



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

**Reti di reazioni nucleari in stelle di elio**

Relatore

Prof. Lorenzo Fortunato

Laureando

Francesco Addari

Anno Accademico 2017/2018



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Generalità sull'evoluzione stellare</b>	<b>2</b>
<b>2 Descrizione del problema</b>	<b>5</b>
2.1 Notazioni e costanti . . . . .	5
2.2 Il processo tre alfa . . . . .	6
2.3 Oltre il processo tre alfa . . . . .	9
<b>3 Discussione dei risultati</b>	<b>12</b>
3.1 Il sistema parziale . . . . .	12
3.2 Il sistema completo . . . . .	13
<b>Conclusioni</b>	<b>20</b>



# Introduzione

Anche se la Fisica al giorno d'oggi è formalmente divisa in diversi settori e branche, questa separazione è del tutto apparente: questi campi non possono essere studiati e approfonditi senza l'ausilio di altri settori e tecniche sviluppate in questi ultimi. Il lavoro che segue è un chiaro esempio di questa interdisciplinarietà tra strutture ramificate.

Lo studio delle stelle è centrale in Astrofisica perché gli astri sono oggetti che vivono per un tempo lunghissimo, e sono responsabili della maggior parte della luce visibile che osserviamo. Una stella è uno sferoide luminoso di plasma, che genera energia grazie ai processi di fusione nucleare che avvengono all'interno di essa. Di fondamentale importanza per la compressione della struttura ed evoluzione è dunque la conoscenza della Fisica Nucleare. Il proposito di questa tesi è appunto costruire e discutere un modello semplificato di un processo che avviene nel plasma stellare, chiamato comunemente *processo tre alfa* (*three-alpha process*). Essenzialmente il processo consiste nella conversione di tre particelle  $\alpha$  (nuclei di  $^4\text{He}$ ) in un nucleo di  $^{12}\text{C}$  e un fotone. Tratteremo anche la rete di reazioni innescate dalla cattura di una particella alfa su nuclei alfa coniugati come il carbonio, l'ossigeno e il neon.

Il lavoro che segue si articola in tre capitoli:

- Capitolo 1:** Il primo capitolo si propone di descrivere qualitativamente l'evoluzione stellare, in modo tale da riconoscere in quali fasi stellari avviene la rete di reazioni trattata.
- Capitolo 2:** Il secondo capitolo riguarda la descrizione del problema, dopo aver introdotto alcune notazioni e costanti fondamentali utilizzate poi nella risoluzione numerica.
- Capitolo 3:** Il terzo capitolo presenta e discute i risultati ottenuti al variare dei parametri caratteristici del sistema.

# 1 | Generalità sull'evoluzione stellare

Prima di studiare il modello del processo tre alfa, e delle reazioni successive, è interessante e utile conoscere alcune generalità sulle stelle e sulla loro evoluzione. Questo aiuta a capire quando avviene un particolare processo e, qualitativamente, che effetti abbia sulla struttura della stella. La descrizione dell'evoluzione che segue si riferisce al caso di stelle *singole*, non binarie; la presenza dell'interazione gravitazionale della compagna può influire vistosamente sulla vita della stella.

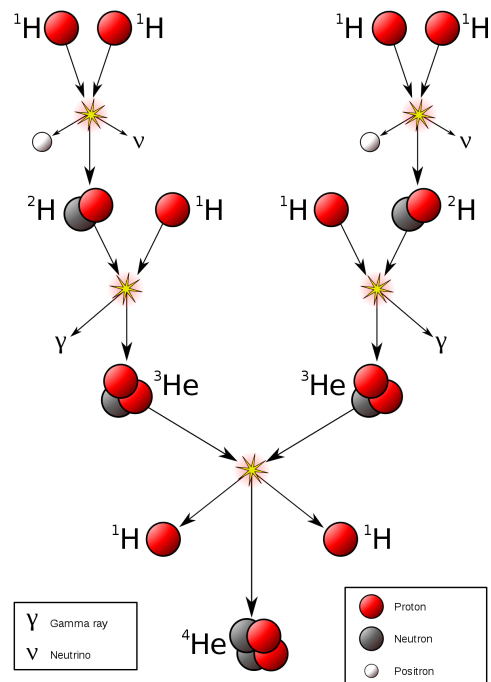
Nelle prime fasi dell'Universo dopo il Big Bang ebbe luogo la *nucleosintesi primordiale*, una fase in cui la temperatura e la densità erano sufficientemente alte da consentire reazioni di fusione nucleare. In questo processo vengono a formarsi principalmente idrogeno ( $^1\text{H}$  e  $^2\text{H}$ ) ed elio ( $^3\text{He}$  e  $^4\text{He}$ ), più una minima abbondanza di elementi nella regione di Li-Be-B [6]; questi ultimi comunque sono subito consumati dalle reazioni nucleari con protoni, poiché hanno sezioni d'urto molto grandi. I restanti nuclidi, con numeri di massa  $A > 12$ , sono necessariamente stati prodotti all'interno delle stelle.

I luoghi di formazione stellare sono le nubi interstellari, accumuli gas e polvere presenti nelle galassie. La nascita della stella avviene in corrispondenza del collasso gravitazionale del materiale della nube: l'avvicinarsi degli atomi gli uni agli altri provoca una diminuzione dell'energia potenziale gravitazionale, che si trasforma in energia termica e radiazione. La contrazione causa un aumento della pressione, temperatura e densità. Se le condizioni lo permettono gli atomi sono tutti ionizzati, e gli elettroni si trovano liberi nel plasma. Il collasso termina quando la pressione diventa tale da contrastare la gravità, e si raggiunge un equilibrio idrostatico della stella, detta in *pre-sequenza principale*.

Il parametro che più influenza e determina come si evolve una stella è la sua massa. Si prenda per riferimento la massa del Sole  $M_{\odot}$ , il cui valore è riportato in tabella 2.1. In generale più una stella è massiccia, più breve è la sua vita (a parità di metallicità<sup>1</sup>).

Nella fase di pre-sequenza principale, quando viene raggiunta la temperatura di qualche milione di kelvin, il primo processo che entra in atto è il *bruciamento del deuterio* (*deuterium-burning*), in simboli  $d(p,\gamma)^3\text{He}$ . Il deuterio primordiale si fonde con l'idrogeno producendo dell'elio. Quando la temperatura raggiunge diversi milioni di K allora si può innescare il processo di *bruciamento dell'idrogeno* (*hydrogen burning*), ma soltanto se la massa è sufficientemente elevata. Infatti nel caso in cui la massa della stella sia  $M \lesssim 0.08M_{\odot}$  essa non riesce a proseguire oltre il deuterium burning. Questi oggetti sono classificati come *nane brune*, e l'unica cosa che differenzia questi oggetti dai pianeti è proprio il fatto che riescono comunque ad avere processi nucleari al loro interno.

Nel caso in cui  $M \gtrsim 0.08M_{\odot}$ , la massa è sufficiente per innescare la fusione dell'idrogeno in elio. Questo avviene principalmente tramite la *catena protone-protone* (*pp-chain*) nelle stelle di massa fino a  $\sim 1.5M_{\odot}$ ; nelle stelle di massa



**Figura 1.1:** Una sintesi della catena protone-protone. I neutrini emessi sono di tipo elettronico.

<sup>1</sup>Con il termine *metalli*, gli astronomi si riferiscono a tutti gli elementi più pesanti dell'elio. La metallicità misura la frazione di metalli contenuti nella stella.

superiore, il processo predominante che cito soltanto è il *ciclo CNO*, il quale consuma l'idrogeno in favore dell'elio utilizzando anche carbonio, azoto e ossigeno. La catena protone-protone è visivamente riassunta nella figura 1.1. Le stelle che stanno in equilibrio idrodinamico grazie alla combustione dell'idrogeno, sono dette *stelle in sequenza principale* (*main-sequence stars*), nella quale rimangono per circa il 90% della propria vita.

La fase successiva dipende ancora dalla massa iniziale della stella: se questa è  $M \lesssim 0.4M_{\odot}$  allora la stella non è sufficientemente massiva da utilizzare l'elio come combustibile nucleare, e le reazioni che contrastavano la forza gravitazionale si arrestano. Conseguentemente la stella si contrae fino a quando il gas di elettroni, che sono sempre presenti e liberi, non diventa degenere. A questo punto il collasso non può proseguire ulteriormente per il principio di esclusione di Pauli: le stelle in questo nuovo equilibrio sono chiamate *nane bianche*, le quali si raffreddano lentamente irradiando la loro energia termica.

La pressione di un gas degenere di fermioni non dipende dalla sua temperatura: in altre parole, l'aumento di temperatura ha un minimo effetto sulla pressione. Esiste un limite di sostenibilità per la pressione: se la gravità supera questo limite, allora la stella collassa nonostante la presenza del gas di elettroni degenere. Il massimo valore della massa di una stella che riesca a stare in equilibrio in questa situazione è detto *limite di Chandrasekhar* e vale  $1.44M_{\odot}$ . Non sono infatti osservate nane bianche più massive.

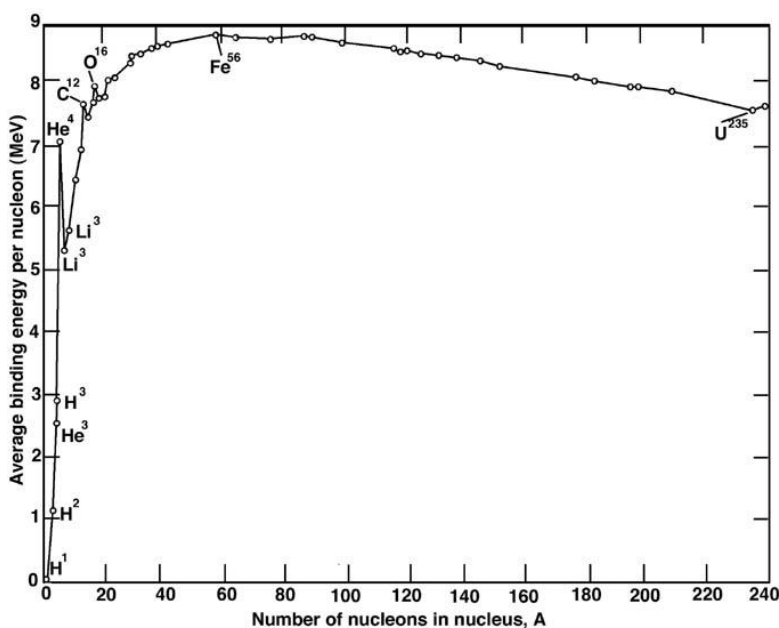
Per stelle di massa  $M \gtrsim 0.4M_{\odot}$ , comunque venga bruciato l'idrogeno, quando questo viene esaurito nel nucleo la stella non riesce più a mantenere l'equilibrio idrodinamico e il nucleo si contrae. La combustione dell'idrogeno continua comunque in un guscio attorno al nucleo, poiché la contrazione di quest'ultimo provoca un innalzamento della temperatura tale da innescarla. L'energia fornita dalla combustione dell'idrogeno nella *shell* causa un'espansione degli strati superficiali della stella, che diventa una *gigante rossa*. Quando la temperatura raggiunge i  $10^8$  K, a causa della contrazione, si innesca il processo di combustione dell'elio, di cui rimando la discussione al seguito, e la stella raggiunge un nuovo equilibrio termodinamico<sup>2</sup>. La durata di questa fase, paragonata a quella della sequenza principale, è brevissima.

Una volta che anche l'elio nel nucleo si è esaurito in favore di carbonio e ossigeno, il core si contrae ancora una volta, aumenta la temperatura e innesca la combustione dell'elio in una shell attorno al nucleo: la stella ora brucia elio ed idrogeno in due shell concentriche. In questa fase il raggio della stella subisce delle pulsazioni, dovute alla alternante predominanza dell'hydrogen burning o helium burning, e subisce una significativa perdita in massa degli strati più esterni, non più sufficientemente legati gravitazionalmente e scoprendo gli strati sempre più interni e più caldi della stella. Una volta che la temperatura superficiale ha raggiunto un valore sufficientemente elevato, l'intensa radiazione ultravioletta ionizza il materiale precedentemente espulso e restituito al mezzo interstellare che diventa fluorescente. La stella è diventata una *nebulosa planetaria* (*planetary nebula*) lasciando come residuo una nana bianca composta principalmente da carbonio e ossigeno.

Per stelle di massa  $M \gtrsim 8M_{\odot}$ , una volta finito l'elio, è possibile fondere il carbonio. All'aumentare della massa la stella riesce a proseguire ulteriormente i processi di fusione, utilizzando neon, ossigeno e silicio nel core. In questo modo, ogni volta che uno di questi determinati elementi termina nel nucleo, continua comunque a bruciare in una shell attorno ad esso, come spiegato precedentemente. Questi stadi con elementi sempre più pesanti sono in generale molto rapidi: ad esempio il silicon burning sussiste circa 1 giorno. In così poco tempo gli strati superiori della stella non hanno sufficiente tempo per rispondere, ed essa rimane pressoché invariata dall'esterno. Si forma così una struttura a gusci: l'elemento più pesante che viene raggiunto dalle stelle più massicce è il  $^{56}\text{Fe}$ . Questo fatto trova subito spiegazione in

<sup>2</sup>Eventualmente, prima di raggiungere l'equilibrio, se la massa è inferiore a  $2M_{\odot}$  il gas di elettroni del nucleo della stella diventa degenere: in questa situazione l'aumento della temperatura non consegue in un'espansione del nucleo. Quando la temperatura raggiunge un valore tale da rimuovere la degenerazione viene liberata violentemente l'energia creata dalla iniziale fusione dell'elio, in un evento chiamato *core helium flash*.

Fisica Nucleare. La figura 1.2 mostra un plot dell'energia di legame media per nucleone. Affinché il processo di fusione sia spontaneo esso deve essere energeticamente favorevole per i due nuclei: questo è verificato se il nuclide prodotto è più stabile dei nuclei consumati. Essenzialmente infatti, l'energia liberata nella fusione corrisponde all'energia di legame guadagnata nel processo. Come si può notare dalla figura 1.2 l'andamento ha un massimo al  $^{56}\text{Fe}$ , e questo spiega l'arresto dei processi di fusione nucleare all'interno delle stelle: continuare non sarebbe energeticamente favorevole, i processi successivi avrebbero bisogno di energia per essere innescati, non ne produrrebbero. Dunque, una volta che il nucleo stellare è composto da ferro,



**Figura 1.2:** Energia di legame media per nucleone. Maggiore è il suo valore, più stabile è il nuclide. Immagine tratta dal sito <https://imagine.gsfc.nasa.gov/educators/elements/imagine/05.html>.

la produzione di energia si arresta, poiché non esiste alcun processo energeticamente favorevole. Comunque, gli strati più esterni continuano le loro reazioni nucleari, e sempre più ferro precipita sul nucleo, aumentando la sua massa. Quando la massa del core supera il limite di Chandrasekar, allora la degenerazione degli elettroni non riesce a contrastare ulteriormente la pressione gravitazionale e il nucleo collassa.

Il collasso genera un'onda di shock che si propaga verso l'esterno, e il residuo del nucleo diventa una *stella di neutroni* o un *bucio nero*. Il secondo caso si verifica se il nucleo residuo della stella è così massivo da rendere il collasso gravitazionale più forte della pressione dei nucleoni degeneri. Questo limite è ancora conosciuto con grande imprecisione, e si sa essere tra 1.5 e 3  $M_{\odot}$  [2].

Come l'onda di shock attraversi il nucleo e gli strati esterni della stella è attualmente ignoto [5], e tanto meno come dal collasso del nucleo si inneschi l'esplosione di *supernova*. Durante l'esplosione della supernova gli strati più interni che vengono eiettati nel mezzo interstellare sono caratterizzati dalla forte abbondanza di neutroni: questo potrebbe essere la spiegazione della nucleosintesi di praticamente tutti i nuclidi con  $A > 60$  che avviene per via della cattura neutronica, processo chiamato *r-process*.



## 2 | Descrizione del problema

Nel capitolo 1 si è qualitativamente descritta la vita di una stella, e le reazioni nucleari che avvengono all'interno di essa. Il proposito di questa tesi non è però studiare il modello dell'evoluzione di una stella: si considera piuttosto un elemento infinitesimo di plasma, nel quale si studia la variazione temporale delle abbondanze frazionarie di determinati nuclidi al variare di temperatura, densità e concentrazioni iniziali. Si assume inoltre che durante l'evoluzione del sistema, temperatura e densità rimangano costanti, e questo si è visto chiaramente non essere verificato. Queste semplificazioni permettono però di trascurare gli aspetti fluidodinamici del sistema, che descrivono il moto delle particelle all'interno del plasma, e soprattutto gli aspetti legati alla sua stabilità. La struttura della stella è infatti fortemente suscettibile alle reazioni in corso all'interno di essa.

### 2.1 Notazioni e costanti

Si consideri una reazione  $0 + 1 \rightarrow 2 + 3$  in cui 0 e 1 sono entrambe particelle con massa a riposo non nulla (non fotoni, ad esempio). Allora si definisce il *tasso di reazione*

$$r_{01} = \frac{N_0 N_1}{1 + \delta_{01}} \langle \sigma v \rangle = \frac{N_0 N_1}{1 + \delta_{01}} \int_0^\infty dv v \sigma(v) P(v) \quad (2.1)$$

ove  $N_{1,2}$  sono le densità numeriche (ad esempio in  $\text{cm}^{-3}$ ),  $v$  è la velocità relativa tra le due particelle e  $\sigma(v)$  è la sezione d'urto. Nel caso in cui 0 e 1 siano la medesima particella, allora la densità di coppie totali non è  $N_0 N_1$ , ma  $N_0(N_0 - 1)/2 \sim N_0^2/2$ . Si considera dunque il termine  $(1 + \delta_{01})$ , ove  $\delta_{01}$  è la delta di Kronecher che vale 1 nel caso di particelle identiche. Il tasso di reazione descrive la variazione di densità nell'unità di tempo, dovuta alla reazione tra 0 e 1.

In un plasma stellare in equilibrio termodinamico però le velocità non sono costanti, ma sono distribuite secondo una funzione  $P(v)$ : si considera dunque un valor medio del prodotto  $v\sigma(v)$ . Nel caso ci sia simmetria sferica, che le particelle coinvolte nella reazione non abbiano velocità relativistiche e non siano degeneri, la funzione di distribuzione è una funzione di *Maxwell-Boltzmann* (MB). Si può dimostrare che, se entrambe le particelle hanno velocità descritte dalla distribuzione di MB, allora anche la velocità relativa ha lo stesso andamento. Si può dunque scrivere la probabilità che la velocità relativa abbia un valore compreso tra  $v$  e  $v + dv$  come:

$$P(v)dv = \left( \frac{\mu_{01}}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left[ -\frac{\mu_{01} v^2}{2kT} \right] dv \quad (2.2)$$

Nella 2.2  $\mu_{01}$  è la massa ridotta del sistema composto ad 0 e 1,  $k$  è la costante di Boltzmann. Con il cambio di variabile in energia  $E = \mu_{01} v^2/2$  la sezione d'urto  $\langle \sigma v \rangle$  2.1 diventa

$$\langle \sigma v \rangle = \left( \frac{8}{\pi \mu_{01}} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty dE E \sigma(E) e^{-E/kT} \quad (2.3)$$

Nel prosieguo si utilizzeranno, oltre i simboli appena introdotti, anche  $\lambda$  e  $\tau$  per indicare rispettivamente costanti di decadimento e vite medie dei nuclei. Nel caso di un decadimento, dunque una reazione del tipo  $A \rightarrow a + b + \dots$ , il tasso di reazione della particella  $i$  ( $i = A, b, c, \dots$ ) si può scrivere come:

$$r_i = \lambda N_i \quad (2.4)$$

Il tasso  $r_i$  avrà segno positivo o negativo a seconda che la particella  $i$  sia rispettivamente prodotta o consumata nella reazione.

Si definisce inoltre l'abbondanza frazionaria o relativa di un certo nuclide  $y$  come:

$$X_y = \frac{M_y}{N_A \rho} N_y \quad (2.5)$$

ove  $N_A$  è il numero di Avogadro,  $M_y$  la massa molare del nuclide  $y$  e  $\rho$  la densità di massa totale del plasma. Per definizione, la somma di tutte le abbondanze frazionarie è pari a 1. Il

Costante	Valore	Costante	Valore
$\hbar c$	197.327 MeV fm	$m_p$	938.272 MeV $c^{-2}$
$c$	$2.99792458 \times 10^{23}$ fm/s	$m_n$	939.565 MeV $c^{-2}$
$N_A$	$6.022 \times 10^{23}$ mol $^{-1}$	$k$	$8.61733 \times 10^{-11}$ MeV/K
$M_\odot$	$1.989 \times 10^{30}$ Kg	$M_\alpha$	4.002 g/mol

**Tabella 2.1:** Sia  $c$  la velocità della luce,  $\hbar$  la costante di Planck ridotta e  $k$  la costante di Boltzmann.  $M_\odot$  è la massa del Sole,  $m_p$  e  $m_n$  masse di protone e neutrone.

simbolo  $M_\alpha$  indica la massa di una mole di *nuclei di elio*; si definiscono inoltre  $M_{\text{Be}}$ ,  $M_{\text{C}}$ ,  $M_{\text{O}}$ ,  $M_{\text{Ne}}$  e  $M_{\text{Mg}}$  rispettivamente le masse molari di  $^8\text{Be}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{20}\text{Ne}$  e  $^{24}\text{Mg}$ . Per semplicità si utilizza la seguente approssimazione, tenendo presente che l'errore è al massimo dello 0.1%:

$$M_{\text{Be}} = 2M_\alpha \quad M_{\text{C}} = 3M_\alpha \quad M_{\text{O}} = 4M_\alpha \quad M_{\text{Ne}} = 5M_\alpha \quad M_{\text{Mg}} = 6M_\alpha \quad (2.6)$$

Si indicherà inoltre il momento angolare totale e la parità dei livelli nucleari con la notazione  $J^\pi$ .

## 2.2 Il processo tre alfa

Sin dall'inizio dello sviluppo dell'astrofisica nucleare diventò apparente che, vista la mancanza di isotopi stabili per  $A = 5$  e  $A = 8$ , non è possibile (nelle stelle) produrre elementi stabili di grande numero di massa semplicemente procedendo con cattura protonica e decadimenti beta che variano di una sola unità il numero di massa. Il processo tre alfa è responsabile della conversione di nuclei di  $^4\text{He}$  in nuclei di  $^{12}\text{C}$ , saltando così tutti gli isotopi stabili con numero di massa compreso tra  $A = 6$  e  $A = 11$ . È un processo a tre stadi: nel primo due particelle  $\alpha$  interagiscono per formare un  $^8\text{Be}$  nel suo stato fondamentale



Nel secondo stadio, una terza particella  $\alpha$  interagisce con il nucleo  $^8\text{Be}$  per formare  $^{12}\text{C}^{**}$



Infine il carbonio si diseccita emettendo fotoni

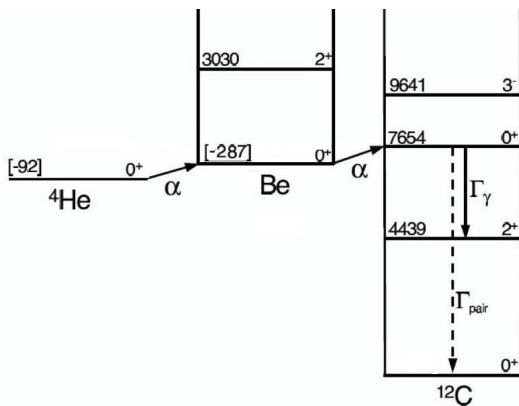


La reazione diretta in 2.7 è esotermica e ha  $Q_{2\alpha} = (-91.84 \pm 0.04)$  keV [5]. Per questo motivo, il nucleo di berillio è instabile e si disintegra in due nuclei di  $^4\text{He}$  con una vita media  $\tau_{2\alpha} = 1.18 \times 10^{-16}$  s [4]. Il  $^8\text{Be}$  vive però abbastanza da rendere non nulla la probabilità che interagisca con un'altra  $\alpha$ , con la quale forma una risonanza con spin-parità  $J^\pi = 0$ : questa corrisponde al secondo stato eccitato del carbonio (2.8). Questo processo è ancora esotermico: il  $Q$ -value è pari a  $Q_{\text{Be},\alpha} = (-287.6 \pm 0.2)$  keV. Il  $^{12}\text{C}^{**}$  può decadere indietro spezzandosi in berillio ed elio,

oppure decadere sul primo eccitato e poi sullo stato fondamentale con l'emissione di 2 fotoni. Molto meno probabile è il decadimento diretto verso lo stato fondamentale, con l'emissione di una coppia  $e^+e^-$ . Le larghezze parziali sono, rispettivamente per i processi appena descritti,

$$\Gamma_\alpha = 8.5 \text{ eV} \quad \Gamma_\gamma = (3.7 \pm 0.5) \times 10^{-3} \text{ eV} \quad \Gamma_{\text{pair}} = 6 \times 10^{-5} \text{ eV} \quad (2.10)$$

Come si può vedere in figura 2.1,  $\Gamma_\gamma$  è la larghezza parziale per il decadimento verso il solo primo stato eccitato. La larghezza di decadimento dello stato  $2^+$  verso il fondamentale è pari a  $\Gamma_{\gamma,2^+} = 10.8 \times 10^{-3} \text{ eV}$ , comparabile a  $\Gamma_\gamma$ : si può quindi supporre che, una volta che il carbonio decade gamma sullo stato  $2^+$  questo decada poi in cascata verso il fondamentale. Si può quindi considerare soltanto il tempo di vita legato a  $\Gamma_\gamma$  [4]. Si definisce  $\Gamma_{\text{rad}} = \Gamma_\gamma + \Gamma_{\text{pair}}$ .



**Figura 2.1:** Diagramma dei livelli energetici per i nuclidi coinvolti. I numeri in parentesi quadre rappresentano i  $Q$ -value delle reazioni. I numeri senza parentesi rappresentano invece l'energia del livello eccitato del nuclide rispetto al suo stato fondamentale. A destra di ogni livello è riportata la  $J^\pi$ .

La descrizione del processo tre alfa può essere facilmente convertita nel sistema di equazioni differenziali 2.11 utilizzando le definizioni 2.1 e 2.4 di tasso di reazione, i quali non corrispondono ad altro che la variazione per unità di tempo delle densità numeriche dei nuclei.

Si considerino ora le prime due equazioni del sistema 2.11. Il primo termine (di entrambe) si riferisce alla reazione 2.7 in cui vengono consumate 2 particelle  $\alpha$  per produrre un nucleo di berillio; il secondo termine riguarda la reazione inversa, in cui il berillio decade. Il terzo termine riguarda invece la produzione di berillio ed elio dovuta al decadimento del carbonio, mentre il quarto termine si riferisce alla produzione di quest'ultimo in cui vengono utilizzati sia He che Be (reazione 2.8).

Si consideri ora la terza equazione: il primo termine descrive la medesima produzione

di carbonio, mentre gli ultimi due si riferiscono alle vie di decadimento del carbonio, con la stessa notazione finora utilizzata. L'ultima equazione descrive l'unica possibilità di variazione della densità del nucleo di carbonio nello stato fondamentale: può essere solo prodotto dopo la diseccitazione dal livello a 7654 keV.

$$\begin{cases} N'_\alpha = -N_\alpha^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha} + 2\lambda_{2\alpha} N_{\text{Be}} + \lambda_\alpha N_{\text{C}^{**}} - N_\alpha N_{\text{Be}} \langle \sigma v \rangle_{\text{Be},\alpha} \\ N'_{\text{Be}} = \frac{N_\alpha^2}{2} \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha} - \lambda_{2\alpha} N_{\text{Be}} + \lambda_\alpha N_{\text{C}^{**}} - N_\alpha N_{\text{Be}} \langle \sigma v \rangle_{\text{Be},\alpha} \\ N'_{\text{C}^{**}} = N_\alpha N_{\text{Be}} \langle \sigma v \rangle_{\text{Be},\alpha} - \lambda_\alpha N_{\text{C}^{**}} - \lambda_{\text{rad}} N_{\text{C}^{**}} \\ N'_\text{C} = \lambda_{\text{rad}} N_{\text{C}^{**}} \end{cases} \quad (2.11)$$

Tutte le costanti moltiplicative le densità sono note, a meno delle due sezioni d'urto. Infatti, è nota la vita media del Be, e le costanti di decadimento del carbonio sono legate alle larghezze di decadimento

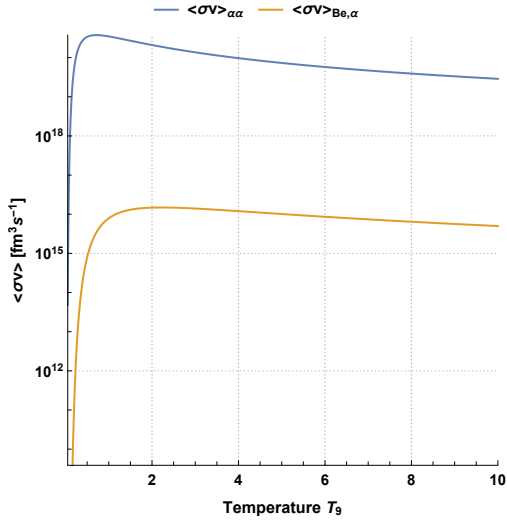
$$\lambda_{2\alpha} = \frac{1}{\tau_{2\alpha}} \quad \lambda_\alpha = \frac{\Gamma_\alpha}{\hbar} \quad \lambda_{\text{rad}} = \frac{\Gamma_{\text{rad}}}{\hbar} \quad (2.12)$$

Per le sezioni d'urto, è necessario risolvere l'integrale in 2.3. Nella maggior parte dei casi questo viene fatto numericamente. In questo caso però entrambe le sezioni d'urto di produzione dei nuclei  $^8\text{Be}$  e  $^{12}\text{C}^{**}$  possono essere descritte come risonanze da funzioni di Breit-Wigner ([5],

[4]). Questo agevola la risoluzione analitica dell'integrale, fornendo le due seguenti formule

$$\langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha} = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{\mu_{\alpha\alpha}kT} \right)^{3/2} \lambda_{2\alpha} \exp\left(\frac{Q_{2\alpha}}{kT}\right) \quad (2.13)$$

$$\langle \sigma v \rangle_{\text{Be},\alpha} = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{\mu_{\text{Be},\alpha}kT} \right)^{3/2} \frac{\Gamma_\alpha \Gamma_{\text{rad}}}{\hbar\Gamma} \exp\left(\frac{Q_{\text{Be},\alpha}}{kT}\right) \quad \text{con } \Gamma = \Gamma_\alpha + \Gamma_{\text{rad}} \quad (2.14)$$



**Figura 2.2:** Plot delle sezioni d'urto in funzione della temperatura  $T_9 = T/10^9$  K.

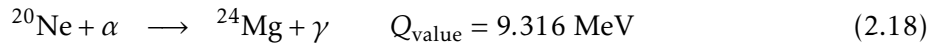
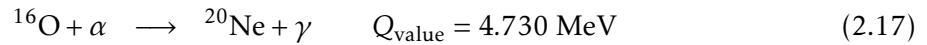
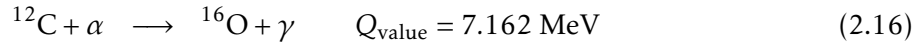
Per il sistema di equazioni 2.11 è stata utilizzata un'ulteriore approssimazione: il sistema è in uno stato di "buio". Non ci sono fotoni iniziali, e si trascura l'effetto di quelli che vengono prodotti nel decadimento gamma del carbonio: questi ultimi infatti, sono dell'energia corretta per la fotodisintegrazione del carbonio nuovamente in berillio e particella alfa. L'inclusione di questi effetti porterebbe a una notevole complicazione del problema.

Si sceglie inoltre di non considerare tutte le altre reazioni in cui si consumano particelle alfa: queste sono principalmente necessarie per la produzione di ossigeno, silicio e neon. Il sistema dipende dalla temperatura  $T$  (le sezioni d'urto) e dalla densità di massa  $\rho$  (all'interno della densità numerica). Queste due quantità rappresentano i parametri fondamentali del sistema. Affinché le reazioni trattate abbiano dei tassi di reazione non trascurabili è necessaria una temperatura dell'ordine di  $10^8$  K [3]. In figura 2.2 si è rappresentata la dipendenza dalla temperatura delle sezioni d'urto 2.13 e 2.14. Numericamente si trova che la  $\langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha}$  ha massimo per  $T_9 = 0.71$ , mentre  $\langle \sigma v \rangle_{\text{Be},\alpha}$  ha massimo per  $T_9 = 2.2$ . Si noti la differenza di ordini di grandezza tra le due quantità: l'asse y è in scala logaritmica, e la differenza è di circa 4 ordini di grandezza, dato dal fatto che se è probabile l'interazione tra due alfa, la probabilità che anche una terza reagisca è molto più bassa. Nonostante questo, si stabilisce comunque un equilibrio tra le concentrazioni di elio e berillio affinché sia possibile la produzione di carbonio. Nel sistema 2.11 non è ancora esplicitata la dipendenza dalla densità: si sceglie allora di cambiare variabile, utilizzando la concentrazione frazionaria piuttosto che la densità numerica, ricordando la definizione 2.5. Allora si può scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dX_\alpha}{dt} = -\frac{\rho N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha}}{M_\alpha} X_\alpha^2 + 2 \frac{M_\alpha \lambda_{2\alpha}}{M_{\text{Be}}} X_{\text{Be}} + \frac{\lambda_\alpha M_\alpha}{M_C} X_{C^{**}} - \frac{\rho N_A \langle \sigma v \rangle_{\text{Be},\alpha}}{M_{\text{Be}}} X_\alpha X_{\text{Be}} \\ \frac{dX_{\text{Be}}}{dt} = \frac{\rho N_A M_{\text{Be}} \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha}}{M_\alpha^2} \frac{X_\alpha^2}{2} - \lambda_{2\alpha} X_{\text{Be}} + \frac{\lambda_\alpha M_{\text{Be}}}{M_C} X_{C^{**}} - \frac{\rho N_A \langle \sigma v \rangle_{\text{Be},\alpha}}{M_\alpha} X_\alpha X_{\text{Be}} \\ \frac{dX_{C^{**}}}{dt} = \frac{\rho N_A M_C \langle \sigma v \rangle_{\text{Be},\alpha}}{M_\alpha M_{\text{Be}}} X_\alpha X_{\text{Be}} - \lambda_\alpha X_{C^{**}} - \lambda_{\text{rad}} X_{C^{**}} \\ \frac{dX_C}{dt} = \lambda_{\text{rad}} X_{C^{**}} \end{cases} \quad (2.15)$$

### 2.3 Oltre il processo tre alfa

La catena di reazioni che consumano elio non si limita al processo tre alfa. Esso è infatti coinvolto nella produzione di nuclei alfa coniugati più pesanti del carbonio. Le reazioni considerate in questo elaborato sono le seguenti



La rete di reazioni in cui sono coinvolte le particelle alfa prevede la produzione di nuclei anche più pesanti del magnesio, ma l'aumentare del numero di protoni consegue in una maggiore repulsione coulombiana, e dunque diminuisce il rate di produzione [7]. Inoltre queste reazioni procedono per cattura non risonante di particelle alfa, a differenza del processo tre alfa.

Si notino i  $Q_{\text{value}}$  delle tre reazioni: alle temperature considerate ( $0.1 - 2T_9$ ) non ci sono sicuramente fotoni termici in grado di fotodisintegrare i prodotti delle reazioni. Non è impossibile però che un fotone prodotto dalla reazione 2.16 possa fotodisintegrare un altro nucleo di ossigeno. In ogni caso, ci si aspetta che il tasso delle reazioni inverse sia molto piccolo, totalmente trascurabile rispetto alla produzione dei nuclei (si veda la formula 2.30).

Il processo tre alfa è una *cattura sequenziale di particelle (sequential two-particle capture)*. Questa particolarità permette di definire la costante  $\lambda_{3\alpha}$  a partire dalle sezioni d'urto delle reazioni parziali 2.7, 2.8 e 2.9:

$$\lambda_{3\alpha} = 3\hbar^5 \left(\frac{2\pi}{kT}\right)^3 \frac{1}{(\mu_{\alpha\alpha}\mu_{\alpha\text{Be}})^{3/2}} \frac{\Gamma_{\text{rad}}\Gamma_{\alpha}}{\Gamma_{\text{tot}}} N_{\alpha}^2 e^{E'/kT} = \Lambda_{3\alpha} N_{\alpha}^2 \quad (2.19)$$

Per definizione il tasso della reazione netta  $\alpha + \alpha + \alpha \rightarrow ^{12}\text{C}$  è pari a  $r_{3\alpha} = \lambda_{3\alpha} N_{\alpha}$  [5], nel quale è già incluso un fattore 3 dovuto alla combustione di 3 nuclei di elio. Nella 2.19 si è definito  $E' = Q_{2\alpha} + Q_{\text{Be},\alpha}$ .

Sono inoltre note le seguenti sezioni d'urto [1] di produzione in  $\text{cm}^3 \text{ s}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ , nelle quali si indica con il pedice il nucleo prodotto:

$$\begin{aligned} N_{\text{A}}\langle\sigma v\rangle_{\text{O}} &= \frac{6.66 \times 10^7}{T_9^2} \left(1 + 2.54T_9 + 1.04T_9^2 - 0.226T_9^3\right) \exp\left(-\frac{32.123}{T_9^{1/3}} - \left(\frac{T_9}{4.6}\right)^2\right) + \\ &+ \frac{1.39 \times 10^3}{T_9^{3/2}} \exp\left(-\frac{28.93}{T_9}\right) + 19.2T_9^2 \exp\left(-\frac{26.9}{T_9}\right) + \\ &+ \frac{6.56 \times 10^7}{T_9^2} \left(1 + 9.23T_9 - 13.7T_9^2 + 7.4T_9^3\right) \exp\left(-\frac{32.123}{T_9^{1/3}} - \left(\frac{T_9}{1.3}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} N_{\text{A}}\langle\sigma v\rangle_{\text{Ne}} &= \frac{2.68 \times 10^{10}}{T_9^{2/3}} \exp\left(-\frac{39.760}{T_9^{1/3}} - \left(\frac{T_9}{1.6}\right)^2\right) + \frac{51.1}{T_9^{3/2}} \exp\left(-\frac{10.32}{T_9}\right) + \\ &+ \frac{616.1}{T_9^{3/2}} \exp\left(-\frac{12.2}{T_9}\right) + 0.41 T_9^{2.966} \exp\left(-\frac{11.9}{T_9}\right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

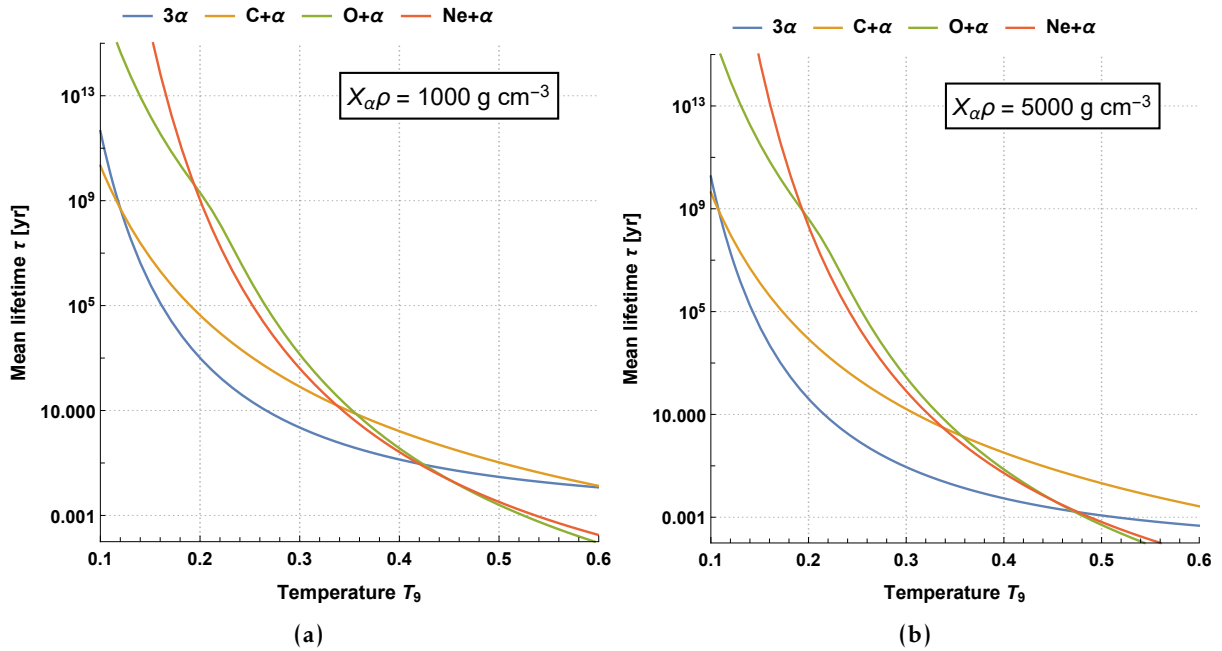
$$N_{\text{A}}\langle\sigma v\rangle_{\text{Mg}} = \left(\frac{8.72}{T_9^{0.532}} \exp\left(-\frac{8.995}{T_9}\right)\right) \times \left(1 - 7.787 \exp\left(-\frac{19.821}{T_9} - 0.114T_9\right)\right) \quad (2.22)$$

Considerando la reazione tre alfa al netto e le reazioni 2.16, 2.17 e 2.18, si può scrivere il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} N'_\alpha = -\lambda_{3\alpha}N_\alpha - \langle\sigma v\rangle_O N_C N_\alpha - \langle\sigma v\rangle_{Ne} N_O N_\alpha - \langle\sigma v\rangle_{Mg} N_{Ne} N_\alpha \\ N'_C = \frac{\lambda_{3\alpha}}{3}N_\alpha - \langle\sigma v\rangle_O N_C N_\alpha \\ N'_O = \langle\sigma v\rangle_O N_C N_\alpha - \langle\sigma v\rangle_{Ne} N_O N_\alpha \\ N'_{Ne} = \langle\sigma v\rangle_{Ne} N_O N_\alpha - \langle\sigma v\rangle_{Mg} N_{Ne} N_\alpha \\ N'_{Mg} = \langle\sigma v\rangle_{Mg} N_{Ne} N_\alpha \end{cases} \quad (2.23)$$

Esplicitando l'abbondanza frazionaria invece della densità numerica si ottiene

$$\begin{cases} \frac{dX_\alpha}{dt} = -\frac{\rho^2 N_A^2 \Lambda_{3\alpha}}{M_\alpha^2} X_\alpha^3 - \frac{\rho N_A \langle\sigma v\rangle_O}{M_C} X_C X_\alpha - \frac{\rho N_A \langle\sigma v\rangle_{Ne}}{M_O} X_O X_\alpha - \frac{\rho N_A \langle\sigma v\rangle_{Mg}}{M_{Ne}} X_{Ne} X_\alpha \\ \frac{dX_C}{dt} = \frac{\rho^2 N_A^2 M_C \Lambda_{3\alpha}}{3M_\alpha^3} X_\alpha^3 - \frac{\rho N_A \langle\sigma v\rangle_O}{M_\alpha} X_C X_\alpha \\ \frac{dX_O}{dt} = \frac{\rho N_A M_O \langle\sigma v\rangle_O}{M_C M_\alpha} X_C X_\alpha - \frac{\rho N_A \langle\sigma v\rangle_{Ne}}{M_\alpha} X_O X_\alpha \\ \frac{dX_{Ne}}{dt} = \frac{\rho N_A M_{Ne} \langle\sigma v\rangle_{Ne}}{M_O M_\alpha} X_O X_\alpha - \frac{\rho N_A \langle\sigma v\rangle_{Mg}}{M_\alpha} X_{Ne} X_\alpha \\ \frac{dX_{Mg}}{dt} = \frac{\rho N_A M_{Mg} \langle\sigma v\rangle_{Mg}}{M_{Ne} M_\alpha} X_{Mg} X_\alpha \end{cases} \quad (2.24)$$



**Figura 2.3:** Plot delle vite medie dei sistemi  $3\alpha$ ,  $^{12}\text{C}+\alpha$ ,  $^{16}\text{O}+\alpha$  e  $^{20}\text{Ne}+\alpha$  in funzione di  $T_9$ .

Anche in questo caso si assume che nessun prodotto possa essere fotodisintegrato, precisando che si aspetta essere verificato anche per il processo tre alfa, che al netto ha un  $Q_{\text{value}} = 7.275$

MeV. Si consideri allora la prima equazione del sistema: l'elio può essere soltanto consumato, rispettivamente nella produzione di carbonio, ossigeno, neon e magnesio. Le restanti equazioni hanno una simile interpretazione, tenendo presente la notazione utilizzata per le sezioni d'urto (il pedice indica il nucleo prodotto).

È importante notare che la produzione di carbonio dipende dal quadrato della densità, mentre tutti per tutti gli altri nuclei la dipendenza è lineare. Ci si aspetta dunque che, all'aumentare della densità si favorisca la produzione di carbonio a discapito di tutti gli altri nuclidi. Se questa è troppo veloce, allora non rimane abbastanza elio per produrre i nuclei successivi. Se la produzione di carbonio non è rapida, allora è possibile rilevare delle concentrazioni finali di ossigeno, neon o magnesio dipendentemente dalla temperatura.

Si consideri la prima equazione del sistema 2.24; si può riscrivere nella seguente forma:

$$\frac{dX_\alpha}{dt} = -\frac{1}{\tau_{3\alpha}}X_\alpha - \frac{1}{\tau_{^{12}\text{C}+\alpha}}X_{\text{C}} - \frac{1}{\tau_{^{16}\text{O}+\alpha}}X_{\text{O}} - \frac{1}{\tau_{^{20}\text{Ne}+\alpha}}X_{\text{Ne}} \quad (2.25)$$

In questo modo tutti i processi sono formalmente identici a decadimenti, per i quali  $\tau_S$  indica la vita media del sistema  $S$  a pedice. Le vite medie sono definite come segue:

$$\frac{1}{\tau_{3\alpha}} = \frac{N_A^2 \Lambda_{3\alpha}}{M_\alpha^2} (\rho X_\alpha)^2 \quad (2.26) \quad \frac{1}{\tau_{^{12}\text{C}+\alpha}} = \frac{N_A \langle \sigma v \rangle_{\text{O}}}{M_{\text{C}}} (\rho X_\alpha) \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{\tau_{^{16}\text{O}+\alpha}} = \frac{N_A \langle \sigma v \rangle_{\text{Ne}}}{M_{\text{O}}} (\rho X_\alpha) \quad (2.28) \quad \frac{1}{\tau_{^{20}\text{Ne}+\alpha}} = \frac{N_A \langle \sigma v \rangle_{\text{Mg}}}{M_{\text{Ne}}} (\rho X_\alpha) \quad (2.29)$$

In figura 2.3 sono rappresentate le vite medie in funzione della temperatura. Non sono costanti, poiché dipendono tutte dalla concentrazione di elio, ma si assume che al tempo  $t = 0$  il prodotto  $\rho X_\alpha$  abbia un preciso valore, riportato sui grafici. Innanzitutto si visualizza la diversa dipendenza dalla densità di  $\tau_{3\alpha}$ : passando a densità maggiori, la vita media diminuisce più che per gli altri sistemi. In un largo intervallo di temperature centrale, il processo più rapido è in entrambi i casi la reazione tre alfa; inoltre per temperature  $T_9 < 0.3$  la produzione di carbonio e ossigeno è molto più veloce rispetto a quella di neon e magnesio. Ci si aspetta dunque che in questa situazione sopravviva una frazione consistente di  $^{12}\text{C}$  e  $^{16}\text{O}$ . In opposizione, per temperature  $T_9 > 0.3$  la produzione di neon e magnesio diventa comparabile alle altre: ci si aspetta dunque che la concentrazione finale di  $^{20}\text{Ne}$  e  $^{24}\text{Mg}$  sia non trascurabile.

A partire dalle sezioni d'urto  $\langle \sigma v \rangle_{\text{O,Ne,Mg}}$  è possibile, sfruttando il teorema del bilancio dettagliato, calcolare analiticamente la costante di decadimento associata alla fotodisintegrazione ([5]) di, rispettivamente,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{20}\text{Ne}$  e  $^{24}\text{Mg}$ . Si consideri la reazione  $0 + 1 \rightarrow 2 + \gamma$ , con una sezione d'urto pari a  $\langle \sigma v \rangle_2$ . Sia inoltre  $Q_{0+1 \rightarrow 2+\gamma}$  il Q-value della reazione diretta, e  $\mu_{01}$  la massa ridotta del sistema di particelle 0 e 1. Allora la costante di decadimento associata alla fotodisintegrazione della particella 2 è:

$$\lambda_2 = \left( \frac{\mu_{01} kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \frac{(2J_0 + 1)(2J_1 + 1)}{(2J_2 + 1)(1 + \delta_{01})} \langle \sigma v \rangle_2 e^{-Q_{0+1 \rightarrow 2+\gamma}/kT} \quad (2.30)$$

ove  $J_{0,1,2}$  sono i momenti angolari totali delle particelle 0, 1 e 2. Si può verificare che per le tre reazioni sopracitate, alle temperature considerate la costante è totalmente trascurabile, e questo è ragionevole se si pensa che l'energia termica associata al range di temperature in discussione è compresa tra  $12.9 \text{ keV} \lesssim E_{\text{thermal}} \lesssim 258.5 \text{ keV}$ .



### 3 | Discussione dei risultati

Nel capitolo 2 si sono presentate due reti di reazioni, corrispondenti ai sistemi 2.15 e 2.24, rispettivamente denotati come "sistema parziale" e "sistema completo".

Riassumendo, si considera un elemento infinitesimo di plasma stellare composto interamente da nuclei di  $^4\text{He}$  e che rimanga, in ogni caso, a temperatura e densità costanti. Questo è in uno stato di buio, ossia non ci sono fotoni iniziali che possono fotodisintegrare i prodotti delle reazioni. Questo stato prevede anche che i fotoni prodotti abbiano probabilità trascurabile di invertire le reazioni 2.9, 2.16, 2.17 e 2.18. Partendo da una concentrazione totale di elio, prima di produrre carbonio è necessario che si stabilisca un equilibrio tra  $^4\text{He}$  e  $^8\text{Be}$ . Successivamente alla produzione del carbonio, nel caso sia presente una quantità sufficiente di elio, si possono produrre i nuclei alfa coniugati successivi.

Si sono integrati numericamente entrambi i sistemi (separatamente) con Mathematica; per ogni integrazione compiuta si è posto  $X_{\text{He}}(0) = 1$  e tutte le altre concentrazioni iniziali nulle.

#### 3.1 Il sistema parziale

Il sistema parziale è risultato essere particolarmente delicato e complicato da risolvere anche per via numerica. Le costanti moltiplicative le concentrazioni variano su diversi ordini di grandezza, e queste si mescolano anche nella medesima equazione: questo non permette di dividere in ulteriori due sistemi, separando le equazioni a evoluzione veloce da quelle a evoluzione lenta. Al fine di minimizzare i tempi di integrazione numerica è stato necessario imporre condizioni su temperatura e densità ai limiti dell'applicabilità delle formule per le sezioni d'urto: si è considerata una densità di  $10^5 \text{ g cm}^{-3}$  e una temperatura di  $T_9 = 1.5$ . Seppur la densità sia tipica per stelle di piccola massa che bruciano elio ([3], [4]), è stato necessario fissare una temperatura di un'ordine di grandezza più alta di quella aspettata per queste reazioni per rendere agevole l'integrazione. Come si può vedere dal grafico 3.1, dopo un certo inter-

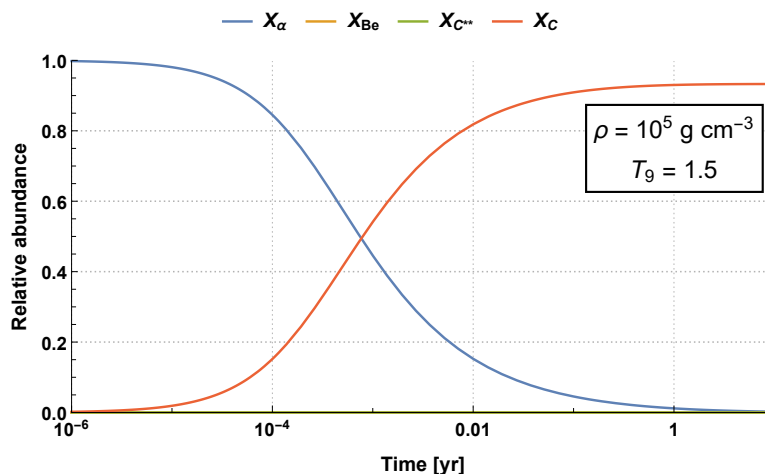


Figura 3.1: Soluzione del sistema 2.15 con  $t_{\text{max}} = 10$  anni.

vallo di tempo tutto l'elio viene convertito in carbonio, come è ragionevole aspettarsi. Essendo il berillio instabile e avendo un  $\tau_{\text{Be}} \approx 10^{-16} \text{ s}$  non può accumularsi in concentrazioni tali da non essere considerato un semplice catalizzatore. L'equilibrio in concentrazione raggiunto dal berillio infatti, dipendentemente anche dalla concentrazione di elio allo stesso tempo, si trova essere pari a  $X_{\text{Be}} = 10^{-7} - 10^{-8}$  fino a un minimo di  $10^{-11}$  alla fine dell'integrazione.

Il fatto che la concentrazione del berillio sia trascurabile rispetto alle concentrazioni di elio e carbonio, giustifica la definizione della costante  $\lambda_{3\alpha}$  e la possibilità di considerare direttamente il processo tre alfa al suo netto. Non bisogna interpretare la scrittura  $\alpha + \alpha + \alpha \rightarrow ^{12}\text{C}$  come urto *simultaneo* di 3 particelle alfa, piuttosto si deve interpretare come *reazione efficace*



del processo tre alfa, ma ricordando che quest'ultimo necessita di un mediatore.

In ultima analisi, si vuole commentare il tempo utilizzato nell'integrazione numerica (e in tutte quelle successive): non si è costruito un modello di stella, poiché non si tengono in considerazione gli aspetti idrodinamici e l'estensione del sistema. Il tempo in cui avvengono le reazioni non può dunque essere in alcun modo rappresentativo dei tempi scala in cui queste reazioni avvengono realmente all'interno delle stelle.

### 3.2 Il sistema completo

Anche nel caso del sistema completo le costanti moltiplicative variano su diversi ordini di grandezza; in questo caso però, ad eccezione dell'equazione per l'elio, non si mescolano in modo tale da rendere complicata l'integrazione numerica. Nella  $X'_\alpha$  del 2.24 comunque, sono tutti contributi negativi: nel caso ci siano molti ordini di grandezza di differenza, il più piccolo si può trascurare; nel sistema parziale invece ci sono sia contributi positivi che negativi, oltre che di magnitudine diversa: questo può comportare problemi a livello numerico.

Si sono scelte diverse coppie di densità-temperatura  $(\rho, T_9)$ . Per riferimento sono note  $(800 \text{ g cm}^{-3}, 0.2)$  e  $(5000 \text{ g cm}^{-3}, 0.15)$ , tipiche situazioni che si verificano nei nuclei di stelle che bruciano elio di  $20M_\odot$  e  $5M_\odot$ , rispettivamente [5].

Si è integrato numericamente il sistema per tutte le temperature  $0.1 \leq T_9 \leq 0.4$  a passi di 0.5; in aggiunta a queste si è risolto anche per  $T_9 = 0.12$ . Per ogni temperatura scelta, si è integrato il sistema per tutte le densità  $1000 \text{ g cm}^{-3} \leq \rho \leq 5000 \text{ g cm}^{-3}$  a passi di  $250 \text{ g cm}^{-3}$ .

Dai risultati delle integrazioni è risultato possibile dividere l'intervallo di temperatura considerato in 4 regioni a diversa dinamica del sistema; per ogni regione si sono riportati due esempi di soluzione sotto forma di grafico. Ogni esempio comprende due grafici: il primo illustra l'andamento temporale delle soluzioni del sistema 2.24; il secondo mostra invece l'andamento delle concentrazioni di carbonio, ossigeno, neon e magnesio in funzione dell'elio consumato, variabile definita come  $\Delta X_{\text{He}} = X_{\text{He}}(0) - X_{\text{He}}(t)$ . Le quattro regioni sono le seguenti:

- **Regione A:**  $T_9 \lesssim 0.15$
- **Regione B:**  $0.15 \lesssim T_9 \lesssim 0.25$
- **Regione C:**  $0.25 \lesssim T_9 \lesssim 0.35$
- **Regione D:**  $T_9 \gtrsim 0.35$

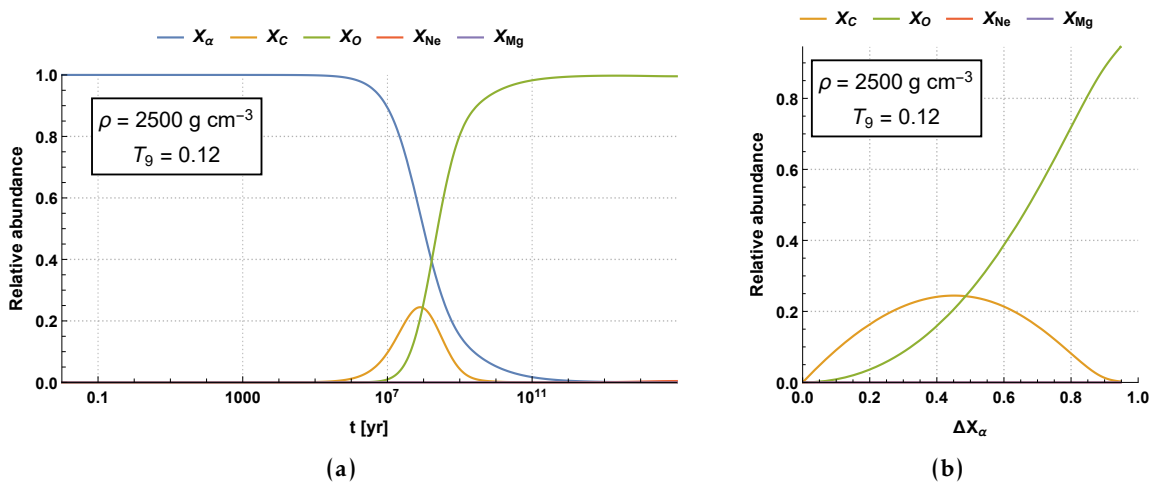


Figura 3.2: Esempio di soluzione del sistema 2.24 per la regione A, con  $\rho = 2500 \text{ g cm}^{-3}$ .

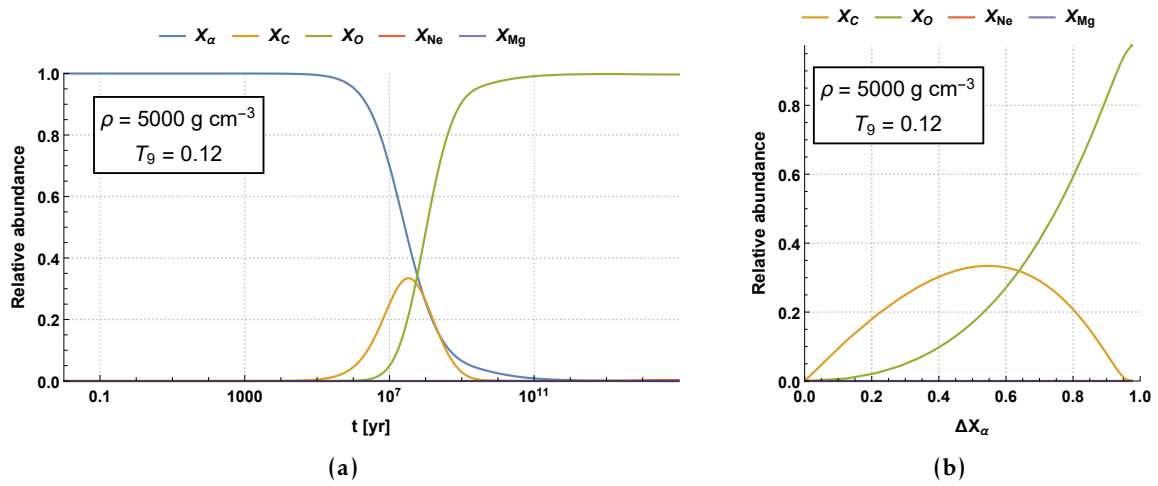


Figura 3.3: Esempio di soluzione del sistema 2.24 per la regione A, con  $\rho = 5000 \text{ g cm}^{-3}$ .

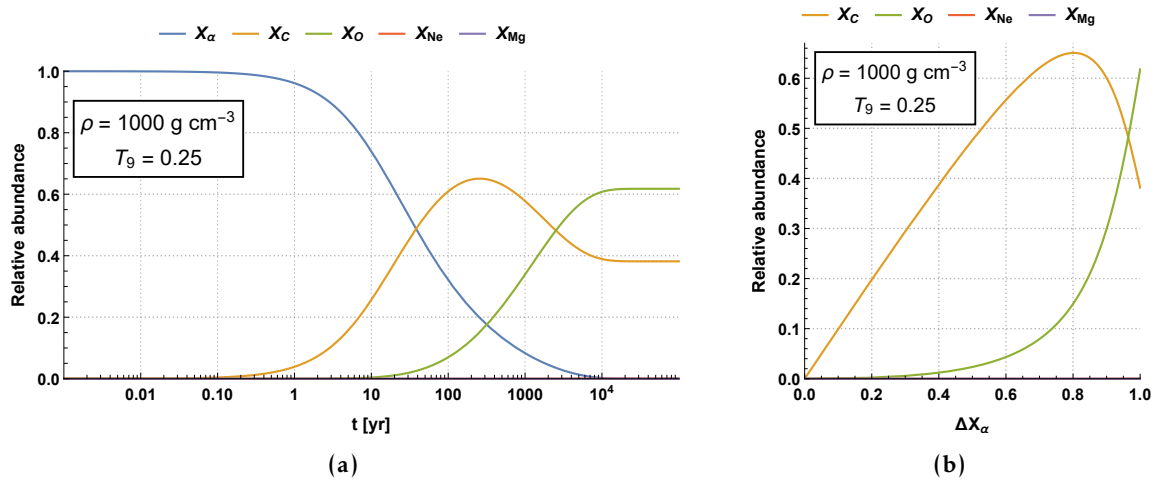


Figura 3.4: Esempio di soluzione del sistema 2.24 per la regione B, con  $\rho = 1000 \text{ g cm}^{-3}$ .

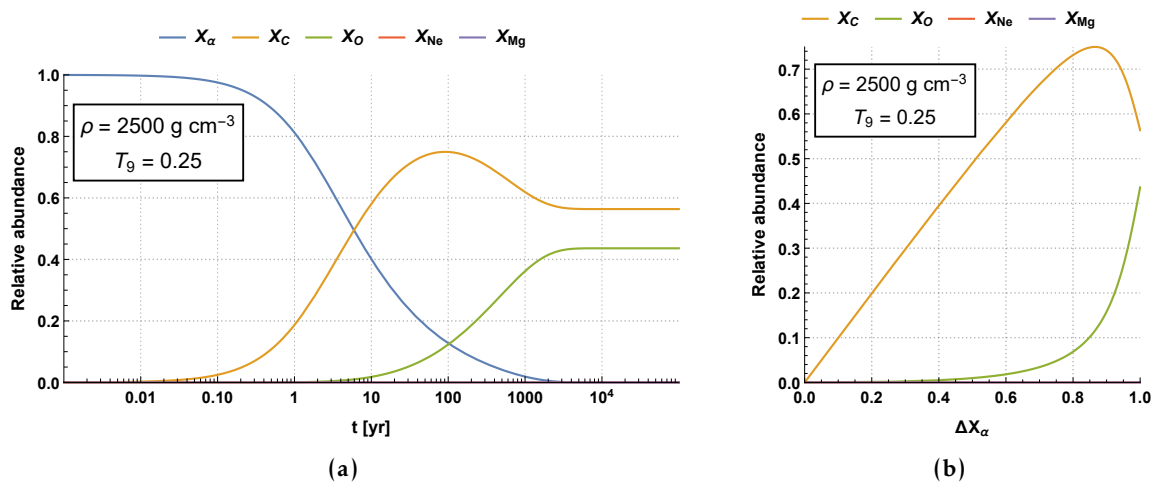


Figura 3.5: Esempio di soluzione del sistema 2.24 per la regione B, con  $\rho = 2500 \text{ g cm}^{-3}$ .

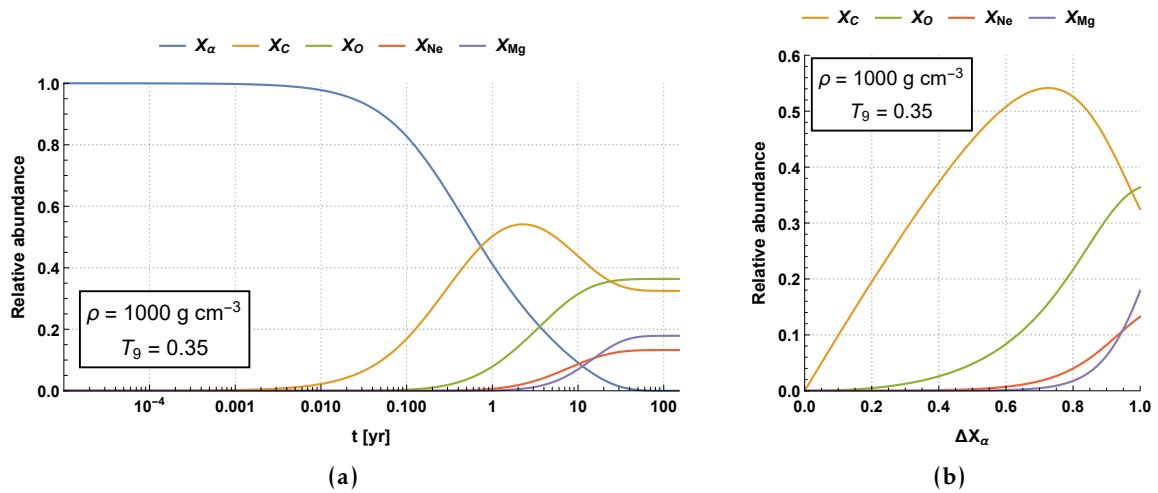


Figura 3.6: Esempio di soluzione del sistema 2.24 per la regione C, con  $\rho = 1000 \text{ g cm}^{-3}$ .

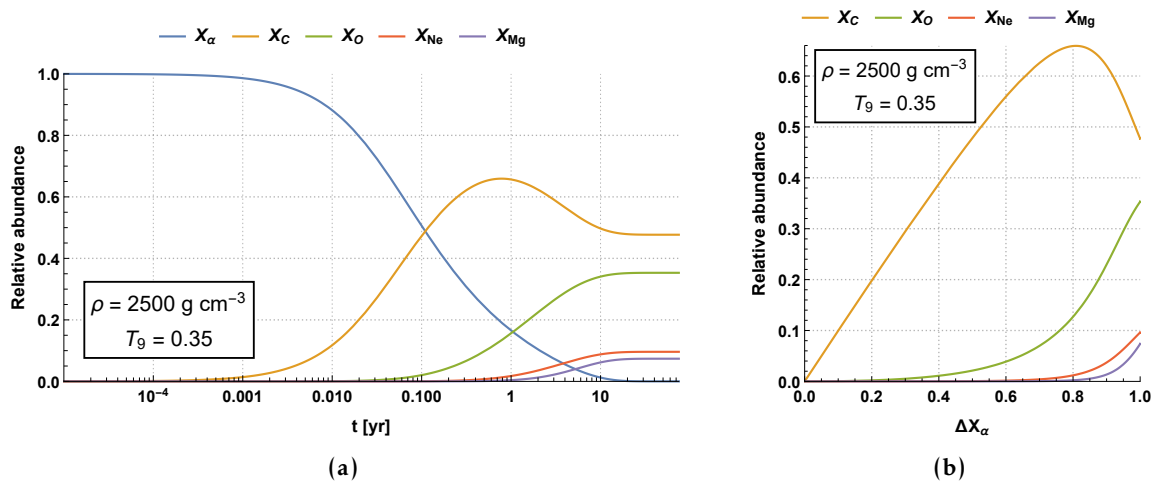


Figura 3.7: Esempio di soluzione del sistema 2.24 per la regione C, con  $\rho = 2500 \text{ g cm}^{-3}$ .

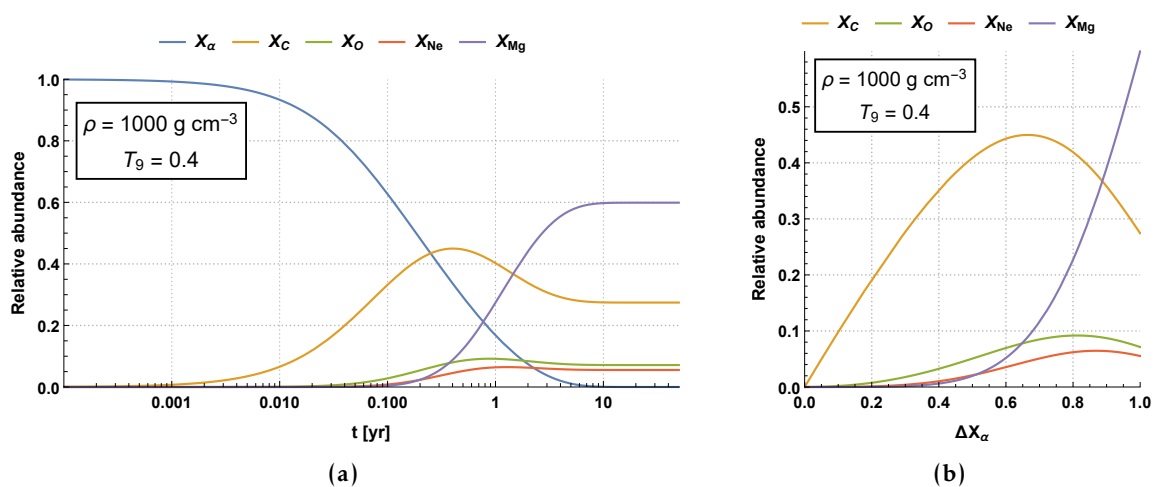


Figura 3.8: Esempio di soluzione del sistema 2.24 per la regione D, con  $\rho = 1000 \text{ g cm}^{-3}$ .

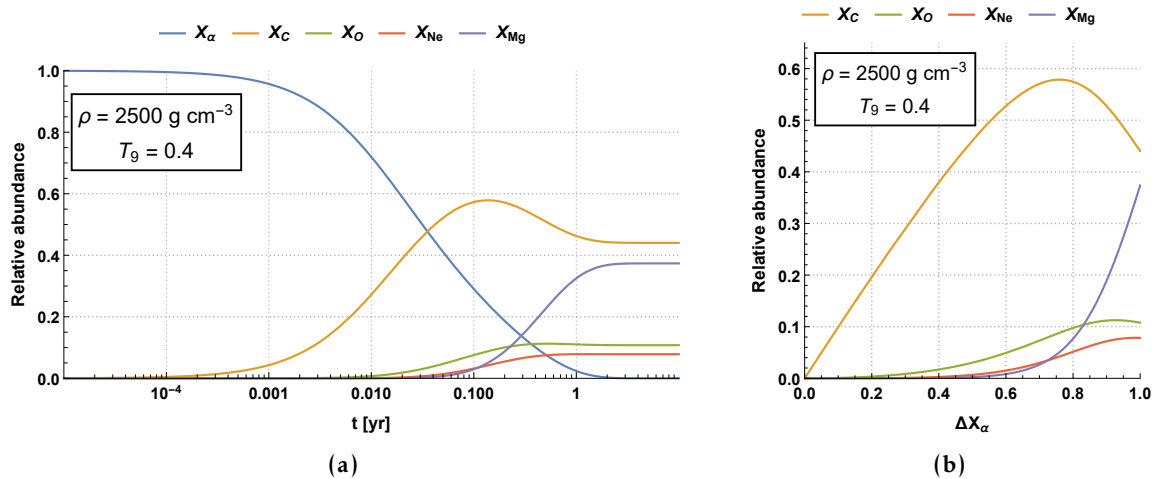


Figura 3.9: Esempio di soluzione del sistema 2.24 per la regione D, con  $\rho = 2500 \text{ g cm}^{-3}$ .

- Dai grafici 3.2 e 3.3 si nota subito la peculiarità della regione A: per queste temperature la produzione di ossigeno è più veloce di quella del carbonio. Inizialmente si produce una ristretta quantità di  $^{12}\text{C}$ , che si accumula fino a un massimo; da questo punto in poi la produzione di  $^{16}\text{O}$  consuma più velocemente l'elio rispetto a quella di  $^{12}\text{C}$ . In questo caso il carbonio ha un ruolo simile a quello del berillio nel sistema parziale, si può vedere come un catalizzatore. Questo rispecchia perfettamente i grafici 2.3, nei quali si può vedere che, a basse temperature, la vita media del sistema  $^{12}\text{C} + \alpha$  è dello stesso ordine o addirittura minore di quella del sistema  $3\alpha$ . L'aumentare della densità fa variare semplicemente il massimo assunto dall'accumulo di carbonio, ma alla fine tutto l'elio è convertito in ossigeno; questo fatto è spiegato dalla dipendenza da  $\rho^2$  della produzione di carbonio, che a densità più alte è la più favorita. La produzione di ossigeno consuma così velocemente l'elio da impedire la produzione dei nuclei alfa coniugati successivi, o almeno la produzione di concentrazioni non trascurabili.
- Nella regione B i grafici 2.3 suggeriscono che la produzione di  $^{12}\text{C}$  è senza pari la più rapida: questo implica che, quando l'elio si esaurisce e le reazioni terminano, rimanga una certa abbondanza di carbonio paragonabile a quella di ossigeno (grafici 3.4 e 3.5). La produzione di  $^{12}\text{C}$  non è comunque così rapida da consumare tutto l'elio prima che anche l'ossigeno possa accumularsi, anche se a densità maggiori e alla fine dell'integrazione risulta  $X_C > X_O$ . Anche in questa regione i nuclei di  $^{20}\text{Ne}$  e  $^{24}\text{Mg}$  non hanno a disposizione abbastanza elio da essere prodotti.
- Nella regione C i tassi di produzione di neon e magnesio diventano maggiori di quello dell'ossigeno e paragonabili a quello del carbonio. Dai grafici 3.6 e 3.7 si nota che alla fine dell'integrazione si riescono a produrre notevoli quantità di  $^{20}\text{Ne}$  e  $^{24}\text{Mg}$ , non però da superare quelle di  $^{12}\text{C}$  e  $^{16}\text{O}$ . Inoltre per densità basse ( $\rho = 1000 \text{ g cm}^{-3}$ ) la concentrazione di magnesio è maggiore dell'abbondanza di neon, mentre non avviene nel caso  $\rho = 2500 \text{ g cm}^{-3}$ : questo perché nell'ultimo caso la produzione di carbonio è così rapida da non lasciare elio a sufficienza perché venga prodotto più magnesio che neon.
- Infine, nella regione D la temperatura è così elevata da risultare in un aumento considerevole della quantità di magnesio prodotto, maggiormente a discapito dell'ossigeno. La produzione di carbonio è ancora la più rapida, ma ora i tassi di reazione di neon e magnesio sono considerevolmente maggiori di quello dell'ossigeno. Vengono dunque prodotti nuclei di  $^{12}\text{C}$  che, appena convertiti in  $^{16}\text{O}$ , sono subito trasformati in  $^{20}\text{Ne}$  e successivamente  $^{24}\text{Mg}$ .

Si vuole porre l'attenzione sulle concentrazioni finali dei nuclei per tutte le temperature e le densità considerate, in particolare sulle abbondanze finali di carbonio e ossigeno. Per avere un punto di riferimento comune tra tutte le integrazioni effettuate, si definisce *abbondanza finale* del nucleo di carbonio, ossigeno, neon o magnesio come  $F_{C,O,Ne,Mg} = X_{C,O,Ne,Mg}(t^*)$ ;  $t^*$  è il tempo tale per cui  $X_{He}(t^*) = 0.0001$ . Si verifica che la staticità viene sempre raggiunta prima di  $t^*$ , dunque coincide  $F_{C,O,Ne,Mg}$  con i valori delle abbondanze al termine di tutte le reazioni. Nel seguito si denota  $F_{C,O,Ne,Mg}$  come *abbondanza asintotica*.

L'abbondanza di magnesio e neon in generale diminuiscono<sup>1</sup> all'aumentare della densità e al variare della temperatura variano su diversi ordini di grandezza, come già descritto precedentemente. Questo rende complicata una rappresentazione grafica complessiva, per cui si riportano due tabelle dei valori di  $F_{Ne}$  e  $F_{Mg}$  calcolati, per tre valori di densità:

		Concentrazione finale del Neon $F_{Ne}$							
$\rho$	$T_9$	0.10	0.12	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
1000 g cm <sup>-3</sup>		0.02	0.007	2.7E-05	1.2E-05	5.7E-04	0.03	0.13	0.06
2500 g cm <sup>-3</sup>		0.01	0.004	4.0E-06	4.6E-06	2.2E-04	0.01	0.10	0.08
5000 g cm <sup>-3</sup>		0.007	0.003	1.8E-06	2.3E-06	1.1E-04	0.007	0.07	0.08

**Tabella 3.1:** Tabella con le concentrazioni finali per i nuclei di neon. A temperatura fissata, soltanto l'ultima colonna riferita a  $T_9 = 0.4$  registra un'aumento all'aumentare della densità.

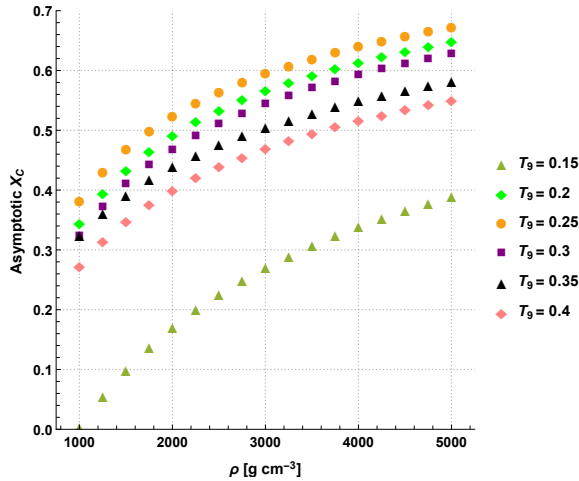
		Concentrazione finale del Magnesio $F_{Mg}$							
$\rho$	$T_9$	0.10	0.12	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
1000 g cm <sup>-3</sup>		4.7E-16	1.4E-12	2.8E-13	3.2E-10	2.8E-06	4.5E-03	0.18	0.60
2500 g cm <sup>-3</sup>		1.8E-16	5.2E-13	8.9E-15	6.6E-11	5.9E-07	1.0E-03	0.07	0.37
5000 g cm <sup>-3</sup>		8.8E-17	2.4E-13	2.4E-15	2.2E-11	2.0E-07	3.5E-04	0.03	0.24

**Tabella 3.2:** Tabella con le concentrazioni finali per i nuclei di magnesio. A temperatura fissata, l'abbondanza frazionaria diminuisce all'aumentare della densità.

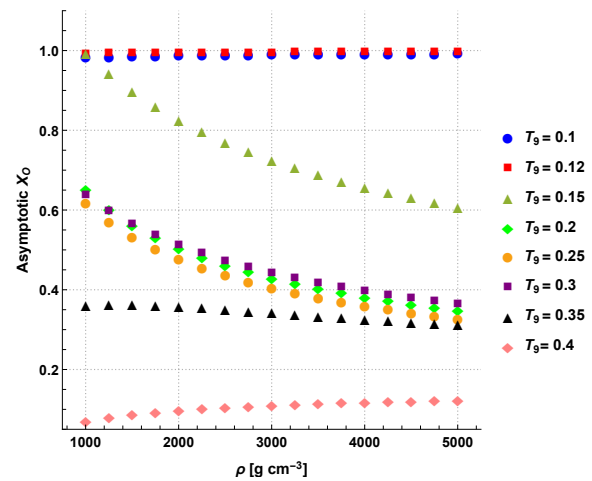
Nel caso di <sup>12</sup>C e <sup>16</sup>O si riesce invece a rappresentare collettivamente, per quasi tutti i set di parametri, l'andamento delle concentrazioni finali. Si consideri il grafico 3.11: si ritrova visivamente la divisione nelle regioni descritte precedentemente. Per piccole temperature domina la produzione di ossigeno, che rimane pressoché costante per tutte le densità. Per la curva a  $T_9 = 0.15$  avviene il passaggio tra la regione A e B; le curve per  $T_9 = 0.2, 0.25$  e  $0.3$  sono simili e nello stesso intervallo di valori: nelle regioni B e C la dinamica dell'ossigeno rimane praticamente la stessa. Per  $T_9 = 0.35$  si ha la transizione tra regione C e D, in cui la produzione comincia ad essere soppressa; l'ultima curva evidenzia che ad alte temperature l'ossigeno rappresenta una minima percentuale dell'abbondanza totale.

Nel grafico 3.10 risulta invece poco evidente la divisione in regioni. Esaminando però attentamente la figura, si possono comunque riconoscere le diverse dinamiche della produzione di <sup>12</sup>C. Innanzitutto non sono rappresentate le curve per  $T_9 = 0.1$  e  $T_9 = 0.12$ , in cui l'abbondanza raggiunta è così piccola da non essere paragonabile a quelle rappresentate. Anche in questo caso  $T_9 = 0.15$  rappresenta la transizione tra regione A e B. Per tutte le temperature, comunque, la produzione di carbonio è favorita a densità alte: per la regione B però, aumenta anche

<sup>1</sup>L'unica eccezione è il neon nel caso di  $T_9 = 0.4$ .

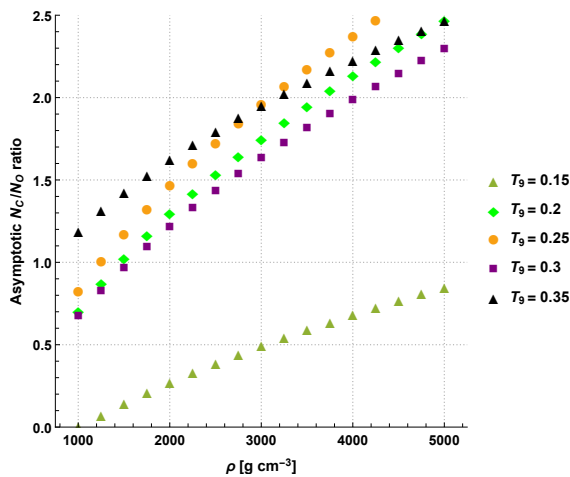


**Figura 3.10:** Plot delle concentrazioni finali del carbonio in funzione della densità.



**Figura 3.11:** Plot delle concentrazioni finali dell'ossigeno in funzione della densità.

all'aumentare della temperatura. Da  $T_9 = 0.3$  invece, l'andamento si inverte, e la produzione di carbonio è sfavorita all'aumentare di  $T$  a vantaggio dei nuclei alfa coniugati più pesanti.



**Figura 3.12:** Andamento del rapporto  $F_C/F_O$ .

Nella regione D si registrava invece una importante concentrazione di magnesio rispetto a ossigeno e neon: aumentando ancora la temperatura<sup>2</sup>, come anche suggerito dai grafici 2.3, ci si aspetta che venga prodotto così tanto magnesio da risultare in una completa conversione dell'elio in  $^{24}\text{Mg}$ . Questo, per simili argomenti fatti per la regione A, porta ad escludere la regione D come possibili caratteristiche di una stella che brucia elio nel nucleo.

In ultima analisi, si vuole commentare l'andamento del rapporto  $F_C/F_O$ , rappresentato nel grafico 3.12. Innanzitutto, per motivi che saranno chiari nell'immediato seguito, si converte il rapporto di abbondanze frazionarie in rapporto di densità numeriche. Questo è possibile utilizzando la 2.5, da cui

$$\frac{N_C(t)}{N_O(t)} = \frac{M_{16} X_C(t)}{M_{12} X_O(t)} \quad (3.1)$$

Il rapporto alle basse temperature ( $T_9 = 0.1$  e  $T_9 = 0.12$ ) non è rappresentato nel grafico, poi-

<sup>2</sup>Ma nello stesso intervallo di densità.

Idrogeno, elio e ossigeno sono le specie atomiche più abbondanti nell'Universo [8]. Pur avendo costruito un modello semplificato delle reazioni che avvengono all'interno di una stella, esso permette comunque di estrarre qualche informazione o almeno di fissare punti di partenza per investigazioni più approfondite e raffinate. Nella regione A tutto l'elio viene convertito in ossigeno, mentre gli altri nuclidi sono prodotti in quantità assolutamente trascurabili. Per quanto detto, questo è assurdo, visto che anche il carbonio è in buona parte presente nell'Universo [8]. Si può dunque dubitare dell'esistenza di stelle che bruciano elio con le caratteristiche della regione A, ossia con  $T_9 \lesssim 0.15$  e densità comprese tra  $1000 \text{ g cm}^{-3} \leq \rho \leq 5000 \text{ g cm}^{-3}$ .

ché è così piccolo da non rendere possibile una chiara rappresentazione collettiva, come per il grafico 3.10. Manca inoltre la curva  $T_9 = 0.4$ ; in questo caso il rapporto in densità numerica assume valori compresi tra 5 e 6, dovuto al fatto che la produzione di ossigeno è fortemente soppressa. Si è scelto di non riportare quest'ultimo andamento poiché poco indicativo per la discussione. Come riferimento, sia noto che il rapporto nell'Universo  $N_{12C}/N_{16O} \sim 0.4$  [5]. Ancora una volta: il modello non può chiaramente predire accuratamente quali set di parametri sono più probabili per le stelle che bruciano elio, ma può fornire un utile punto di partenza per ulteriori investigazioni. Si può mettere in discussione l'esistenza dei casi a più bassa temperatura, non presenti nel grafico, in cui il rapporto è dell'ordine di  $10^{-10} - 10^{-8}$ . Infine, si può dire lo stesso dei casi all'estremo opposto: volendo prendere come limite superiore 1.2, ossia tre volte il valore atteso del rapporto, si può dubitare dell'esistenza di stelle con alta temperatura e densità che produrrebbero molto più carbonio rispetto all'ossigeno.

# Conclusioni

Il proposito di questa tesi era quello di costruire e discutere un modello semplificato delle principali reazioni che coinvolgono i nuclei di  ${}^4\text{He}$  nel plasma stellare, inquadrando dapprima le fasi vitali in cui queste reazioni avvengono. Dopo aver introdotto il formalismo necessario, si è descritto il problema: si è divisa la rete di reazioni in due sistemi di equazioni differenziali. Il primo tratta in dettaglio soltanto il processo tre alfa in cui è importante l'equilibrio tra nuclei di  ${}^4\text{He}$  e  ${}^8\text{Be}$  per la produzione di  ${}^{12}\text{C}$ ; il secondo considera quest'ultima reazione al netto e aggiunge la produzione dei successivi nuclei alfa coniugati,  ${}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{20}\text{Ne}$  e  ${}^{24}\text{Mg}$ . Si sono integrati entrambi i sistemi per via numerica, concentrandosi maggiormente sul secondo che fornisce una visione completa e una risoluzione più agevole; si sono presentati esempi e risultati al variare dei parametri caratteristici del sistema, pressione e temperatura dell'elemento infinitesimo di plasma.

I risultati ottenuti evidenziano la forte dipendenza da temperatura e densità della composizione finale; quest'ultima, confrontata con i dati osservati, permette di discriminare tra configurazioni realmente possibili di  $(\rho, T_9)$  e situazioni limite che necessitano uno studio più specifico.



## Bibliografia

- [1] C. Angulo et al. A compilation of charged-particle induced thermonuclear reaction rates. *Nuclear Physics A*, 656:153–160, 1999.
- [2] I. Bombaci. The maximum mass of a neutron star. *Astronomy and Astrophysics*, 305:871, 1995.
- [3] E.M. Burbidge, G.R. Burbidge, W.A. Fowler, and F. Hoyle. Synthesis of the elements in stars. *Reviews of Modern Physics*, 29(4):556, October 1957.
- [4] I. Iben. *Stellar Evolution Physics: Advanced Evolution of Single Stars*, volume 2. Cambridge University Press, 1st edition, 2013.
- [5] C. Iliadis. *Nuclear Physics of Stars*. Wiley-VCH, 1st edition, 2007.
- [6] J. Rich. *Fundamentals of Cosmology*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2010.
- [7] E.E. Salpeter. Nuclear reactions in stars without hydrogen. *Astrophysical Journal*, 115:326–327, 1952.
- [8] H.E. Suess and H.C. Urey. Abundances of the elements. *Reviews of Modern Physics*, 28(1):56, January 1956.