Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

A.A. 2022 / 2023

Relazione per la prova finale
«Analisi strutturale di un telaio di bicicletta»

Tutor universitario:

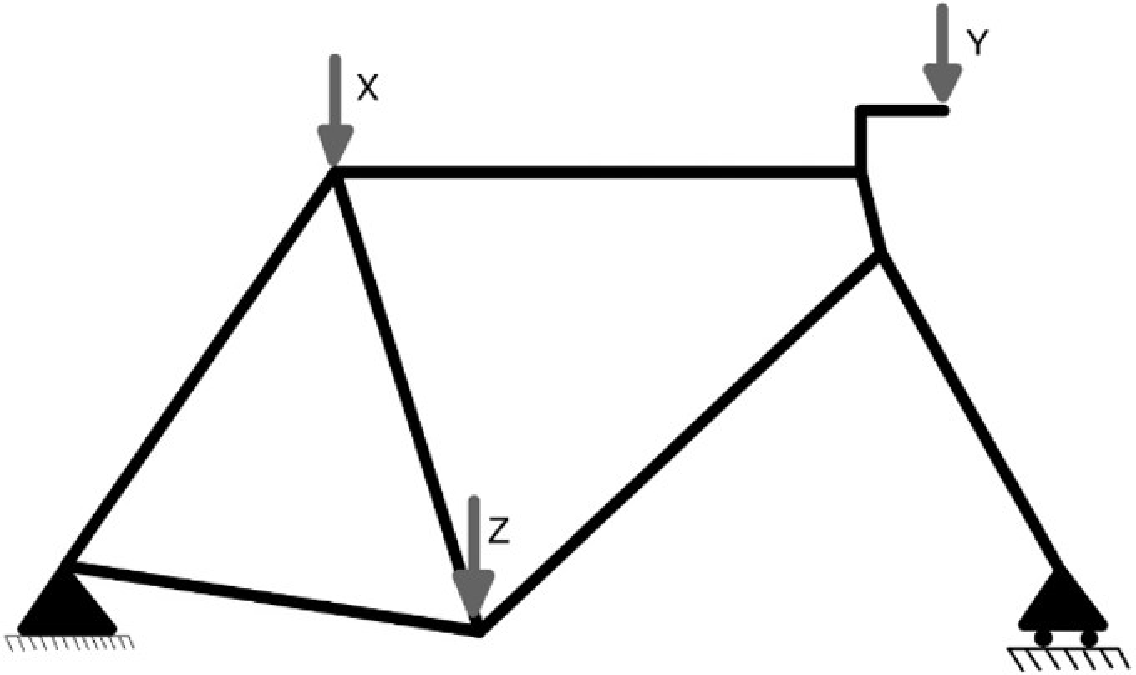
Prof. Ugo Galvanetto

Laureando:

Vittorio Candiello

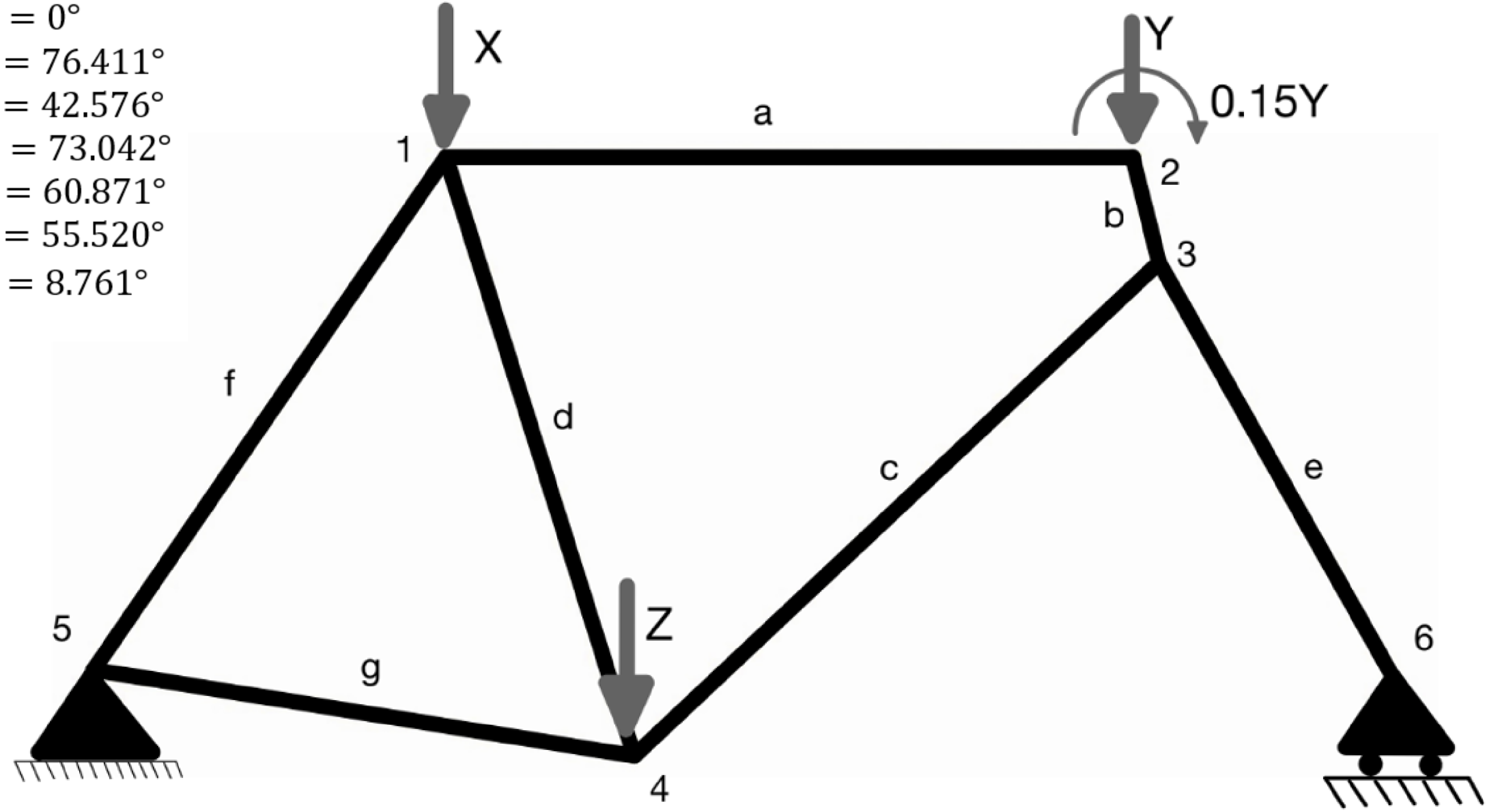
Padova, 29 settembre 2023

INTRODUZIONE

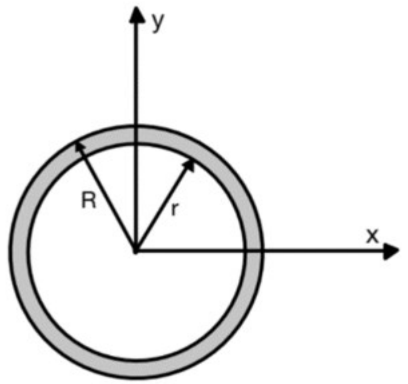


SCHEMA MODELLO

$\ell_a = 59\ cm$ $\alpha_a = 0°$
$\ell_b = 9\ cm$ $\alpha_b = 76.411°$
$\ell_c = 62\ cm$ $\alpha_c = 42.576°$
$\ell_d = 53\ cm$ $\alpha_d = 73.042°$
$\ell_e = 40\ cm$ $\alpha_e = 60.871°$
$\ell_f = 53\ cm$ $\alpha_f = 55.520°$
$\ell_g = 46\ cm$ $\alpha_g = 8.761°$



GEOMETRIA DELLE SEZIONI



$$I = \int_A y^2 dA = \iint y^2 dxdy = \int_0^{2\pi} \int_r^R (\rho sin\theta)^2 \rho \, d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (sin\theta)^2 d\theta \cdot \int_r^R \rho^3 d\rho = \int_0^{2\pi} [\frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos(2\theta)] d\theta \cdot \int_r^R \rho^3 d\rho =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} sin(2\theta)\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_r^R = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$$

$$I = \frac{\pi}{4}[R^4 - (R-s)^4] = \frac{\pi}{4}[4sR^3 - 6R^2s^2 + 4Rs^3 + s^4]$$

$$\text{S} \ll \text{R} \longrightarrow \quad I = \pi s R^3$$

$$\frac{I_j}{I_a} = \frac{R_j^3}{R_a^3} \longrightarrow I_j = \frac{D_j^3}{D_a^3} I_a$$

$D_a = 25\ mm;$ $I_a;$

$D_b = 30\ mm;$ $I_b = 1.7280 \times I_a;$

$D_c = 28\ mm;$ $I_c = 1.4049 \times I_a;$

$D_d = 28\ mm;$ $I_d = 1.4049 \times I_a;$

$D_e = 15\ mm;$ $I_e = 0.3024 \times I_a;$

$D_f = 13\ mm;$ $I_f = 0.2812 \times I_a;$

$D_g = 13\ mm;$ $I_g = 0.2812 \times I_a;$

$$A = 2\pi R \cdot s$$

MATERIALI

resistenza alle rotture	
Materiale	**Rm - N/mm2**
Tubazioni in Lega d'Acciaio	1200 - 1500
Tubazioni in Lega di Titanio	800 - 900
Tubazioni in Lega d'Alluminio	400 - 470

Tutte le aste composte dallo stesso materiale, quindi il risultato non dipende dalla rigidezza del materiale

In genere il carico critico è quello di snervamento, un po' più basso del carico di rottura (70%)

Tensione ammissibile di riferimento per l'acciaio: 800 MPa

INTRODUZIONE - METODO DI CALCOLO

Metodo delle Rotazioni:

Si ipotizza una infinita rigidezza assiale, ossia le aste non si possono deformare assialmente.

7 gradi di liberta:

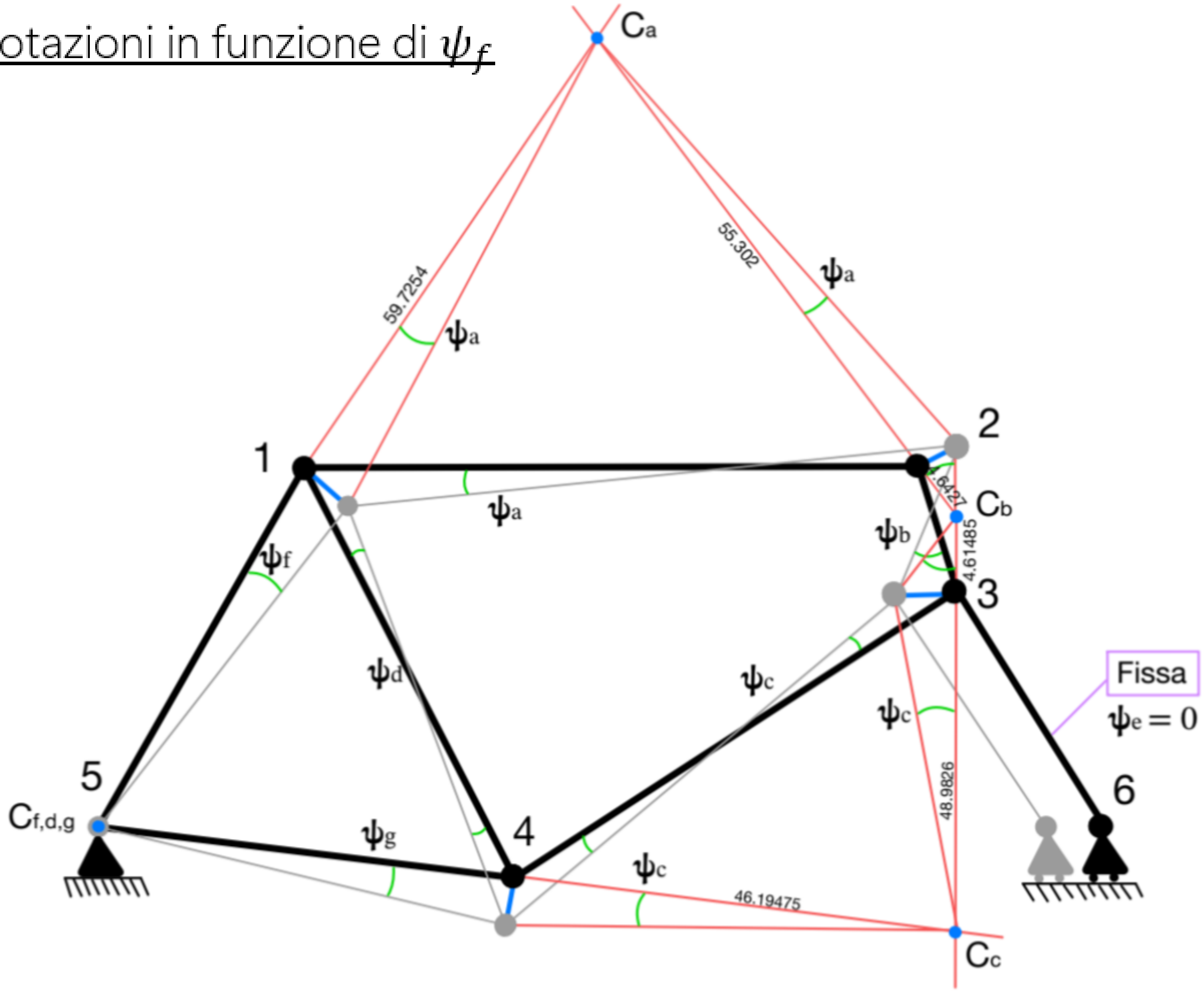
- 5 gradi per le rotazioni dei nodi liberi
- 2 gradi per le rotazioni rigide della reticolare associata

Per il calcolo si procede in questo modo:

- Studio della reticolare associata
- 7 Stati della struttura
- Si impone l'equilibrio dei momenti ai nodi per le prime 5 equazioni e si applica il principio dei lavori virtuali per le ultime due
- Si risolve il sistema e si trovano i diagrammi dei momenti flettenti
- Si calcolano gli sforzi di taglio e gli sforzi normali.
- Infine si calcolano le tensioni massime agenti sulla sezione

RETICOLARE ASSOCIATA, CASO 1

Caso $\psi_e = 0$: Rotazioni in funzione di ψ_f



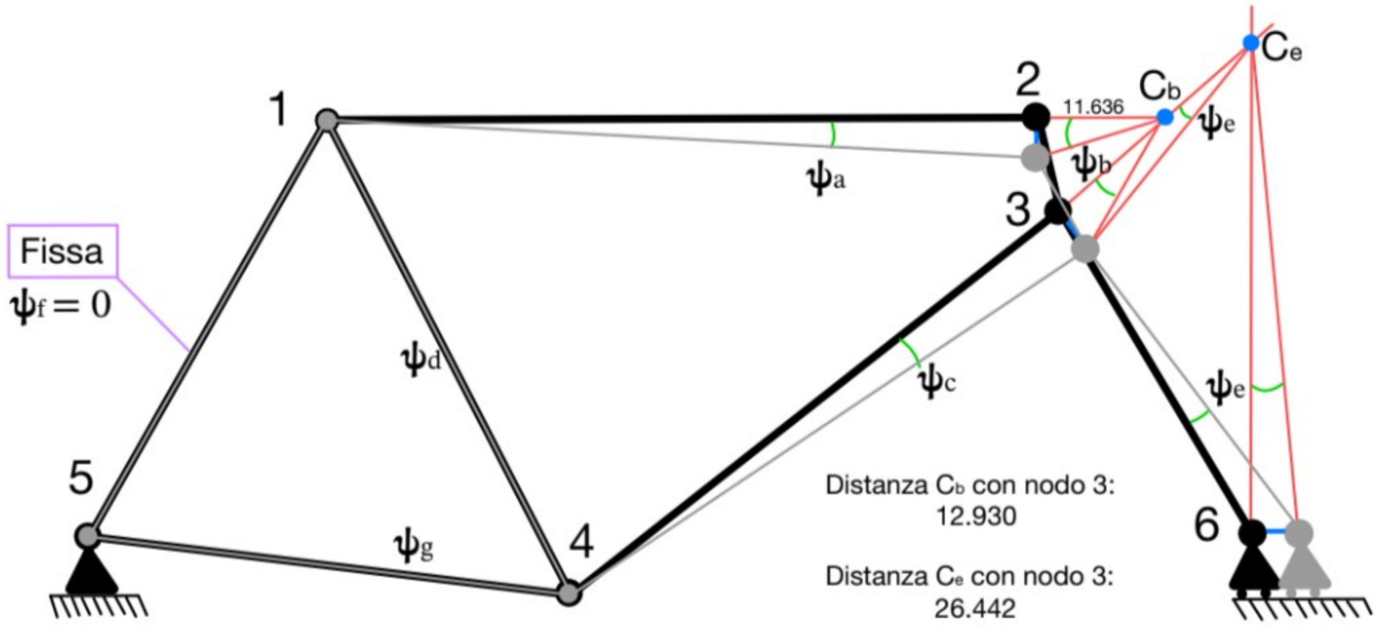
$$\psi_f = \psi_d = \psi_g$$
$$53 \cdot \psi_f = 59.7254 \cdot \psi_a$$
$$46 \cdot \psi_g = 59.7254 \cdot \psi_c$$
$$4.6427 \cdot \psi_b = 59.7254 \cdot \psi_a$$

$$\Downarrow$$

$$\psi_d = \psi_g = \psi_f$$
$$\psi_a = 0.8874 \cdot \psi_f$$
$$\psi_c = 0.9958 \cdot \psi_f$$
$$\psi_b = 10.57 \cdot \psi_f$$

RETICOLARE ASSOCIATA, CASO 2

Caso $\psi_f = 0$: Rotazioni in funzione di ψ_e

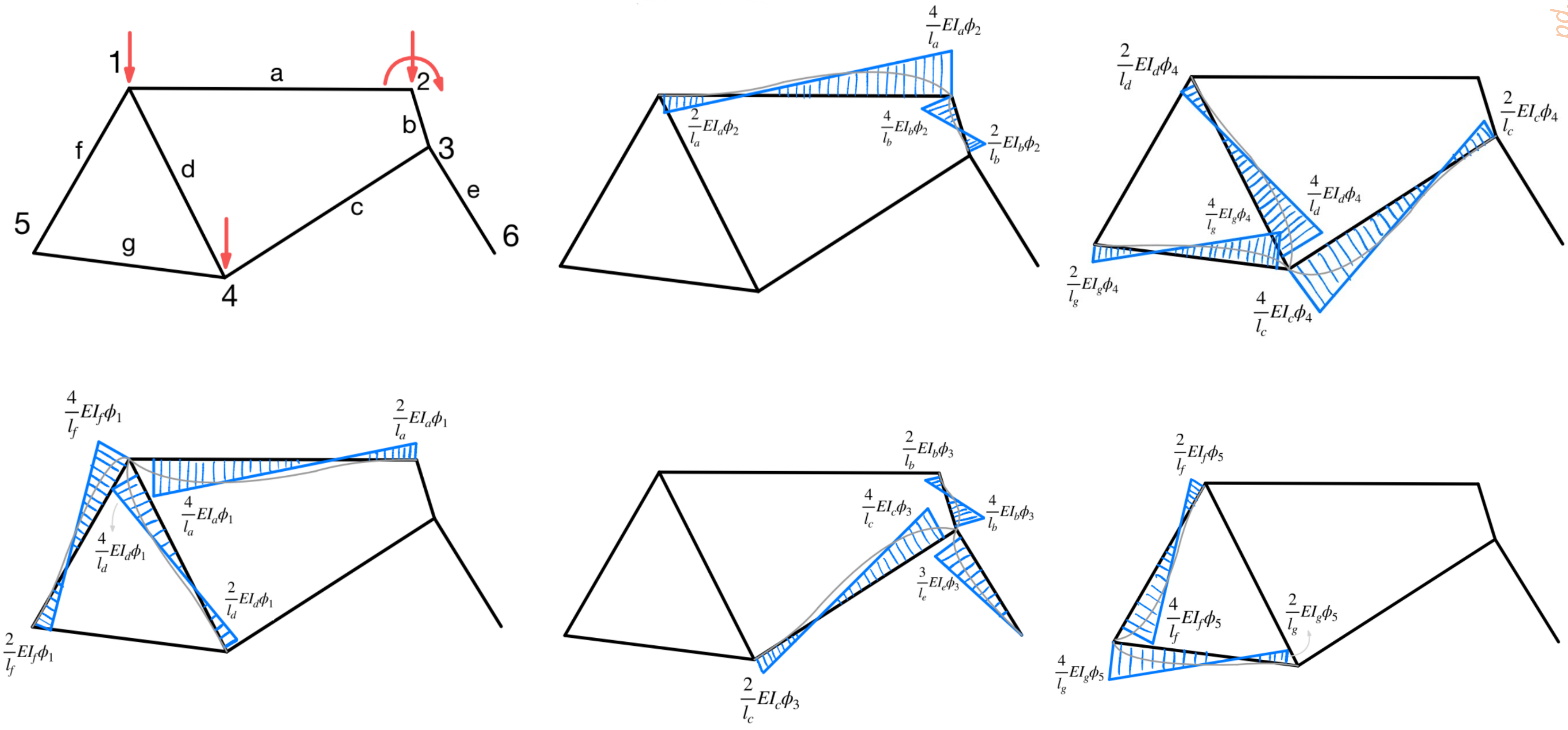


$$\psi_f = \psi_d = \psi_g = 0$$
$$26.442 \cdot \psi_e = 62 \cdot \psi_c$$
$$12.930 \cdot \psi_b = 26.442 \cdot \psi_e$$
$$59 \cdot \psi_a = 11.636 \cdot \psi_b$$

$$\Downarrow$$

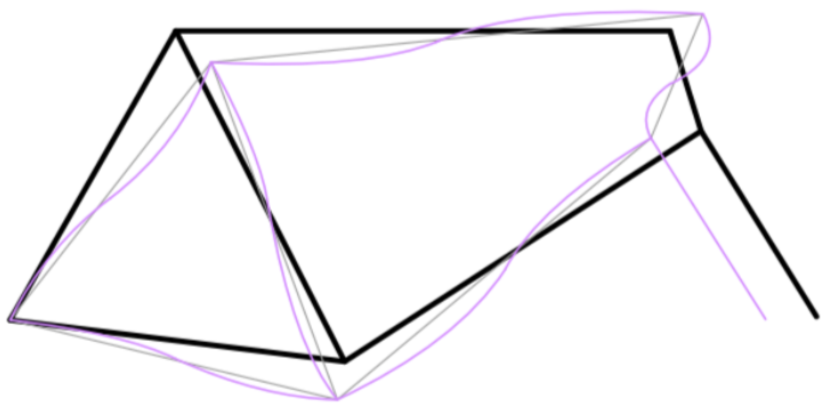
$$\psi_d = \psi_g = \psi_f = 0$$
$$\psi_a = 0.42648 \cdot \psi_e$$
$$\psi_c = 2.04501 \cdot \psi_e$$
$$\psi_b = 0.40332 \cdot \psi_e$$

STATI 0-5

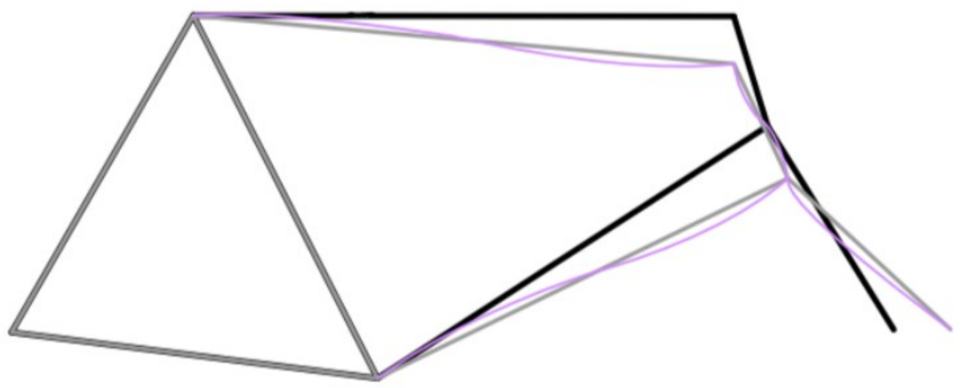

1
a
2
b
3
f
d
c
e
5
g
6
4
$\frac{4}{l_a}EI_a\phi_2$
$\frac{2}{l_a}EI_a\phi_2$
$\frac{4}{l_b}EI_b\phi_2$
$\frac{2}{l_b}EI_b\phi_2$
$\frac{2}{l_d}EI_d\phi_4$
$\frac{2}{l_c}EI_c\phi_4$
$\frac{4}{l_d}EI_d\phi_4$
$\frac{4}{l_g}EI_g\phi_4$
$\frac{2}{l_g}EI_g\phi_4$
$\frac{4}{l_c}EI_c\phi_4$
$\frac{4}{l_f}EI_f\phi_1$
$\frac{2}{l_a}EI_a\phi_1$
$\frac{4}{l_a}EI_a\phi_1$
$\frac{4}{l_d}EI_d\phi_1$
$\frac{2}{l_d}EI_d\phi_1$
$\frac{2}{l_f}EI_f\phi_1$
$\frac{2}{l_b}EI_b\phi_3$
$\frac{4}{l_c}EI_c\phi_3$
$\frac{4}{l_b}EI_b\phi_3$
$\frac{3}{l_e}EI_e\phi_3$
$\frac{2}{l_c}EI_c\phi_3$
$\frac{2}{l_f}EI_f\phi_5$
$\frac{4}{l_f}EI_f\phi_5$
$\frac{2}{l_g}EI_g\phi_5$
$\frac{4}{l_g}EI_g\phi_5$

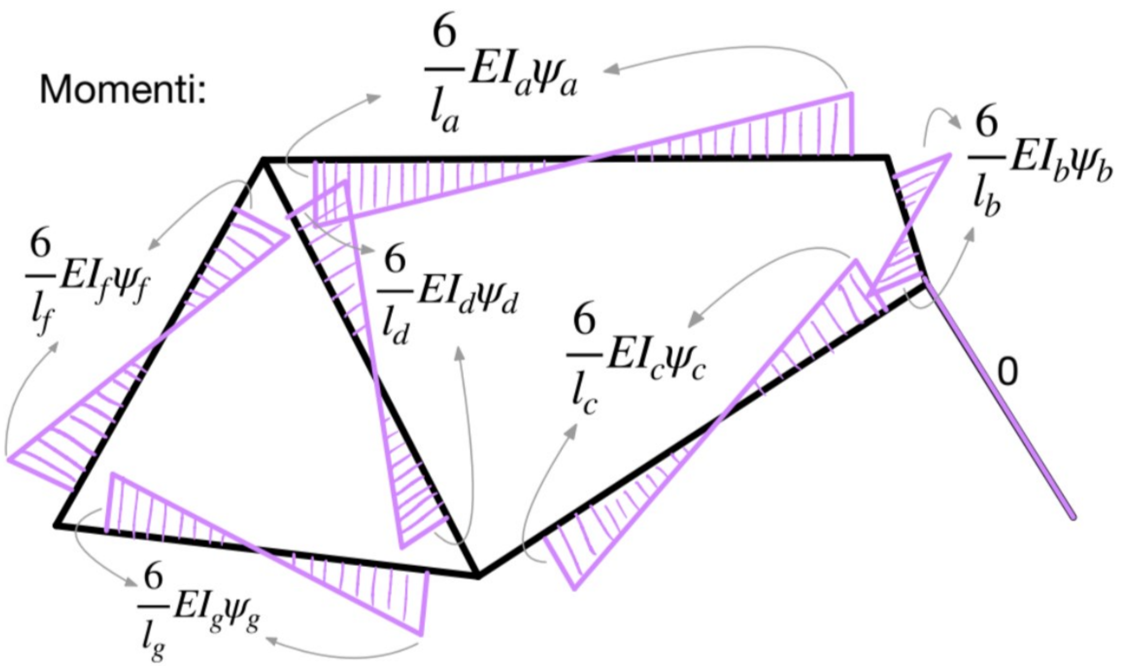
STATO 6 E 7

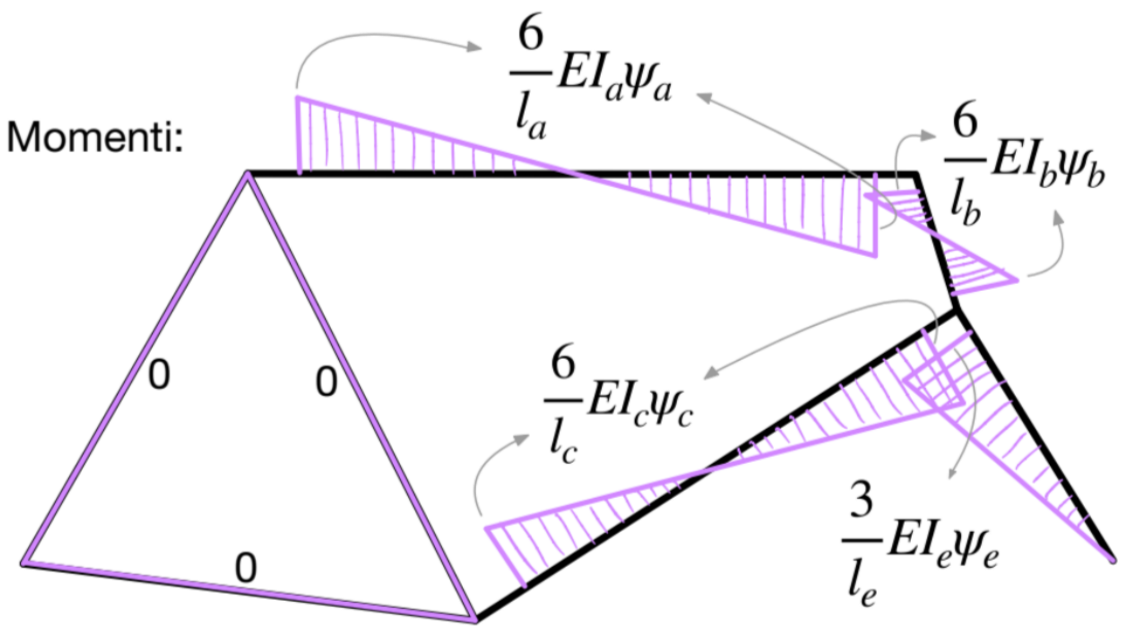
Deformazioni



Deformazioni







EQUAZIONI DI EQUILIBRIO AI NODI

$$Equilibrio\ al\ nodo\ 1:$$

$$\frac{4}{l_f}0.2812x_1+\frac{4}{l_d}1.4049x_1+\frac{4}{l_a}x_1+\frac{2}{l_a}x_2+\frac{2}{l_d}1.4049x_4+\frac{2}{l_f}0.2812x_5$$
$$-\frac{6}{l_f}0.2812x_6-\frac{6}{l_d}1.4049x_6+\frac{6}{l_a}0.8874x_6-\frac{6}{l_a}0.40332x_7=0$$

$$Equilibrio\ al\ nodo\ 2:$$

$$\frac{2}{l_a}x_1+\frac{4}{l_a}x_2+\frac{4}{l_b}1.728x_2+\frac{2}{l_b}1.728x_3+\frac{6}{l_a}0.8874x_6-\frac{6}{l_b}1.728\cdot 10.57x_6$$
$$-\frac{6}{l_a}0.40332x_7+\frac{6}{l_b}1.728\cdot 2.04501x_7=0.15Y$$

$$Equilibrio\ al\ nodo\ 3:$$

$$\frac{2}{l_b}1.728x_2+\frac{4}{l_b}1.728x_3+\frac{4}{l_c}1.4049x_3+\frac{3}{l_e}0.3024x_3$$
$$+\frac{2}{l_c}1.4049x_4-\frac{6}{l_b}1.728\cdot 10.57x_6+\frac{6}{l_c}1.4049\cdot 0.9958x_6+\frac{6}{l_b}1.728\cdot 2.04501x_7$$
$$-\frac{6}{l_c}1.4049\cdot 0.42648x_7+\frac{3}{l_e}0.3024x_7=0$$

$$Equilibrio\ al\ nodo\ 4:$$

$$\frac{2}{l_d}1.4049x_1+\frac{2}{l_c}1.4049x_3+\frac{4}{l_g}0.2812x_4+\frac{4}{l_c}1.4049x_4$$
$$+\frac{4}{l_d}1.4049x_4+\frac{2}{l_g}0.2812x_5-\frac{6}{l_d}1.4049x_6-\frac{6}{l_g}0.2812x_6$$
$$+\frac{6}{l_c}1.4049\cdot 0.9958x_6-\frac{6}{l_c}1.4049\cdot 0.42648x_7=0$$

$$Equilibrio\ al\ nodo\ 5:$$

$$\frac{2}{l_f}0.2812x_1+\frac{2}{l_g}0.2812x_4+\frac{4}{l_f}0.2812x_5+\frac{4}{l_g}0.2812x_5$$
$$-\frac{6}{l_f}0.2812x_6-\frac{6}{l_g}0.2812x_6=0$$

EQUAZIONI DI CATENA: PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

$$
\begin{gathered}
\textit{Equazione di catena 6}: \\
\psi_f(\frac{6}{l_f}0.2812x_1 + \frac{6}{l_f}0.2812x_5 - \frac{12}{l_f}0.2812x_6 + l_a cos(\alpha_a)X) \\
+\psi_d(\frac{6}{l_d}1.4049x_1 + \frac{6}{l_d}1.4049x_4 - \frac{12}{l_d}1.4049x_6) \\
+\psi_g(\frac{6}{l_g}0.2812x_4 + \frac{6}{l_g}0.2812x_5 - \frac{12}{l_g}0.2812x_6 + l_g cos(\alpha_g)Z) \\
+\psi_a(-\frac{6}{l_a}x_1 - \frac{6}{l_a}x_2 - \frac{12}{l_a}0.8874x_6 + \frac{12}{l_a}0.40332x_7 - 0.25188Y) \\
+\psi_b(\frac{6}{l_b}1.728x_2 + \frac{6}{l_b}1.728x_3 - \frac{12}{l_b}1.728 \cdot 10.57x_6 + \frac{12}{l_b}1.728 \cdot 2.04501x_7) \\
+\psi_c(-\frac{6}{l_c}1.4049x_3 - \frac{6}{l_c}1.4049x_4 - \frac{12}{l_c}1.4049 \cdot 0.9958x_6 + \frac{12}{l_c}1.4049 \cdot 0.42648x_7) \\
= 0
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\textit{Equazione di catena 7}: \\
\psi_e(-\frac{3}{l_e}0.3024x_3 - \frac{3}{l_e}0.3024x_7) \\
+\psi_b(-\frac{6}{l_b}1.728x_2 - \frac{6}{l_b}1.728x_3 + \frac{12}{l_b}1.728 \cdot 10.57x_6 - \frac{12}{l_b}1.728 \cdot 2.04501x_7) \\
+\psi_a(\frac{6}{l_a}x_1 + \frac{6}{l_a}x_2 + \frac{12}{l_a}0.8874x_6 - \frac{12}{l_a}0.40332x_7 + l_a Y) \\
+\psi_c(\frac{6}{l_c}1.4049x_3 + \frac{6}{l_c}1.4049x_4 + \frac{12}{l_c}1.4049 \cdot 0.9958x_6 - \frac{12}{l_c}1.4049 \cdot 0.42648x_7) \\
= 0
\end{gathered}
$$

Incognite:

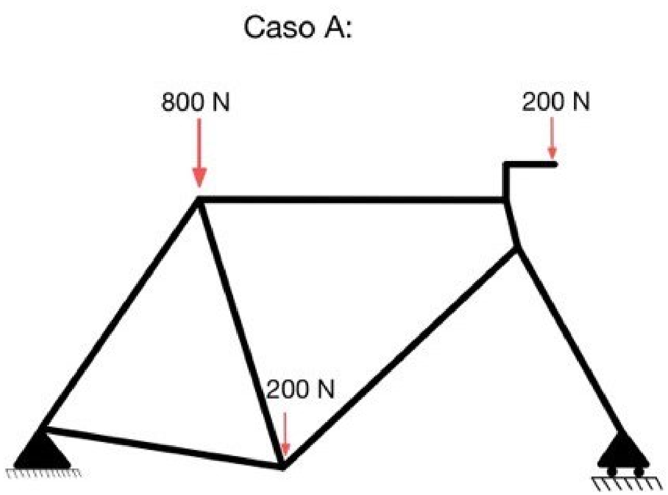
$$
\begin{gathered}
x_1 = EI_a\phi_1;\ x_2 = EI_a\phi_2;\ x_3 = EI_a\phi_3; \\
x_4 = EI_a\phi_4;\ x_5 = EI_a\phi_5; \\
x_6 = EI_a\psi_f;\ x_7 = EI_a\psi_e;
\end{gathered}
$$

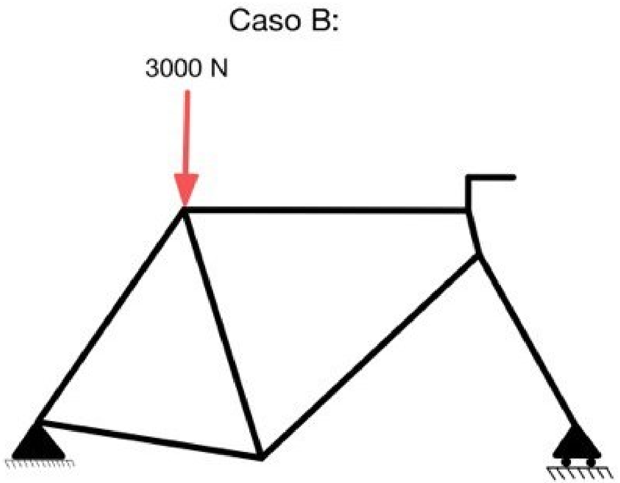
MATRICE RISOLVENTE

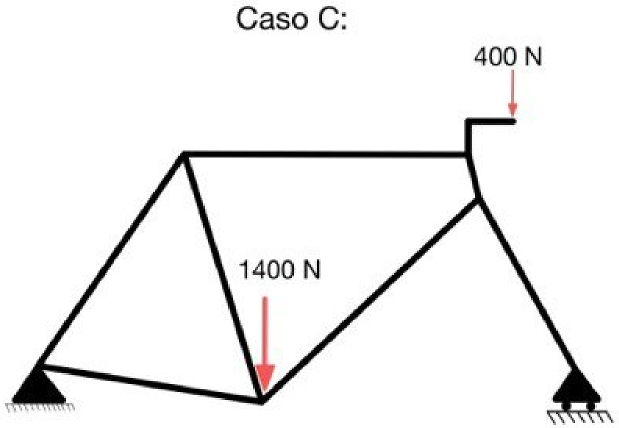
$$
\begin{bmatrix}
19.505 & 3.3898 & 0 & 5.3015 & 1.0611 & 10.064 & 4.1016 \\
3.3898 & 83.58 & 38.4 & 0 & 0 & 1208.6 & -231.48 \\
0 & 38.4 & 88.132 & 4.5319 & 0 & 1204.1 & -232.05 \\
5.3015 & 0 & 4.5319 & 22.112 & 1.2226 & 6.0336 & 5.7983 \\
1.0611 & 0 & 0 & 1.2226 & 4.5675 & 6.8512 & 0 \\
-10.064 & -1208.6 & -1204.1 & -6.0336 & -6.8512 & -25830 & 4999.1 \\
-4.1016 & 231.48 & 232.05 & -5.7983 & 0 & 4999.1 & -974.07
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}
=
$$

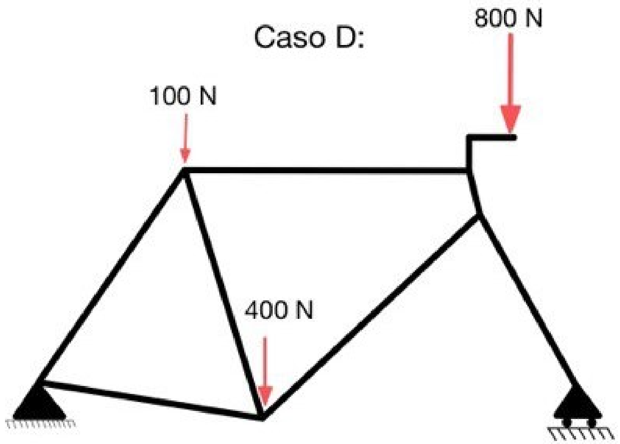
$$
\begin{bmatrix}
0 \\
0.15Y \\
0 \\
0 \\
0 \\
(-0.30004X + 0.22352Y - 0.45463Z) \\
-0.23796Y
\end{bmatrix}
$$

CARICHI ESTERNI: CASISTICHE



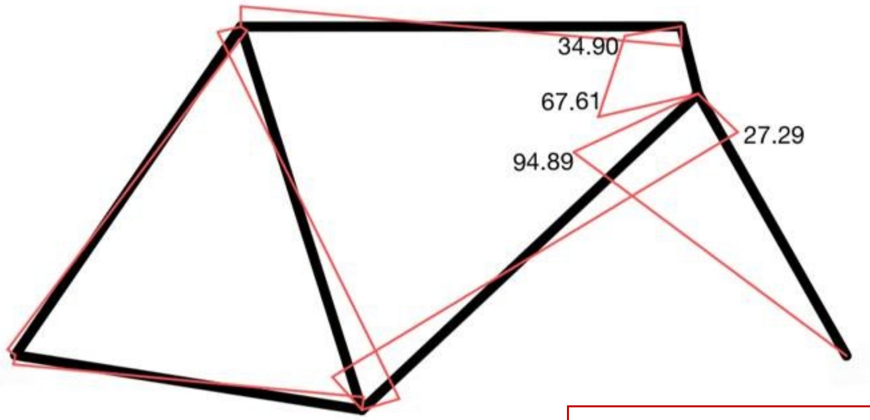




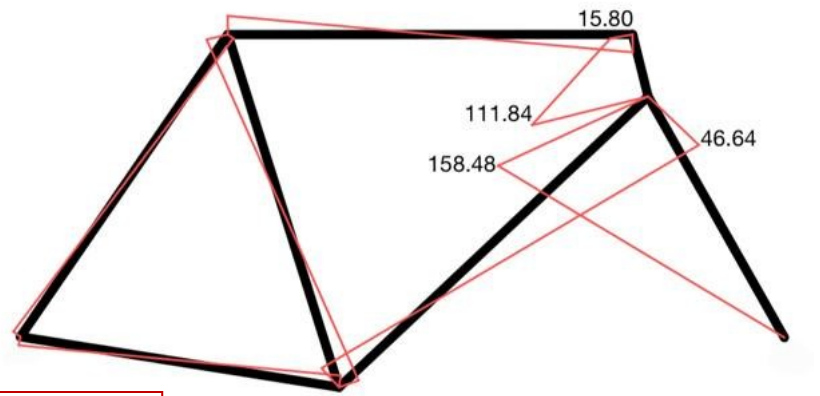


MOMENTI FLETTENTI RISULTANTI (IN NEWTON METRO)

Caso A:

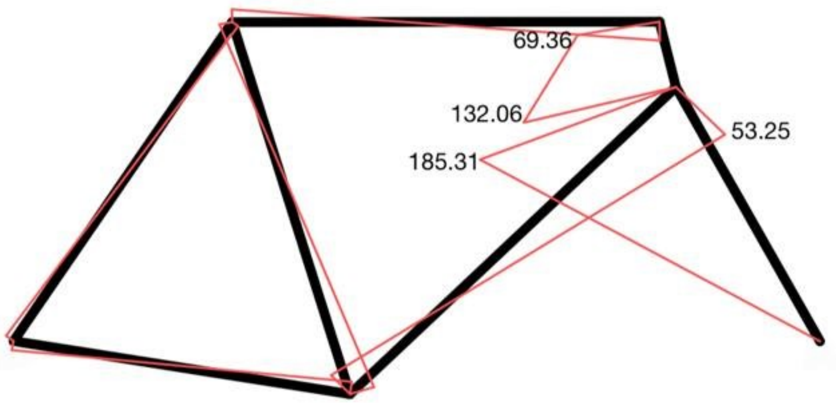


Caso B:

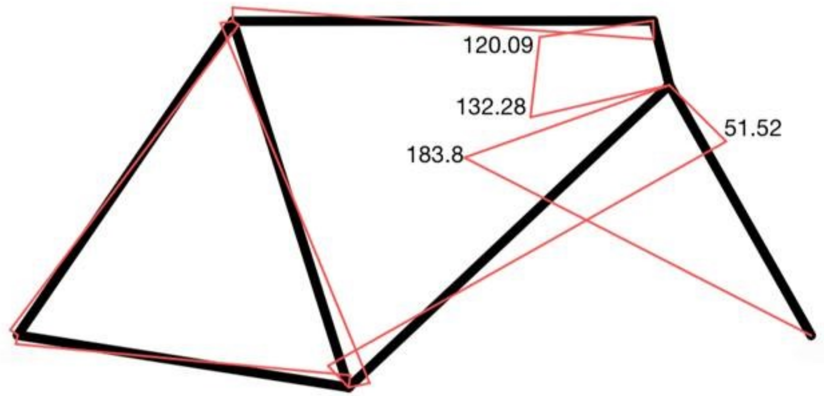


La forcella è sempre l'asta più sollecitata

Caso C:



Caso D:



RISULTATI COMPLETI PER OGNI CASO (N, NM)

Caso A:

Momenti Flettenti:

$$M_{a1} = -3.97;\ M_{a2} = -4.90;$$
$$M_{b2} = 34.90;\ M_{b3} = -67.61;$$
$$M_{c3} = -27.29;\ M_{c4} = -10.24;$$
$$M_{d1} = 4.21;\ M_{d4} = 8.53;$$
$$M_{e3} = 94.89;$$
$$M_{f1} = -0.24;\ M_{f5} = -0.46;$$
$$M_{g4} = 1.71;\ M_{g5} = 0.46;$$

Sforzi di Taglio:

$$T_a = 15.03;\ T_b = 363.4;\ T_c = 60.528;\ T_d = -24.04;\ T_e = -237.24;\ T_f = 1.33;\ T_g = -4.73;$$

Sforzi Normali:

$$N_a = -418.58;\ N_b = -278.14;\ N_c = 512.82;\ N_d = -167.36;\ N_e = -425.71;\ N_f = -786.94;\ N_g = 448.93;$$

Caso C:

Momenti Flettenti:

$$M_{a1} = -7.66;\ M_{a2} = -9.36;$$
$$M_{b2} = 69.36;\ M_{b3} = -132.06;$$
$$M_{c3} = -53.25;\ M_{c4} = -19.97;$$
$$M_{d1} = 8.15;\ M_{d4} = 16.62;$$
$$M_{e3} = 185.31;$$
$$M_{f1} = -0.49;\ M_{f5} = -0.91;$$
$$M_{g4} = 3.35;\ M_{g5} = 0.91;$$

Sforzi di Taglio:

$$T_a = 28.85;\ T_b = 696.65;\ T_c = 118.1;\ T_d = -46.74;\ T_e = -463.28;\ T_f = 2.63;\ T_g = -9.25;$$

Sforzi Normali:

$$N_a = -806.44;\ N_b = -550.23;\ N_c = 986.64;\ N_d = 793.2;\ N_e = -831.34;\ N_f = -940.68;\ N_g = 535.21;$$

Caso B:

Momenti Flettenti:

$$M_{a1} = -9.59;\ M_{a2} = -15.80;$$
$$M_{b2} = 15.80;\ M_{b3} = -111.84;$$
$$M_{c3} = -46.64;\ M_{c4} = -18.23;$$
$$M_{d1} = 9.55;\ M_{d4} = 15.45;$$
$$M_{e3} = 158.48;$$
$$M_{f1} = 0.05;\ M_{f5} = -0.63;$$
$$M_{g4} = 2.78;\ M_{g5} = 0.63;$$

Sforzi di Taglio:

$$T_a = 43.05;\ T_b = 1067;\ T_c = 104.63;\ T_d = -47.17;\ T_e = -396.2;\ T_f = 1.10;\ T_g = -7.42;$$

Sforzi Normali:

$$N_a = -1087.4;\ N_b = -213.65;\ N_c = 1380.5;\ N_d = -1093.9;\ N_e = -710.97;\ N_f = -2406.3;\ N_g = 1376.3;$$

Caso D:

Momenti Flettenti:

$$M_{a1} = -4.02;\ M_{a2} = -0.09;$$
$$M_{b2} = 120.09;\ M_{b3} = -132.28;$$
$$M_{c3} = -51.52;\ M_{c4} = -18.45;$$
$$M_{d1} = 5.05;\ M_{d4} = 15.03;$$
$$M_{e3} = 183.8;$$
$$M_{f1} = -1.03;\ M_{f5} = -1.07;$$
$$M_{g4} = 3.4192;\ M_{g5} = 1.07;$$

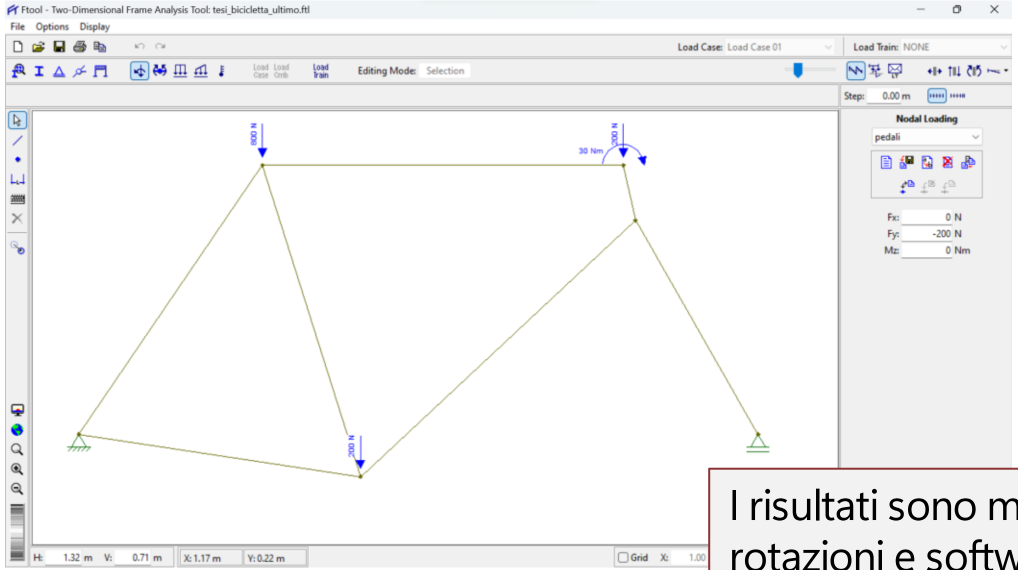
Sforzi di Taglio:

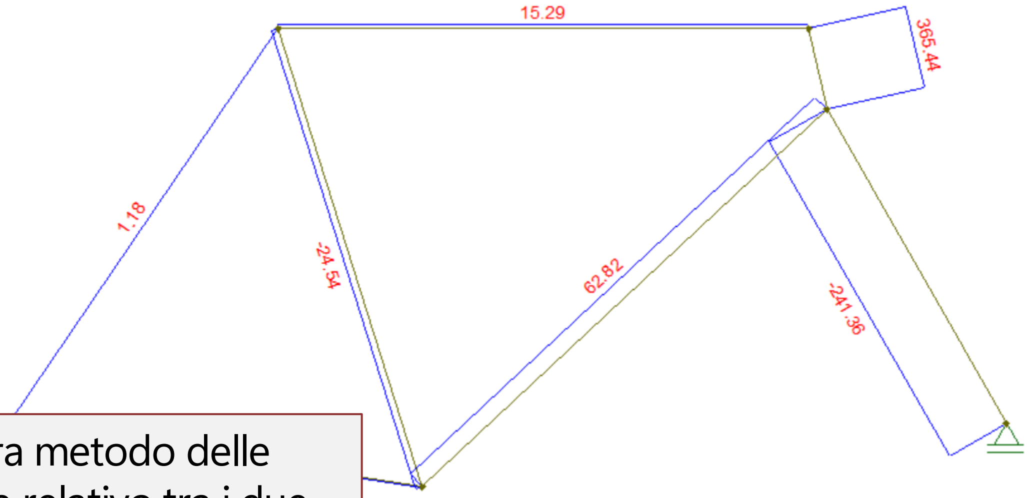
$$T_a = 6.96;\ T_b = 135.42;\ T_c = 112.85;\ T_d = -37.88;\ T_e = -459.49;\ T_f = 3.96;\ T_g = -9.76;$$

Sforzi Normali:

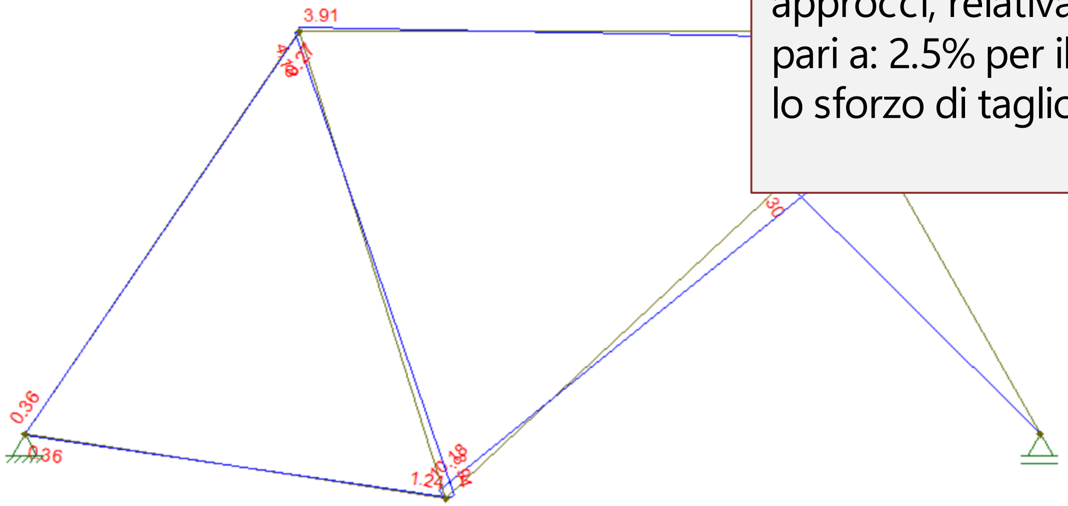
$$N_a = -331.02;\ N_b = -848.61;\ N_c = 345.84;\ N_d = 243.14;\ N_e = -824.54;\ N_f = -401.21;\ N_g = 225.01;$$

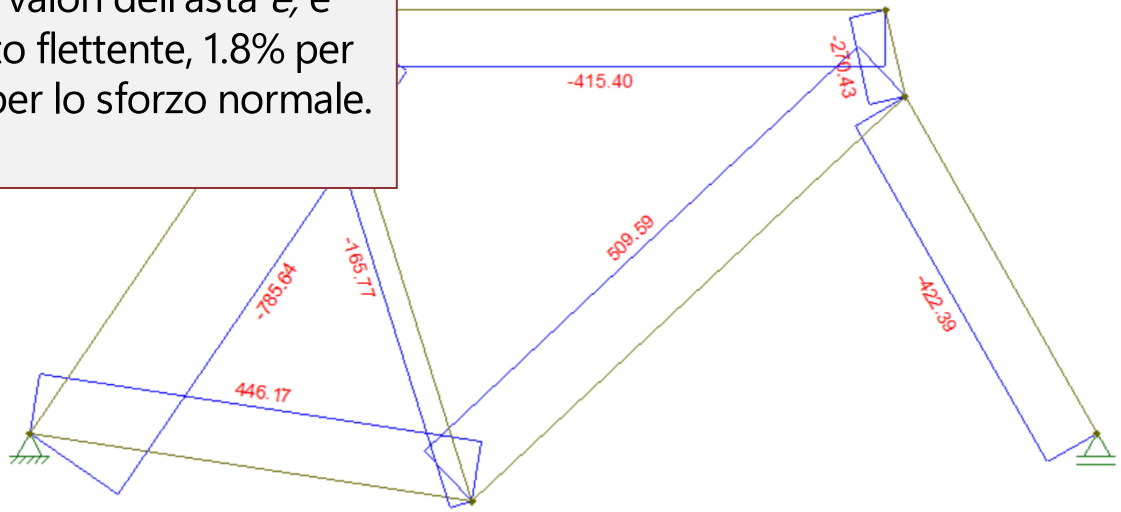
VERIFICA CON SOFTWARE





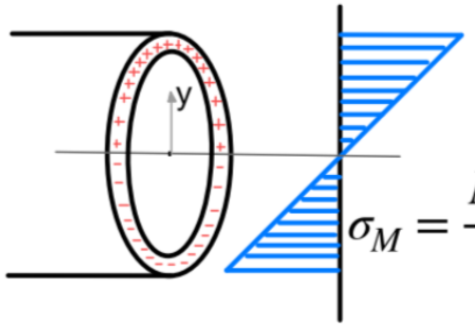
I risultati sono molto simili tra metodo delle rotazioni e software. L'errore relativo tra i due approcci, relativamente ai valori dell'asta *e*, è pari a: 2.5% per il momento flettente, 1.8% per lo sforzo di taglio e 0.7% per lo sforzo normale.





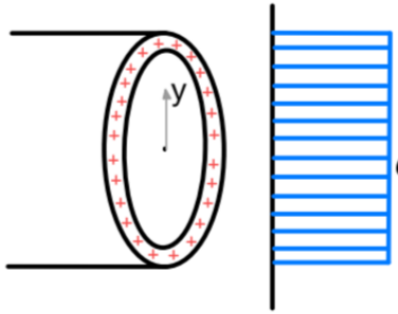
TENSIONI INTERNE CON SAINT VENANT

Momento flettente



$$\sigma_M = \frac{M}{I} y$$

Sforzo normale



$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

Sforzo di taglio

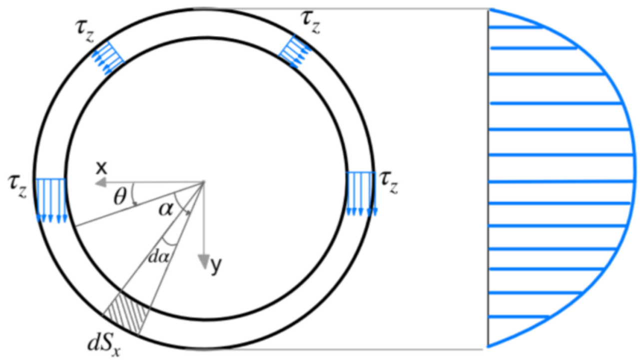
Per quanto riguarda il problema di Saint Venant per il taglio si sfrutta il teorema di Jourawsky:

$$\tau_z = \frac{T_y}{b \cdot I_x} S_x$$

Considerando che:

$$I_x = \pi s R^3;$$
$$b = 2s;$$
$$dS_x = ydA = Rsin\alpha\, d\alpha;$$
$$S_x = 2\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} sR^2 sin\alpha\, d\alpha = 2sR^2 cos\theta;$$

Si giunge alla seguente:



$$\tau_z = \frac{2T_y}{A} cos\theta$$

FORMULA PER IL CALCOLO

Ora che sono note le distribuzioni di σ e τ si conosce il tensore della tensione in ogni punto della sezione. Calcolando gli autovalori, si ottiene la tensione (massima) rispetto al sistema principale. Essendo sotto ipotesi di Saint Venant, in due dimensioni, il tensore della tensione è:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Di conseguenza gli autovalori si trovano con la seguente formula:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2}}{2}$$

MA

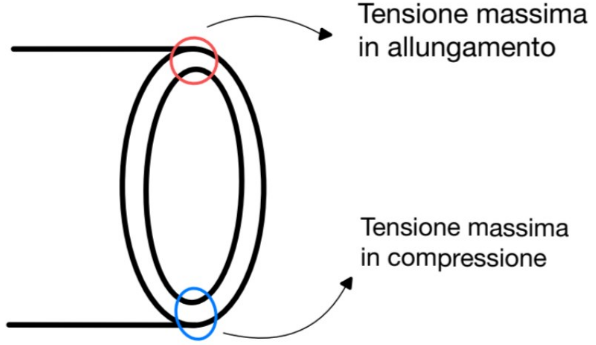
$$|\sigma_{M,max}| = \frac{M_{e3}}{I_e} R_e = 319.64\ Mpa$$

$$|\sigma_N| = \frac{N_e}{A_e} = 3.76\ Mpa$$

$$|\tau_{max}| = 2 \cdot \frac{T_e}{A_e} = 4.2\ Mpa$$

Quindi:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{e3}|}{I_e} R_e + \frac{|N_e|}{A_e}$$

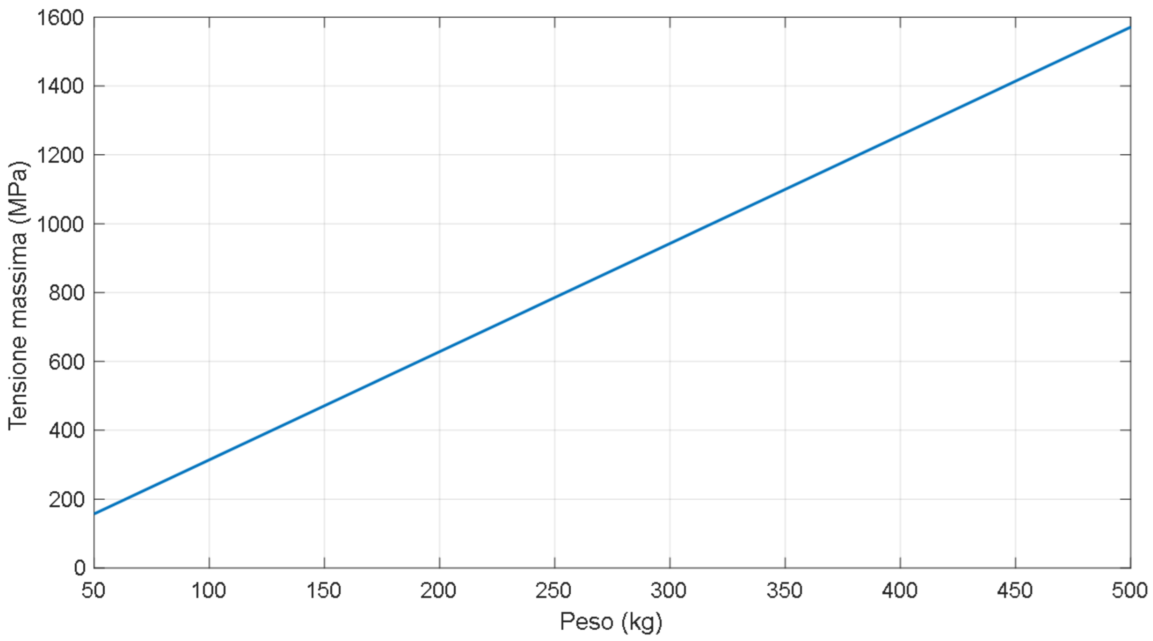


TENSIONI MASSIME E CONCLUSIONI

Caso A	Caso B	Caso C	Caso D
$\sigma_{max} = 323.4$	$\sigma_{max} = 540.1$	$\sigma_{max} = 631.5$	$\sigma_{max} = 626.4$

Unità: MPa

Si ricordi che la tensione ammissibile è 800 MPa



- Metodo → Accurato, utile per una prima valutazione statica
- Materiali → L'acciaio resiste L'alluminio no
- Spessore dei tubi → Inversamente proporzionale alle tensioni. Nella realtà ogni tubo ha uno spessore diverso