si ricorre a procedure iterative, cioè la sequenza viene troncata dopo un numero finito di iterazioni,  $N$ , e si accetta  $\vartheta_N$  come approssimazione di  $\vartheta$ .

Sulla base di tale metodo di stima nascono poi il metodo di Gauss-Newton, che consiste nel linearizzare  $f(t; \vartheta)$  e il metodo di Levenberg-Marquardt, che introduce una sostanziale modifica all'algoritmo di Gauss-Newton.

Il metodo utilizzato per stimare i modelli per ciclo di vita del prodotto presentati in questo elaborato è il metodo di Levenberg-Marquardt.

## 2.5 Adattamento del Modello ai Dati e Confronto fra Modelli Annidati

Una misura della bontà di adattamento del modello ai dati è rappresentata dall'indice di determinazione, così costruito:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (12)$$

dove SSR rappresenta la devianza spiegata dal modello, SSE la devianza residua e SST la devianza totale.

All'interno dell'analisi presentata, si troverà sempre l'indice in termini percentuali (ad esempio  $R^2 = 99,898\%$  corrisponde a  $R^2=0,99898$ ) e di entità molto elevata, ossia con valori superiori a 0,95. Questo fenomeno è da ricondurre al fatto che sono stati utilizzati dati cumulati, il cui grafico è tipicamente rappresentato da una curva a forma di S. Esso coglie naturalmente molto bene l'andamento dei dati, lasciando di conseguenza una devianza residua quasi irrilevante.

Sulla base dell'indice di determinazione si costruiscono il rapporto di correlazione multipla parziale al quadrato,  $\tilde{R}^2$ , e il suo diretto corrispettivo rapporto F. Entrambi vengono utilizzati al fine di confrontare modelli annidati, ossia allo scopo di valutare la performance di un modello esteso,  $m_2$ , rispetto a uno più semplice,  $m_1$ . Nella fattispecie, risultano interessanti per questo elaborato confronti come quello fra il modello di Bass Standard (caratterizzato da 3 parametri) e il modello di Bass Generalizzato (caratterizzato da un numero di parametri maggiore di 3 e variabile) oppure quello fra gli stessi modelli di Bass Generalizzato, uno con un numero inferiore di parametri rispetto all'altro.

$$\tilde{R}^2 = \frac{SSE_{m_1} - SSE_{m_2}}{SSE_{m_1}} = \frac{R_{m_2}^2 - R_{m_1}^2}{1 - R_{m_1}^2} \quad (13)$$

$$F = \frac{\tilde{R}^2(n-v)}{(1-\tilde{R}^2)u} \quad (14)$$

dove  $n$  è il numero di osservazioni,  $v$  è il numero di parametri del modello esteso  $m_2$  e  $u$  è l'incremento dei parametri che si ha passando dal modello ridotto al modello esteso. Sotto opportune condizioni sulla distribuzione di  $\varepsilon(t)$ , la statistica  $F$  è una  $F$  di Snedecor's con  $u$  gradi di libertà al numeratore e  $(n-v)$  al denominatore.

## 2.6 Analisi dei Residui e Statistica di Durbin-Watson

L'analisi dei residui permette di verificare l'adeguatezza del modello scelto per stimare le componenti deterministiche e, quindi, di giustificarne l'uso ai fini previsivi. La verifica fornisce esito positivo se è lecito pensare che la serie dei residui sia stata generata da un processo *white noise*. I grafici più comunemente usati per osservare la struttura dei residui consistono in diagrammi di dispersione, che riportano i residui  $e_t$  in ordinata mentre in ascissa i valori stimati della variabile dipendente (in alternativa si possono usare i valori osservati di una delle variabili indipendenti). Se valgono le assunzioni di normalità, indipendenza e omoschedasticità dei residui, tali diagrammi danno luogo ad una nuvola di punti che non presenta particolari strutture. In particolare i punti tendono a disporsi tra i valori -2 e 2 e risultano distribuiti casualmente intorno allo zero, come mostrato nella figura 4.

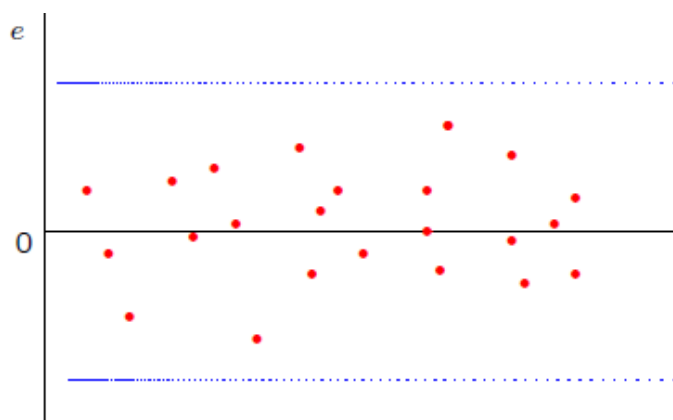


Figura 4: Residui indipendenti

Si concentra lo studio sulla violazione dell'ipotesi di indipendenza dei residui, che introduce il problema dell'autocorrelazione positiva degli stessi, data la tipicità di questo fenomeno nei modelli utilizzati dal presente elaborato. Tale problema può venire diagnosticato attraverso il grafico sopra descritto, il quale riporterà un andamento sistematico dei residui intorno alla media nulla, come si può notare dalla figura 5.

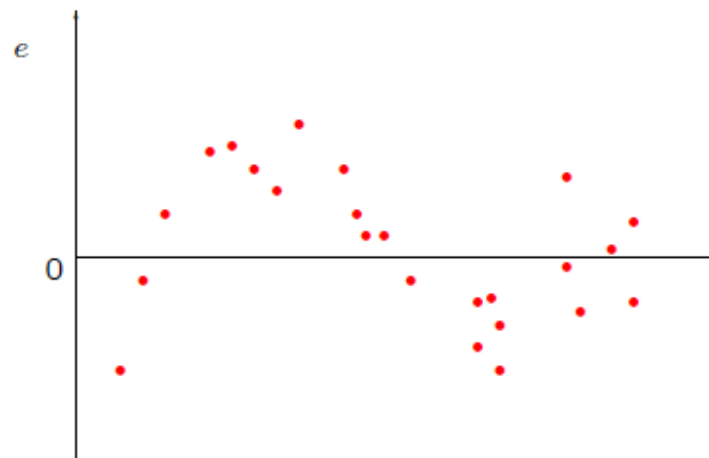


Figura 5: Residui Autocorrelati

Anche osservando la funzione di autocorrelazione dei residui (ACF) e il corrispondente grafico, chiamato correlogramma, è possibile verificare la violazione dell'ipotesi in questione. Si costruiscono le bande di confidenza riportate nel correlogramma (in blu nella figura 6) attraverso l'intervallo

$$\left[-\frac{z}{\sqrt{n}}, \frac{z}{\sqrt{n}}\right]$$

dove  $z$  è funzione del livello di significatività scelto. In genere si pone  $z = 2$  che corrisponde all'incirca a un livello di significatività pari a 0,05. I coefficienti di autocorrelazione stimati (in rosso nella figura 6) che si posizionano all'esterno di tale intervallo respingono l'ipotesi di successione generata da un processo *white noise*, confermando quindi la presenza di autocorrelazione positiva dei residui.

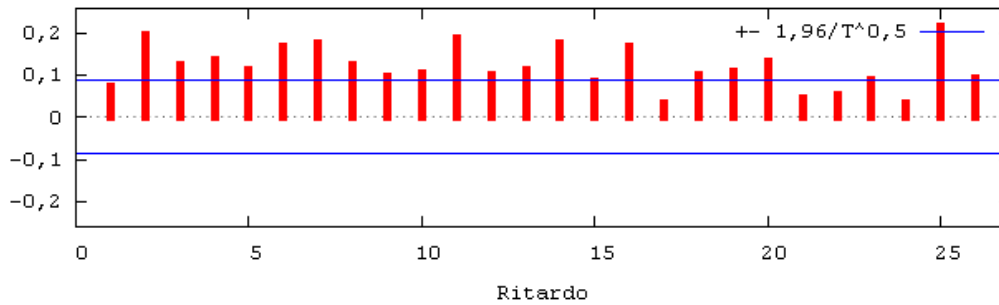


Figura 6: Esempio di correlogramma con residui autocorrelati

Un tipico esempio di autocorrelazione è l'autocorrelazione di primo ordine, così definita:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \quad (15)$$

dove  $\rho$  è la correlazione tra errori consecutivi e  $u_t$  è una componente erratica di media nulla e varianza costante. Se  $\rho = 0$  allora  $\varepsilon_t = u_t$ .

Il test di Durbin-Watson viene utilizzato per diagnosticare la presenza di questo tipo di autocorrelazione. Il sistema di ipotesi è il seguente:

$$H_0: \rho = 0, H_1: \rho > 0$$

$H_0$  verifica incorrelazione dei residui, al contrario  $H_1$  presenta autocorrelazione positiva degli stessi. Il test è definito come:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \quad (16)$$

I valori di DW variano tra 0 e 4 con un valore centrale 2. Come descritto nella figura 7, se  $DW > du$  allora è verificata l'ipotesi  $H_0$  mentre se  $DW < dL$  si respinge  $H_0$  a favore di  $H_1$ . Per determinare  $du$  e  $dL$  è necessario disporre delle apposite tavole e conoscere la dimensione del campione, il livello di significatività e il numero di variabili indipendenti.



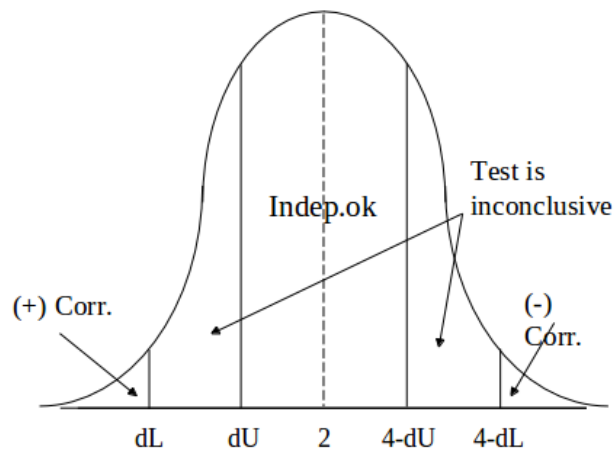


Figura 7: Statistica di Durbin-Watson

In generale, si dimostra che valori di DW prossimi al valore 2 indicano incorrelazione dei residui mentre valori vicini allo zero stanno a significare autocorrelazione positiva degli stessi.

## 2.7 Affinamento ARMAx

Una volta che l'autocorrelazione dei residui viene diagnosticata, è necessario rimuoverla o modellarla. Si tratta quindi di articolare meglio la rappresentazione formale di  $\varepsilon_t$ . Una possibilità viene offerta da Guseo (2004) e fa riferimento all'uso di modelli ARMAx (o SARMAx nel caso sia presente una componente stagionale).

Si definisce un processo ARMA(p,q) (Box e Jenkins, 1970), come segue:

$$\phi_p(B)Y_t = \theta_q(B)a_t \quad (17)$$

dove  $a_t$  è un processo *white noise* e

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$$

Per completezza, si definisce un processo SARMA(p,q)x(P,Q)<sub>s</sub> in questo modo:

$$\Phi_P(B^S)\phi_p(B)Y_t = \Theta_Q(B^S)\theta_q(B)a_t \quad (18)$$

dove  $a_t$ ,  $\phi_p(B)$  e  $\theta_q(B)$  assumono il precedente significato e

$$\Phi_P(B^S) = 1 - \Phi_1 B^S - \dots - \Phi_P B^{Ps}$$

$$\Theta_Q(B^S) = 1 - \Theta_1 B^S - \dots - \Theta_Q B^{Qs}$$

I modelli ARMA (o SARMA) possono essere utilizzati solo su serie stazionarie o stazionarizzabili mediante differenziazioni. Le serie nell'ambito del ciclo di vita del prodotto non sono di questo tipo. Questo è il motivo per cui il trend non lineare viene modellato da specifiche funzioni matematiche, i modelli di diffusione, e non con procedure Box-Jenkins come quelle appena descritte.

L'affinamento ARMAx viene così definito:

$$\phi(B)[w_t - c\eta(\hat{\beta}, t)] = \theta(B)a_t \quad (19)$$

dove  $w_t$  è la serie osservata,  $\eta(\hat{\beta}, t)$  è la serie prevista secondo il modello scelto,  $a_t$  è un processo *white noise*,  $\phi(B)$  e  $\theta(B)$  hanno il significato prima esposto. Il parametro  $c$  è detto di calibrazione e consente di verificare l'appropriatezza del modello globale  $\eta(\hat{\beta}, t)$  basata su una soluzione dei minimi quadrati  $\hat{\beta}$ . Nello specifico, se  $c = 1$  allora il modello risulta

$$\phi(B)\varepsilon(t) = \theta(B)a_t \quad (20)$$

e dimostra che la serie su cui sto operando è proprio quella dei residui.

Tale approccio può essere esteso introducendo una componente stagionale. In questo caso l'affinamento SARMAx si definisce come:

$$\Phi(B^S)\phi(B)[w_t - c\eta(\hat{\beta}, t)] = \Theta(B^S)\theta(B)a_t \quad (21)$$

Si sottolinea anche che la tecnica dell'affinamento ARMAx (o SARMAx), oltre a rendere la serie dei residui *white noise*, fa sì che le oscillazioni della serie intorno al modello stimato vengano adeguatamente descritte, al fine di ottenere un'analisi ancora più precisa ed accurata.

## Capitolo 3

### Analisi delle Variazioni del Ciclo di Vita attraverso l'Applicazione dei Modelli ai Dati

In questo capitolo vengono studiate in modo distinto le serie storiche mensili dei dati di vendita della vasca Vieques (paragrafo 3.1) e della vasca Normal (paragrafo 3.2).

Il programma statistico utilizzato ai fini analitici è *Statgraphics* e i modelli di diffusione applicati sono quelli illustrati nel capitolo precedente (in particolare: paragrafi 2.2 e 2.3).

#### **3.1 Shock Intervenuti a Causa di Decisioni Interne all'Azienda**

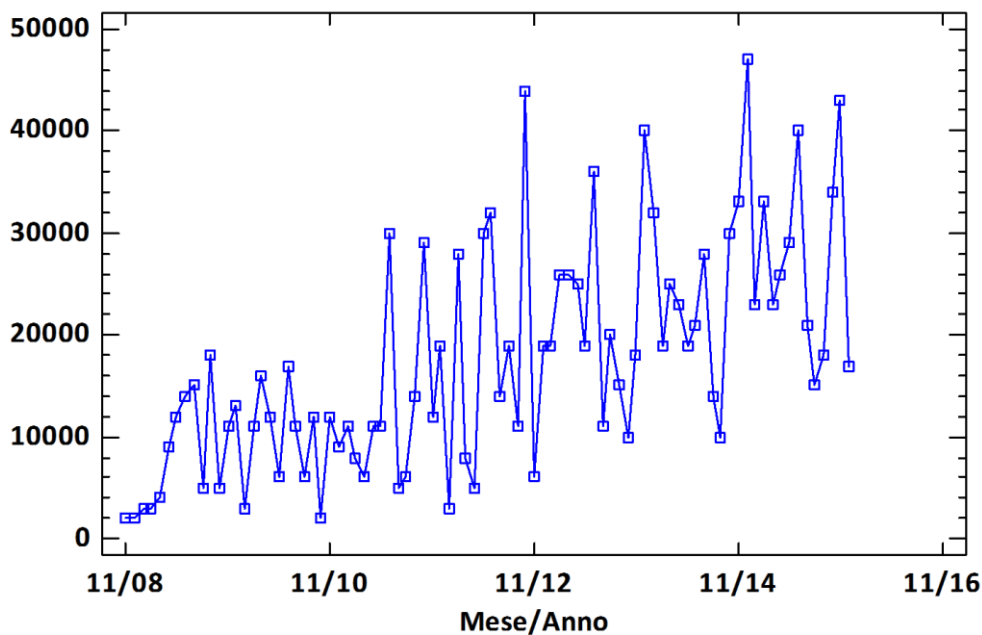


Grafico 1: Serie storica delle vendite mensili di Vieques

Come si evince dal grafico 1, la serie è caratterizzata complessivamente da un trend crescente. Da notare il significativo rallentamento che subisce la stessa nella sua ultima parte. Inoltre, visti i numerosi picchi verso l'alto e verso il basso, è evidente una forte componente di tipo stagionale.

Giustificati dall'andamento della serie, si procede con la stima di un modello di Bass Standard, partendo dai seguenti valori iniziali:

Tabella 1: Stime iniziali

<b>Stime iniziali</b>	
<b>m</b>	160000
<b>p</b>	0,01
<b>q</b>	0,1

Si sono ottenute le stime dei parametri (m, p e q) e la tabella dell'analisi della varianza e dei residui:

Tabella 2: Risultati delle stime

<b>Parametro</b>	<b>Stima</b>	<b>Errore standard</b>	<b>I.C. inferiore 95%</b>	<b>I.C.superiore 95%</b>
<b>m</b>	3,2225E6	161645,	2,901E6	3,54401E6
<b>p</b>	0,00189846	0,0000668238	0,00176555	0,00203137
<b>q</b>	0,030148	0,000884598	0,0283886	0,0319074

Tabella 3: Tabella della varianza e dei residui

<b>Sorgente</b>	<b>Somma dei quadrati</b>	<b>G.l.</b>	<b>Media dei quadrati</b>
<b>Modello</b>	4,66756E13	3	1,55585E13
<b>Residuo</b>	1,09575E10	83	1,32018E8
<b>Totale</b>	4,66865E13	86	
<b>Totale (Corr.)</b>	1,72037E13	85	

R-quadrato = **99,9363%**

Statistica di Durbin-Watson = 0,54199

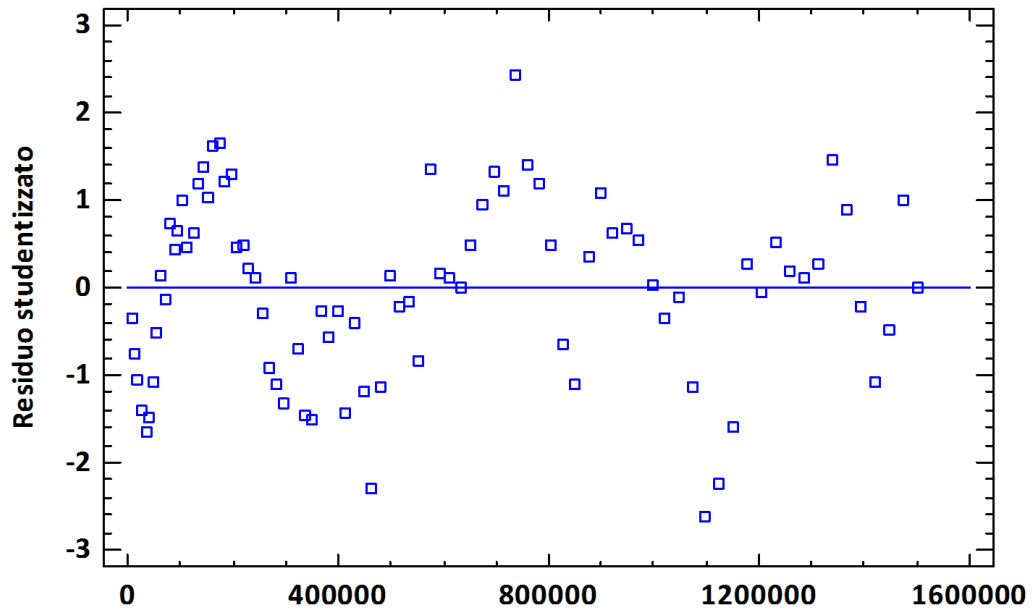


Grafico 2: Grafico dei residui – Residui autocorrelati

### Bass Model

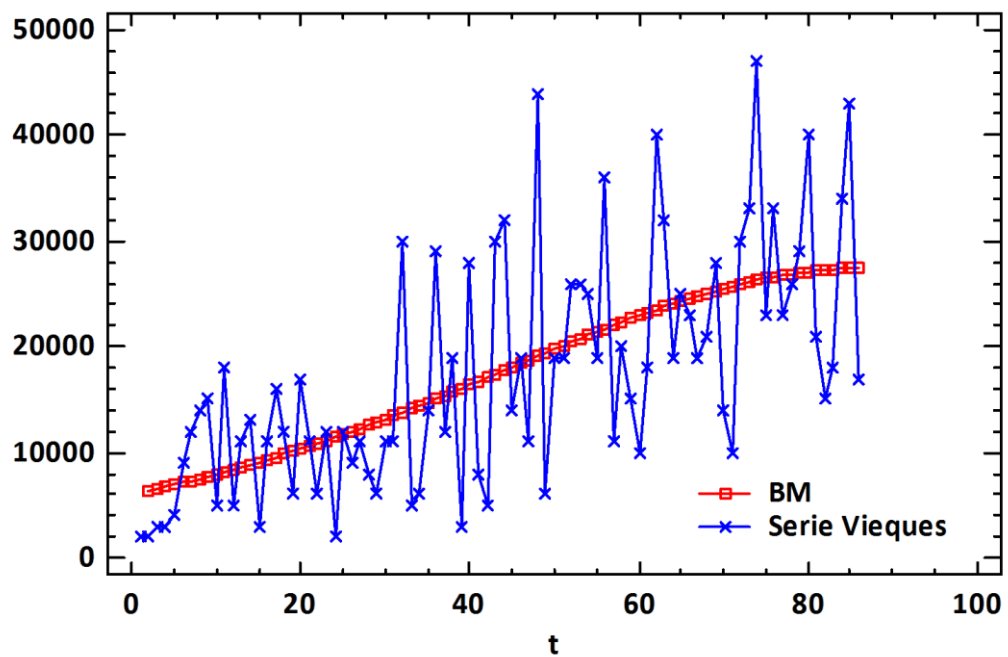


Grafico 3: Modello di Bass adattato alla serie di Vieques

Si considerano, in prima analisi, le stime dei parametri di diffusione:  $m$ ,  $p$  e  $q$  risultano essere tutti significativi, in quanto gli intervalli di confidenza al 95% non contengono lo zero. Il parametro  $q$  è superiore al parametro  $p$ , risultato che dimostra la prevalenza della componente di passaparola su quella innovativa. Il rapporto  $\frac{q}{p}$  è pari a 15,88. Tale dato rafforza quanto appena affermato, riconoscendo una parte di imitatori quasi 16 volte superiore a quella degli innovatori. Molto interessante da considerare è l'entità del parametro  $q$ , che nonostante la sua prevalenza, si dimostra comunque piuttosto basso. La giustificazione di tale risultato risiede nelle caratteristiche dell'azienda, o meglio, nella posizione di mercato della stessa: i prodotti offerti non sono infatti accessibili a tutta la popolazione, bensì rappresentano una nicchia, e per questo il passaparola non è il meccanismo privilegiato come mezzo di comunicazione. Tale conclusione accompagnerà tutte le analisi presentate in seguito.

Passando ora alla valutazione del coefficiente di determinazione  $R^2$ , vediamo che questo è pari a 99,9363%. Rappresentando la bontà di adattamento ai dati del modello, possiamo considerarlo un risultato soddisfacente. Anche graficamente è possibile confermare quanto appena detto: il modello (in rosso) nel grafico 3 coglie bene l'andamento medio della serie ma presenta anche alcuni problemi.

In primo luogo si può notare che il grafico non descrive adeguatamente la prima parte delle vendite, sovrastimandone l'andamento. Inoltre, si evincono delle perturbazioni intervenute lungo il ciclo di vita di Vieques che non vengono colte da BM.

Alla luce di quanto affermato e delle informazioni in possesso, si procede alla stima di un modello di Bass Generalizzato.

Dalla statistica di Durbin-Watson e dal grafico dei residui (grafico 2), si osserva un'autocorrelazione positiva degli stessi: la prima è pari a 0,54 e quindi prossima allo zero, mentre nel grafico dei residui è possibile notare un andamento sistematico

intorno alla media nulla. Si precisa che questo fenomeno, tipico dei modelli per ciclo di vita del prodotto, verrà affrontato in seguito attraverso un affinamento ARMAx.

Come precedentemente accennato, il ciclo di vita della vasca Vieques è stato influenzato da più eventi: nel luglio del 2011, l'azienda decide di introdurre nel mercato il lavabo Vieques che amplia la linea della vasca ed offre ai clienti la possibilità di creare combinazioni di arredamento interessanti. Due anni dopo, precisamente nell'agosto del 2013, viene presentata al pubblico la vasca Vieques XS: esteticamente identica all'originale, solo di dimensioni ridotte.

Si propone quindi la stima di un modello di Bass Generalizzato con uno shock esponenziale positivo in corrispondenza del lancio del lavabo e uno shock rettangolare negativo coincidente al periodo di introduzione nel mercato di Vieques XS, partendo dai seguenti valori iniziali:

Tabella 4: Stime iniziali

<b>Stime Iniziali</b>	
<b>m</b>	3222000
<b>P</b>	0,00189
<b>q</b>	0,03
<b>c1</b>	0,5
<b>b1</b>	-0,1
<b>a1</b>	33
<b>c2</b>	-0,1
<b>a2</b>	56
<b>b2</b>	74



I risultati ottenuti sono i seguenti:

Tabella 5: Risultati delle stime

<b>Parametro</b>	<b>Stima</b>	<b>Errore standard</b>	<b>I.C. inferiore 95%</b>	<b>I.C.superiore 95%</b>
<b>m</b>	3,27012E6	2,34017E6	-1,38977E6	7,93E6
<b>p</b>	0,0020209	0,0014119	-0,000790568	0,00483236
<b>q</b>	0,0252421	0,00402213	0,017233	0,0332512
<b>c1</b>	0,249554	0,0726935	0,104802	0,394305
<b>b1</b>	-0,00775165	0,0673633	-0,141889	0,126386
<b>a1</b>	41,3317	2,05902	37,2316	45,4317
<b>c2</b>	-0,160625	0,1007	-0,361146	0,0398948
<b>a2</b>	54,4719	2,38141	49,7299	59,2139
<b>b2</b>	70,8583	2,60167	65,6777	76,0389

Tabella 6: Tabella della varianza e dei residui

<b>Sorgente</b>	<b>Somma dei quadrati</b>	<b>G.l.</b>	<b>Media dei quadrati</b>
<b>Modello</b>	4,66795E13	9	5,18661E12
<b>Residuo</b>	7,05606E9	77	9,16372E7
<b>Totale</b>	4,66865E13	86	
<b>Totale (Corr.)</b>	1,72037E13	85	

R-quadrato = **99,959%**

Statistica di Durbin-Watson = 0,802839

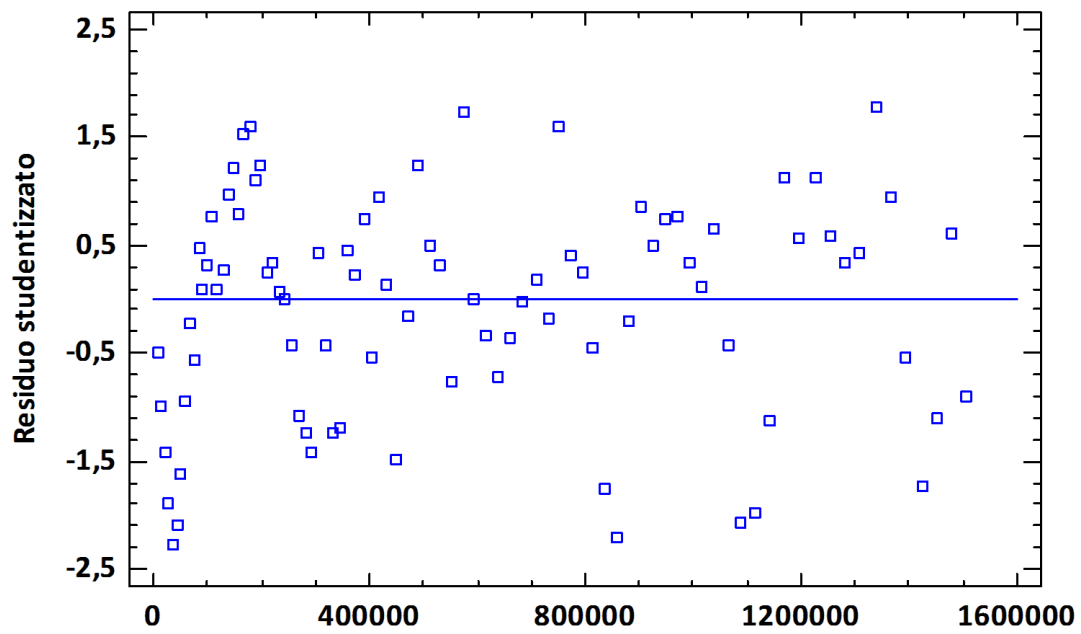


Grafico 4: Grafico dei residui – Residui autocorrelati

**GBM con 1 shock esponenziale e 1 shock rettangolare**

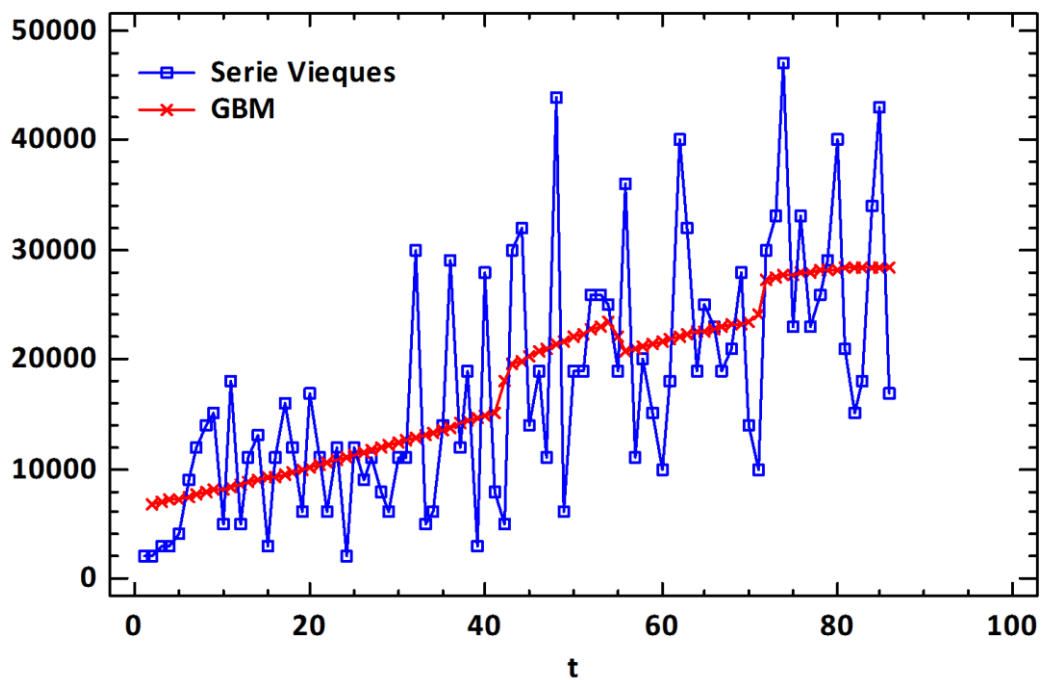


Grafico 5: Modello di Bass Generalizzato con 2 shock adattato alla serie di Vieques

I parametri  $a_1$ ,  $b_1$  e  $c_1$  sono esplicativi dello shock esponenziale mentre i parametri  $a_2$ ,  $b_2$  e  $c_2$  descrivono lo shock rettangolare.

Il parametro  $a_1$  identifica come momento iniziale della perturbazione il mese di marzo 2012, con un parametro  $c_1$  pari a 0,24 che quindi conferma effettivamente l'esistenza dello shock, anche se non di grande intensità.

I parametri  $a_2$  e  $b_2$  indicano come finestra temporale della perturbazione di tipo rettangolare quella che va da aprile 2013 a settembre 2014 con un parametro  $c_2$  pari a -0,16 che quindi sembrerebbe confermare l'esistenza di uno shock, ma la cui stima risulta essere instabile. Altre stime instabili sono quelle di  $m$ ,  $p$  e  $b_1$ .

Visti il periodo in cui il modello colloca lo shock rettangolare, che non coincide con l'evento considerato (il lancio avviene nell'agosto 2013, quindi più tardi rispetto a quanto stimato) e i risultati delle stime non soddisfacenti (particolarmente rilevante quella di  $c_2$ ), si mette in discussione l'effettiva esistenza della perturbazione negativa.

Per valutare tale tesi e in generale l'effettivo miglioramento riscontrato passando dal modello di Bass Standard al modello di Bass Generalizzato, si conduce il confronto fra modelli nidificati (BM e GBM sono tali) attraverso l'indice  $\tilde{R}^2$  e il rapporto  $F$ .

$$\tilde{R}^2 = 0,356$$

$$\text{Rapporto } F = 7,09$$

Entrambi i risultati sono a favore dell'estensione dal BM al GBM, anche se non in modo decisivo.

Nonostante quest'ultimo risultato, si procede con l'eliminazione dal modello dello shock rettangolare negativo, tenendo solo l'esponenziale positivo, giustificati dal fatto che la stima del parametro  $c_2$  è di entità molto bassa ed instabile. Così facendo si facilita inoltre l'interpretazione del modello, resa prima molto difficile dalla

collocazione temporale dello shock rettangolare. Si propone quindi il modello più semplice, partendo dai seguenti valori:

Tabella 7: Stime iniziali

<b>Stime Iniziali</b>	
<b>m</b>	3222000
<b>P</b>	0,00189
<b>q</b>	0,03
<b>c1</b>	0,5
<b>b1</b>	-0,1
<b>a1</b>	33

I risultati ottenuti sono i seguenti:

Tabella 8: Risultati delle stime

<b>Parametro</b>	<b>Stima</b>	<b>Errore standard</b>	<b>I.C. inferiore 95%</b>	<b>I.C.superiore 95%</b>
<b>m</b>	5,32649E6	1,16741E6	3,00326E6	7,64972E6
<b>p</b>	0,00125901	0,000242315	0,000776782	0,00174123
<b>q</b>	0,0229241	0,00200645	0,0189311	0,026917
<b>c1</b>	0,498651	0,16641	0,167483	0,829818
<b>b1</b>	-0,170971	0,0839303	-0,337998	-0,00394436
<b>a1</b>	41,9961	1,47133	39,0681	44,9242

Tabella 9: Tabella della varianza e dei residui

<b>Sorgente</b>	<b>Somma dei quadrati</b>	<b>G.l.</b>	<b>Media dei quadrati</b>
<b>Modello</b>	4,66787E13	6	7,77979E12
<b>Residuo</b>	7,77748E9	80	9,72185E7
<b>Totale</b>	4,66865E13	86	
<b>Totale (Corr.)</b>	1,72037E13	85	

R-quadrato = **99,9548%**

Statistica di Durbin-Watson = 0,733047

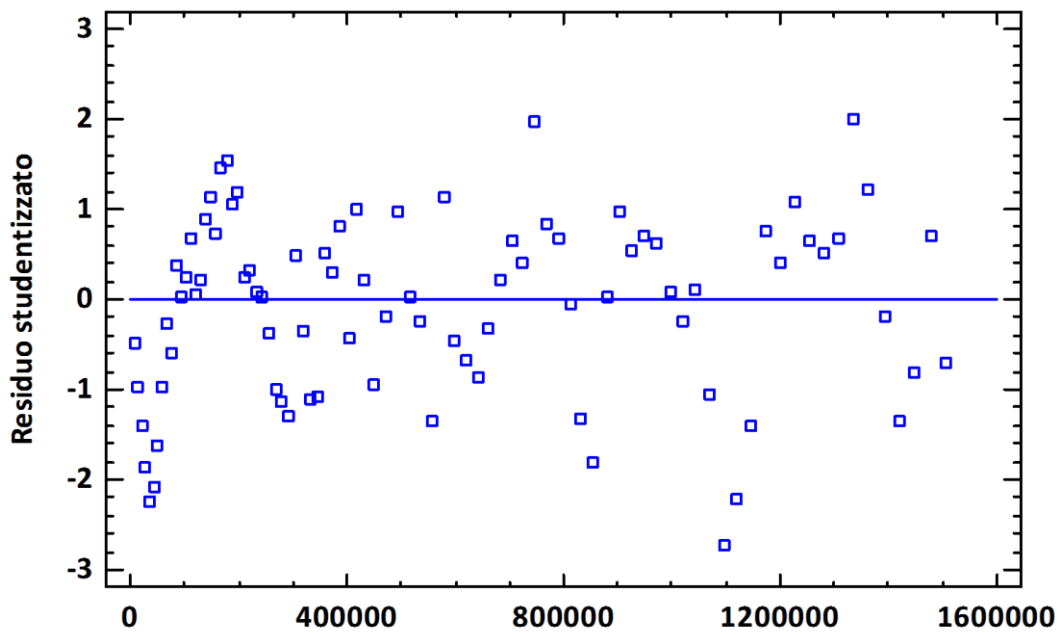


Grafico 6: Grafico dei residui – Residui Autocorrelati

### GBM con 1 shock esponenziale

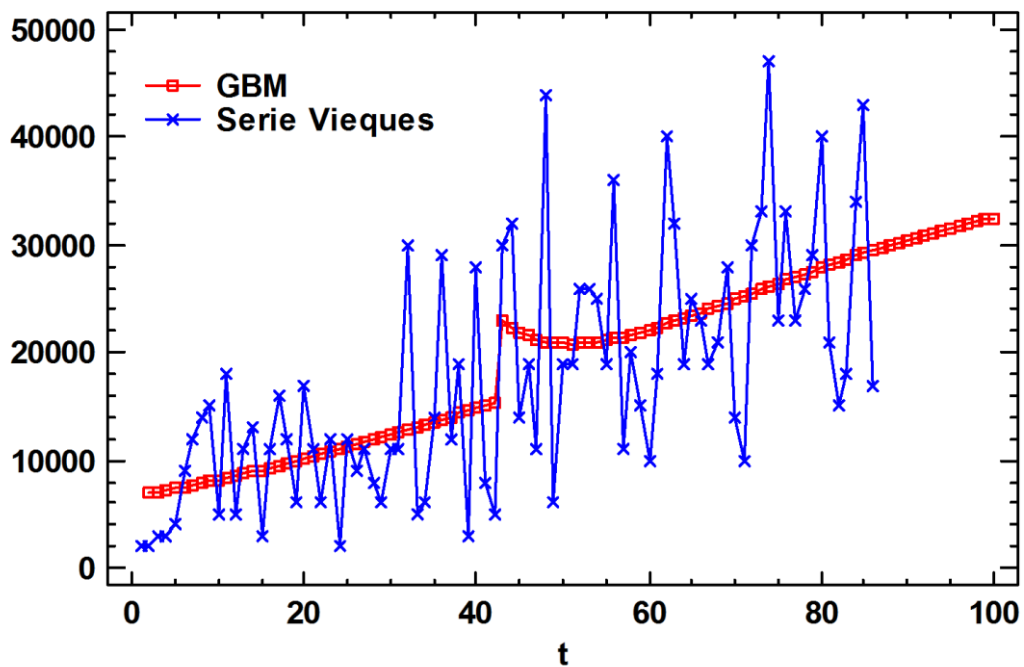


Grafico 7: Modello di Bass Generalizzato con uno shock esponenziale adattato alla serie di Vieques

Come si nota dalla tabella 8, tutte le stime dei parametri di diffusione sono ora significative, gli intervalli di confidenza al 95% non contengono cioè lo zero e nella fattispecie si osserva che lo shock è ben identificato dal parametro  $c_1$  (pari a 0,49) e che il parametro  $a_1$  fissa come tempo di inizio della perturbazione  $t = 42$ , che corrisponde a marzo 2012. Particolarmente interessante è la stima del mercato potenziale  $m$ , ora pari a 5.326.490 con una differenza di poco più di due milioni rispetto al modello Bass Standard: questo fenomeno è tipico nel momento in cui si passa dal modello più semplice a quello più complesso ed è estremamente positivo, in quanto corregge la tendenza di BM a sottostimare il mercato potenziale, chiudendo anticipatamente il ciclo di vita del prodotto.

Dal grafico 7, si può immediatamente riscontrare un significativo miglioramento nel passaggio da BM a GBM con uno shock esponenziale, ma per verificare ciò empiricamente si procede al calcolo dell'indice  $\tilde{R}^2$  e del rapporto  $F$ .

$$\tilde{R}^2 = 0,29$$

$$\text{Rapporto } F = 10,892$$

Si presenta una situazione analoga alla precedente, dove sia il primo indice (anche se borderline) che il secondo (più alto rispetto all'analisi prima descritta) sono a favore dell'estensione da BM a GBM.

Alla luce dei risultati delle stime e dell'andamento del grafico 7, si considera questo come miglior modello. Risultato che trova conferma anche nel grafico 8, dove si confronta il GBM con due shock (uno esponenziale e l'altro rettangolare) e il GBM con il solo shock esponenziale: fra i due non si evince una netta differenza nella capacità di descrivere la serie. In questo modo, si giustifica ulteriormente la scelta di togliere la perturbazione negativa.

### Confronto fra Modelli

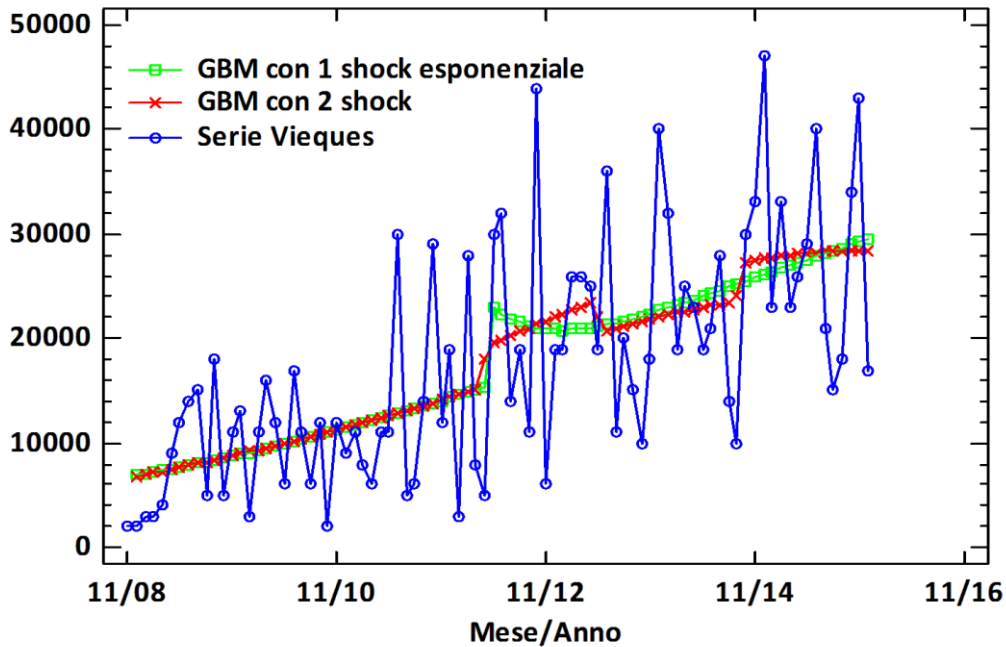


Grafico 8: Confronto dei modelli stimati

È riconosciuta quindi un'effettiva variazione del ciclo di vita della vasca in seguito al lancio nel mercato del lavabo complementare, partita però solo otto mesi dopo. Non si tratta di un risultato anomalo: persiste sempre un arco temporale da quando si verifica un evento a quando esso si riscontra effettivamente nei dati. I motivi sono svariati: in questo caso si ipotizza che i clienti abbiano impiegato del tempo ad apprezzare la possibilità di combinare insieme i due prodotti, concentrandosi inizialmente sul nuovo bene in commercio, e solo in seguito concependo gli stessi come complementari.

La variazione del ciclo di vita causata dall'introduzione della vasca di dimensione ridotte non è invece dimostrata attraverso le analisi svolte, rimane dunque solo un'ipotesi.

Tuttavia, sussiste ancora il problema dell'autocorrelazione positiva dei residui: la statistica di Durbin-Watson è pari a 0,733047 e il grafico 6 mostra un andamento oscillatorio intorno alla media nulla. Si procede pertanto a un affinamento ARMAx. Il modello migliore è un SARIMA(0,0,2)x(2,0,2)<sub>12</sub> con le previsioni ottenute applicando il GBM con uno shock esponenziale come regressore esterno. Sono presenti due componenti stagionali autoregressive e due a media mobile, entrambe di tipo mensile.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

Tabella 10: Risultati delle stime

<b>Parametro</b>	<b>Stima</b>	<b>Errore standard</b>	<b>t</b>	<b>P value</b>
<b>MA(1)</b>	-0,567884	0,11019	-5,15367	0,000002
<b>MA(2)</b>	-0,349095	0,109729	-3,18144	0,002104
<b>SAR(1)</b>	0,467295	0,095679	4,88399	0,000005
<b>SAR(2)</b>	1,19852	0,144947	8,26868	0,000000
<b>SMA(1)</b>	0,306641	0,0530064	5,78498	0,000000
<b>SMA(2)</b>	1,39224	0,0705881	19,7235	0,000000
<b>GBM</b>	1,00313	0,00373161	268,82	0,000000

La stima del parametro  $c$ , associata al regressore "GBM" assume un valore approssimativamente unitario ( $c=1,00313$ ), indicando un'ottima centratura del modello non lineare prescelto.



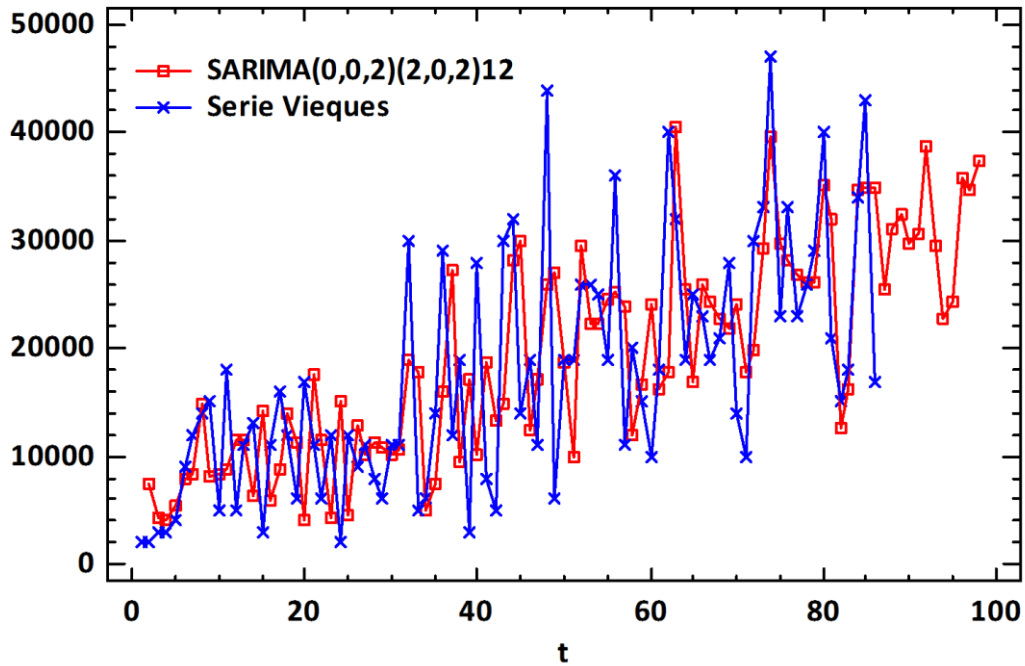


Grafico 9: Affinamento SARMAx (0,0,2)x(2,0,2)12 e serie Vieques

L'affinamento SARMAx oltre a comportare un ulteriore miglioramento dell'analisi, come appare evidente nel grafico 9, rende la serie dei residui casuale. Il correlogramma che segue (grafico 10) dimostra quanto appena detto: tutte le autocorrelazioni stanno all'interno delle bande di confidenza (calcolate al 95%), risultando quindi non significative e verificando l'effettiva assenza di autocorrelazione positiva dei residui.

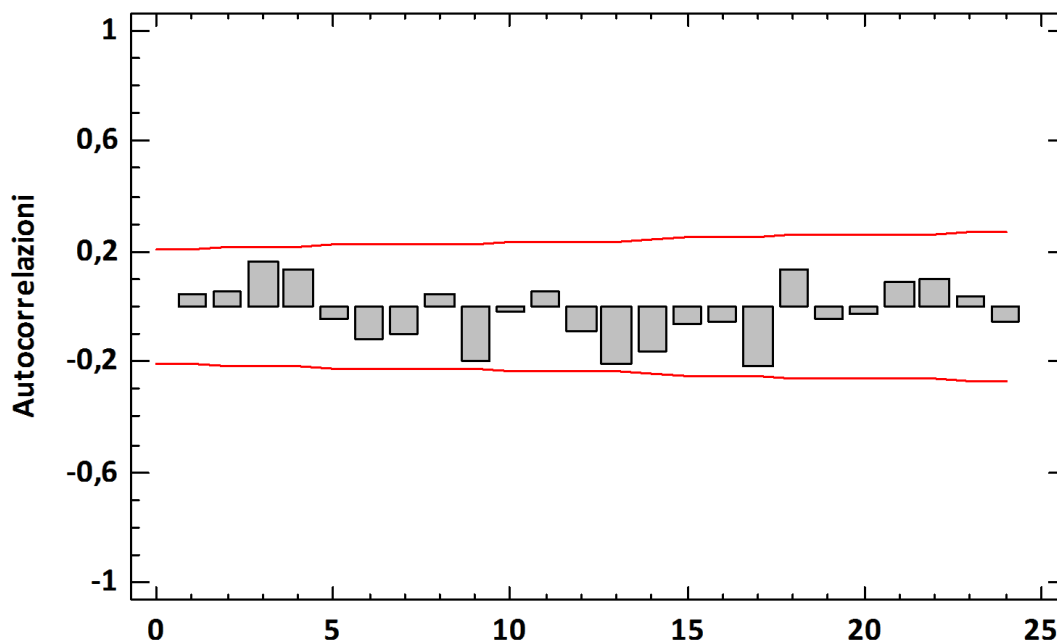


Grafico 10: Correlogramma dei residui

### 3.2 Shock Intervenuti a Causa di Fattori Esogeni: la Concorrenza

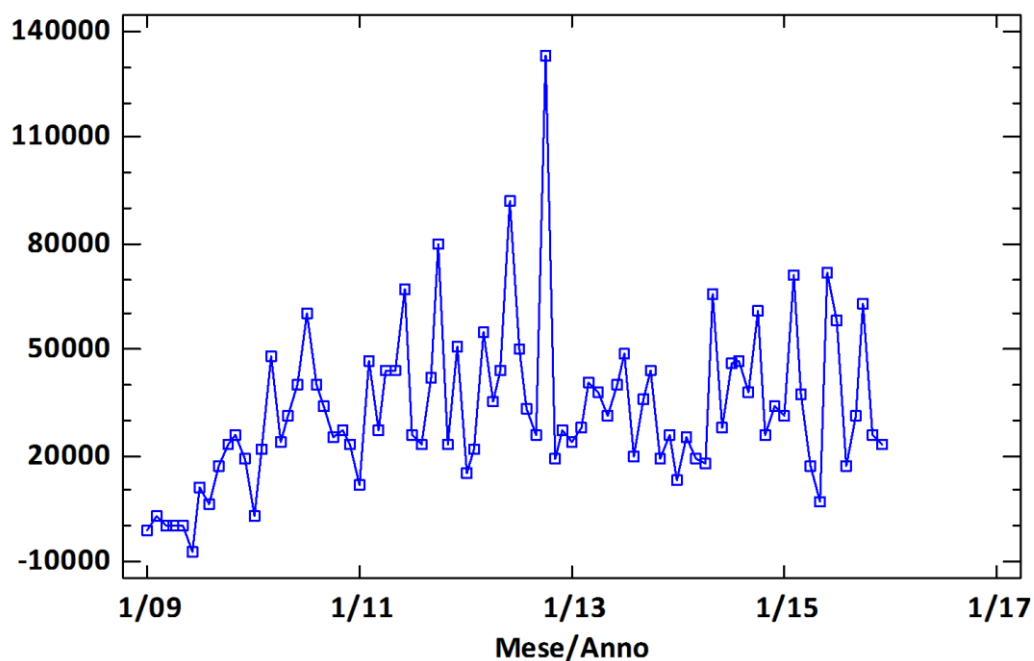


Grafico 11: Serie storica delle vendite mensili di Normal

La serie è caratterizzata da un trend crescente iniziale, interrotto circa a metà (come evidente dal grafico 11) da un repentino cambio di regime, il quale provoca un notevole rallentamento nell'andamento delle vendite. Analogamente alla serie analizzata nel precedente paragrafo, anche qui si riscontra una forte stagionalità.

Si stima quindi inizialmente un modello di Bass Standard, partendo dai seguenti valori di partenza:

Tabella 11: Stime iniziali

<b>Stime iniziali</b>	
<b>m</b>	3000000
<b>p</b>	0,01
<b>q</b>	0,1

Si sono ottenute le stime dei parametri ( $m$ ,  $p$  e  $q$ ) e la tabella dell'analisi della varianza e dei residui:

Tabella 12: Risultati delle stime

<b>Parametro</b>	<b>Stima</b>	<b>Errore standard</b>	<b>I.C. inferiore 95%</b>	<b>I.C.superiore 95%</b>
<b>m</b>	3,12124E6	74661,3	2,97268E6	3,26979E6
<b>p</b>	0,00383819	0,00015244	0,00353488	0,0041415
<b>q</b>	0,0489307	0,00239312	0,0441691	0,0536922

Tabella 13: Tabella della varianza e dei residui

<b>Sorgente</b>	<b>Somma dei quadrati</b>	<b>G.l.</b>	<b>Media dei quadrati</b>
<b>Modello</b>	1,96072E14	3	6,53573E13
<b>Residuo</b>	3,05039E11	81	3,76592E9
<b>Totale</b>	1,96377E14	84	
<b>Totale (Corr.)</b>	6,68753E13	83	

R-quadrato = **99,5439%**

Statistica di Durbin-Watson = 0,113718

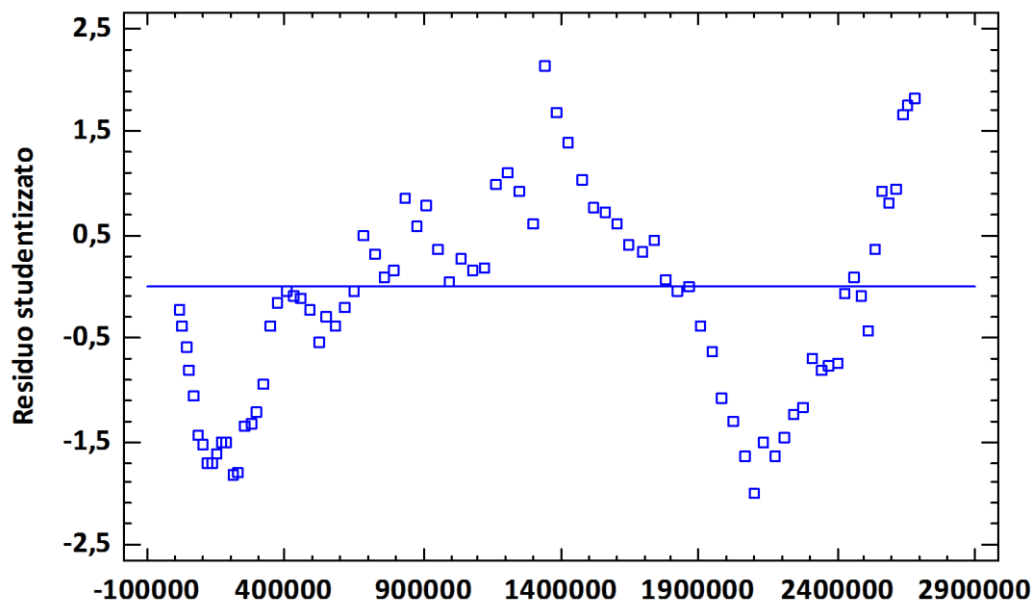


Grafico 12: Grafico dei residui – Residui Autocorrelati

Bass Model

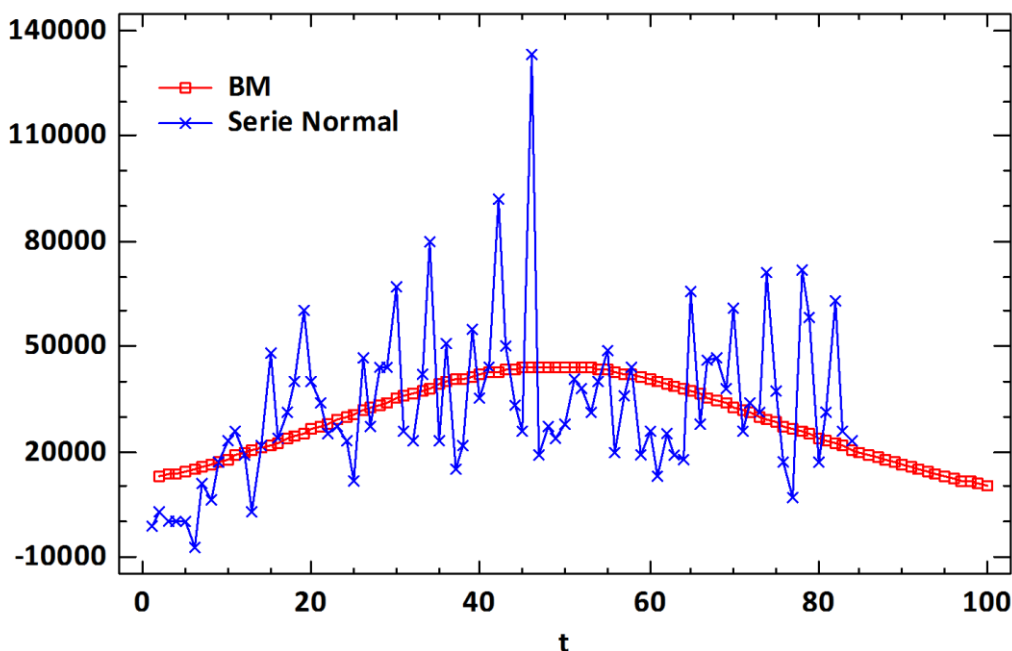


Grafico 13: Modello di Bass adattato alla serie di Normal

Le stime dei parametri di diffusione risultano essere tutte significative. Nella fattispecie, per quanto riguarda le componenti imitativa e innovativa si rimanda alle considerazioni fatte nel paragrafo 3.1, con un rapporto  $\frac{q}{p}$  in questo caso pari a 12,75. Emerge piuttosto interessante soffermarsi invece sul parametro  $m$ : la stima del mercato potenziale è di poco superiore alla stima iniziale, stabilita facendo riferimento al cumulo di vendite raggiunto fino a dicembre 2015. Ciò è dovuto al fatto che il ciclo di vita della vasca Normal si trova nella sua fase conclusiva, come si evince anche dal grafico 13, e quindi il mercato per questo prodotto si dimostra essere quasi completamente saturo.

Il coefficiente di determinazione  $R^2$  è pari a 99,5439%, evidenziando un buon adattamento del modello ai dati. Dal grafico 13 si vede come il modello di Bass Standard (in rosso) colga bene l'andamento medio della serie, mantenendo tuttavia alcuni problemi: la prima parte della serie non viene descritta in modo opportuno

come spesso accade in analisi di questo tipo ma ciò che maggiormente colpisce è il fatto che il picco, quindi il punto massimo, viene collocato dal modello in corrispondenza di un periodo depressivo della serie. Altre imprecisioni di BM trovano manifestazione nell'incapacità dello stesso di cogliere il cambiamento di regime prima citato e nella conservazione di residui autocorrelati, come dimostrato dalla statistica di Durbin-Watson e dal grafico 12.

Sulla base di quanto affermato finora, si procede alla stima di un modello di Bass Generalizzato.

Come accennato in precedenza, la linea della vasca presa in analisi è classica e sottoposta a numerosi tentativi di imitazione, come accaduto nel 2013 quando fu introdotta nel mercato una vasca estremamente simile nella forma a quella di Normal da parte di un concorrente di fascia più bassa, operante quindi in un contesto di prezzi inferiore.

Tale fenomeno ha influenzato drammaticamente il ciclo di vita di Normal e il repentino crollo delle vendite si ipotizza sia proprio dovuto a questo.

Si propone quindi un modello di Bass generalizzato con uno shock esponenziale negativo a partire da gennaio 2013, iniziando dai seguenti valori:

*Tabella 14: Stime iniziali*

<b>Stime Iniziali</b>	
<b>m</b>	3121000
<b>P</b>	0,0038
<b>q</b>	0,0489
<b>c1</b>	-0,5
<b>b1</b>	0,1
<b>a1</b>	49

I risultati ottenuti sono i seguenti:

Tabella 15: Risultati delle stime

<b>Parametro</b>	<b>Stima</b>	<b>Errore standard</b>	<b>I.C. inferiore 95%</b>	<b>I.C.superiore 95%</b>
<b>m</b>	3,68139E6	371185,	2,94241E6	4,42036E6
<b>p</b>	0,00255872	0,000211456	0,00213774	0,0029797
<b>q</b>	0,058174	0,00312598	0,0519506	0,0643973
<b>c1</b>	-0,609075	0,0807848	-0,769905	-0,448244
<b>b1</b>	-0,0319832	0,0205799	-0,0729547	0,00898839
<b>a1</b>	47,2805	0,942462	45,4042	49,1568

Tabella 16: Tabella della varianza e dei residui

<b>Sorgente</b>	<b>Somma dei quadrati</b>	<b>G.l.</b>	<b>Media dei quadrati</b>
<b>Modello</b>	1,96273E14	6	3,27121E13
<b>Residuo</b>	1,04296E11	78	1,33712E9
<b>Totale</b>	1,96377E14	84	
<b>Totale (Corr.)</b>	6,68753E13	83	

R-quadrato = 99,844%

Statistica di Durbin-Watson = 0,289487

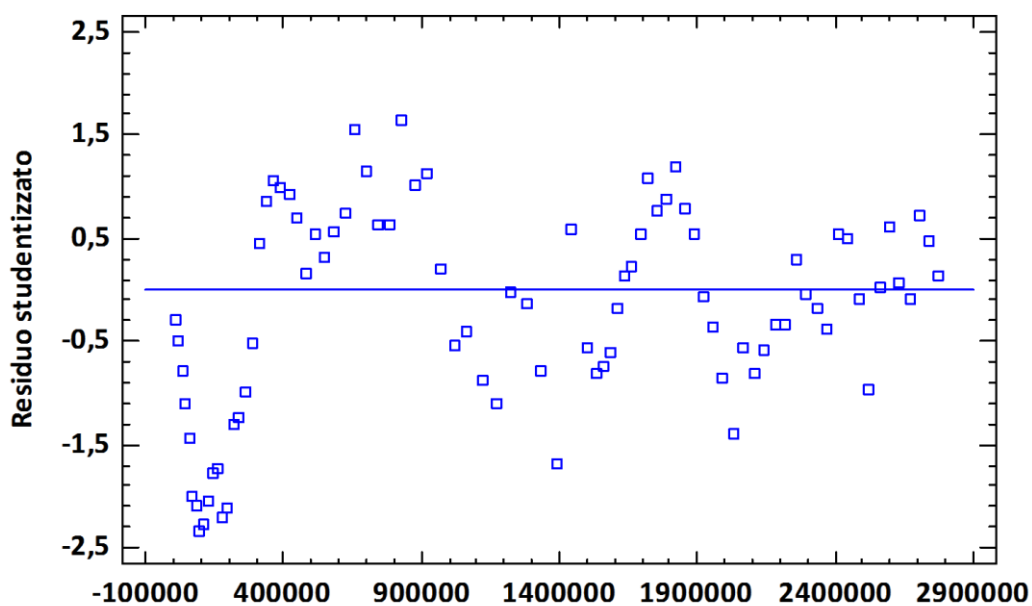


Grafico 14: Grafico dei residui – Residui Autocorrelati

### GBM con 1 shock esponenziale

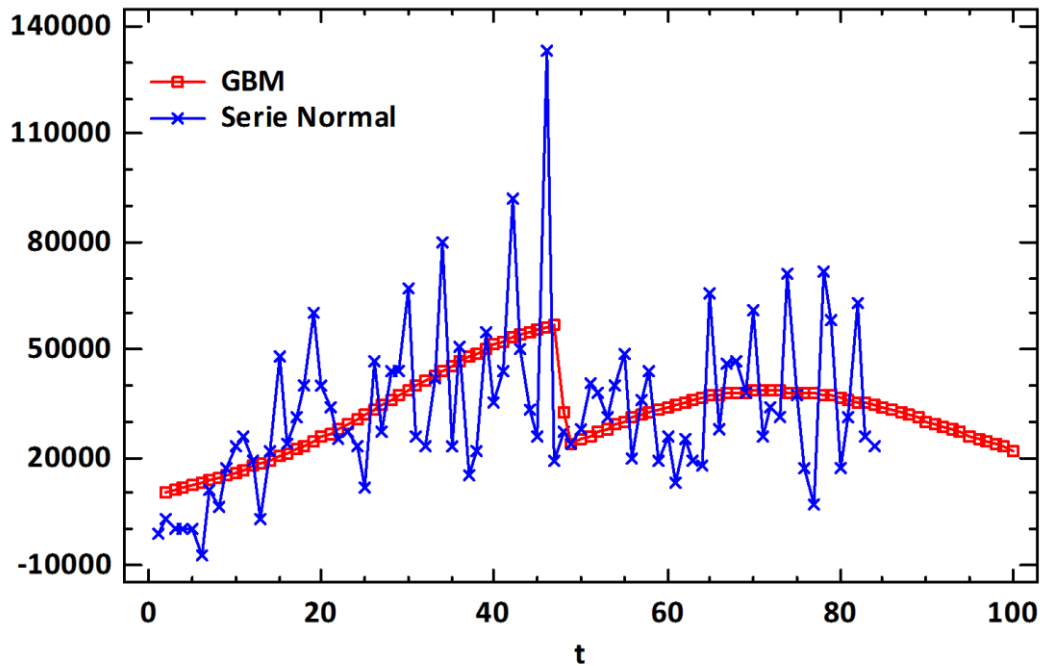


Grafico 15: Modello di Bass Generalizzato con uno shock esponenziale adattato alla serie di Normal

Come si evince dalla tabella 15, l'unico parametro la cui stima risulta essere instabile è  $b_1$ . Il mercato potenziale  $m$  è maggiore rispetto al valore ottenuto con il modello di Bass Standard, il parametro  $c_1$  (pari a -0,609) conferma in modo deciso l'esistenza della perturbazione, il coefficiente  $R^2$  è pari a 99,844% e il parametro  $a_1$  indica come momento iniziale dello shock  $t = 47$  che corrisponde a dicembre 2012. Tale modello può essere quindi ritenuto estremamente soddisfacente.

Dal grafico 15 si nota che il cambiamento di regime viene modellato ora in modo adeguato e risulta evidente il miglioramento verificatosi passando da BM a GBM con uno shock esponenziale negativo. Per avere una dimostrazione empirica si conduce il confronto fra modelli annidati, come in precedenza:

$$\tilde{R}^2 = 0,658$$

$$\text{Rapporto } F = 50,02$$

Entrambi i risultati sono fortemente a favore dell'estensione del modello da quello più semplice (BM) a quello più complesso (GBM con uno shock esponenziale negativo).

Alla luce dei risultati ottenuti, si può affermare che la variazione nel ciclo di vita della vasca Normal a partire dall'anno 2013 trovi effettiva conferma nei dati, verificando l'ipotesi sopra esposta.

Al fine di avere ancora maggiore accuratezza e di rendere i residui casuali ed indipendenti, si procede con un affinamento ARMAx.

Il miglior modello previsivo trovato è un SARIMA(1,0,0)x(1,0,1)<sub>12</sub> con le previsioni ottenute applicando il GBM con uno shock esponenziale come regressore esterno.

In questo caso sono presenti sia una componente stagionale autoregressiva che una a media mobile, entrambe di tipo mensile.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

Tabella 17: Risultati delle stime

<b>Parametro</b>	<b>Stima</b>	<b>Errore standard</b>	<b>t</b>	<b>P value</b>
<b>AR(1)</b>	0,883178	0,0535666	16,4875	0,000000
<b>SAR(1)</b>	1,22799	0,11772	10,4314	0,000000
<b>SMA(1)</b>	1,1656	0,175081	6,6575	0,000000
<b>GBM</b>	1,01012	0,0117101	86,2605	0,000000

La stima del parametro  $c$ , associata al regressore "GBM" assume un valore prossimo all'unità ( $c=1,01012$ ), indicando un'ottima centratura del modello non lineare prescelto.



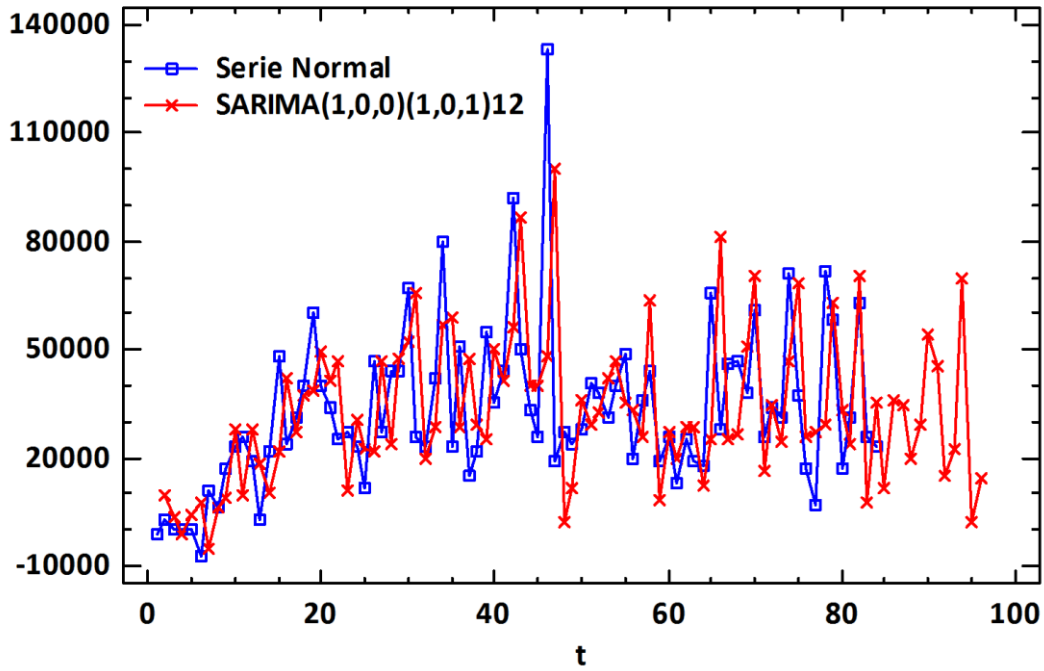


Grafico 16: Affinamento SARMAX (1,0,0)x(1,0,1)12 e serie Normal

Si dimostra infine di aver risolto il problema dell'autocorrelazione dei residui con il grafico 17, dove tutte le autocorrelazioni sono all'interno delle bande di confidenza calcolate al 95%. La serie dei residui è ora di tipo casuale.

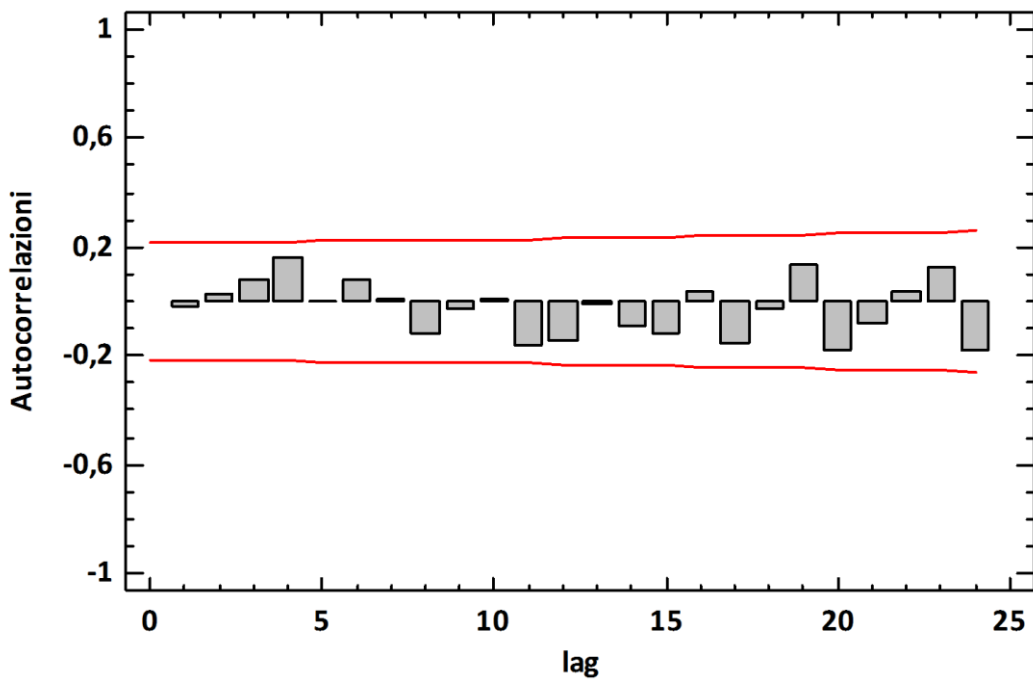


Grafico 17: Correlogramma dei residui

## **Capitolo 4**

### **Conclusioni**

L'obiettivo della relazione, attraverso l'applicazione dei modelli di diffusione come illustrato nel capitolo 3, è stato quello di analizzare come una serie di eventi possano influenzare il ciclo di vita di un prodotto, siano essi endogeni quindi interni all'azienda e dipendenti dalle decisioni del management o esogeni e pertanto non direttamente controllabili da parte dei soggetti interessati.

Per quanto riguarda il primo caso, all'interno dell'elaborato (paragrafo 3.1) vengono proposte due tipi di scelte: il lancio sul mercato di un prodotto complementare al bene preso in esame, corrispondente ad un ampliamento della linea e l'introduzione di un'alternativa allo stesso. Si dimostra che la prima implica sicuramente un'accelerazione per le vendite del prodotto, mentre per la seconda si ipotizza che possa variare il processo di diffusione ma tale ipotesi viene lasciata senza una conferma verificata dai dati.

Nel paragrafo 3.2 viene invece affrontato il secondo caso, prendendo come fattore esterno in grado di influenzare il ciclo di vita la concorrenza quindi, in una visione più ampia, la fascia qualità-prezzo rappresentata e la posizione nel mercato ricoperta. Si dimostra che questa può giocare un ruolo fondamentale, decelerando in modo significativo il processo di diffusione del prodotto.

Sono però importanti da sottolineare due aspetti riguardanti il secondo tipo di condizionamenti. Innanzitutto, è vero che un fattore esterno come può essere la concorrenza non trae origine dall'azienda in sé, ma è altrettanto vero che dipende dal mercato in cui essa si colloca. Quest'ultimo non si può dire svincolato dalle decisioni aziendali, anzi è il frutto di studi riguardanti il mercato e il target di consumatori

desiderato. In conclusione, si può quindi affermare che assumiamo i fattori esogeni come non riconducibili al management, ma comunque in parte controllabili. Ed è proprio da qui che nasce la seconda riflessione: i condizionamenti esterni all'azienda attraverso accurate indagini di mercato ed analisi statistiche, come ad esempio l'analisi della concorrenza, possono essere previsti al fine di limitare le variazioni oggetto di studio in questa relazione. Queste azioni anticipate sono possibili proprio perché esiste una componente arbitraria anche in quei fattori che reputiamo esogeni.

## **Bibliografia**

1. Bass, F. M. (1969). *A new product growth model for costumer durables*.  
Marketing Science 15, 215-227
2. Bass, F. M., Krishnan, T. V., Jain D. C. (1994). *Why the Bass Model Fits without Decision Variables*.  
Marketing Science 13, 203-223
3. Box, G., Jenkins, G. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*.  
San Francisco: Holden-Day
4. Bracalente B., Cossignani M., Mulas A. (2009). *Statistica Aziendale*.  
McGraw-Hill, Milano
5. Cecchinato, M. (2014). *Dinamiche di adozione e comunicazione nel ciclo di vita del prodotto: il caso di Apple iPod*.  
Università degli Studi di Padova, Tesi di Laurea in Scienze Statistiche e Gestione delle Imprese
6. Cicchitelli G. (2012). *Statistica: Principi e Metodi*.  
Pearson Italia, Milano – Torino
7. Di Fonzo T., Lisi F. (2005). *Serie storiche economiche*.  
Carrocci Editore, Roma
8. Galloni L., Mangiarotti R. (2005). *Disegnato in Italia - Il design come elemento competitivo nella piccola-media impresa*.  
Hoepli, Milano
9. Grandinetti, R. (2008). *Marketing. Mercati, prodotti e relazioni*.  
Carrocci Editore, Roma
10. Guseo, R. (2002). *Organizzazione statistica dell'informazione e scelte di gestione*.  
CEDAM, Padova
11. Guseo, R. (2004). *Interventi strategici e aspetti competitivi nel ciclo di vita di innovazioni*.  
Working Paper Series n.11, Department of Statistical Sciences, University of Padua
12. Pammolli, F. (2000). *Modelli e strategie di marketing*.  
Franco Angeli, Milano
13. Vernon, R. (1966). *International Investment and International Trade in the Product Cycle*.  
The Quarterly Journal of Economics 80 (2), 190-207



## **Ringraziamenti**

In primo luogo ringrazio i miei genitori per avermi dato la possibilità di compiere questo percorso di studi e per aver sempre creduto in me.

Merita un ringraziamento speciale Dan per essermi stato vicino in ogni momento, con la pazienza e la sensibilità che lo caratterizzano.

Desidero anche ringraziare la Dott.ssa Mariangela Guidolin per i preziosi e utili consigli datomi nella stesura di questa tesi.

Aggiungo l'azienda che mi ha ospitato per lo stage, la quale fornendomi i dati di cui necessitavo, ha permesso la realizzazione della relazione.

Infine ringrazio tutti i miei amici e compagni di corso che mi hanno accompagnato durante questi anni.