

Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Scienze Statistiche  
Corso di Laurea Triennale in

Statistica per l'Economia e l'Impresa



RELAZIONE FINALE

**Allocazione di portafoglio tramite risk budgeting ed approcci  
tradizionali: un'analisi su azioni, merci e criptovalute**

Relatore Prof. Massimiliano Caporin  
Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureando: Francesco Dal Cero  
Matricola N 1225551

Anno Accademico 2021/2022

## **Indice**

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1. Descrizione del dataset</b>	<b>7</b>
1.1 La diversificazione	7
1.2 Descrizione dei dati	7
<b>2. Analisi del dataset</b>	<b>9</b>
<b>3. Metodi di analisi tradizionali</b>	<b>13</b>
3.1 Minima varianza globale	16
3.2 Massimo trade-off	17
3.3 Portafoglio equamente pesato	19
<b>4. Metodo del Risk Budgeting</b>	<b>20</b>
4.1 Il bilancio del rischio	20
4.2 Risk Parity	26
<b>5. Applicazione dei risultati</b>	<b>29</b>
5.1 Analisi della composizione dei portafogli	29
5.2 Analisi delle performance dei portafogli	37
<b>6. Conclusioni</b>	<b>47</b>



## INTRODUZIONE

All'origine dello studio presentato in questa tesi vi sono l'analisi e il confronto tra alcuni dei metodi utilizzati per la costruzione di un portafoglio finanziario e il raggiungimento della sua allocazione ottimale.

L'allocazione di portafoglio è una strategia che ha lo scopo di equilibrare rischi e rendimenti, bilanciando la quota di ogni strumento finanziario compreso nel portafoglio di investimento, secondo la tolleranza al rischio dell'investitore, gli obiettivi e l'orizzonte temporale considerato.

Il fine ultimo di un investitore è massimizzare la propria utilità attesa, allocando oggi la sua ricchezza su un insieme di titoli disponibili e massimizzando l'utilità di domani. La principale teoria riguardante la creazione di portafogli è quella di Harry Markowitz introdotta e descritta nell'articolo *Portfolio Selection* del 1952. La teoria si basa sul concetto di media-varianza e si fonda su alcuni assunti fondamentali: gli investitori sono avversi al rischio, l'orizzonte temporale è uniperiodale, il mercato è perfettamente concorrenziale e di conseguenza tutti gli agenti agiscono nelle stesse condizioni, i costi di transazione e le imposte sono nulli ed infine il valore atteso e la deviazione standard sono gli unici parametri che guidano le scelte dei soggetti. Tramite una funzione di utilità che rappresenti le preferenze dell'investitore si dimostra che il valore massimo per la funzione è proporzionale al rendimento atteso del portafoglio e al suo rischio (in questo caso espresso dalla varianza del portafoglio) moltiplicato per un coefficiente di avversione al rischio proprio dell'investitore. L'avversione al rischio è la proprietà che caratterizza un agente economico che preferisce sempre un ammontare certo rispetto a una quantità aleatoria. Il principio base che governa quindi la teoria è che occorre individuare una combinazione di strumenti finanziari tali da minimizzare il rischio e massimizzare il rendimento del portafoglio così generato.

Rendimenti e rischi possono essere ricavati in diversi modi: grazie a stimatori campionari (eventualmente aggiornati periodicamente), avvalendosi di stime basate sullo smorzamento esponenziale od oppure usando modelli econometrici, matematici, statistici, economico-finanziari ed altri.

Risolvendo il problema di ottimo e variando il coefficiente di avversione al rischio si determina l'insieme dei portafogli efficienti ovvero portafogli con particolari caratteristiche che costituiscono un sottoinsieme dei portafogli ammissibili. Un portafoglio si dice efficiente se non esistono altri portafogli che garantiscono lo stesso rendimento con rischio inferiore e rendimento maggiore con lo stesso rischio.

Per quanto possa essere semplice la teoria presenta dei problemi. Innanzitutto, i portafogli generati possono essere difficilmente realizzabili nella realtà a causa della presenza di posizioni molto lunghe o molto corte. Possedere una posizione corta ovvero effettuare lo *short selling*<sup>1</sup> all'interno del portafoglio permette di vendere uno strumento che non si possiede e riacquistarlo. Posizioni lunghe e corte molto ampie comportano costi che l'investitore deve tenere in considerazione e possono influenzare le sue scelte. Per questo motivo, per stabilizzare le posizioni è uso comune inserire, all'interno del portafoglio, dei vincoli sui pesi degli strumenti finanziari di cui verrà discusso in seguito. Inoltre, la teoria si basa sulla distribuzione normale dei rendimenti mentre studi empirici

---

<sup>1</sup> Vendita allo scoperto.

dimostrano che la vera distribuzione è asimmetrica, presenta code spesse e si scosta quindi dalla normalità. Utilizzando dati mensili invece che giornalieri le deviazioni rispetto alla normalità tendono a ridursi perché è come se venissero sommate le singole distribuzioni facendo entrare in gioco il teorema del limite centrale che spinge verso una distribuzione Normale. Per questo motivo al fine di applicare la teoria di Markowitz la distribuzione può essere approssimata ad una Normale in condizioni di stabilità del mercato.

Fatte queste doverose premesse, lo scopo di questo lavoro è analizzare e confrontare in che modo vengono allocati i titoli in un portafoglio efficiente di investimento confrontando approcci più tradizionali e il metodo del Risk Budgeting<sup>2</sup>. Successivamente l'interesse si sposta sull'osservare come questi portafogli si comportino e cambino nel corso del tempo. I portafogli ottimi generati sono stati poi applicati alla realtà in modo da studiarne ed analizzarne le performance utilizzando dati diversi da quelli utilizzati per la creazione dei portafogli stessi.

L'analisi dei portafogli si concentra principalmente sulle loro composizioni e come esse varino nel tempo. Per questo motivo sono stati analizzati graficamente i pesi delle quantità presenti al loro interno e il loro andamento attraverso un indicatore chiamato turnover. Per la ricerca delle performance dei portafogli lo studio si basa sui rendimenti da loro generati e sul loro sviluppo. Tra i vari indicatori adatti a descrivere i rendimenti sono stati scelti il rendimento cumulato, l'indice di Sharpe ed altre statistiche descrittive per completare l'analisi. Infine, sono state fatte alcune considerazioni sui risultati ottenuti.

---

<sup>2</sup> Metodo del bilancio del rischio.



# 1 DESCRIZIONE DEL DATASET

## 1.1 La diversificazione

Ci si potrebbe chiedere perché consideriamo un insieme di titoli invece di investire tutto in un solo strumento, il più redditizio. La risposta è che investire in più titoli permette di diminuire i rischi.

Alla base della riduzione del rischio, obiettivo dell'investitore, vi è la strategia della diversificazione. Questa strategia consiste nell'aver un portafoglio variato di operazioni in diversi settori, paesi e mercati allo scopo di diminuire il rischio dei singoli titoli. Una notizia economica può avere conseguenze considerevoli sul prezzo di uno strumento finanziario, anche non previste, e generare una perdita inaspettata; ma con investimenti diversificati è possibile ammortizzare la singola perdita senza compromettere la solidità dell'intero portafoglio. Chiaramente questo non è l'unico accorgimento necessario per proteggere il capitale ma grazie alla diversificazione è possibile ridurre e quasi annullare il rischio legato ad una specifica impresa, detto rischio specifico. Il rischio sistematico invece è legato all'andamento del mercato nel suo complesso e non può essere eliminato. La diversificazione offre quindi maggiori potenzialità di crescita perché il portafoglio non dipende dall'andamento di singole società, fondi o settori. Pertanto, se uno degli investimenti attraversa un periodo difficile, gli altri possono compensare con performance migliori.

La correlazione è la tendenza di un titolo a muoversi in modo simile ad un altro; se due titoli non sono correlati non si può dedurre dall'andamento di un titolo come si comporterà l'altro mentre se sono negativamente correlati quando un titolo salirà l'altro farà l'opposto. Quindi se a parità di rendimento le correlazioni tra due strumenti finanziari sono negative, investire in entrambi garantisce una riduzione dei rischi. In realtà, in finanza le correlazioni negative sono molto rare e inevitabilmente instabili nel tempo; perciò, per diversificare è possibile investire in un numero elevato di titoli o più verosimilmente in un indice di mercato. Un indice rappresenta una categoria di investimento ed è rappresentativo di uno specifico mercato finanziario.

## 2.1 Descrizione dei dati

I dati utilizzati per svolgere le analisi sono stati scaricati tramite il software Refinitiv Eikon, grazie al quale è stato possibile disporre di tutte le quantità necessarie alla redazione di questa tesi di laurea.

Per svolgere un'indagine accurata in grado di produrre dati sui cui poi effettuare delle analisi sono sufficienti dieci strumenti finanziari eterogenei e appartenenti a classi di investimento diverse. Per questo motivo è stato scelto un paniere di azioni, merci e criptovalute.

Il primo strumento è lo Standard & Poor's 500<sup>3</sup>: un indice del mercato azionario americano all'interno del quale rientrano le 500 aziende statunitensi a più alta capitalizzazione flottante. Il peso attribuito a ciascuna azienda è direttamente proporzionale al valore di mercato. Si tratta dell'indice

---

<sup>3</sup> Nel seguito abbreviato in "S&P500".

più significativo dell'intero mercato americano visto che le aziende al suo interno ne rappresentano circa l'80%.

Ad affiancare lo S&P500 è stato aggiunto l'indice azionario NASDAQ-100 che rappresenta le 100 imprese non-finanziarie quotate nel mercato borsistico Nasdaq. Anche in questo caso il peso delle diverse società che lo compongono è basato sulla loro capitalizzazione di mercato, con alcune regole per tenere conto delle influenze delle componenti maggiori. Si differenzia dall'indice S&P500 perché non comprende società finanziarie ed include alcune società estere.

Un ulteriore indice azionario presente all'interno del paniere è il FTSE 100, ovvero l'indice comprendente le 100 società più capitalizzate quotate alla Borsa di Londra. Il FTSE 100 è il più usato indicatore del mercato londinese visto che le società che lo compongono rappresentano circa l'80% della sua capitalizzazione. Per questo motivo può essere usato anche riprodurre il mercato azionario europeo.

Per concludere la parte azionaria del paniere sono stati aggiunti due indici provenienti da paesi asiatici: Hang Seng Index<sup>4</sup> e Nikkei 225<sup>5</sup>. Il primo è un indice della borsa di Hong Kong utilizzato per registrare e monitorare i cambiamenti giornalieri delle principali 50 società che rappresentano circa il 58% della capitalizzazione della borsa del paese. Il secondo è un segmento della borsa di Tokyo (Tokyo Stock Exchange – TSE), l'indice contiene i 225 titoli delle maggiori 225 compagnie quotate al TSE.

Le merci aggiunte al paniere sono Il West Texas Intermediate (WTI): un tipo di petrolio prodotto in Texas e utilizzato come benchmark<sup>6</sup> nel prezzo del petrolio, il lingotto d'oro che può essere usato come aggregato per i metalli preziosi ed infine l'olio di semi di soia, un prodotto appartenente al settore agricolo.

Per rendere il portafoglio maggiormente diversificato sono state aggiunte due criptovalute: Bitcoin e Dogecoin. La prima è una delle criptovalute da più tempo in circolazione e può essere considerata rappresentativa del settore, mentre la seconda rientra è una delle più grandi per capitalizzazione. Si tratta di strumenti molto volatili e instabili che possono garantire guadagni elevati ma anche considerevoli perdite, per questa ragione la loro quantità nel portafoglio deve essere limitata.

I dati relativi agli indici azionari sono stati raccolti nella tipologia *Total Return Index* ovvero un numero indice che tiene conto anche dei dividendi ed è equiparabile ad un prezzo mentre i dati relativi alle merci sono stati raccolti nella tipologia di prezzo espresso in dollari. I valori delle criptovalute rappresentano il cambio valuta-dollaro in modo da essere coerenti con gli strumenti finanziari precedenti e rendere il dataset omogeneo.

Dal software Refinitiv Eikon sono state scaricate le serie storiche dei dati nel periodo che va dal 10/10/14 al 10/10/22 per un totale di 92 osservazioni mensili. La scelta del numero di osservazioni è legata alla scarsa disponibilità di dati relativi alle criptovalute essendo strumenti finanziari recenti e immessi sul mercato da pochi anni e quindi presenti in quantità minore. Era possibile anche

---

<sup>4</sup> Nel seguito abbreviato in "HSI".

<sup>5</sup> Nel seguito abbreviato in "N225".

<sup>6</sup> Termine di paragone.



effettuare le analisi su dati a frequenza giornaliera ma i risultati sarebbero variati in maniera poco evidente. All'interno del dataset così creato non erano presenti dati mancanti o valori anomali.

## 2 ANALISI DEL DATASET

Inizialmente è fondamentale costruire le quantità che saranno necessarie per generare i dati su cui verteranno le successive analisi.

Come precedentemente affermato, le serie storiche presenti sono in forma di prezzi o in formati equiparabili. Ai prezzi è stata applicata la trasformazione logaritmo ed in seguito sono stati ricavati i log-rendimenti  $R_t$ , sottraendo al log-prezzo di ogni istante  $lp_t$  il log-prezzo dell'istante precedente  $lp_{t-1}$ .

$$R_t = lp_t - lp_{t-1}$$

I log-rendimenti sono stati poi moltiplicati per cento ottenendo i log-rendimenti<sup>7</sup> percentuali, in questo caso mensili.

La seconda quantità indispensabile per la costruzione di un portafoglio efficiente è la matrice di varianza e covarianza  $\Sigma$  dei rendimenti.

In seguito, è stata fatta una distinzione tra portafoglio azionario e portafoglio completo per poter osservare l'effetto dell'aggiunta di strumenti finanziari non azionari ad un paniere di strumenti azionari. I rendimenti e le varianze sono stati calcolati per il caso del portafoglio composto solo dai 5 indici azionari e per il caso in cui vengono aggiunte merci e criptovalute, considerando quindi il portafoglio completo.

Di seguito sono state effettuate alcune analisi grafiche su rendimenti e matrici di varianze e covarianze, prendendo in considerazione l'intero periodo campionario di 92 osservazioni mensili.

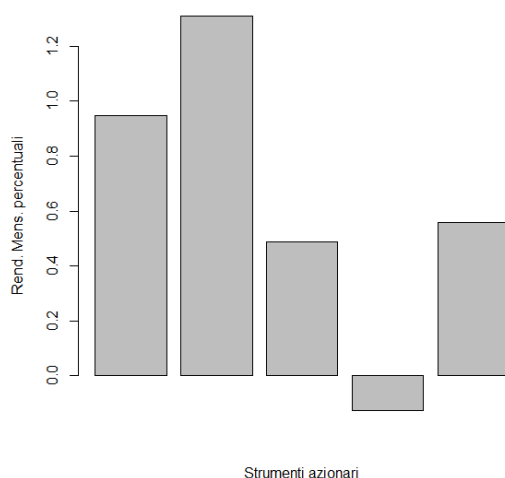


Figura 2.1: Rendimenti mensili percentuali degli strumenti azionari. Da sinistra verso destra: S&P500, NASDAQ-100, FTSE 100, HSI e N225.

<sup>7</sup> Per semplicità, nel seguito ci si riferirà ai log-rendimenti chiamandoli solo "rendimenti".

Dal grafico dei rendimenti mensili percentuali è possibile osservare che i valori medi per il periodo considerato sono positivi, fatta eccezione per l'indice HSI che presenta un rendimento medio pari a -0.1251%. Il rendimento medio più elevato si ha per l'indice NASDAQ-100 con un valore di 1.3091%. Gli altri indici presentano valori medi simili tra loro e maggiori di 0.5%.

Le analisi empiriche sono coerenti con la teoria visto che i rendimenti medi degli strumenti finanziari azionari nel lungo periodo sono positivi e non molto elevati. In questo caso la finestra grafica non è molto ampia ma aumentando le sue dimensioni ci si aspetterebbe un rendimento medio positivo anche per l'indice di Hong Kong. La caratterizzazione degli strumenti finanziari è tale da associare rendimento a rischio, un rischio elevato comporta una maggiore remunerazione.

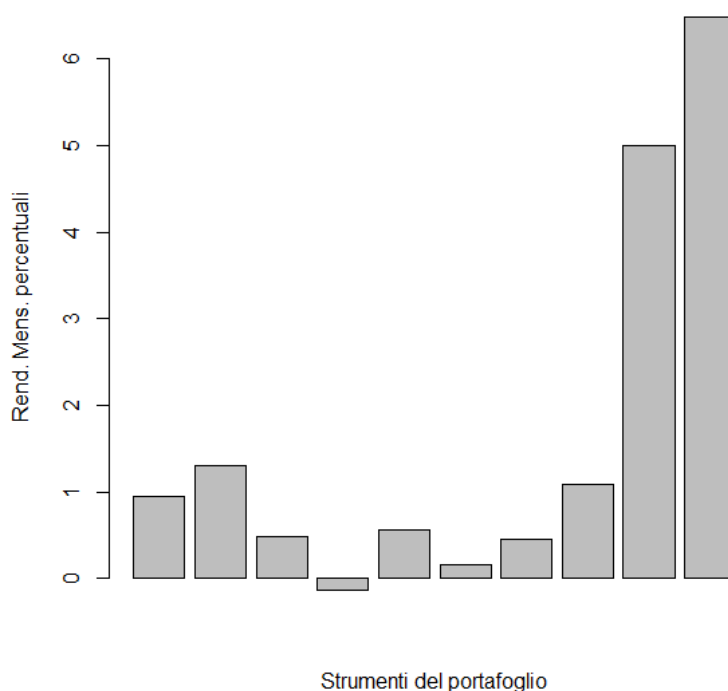


Figura 2.2: Rendimenti mensili medi percentuali degli strumenti del portafoglio. Da sinistra verso destra: S&P500, NASDAQ-100, FTSE 100, HSI, N225, Crude oil, Gold Bullion, Soya oil, BTC-USD, DOGE-USD.

Analizzando invece il portafoglio nel suo complesso si può notare che i rendimenti medi delle merci sono tutti positivi e simili come valori a quelli dei titoli azionari. Le 2 criptovalute presentano invece rendimenti medi molto più elevati pari a 4.9922% per il Bitcoin e 6.4798% per il Dogecoin. I valori delle criptovalute dipendono molto però dall'orizzonte temporale considerato come si vedrà in seguito.

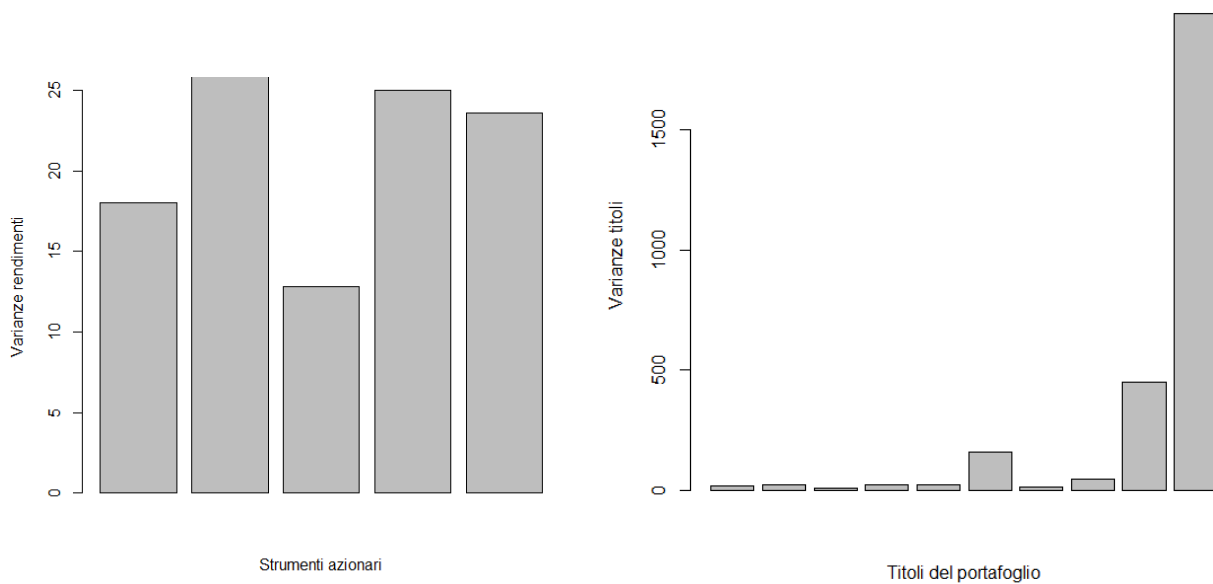


Figura 2.3: Sulla sinistra le varianze degli strumenti azionari: S&P500, NASDAQ-100, FTSE 100, HSI, N225. Mentre sulla destra le varianze degli strumenti del portafoglio completo: S&P500, NASDAQ-100, FTSE 100, HSI, N225, Crude oil, Gold Bullion, Soya oil, BTC-USD, DOGE-USD.

Le varianze dei rendimenti degli strumenti finanziari sono abbastanza contenute e simili tra loro come è possibile osservare nel primo grafico utilizzato per far vedere i diversi ordini di grandezza tra le quantità. Considerando invece il portafoglio completo, nel grafico di destra, si può vedere come le varianze delle due criptovalute siano considerevolmente superiori con valori pari a 450.7938 per Bitcoin e 1979.3399 per Dogecoin ma bisogna anche tenere conto delle diverse scale tra i valori. Le varianze delle merci sono simili a quelle degli strumenti azionari tranne per quanto riguarda il petrolio grezzo che presenta un valore leggermente superiore. In un portafoglio è quindi opportuno inserire una componente di criptovalute se l'obiettivo è aumentare il rendimento atteso ma bisogna tenere conto della loro estrema volatilità limitandone la quantità all'interno del paniere.

Successivamente dalla matrice di varianza e covarianza è stata ricavata la matrice di correlazione P, quantità più interessante visto che i dati vengono standardizzati ovviando quindi al problema delle diverse scale tra gli strumenti finanziari.

Il generico elemento  $\rho_{xy}$  della matrice P è definito come  $\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ , dove  $\sigma_{xy}$  è la covarianza tra  $x$  e  $y$  e  $\sigma_x, \sigma_y$  sono le due deviazioni standard.

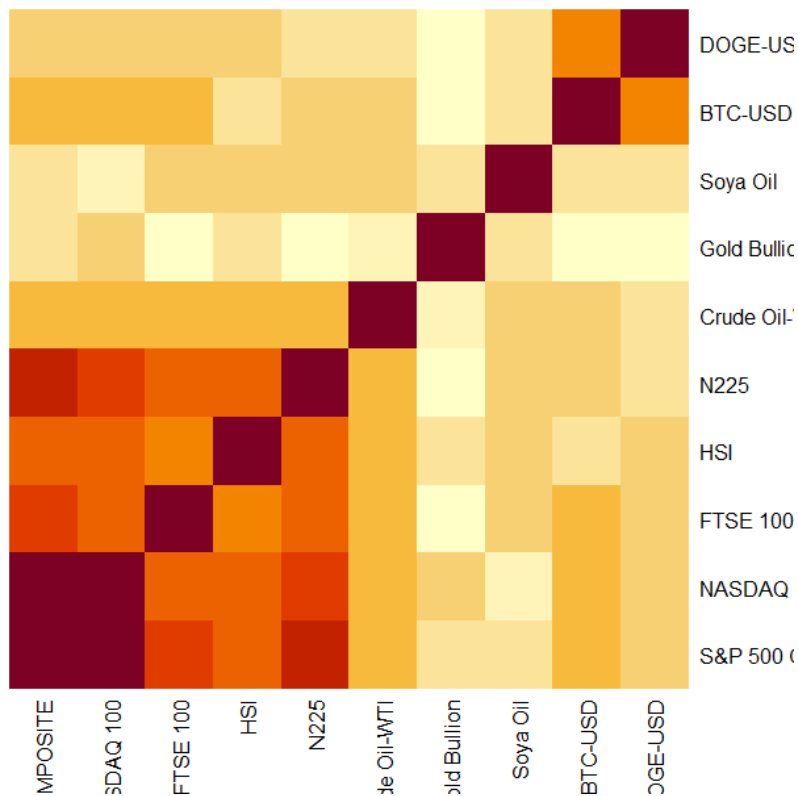


Figura 2.4: Heat Map della correlazione tra gli strumenti finanziari. Colori più scuri indicano correlazioni più elevate mentre colori più chiari indicano correlazioni prossime allo zero.

Grazie all'utilizzo di una Heat Map è possibile osservare le correlazioni tra i diversi strumenti e i settori finanziari di appartenenza. Al di fuori della diagonale, i colori più scuri indicano correlazioni più elevate mentre i colori più chiari indicano correlazioni più basse. Come è possibile aspettarsi, il settore degli indici azionari è facilmente distinguibile ed al suo interno la correlazione tra i due indici americani è prossima ad 1. Anche la correlazione tra le due criptovalute è elevata mentre la correlazione tra il settore delle merci e quello degli indici azionari assume valori più contenuti e positivi. Sono presenti alcune correlazioni negative principalmente all'interno del settore merceologico.

È possibile sfruttare la diversificazione investendo in settori diversi quindi in questo caso si avranno benefici aggiungendo al portafoglio composto solo da strumenti azionari le merci e le criptovalute. Il loro inserimento grazie alle basse correlazioni porterà benefici in termini di rischio.

### 3 METODI DI ANALISI TRADIZIONALI

Gli approcci tradizionali derivano direttamente dalla teoria di Markowitz visto che la costruzione dei portafogli si basa su media, varianza e correlazione dei rendimenti degli asset<sup>8</sup>. Le soluzioni si ricavano da problemi di minimizzazione per la selezione dei portafogli ottimi. Un limite di questi approcci è l'elevato uso di parametri necessari per la risoluzione del problema di ottimizzazione e per questo motivo, in seguito, sono nati modelli e teorie alternative.

In questo capitolo verranno discussi alcuni dei metodi più comuni presenti in letteratura per la costruzione di portafogli efficienti come il portafoglio a minima varianza globale, il portafoglio di massimo trade-off ed il portafoglio equamente pesato.

Il punto di partenza è la costruzione dei portafogli efficienti, ottenibili risolvendo il seguente problema di ottimo vincolato:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \quad & \omega' \Sigma \omega \\ & \mu_p = \omega' r \\ & \omega' 1_n = 1 \end{aligned}$$

Dove  $\omega' \Sigma \omega = \sigma_p^2$  è la varianza del portafoglio e rappresenta il suo rischio.

Le altre quantità utilizzate sono  $r$  vettore dei valori attesi dei rendimenti degli  $n$  asset rischiosi considerati nell'analisi,  $\Sigma$  valore atteso della matrice di varianza e covarianza dei rendimenti degli  $n$  asset rischiosi,  $\mu_p$  rendimento del portafoglio costruito con i titoli rischiosi,  $\sigma_p$  la deviazione standard del portafoglio,  $\omega$  il vettore di  $n$  pesi dei titoli nel portafoglio e  $1_n$  il vettore di dimensione  $n$  composto di 1.  $n$  può assumere valore pari a 5 se si considera il portafoglio azionario o valore pari a 10 se si considera il portafoglio completo.

Come precedentemente descritto l'obiettivo è minimizzare la varianza del portafoglio, fissando il rendimento ad un obiettivo pari a  $\mu_p$ . Il problema impone un ulteriore vincolo denominato vincolo di ammissibilità del portafoglio che garantisce che la somma dei pesi sia pari a 1. Il vincolo non esclude la presenza di pesi negativi ovvero vendite allo scoperto. Per costruzione i portafogli così generati sono efficienti visto che non esiste un altro portafoglio che garantisce rendimenti pari a  $\mu_p$  con rischio minore.

I portafogli avranno quindi rendimento e varianza pari a:

$$\begin{aligned} \mu_p = r' \omega &= \sum_{i=1}^n r_i \omega_i \\ \sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega &= \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup> Strumenti finanziari.

Sfruttando il concetto di efficienza, la soluzione al problema di ottimo può anche essere raggiunta fissando un valore del rischio invece del rendimento. In questo caso i vincoli sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \max_{\omega} \quad & \omega' r \\ \omega' \Sigma \omega = \quad & \sigma_p^2 \\ \omega' \mathbf{1}_n = \quad & 1 \end{aligned}$$

Risolviendo tramite un Lagrangiano e imponendo le condizioni del primo ordine si riesce ad ottenere una relazione tra  $\mu_p$  e  $\sigma_p^2$  che permette di rappresentare l'insieme dei portafogli efficienti:

$$\sigma_p^2 = \frac{C}{\Delta} \mu_p^2 - \frac{2B}{\Delta} \mu_p + \frac{A}{\Delta}$$

Nell'equazione le quantità assumono i seguenti valori:  $A = r' \Sigma^{-1} r$ ,  $B = \mathbf{1}'_n \Sigma^{-1} r$ ,  $C = \mathbf{1}'_n \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n$  e  $\Delta = AC - B^2$ .

La frontiera efficiente definisce nello spazio  $(\mu_p, \sigma_p)$  tutti i punti che sono associati a portafogli efficienti ed è descritta attraverso una parabola. Normalmente però la frontiera è rappresentata nello spazio  $(\sigma_p, \mu_p)$ ; questa scelta è legata al fatto che la deviazione standard (la volatilità) ha la stessa unità di misura dei rendimenti e quindi risulta più facilmente interpretabile. In questo spazio la frontiera efficiente corrisponde ad un ramo di iperbole. L'insieme dei portafogli efficienti è costituito solo dalla porzione superiore del ramo visto che a parità di rischio gli investitori preferiscono un rendimento alto rispetto ad uno basso. Per questo motivo la parte inferiore della curva è dominata da quella superiore.

Prendendo in considerazione il portafoglio composto solo da indici azionari e l'intero orizzonte temporale è possibile costruire la frontiera efficiente per poi confrontarla con quella generata dal portafoglio completo con 10 asset.

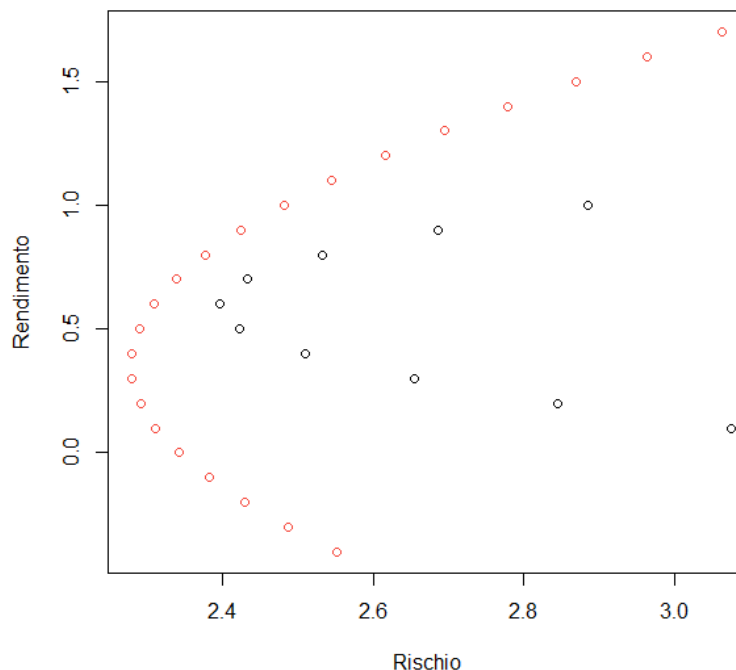


Figura 3.1: Frontiere efficienti. In nero la frontiera efficiente del portafoglio azionario e in rosso quella del portafoglio completo.

Aumentando i titoli a disposizione, aumentano anche le possibilità dell'agente e la diversificazione diventa più efficace. I portafogli ammissibili non potranno mai diminuire e quindi la frontiera non potrà mai spostarsi verso destra. Per questo, nella peggiore delle ipotesi, i punti raggiungibili con 10 asset saranno esattamente gli stessi che era possibile raggiungere con 5 asset. Più verosimilmente, se gli asset disponibili aumentano, il vertice della frontiera efficiente si avvicina all'asse delle ordinate e l'intera frontiera si allarga. Come è possibile osservare dal grafico la frontiera efficiente del portafoglio azionario (in nero) è completamente compresa in quella relativa al portafoglio completo (in rosso). Questo a condizione di mantenere invariato il periodo temporale di osservazione, in caso contrario la frontiera efficiente può muoversi in qualsiasi direzione. La conferma di ciò si può ottenere fissando il rendimento obiettivo nel caso del portafoglio azionario e nel caso del portafoglio completo e osservando la composizione dei pesi nei portafogli così generati.

Ipotizzando un rendimento obiettivo pari allo 0.5% per mese è possibile osservare come nel primo caso siano presenti posizioni lunghe più marcate mentre nel secondo il valore dei pesi è minore in valore assoluto ma sono presenti maggiori posizioni corte. Con questi dati a disposizione, a causa dell'esiguo numero di asset non è possibile osservare a pieno gli effetti dell'aggiunta di merci e criptoalute al paniere ma è intuibile come una composizione di titoli nel secondo caso sia più facile da creare per un investitore visto che le posizioni diventano più ragionevoli.

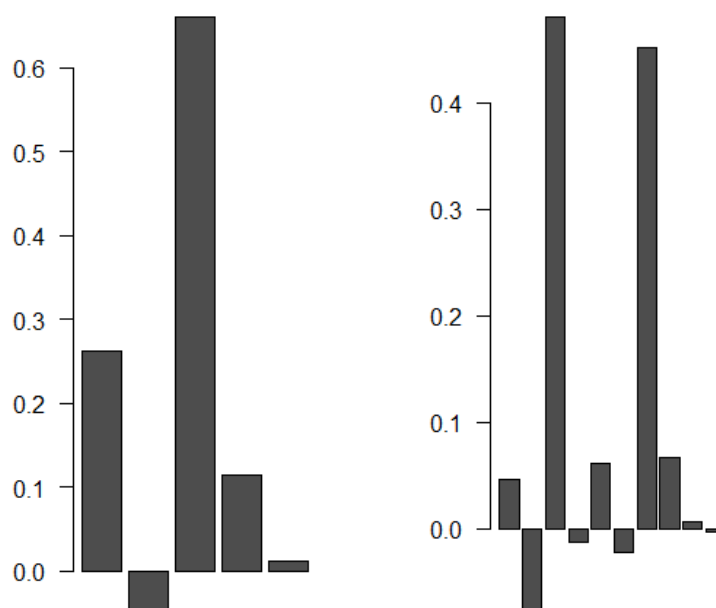


Figura 3.2: Composizione dei pesi dei portafogli con rendimento obiettivo pari 0.5% per mese. Sulla sinistra il portafoglio azionario mentre sulla destra il portafoglio completo.

Posizioni estreme, che siano lunghe o corte, possono rendere il portafoglio difficilmente realizzabile per un comune investitore. In altri casi la vendita allo scoperto può non essere praticabile, magari a causa delle norme presenti nel mercato o in base alla bassa avversione al rischio dell'agente finanziario. Una possibile soluzione può essere il portafoglio *long-only* che contiene per definizione solo posizioni lunghe. Questo particolare portafoglio si crea aggiungendo il vincolo che ogni singolo peso relativo ad un asset sia maggiore o uguale a 0:  $\omega_i \geq 0 \forall i$ .

### 3.1 Minima varianza globale

Il primo portafoglio di rilievo per la frontiera efficiente è il portafoglio a minima varianza globale. Questo particolare portafoglio si ottiene come soluzione al problema di ottimo:

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

$$\omega' \mathbf{1}_n = 1$$

Il portafoglio a minima varianza globale<sup>9</sup> si situa sul vertice dell'iperbole e ha pesi, rendimento e varianza pari a:

$$\omega_{GMV} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n' \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n}$$

$$r_{GMV} = \frac{r' \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n' \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n} = \frac{B}{C}$$

$$\sigma_{GMV} = \frac{1}{\sqrt{C}}$$

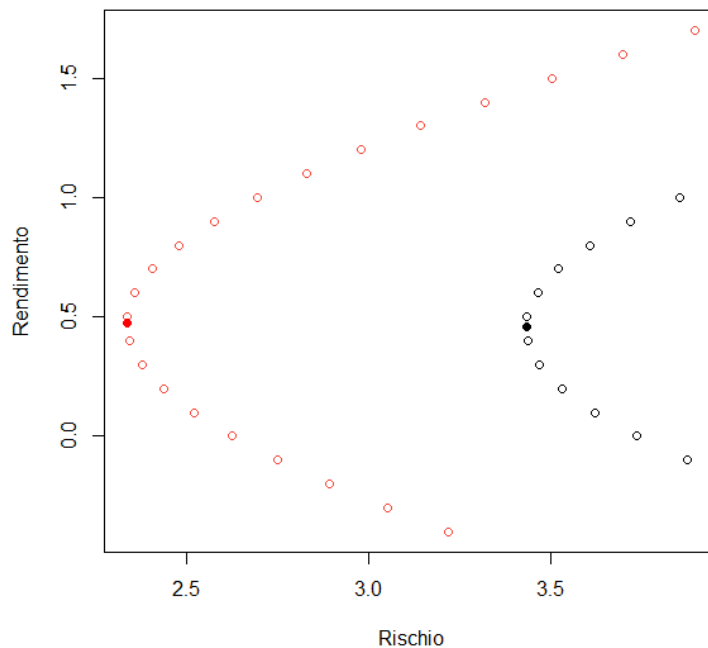


Figura 3.3: Frontiere efficienti e portafogli GMV. In rosso la frontiera efficiente del portafoglio completo e il suo punto di GMV mentre in nero la frontiera efficiente del portafoglio azionario e il suo punto di GMV.

Analizzando la posizione sulla frontiera efficiente dei portafogli GMV si ha conferma della loro posizione sul vertice delle iperboli, in rosso per il portafoglio completo e in nero per il portafoglio azionario. Il rendimento dei due portafogli è molto simile: 0.4721 e 0.4571 ma il primo ha un rischio nettamente inferiore.

<sup>9</sup> Nel seguito abbreviato con "GMV"



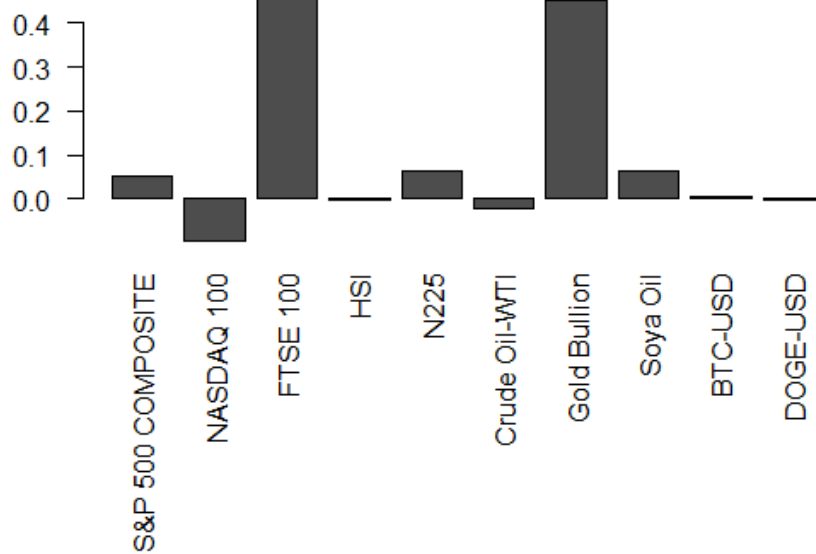


Figura 3.4: Composizione dei pesi del portafoglio GMV considerando tutti i 10 asset.

Osservando la composizione dei pesi del portafoglio completo GMV si può vedere come i contributi delle criptovalute e del petrolio grezzo (la merce più rischiosa) siano prossimi allo zero. Questo risultato non è sorprendente visto che il portafoglio obiettivo ha la varianza minima e gli asset elencati sono i più volatili.

### 3.2 Portafoglio di massimo trade-off

Il secondo portafoglio di rilievo per la frontiera efficiente è il portafoglio di massimo trade-off<sup>10</sup> ovvero il portafoglio che garantisce il rapporto massimo tra rischio e rendimento. Questo particolare portafoglio è situato sulla tangente con la retta che passa per l'origine ed ha pesi, rendimento e varianza pari a:

$$\omega_{TO} = \frac{\Sigma^{-1}r}{\mathbf{1}'_n \Sigma^{-1}r}$$

$$r_{TO} = \frac{r' \Sigma^{-1}r}{\mathbf{1}'_n \Sigma^{-1}r} = \frac{A}{B}$$

$$\sigma_{TO} = \frac{\sqrt{A}}{|B|}$$

Il portafoglio TO (in blu) nel caso del portafoglio completo di colloca più in alto e più a destra del portafoglio GMV (in rosso) coerentemente con quanto ci si può aspettare.

<sup>10</sup> Nel seguito abbreviato con "TO"

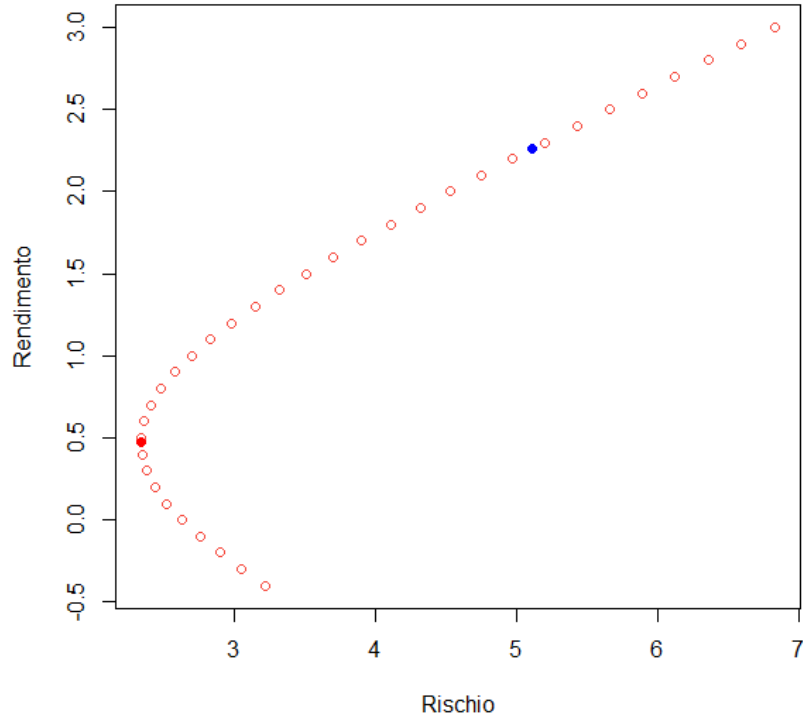


Figura 3.5: Frontiera efficiente del portafoglio completo con il punto GMV (rosso) e punto TO (blu).

La composizione del portafoglio TO assume posizioni più ragionevoli rispetto al portafoglio GMV, non sono presenti pesi estremi e l'unico asset con pesi prossimo a zero è il DODGE-USD.

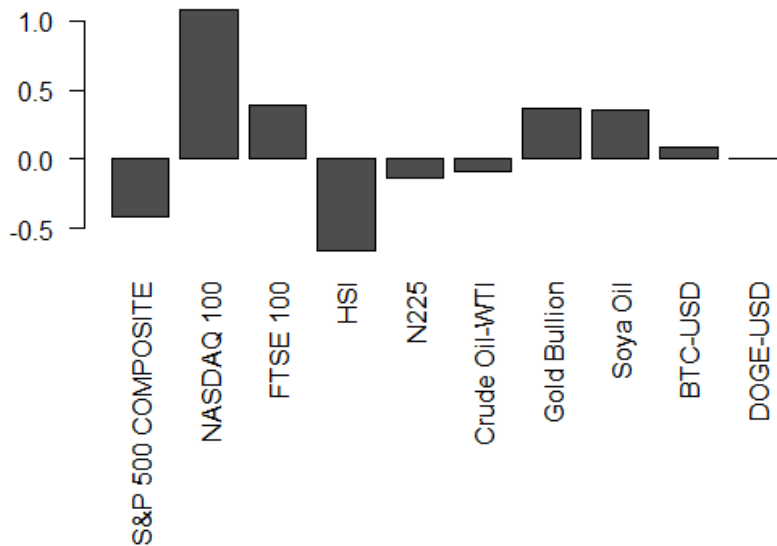


Figura 3.6: Composizione del portafoglio TO nel caso del portafoglio completo.

Esiste una particolare relazione tra i 2 portafogli rilevanti per la frontiera efficiente per cui i pesi di qualsiasi portafoglio sono ottenibili da quelli dei 2 portafogli particolari.

$$\omega = \frac{B}{\gamma} \omega_{TO} - \frac{B - \gamma}{\gamma} \omega_{GMV}$$

La composizione del portafoglio dipende quindi dall'avversione al rischio " $\gamma$ " dell'investitore: per un investitore infinitamente avverso al rischio, quindi  $\gamma \rightarrow \infty$ , la soluzione ottima converge verso  $\omega_{GMV}$ , per un investitore infinitamente propenso al rischio,  $\gamma \rightarrow 0$ , la soluzione ottima corrisponde ad un portafoglio estremo con posizione lunga su  $\omega_{TO}$  e corta su  $\omega_{GMV}$ . Se  $\gamma \rightarrow B$  la soluzione è il portafoglio di massimo trade-off.

Generalizzando il risultato precedente si può affermare che i pesi di un portafoglio efficiente possono essere ottenuti attraverso una combinazione ammissibile di due portafogli efficienti qualsiasi. Di conseguenza l'intera frontiera efficiente può essere ricavata a partire da due punti noti: il portafoglio GMV e il portafoglio TO.

### 3.3 Portafoglio equamente pesato

L'ultimo portafoglio rilevante per l'analisi è il portafoglio equamente pesato, ottenibile ponendo tutti i pesi pari a  $\omega_i = 1/N$  con  $N=10$  nel caso del portafoglio completo e  $N=5$  nel caso del portafoglio azionario. Nonostante la sua semplicità questo portafoglio è spesso usato come benchmark nelle analisi di portafoglio. La sua particolarità sta nel non necessitare di alcun dato per essere stimato se non il numero di asset presi in considerazione. Inoltre, nonostante la banale definizione risulta essere un portafoglio ben diversificato e difficile da battere a livello di prestazioni.

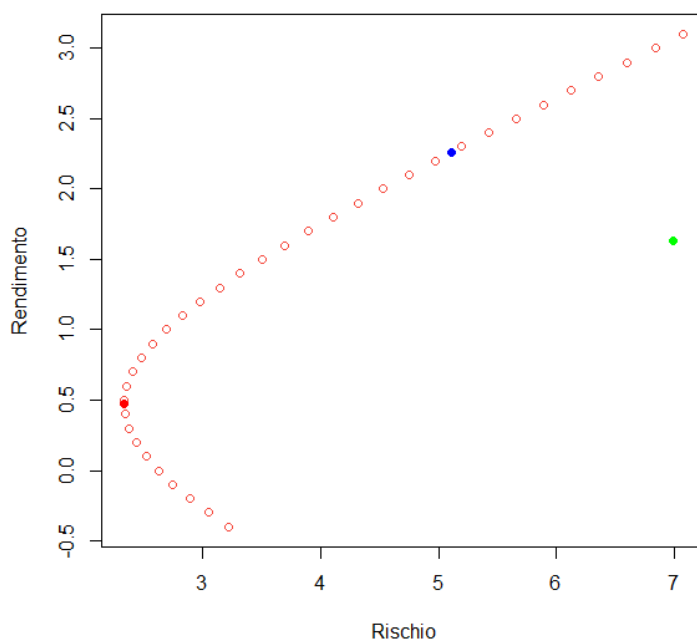


Figura 3.7: Frontiera efficiente relativa al portafoglio completo con portafoglio GMV (rosso), TO (blu) ed equamente pesato (verde).

Il portafoglio equamente pesato (in verde) non risulta essere un portafoglio efficiente e non si posiziona sulla frontiera. Ha un rendimento inferiore ed una varianza maggiore del portafoglio di massimo trade-off che lo domina.

## 4 METODO DEL RISK BUDGETING

Nei casi precedentemente descritti le costruzioni dei portafogli si basano su specifici parametri che permettono di risolvere determinati problemi. Di conseguenza le performance dei portafogli così costruiti dipendono dai vincoli imposti a priori che rendono complicato il confronto con altri portafogli. Inoltre, i portafogli ottimi dipendono molto dagli input degli investitori, il che li rende poco stabili. Un diverso metodo di approccio che può essere analizzato e che bisogna prendere in considerazione è la decomposizione del rischio rispetto ai singoli asset presenti nel portafoglio. Questo metodo di allocazione prende il nome di Risk Budgeting o bilancio del rischio.

### 4.1 Il bilancio del rischio

Il Risk Budgeting è uno dei tre metodi di bilancio usati per l'allocazione di asset. Gli altri due sono gli approcci *Weight Budgeting* e *Performance Budgeting*. Considerando un portafoglio composto da due asset ed una politica 30/70, nel portafoglio *Weight Budgeting* vengono definiti direttamente i pesi per cui il peso del primo asset sarà 30% e quello del secondo sarà 70%. Se si sceglie di procedere con l'approccio *Performance Budgeting* i pesi vengono calibrati in modo che ogni asset contribuisca in un determinato modo alle performance del portafoglio: se si vuole ottenere un rendimento dell'1%, il contributo alle performance del primo asset sarà 0.3% e quello del secondo sarà 0.7%. Nell'approccio Risk Budgeting vengono scelti i budget di rischio dei singoli asset: se viene imposto un rischio del portafoglio pari al 40% e applichiamo questa politica i budget di rischio dei due asset saranno 12% e 28%.

In realtà misurare il rischio di un portafoglio è molto diverso dal gestirlo. In particolare, una misura di rischio è un numero che non è molto utile per capire la diversificazione di un portafoglio. Per comprendere meglio il concetto di allocazione del rischio (o risk allocation<sup>11</sup>) bisogna prima definire precisamente il concetto di contribuzione al rischio (o risk contribution).

Ci sono diversi metodi presenti in letteratura<sup>12</sup> per fare ciò ma il più usato è sicuramente il principio di Eulero.

Sia  $\Pi$  la distribuzione dei costi e dei ricavi di un portafoglio che può essere assimilata alla distribuzione dei rendimenti.  $\Pi$  può essere decomposto nella somma di  $\Pi_i$  relativi agli  $N$  asset.

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \Pi_i$$

Sia  $R(\Pi)$  la misura di rischio dei rendimenti del portafoglio. Definiti i contributi al rischio dei singoli asset  $R(\Pi_i|\Pi)$  deve valere la proprietà di allocazione totale:

$$\sum_{i=1}^N R(\Pi_i|\Pi) = R(\Pi)$$

---

<sup>11</sup> Litterman, 1996.

<sup>12</sup> Come illustrato da Denault, 2001.

È stato dimostrato<sup>13</sup> che esiste un'unica soluzione per il contributo al rischio dei singoli asset ed è la seguente:

$$R(\Pi_i|\Pi) = \frac{d}{dh} R(\Pi + h\Pi_i) \Big|_{h=0}$$

Ed in caso di misura di rischio sub-additiva vale:

$$R(\Pi_i|\Pi) \leq R(\Pi_i)$$

Questo significa che il contributo al rischio del singolo asset *i*-esimo è sempre più piccolo della sua misura di rischio indipendente, ciò è dovuto alla diversificazione.

Data una misura di rischio  $R(\Pi)$ , i risultati precedenti implicano che il contributo al rischio  $RC_i$  dell'asset *i*-esimo è definito come:

$$RC_i = x_i \frac{\partial R(x)}{\partial x_i}$$

Inoltre, la misura di rischio soddisfa la decomposizione di Eulero:

$$R(x) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial R(x)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n RC_i$$

Questa relazione è anche chiamata principio di allocazione di Eulero e si trova alla base della teoria del Risk Budgeting.

Per alcune analisi posso essere utili i contributi al rischio percentuali dei singoli asset  $RC_i^*$ , calcolati nel modo seguente:

$$RC_i^* = \frac{RC_i}{R}$$

Nel caso di rendimenti distribuiti come una Normale, ipotesi assunta vera, le principali misure di rischio utilizzate sono il Value-at-Risk<sup>14</sup> e l'Expected Shortfall entrambe legate al concetto di volatilità. Esse rappresentano una stima delle perdite attese del mio portafoglio e si basano sulla loro distribuzione  $L(x)$  e sui quantili.

Prendendo in considerazione la misura di rischio VAR essa dipende dalla volatilità  $\sigma(x) = \sqrt{x'\Sigma x}$ , di conseguenza il vettore delle volatilità marginali è:

$$\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} (x'\Sigma x)^{-\frac{1}{2}} (2\Sigma x) = \frac{\Sigma x}{\sqrt{x'\Sigma x}}$$

Il contributo al rischio dell'*i*-esimo asset è quindi:

$$RC_i = x_i \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x'\Sigma x}}$$

Per costruzione la proprietà di allocazione completa è verificata:

<sup>13</sup> Tasche, 2008.

<sup>14</sup> Nel seguito abbreviato in "VAR".

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N RC_i &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x' \Sigma x}} \\ &= x' \frac{\Sigma x}{\sqrt{x' \Sigma x}} = \sqrt{x' \Sigma x} = \sigma(x)\end{aligned}$$

È possibile ora definire il contributo al rischio delle misure di rischio elencate in precedenza. Nel caso del VAR il contributo al rischio  $RC_i$  diventa:

$$RC_i = \left( x_i \left( -\mu_i + (\Phi)^{-1}(\alpha) \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x' \Sigma x}} \right) \right)$$

Per quanto riguarda l'Expected Shortfall, il contributo al rischio  $RC_i$  è:

$$RC_i = x_i \left( -\mu_i + \frac{(\Sigma x)_i}{(1 - \alpha)\sqrt{x' \Sigma x}} \phi(\Phi^{-1}(\alpha)) \right)$$

Ci sono due modi per interpretare i contributi al rischio. Il primo, risalente al 1996-1997<sup>15</sup>, si basa su analisi marginali ed è collegato allo studio della sensibilità della misura di rischio. Infatti, il rischio marginale relativo all' $i$ -esimo asset è definito come:

$$\frac{\partial R(x)}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x + h e_i) - R(x)}{h}$$

Se l'incremento  $h$  è piccolo, si ha:

$$R(x + h e_i) \cong R(x) + h \frac{\partial R(x)}{\partial x_i}$$

Questo significa che se si aumenta il peso dell' $i$ -esimo asset di una piccola quantità  $h$ , la misura di rischio viene incrementata per il prodotto tra  $h$  e il rischio marginale.

Il secondo modo di interpretare i contributi al rischio considera l'analisi delle performance. Definendo una funzione di utilità come  $U(x) = E[R(x)] - \frac{1}{2} \phi R(x)$ , il portafoglio ottimo soddisfa la seguente relazione:

$$\mu_i = \frac{\phi}{2} \frac{\partial R(x)}{\partial x_i}$$

Di conseguenza, i contributi alle performance sono uguali ai contributi al rischio:

$$\frac{x_i \mu_i}{\sum_{i=1}^N x_i \mu_i} = \frac{x_i \partial_{x_i} R(x)}{\sum_{i=1}^N x_i \partial_{x_i} R(x)}$$

C'è quindi una relazione duale tra rendimento e rischio. Nel caso del VAR i contributi ai rischi sono collegati ai contributi delle perdite<sup>16</sup>:

<sup>15</sup> Proposto da Litterman (1996) e Garman (1997).

<sup>16</sup> Qian, 2006.

$$RC_i = E[L_i | L = VAR_\alpha(L)]$$

Il contributo al rischio dell'asset  $i$ -esimo è il contributo alla perdita dell' $i$ -esimo asset quando le perdite di portafoglio raggiungono il VAR.

Per definire un portafoglio Risk Budgeting bisogna considerare un insieme di risk budgets  $\{B_1, \dots, B_N\}$ . Mentre  $RC_i(x_1, \dots, x_N)$  è il contributo al rischio dell' $i$ -esimo asset rispetto al portafoglio  $x = (x_1, \dots, x_N)$ . Il portafoglio è quindi definito dai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} RC_1(x_1, \dots, x_N) = B_1 \\ \vdots \\ RC_i(x_1, \dots, x_N) = B_i \\ \vdots \\ RC_N(x_1, \dots, x_N) = B_N \end{cases}$$

Ed è il portafoglio  $\chi$  tale per cui i contributi al rischio riflettono i risk budgets. Ci sono due principali differenze tra un portafoglio ottimizzato e un portafoglio Risk Budgeting:

- Un portafoglio Risk Budgeting non si basa sull'ottimizzazione di una funzione di utilità.
- Un portafoglio Risk Budgeting non dipende esplicitamente dalle performance attese del portafoglio.

Diversamente da quando avviene per l'approccio di Markowitz, in questo caso si considera solo la dimensione del rischio visto che quella delle performance risulterebbe troppo complicata per essere analizzata. Ciononostante, servono lo stesso delle ipotesi sui rendimenti per creare un portafoglio Risk Budgeting. Infatti, alcune misure di rischio come il VAR dipendono dal vettore  $\mu$  dei rendimenti attesi.

Esiste però una specificazione più appropriata del portafoglio Risk Budgeting. Sia  $c$  uno scalare e  $y$  un nuovo portafoglio definito come  $y = c\chi$ . La proprietà di omogeneità delle misure di rischio coerenti implica che  $R(y) = cR(x)$  e da ciò si può ricavare che i rischi marginali del portafoglio  $\chi$  sono gli stessi del portafoglio  $y$ :

$$\frac{\partial R(y)}{\partial y_i} = \frac{\partial R(x)}{\partial x_i}$$

Il portafoglio Risk Budgeting è semplificabile<sup>17</sup> usando dei pesi e dei budget di rischio relativi  $b_i$  espressi in percentuale e solitamente è preferibile ottenere un portafoglio *long-only*. La nuova specificazione è definita dal sistema non lineare:

---

<sup>17</sup> Proposto da Bruder e Roncalli, 2012.

$$\left\{ \begin{array}{l} RC_i(x) = b_i R(x) \\ b_i \geq 0 \\ x_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n b_i = 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{array} \right.$$

In realtà, il miglior vincolo da porre su  $b_i$  è  $b_i > 0$  per evitare soluzioni non accettabili e il portafoglio risulta essere la soluzione del problema non lineare:

$$x^* = \{x \in [0,1]^N : \sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad x_i \partial_{x_i} R(x) = b_i R(x)\}$$

dove  $b \in ]0,1]^N$  e  $\sum_{i=1}^N x_i = 1$ .

Se un investitore volesse imporre alcuni risk budgets uguali a 0, dovrebbe prima togliere gli asset corrispondenti dal portafoglio e successivamente risolvere il problema di ottimo.

A parte alcuni semplici casi, non è possibile trovare una soluzione analitica al precedente problema ma è sempre possibile ricavare una soluzione numerica. Per fare ciò è meglio trasformare il problema non lineare in un problema di ottimizzazione<sup>18</sup>:

$$\begin{array}{l} \min_x f(x, b) \\ t. c. \quad 1'x = 1, 0 \leq x \leq 1 \end{array}$$

Due possibili specificazioni della funzione obiettivo sono:

$$\begin{aligned} f(x, b) &= \sum_{i=1}^N (x_i \partial_{x_i} R(x) - b_i R(x))^2 \\ f(x, b) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \frac{x_i \partial_{x_i} R(x)}{b_i} - \frac{x_j \partial_{x_j} R(x)}{b_j} \right)^2 \end{aligned}$$

Esiste però un problema di ottimizzazione più appropriato per ottenere un portafoglio  $y^*$  Risk Budgeting con solo risk budgets positivi:

$$\begin{array}{l} \min_y R(y) \\ s. t. \quad \sum_{i=1}^n b_i \ln y_i \geq c, \quad y \geq 0 \end{array}$$

Dove  $c$  è una costante.

La funzione di Lagrange associata al problema è:

---

<sup>18</sup> Risolvibile con algoritmi iterativi.



$$\mathcal{L}(y; \lambda, \lambda_c) = R(y) - \lambda' y - \lambda_c \left( \sum_{i=1}^N b_i \ln y_i - c \right)$$

e  $y^*$  verifica la seguente condizione del primo ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(y; \lambda, \lambda_c)}{\partial y_i} = \frac{\partial R(y)}{\partial y_i} - \lambda_i - \lambda_c \frac{b_i}{y_i} = 0$$

Si ottiene quindi il seguente risultato che verifica che i contributi al rischio sono proporzionali ai risk budgets:

$$y_i \frac{\partial R(y)}{\partial y_i} = \lambda_c b_i$$

$$RC_i = \lambda_c b_i$$

Il portafoglio  $y^*$  è un portafoglio Risk Budgeting ma non corrisponde al portafoglio Risk Budgeting normalizzato  $x^*$  definito in precedenza perché  $\sum_{i=1}^N y_i^*$  non può essere uguale a 1.

Il portafoglio  $x^*$  è facilmente ottenibile scalando  $y^*$ :

$$x_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{j=1}^N y_j^*}$$

Dopo aver definito cos'è un portafoglio Risk Budgeting e le sue proprietà si può prendere in considerazione la creazione di un portafoglio con i dieci asset specificati precedentemente. Una comune politica di gestione del rischio prevede di spartirlo tra le diverse tipologie di asset a seconda delle loro caratteristiche. In questo caso è ragionevole porre il 70% del rischio sugli indici azionari e il restante 30% su merci e criptovalute in quanto più volatili. Le soluzioni al problema sarebbero molteplici; una possibile prevede di imporre ai cinque singoli indici di partecipare al rischio per il 14% e al restante degli asset per il 6%.

Il problema è stato risolto grazie alla libreria R "riskParityPortfolio" ed in particolare alla funzione omonima "riskParityPortfolio". La funzione richiede in input la matrice di varianza e covarianza dei rendimenti da analizzare e, in caso di portafoglio Risk Budgeting, i budget di rischio  $b_i$  da assegnare ad ogni asset. Se non diversamente specificati i budget di rischio  $b_i$  sono posti uguali a  $b_i = \frac{1}{N}$ .

La funzione risolve il seguente problema:

$$\min_w (R(w) - lmd_{mu} * t(w) * mu + lmd_{var} * t(w) * Sigma * w)$$

Sottoposto ai seguenti vincoli:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad w_{lb} \leq w \leq w_{ub}, \quad Cmat * w = cvec, \quad Dmat * w = dvec$$

Dove  $R(w)$  indica il valore di risk concentration,  $t(w) * mu$  indica il rendimento atteso del portafoglio,  $t(w) * Sigma * w$  indica la varianza del portafoglio,  $lmd_{mu}$  e  $lmd_{var}$  sono i pesi di

trade-off per il rendimento atteso e per la varianza,  $w_{lb}$  e  $w_{ub}$  sono il limite inferiore e superiore per i pesi  $w$  del portafoglio,  $Cmat * w = cvec$  indica vincoli di uguaglianza lineare arbitrari e  $Dmat * w = dvec$  indica vincoli di disuguaglianza lineare arbitrari.

Gli output della funzione sono il vettore di pesi e il vettore dei contributi al rischio che può essere usato per verificare di aver risolto correttamente il problema.

Facendo le analisi sull'intero orizzonte temporale di 92 mesi i pesi del portafoglio sono così distribuiti:

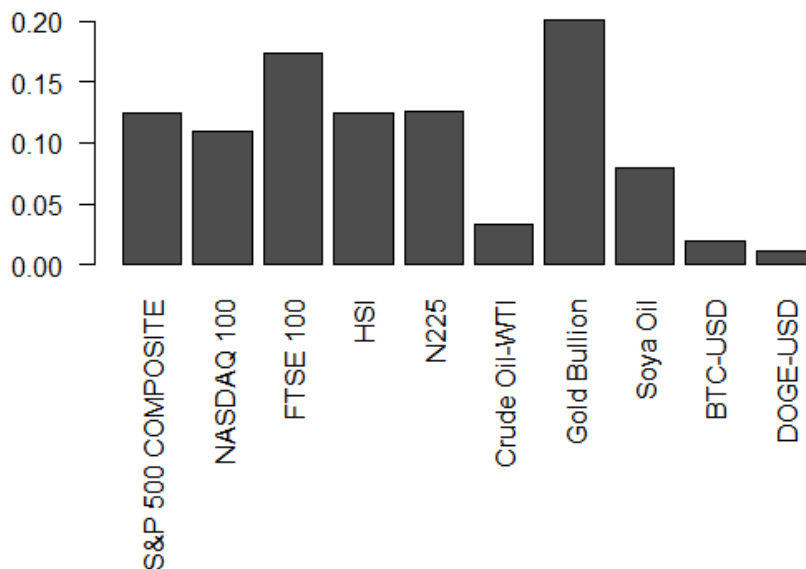


Figura 4.1: Composizione del portafoglio Risk Budgeting.

I pesi risultano essere tutti positivi e abbastanza simili tra loro per quanto riguarda gli indici azionari, mentre quelli relativi alle criptovalute sono decisamente inferiori. Questo risultato è coerente con le ipotesi teoriche visto che esse sono più volatili e quindi più rischiose.

## 4.2 Risk Parity

Un caso particolare del portafoglio Risk Budgeting è il portafoglio Risk Parity (più propriamente detto equal risk contribution portfolio<sup>19</sup>), esso si ottiene attribuendo lo stesso budget di rischio  $b_i$  a tutti gli  $N$  asset:

$$b_i = \frac{1}{N}$$

Può essere visto come un portafoglio neutrale quando l'investitore non ha conoscenze sui budget di rischio dei suoi investimenti. È un tipo di strategia che non punta ad aumentare le performance in termini assoluti quanto a un migliore comportamento del portafoglio nelle fasi negative dei mercati. Esso inoltre non dipenderà troppo dalle oscillazioni di mercato a breve termine.

<sup>19</sup> Nel seguito abbreviato in "ERC"

Come nel caso del portafoglio Risk Budgeting non esistono soluzioni analitiche per ottenere il portafoglio se non per alcuni casi specifici come quello in cui la matrice di correlazione è la stessa per tutti gli asset considerati.

Assumendo una matrice di correlazione costante con  $\rho_{i,j} = \rho$  per ogni  $i, j$  l'espressione dei risk contribution è ottenibile e i pesi  $\chi_i$  del portafoglio soddisfano la seguente relazione:

$$\chi_i \sigma_i \left( (1 - \rho) \chi_i \sigma_i + \rho \sum_{k=1}^N \chi_k \sigma_k \right) = \chi_j \sigma_j \left( (1 - \rho) \chi_j \sigma_j + \rho \sum_{k=1}^N \chi_k \sigma_k \right)$$

Ne segue che  $\chi_i \sigma_i = \chi_j \sigma_j$  e siccome  $\sum_{i=1}^N \chi_i = 1$  si deduce che:

$$\chi_i = \frac{\sigma_i^{-1}}{\sum_{j=1}^N \sigma_j^{-1}}$$

I pesi dell' $i$ -esimo asset sono inversamente proporzionali alla sua volatilità  $\sigma_i$  e non dipendono dal valore della correlazione. La soluzione è inoltre connessa al portafoglio di minima varianza globale.

Ponendo  $\rho = -(n - 1)^{-1}$ , la soluzione diventa:

$$\chi_i = \frac{\sum_{j=1}^N (\sigma_i \sigma_j)^{-1}}{\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (\sigma_i \sigma_j)^{-1}} = \frac{\sigma_i^{-1}}{\sum_{k=1}^N \sigma_k^{-1}}$$

Il portafoglio ERC è quindi uguale al portafoglio GMV quando la correlazione assume il valore più piccolo possibile.

Se, in aggiunta, si assumono tutte le volatilità  $\sigma_i = \sigma$  per ogni asset il contributo al rischio  $RC_i$  diventa:

$$RC_i = \frac{(\sum_{k=1}^N \chi_i \chi_k \rho_{i,k}) \sigma^2}{\sigma(x)}$$

Il portafoglio ERC verifica l'equazione:

$$\chi_i \left( \sum_{k=1}^N \chi_k \rho_{i,k} \right) = \chi_j \left( \sum_{k=1}^N \chi_k \rho_{j,k} \right)$$

Si deduce che:

$$\chi_i = \frac{(\sum_{k=1}^N \chi_k \rho_{i,k})^{-1}}{\sum_{j=1}^N (\sum_{k=1}^N \chi_k \rho_{j,k})^{-1}}$$

Il pesi dell' $i$ -esimo asset sono inversamente proporzionali alla media pesata della correlazione dell' $i$ -esimo asset.

Un'altra proprietà del portafoglio ERC è che corrisponde al portafoglio di tangenza quando tutti gli asset hanno lo stesso indice di Sharpe e la matrice di correlazione è uniforme.

Anche per la risoluzione del problema di allocazione relativo al portafoglio ERC può essere usata la funzione "riskParityPortfolio" appartenente alla libreria "riskParityPortfolio". In questo caso è

sufficiente la matrice di varianza e covarianza dei rendimenti del portafoglio come input per la funzione. I budget di rischio  $b_i$  sono automaticamente posti pari a  $b_i = \frac{1}{N}$ .

Il portafoglio ERC basato sui 10 asset disponibili e considerando l'intero orizzonte temporale ha i seguenti pesi:

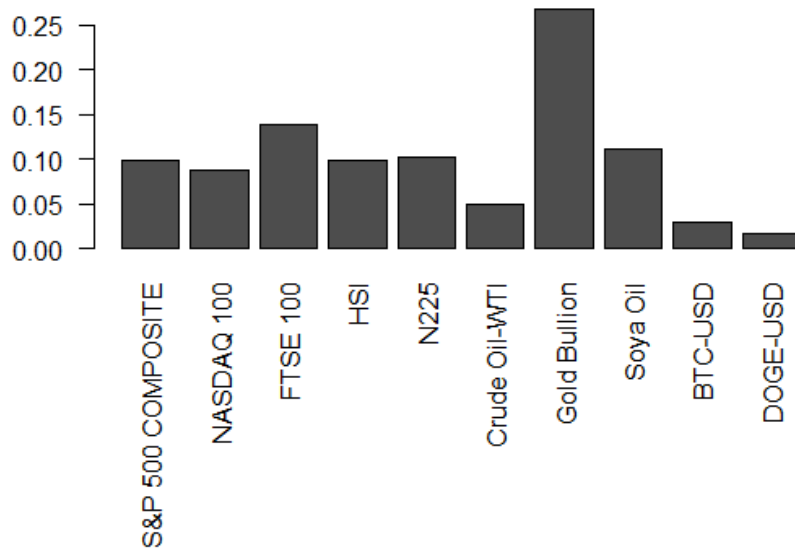


Figura 4.2: composizione del portafoglio Risk Parity.

I pesi risultano essere simili a quelli dei portafoglio Risk Budgeting ma in particolare i pesi relativi agli indici azionari sono diminuiti e i pesi relativi a merci e criptovalute sono aumentati come ci si poteva aspettare.

## 5 APPLICAZIONE DEI RISULTATI

Nei precedenti capitoli sono stati elencati ed analizzati diversi metodi per la costruzione di un portafoglio finanziario, osservandone le proprietà e le loro caratteristiche. Ora, l'obiettivo è creare diversi portafogli, studiarne la loro evoluzione nel tempo, le loro performance e la loro composizione. Per svolgere l'indagine sono stati utilizzati i dati dei rendimenti mensili relativi ai primi 3 anni del campione con lo scopo di costruirne la matrice di varianza e covarianza e procedere con la creazione dei portafogli. Successivamente è stata spostata la finestra grafica in avanti di un mese e sono state ripetute le analisi per poi continuare il processo fino alla fine del campione. Così facendo, per ogni metodologia utilizzata sono stati generati 55 portafogli ottimi con le relative composizioni di pesi. In particolare le metodologie di costruzione utilizzate sono state: minima varianza globale (con e senza vendita allo scoperto), massimo trade-off (con e senza vendita allo scoperto) e portafoglio equamente pesato per quanto riguarda i metodi tradizionali. Sono stati generati anche portafogli utilizzando la metodologia Risk Budgeting applicando una politica 30/70 e la metodologia Risk Parity.

### 5.1 Analisi della composizione dei portafogli

Nei grafici seguenti è rappresentato l'andamento dei pesi dei 10 asset presenti nel portafoglio completo nel corso dei 55 mesi di analisi. I pesi sono rappresentati attraverso grafici ad area per mettere in evidenza le posizioni lunghe e le posizioni corte dei vari asset.

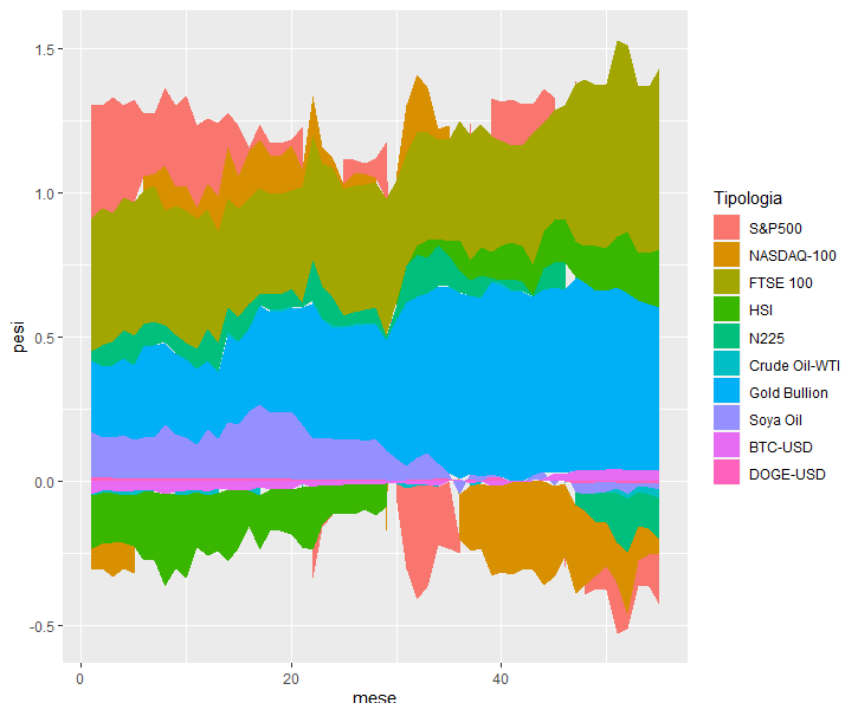


Figura 5.1: Rappresentazione dell'evoluzione dei pesi per il portafoglio GMV.

Nel portafoglio GMV si può osservare come i pesi più importanti siano rappresentati dagli asset FTSE 100 e Gold Bullion che assieme compongono più del 90% del portafoglio. Gli asset NASDAQ-100,

HSI, Crude Oil-WTI e BTC-USD assumono anche pesi negativi. Le due criptovalute hanno pesi molto bassi e ciò è dovuto alla loro elevata volatilità.

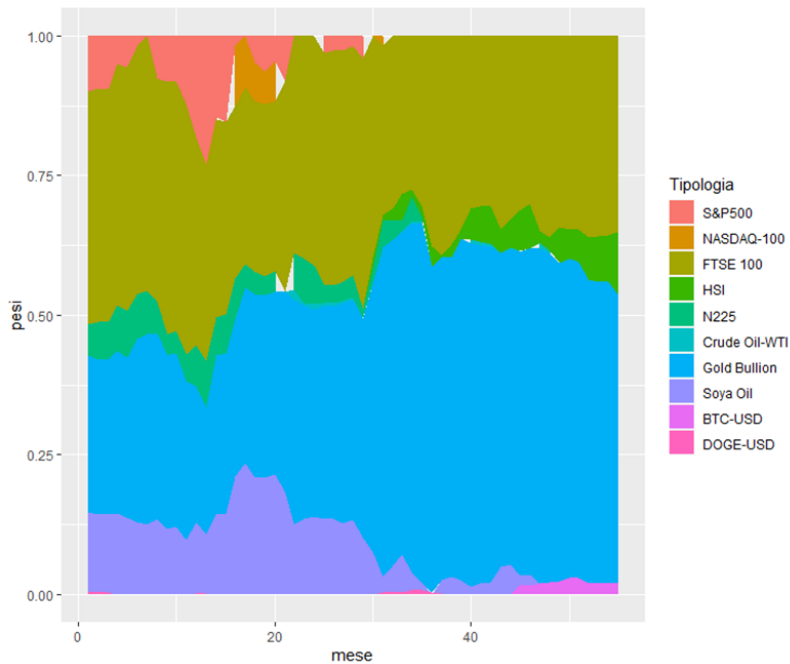


Figura 5.2: Rappresentazione dell'evoluzione dei pesi per il portafoglio GMV con solo posizioni lunghe.

Passando al portafoglio GMV *long only*, si può notare come gli asset presenti maggiormente rimangano FTSE 100 e Gold Bullion. Le due criptovalute sono ancora gli asset presenti in minor quantità all'interno del portafoglio. Anche in questo caso è presente una variazione nell'andamento dei pesi dopo il trentesimo mese.

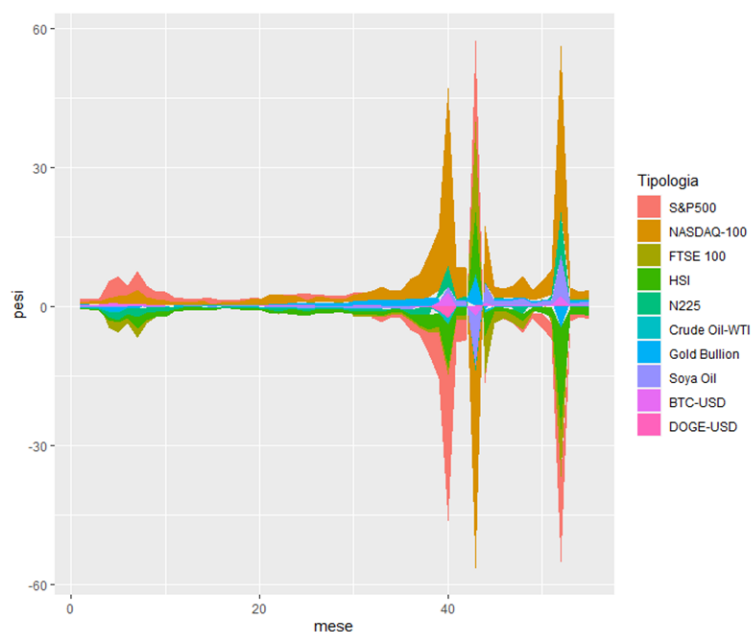


Figura 5.3: Rappresentazione dell'evoluzione dei pesi per il portafoglio TO.

Il portafoglio TO assume posizioni estreme e risulta di difficile interpretazione ma analizzando i valori medi assunti dai 10 asset si nota che gli indici azionari americani sono i più presenti all'interno del portafoglio ma lo S&P500 viene sempre venduto allo scoperto ed assume quindi pesi negativi. Anche l'asset HSI presenta pesi negativi molto importanti, invece le criptovalute rimangono presenti in minor quantità all'interno del portafoglio.

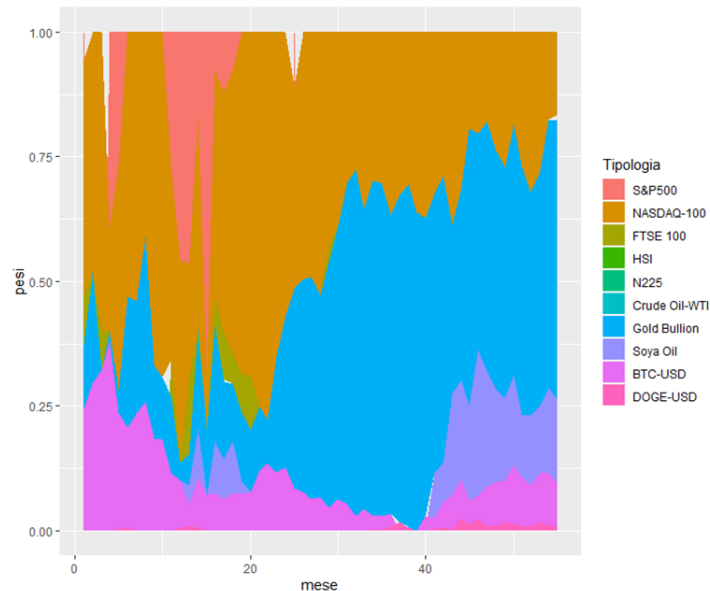


Figura 5.4: Rappresentazione dell'evoluzione dei pesi per il portafoglio TO con solo posizioni lunghe.

Nel portafoglio TO *long only* la composizione cambia parecchio. Gli asset con peso maggiore sono NASDAQ 100 e Gold Bullion. Invece, HSI e N225 hanno pesi praticamente pari a 0. In questo caso le criptovalute assumono pesi bassi ma maggiori che nei portafogli precedenti. Lo S&P500 è presente nel portafoglio fino al trentesimo mese ma poi il suo peso diventa pari a 0.

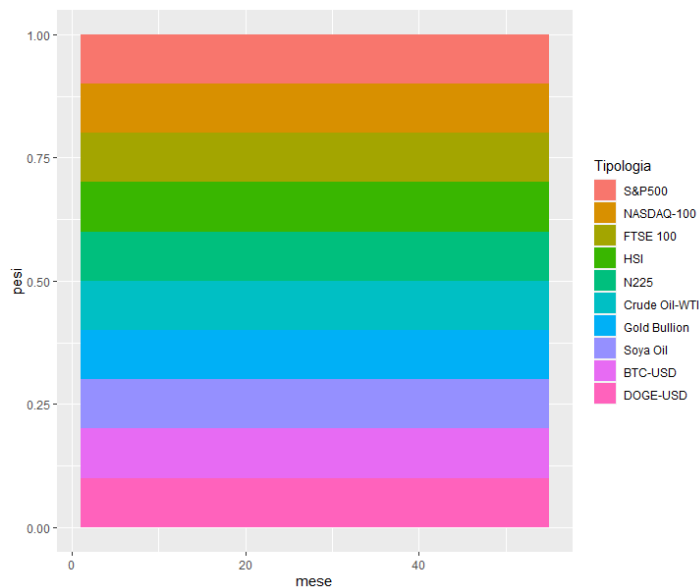


Figura 5.5: Rappresentazione dell'evoluzione dei pesi per il portafoglio equamente pesato.

Come previsto nel portafoglio equamente pesato tutti gli asset hanno peso costante pari a 0.1.

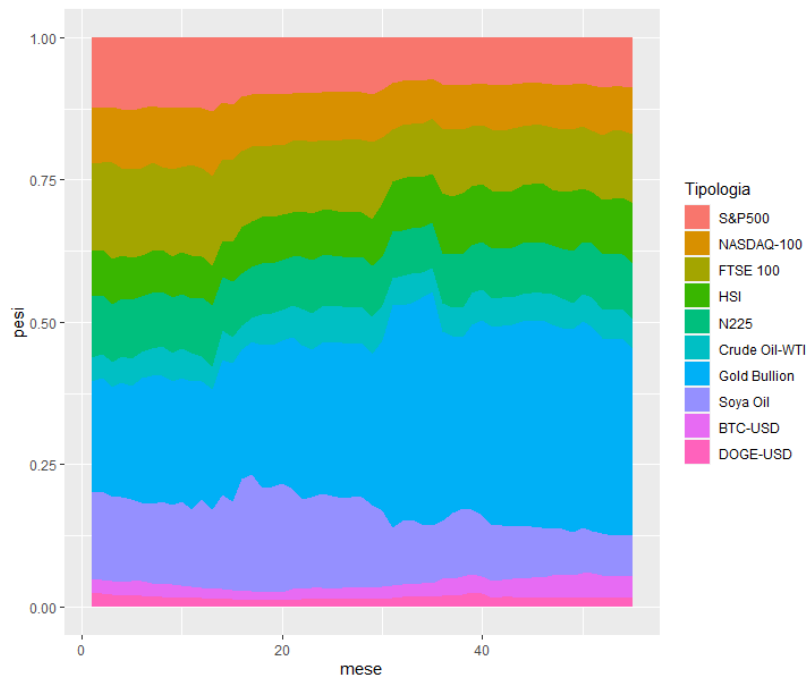


Figura 5.6: Rappresentazione dell'evoluzione dei pesi per il portafoglio Risk Parity.

Nel portafoglio Risk Parity l'andamento dei pesi appare più regolare, e gli asset sono presenti in quantità simili tra loro e con pesi sempre positivi. Gold Bullion e Soya Oil assumono comunque i pesi maggiori all'interno del portafoglio. Tra il trentesimo ed il quarantesimo mese si osserva una variazione nelle composizioni dei portafogli.

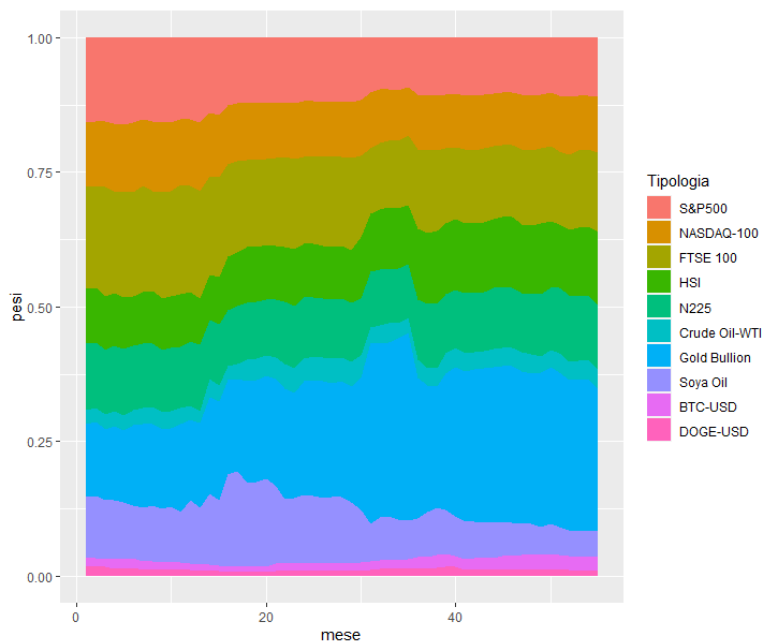


Figura 5.7: Rappresentazione dell'evoluzione dei pesi per il portafoglio Risk Budgeting.



L'andamento dei pesi per il portafoglio Risk Budgeting è molto simile a quello Risk Parity. Anche in questo caso sono presenti solo posizioni lunghe e gli asset con i pesi maggiori sono Gold Bullion e FTSE 100. Le criptovalute hanno un peso poco rilevante all'interno del portafoglio.

In generale per tutte le tipologie di portafoglio si può notare come gli asset più presenti siano Gold Bullion e gli indici azionari americani. Le criptovalute invece hanno pesi sempre molto bassi e questo è dovuto alla loro elevata volatilità che comporta una presenza inferiore in termini di quantità. Nei portafogli GMV e TO sono presenti posizioni corte di alcuni titoli che rendono la composizione del portafoglio più azzardata e di difficile realizzazione in alcuni casi. In generale merci e indici azionari si spartiscono il peso equamente. Per quanto riguarda l'andamento e la variazione nei pesi nel corso del tempo si può notare come essi varino parecchio in seguito al trentesimo mese che corrisponde a marzo 2020. Si può dedurre che la crisi economica dovuta all'epidemia di coronavirus abbia avuto un impatto notevole sul mondo della finanza, come verrà ribadito nelle analisi successive.

Una seconda analisi che si può effettuare sui pesi dei portafogli è l'analisi del turnover. Questo indicatore rappresenta la quota di portafoglio che è stata "ruotata" ovvero sostituita con altri titoli o forme di investimento. Il turnover è quindi una misura dell'intensità dell'attività di negoziazione svolta per il portafoglio. Un turnover elevato è sinonimo di un volume consistente di acquisti e vendite di titoli. Con i dati a disposizione, si può misurare se la rotazione dei portafogli sia più o meno rilevante e se passando dal portafoglio azionario al portafoglio completo il turnover aumenti o diminuisca.

Il turnover viene misurato tra il tempo  $t$  ed il tempo  $t + 1$ , quindi ci saranno un totale di 55 osservazioni.

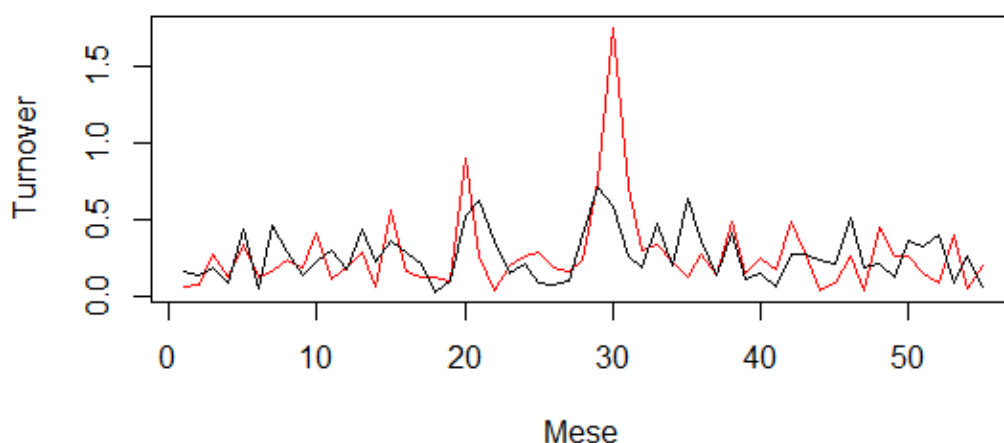


Figura 5.8: Rappresentazione del turnover per il portafoglio GMV azionario (in rosso) e GMV completo (in nero).

L'evoluzione del turnover nel corso del tempo per i due portafogli mostra come i valori siano abbastanza costanti tranne che nel periodo centrale, attorno al trentesimo mese. Il valore medio del turnover nei due casi è molto simile ed infatti vale 0.2678 e 0.2615. Nel primo portafoglio il valore massimo 1.7558 ed il valore minimo 0.02898 sono molto più distanti dalla media rispetto all'altro portafoglio in cui valgono 0.7055 e 0.01529. A conferma di ciò la varianza nel primo portafoglio vale 0.07439 mentre nel secondo è minore a pari a 0.02825. Si può quindi affermare che

l'introduzione di merci e criptovalute nel portafoglio abbia, in questo caso, stabilizzato il suo turnover.

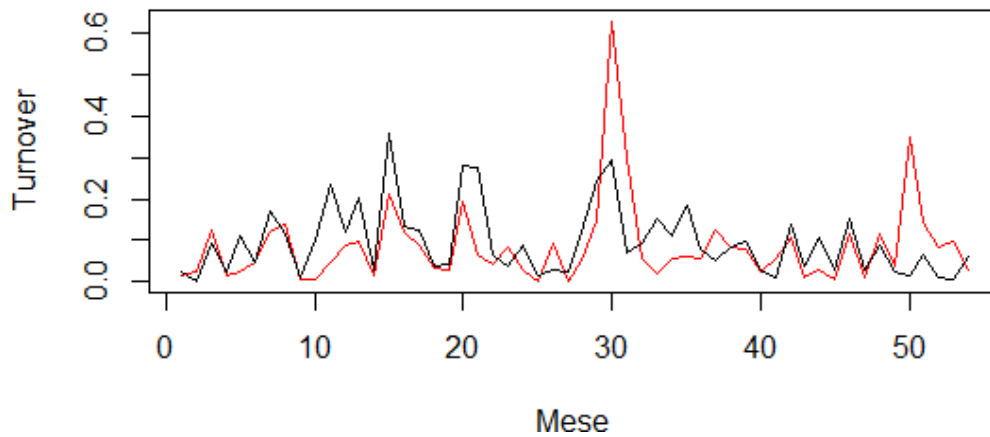


Figura 5.9: Rappresentazione del turnover per il portafoglio GMV azionario (in rosso) e GMV completo (in nero) nel caso in cui è vietata la vendita allo scoperto.

Passando ai portafogli GMV in cui sono presenti solo posizioni lunghe ci si aspetta che i valori del turnover siano inferiori rispetto al caso precedente, non essendo presenti pesi con valore inferiore a zero. Infatti il valore medio del turnover nei due casi è 0.08559 e 0.09601. Nel caso del portafoglio azionario i valori sembrano essere più instabili e, nuovamente, c'è un picco per il trentesimo mese (0.6292) mentre nel caso del portafoglio completo i valori variano meno. Infatti la varianza del turnover del primo portafoglio è 0.01058 e quella del secondo 0.006986.

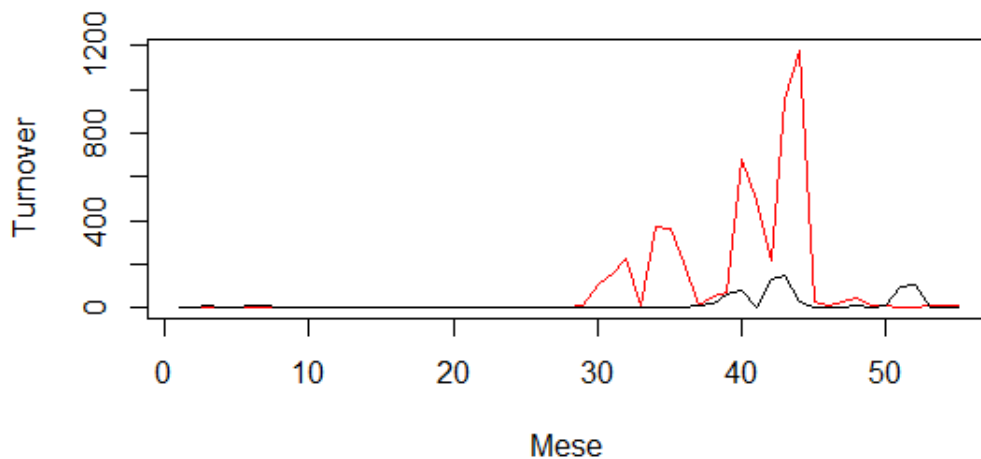


Figura 5.10: Rappresentazione del turnover per il portafoglio TO azionario (in rosso) e TO completo (in nero).

Passando al portafoglio di massimo trade-off, l'indicatore del turnover perde di significato a causa delle composizioni estreme dei portafogli. Infatti i portafogli successivi al trentesimo mese risultano totalmente irrealizzabili e di conseguenza il calcolo di questo indicatore diventa difficile. In ogni caso, anche per questa tipologia di portafogli, il valore del turnover medio nel primo caso (96.2731) è maggiore che nel secondo (14.4429). L'unico indicatore attendibile risulta essere la mediana delle due sequenze pari a 2.6155 nel caso del portafoglio azionario e pari a 2.5757 nel caso del portafoglio completo.

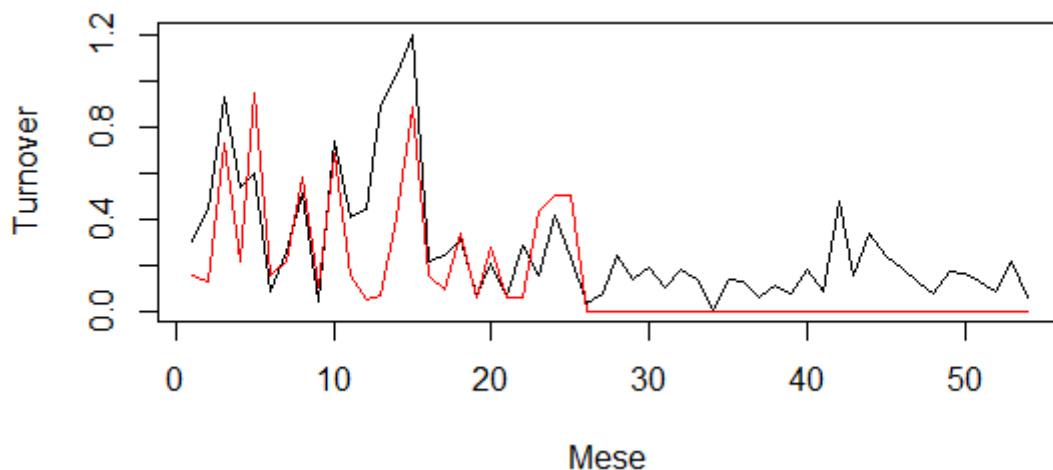


Figura 5.11: Rappresentazione del turnover per il portafoglio TO azionario (in rosso) e TO completo (in nero) nel caso in cui è vietata la vendita allo scoperto.

Nel caso dei portafogli di massimo trade off con solo posizioni lunghe la situazione cambia completamente visto che i valori sono decisamente più bassi. Nel caso del portafoglio azionario il valore medio del turnover è pari a 0.14902 con valori pari a 0 dal venticinquesimo mese in poi, mentre nel caso del portafoglio completo il turnover medio è pari 0.2806. In questo caso per la prima volta il portafoglio completo ha un valore di turnover superiore a quello del portafoglio azionario. Questo dato non risulta molto affidabile a causa delle particolari composizioni di portafogli nel caso di soli titoli azionari che hanno fatto abbassare il valore del turnover. Le varianze delle sequenze di dati sono molto basse e rispettivamente pari a 0.05971 e 0.06891.

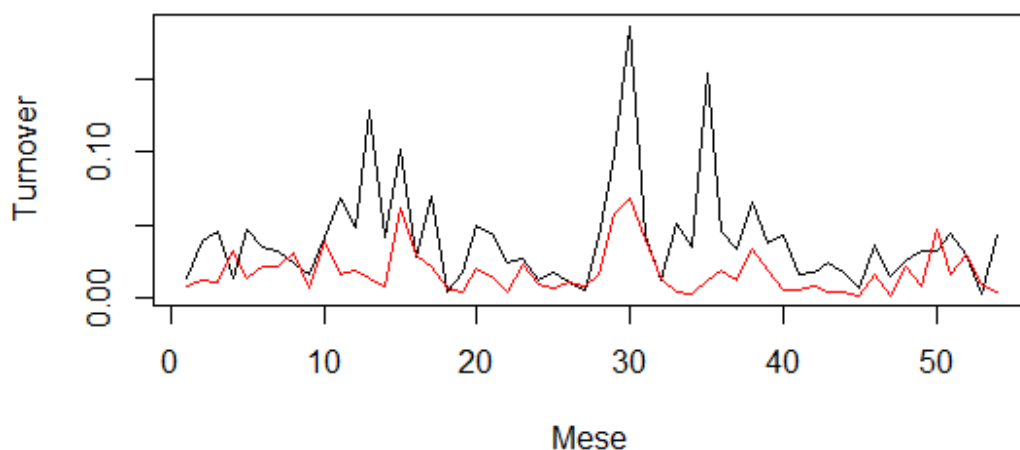


Figura 5.12: Rappresentazione del turnover per il portafoglio Risk Parity azionario (in rosso) e Risk Parity completo (in nero).

I portafogli Risk Parity risultano essere molto stabili e le composizioni non sembrano variare molto nel tempo. Infatti il valore di turnover medio nel caso del portafoglio azionario vale 0.01728 e nel caso del portafoglio completo vale 0.04043. Anche le varianze assumono valori molto bassi pari a 0.000234 e 0.001278. Come nei casi precedenti il valore massimo si ha durante il trentesimo mese.

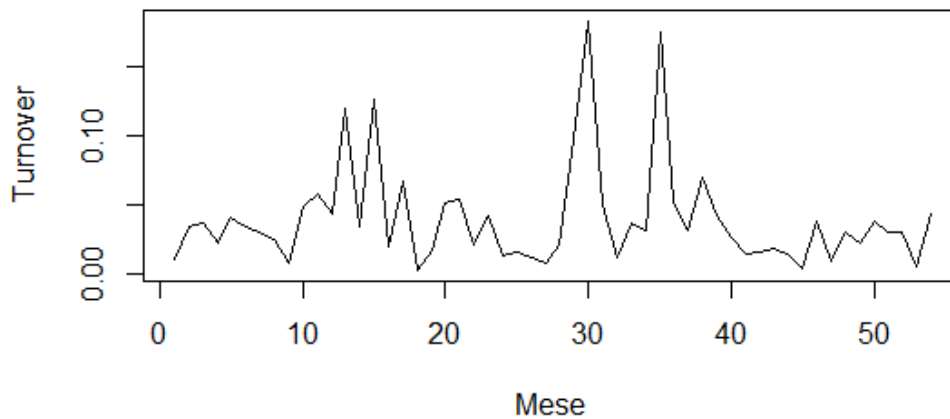


Figura 5.13: Rappresentazione del turnover per il portafoglio Risk Budgeting con tutti i titoli disponibili.

Nel caso del portafoglio Risk Budgeting non può essere effettuato un confronto tra il portafoglio completo ed il portafoglio azionario perché quest'ultimo non è presente all'interno dell'analisi. Si può notare come l'evoluzione del turnover sia molto simile a quella del portafoglio Risk Parity, questo perché le composizioni dei due portafogli differiscono di poco. Il valore medio è molto simile ed infatti è pari a 0.039436, mentre la varianza assume il valore di 0.001401. L'andamento appare abbastanza costante tranne che nel periodo centrale ed ancora nel trentesimo mese.

Il turnover può essere considerato un indicatore dei costi transazione, ma ha dei limiti. Esso presenta una capacità predittiva della bontà del portafoglio minore rispetto ad altri indicatori, ma ha una certa validità per il settore azionario per portafogli non troppo ampi. In generale, si può affermare che un investitore debba stare alla larga da portafogli con livelli di turnover troppo alti visto che sono penalizzati da costi di gestione elevati.

I portafogli con strategie più attive, alti costi e alto turnover, presentano una più alta dispersione dei rendimenti rispetto a quelli con valori più bassi di questi fattori. Una maggiore dispersione dei rendimenti significa naturalmente profitti più alti in alcuni periodi ma anche perdite più alte in altri. La volatilità non è mai piacevole, soprattutto al termine di un investimento e quindi un valore basso di turnover è da valutare positivamente.

Il turnover è inoltre utile per capire la strategia di gestione da parte dell'investitore e per vedere se possiede una visione a lungo termine. È possibile però che risulti un tasso di rotazione elevato anche quando le principali posizioni non cambiano molto, questo perché può essere venduto un solo titolo progressivamente e riacquistato quando serve. Per questo il turnover viene spesso affiancato ad altri indicatori per una sua migliore interpretazione.

Analizzando i risultati ottenuti si evince che nei casi del portafoglio GMV e del portafoglio GMV *long only* i valori per il portafoglio azionario e per il portafoglio completo sono molto simili. Non sembra quindi che l'aggiunta di merci e criptovalute abbia abbassato il livello di turnover del portafoglio migliorandone le prestazioni. Nel caso del portafoglio di TO invece, passando dal paniere azionario al paniere completo il valore del turnover diminuisce considerevolmente ma i numeri risultano troppo elevati e difficilmente interpretabili. Questo a causa dei portafogli estremi che presentano posizioni troppo lunghe e troppo corte che non potranno mai essere realizzate da un investitore. Per i portafogli ERC la situazione invece è opposta, infatti il valore di turnover cresce passando dal portafoglio azionario al portafoglio completo ma essendo i valori abbastanza bassi non sembra esserci una particolare differenza di performance tra le due tipologie di portafogli. Dall'analisi

grafica il portafoglio Risk Budgeting risulta avere valori di turnover molto simili al portafoglio Risk Parity.

Basandosi solo sull'indicatore turnover non si può affermare se l'aggiunta di merci e criptovalute abbia portato un miglioramento in termini di efficienza al portafoglio composto solo da indici azionari. È da notare però, come l'andamento dei grafici cambi notevolmente dopo il trentesimo mese che corrisponde a marzo 2020, ovvero all'inizio della crisi economica dovuta al coronavirus. È chiaro come la pandemia abbia influito sull'economia mondiale e sui prezzi degli asset presi in considerazione che sono cambiati notevolmente e ripetutamente nei mesi successivi. Questi cambiamenti hanno influito sul risultato delle analisi che sono comunque da considerare corrette e attendibili ma tenendo conto della situazione instabile e anormale dell'economia mondiale.

## 5.2 Analisi delle performance dei portafogli

Dopo aver analizzato le composizioni delle varie tipologie dei portafogli creati in precedenza, è di interesse valutare le performance che questi portafogli avrebbero generato nella realtà. Per fare ciò i pesi di ogni portafoglio al tempo  $t$  sono stati moltiplicati per la serie di rendimenti al tempo  $t + 1$ . In questo modo, i dati utilizzati per costruire i portafogli ottimi sono diversi dai dati utilizzati per valutarne le performance. Si ottiene così per ogni tipologia di portafoglio una serie di rendimenti di 55 osservazioni mensili che può essere studiata ed analizzata.

L'indicatore principale per valutare una serie di rendimenti di un portafoglio nel tempo è il rendimento cumulato. Il rendimento cumulato rappresenta l'evoluzione di un investimento unitario al tempo zero. Infatti, questo indicatore viene utilizzato quando l'investitore è interessato alle performance di investimenti nel lungo periodo. I rendimenti cumulati si basano sull'ipotesi per cui i profitti degli investimenti vengono reinvestiti nel portafoglio e ricollegati nel tempo. L'incremento o il decremento alla fine di ogni periodo, che viene misurato dal rendimento, viene pensato come se fosse un utile che viene reinvestito nel portafoglio nel periodo successivo, e quindi accumulato nel corso del tempo. Il rendimento cumulato è quindi l'importo totale del rendimento generato da un investimento entro un arco temporale specifico. Solitamente questo indicatore è calcolato su base annua o su periodi più lunghi ma non è insolito per un investitore osservare il rendimento generato durante un trimestre o per i primi sei mesi di detenzione di un investimento. Questo è utile per avere un'idea del rendimento dell'investimento e se tale livello rientri nelle aspettative dell'agente finanziario.

Nell'analisi di portafoglio il calcolo prevede di ipotizzare un investimento pari ad 1 per il primo periodo e di calcolare il rendimento cumulato per tutto l'arco temporale a disposizione che è pari a  $N=55$  mesi. Il rendimento cumulato  $Rcum$  al tempo  $t$  è pari alla produttoria dei rendimenti ai tempi precedenti a cui viene sommato 1:

$$Rcum = \prod_{i=1}^N (1 + R_i)$$

L'obiettivo dell'analisi è valutare se, per le varie tipologie di portafoglio, l'aggiunta di merci e criptovalute al paniere comporti un rendimento cumulato maggiore, indicando quindi un miglioramento delle performance del portafoglio.

Nel seguito sono rappresentati i grafici dei rendimenti cumulati per il confronto a due a due tra le diverse tipologie di portafoglio completo ed azionario.

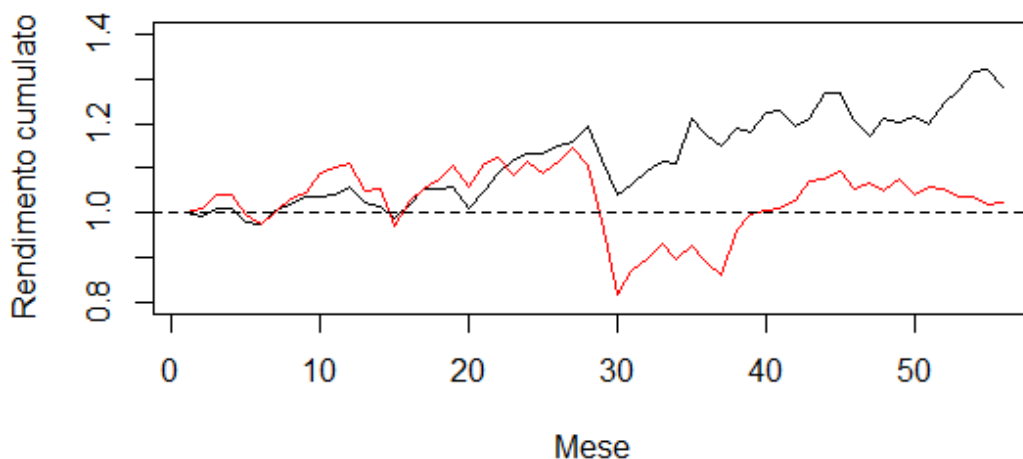


Figura 5.14: Rappresentazione del rendimento cumulato per il portafoglio GMV azionario (in rosso) e GMV completo (in nero).

Nel caso dei portafogli GMV il rendimento cumulato per il portafoglio azionario assume un andamento simile a quello del portafoglio completo fino al trentesimo mese per poi abbassare i suoi valori nei periodi successivi. L'andamento del rendimento cumulato per il portafoglio completo, invece, è sempre crescente. A termine del periodo si può quindi affermare che la gestione del portafoglio GMV completo abbia portato un profitto positivo mentre nel caso del portafoglio GMV il guadagno sembra essere molto basso.

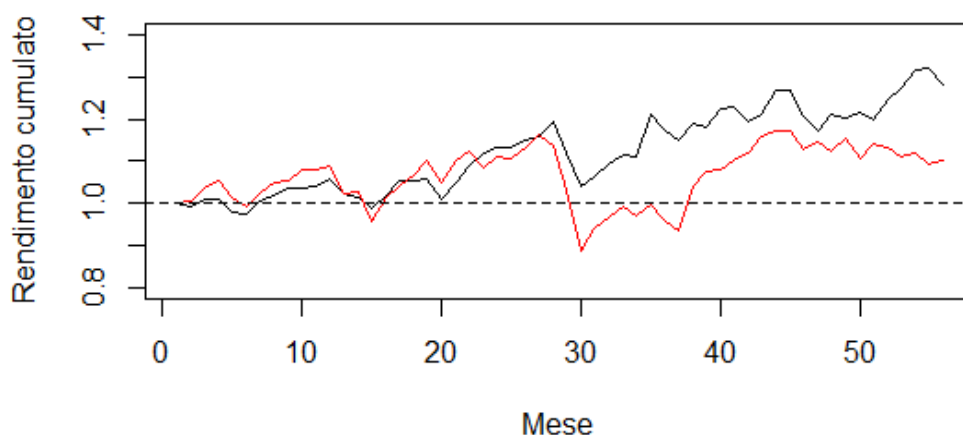


Figura 5.15: Rappresentazione del rendimento cumulato per il portafoglio GMV azionario (in rosso) e GMV completo (in nero) nel caso in cui è vietata la vendita allo scoperto.

L'andamento del rendimento cumulato per il portafoglio GMV long only risulta essere simile a quello della tipologia di portafoglio precedente. Anche in questo caso il portafoglio completo e quello

azionario hanno rendimenti cumulati simili fino al trentesimo mese. Dal mese successivo il portafoglio completo risulta avere performance leggermente migliori mantenendo sempre il trend positivo. Anche in questo caso l'aggiunta di merci e criptovalute al paniere ha avuto un effetto positivo sulle performance del portafoglio.

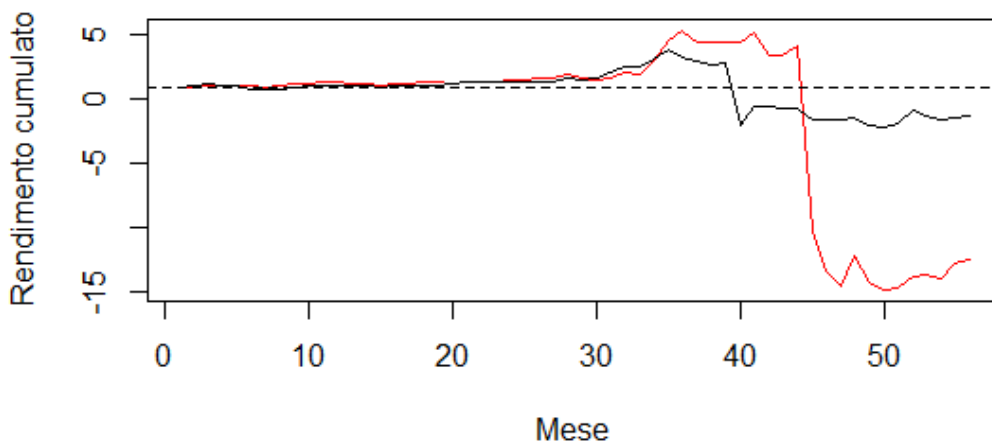


Figura 5.16: Rappresentazione del rendimento cumulato per il portafoglio TO azionario (in rosso) e TO completo (in nero).

Nel caso del portafoglio TO le performance al termine del periodo considerato risultano essere negative perché inferiori all'investimento unitario iniziale. La perdita relativa al portafoglio completo, però, è inferiore a quella del portafoglio azionario. L'andamento del rendimento cumulato nei due casi è inizialmente simile e positivi per poi divergere dal trentacinquesimo mese in poi.

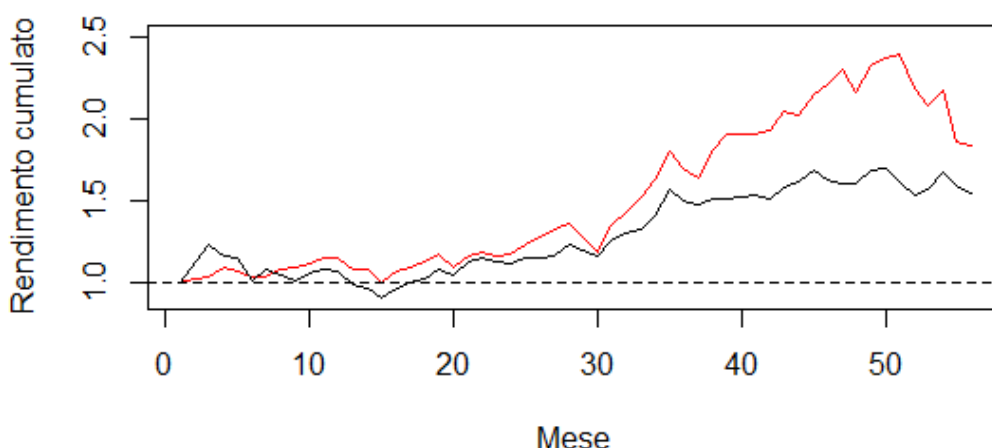


Figura 5.17: Rappresentazione del rendimento cumulato per il portafoglio TO azionario (in rosso) e TO completo (in nero) nel caso in cui è vietata la vendita allo scoperto.

Passando al portafoglio TO con solo posizioni lunghe le performance tornano ad essere positive. I due andamenti dei rendimenti cumulati sono simili fino al trentesimo mese, dopo il quale i rendimenti del portafoglio azionario sono maggiori di quelli del portafoglio completo. In questo caso

quindi l'aggiunta di merci e criptovalute al paniere ha comportato un peggioramento delle performance del portafoglio.

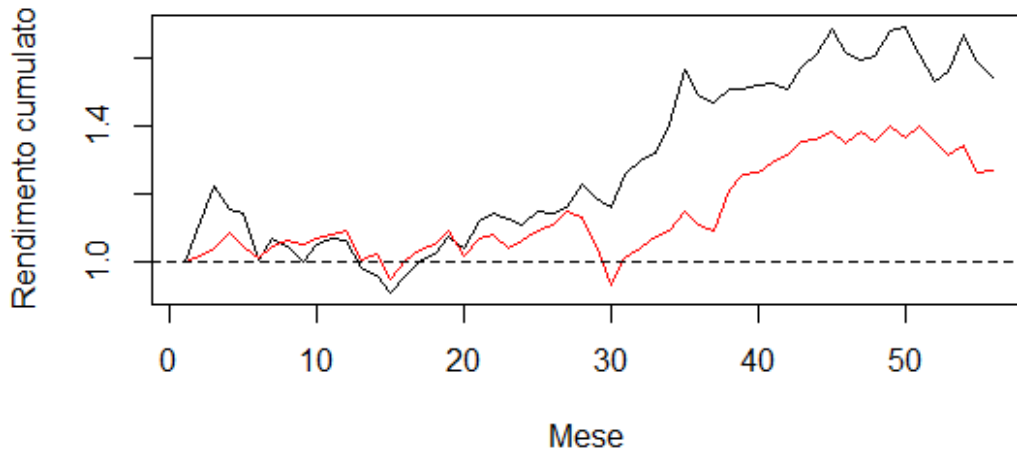


Figura 5.18: Rappresentazione del rendimento cumulato per il portafoglio equamente pesato azionario (in rosso) ed equamente pesato completo (in nero).

Anche per il portafoglio equamente pesato gli andamenti del rendimento cumulato per il portafoglio azionario e per il portafoglio completo sono molto simili fino al trentesimo mese. Successivamente i rendimenti del portafoglio completo risultano essere maggiori. Nel periodo considerato i rendimenti non scendono quasi mai sotto la soglia del livello unitario rendendo quindi il portafoglio equamente pesato un buon investimento.

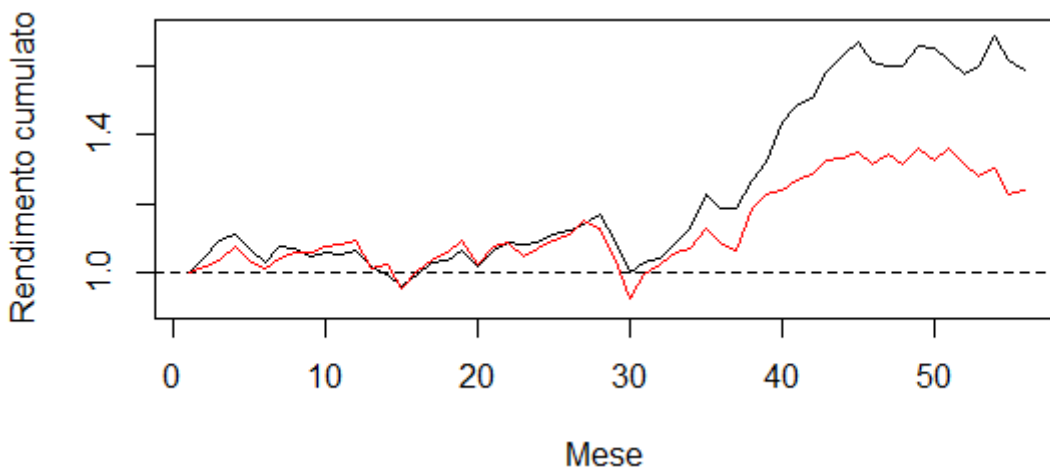


Figura 5.19: Rappresentazione del rendimento cumulato per il portafoglio Risk Parity azionario (in rosso) e Risk Parity completo (in nero).

Anche il portafoglio Risk Parity sembra essere un buon investimento a livello di rendimenti cumulati. Nuovamente, il portafoglio completo mostra performance migliori del portafoglio azionario anche



se i due andamenti sono simili per la prima parte del periodo considerato. Anche in questo caso i valori dei rendimenti cumulati non scendono quasi mai sotto la soglia pari a 1.

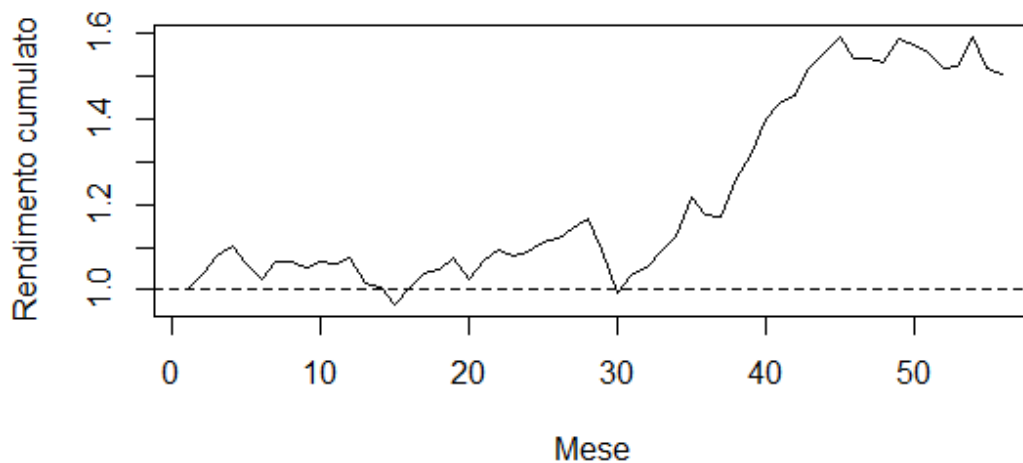


Figura 5.20: Rappresentazione del rendimento cumulato per il portafoglio Risk Budgeting completo.

L'andamento dei rendimenti cumulati per il portafoglio Risk Budgeting completo è molto simile a quello del portafoglio Risk Parity, questo perché le composizioni delle due tipologie di portafoglio sono simili. I rendimenti non si allontanano molto dal livello unitario se non nella seconda parte del periodo dove crescono lentamente per poi stabilizzarsi.

Il rendimento cumulato indica quindi se un investimento ha generato un profitto od una perdita nel periodo preso in considerazione. Analizzando le varie tipologie di portafoglio sono nel caso del portafoglio TO *long only* il rendimento cumulato del portafoglio azionario è maggiore di quello del portafoglio completo. In tutti gli altri casi quindi l'aggiunta di merci e criptovalute al portafoglio ha generato un aumento delle performance. Tutti i portafoglio al termine del periodo avevano un rendimento cumulato superiore ad 1 tranne che nel caso del portafoglio TO. Questo significa che nel lungo periodo la maggior parte degli investimenti effettuati ha generato guadagni.

Il portafoglio che al termine dei 55 mesi ha un rendimento cumulato maggiore è il portafoglio TO azionario con solo posizioni lunghe. In genere, il resto dei portafogli al termine del periodo ha un rendimento cumulato che si aggira attorno a 1.5.

Nell'analisi dei rendimenti cumulati l'effetto della crisi iniziata a marzo 2020 è ancora più evidente che nel caso del turnover. Tutti portafogli hanno riscontrato un aumento delle performance dall'inizio della crisi, tranne che per il portafoglio TO. Sembra quindi che l'instabilità economica abbia avuto effetti positivi per la gestione dei portafogli.

Ulteriori analisi possono essere effettuate sui rendimenti dei portafogli utilizzando l'indicatore chiamato indice di Sharpe. Questo indice rappresenta una misura utilizzata per analizzare le performance di un portafoglio, o di un investimento in generale, tenendo conto anche del suo

rischio. È un indicatore tecnico che misura l'eccesso di rendimento, rispetto al tasso privo di rischio, ottenuto da un portafoglio per unità di rischio. L'indice di Sharpe è così definito:

$$\text{SharpeRatio} = \frac{R_p - r_f}{\sigma_p}$$

dove  $R_p$  indica il rendimento di un portafoglio in un determinato momento,  $r_f$  è il tasso privo di rischio e  $\sigma_p$  indica la volatilità (deviazione standard) del portafoglio. Il tasso privo di rischio (in inglese *risk free*) rappresenta il tasso di interesse di un'attività con rischio molto basso, praticamente nullo. Solitamente, nella pratica, i tassi privi di rischio corrispondono al rendimento di titoli di stato a breve termine di paesi con una probabilità di default sostanzialmente pari a 0. Oppure può essere approssimato dal tasso di interesse di un'obbligazione a brevissima scadenza.

L'indice di Sharpe è adatto a valutare le performance complessive di un portafoglio completo per un investitore e vanno preferiti portafogli con un valore di Sharpe più elevato. Come puntualizzato nei capitoli precedenti, in finanza più è rischioso un investimento più è alto il rendimento atteso, poiché un investitore si aspetta di guadagnare di più rischiando maggiormente. Grazie all'indice di Sharpe è possibile confrontare i guadagni di portafogli con rischi diversi visto che questo rapporto aggiusta il rendimento per il rischio. Questo indicatore rappresenta quindi la bontà di un investimento e quanta redditività addizionale è stata ottenuta investendo in attività finanziarie più rischiose. Il valore dell'indice di Sharpe di un portafoglio è comunque relativo e assume significato solo se confrontato con altre strategie di investimento.

Nel seguito vengono quindi rappresentati gli andamenti dell'indice di Sharpe per le varie tipologie di portafoglio create nell'analisi, nel corso dei 55 mesi. In questo caso l'indice di Sharpe è stato creato a posteriori per valutare le performance dei portafogli ottimi applicati alla realtà e facendo una distinzione tra portafoglio azionario e portafoglio completo. Il tasso privo di rischio è stato posto pari a 0.01 e tenuto costante per tutto l'arco temporale considerato.

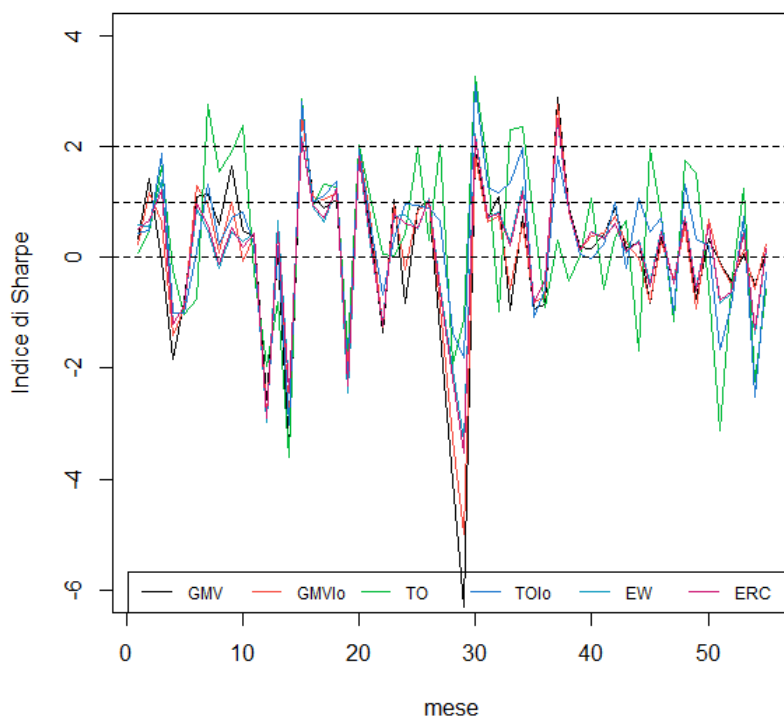


Figura 5.21: Rappresentazione degli indici di Sharpe per le varie tipologie di portafogli azionari.

Come si può osservare dal grafico le diverse tipologie di portafoglio portano a indici di Sharpe molto simili tra loro. Gli andamenti nel corso del tempo si sovrappongono tra loro mostrando traiettorie quasi equivalenti.

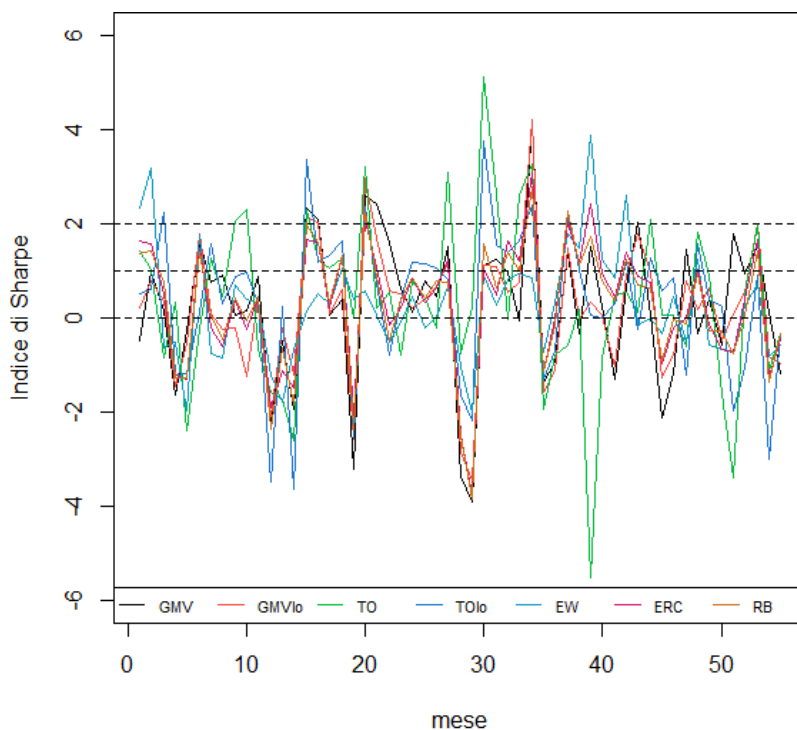


Figura 5.22: Rappresentazione degli indici di Sharpe per le varie tipologie di portafogli completi.

Anche nel caso del portafoglio completo le traiettorie degli indici di Sharpe delle varie tipologie analizzate sono simili tra loro. Solo il portafoglio TO sembra avere un andamento più accentuato sia per i valori positivi, sia per i valori negativi.

Nel complesso confrontando i due grafici non appaiono differenze evidenti tra i portafogli azionari ed i portafogli completi anche se le performance di questi ultimi sono leggermente superiori. Per analizzare i valori bisogna considerare che se un indice di Sharpe è negativo significa che il tasso di rendimento del portafoglio è inferiore al tasso privo di rischio e questo dato non porta alcuna informazione significativa. Un indice compreso tra 0 e 1 è considerato discreto, un indice tra 1 e 2 è considerato buono ed un indice superiore a 2 è considerato molto buono. I portafogli analizzati hanno indici di Sharpe spesso inferiori a 0 e questo perché in quei momenti i portafogli avevano rendimenti inferiori al tasso *risk free*. Negli altri periodi invece presentano spesso indici di Sharpe compresi tra 0 e 2 dimostrandosi buoni investimenti. Gli andamenti risultano abbastanza irregolari e gli indici in alcuni casi raggiungono picchi elevati soprattutto nella seconda metà del periodo probabilmente a causa della crisi finanziaria che ha coinvolto l'economia mondiale in seguito alla pandemia dovuta al coronavirus.

In aggiunta agli indicatori sopracitati, per valutare la redditività e la rischiosità dei portafogli è possibile analizzare i loro rendimenti e le loro deviazioni standard nel corso del tempo raggruppandoli in una tabella. Questi indicatori grezzi, presi singolarmente non hanno molto significato ma si possono osservare le differenze tra le varie tipologie di portafoglio. Le statistiche

descrittive prese in considerazione per i rendimenti e per le deviazioni standard sono: media, mediana, primo quartile, terzo quartile, deviazione standard, valore massimo e valore minimo.

	GMV	GMVlo	TO	TOlo	EW	ERC
Media	0.135013	0.256453	-32.601425	1.250439	0.521192	0.471916
Mediana	0.869118	0.975531	2.547612	1.865968	1.638877	1.589887
1° Quartile	-2.061425	-2.278410	-6.743073	-1.997097	-2.186753	-2.313083
3° Quartile	2.693216	2.607147	13.940487	4.581045	2.803295	2.812523
Dev. std.	4.352805	3.967762	489.504844	5.417505	4.178425	4.095316
Val. max	11.568313	11.151784	526.092601	14.178181	11.148153	11.189879
Val. min	-16.899551	-14.012365	-3459.8168	-14.320174	-11.349607	-11.773994

Tabella 5.1: Statistiche descrittive per i rendimenti dei portafogli azionari.

	GMV	GMVlo	TO	TOlo	EW	ERC	RB
Media	0.496681	0.389573	1.127099	0.909537	1.715493	0.910283	0.806556
Mediana	0.609607	0.722876	3.617133	0.8290	2.112748	1.330759	1.222260
1° Quartile	-0.85224	-1.571724	-4.35283	-2.498802	-4.259505	-1.714492	-1.167388
3° Quartile	2.66363	2.090033	11.3590	4.349912	6.005034	3.389247	3.351933
Dev. std.	2.947723	2.783967	33.8364	4.875741	7.787313	3.619167	3.538057
Val. max	8.742434	8.951749	111.7406	12.0259	24.9847	8.769762	8.128181
Val. min	-7.09094	-6.374182	-170.9963	-12.0288	-14.8610	-9.219177	-9.443261

Tabella 5.2: Statistiche descrittive per i rendimenti dei portafogli completi.

	GMV	GMVlo	TO	TOlo	EW	ERC
Media	3.225124	3.327050	95.044214	4.393181	3.799247	3.730675
Mediana	2.692947	2.824106	6.607154	4.377560	3.398510	3.314642
1° Quartile	2.431342	2.568843	3.438032	3.173634	3.241236	3.147288
3° Quartile	4.051183	4.148671	73.991968	5.700096	4.483471	4.438644
Dev. std.	0.873842	0.848398	286.5775	1.259599	0.727133	0.763618
Val. max	4.435664	4.472066	2042.5479	5.974518	4.855705	4.823117
Val. min	1.863753	1.913176	2.208653	2.048298	2.480743	2.351947

Tabella 5.3: Statistiche descrittive per le deviazioni standard dei portafogli azionari.

	GMV	GMVlo	TO	TOlo	EW	ERC	RB
Media	1.966616	2.116284	15.8818	12.4675	7.112929	2.847202	2.870349
Mediana	1.903342	2.115863	8.528621	6.34678	7.216766	2.812503	2.835336
1° Quartile	1.822826	1.860072	5.019345	3.05949	6.879197	2.396378	2.435868
3° Quartile	2.249674	2.436979	14.3544	12.5948	7.389982	3.359796	3.414203
Dev. std.	0.305155	0.316448	25.5748	22.4566	0.503487	0.501195	0.526633
Val. max	2.404946	2.545540	135.239	67.5667	7.823325	3.570318	3.686203
Val. min	1.366993	1.571511	2.234541	2.34345	5.708621	2.057232	1.990950

Tabella 5.4: Statistiche descrittive per le deviazioni standard dei portafogli completi.

Analizzando le tabelle si può osservare come i portafogli completi presentino rendimenti medi più elevati dei loro corrispettivi portafogli azionari. Contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, essi presentano anche deviazioni standard inferiori risultando quindi preferibili per un investimento. I rendimenti dei portafogli azionari hanno valori massimi e minimi più elevati, in valore assoluto, rispetto ai portafogli completi. Ciò significa che nel corso dell'investimento essi possono generare alti profitti ma anche perdite elevate. I portafogli completi sono quindi più sicuri e meno rischiosi essendo soggetti a meno variazioni nel corso del tempo. A conferma di ciò le deviazioni standard dei rendimenti dei portafogli completi sono inferiori a quelle dei portafogli azionari. Il portafoglio equamente pesato presenta rendimenti medi molto elevati e risulta essere molto stabile a livello di rischio, confermandosi essere un ottimo portafoglio da usare come benchmark data anche la sua facile realizzazione.

## 6 CONCLUSIONI

Uno degli obiettivi di questa analisi era lo studio e l'analisi di diversi metodi per la costruzione di un portafoglio finanziario. Per fare ciò sono state descritte diverse tipologie di portafoglio, le loro caratteristiche e le loro proprietà. Il passo successivo è stato creare i diversi portafogli ottimi partendo dai dati di rendimenti di strumenti finanziari realmente presenti sul mercato e studiare le loro composizioni. Una base consistente dello studio si basa sulle differenze a livello di pesi dei singoli strumenti tra il portafoglio azionario ed il portafoglio completo. L'obiettivo è quindi vedere come cambiano le composizioni dei portafogli se ad un paniere di cinque indici azionari vengono aggiunti asset diversificati come merci e criptovalute.

Per analizzare le composizioni di pesi è stato scelto come indicatore il turnover, ovvero una misura della rotazione del portafoglio: quanto cambiano i pesi nel tempo. Un livello di turnover basso è preferibile a un turnover più alto perché indica che i costi di gestione del portafoglio non saranno troppo elevati. Dalle analisi effettuate sulle varie tipologie di portafoglio non è stato però possibile concludere se l'aggiunta di merci e criptovalute abbassi in modo significativo il livello di turnover. In alcuni casi questo è dovuto alle composizioni irrealizzabili dei portafogli che non potranno mai essere create dagli investitori, in altri forse per via del basso numero di osservazioni effettuate. Per alcuni portafogli il turnover medio era più elevato nel caso del portafoglio azionario ma per altre tipologie era il contrario. Per raggiungere una conclusione serve quindi analizzare anche le performance dei portafogli creati.

Il principale indicatore delle performance scelto per l'analisi è il rendimento cumulato. Esso indica l'importo totale del rendimento generato da un investimento entro un periodo di tempo specifico dove l'investimento iniziale viene posto pari ad 1. Valori maggiori del rendimento cumulato sono preferibili a valori inferiori perché esso indica l'evoluzione dell'investimento nel tempo ed è importante che sia sempre positiva. In questo modo, se un investitore volesse vendere la sua posizione saprebbe che essere genererebbe un guadagno. Analizzando i rendimenti cumulati delle varie tipologie di portafogli, si può affermare che i valori siano maggiori nel caso del portafoglio completo rispetto a quello azionario. Questo avviene in quasi tutti i casi e permette quindi di dichiarare che l'aggiunta di merci e criptovalute abbia incrementato le performance del portafoglio.

Successivamente per analizzare i rendimenti è stato utilizzato l'indice di Sharpe. Tutte le tipologie di portafogli hanno ottenuto risultati abbastanza simili, ad eccezione del portafoglio di massimo trade-off che presenta valori più irregolari e che si discostano dal trend in positivo e negativo. L'indice non permette quindi di creare un ordinamento tra i diversi tipi di portafogli. Inoltre, non appaiono differenze palesi tra gli indici di Sharpe dei portafogli azionari e dei portafogli completi anche se questi ultimi in alcuni periodi ottengono performance migliori. Combinando questi risultati con le statistiche descrittive delle tabelle seguenti si osserva come i portafogli azionari abbiano, in alcuni casi, rendimenti più elevati ma anche varianze più elevate. Per questo motivo il rapporto tra rischio e rendimento in certi periodi risulta essere lo stesso. Da questi dati si può dedurre che i portafogli azionari, seppur in alcuni casi più efficienti, comportano anche rischi più elevati e quindi possono essere adatti a investitori più esperti.

Un altro aspetto da tenere in considerazione è la diversificazione. Come spiegato nei capitoli precedenti investire in asset provenienti da settori diversi permette di diminuire i rischi legati al portafoglio. Anche per questo motivo, per diminuire il rischio legato agli indici finanziari sono stati

aggiunti agli asset del portafoglio le merci e le criptovalute. Le indagini svolte inizialmente hanno dimostrato che questa aggiunta ha effettivamente portato ad una diminuzione del rischio e un aumento dei rendimenti medi. Infatti, considerando ad esempio il portafoglio GMV completo, se viene posizionato nel grafico rischio-rendimento si trova più in alto e più a sinistra del portafoglio GMV azionario. Questo significa che ha un rendimento maggiore ed un rischio inferiore ed è quindi preferito da ogni investitore.

Esiste quindi una tipologia di portafoglio nettamente migliore delle altre? Basandosi sui risultati ottenuti non è possibile dare una risposta secca a questa domanda perché dipende da vari fattori. Anche se i risultati dimostrano che un portafoglio più diversificato sia preferibile ad un portafoglio più semplice la scelta tra varianza minima globale, massimo trade-off e le altre tipologie dipende dalle caratteristiche dell'investitore e soprattutto dalla sua avversione al rischio. I risultati dimostrano che il miglior rendimento cumulato è stato ottenuto dal portafoglio di massimo trade-off ma esso è abbastanza rischioso quindi un investitore cauto potrebbe preferire il portafoglio a varianza minima globale che ha rendimenti leggermente inferiori ma anche un minor rischio. Anche nel caso dell'indice di Sharpe il portafoglio di massimo trade-off ha ottenuto il valore massimo ma anche il minimo nel periodo considerato e questo conferma l'affermazione precedente. Il portafoglio equamente pesato, nonostante la sua banale definizione, ha ottenuto buone performance e come precedentemente affermato spesso si rivela un ottimo benchmark di mercato. I portafogli Risk Parity e Risk Budgeting hanno performance simili in questa analisi, questo perché le composizioni dei portafogli erano molto somiglianti. Ciò può essere dovuto all'elevata variabilità delle criptovalute: un valore alto della varianza comporta un basso peso nel portafoglio per permettere il raggiungimento del livello di rischio generale desiderato. Il peso quindi degli indici azionari e delle merci era elevato sia nel caso dei portafogli Risk Budgeting, sia nel caso dei portafogli Risk Parity e ciò ha portato a composizioni simili. Un investitore che desidera avere più controllo sull'investimento e non si basa solo sul raggiungimento di un livello di rendimento o di rischio potrebbe scegliere queste ultime tipologie di portafoglio.

La scelta del portafoglio ottimo dipende quindi da vari fattori e non si può affermare che ne esista uno migliore in ogni situazione ma certamente la diversificazione è una strategia vincente a breve e a lungo termine.

## BIBLIOGRAFIA

- Azzalini, Further results on a class of distribution which includes the normal ones, Statistica, 1986.
- Elton, M. J. Gruber, S. J. Brown, W. N. Goetzmann, Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, Wiley, 2014.
- Mishkin, Eakins, Istituzioni e mercati finanziari, Pearson, 2019.
- Piccolo, Statistica, Il Mulino, 2010.
- Roncalli, Thierry, Introduction to Risk Parity and Budgeting, CRC Press, Boca Raton, 2014.
  
- Design of Risk Parity Portfolios, 31-05-2021, <https://cran.rproject.org/web/packages/riskParityPortfolio/riskParityPortfolio.pdf>
- Fast Design of Risk Parity Portfolios, Zé Vinícius and Daniel P. Palomar The Hong Kong University of Science and Technology (HKUST) , 05-10-2019, <https://cran.rproject.org/web/packages/riskParityPortfolio/vignettes/RiskParityPortfolio.html#what-is-a-risk-parity-portfolio>
- fPortfolio, Rmetrics - Portfolio Selection and Optimization, 26-03-2020, <https://rdr.io/cran/fPortfolio/src/R/risk-budgeting.R>
- Volatility Risk Budget, 03-01-2015, <https://rpubs.com/alexsoto22/RiskBudgetVol>