



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

**TESI DI LAUREA IN  
INGEGNERIA DELL'AUTOMAZIONE**

**PROGETTO DI SISTEMI DI CONTROLLO LQG/LTR PER  
SISTEMI MULTI INPUT – MULTI OUTPUT**

*Relatore: Prof. Alessandro Beghi*

*Laureando: Gianluca Giorgini*

ANNO ACCADEMICO: 2010-2011



# RIASSUNTO

In questo scritto viene illustrata la tecnica di controllo Lineare Quadratico Gaussiano con *Loop Transfer Recovery* (LQG/LTR) sia per sistemi *Single Input Single Output (SISO)*, che per sistemi *Multi Input Multi Output (MIMO)* e due procedimenti iterativi per la sintesi del controllore: *Asymptotic Loop Transfer recovery at the Input point (ALTRI)* e *Asymptotic Loop Transfer recovery at the Output point (ALTRO)*.

Sono inoltre trattati i problemi di regolazione ottima lineare quadratica a tempo infinito e di stima ottima dello stato a tempo infinito. Di conseguenza viene presentato il regolatore LQ e il filtro di Kalman di cui si illustrano le proprietà di robustezza.

Descrivo per mezzo di esempi due applicazioni reali e la relativa sintesi del controllore passo per passo con un software specializzato: MATLAB.

L'obiettivo è di fornire una spiegazione chiara della tecnica trattata e di dare al lettore uno schema pratico da seguire eventualmente per riuscire nella sintesi del controllore.

In coda si trova un'appendice in cui sono esposte tutte le definizioni degli strumenti matematici necessari alla comprensione dei temi trattati.



# INDICE

<b>Introduzione</b> .....	1
<b>CAPITOLO 1 – Specifiche frequenziali per il progetto di sistemi di controllo SISO e estensione al caso MIMO</b> .....	3
1.1 Caratterizzazione di un sistema di controllo in retroazione.....	3
1.1.1 Caso SISO, funzioni importanti.....	4
1.1.2 Caso MIMO, matrici importanti.....	5
1.2 Proprietà di un sistema di dinamico.....	5
1.2.1 La stabilità.....	5
1.2.2 La prestazione.....	6
1.2.2.1 Le basse frequenze.....	7
1.2.2.2 Le alte frequenze.....	8
1.2.2.3 L'intervallo di cross-over.....	8
1.2.3 La robustezza della stabilità.....	9
1.2.3.1 Caso SISO.....	9
1.2.3.2 Caso MIMO.....	10
1.2.4 La robustezza della prestazione.....	11
<b>CAPITOLO 2 – I Fase, il progetto del sistema TARGET</b> .....	12
2.1 Il Regolatore LQ.....	12
2.1.1 Robustezza del regolatore LQ.....	13
2.1.2 Analisi del guadagno di anello al punto critico in ingresso del plant.....	14
2.2 Il Filtro di Kalman.....	16
2.2.1 Robustezza del filtro di Kalman.....	17
2.3 Il regolatore LQG.....	18
2.4 Loop Transfer Recovery (LTR).....	20
2.5 Progettazione del sistema target tramite MATLAB.....	21
2.5.1 Esempio 1, caso SISO, I fase: progetto del sistema target.....	21
2.5.2 Esempio 2, caso MIMO, I fase: progetto del sistema target.....	22
<b>CAPITOLO 3 – II Fase, recupero del guadagno di anello</b> .....	25
3.1 ALTRI.....	25
3.1.1 Modalità operative.....	27
3.2 ALTRO.....	28
3.2.1 Modalità operative.....	29

3.3 Progettazione del sistema di recupero con MATLAB.....	30
3.3.1 Esempi 1 e 2, II fase: progetto di una classe di regolatori LQ.....	30
<b>APPENDICE.....</b>	<b>34</b>
<b>RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.....</b>	<b>37</b>

# INTRODUZIONE

Per progettare sistemi di controllo in retroazione ad alte prestazioni, sia per sistemi SISO (*Single Input Single Output*) che per sistemi MIMO (*Multi Input Multi Output*), è necessario che l'ingegnere del controllo disponga di una procedura schematica, i cui obiettivi devono essere di ridurre al minimo indispensabile i parametri di progetto, e di un ambiente di simulazione adeguato che consenta di regolare tali parametri tramite la reiterazione di prove intelligenti. Per quanto una tecnica di controllo sia potente infatti, un'applicazione reale richiede comunque svariati tentativi.

Al giorno d'oggi la metodologia di progetto LQG/LTR rispetta bene le caratteristiche sopra citate in quanto è scomponibile in due fasi distinte abbastanza semplici: con la prima ci si propone di generare il modello di un sistema di riferimento, detto target, che senza violare i requisiti di stabilità e robustezza, rispetti le specifiche richieste, nella seconda invece si procede al progetto di un particolare compensatore che tramite la regolazione di alcuni parametri (spesso si possono ridurre a uno), porti il sistema reale ("Plant") ad avere un comportamento che approssima quello del sistema di riferimento. Si dimostra che il grado di approssimazione dipende da eventuali caratteristiche di "fase non minima" del modello del Plant e, in questa eventualità, dalla posizione dei suoi zeri.

Inoltre è disponibile una vasta scelta di software specializzati nel calcolo matriciale e nella simulazione di sistemi dinamici che consentono con pochi passaggi di affrontare il problema sia con un approccio nel dominio del tempo che frequenziale. Di queste suite di programmi forse la più nota è MATLAB.

Voglio inoltre precisare che questa metodologia, per quanto perfettamente applicabile a sistemi SISO, risulta particolarmente adatta a sistemi MIMO in quanto non cerca di scomporre il problema in una sequenza di problemi di tipo SISO, bensì lo attacca direttamente e gli stessi passi e la stessa filosofia possono essere usati indipendentemente dal numero di variabili di stato, ingressi di controllo o uscite.

Con questo scritto intendo fornire una procedura pratica e semplice per lo sviluppo delle due fasi di progetto con l'obiettivo di renderla quanto più possibile adattabile ad una vasta gamma di applicazioni che interessano l'ingegneria del controllo.





# Capitolo 1

## SPECIFICHE FREQUENZIALI PER IL PROGETTO DI SISTEMI DI CONTROLLO SISO ED ESTENSIONE AL CASO MIMO

In questo capitolo vengono introdotti i concetti di stabilità, prestazione e robustezza e gli strumenti necessari per valutarli. Sono definite inoltre alcune matrici fondamentali dei sistemi dinamici e viene discusso in che modo andrebbero modificate affinché il sistema di controllo rispetti le specifiche di progetto.

### 1.1 CARATTERIZZAZIONE DI UN SISTEMA DI CONTROLLO IN RETROAZIONE

Quello rappresentato di seguito è lo schema a blocchi di un sistema di controllo in retroazione: tale schema può rappresentare sia sistemi SISO che sistemi MIMO, con la differenza che mentre nei primi i segnali sono grandezze scalari e i blocchi sono caratterizzati da funzioni di trasferimento, per i secondi i segnali sono grandezze vettoriali e i blocchi sono caratterizzati da matrici di trasferimento.

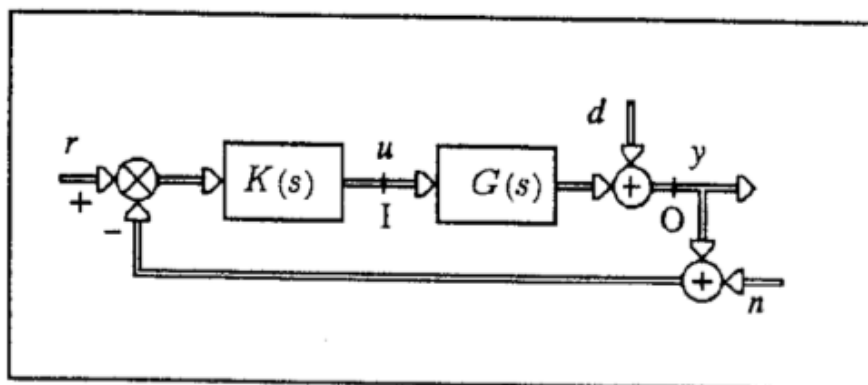


Figura 1

Segue la descrizione dei blocchi dello schema:

$G(s)$  : Funzione di trasferimento del *plant*.

$d(t)$ : (Laplace tf.  $d(s)$ ) Disturbo equivalente all'uscita del *plant* . Si intende **non noto**.

$n(t)$ : (Laplace tf.  $n(s)$ ) Rumore di misura. Anche questo si intende **non noto**.

$r(t)$ : Segnale di riferimento.

$y(t)$ : Segnale di uscita del *plant*. Si desidera che inseguia  $r(t)$ .

$K(s)$ : Compensatore in cascata.

$P(s)$ : Prefiltro

### 1.1.1 CASO SISO, FUNZIONI IMPORTANTI.

Si definisce *guadagno di anello* la funzione:

$$L(s) := G(s)K(s)$$

Differenza di ritorno:

$$D(s) := I + L(s)$$

Funzione sensitività:

$$S(s) := [1 + L(s)]^{-1}$$

Funzione sensitività complementare:

$$T(s) := [1 + L(s)]^{-1}L(s)$$

Si nota immediatamente:

$$S(s) + T(s) = [1 + L(s)]^{-1} + [1 + L(s)]^{-1}L(s) = [1 + L(s)]^{-1}[1 + L(s)] = 1$$

Differenza di ritorno inverso:

$$T^{-1}(s) = 1 + L^{-1}(s)$$

infatti:

$$T(s)T^{-1}(s) = I$$

$$[1 + L(s)]^{-1}L(s)[1 + L^{-1}(s)] = I$$

$$L(s)[1 + L^{-1}(s)] = [1 + L(s)]$$

$$L(s) + I = I + L(s) = L(s) + I$$

Dal momento che l'azione del prefiltro è ininfluenza ai fini della trattazione considereremo

$$P(s) = I.$$

Con le matrici appena introdotte e la condizione sul prefiltro possiamo adesso scrivere in maniera "comoda" le espressioni per le trasformata di Laplace dell'uscita, dell'errore di inseguimento e dell'ingresso del plant, che ci forniranno interessanti spunti di riflessione sulle proprietà del sistema.

$$y(s) = T(s)[r(s) - n(s)] + S(s)d(s) \quad (1.1)$$

$$e(s) = S(s)[r(s) - d(s)] + T(s)n(s) \quad (1.2)$$

$$u(s) = S(s)K(s)[r(s) - n(s) - d(s)] \quad (1.3)$$

### 1.1.2 CASO MIMO, MATRICI IMPORTANTI ANALOGIA AL CASO SISO.

Nel caso SISO abbiamo definito una unica funzione *guadagno di anello*, nel caso MIMO la situazione si complica, non si parla più di funzione ma di matrice guadagno di anello che per altro non è unica, varia a seconda del punto di rottura in cui viene valutata, che usualmente è posto o all'ingresso o all'uscita del plant, come riportato nello schema di figura 1 (lettere "I" e "O").

$$L_I(s) := K(s)G(s) \qquad L_O(s) := G(s)K(s)$$

Supponendo di riferirci ad un sistema dotato di  $m$  ingressi ed  $r$  uscite possiamo valutare le medesime matrici definite al paragrafo precedente indicando il punto di rottura in cui vengono valutate. Otteniamo dunque (la nomenclatura è la stessa):

$$\begin{aligned} D_I(s) &:= I_m + L_I(s) & D_O(s) &:= I_r + L_O(s) \\ S_I(s) &:= [I_m + L_I(s)]^{-1} & S_O(s) &:= [I_r + L_O(s)]^{-1} \\ T_I(s) &:= L_I(s)[I_m + L_I(s)]^{-1} & T_O(s) &:= L_O(s)[I_r + L_O(s)]^{-1} \\ T_I^{-1}(s) &:= I_m + L_I^{-1}(s) & T_O^{-1}(s) &:= I_r + L_O^{-1}(s) \end{aligned}$$

Si verifica immediatamente che a prescindere dal punto di rottura, resta verificata la relazione:

$$T(s) + S(s) = 1$$

Ricaviamo quindi le seguenti espressioni per le trasformate di Laplace dell'uscita, dell'errore di inseguimento e dell'ingresso del plant nel caso MIMO:

$$y(s) = T_O(s)[r(s) - n(s)] + S_O(s)d(s) \tag{1.4}$$

$$e(s) := r(s) - y(s) = S_O(s)[r(s) - d(s)] + T_O(s)n(s) \tag{1.5}$$

$$u(s) = S_I K(s)[r(s) - n(s) - d(s)] \tag{1.6}$$

Si dimostra che la (1.6) può essere riscritta come:

$$u(s) = K(s)S_O(s)[r(s) - n(s) - d(s)]$$

## 1.2 PROPRIETÀ DI UN SISTEMA DINAMICO

Sono quattro gli aspetti fondamentali per valutare il comportamento di un sistema di controllo: stabilità, prestazione, robustezza della stabilità e robustezza della prestazione.

### 1.2.1 LA STABILITÀ

Questa proprietà si riferisce a due definizioni: la stabilità BIBO (*Bounded Input Bounded Output*) e la stabilità asintotica e può essere modificata solo intervenendo con un controllo in retroazione.

Sono vari in letteratura i criteri per valutare la stabilità di un sistema dinamico, il più interessante per i nostri scopi è il criterio di Nyquist per il caso SISO e il Teorema di Nyquist generalizzato per il caso MIMO.

**CRITERIO DI NYQUIST:** Si basa sull'analisi del diagramma polare della funzione guadagno di anello  $L(j\omega)$  e stabilisce che, posto che tale diagramma non passi per il punto critico  $-1+j0$ , la condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile, cioè perché il numero  $N_z$  di zeri a parte reale positiva della funzione differenza di ritorno  $D(s)$  sia nullo, è che il diagramma di  $L(j\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  compia in senso antiorario intorno al punto  $-1+j0$  un numero  $N_G$  di giri uguale al numero  $N_P$  di poli a parte reale positiva di  $L(s)$  ed un numero di mezzi giri, sempre in senso antiorario, uguale al numero  $v$  di poli immaginari di  $L(s)$ . Se tale diagramma passa per il punto critico il sistema si trova in una condizione limite, la funzione  $D(s)$  presenta zeri a parte reale nulla ed il sistema in retroazione può essere stabile ma non asintoticamente stabile.

**TEOREMA DI NYQUIST GENERALIZZATO:** Se la terna  $(A_L, B_L, C_L)$  è una realizzazione nello spazio degli stati, non necessariamente minima, della matrice di guadagno di anello  $L(s)$ , allora si può scrivere:  $L(s) = C_L(sI - A_L)^{-1}B_L$ . Indichiamo il polinomio caratteristico ad anello aperto con  $\phi_{OL}(s) := \det(sI - A_L)$  mentre il polinomio caratteristico in catena chiusa con retroazione unitaria negativa con  $\phi_{CL}(s) := \det(sI - A_L + B_L C_L)$ .

Indichiamo inoltre con  $N_G[\Omega, f(s), D]$  il numero di giri in senso orario compiuti da  $f(s)$  intorno a  $\Omega$ , punto del piano complesso immagine, quando  $s$  descrive in senso orario il contorno  $D$  del piano complesso dominio.

Il teorema generalizzato di Nyquist afferma che il sistema con guadagno di anello  $L(s)$  posto in retroazione unitaria negativa è asintoticamente stabile se e solo se, per tutti gli  $R$  sufficientemente grandi:

$$N_G\{0, \det[I + L(s)], D_R\} = -N_{POL}$$

dove si è indicato con  $N_{POL}$  il numero di zeri di  $\phi_{OL}(s)$  che appartengono al semipiano destro chiuso di  $s$ , e quindi è il numero di modi non asintoticamente stabili di  $A_L$ .

### 1.2.2 LA PRESTAZIONE

È la capacità del sistema di controllo di mantenere limitato l'errore di inseguimento. È una proprietà che potrebbe essere garantita anche senza ricorrere alla retroazione, se non vi fossero segnali di disturbo e di rumore di misura che quindi la rendono indispensabile.

I risultati riguardo l'analisi della prestazione che si ottengono per i sistemi SISO possono essere estesi al caso MIMO con opportuni accorgimenti e qualche limitazione. È opportuno riportare qualche considerazione prima di procedere:

**CONSIDERAZIONE 1:** L'approccio utilizzato è frequenziale, ciò è dovuto al fatto che, nella quasi totalità delle situazioni, le bande di frequenza dei segnali di riferimento e dei disturbi sono separate da quelle del rumore di misura, verso le basse frequenze le prime, verso le alte la seconda; questa separazione rende l'approccio frequenziale sicuramente più comodo.

CONSIDERAZIONE 2: La relazione  $S(s) + T(s) = I$  che abbiamo già incontrato e che sussiste sia nel caso SISO che nel caso MIMO, ci suggerisce l'impossibilità di rendere piccole contemporaneamente le funzioni di sensitività e sensitività complementare. Sfruttando l'approccio frequenziale sappiamo dunque che, nel caso SISO, non è possibile nello stesso intervallo di frequenze rendere prossimi a zero  $|S(j\omega)|$  e  $|T(j\omega)|$ . Per il caso MIMO bisogna introdurre un criterio per valutare la "grandezza" di una matrice, questo concetto si riflette nel comprendere quanto una matrice sia lontana dalla condizione di singolarità. Un buon indice di questo comportamento si ottiene valutando i valori singolari di una matrice, per i quali rimando alla lettura dell'appendice.

CONSIDERAZIONE 3: Per il progetto del compensatore utilizzerò un approccio che consiste nel lavorare direttamente sulla funzione rapporto di ritorno open-loop  $L(s)$ . Questo metodo si compone di tre passi, il guadagno di anello viene scelto in modo da soddisfare le specifiche alle alte frequenze, poi alle medie e infine alle basse. Il compensatore sarà quindi ottenuto come prodotto di tre fattori, ogni fattore è la funzione di trasferimento ottenuta in ciascun passo.

CONSIDERAZIONE 4: In entrambi i casi, con opportuni accorgimenti, i requisiti sulle funzioni sensitività e sensitività complementare posso essere espressi come requisiti per la funzione guadagno di anello  $L(s)$ .

### 1.2.2.1 LE BASSE FREQUENZE $\omega \in [0, \omega_1]$

CASO SISO: Alle basse frequenze, imponendo un guadagno di anello elevato, quindi  $|L(j\omega)| \gg 1, \forall \omega \in [0, \omega_1]$ , si ottiene un valore del modulo della funzione sensitività prossimo a zero e di conseguenza il valore del modulo della funzione sensitività complementare circa uguale a 1.

CASO MIMO: L'estensione al caso MIMO avviene imponendo che il valore singolare minimo della funzione guadagno di anello al punto di rottura in uscita del plant sia molto maggiore di uno quindi:

$$\underline{\sigma}[L_o(j\omega)] \gg 1, \forall \omega \in [0, \omega_1] \text{ oppure,}$$

scegliendo opportunamente una funzione  $l_p(\omega) \gg 1, \forall \omega \in [0, \omega_1]$

$$\underline{\sigma}[L_o(j\omega)] > l_p, \forall \omega \in [0, \omega_1]$$

Per la PROPRIETÀ 1 riportata in appendice deduco:  $\underline{\sigma}[I + L_o(j\omega)] \gg 0, \forall \omega \in [0, \omega_1]$

Per la PROPRIETÀ 2 riportata in appendice segue:  $\bar{\sigma}[S_o(j\omega)] \downarrow 0, \forall \omega \in [0, \omega_1]$

Dalla CONSIDERAZIONE 2 sopra riportata segue:  $\underline{\sigma}[T_o(j\omega)] \simeq \bar{\sigma}[T_o(j\omega)] = 1, \forall \omega \in [0, \omega_1]$

Quindi analizzando le espressioni (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) deduco che, in maniera analoga per entrambi i casi, con gli opportuni accorgimenti, con elevati valori del guadagno di anello riesco ad ottenere alle basse frequenze una attenuazione dell'effetto dei disturbi sull'uscita e sull'errore di inseguimento lasciando però pressochè inalterato l'effetto del rumore di misura sugli stessi.

Considerando poi le espressioni (1.3) e (1.6) deduco che qualora  $G(j\omega)$  assumesse valori prossimi a 0 (o analogamente  $\bar{\sigma}[G(j\omega)] \ll 1$ ), possono essere necessari valori elevati del segnale di controllo.

### 1.2.2.2 LE ALTE FREQUENZE $\omega \in [\omega_2, \infty)$

CASO SISO: Alle alte frequenze, imponendo un guadagno di anello prossimo a zero, si ottiene un valore del modulo della funzione sensitività circa uguale a 1 e conseguentemente un valore del modulo della funzione sensitività complementare prossimo a zero.

CASO MIMO: Questa volta dobbiamo imporre invece che il valore del massimo dei valori singolari della matrice guadagno di anello al punto di rottura in uscita del plant sia piccolo dunque:

$$\bar{\sigma}[L_o(j\omega)] \ll 1, \forall \omega \in [\omega_2, \infty) \text{ oppure,}$$

scegliendo opportunamente una funzione  $l_M(\omega) \ll 1, \forall \omega \in [\omega_2, \infty)$

$$\bar{\sigma}[L_o(j\omega)] < l_M, \forall \omega \in [\omega_2, \infty)$$

Per la PROPRIETÀ 3 riportata in appendice deduco:  $\bar{\sigma}[I + L_o(j\omega)] \ll \alpha \approx 1, \forall \omega \in [\omega_2, \infty)$

Per la PROPRIETÀ 4 riportata in appendice segue:  $\bar{\sigma}[T_o(j\omega)] \downarrow 0, \forall \omega \in [\omega_2, \infty)$

Dalla CONSIDERAZIONE 2 sopra riportata segue:  $\bar{\sigma}[S_o(j\omega)] = \underline{\sigma}[S_o(j\omega)] \approx 1, \forall \omega \in [\omega_2, \infty)$

Analizzando le espressioni (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) deduco che in maniera analoga per entrambi i casi, con gli opportuni accorgimenti, con valori del guadagno di anello prossimi a zero riesco ad ottenere alle alte frequenze la riduzione dell'effetto del rumore di misura sull'uscita e sull'errore di inseguimento lasciando però praticamente senza attenuazione i disturbi.

### 1.2.2.3 L'INTERVALLO DI CROSS-OVER $\omega \cong \omega_C$

L'intervallo di cross-over è l'intervallo in cui  $|L(j\omega)| \approx 1$  (o analogamente per il caso MIMO, in cui i guadagni principali, che sono i valori singolari massimo e minimo, della matrice guadagno di anello sono circa uguali a uno). In quest'intervallo si deduce che non si presenta né riduzione degli effetti dei disturbi, né del rumore di misura. Si potrebbe pensare dunque di rendere questo intervallo stretto in maniera arbitraria, ma purtroppo questo non è possibile. Infatti grazie al criterio di Bode sulla stabilità dei sistemi a fase minima, sappiamo che per non compromettere la stabilità del sistema in retroazione, l'attraversamento dell'asse delle ascisse da parte di  $|L(j\omega)|$  deve avvenire con una pendenza di al più -10 o -20 dB/decade. Nel caso di sistemi a fase non minima, in cui quindi la funzione di trasferimento presenta zeri a parte reale positiva o poli instabili, sono introdotte delle limitazioni. Si dimostra che gli zeri a parte reale positiva stabiliscono un limite superiore per  $\omega_C$  alla frequenza in cui operano e quindi limitano superiormente l'intervallo  $[0, \omega_1]$  nel quale possono essere fissati elevati valori del guadagno. È facilmente intuibile dunque che uno zero a parte reale positiva è tanto meno fastidioso tanto più elevata la pulsazione in cui opera. Si dimostra inoltre che i poli a parte reale positiva dualmente stabiliscono un limite inferiore per  $\omega_C$  e di conseguenza per l'intervallo di frequenze  $[\omega_2, \infty)$  (Nei sistemi MIMO le considerazioni su zeri e poli a parte reale positiva possono essere estese a zeri di trasmissione e poli della matrice di guadagno di anello).

Va notato inoltre che la frequenza di cross-over coincide con la larghezza di banda del sistema in retroazione, e quindi ha notevole rilevanza per le specifiche sul tempo di assestamento del transitorio (maggiore larghezza di banda equivale a tempi di assestamento più brevi).

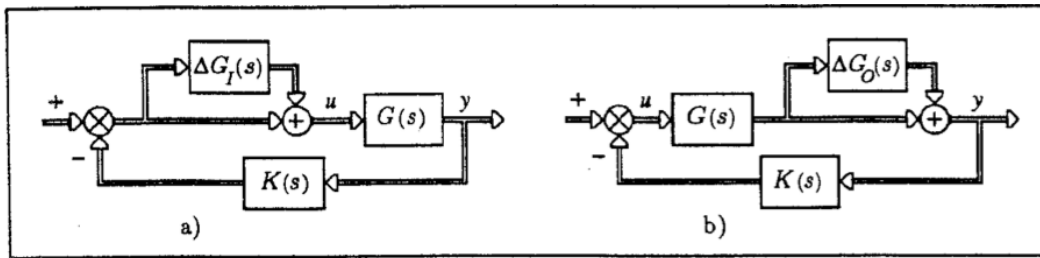


Figura 2 - Incertezze non strutturate di tipo moltiplicativo, caso MIMO

Una ulteriore specifica per i sistemi MIMO può essere l'uguaglianza in un determinato intervallo di frequenze dei guadagni principali, ossia fondamentalmente la stessa frequenza di cross-over per tutti i valori singolari, si richiede quindi la stessa rapidità di estinzione dell'errore d'inseguimento su tutte le uscite.

### 1.2.3 LA ROBUSTEZZA DELLA STABILITÀ

Un sistema dinamico si dice che è robusto rispetto alla stabilità se riesce a conservarsi stabile anche in presenza di variazioni dei parametri o della struttura del sistema stesso rispetto ai valori del modello nominale. Anche questa è una proprietà che può essere modificata soltanto tramite l'utilizzo di un anello di retroazione.

È opportuno dare una descrizione della variazione del comportamento del plant rispetto al modello nominale che ci permetta di trattarla da un punto di vista matematico così da poterne definire gli effetti. Si introduce quindi il concetto di incertezza, che definiamo *non strutturata* quando non viene spiegato il meccanismo o la struttura che produce la variazione. Per i nostri scopi considereremo solo incertezze non strutturate di tipo moltiplicativo concentrate esclusivamente sul modello del plant, perché il compensatore si considera descritto perfettamente.

Lo schema a blocchi di figura 2 riporta il caso MIMO in quanto, diversamente al caso SISO (analogo al modello a) di figura 2), la presenza di incertezze all'ingresso oppure all'uscita del plant, comporta due matrici di trasferimento perturbate differenti.

Si fa presente che in generale le incertezze non sono costanti con la frequenza. È conveniente dunque, ove possibile, definire una funzione nota  $l_M(\omega)$  che limiti superiormente le incertezze, garantendoci la possibilità di formulare l'ipotesi:

$$\text{caso SISO: } |\Delta L(j\omega)| < l_M(\omega), \quad \omega \in \mathcal{R}_+ \quad (1.7a)$$

$$\text{caso MIMO: } \bar{\sigma}[\Delta L(j\omega)] = \bar{\sigma}[\Delta G(j\omega)] < l_M(\omega), \quad \omega \in \mathcal{R}_+ \quad (1.7b)$$

#### 1.2.3.1 CASO SISO

Si definisce la funzione guadagno di anello perturbato:

$$\bar{L}(s) := L(s)[1 + \Delta L(s)]$$

In questo caso una buona descrizione della robustezza della stabilità del sistema è fornita dal margine di guadagno e dal margine di fase, che come ci suggerisce il nome forniscono la massima incertezza tollerabile in ampiezza e fase. Nel caso SISO detti margini sono facilmente evincibili dallo studio del diagramma di Nyquist della funzione guadagno di anello  $L(s)$ , il margine di guadagno infatti si ottiene con la seguente relazione:

$$g_M = -L^{-1}(j\omega_\pi)$$

In cui  $\omega_\pi$  è la frequenza in cui  $\angle L(j\omega) = -\pi$ . Si dimostra inoltre che l'ampiezza dell'incertezza tollerabile è direttamente proporzionale alla funzione differenza di ritorno inversa valutata alla frequenza  $\omega_\pi$ .

Mentre il margine di fase si ricava dalla seguente relazione:

$$e^{-j\phi_M} = -L^{-1}(j\omega_c)$$

In cui si ricordi che  $\omega_c$  è la frequenza di cross-over. Si dimostra che l'entità delle incertezze che agiscono sulla fase del sistema è direttamente proporzionale alla funzione differenza di ritorno inversa valutata alla frequenza  $\omega_c$ .

### 1.2.3.2 CASO MIMO<sup>1</sup>

Per quanto riguarda la robustezza della stabilità nei sistemi MIMO, l'estensione dal caso SISO non è immediata. Se infatti i margini di stabilità per un sistema SISO sono ricavabili direttamente dal diagramma di Nyquist della funzione guadagno di anello, l'unica constatazione che possiamo ricavare dal criterio generalizzato di Nyquist è che il sistema in retroazione conserva la stabilità se la matrice differenza di ritorno perturbata  $\bar{D}(s)$  si mantiene non singolare (determinante diverso a 0), il determinante di una matrice però non è un buon indicatore della lontananza della stessa dalla situazione di singolarità e dunque, essendo il criterio generalizzato basato sull'analisi del grafico della funzione  $\det[I + L(s)]$  ovvero  $\det[I + \bar{L}(s)]$  considerando le perturbazioni, si intuisce che non è ricavabile nessuna ulteriore informazione analoga ai margini di stabilità per il caso SISO.

Definisco la matrice differenza di ritorno perturbata:

$$\bar{D}_o(j\omega) = [I_r + \bar{L}_o(j\omega)]$$

in cui  $\bar{L}_o(j\omega) := [I_r + \Delta L_o(j\omega)]G(j\omega)K(j\omega)$  ricordando che  $\Delta L_o(j\omega) = \Delta G_o(j\omega)$ , considerando il controllore descritto perfettamente e quindi privo di incertezze.

I valori singolari costituiscono un buon indicatore della lontananza di una matrice dalla condizione di singolarità e risultano quindi utili anche in questo caso per i nostri scopi.

Possiamo affermare che il sistema in retroazione è stabile in presenza di incertezze non strutturate di tipo moltiplicativo se  $\forall \Delta L_o(j\omega)$  che rispetti l'ipotesi (1.7b) risulta:

---

<sup>1</sup> La trattazione della robustezza della stabilità nel caso MIMO sarà riferita al punto critico di uscita "O", le stesse considerazioni si possono ripetere con le opportune modifiche al punto critico di ingresso "I" ottenendo risultati analoghi.



$$\underline{\sigma}[I_r + \bar{L}_o(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega$$

Si dimostra che tale relazione è soddisfatta se, insieme con (1.7b), è soddisfatta la condizione:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}[T_o(j\omega)] < \frac{1}{l_m(\omega)} &\Rightarrow \underline{\sigma}[T_o^{-1}(j\omega)] = \underline{\sigma}[I + L_o^{-1}(j\omega)] > l_m(\omega) \\ \bar{\sigma}[\Delta L(j\omega)] < l_m(\omega) &< \underline{\sigma}[T_o^{-1}(j\omega)] \quad (1.8) \end{aligned}$$

Questa è una relazione estremamente utile in quanto sancisce che nel caso MIMO sono i valori singolari della matrice sensitività complementare a generalizzare il concetto di margine di stabilità, tuttavia questo “margine” risulta funzione della frequenza, e potrebbe risultare di difficile interpretazione.

Si preferisce di solito eliminare la dipendenza dalla frequenza considerando al posto di  $\bar{\sigma}_o[T_o(j\omega)]$ , il suo valore massimo rispetto a  $\omega$ ,  $\|T_o\|_\infty := \sup_\omega \bar{\sigma}[T_o(j\omega)]$  ottenendo dunque un margine di stabilità per sistemi MIMO indipendente dalla frequenza:

$$\bar{\sigma}[\Delta L(j\omega)] < \frac{1}{\|T_o\|_\infty}, \quad \forall \omega$$

Per incertezze non interagenti riportate al punto critico in ingresso (o analogamente in uscita) del plant, cioè del tipo:

$$\Delta G_I(s) = \text{diag}\{P_1(s) - 1, \dots, P_m(s) - 1\}$$

si dimostra che la stabilità è conservata se:

per  $P_i(j\omega) := g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , (pure variazioni di guadagno)

$$-\frac{1}{\|T_I\|_\infty} < g_i - 1 < \frac{1}{\|T_I\|_\infty}$$

per  $P_i(j\omega) := e^{-j\varphi_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , (pure variazioni di fase)

$$-2\arcsin \frac{1}{2\|T_I\|_\infty} < \varphi_i < 2\arcsin \frac{1}{2\|T_I\|_\infty}$$

relazioni analoghe si trovano se le incertezze non interagenti sono riportate all'uscita.

#### 1.2.4 LA ROBUSTEZZA DELLA PRESTAZIONE

La robustezza della prestazione di un sistema dinamico sussiste se l'errore di inseguimento si mantiene piccolo in presenza di variazioni, rispetto ai valori nominali, dei parametri e/o della struttura del sistema stesso. È una proprietà che può essere modificata solamente facendo ricorso alla retroazione.

Si dimostra che in assenza di rumore di misura la robustezza della prestazione si conserva anche in presenza di incertezze di tipo moltiplicativo che rispettano la (1.7) se:

$$\bar{\sigma}[I_r + [I_r + \Delta L_o(j\omega)]L_o(j\omega)] > l_p(\omega), \quad \forall \omega \quad (l_p \gg 1 \text{ vedi } 1.2.2.1)$$

si dimostra che tale relazione è vera se:  $\underline{\sigma}[L_o(j\omega)] > \frac{l_p(\omega)}{1-l_M(\omega)}$

# Capitolo 2

## I FASE, IL PROGETTO DEL SISTEMA TARGET

Dopo aver definito le specifiche frequenziali, ossia le proprietà che devono essere possedute dal sistema in retroazione, possiamo ora a progettare un sistema di riferimento, detto target, che soddisfi le specifiche basandosi sul modello nominale del plant.

Il sistema target si basa sulla soluzione di uno dei due problemi seguenti: il problema di regolazione ottima LQ a tempo infinito e il suo duale, il problema della stima ottima dello stato a tempo infinito. Sebbene a prima vista si potrebbe pensare di trovarsi di fronte ad un'ambiguità, bisogna ricordare dal capitolo precedente che per i sistemi MIMO sono stati definiti due punti di rottura, uno all'ingresso del plant ed uno all'uscita. È proprio questa dualità a determinare la scelta del problema da affrontare; se le specifiche frequenziali sono assegnate al punto critico di ingresso del plant si adotterà come sistema target un regolatore LQ, nel caso in cui fossero assegnate all'uscita il sistema target da adottare sarà un filtro di Kalman.

### 2.1 IL REGOLATORE LQ

Dato il modello lineare stazionario:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) &= x_0, & x_{nx1}, u_{mx1}, \\ z(t) &= Hx(t), & & & z_{rx1},\end{aligned}$$

in cui:

$A$  è la matrice di stato del plant,

$B$  è la matrice degli ingressi manipolabili del plant,

$H$  è la matrice che fornisce le variabili controllate,

si noti che  $z(t)$  è il risultato di combinazioni lineari delle variabili di stato e non rappresenta dunque il vettore delle misure, che per altro è inessenziale per il problema di regolazione.

Si suppone che la coppia  $(A,B)$  sia stabilizzabile e la coppia  $(A,H)$  sia rivelabile. Dato l'indice di comportamento:

$$J = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_f} [z^T(t) Qz(t) + u^T(t) Ru(t)] dt,$$

$$\text{dove: } Q_{rxr} = Q^T > 0, \quad R_{mxm} = R^T > 0,$$

il problema di regolazione ottima LQ a tempo infinito consiste nel determinare la legge di retroazione algebrica stazionaria del vettore di stato che rende minimo l'indice di comportamento  $J$ . Si dimostra che tale legge di retroazione è costituita da:

$$u(t) = -K_c x(t),$$

$$K_c := R^{-1} B^T S,$$

ed è detta *regolatore LQ*. La matrice  $S_{n \times n}$  è l'unica soluzione semidefinita positiva dell'equazione algebrica matriciale di Riccati, nota con l'acronimo *CARE* (*Control Algebraic Riccati Equation*):

$$SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + H^T QH = 0.$$

Il regolatore LQ appena definito stabilizza asintoticamente il sistema complessivo e minimizza l'indice di comportamento  $J$  che può essere calcolato tramite la relazione  $J = x_0^T S x_0$ .

## 2.1.1 ROBUSTEZZA DEL REGOLATORE LQ

Il regolatore LQ presenta caratteristiche di robustezza della stabilità notevoli. Nel caso SISO ricorrendo al criterio di Nyquist ci si può accorgere con alcuni semplici esempi che la proprietà di stabilità asintotica del sistema è sempre garantita. Ciò non stupisce in quanto questa è proprio una prerogativa del regolatore LQ, come già accennato. L'aspetto interessante però è un altro, si dimostra infatti che nel caso SISO la distanza del diagramma di Nyquist della funzione guadagno di anello del sistema retroazionato dal punto critico  $-1+j0$  non è mai inferiore a uno. Questa proprietà risulta di notevole interesse in quanto ci permette di fare alcune considerazioni sui margini di stabilità, che nel caso SISO sono un buon indice di robustezza. Moltiplicando il guadagno di anello per lo scalare  $g$ , ossia considerando un'incertezza non strutturata di tipo moltiplicativo  $\Delta L(j\omega) = g - 1$  all'ingresso, il criterio di Nyquist può essere modificato considerando come punto critico il punto  $-1/g + j0$ , e la proprietà appena enunciata del regolatore LQ ci assicura che la stabilità è conservata per ogni  $g > 0.5$ , ossia per ogni  $g$  tale da garantire che il punto critico sia interno al cerchio unitario centrato in  $-1+j0$ , che chiameremo *cerchio critico*. Se ne deduce che il margine di guadagno può essere aumentato senza alcun limite senza pregiudicare la stabilità del sistema. Possiamo affermare quindi che per un sistema SISO il regolatore LQ garantisce un margine di guadagno infinito.

Si ricordi che il margine di fase è determinabile come la fase del primo punto del diagramma di Nyquist della funzione guadagno di anello di distanza unitaria dall'origine (percorso per  $\omega$  positivi crescenti), i casi limite quindi per un regolatore LQ sono i punti in cui il cerchio unitario centrato nell'origine interseca il cerchio critico, per i quali risulta evidente che la fase è di  $\pm 60^\circ$ , valore che quindi rappresenta il margine di fase garantito da un regolatore LQ.

### ESTENSIONE AL CASO MIMO

Si possono generalizzare i risultati appena ottenuti per il caso SISO al caso MIMO con alcune limitazioni. Se la matrice-peso  $R$  dell'indice di comportamento  $J$  risulta diagonale e se le perturbazioni simultanee  $P_i$  di guadagno dei diversi anelli sono di tipo non interagente (vedi 1.2.3.2), si dimostra che il sistema in retroazione si conserva asintoticamente stabile nei seguenti due casi:

1. Se le perturbazioni simultanee non interagenti  $P_i(j\omega) = g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , del guadagno di anello sono tali che  $g_i > 0.5$   $i = 1, 2, \dots, m$ .
2. Se le perturbazioni simultanee non interagenti  $P_i(j\omega) = e^{-j\varphi_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , della fase, sono tali che  $|\varphi_i| < 60^\circ$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

## 2.1.2 ANALISI DEL GUADAGNO DI ANELLO AL PUNTO CRITICO IN INGRESSO DEL PLANT

È opportuno trovare il legame fra le proprietà di robustezza e prestazione del regolatore e i valori singolari della matrice di guadagno di anello, che con opportune parametrizzazioni delle matrici peso potranno essere aggiustati e modificati.

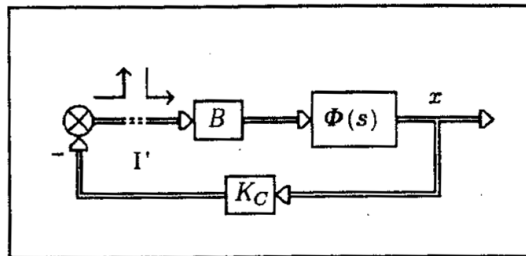


Figura 3 - Punto critico d'ingresso I'

Prima di procedere ricordo la definizione di *matrice risolvete*  $\phi(s)$ , ossia la trasformata di Laplace della matrice di transizione del sistema ( $e^{At}$ ), che verrà usata ripetutamente:

$$\phi(s) := (sI - A)^{-1}$$

per cui possiamo riscrivere la matrice guadagno di anello al punto critico I' di ingresso (vedi Figura 3):

$$L_{I'}(s) := K_c \phi(s) B$$

Rielaborando la CARE vista al precedente paragrafo, si perviene alla seguente relazione:

$$[I_m + L_{I'}^T(-s)] R [I + L_{I'}(s)] = R + [H\phi(-s)B]^T Q [H\phi(s)B] \quad (2.1)$$

Se indichiamo con  $A^*$  la matrice coniugata trasposta della matrice A (vedi Appendice), con qualche semplice passaggio otteniamo le relazioni seguenti:

$$\phi^*(j\omega) := \phi^T(-j\omega), \quad L_{I'}^*(-j\omega) := L_{I'}^T(-j\omega),$$

e per  $s = j\omega$ , l'equazione precedente diventa:

$$[I_m + L_{I'}^*(j\omega)] R [I_m + L_{I'}(j\omega)] = R + [H\phi(j\omega)B]^* Q [H\phi(j\omega)B]$$

Ricordando la proprietà degli autovalori  $\lambda_i(I + A) = 1 + \lambda_i(A)$ , la definizione di valore singolare (vedi Appendice) e introducendo la parametrizzazione per le matrici-peso:

$$Q = I_r, \quad R = \mu I_m, \quad \mu > 0,$$

possiamo rielaborare le relazioni precedenti come segue:

$$\begin{aligned}
 \sigma_i^2 [I_m + L_{I'}(j\omega)] &:= \lambda_i [I_m + L_{I'}(j\omega)]^* [I_m + L_{I'}(j\omega)] = \\
 \lambda_i \left\{ I_m + \frac{1}{\mu} [H\phi(j\omega)B]^* [H\phi(j\omega)B] \right\} &= \\
 = 1 + \frac{1}{\mu} \lambda_i \{ [H\phi(j\omega)B]^* [H\phi(j\omega)B] \} &= \\
 = 1 + \frac{1}{\mu} \sigma_i^2 [H\phi(j\omega)B], & \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Si fa presente che la relazione appena trovata è valida  $\forall \omega$  e produce i seguenti risultati:

$$\underline{\sigma}[I_m + L_{I'}(j\omega)] \geq 1, \quad \forall \omega,$$

$$\bar{\sigma}[S_{I'}(j\omega)] \leq 1, \quad \forall \omega,$$

quindi, qualunque sia la frequenza, deduciamo che un eventuale disturbo all'ingresso del plant sul segnale di controllo  $u(t)$  viene attenuato. Riguardo la sensibilità del sistema a disturbi  $d(t)$  all'uscita invece non si può trarre ancora alcuna conclusione, poiché dipendono dalla matrice di sensitività calcolata al punto critico all'uscita del plant.

Si dimostra inoltre ricordando che  $S(s) + T(s) = 1$  e la proprietà 3 riportata in Appendiche che:

$$\underline{\sigma}[T_{I'}(j\omega)] \leq 2, \quad \forall \omega$$

Ricorrendo alla proprietà 5 dei valori singolari riportata in appendice, dalla (2.2) possiamo dedurre che alle basse frequenze, dove è soddisfatta  $\underline{\sigma}[L_{I'}(j\omega)] \gg 1$ :

$$\underline{\sigma}[I_m + L_{I'}(j\omega)] \simeq \underline{\sigma}[L_{I'}(j\omega)] \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \underline{\sigma}[H\phi(j\omega)B]$$

$$\bar{\sigma}[I_m + L_{I'}(j\omega)] \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \bar{\sigma}[H\phi(j\omega)B]$$

Queste ultime due relazioni sono di notevole interesse perché consentono, con una opportuna scelta della matrice che fornisce le variabili controllate  $H$  e dello scalare  $\mu$  di effettuare lo “shaping” dei valori singolari della matrice guadagno di anello al punto critico di ingresso per le frequenze importanti per la prestazione.

Si riesce dunque a delineare una procedura per il progetto di un regolatore LQ scandita in due passi: si comincia scegliendo la matrice  $H$  in maniera tale da avere  $\underline{\sigma}[L_{I'}(j\omega)] \simeq \bar{\sigma}[L_{I'}(j\omega)] \gg 1$ , alle basse frequenze, e si regola poi il valore scalare  $\mu$  per ottenere la desiderata frequenza di cross-over. In questo modo si ottiene che i valori singolari della matrice sensitività al punto critico di ingresso

siano vicini a zero e di conseguenza i valori della matrice sensitività complementare siano tutti circa uguali a uno. Dirette conseguenze di questo comportamento sono buona prestazione e, per errori di modello riportati al punto critico di ingresso trascurabili, si ha anche robustezza della prestazione.

Utilizzando i risultati ottenuti al paragrafo precedente e riscrivendo opportunamente la (1.8) per il punto critico d'ingresso, si deduce che la stabilità è conservata in presenza di incertezze non strutturate di tipo moltiplicativo  $\Delta L_{I'}(j\omega)$  all'ingresso del plant se è vera:

$$\underline{\sigma}[\Delta L_{I'}(j\omega)] < 0.5$$

ossia se le incertezze di modello rimangono entro il 50% del modello nominale. La stessa limitazione, nel caso in cui le incertezze fossero pure variazioni di fase, corrisponderebbe ad un margine di fase di  $30^\circ$  che è un limite più stringente rispetto a quello trovato al paragrafo precedente.

Incertezze del 50% rispetto al valore nominale del modello sono accettabili alle basse frequenze ma alle alte, a maggior ragione se si è deciso di trascurare parte della dinamica per semplificare il modello, è un limite che non può essere accettabile, è infatti comune riscontrare incertezze maggiori del 100%. Si dimostra tuttavia che se ogni colonna della matrice  $H\phi(j\omega)B$  presenta un elemento non nullo, ossia se il plant non è *degenere*, alle alte frequenze vale l'approssimazione:

$$\sigma_i[K_c\phi(j\omega)B] \cong \sigma_i\left[\frac{K_c B}{\omega}\right], \quad \forall i,$$

situazione analoga al caso SISO per un sistema che presenta un eccesso unitario del numero di poli rispetto al numero di zeri. Quindi i diagrammi di Bode dei valori singolari della matrice guadagno di anello presentano una pendenza pari a -1 che è un valore accettabile per garantire la stabilità del sistema.

## 2.2 IL FILTRO DI KALMAN

Se per il progetto di un regolatore LQ abbiamo affrontato il problema di regolazione ottima LQ a tempo infinito, per il progetto di un filtro di Kalman affronteremo il suo duale (per il principio di dualità si veda l'Appendice), il problema della stima ottima dello stato a tempo infinito. Dato un modello lineare e stazionario:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Dw(t), & x(t_0) &= x_0, & x_{nx1}, w_{mx1} \\ y(t) &= Cx(t) + v(t), & & & y_{rx1}, v_{rx1} \end{aligned}$$

con:

A: matrice di stato del plant,

D: matrice degli ingressi non manipolabili, non misurabili e non noti a priori (disturbi) del plant,

C: matrice che fornisce le misure del plant,

$W = W^T > 0$ : matrice intensità del processo stocastico gaussiano bianco che rappresenta i disturbi,

$V = V^T > 0$ : matrice intensità del processo stocastico gaussiano bianco che rappresenta gli errori (rumore) di misura.

Si suppone inoltre che la coppia  $(A, D)$  sia stabilizzabile e la coppia  $(A, C)$  sia rivelabile,  $w(t)$  e  $v(t)$  siano processi stocastici gaussiani bianchi, mutuamente incorrelati, con matrici di intensità rispettivamente  $W > 0$  e  $V > 0$ . Ci si propone di trovare il vettore degli stati stimati  $\hat{x}(t)$ , che renda minimo l'errore quadratico medio di stima:

$$J := \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} E[e^T(t)Me(t)], \quad M = M^T > 0, \quad e(t) := x(t) - \hat{x}(t).$$

In questo caso il vettore delle uscite  $y(t)$  rappresenta le misure fisicamente disponibili del sistema in esame.

La soluzione al problema la fornisce il vettore di stato di un osservatore identità, un sistema dinamico il cui modello è:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + K_f[y(t) - C\hat{x}(t)],$$

in cui  $K_f$  è fornito dalla relazione  $K_f := PC^T V^{-1}$ , dove  $P$  è l'unica matrice semidefinita positiva che soddisfa l'equazione algebrica matriciale di Riccati *FARE* (Filter Algebraic Riccati Equation):

$$AP + PA^T - PC^T V^{-1} CP + DWD^T = 0$$

Tale osservatore ottimo, con la matrice dei guadagni appena definita, viene detto filtro di Kalman stazionario, e risulta essere sempre asintoticamente stabile.

Si dimostra che la matrice  $P$  appena definita risulta essere la matrice di covarianza dell'errore di stima, possiamo così calcolare il valore minimo dell'errore quadratico medio di stima con l'espressione seguente:

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} E[e(t)e^T(t)] = P \quad \Rightarrow \quad J := \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} E[e^T(t)Me(t)] = \text{tr}[PM].$$

## 2.2.1 ROBUSTEZZA DEL FILTRO DI KALMAN

Senza dover affrontare di nuovo verifiche analoghe a quelle incontrate per il regolatore LQ, avendo compreso che stiamo trattando il problema ad esso duale, con pochi accorgimenti si può dimostrare che le proprietà di prestazione e robustezza garantite da un regolatore LQ al punto critico di ingresso  $I'$ , sono le stesse di un filtro di Kalman al punto critico di uscita  $O'$  (vedi Figura 4).

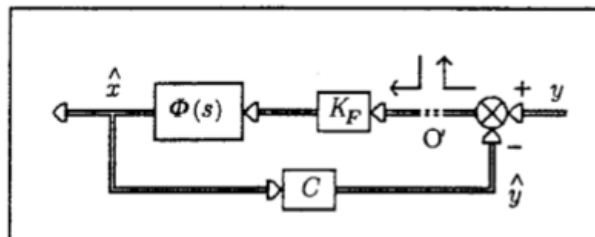


Figura 4 - Punto critico  $O'$  di un filtro di Kalman

*Dimostrazione:*

Definiamo il modello del problema primale, ossia quello di regolazione LQ:

$$\begin{aligned} M &:= \{A, B, H, Q, R\}: \\ K_C &= R^{-1}B^T S, \\ SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + H^T QH &= 0, \quad S \geq 0, \\ \phi(j\omega) &= (j\omega I - A)^{-1}, \\ L_{I'}(j\omega) &= K_C \phi(j\omega) B. \end{aligned}$$

Il modello del problema duale di stima ottima è definito come segue:

$$\begin{aligned} \tilde{M} &:= \{\tilde{A}, D, C, W, V\}: \\ K_F &= PC^T V^{-1}, \\ P\tilde{A}^T + \tilde{A}P - PC^T V^{-1}CP + DW D^T &= 0, \quad P \geq 0. \end{aligned}$$

Se i due modelli come stabilito per ipotesi, formano una coppia primale duale, sono vere le seguenti relazioni:

$$A^T = \tilde{A}, \quad B^T = C, \quad H^T = D, \quad Q = W, \quad R = V,$$

da cui seguono:

$$\begin{aligned} \phi^T(j\omega) &= \tilde{\phi}(j\omega) = (j\omega I - \tilde{A})^{-1}, \\ L_{I'}^T(j\omega) &= C\tilde{\phi}(j\omega)K_F = \tilde{L}_{O'}(j\omega). \end{aligned}$$

Si riconosce dunque che le proprietà che caratterizzano la matrice guadagno di anello del sistema dinamico compreso di regolatore LQ, al punto critico di ingresso I', sono anche le proprietà della matrice guadagno di anello al punto critico di uscita O' riferita al filtro di Kalman.

Possiamo dunque adottare una parametrizzazione analoga a quella vista per il regolatore LQ per progettare il filtro di Kalman, con le dovute modifiche:

$$W = I_m, \quad V = \mu I_r, \quad \mu > 0,$$

Per le frequenze in cui vale la relazione:

$$\bar{\sigma}[I_r + \tilde{L}_{O'}(j\omega)] \gg 1, \quad (\Rightarrow \text{basse frequenze})$$

valgono le approssimazioni:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}[I_r + \tilde{L}_{O'}(j\omega)] &\cong \underline{\sigma}[\tilde{L}_{O'}(j\omega)] \cong \frac{1}{\sqrt{\mu}} \underline{\sigma}[C\tilde{\phi}(j\omega)D], \\ \bar{\sigma}[I_r + \tilde{L}_{O'}(j\omega)] &\cong \frac{1}{\sqrt{\mu}} \bar{\sigma}[C\tilde{\phi}(j\omega)D], \end{aligned}$$

Questa volta si procede modificando opportunamente la matrice D per ottenere il guadagno d'anello desiderato alle basse frequenze e si regola poi il parametro  $\mu$  per definire la larghezza di banda richiesta.



## 2.3 IL REGOLATORE LQG

Il regolatore LQ descritto poc' anzi presenta notevoli caratteristiche per quanto riguarda prestazione e robustezza, ma soffre della forte limitazione di richiedere la retroazione dell'intero vettore degli stati del sistema dinamico, prevedendo dunque che ogni stato del sistema sia misurabile effettivamente. Tale limitazione può essere arginata ricorrendo all'utilizzo di un filtro di Kalman per stimare il vettore degli stati del sistema basandosi esclusivamente sul vettore delle uscite, così da elaborare una legge di controllo in retroazione a partire dagli stati stimati e non effettivamente misurati.

Questo tipo di regolazione è definita *LQG a tempo infinito* dove l'aggiunta del carattere "G" sta ad indicare la presenza di processi stocastici gaussiani nel modello del problema.

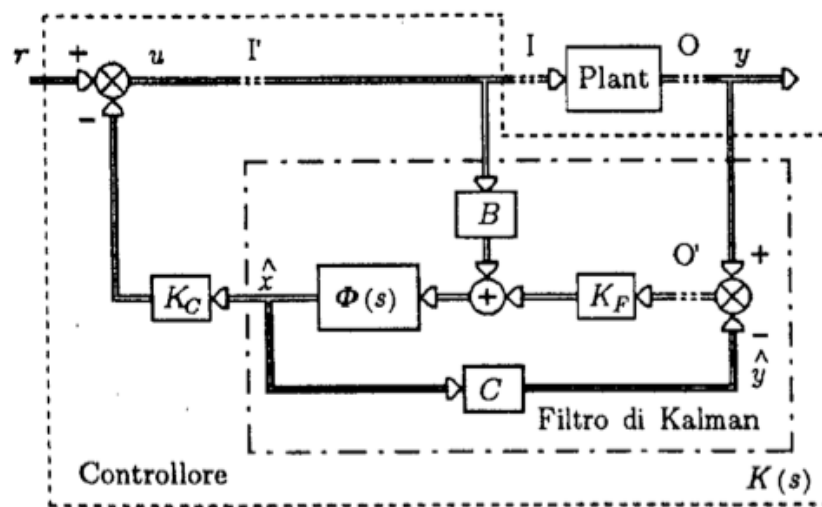


Figura 5 - Schema di regolazione LQG

Consideriamo il modello lineare e stazionario:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t), \quad x_0(t_0) = x_0, \quad x_{nx1}, u_{mx1}, w_{\eta x1},$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t), \quad y_{rx1}, v_{rx1},$$

$$z(t) = Hx(t), \quad z_{\gamma x1},$$

per cui:

$A$ : matrice di stato del *plant*,

$B$ : matrice degli ingressi manipolabili,

$C$ : matrice delle misure,

$D$ : matrice degli ingressi rumorosi,

$H$ : matrice delle variabili controllate,

$Q = Q^T > 0$ : matrice-peso delle variabili controllate,

$R = R^T > 0$ : matrice-peso degli ingressi manipolabili,

$W = W^T > 0$ : matrice intensità del rumore di processo,

$V = V^T > 0$ : matrice intensità del rumore di misura.

e l'indice di comportamento:

$$J = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow \infty}} \frac{1}{t_f - t_0} E \left\{ \int_{t_0}^{t_f} [z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \right\},$$

in cui  $w(t)$  e  $v(t)$  sono processi stocastici gaussiani bianchi, mutuamente incorrelati, con matrici di intensità  $W > 0, V > 0$ ; le matrici  $Q$  e  $R$  sono simmetriche e definite positive; le coppie  $(A, B)$  e  $(A, D)$  sono stabilizzabili; le coppie  $(A, C)$  e  $(A, H)$  sono rivelabili.

Si dimostra che la legge di retroazione ottima che rende minimo l'indice di comportamento  $J$ , è la seguente:

$$u(t) = -K_c \hat{x}(t),$$

in cui la matrice dei guadagni  $K_c$  è la soluzione del problema di regolazione LQ applicato al modello  $M_c := \{A, B, H, Q, R\}$  ed il vettore  $\hat{x}(t)$  è la stima ottima del vettore di stato del plant ottenuta per mezzo del filtro di Kalman che si realizza mediante la matrice dei guadagni  $K_F$ , soluzione del problema di stima ottima dello stato applicato al modello  $M_F = \{A, D, C, W, V\}$ .

## 2.4 LOOP TRANSFER RECOVERY (LTR)

Con il termine *Loop Transfer Recovery* si indica una metodologia di progetto di sistemi di controllo articolata in tre passi: la definizione delle specifiche, il progetto di un sistema di riferimento detto *target* che rispetti le specifiche definite, e infine il progetto di un compensatore basato sulla retroazione di segnali effettivamente misurati che garantisca un recupero esatto o quantomeno approssimato della funzione (matrice) guadagno di anello del sistema target.

Per il metodo LQG/LTR viene utilizzato come sistema target un regolatore LQ o un filtro di Kalman, a seconda che le specifiche siano state assegnate rispettivamente al punto critico di ingresso del *plant* o al punto critico di uscita del *plant*.

Nel primo caso lo *shaping* dei valori singolari della matrice guadagno di anello di riferimento all'ingresso del *plant* si effettua scegliendo opportunamente la matrice  $H$  ed il parametro  $\mu$ . Una possibile parametrizzazione per le matrici-peso si ottiene assumendo  $Q = I$  e  $R = \mu I$ ,  $\mu > 0$ . Modificando in questo modo il problema di regolazione, in generale il sistema target non risulta ottimo rispetto all'indice di comportamento iniziale, ma questo non ci interessa: infatti in questa fase l'obiettivo è di progettare un sistema target che presenti determinate caratteristiche.

Nel secondo caso lo *shaping* dei valori singolari della matrice guadagno di anello di riferimento all'uscita del *plant* si effettua con un'opportuna scelta della matrice  $D$  e modificando il parametro  $\mu$ , una possibile parametrizzazione delle matrici-intensità del filtro di Kalman si ottiene assumendo  $W = I$  e  $V = \mu I$ ,  $\mu > 0$ . Una scelta arbitraria dei valori da assegnare alle matrici intensità potrebbe sembrare ingiustificata, bisogna però tener presente che il nostro obiettivo in questa fase non è quello di progettare un filtro di Kalman che stimi ottimamente lo stato del *plant* dato, bensì quello

di progettare un sistema in retroazione (target) che presenti le caratteristiche desiderate. L'ambiente rumoroso originale perde quindi di importanza.

Preciso inoltre che il regolatore LQ e il filtro di Kalman, come già discusso, garantiscono buone proprietà di robustezza e prestazione, la stessa cosa non si può dire per uno schema di regolazione LQG basato sulla retroazione di segnali effettivamente misurati, vi sono dunque *plants* per i quali non è garantita nessun tipo di robustezza per un regolatore LQG.

## 2.5 PROGETTAZIONE DEL SISTEMA TARGET TRAMITE MATLAB

Una serie di routine MATLAB ci consente di progettare con facilità un sistema target e simularne il comportamento. Con due esempi, uno per il caso SISO e uno per il caso MIMO cercherò di spiegare come affrontare il problema.

### 2.5.1 ESEMPIO 1, CASO SISO, I FASE: PROGETTO DEL SISTEMA TARGET

Sia dato un sistema SISO descritto dal modello seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1].$$

Viene richiesto un guadagno di anello di circa 20 dB alle basse frequenze e un'attenuazione di anello superiore a 20 dB oltre i 5Hz (circa 31 rad/s). Si supponga che le specifiche siano assegnate al punto di rottura all'uscita del plant  $O$ , il sistema target sarà dunque un filtro di Kalman.

Ci si accorge immediatamente che il numero degli ingressi è uguale al numero delle uscite (dalla definizione di SISO).

Il sistema presentato può essere introdotto nell'ambiente di lavoro MATLAB con il comando:

```
sys = ss(A, B, C, D);
```

che crea il modello in spazio di stato.

L'asintotica stabilità del sistema può essere verificata con il comando:

```
isstable(sys);
```

che ritorna true ("1") se verificata

I poli e gli zeri del sistema in questione possono essere determinati rispettivamente con comandi:

```
pole(sys);      zero(sys);
```

è quindi immediato rendersi conto che in questo caso  $G(s)$  è a fase minima, non presentando zeri di trasmissione a parte reale positiva o poli instabili.

Si può procedere al progetto del filtro di Kalman target; si pone quindi  $D = B$  e si parametrizza la matrice intensità  $W = qI$  e  $V=I$ . Dopo aver deciso il valore da assegnare al parametro  $q$  si può lanciare il comando:

```
[kest, Kf, P] = kalman(sys, Q, R);
```

che ritorna il modello in spazio di stato del filtro di Kalman (“kest”), la matrice dei guadagni del filtro ( $K_F$ ) e infine la matrice soluzione della FARE ( $P$ ).

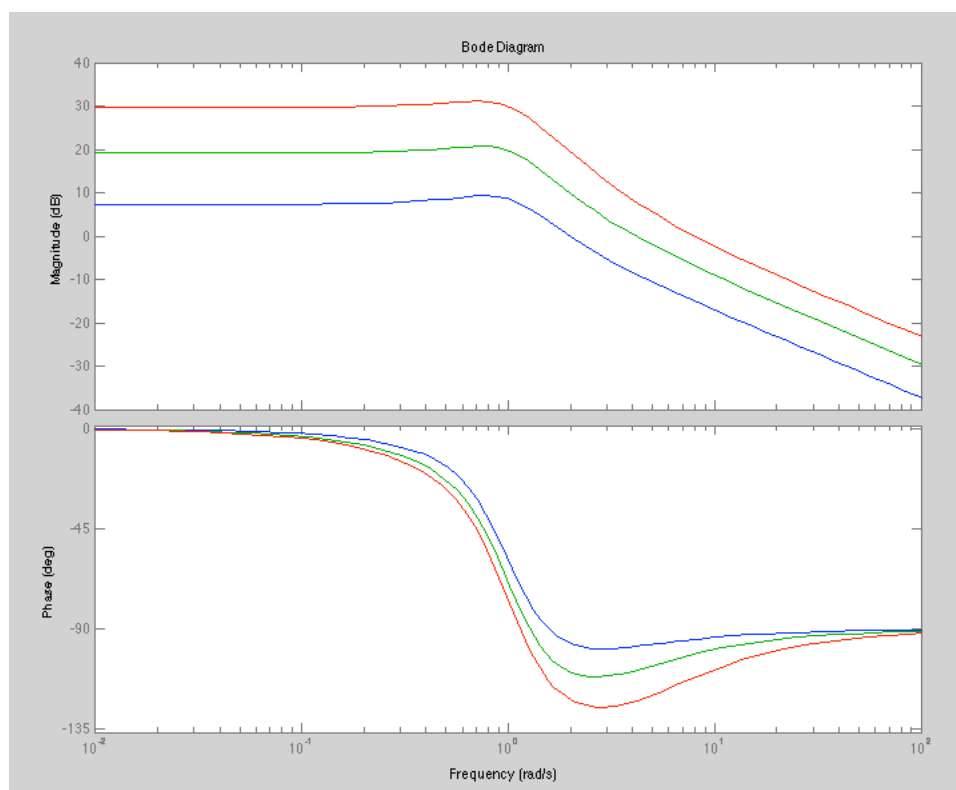
A questo punto consiglio di creare il modello in spazio di stato del sistema target e graficarlo per rendersi conto se le specifiche sono rispettate. Per assolvere questi compiti si riutilizza il comando “ss” nel modo seguente:

```
target = ss(A,Kf,C,0);
```

e per ottenere il diagramma di Nyquist o di Bode del guadagno di anello del sistema target si può ricorrere rispettivamente ai comandi:

```
nyquist(target);      bode(target);
```

Facendo qualche tentativo ci si rende conto che il valore da assegnare a  $q$  per cui il sistema target si avvicina di più alle specifiche risulta  $q = 10^2$ , come risulta dal grafico che segue, dove è mostrato il diagramma di Bode di  $L_I'(s)$  per  $q = 10, 10^2, 10^3$ .



### 2.5.2 ESEMPIO 2, CASO MIMO, I FASE: PROGETTO DEL SISTEMA TARGET

Il procedimento per il caso MIMO è analogo a quello visto per il caso SISO, l’unica vera differenza è che lo studio del guadagno di anello, non essendo più una funzione, bensì una matrice, non può più essere effettuato sullo studio di modulo e fase dello stesso, ma va affrontato con lo studio dei valori singolari. Per assolvere a questo compito troviamo in MATLAB una routine apposita, il comando:

`sigma(sys)` ;

Dove `sys` indica il modello in spazio di stato del sistema che intendiamo studiare. Con questo comando vengono graficati i guadagni principali del sistema, ossia i valori singolari maggiore e minore della matrice guadagno di anello.

Consideriamo il seguente esempio:

viene fornito il modello linearizzato che descrive la dinamica longitudinale di un aereo ad alte prestazioni in condizioni nominali di volo ad una quota di 25000 ft e ad una velocità di 0.9 mach. Seguono le matrici che lo rappresentano:

$$A = \begin{bmatrix} -2.257 \times 10^{-2} & -36.62 & -18.90 & -32.09 & 3.251 & -0.7626 \\ 9.257 \times 10^{-5} & -1.900 & 0.9831 & -7.256 \times 10^{-4} & -0.1708 & -4.965 \times 10^{-3} \\ 1.234 \times 10^{-2} & 11.72 & -2.632 & 8.758 \times 10^{-4} & -31.61 & 22.40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}^T,$$

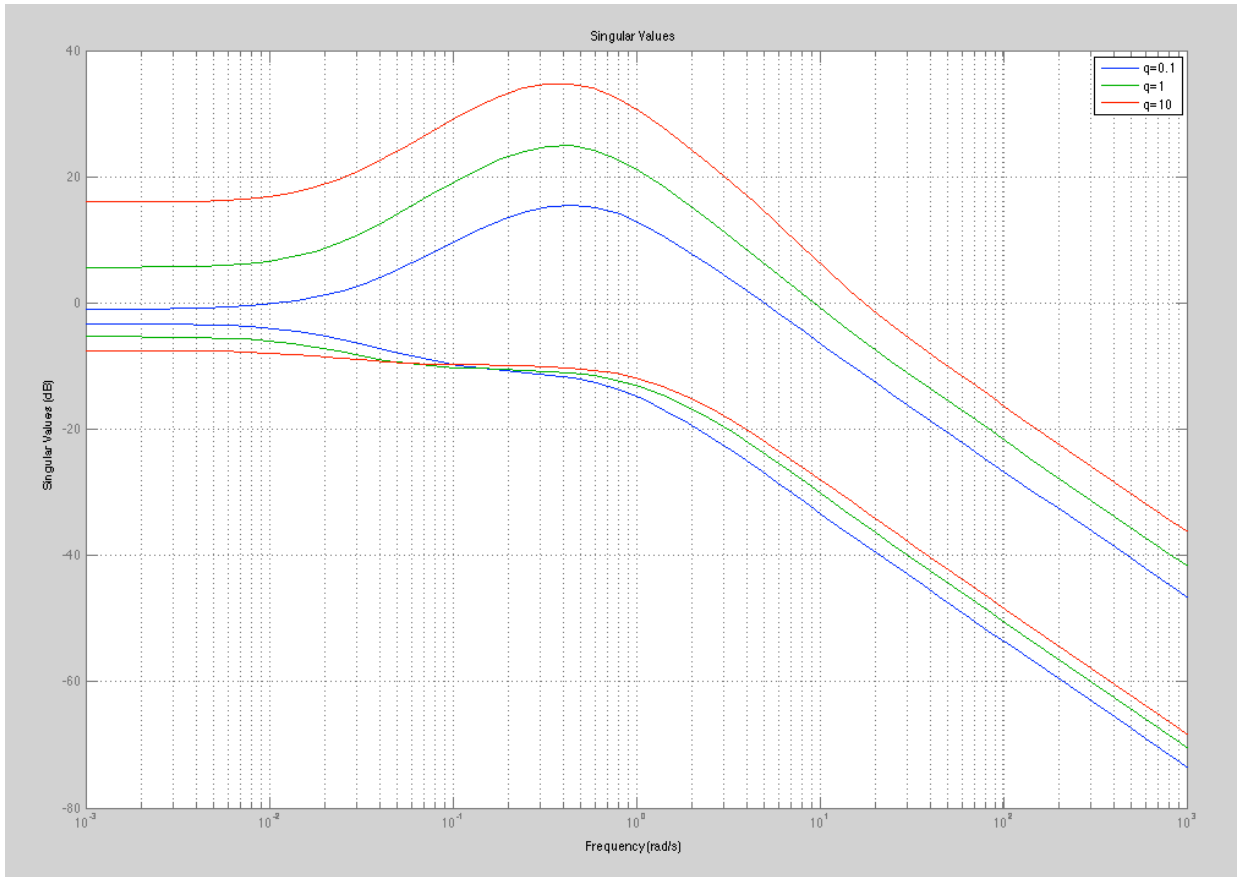
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si richiede che ogni valore singolare della matrice guadagno di anello all'uscita del plant presenti un'attenuazione di almeno 20 dB oltre i 16 Hz (circa 100 rad/s).

Con gli stessi comandi visti per il caso SISO si possono effettuare i controlli iniziali e calcolare il guadagno  $K_F$  del filtro di Kalman. Per graficare l'andamento dei valori singolari del sistema target invece ricorriamo semplicemente al comando:

`sigma(target)` ;

facendo qualche tentativo ci si rende conto che la scelta del parametro  $q$  che più si avvicina alle specifiche richieste è  $q = 1$ . Il grafico sottostante riporta alcuni tentativi fatti per  $q = 0.1, 1, 10$ .



# Capitolo 3

## II FASE, RECUPERO DEL GUADAGNO DI ANELLO

In questo capitolo saranno presentati due metodi iterativi che consentono di ottenere il recupero della funzione (matrice) guadagno di anello del sistema target. I due metodi si differenziano per il punto critico a cui vengono assegnate le specifiche. Se si tratta di quello di ingresso del *plant* si usa il metodo ALTRI (*Asymptotic Loop Transfer Recovery at the Input point*), altrimenti si ricorre al metodo ALTRO (*Asymptotic Loop Transfer Recovery at the Output point*).

Sarà inoltre fornita una panoramica riguardo alcune routine MATLAB, che consentono la sintesi rapida del compensatore da utilizzare per ottenere il recupero della matrice guadagno di anello di riferimento.

### 3.1 ALTRI

Al metodo ALTRI si ricorre qualora le specifiche vengano assegnate al punto critico di ingresso del *plant*, il sistema target consiste in un regolatore LQ e il recupero si ottiene tramite il progetto di una classe di filtri di Kalman opportunamente parametrizzati con un parametro detto appunto di recupero.

Analizzando la figura 5 otteniamo l'espressione per la matrice guadagno di anello al punto critico  $l'$

$$L_{l'}(s) = K_c \phi(s) B$$

questa è la stessa espressione che si ottiene rimuovendo il filtro di Kalman e supponendo accessibile il vettore di stato. Affrontando il problema nello spazio degli stati possiamo riferirci al regolatore LQ target come al sistema descritto dal seguente modello:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Be(t), \quad e(t) = x_r(t) - x(t)$$

$$u(t) = -K_c x(t)$$

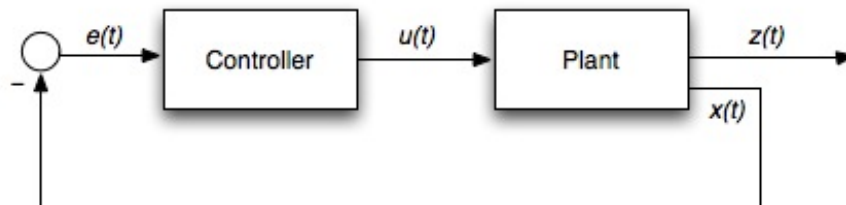


Figura 6 - Regolatore LQ

l'uscita del regolatore è infatti proprio l'ingresso di controllo del sistema da regolare. Si nota facilmente che la matrice  $L_{l'}(s)$  è la matrice di trasferimento del controllore appena indicato.

Preciso che il punto  $I'$  è interno al controllore, non è qui dunque che vengono iniettati i disturbi, inoltre le incertezze sono relative al *plant* e non al controllore. Questo punto dunque ci torna utile per definire il guadagno di anello target, ma risulta di scarso interesse per il sistema dinamico che stiamo considerando.

Sempre tramite analisi della figura 5 si perviene alla seguente espressione per indicare la matrice guadagno di anello all'ingresso del *plant*:

$$L_I(s) = K_c[\phi^{-1}(s) + BK_c + K_F C]^{-1} K_F C \phi(s) B = K(s)G(s)$$

che è evidentemente risultato della cascata del controllore:

$$K(s) = K_c[\phi^{-1}(s) + BK_c + K_F C]^{-1} K_F$$

e del *plant*:  $G(s) = C\phi(s)B$

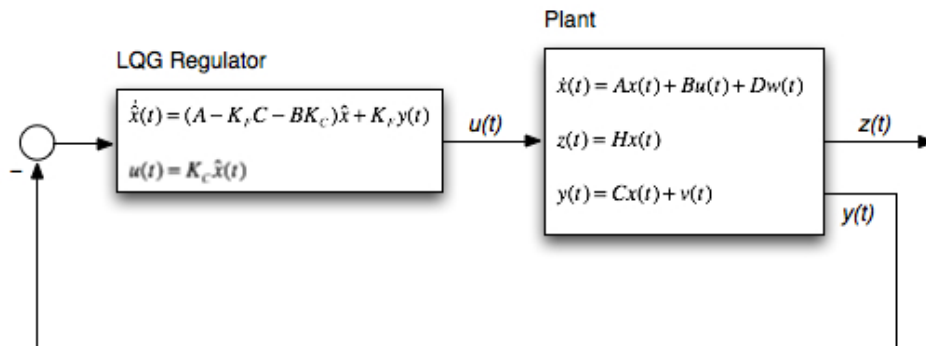


Figura 7 - LQG/LTR

L'obiettivo è, dopo aver progettato opportunamente il sistema target affinché la matrice guadagno di anello di riferimento rispetti le specifiche, progettare una classe di filtri di Kalman in maniera da ottenere il comportamento che segue:

$$L_I(s) \rightarrow L_{I'}(s).$$

Si dimostra che la condizione sufficiente perchè  $L_I(s) = L_{I'}(s)$  è che sia valida la relazione seguente:

$$K_F[I + C\phi(s)K_F]^{-1} = B[C\phi(s)B]^{-1}.$$

Tale relazione risulta asintoticamente soddisfatta per  $q \rightarrow \infty$ , dove  $q$  è uno scalare in funzione del quale parametrizziamo la matrice  $K_F$  dei guadagni del filtro di Kalman, in maniera tale per cui risulti:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{K_F(q)}{f(q)} = BU$$

dove  $U$  è una matrice quadrata non singolare e  $f(q)$  è una funzione scalare di  $q$  ed è un infinito per  $q \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{q \rightarrow \infty} K_F(q)[I + C\phi(s)K_F(q)]^{-1} = \lim_{q \rightarrow \infty} f(q)BU[I + C\phi(s)f(q)BU]^{-1} =$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{q \rightarrow \infty} BU \left[ \frac{1}{f(q)} I + C\phi(s)BU \right]^{-1} = \\
&= BU[C\phi(s)BU]^{-1} \\
&= B[C\phi(s)B]^{-1}.
\end{aligned}$$

Si ricordi però che la convergenza non presentando le medesime proprietà  $\forall s$  non è uniforme, si dice che è di tipo *pointwise*.

La dimostrazione appena eseguita ci porta alla relazione seguente:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} K(s) = K_C \phi(s) B [C\phi(s)B]^{-1} = L_I'(s) G^{-1}(s)$$

Il che, ricordando che  $L_I(s) = K(s)G(s)$ , richiede che  $G(s)$  sia invertibile a sinistra per essere verificato, ossia che esista  $G_L(s)$  t. c.  $G_L(s)G(s) = I$ .

### 3.1.1 MODALITÀ OPERATIVE

Per progettare una classe di filtri di Kalman che soddisfi le proprietà ora delineate è sufficiente trovare una parametrizzazione opportuna delle matrici-intensità del filtro, è richiesto inoltre che la matrice di trasferimento  $G(s)$  del plant sia a fase minima e che il numero degli ingressi del plant sia uguale al numero delle uscite dello stesso ( $m=r$ ).

Tre possibili parametrizzazioni convenienti sono quelle che seguono (ci si riferisca al modello presentato al paragrafo 2.3):

**Prima modalità:** Si impone  $D = B$  e  $W = W_0 + qI$ ,  $q \geq 0$ ,  $q \rightarrow \infty$ ,  $V = I$ , in cui  $W_0 = W_0^T \geq 0$  è una matrice nominale ed inoltre si dimostra che la sua presenza è inessenziale.

**Seconda modalità:** Si impone  $D = I$  e  $W = W_0 + qBB^T$ ,  $q \geq 0$ ,  $q \rightarrow \infty$ ,  $V = I$

**Terza modalità:** Si impone  $D = B$  e  $W = I$ ,  $V = \rho I$ ,  $\rho > 0$ ,  $\rho \rightarrow 0$ . Questa fra le tre scelte risulta la più vantaggiosa in quanto dalla pratica si rileva che il procedimento per  $q \rightarrow \infty$  conduce più spesso all'instabilità numerica.

Il procedimento ALTRI può essere applicato anche a sistemi in cui il numero degli ingressi è minore del numero delle uscite. In questo caso ci si può ricondurre alla situazione in cui  $m=r$  aggiungendo  $r - m$  colonne fittizie alla matrice  $B$  e aggiungendo lo stesso numero di righe con elementi tutti nulli alla matrice dei guadagni del regolatore LQ  $K_C$ . Si deve stare attenti a non introdurre con questo procedimento zeri a parte reale non negativa nella matrice di trasmissione del sistema, quindi a preservare la fase (minima) dello stesso.

Si fa presente che è sconsigliabile dare a  $q$  un valore più alto del necessario (o a  $\rho$  uno più basso) in quanto questa procedura forza la pendenza del diagramma di Bode dei valori singolari della matrice guadagno di anello ad essere solo di 20dB/decade, anche alle alte frequenze. Questo comporta una riduzione dell'attenuazione del rumore di misura a frequenze elevate, riducendo dunque anche la robustezza del sistema rispetto ad incertezze non strutturate di tipo moltiplicativo ad alte frequenze.

In un progetto LQG/LTR i poli del controllore sono costituiti dagli zeri del plant, mentre gli zeri del controllore sono gli zeri della matrice guadagno di anello target, la sostituzione degli zeri originali del plant con quelli del sistema target avviene dunque tramite una serie di cancellazioni zero (del plant)-polo (del controllore). Questo “modus operandi” impone che la fase di  $G(s)$  sia minima, se così non fosse le cancellazioni zero-polo potrebbero avvenire fra zeri a parte reale non negativa del plant e poli instabili del controllore. Il regolatore LQG però garantisce stabilità interna e quindi, per definizione, non può presentare poli instabili. Tuttavia se  $G(s)$  fosse a fase non minima, ma con zeri a parte reale positiva a pulsazioni molto elevate rispetto a quelle dei poli dello stesso sistema, la presenza di tali zeri risulterebbe “meno fastidiosa” e si potrebbe comunque procedere alla progettazione di un regolatore LQG.

### 3.2 ALTRO

Al metodo ALTRO si ricorre qualora le specifiche vengano assegnate al punto critico di uscita del *plant*, il sistema target consiste in un filtro di Kalman e il recupero si ottiene tramite il progetto di una classe regolatori LQ opportunamente parametrizzati con un parametro detto appunto di recupero.

Analizzando la figura 5 otteniamo l'espressione per la matrice guadagno di anello al punto critico  $O'$ :

$$L_{O'}(s) = C\phi(s)K_F$$

si noti che coincide con la matrice guadagno di anello del solo filtro di Kalman. Affrontando il problema nello spazio degli stati possiamo riferirci al filtro di Kalman target come al sistema descritto dal seguente modello:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + K_F e(t), & e(t) &= y(t) - \hat{y}(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}$$

Si noti che dal filtro di Kalman si recupera il vettore di stato stimato che verrà poi usato dal regolatore LQG per la retroazione.

Come visto per  $I'$ , riferendoci sempre allo schema di figura 5, si nota come anche il punto  $O'$  sia interno al controllore e quindi di scarso interesse per quanto interessa disturbi e rumore di misura che vengono iniettati invece in  $O$ .

Sempre tramite analisi della figura 5 si perviene alla seguente espressione per indicare la matrice guadagno di anello all'uscita del *plant*:

$$L_O(s) = C\phi(s)BK_c[\phi^{-1}(s) + BK_c + K_F C]^{-1}K_F = G(s)K(s)$$

che è evidentemente risultato della cascata del *plant*:  $G(s) = C\phi(s)B$

e del controllore:  $K(s) = K_c[\phi^{-1}(s) + BK_c + K_F C]^{-1}K_F$

Si dimostra, come del resto era facile intuire, che il procedimento ALTRO è duale rispetto al procedimento ALTRI. L'obiettivo dunque in questo caso è il recupero della matrice guadagno di anello al punto critico  $O$ :

$$L_O(s) \rightarrow L_{O'}(s)$$

ossia della convergenza asintotica di  $G(s)K(s)$  a  $C\phi(s)K_F$  che, sfruttando la dualità dei procedimenti ALTRI-ALTRO, può essere ottenuta progettando opportunamente una classe di regolatori LQ. Il metodo è simile a quello visto per il progetto di una classe di filtri di Kalman.

Sempre sfruttando la dualità dei procedimenti perveniamo alla seguente relazione:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} K(s) = [C\phi(s)B]^{-1}C\phi(s)K_F = G^{-1}(s)L_{O'}(s)$$

Il che, ricordando che  $L_O(s) = G(s)K(s)$ , richiede che  $G(s)$  sia invertibile a destra per essere verificata, ossia che esista  $G_R(s)$  t. c.  $G(s)G_R(s) = I$ .

### 3.2.1 MODALITÀ OPERATIVE

Per progettare una classe di regolatori LQ è sufficiente trovare una parametrizzazione opportuna delle matrici-peso del regolatore, è richiesto inoltre che la matrice di trasferimento  $G(s)$  del plant sia a fase minima e che il numero degli ingressi manipolabili del plant sia uguale al numero delle variabili controllate ( $m=r$ ).

Tre possibili parametrizzazioni convenienti sono quelle che seguono (ci si riferisca al modello presentato al paragrafo 2.3):

**Prima modalità:** Si impone  $H = C$  e  $Q = Q_0 + qI$ ,  $q \geq 0$ ,  $q \rightarrow \infty$ ,  $R = I$ , in cui  $Q_0 = Q_0^T \geq 0$  è una matrice nominale ed inoltre si dimostra che la sua presenza è inessenziale.

**Seconda modalità:** Si impone  $H = I$  e  $Q = Q_0 + qC^T C$ ,  $q \geq 0$ ,  $q \rightarrow \infty$ ,  $R = I$

**Terza modalità:** Si impone  $H = C$  e  $Q = I$ ,  $R = \rho I$ ,  $\rho > 0$ ,  $\rho \rightarrow 0$ .

Valgono le stesse osservazioni fatte per il procedimento ALTRI.

## 3.3 PROGETTAZIONE DEL SISTEMA PER IL RECUPERO CON MATLAB

Riprendiamo gli esempi visti al capitolo precedente. Dal momento che per entrambi le specifiche sono fornite al punto critico di uscita del *plant* il procedimento da utilizzare per la sintesi del regolatore LQG/LTR è ALTRO. Ci siamo già preoccupati di progettare un sistema target che soddisfi le specifiche richieste, vediamo adesso come progettare una classe di regolatori LQ e di verificare come effettivamente per  $q \rightarrow \infty$  il comportamento dei valori singolari della matrice guadagno di anello al punto  $O$ , tenda asintoticamente a quello dei valori singolari della matrice guadagno di anello per il sistema target (al punto critico  $O'$ ).

### 3.3.1 ESEMPI 1 E 2, II FASE: PROGETTO DI UNA CLASSE DI REGOLATORI LQ

Dopo aver posto  $H = C$  e parametrizzato opportunamente le matrici-peso del regolatore LQ imponendo  $R = I$  e  $Q = Q_0 + qI$ , si scelgono dei valori positivi crescenti da assegnare al parametro  $q$ , si calcola la matrice dei guadagni  $K_C$  e si confronta il diagramma dei valori singolari della matrice guadagno di anello del sistema compreso il regolatore LQG ( $L_O(j\omega)$ ) con quello dei valori singolari della matrice guadagno di anello del sistema target ( $L_{O'}(j\omega)$ ).

Per trovare la matrice  $S$ , unica soluzione semidefinita positiva dell'equazione algebrica matriciale di Riccati, necessaria per calcolare la matrice dei guadagni del regolatore LQ, possiamo ricorrere al comando MATLAB:

$$S = \text{care}(A, B, Qmat, R);$$

bisogna prestare attenzione però in quanto la CARE in MATLAB è formulata in modo leggermente differente rispetto a come è stata esposta in questo scritto. Le riporto entrambe:

$$SA + A^T S - SBR^{-1}B^T + H^T QH = 0$$

$$\text{MATLAB: } SA + A^T S - SBR^{-1}B^T + Q = 0$$

si nota come la matrice  $Q$ , ultimo addendo del primo membro, non sia moltiplicata per  $H$  e  $H^T$ . Si può semplicemente aggirare questo problema assumendo direttamente:

$$Qmat = H^T QH.$$

Calcolata la matrice  $S$ , possiamo ricavare la matrice dei guadagni tramite il comando:

$$Kc = \text{inv}(R) * B' * S;$$

Per evitare qualche passaggio possiamo ricorrere direttamente al comando MATLAB:

$$[Kc, S, e] = \text{lqr}(A, B, Q, R);$$

osservando anche in questo caso l'accorgimento appena discusso riguardo la matrice  $Q$ . Questo comando ci restituisce direttamente la matrice dei guadagni del regolatore LQ  $K_C$ , la matrice  $S$  e gli autovalori del sistema in catena chiusa (della matrice  $A - BK_C$ ).

e ricordando la struttura matriciale del regolatore LQG, possiamo ricavare le matrici che descrivono il modello del regolatore e creare il corrispettivo modello in spazio di stato con il comando "ss":

$$Ak = A - Kf * C - B * Kc;$$

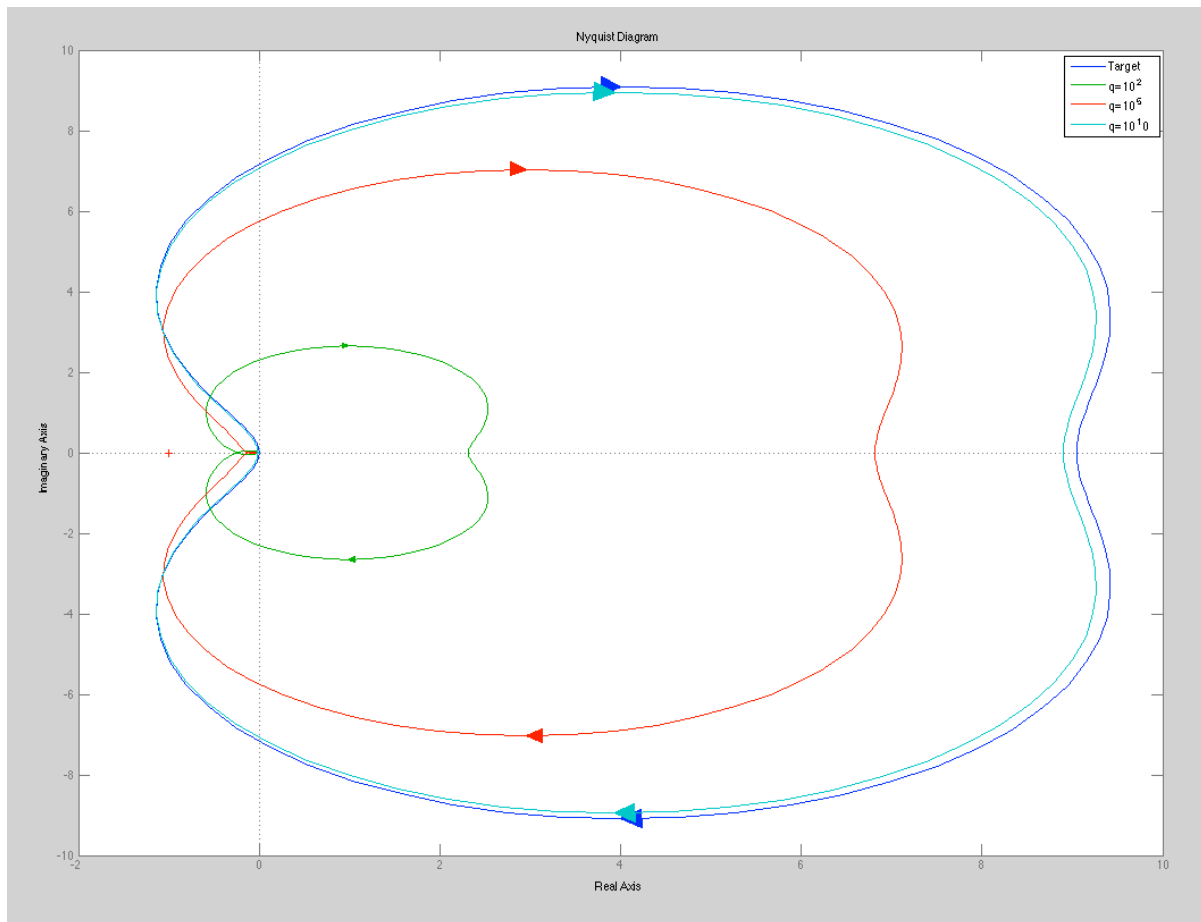
$$Bk = Kf; \quad Ck = Kc;$$

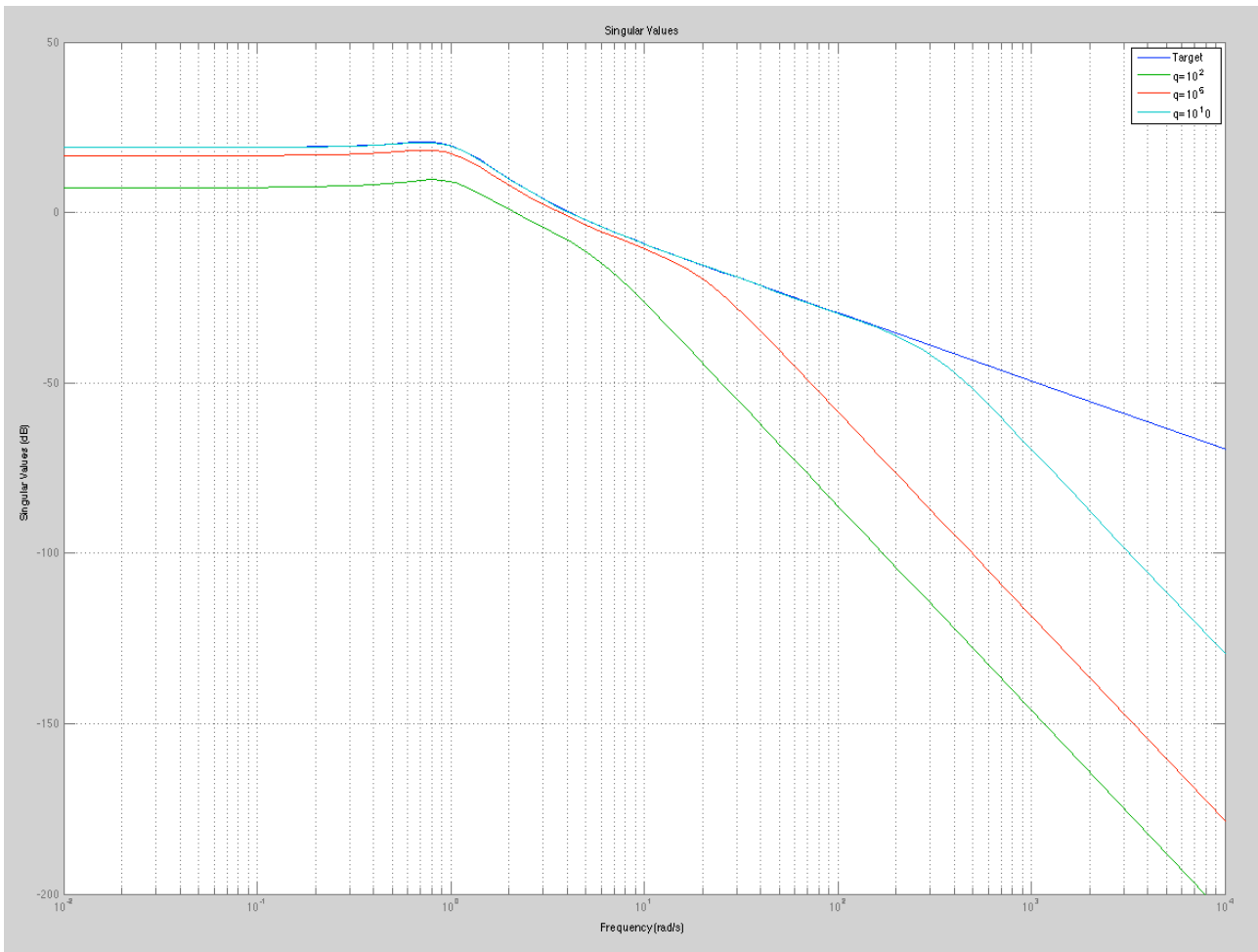
$$Ks = \text{ss}(Ak, Bk, Ck, \theta);$$

e per ottenere la matrice del guadagno di anello del sistema compreso il regolatore al punto critico  $O$ , basta moltiplicare il modello del plant ("sys") definito al capitolo precedente per il modello del regolatore LQG:

$$\text{lqg} = \text{sys} * Ks;$$

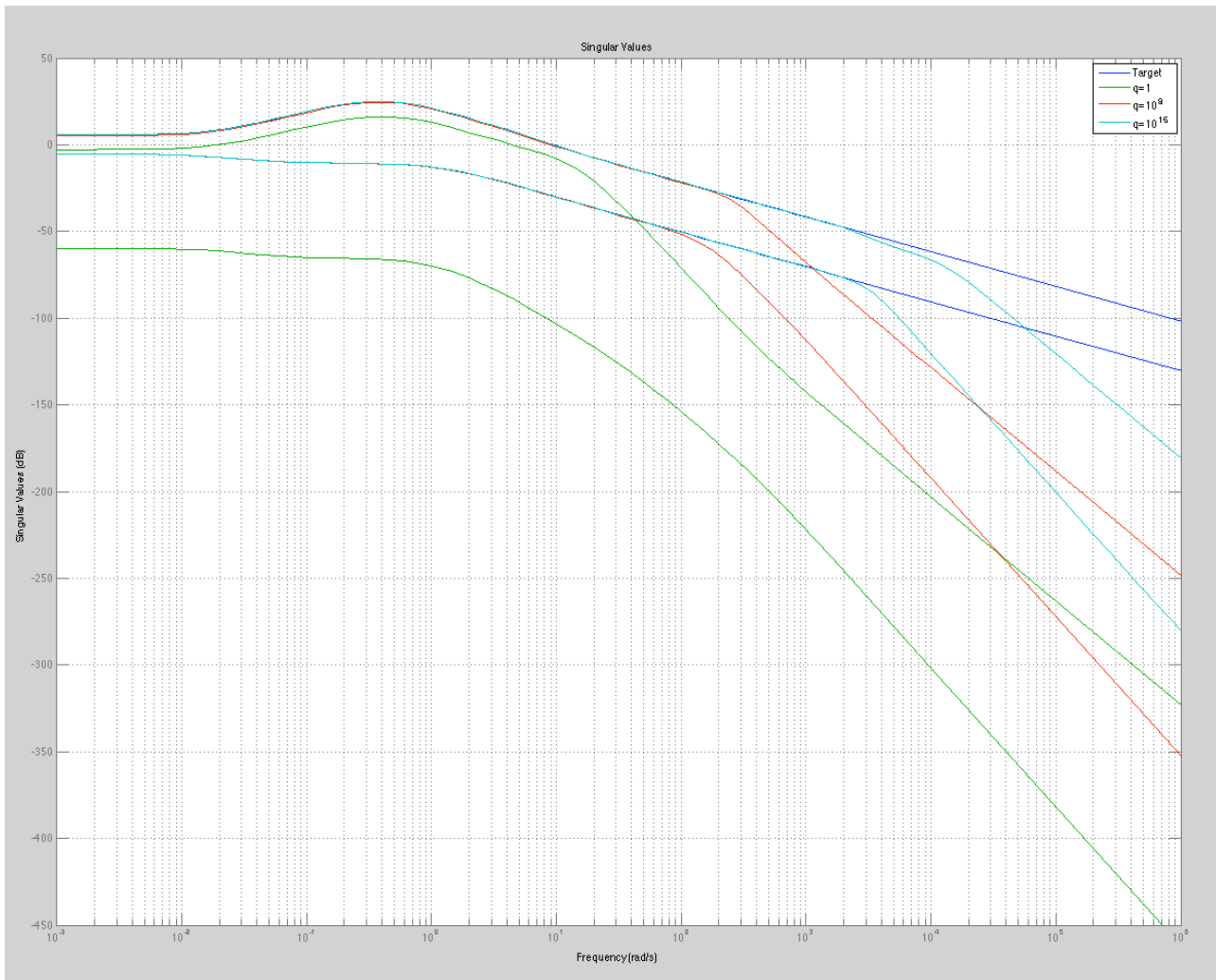
Di seguito sono riportati i grafici sovrapposti della funzione guadagno di anello al punto critico  $O'$  del sistema target per l'esempio 1 (SISO), e la relativa funzione guadagno di anello al punto critico  $O$  per  $q = 10^2, 10^5, 10^{10}$ :





È interessante notare che le proprietà asintotiche dimostrate nel capitolo 3 risultano verificate. Si nota infatti che assegnando a  $q$  valori sempre più elevati la funzione guadagno di anello al punto critico  $O$  tende a convergere a quella del sistema target (al punto critico  $O'$ ).

Riporto di seguito i grafici sovrapposti dell'andamento dei valori singolari della matrice guadagno di anello del sistema target al punto critico  $O'$  per l'esempio 2 (MIMO) e dei valori singolari della matrice guadagno di anello del sistema compreso di regolatore LQG al punto critico  $O$  per  $q = 1, 10^8, 10^{15}$ :



Risulta evidente dal grafico che le stesse considerazioni svolte per l'esempio SISO rimangono valide nel caso MIMO.

Un comando estremamente interessante del “Robust Control ToolBox” di MATLAB è “ltrsyn”. Può essere utilizzato per progettare il recupero per regolatori LQG sia con il procedimento ALTRI che con il procedimento ALTRO, va usato rispettivamente nelle due seguenti modalità:

$$[Ks \ SVL \ W1] = \text{ltrsyn}(\text{sys}, Kc, W, V, q); \quad (\text{per ALTRI})$$

$$[Ks \ SVL \ W1] = \text{ltrsyn}(\text{sys}, Kf, Q, R, q, \text{'OUTPUT'}); \quad (\text{per ALTRO})$$

restituisce come risultati il modello in spazio di stato del regolatore LQG, i grafici dei valori singolari della matrice guadagno di anello “recuperata” e l'intervallo di frequenze usato per i grafici. Gli argomenti che richiede sono gli stessi visti per lo svolgimento normale del problema con l'unica differenza che “q” può essere introdotto direttamente come un vettore di parametri di recupero, ltrsyn penserà automaticamente a sintetizzare il regolatore e visualizzare i risultati per ogni  $q$ .

# Appendice

## A.1 MATRICE TRASPOSTA CONIUGATA

In algebra lineare la matrice trasposta coniugata di una matrice  $A$  a valori complessi è la matrice ottenuta effettuando la trasposta e scambiando ogni valore con il suo complesso coniugato ed è indicata con  $A^*$ .

## A.2 MATRICI HERMITIANE

Una matrice hermitiana è una matrice a valori complessi che coincide con la propria trasposta coniugata. Ogni matrice hermitiana è una matrice quadrata della forma  $A = B + iC$ , dove  $B$  è una matrice simmetrica a componenti reali e  $C$  è una matrice antisimmetrica a componenti reali.

Gli autovalori di una matrice hermitiana sono reali:  $\lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \Lambda(A)$ , il che equivale a sostenere che le radici del polinomio caratteristico di una qualsiasi matrice hermitiana  $A$  sono tutte reali.

Per ogni matrice hermitiana, la molteplicità algebrica e quella geometrica di ciascun autovalore coincidono, quindi ogni matrice hermitiana è diagonalizzabile.

Autospazi distinti di una matrice hermitiana sono tra loro ortogonali.

$$V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j} \quad \forall \lambda_i, \lambda_j \in \Lambda(A), \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Per ogni matrice  $A$ , le matrici  $A^*A$  e  $AA^*$  sono hermitiane e hanno autovalori reali non negativi.

## A.3 VALORI SINGOLARI

**Definizione** Sia  $A$  una matrice rettangolare  $n \times m$ , sia  $\sigma$  uno scalare non nullo,  $x \in \mathbb{F}^m$  e  $y \in \mathbb{F}^n$  siano vettori non nulli tali per cui valgono le relazioni:

$$Ax = \sigma y,$$

$$A^*y = \sigma x.$$

Allora:

- $\sigma$  è detto valore singolare di  $A$ ,
- $x$  e  $y$  vengono detti vettori singolari (rispettivamente destro e sinistro) di  $A$  relativi a  $\sigma$ .

Quanto affermato nella definizione può essere espresso ricorrendo alla notazione matriciale come segue:

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

$\sigma$  allora, se esiste, è autovalore della matrice hermitiana  $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}$  e dunque, per quanto visto al paragrafo precedente, è un numero reale.



Si riconosce inoltre che gli autovalori di  $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}$  si presentano sempre in coppie simmetriche rispetto all'origine. Considereremo solo i  $\sigma$  positivi e li indicheremo col nome di valori singolari.

**Proposizione** Data una matrice  $A$ , sono equivalenti:

1.  $\sigma_i$  è valore singolare di  $A$ ,  $x_i$  e  $y_i$  sono vettori singolari, rispettivamente destro e sinistro, di  $A$  relativi a  $\sigma_i$ .
2.  $\sigma_i^2$  ( $\sigma_i > 0$ ) è autovalore sia di  $A^*A$  che di  $AA^*$ ,  $x_i$  e  $y_i$  sono autovettori rispettivamente di  $A^*A$  e di  $AA^*$  relativi all'autovalore  $\sigma_i^2$ .

**Notazioni:** indichiamo con  $\bar{\sigma}(A)$  il valore singolare maggiore della matrice  $A$  e con  $\underline{\sigma}(A)$  quello minore.

Siano  $A$  e  $B$  due matrici rettangolari, sono note le seguenti proprietà:

**Proprietà 1:**  $\underline{\sigma}(A + B) \geq \underline{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(B)$

**Proprietà 2:**  $\bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}$

**Proprietà 3:**  $\bar{\sigma}(A + B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$

**Proprietà 4:**  $\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B)$

**Proprietà 5:**  $\bar{\sigma}(A \pm B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$

#### A.4 PRINCIPIO DI DUALITÀ

Data una coppia primale-duale di problemi  $\mathcal{P}_P$  e  $\mathcal{P}_D$  ed una coppia primale-duale di modelli  $\mathcal{M}_P$  e  $\mathcal{M}_D$ , la soluzione del problema duale formulato per il modello duale  $\mathcal{P}_D(\mathcal{M}_D)$  si può ricavare dualizzando la soluzione del problema primale formulato per il modello primale  $\mathcal{P}_P(\mathcal{M}_P)$ .

Ad esempio se indichiamo con  $\mathcal{P}_P$  il problema di regolazione ottima LQ per il modello primale  $\mathcal{M}_P := \{A, B, C, Q, R\}$ , la soluzione di tale problema è costituita da una retroazione algebrica dello stato con matrice di retroazione calcolata mediante:

$$K_c := R^{-1}B^T S,$$

$$SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + C^T Q C = 0, \quad S \geq 0 \quad (\text{CARE})$$

Indicato con  $\mathcal{P}_D$  il problema di stima ottima dello stato per il modello duale

$\mathcal{M}_D = \{A^T, C^T, B^T, Q, R\}$ , la soluzione di tale problema è costituita da un osservatore identità la cui matrice dei guadagni è calcolata mediante:

$$K_f := PBR^{-1},$$

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + C^T Q C = 0, \quad P \geq 0 \quad (\text{FARE})$$

Poiché la CARE e la FARE ammettono un'unica soluzione si verifica che:

$$P = S, \quad K_F^T = K_C.$$

# Bibliografia

Gloria Capitani, Marco Tibaldi, 1993, LQG/LTR: un approccio frequenziale al progetto di sistemi di controllo Multi Input – Multi Output,

Ettore Fornasini, Giovanni Marchesini, 2003, Appunti di TEORIA DEI SISTEMI.

Michael Athans, 1986, A tutorial on the LQG/LTR method.

Joao P. Hespanha, 2007, LQG/LQR controller design.

Remo Gattazzo, 2005, Argomenti di ALGEBRA LINEARE.