

Università degli Studi di Padova

---

DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI  
INDUSTRIALI

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCATRONICA

**ANALISI DINAMICA DI UN  
MANIPOLATORE PIANO A TRE GRADI  
DI LIBERTA’  
DYNAMICS ANALYSIS OF A PLANAR  
MANIPULATOR WITH THREE DEGREES  
OF FREEDOM**

*Relatore*

Prof. Paolo Boscariol

*Laureando*

Riccardo Marcon  
Matricola 1162917

ANNO ACCADEMICO 2021-2022

*“Il successo non è mai definitivo, il fallimento non è mai fatale;  
è il coraggio di continuare che conta. ”*

— Winston Churchill

# Ringraziamenti

*Innanzitutto, desidero ringraziare con affetto i miei genitori e mia sorella per il sostegno, il grande supporto e per essermi stati vicini in ogni momento durante gli anni di studio.*

*Vorrei esprimere la mia gratitudine al Prof. Paolo Boscariol, relatore della mia tesi, per l'aiuto, la disponibilità e il sostegno fornitomi durante la stesura del lavoro.*

*Ho desiderio di ringraziare poi i miei amici per tutti i bellissimi anni passati insieme e le mille avventure vissute, in particolare per i miei compagni di università che mi hanno aiutato ogniqualvolta ne avessi avuto bisogno per il raggiungimento di questo traguardo.*

*Vicenza, Marzo 2022*

Riccardo Marcon



# Indice

<b>1</b>	<b>Manipolatori industriali</b>	<b>1</b>
1.1	Generalità . . . . .	1
1.2	Tipologia . . . . .	2
1.3	Metodologia di modellazione cinematica e dinamica . . . . .	3
1.4	Componenti . . . . .	4
1.4.1	Accoppiamenti cinematici . . . . .	4
1.4.2	Attuatori . . . . .	7
1.4.3	End-effector . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Manipolatore piano in esame</b>	<b>9</b>
2.1	Struttura . . . . .	9
2.2	Giunti . . . . .	10
2.3	Motore . . . . .	11
2.4	End-effector . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Analisi cinematica</b>	<b>13</b>
3.1	Introduzione . . . . .	13
3.2	Analisi di posizione . . . . .	14
3.3	Analisi di velocità . . . . .	16
3.4	Analisi di accelerazione . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Analisi dinamica</b>	<b>21</b>
4.1	Introduzione . . . . .	21
4.2	Metodo newtoniano . . . . .	22
4.2.1	Equazioni Newtoniane . . . . .	23
4.3	Principio dei lavori virtuali . . . . .	24
4.4	Generazione della coppia . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Evoluzione dinamica delle prestazioni</b>	<b>27</b>
5.1	Introduzione . . . . .	27
5.2	Generazione di una traiettoria . . . . .	28
5.3	Risultati finali e conclusioni . . . . .	30
5.3.1	Velocità angolari delle coordinate libere . . . . .	30
5.3.2	Valori di coppia ottenuti . . . . .	31
5.3.3	Potenze richieste dal meccanismo . . . . .	32
5.4	Conclusioni . . . . .	33
<b>A</b>	<b>File Matlab</b>	<b>35</b>

**Bibliografia**

**45**

# Introduzione

In questo elaborato si è voluto presentare lo studio di un manipolatore piano a 3 gradi di libertà, utilizzando un modello dinamico per individuare i valori di coppia massima richiesta attraverso l'uso dell'analisi dinamica inversa. Il robot presenta tre braccia composte da due membri ciascuno che vengono collegati grazie a una coppia rotoidale, andando a formare una diade di prima specie (RRR) per ciascuna catena cinematica che permettono il collegamento con l'end-effector.

La valutazione delle coppie in esame è basata sul calcolo del Principio dei Lavori Virtuali, tenendo conto della massa in gioco dell'end-effector che va a incidere nel calcolo finale, ma non considerando quelle dei membri perché causavano degli effetti trascurabili nel calcolo delle inerzie.

L'analisi cinematica iniziale si basa sulla posizione voluta dal centro dell'utilizzatore, ovvero la parte del meccanismo che svolge effettivamente il lavoro per cui è stato progettato, dove possono essere posizionati frese, dispositivi laser o altri utensili che permettono di eseguire forature, tagli, verniciature e saldature in modo molto preciso, senza la necessità di sensori di posizione. Consentendo quindi di risparmiare in termini economici, immediati e anche successivi in quanto presenterebbero notevoli costi di manutenzione rispetto a un andamento ordinario da parte del robot. La possibilità di poter cambiare utensile all'interno dell'end-effector dovendo variare solamente alcuni parametri successivamente consente al manipolatore una grande versatilità nel breve e lungo periodo.

Il seguente elaborato è stato sviluppato in modo sequenziale in cui i primi due capitoli servono per conoscere e introdurre le varie parti del manipolatore utilizzate e successivamente si sviluppano passo passo tutti i passaggi in modo da tracciare un filo logico nella risoluzione del problema proposto, ovvero quello di risolvere prima l'analisi cinematica e successivamente quella dinamica per ottenere dei grafici finali in modo da capire come si comporta il meccanismo.

Parte fondamentale di questa esperienza è stato tutto il lavoro di programmazione svolto tramite il programma di calcolo Matlab, che ha permesso di poter ricreare delle simulazioni reali di possibili movimenti o traiettorie sviluppabili una volta creato il meccanismo. In questo modo ci sarà permesso scegliere dei componenti adeguati senza sottostimarli o sovrastimarli, come ad esempio nel caso di motori elettrici generatori delle coppie.



# Capitolo 1

## Manipolatori industriali

*Nel primo capitolo si esporranno le generalità e le varie tipologie di manipolatori piani presenti nel mercato, andando a spiegare quali componenti possono essere utilizzati.*

### 1.1 Generalità

Il termine manipolatore deriva dai primi meccanismi articolati che furono utilizzati per sostituire o aiutare la componente umana durante i processi industriali nell'uso di dispositivi elettrici o meccanici talvolta anche pericolosi per l'incolumità della persona. Ampiamente sviluppati nel corso del tempo, in origine furono progettati solamente con parti meccaniche gestite interamente dall'uomo, successivamente si introdussero prima i motori elettrici di vario tipo e poi l'utilizzo di microcontrollori insieme ad altri dispositivi elettronici in modo che si potessero controllare autonomamente una volta entrati in funzione.

Questa particolare tipologia di robot presenta particolari vantaggi, sia economici che di progettazione, infatti essendocene di svariate tipologie si ha un'ampia vasta di scelta per realizzare quello più adatto alle nostre esigenze. Da un punto di vista strutturale si può notare come la presenza di più braccia, generalmente molto simili tra loro se non addirittura uguali, permetta di distribuire equamente il peso dell'end-effector e dei rispettivi membri su ciascuna parte collegata al telaio, dove si cerca di dimensionarli in modo relativamente leggero così da impattare il meno possibile sull'inerzia del meccanismo. Inoltre, avere gli attuatori fissati direttamente sulla struttura della macchina consente di avere maggiori libertà senza presentare particolari problemi dovuti al maggior peso dei motori e alle sollecitazioni che andrebbero a influenzare anche l'accuratezza del meccanismo.

Un manipolatore è una tipica struttura meccanica articolata con lo scopo di spostare a seconda delle operazioni la parte operativa del robot, attraverso una piattaforma definita end-effector, che svolge effettivamente il lavoro per cui è stato progettato il tutto. Prendendo in esame questo tipo di manipolatore possiamo notare che non presenza ridondanze, ogni coordinata libera permette un grado di libertà al meccanismo, quindi ci sono infinite possibilità per raggiungere lo stesso punto desiderato, riducendo il verificarsi di singolarità.

In questo elaborato non si è voluto esaminare manipolatori che presentavano alcuna ridondanza, in quanto non essendo un compito banale avrebbe bisogno di un'analisi molto più accurata presentando due problemi sostanziali. Il primo che riguarda la coppia richiesta ai motori perché può variare a seconda della traiettoria percorsa e il secondo riguarda prettamente come viene trattata la ridondanza stessa e tutte le sue possibili varianti.

## 1.2 Tipologia

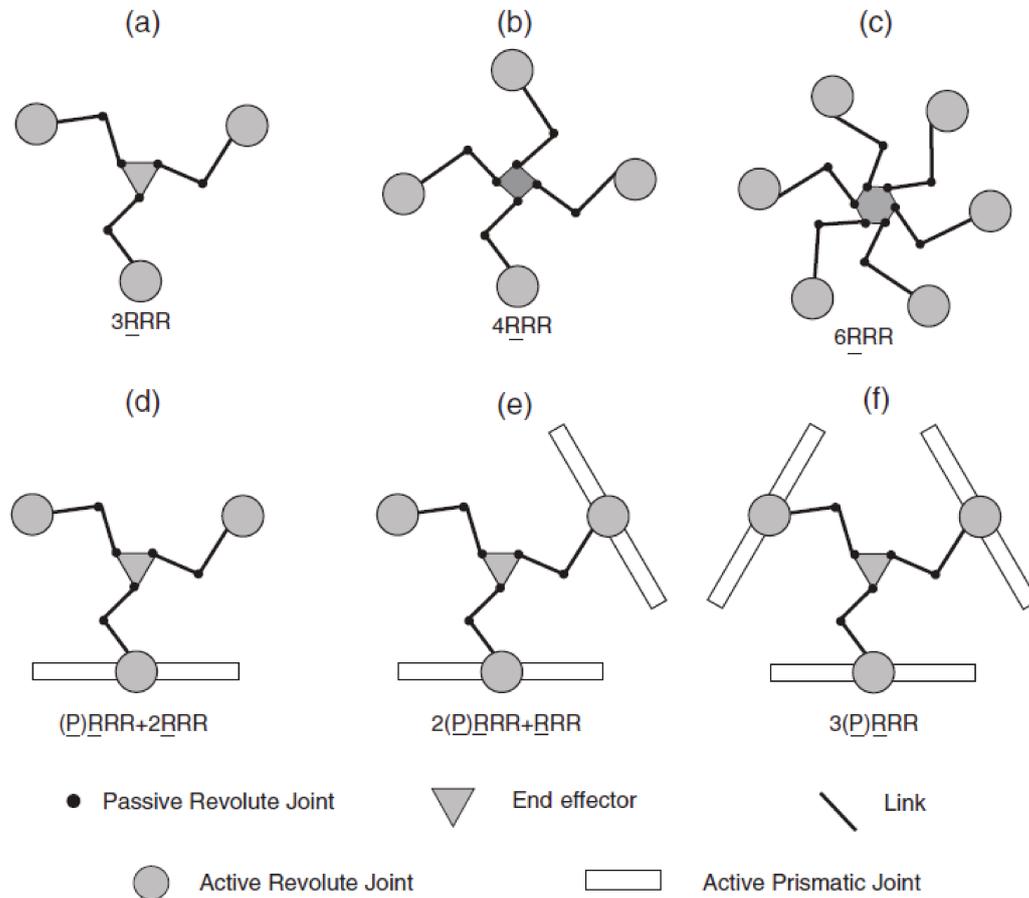
I manipolatori industriali presenti in commercio sono di vario genere, a seconda dell'utilizzo, forma e dimensione; una prima classificazione importante si denota attraverso lo spostamento eseguito dall'end-effector, se si muove lungo un piano prestabilito oppure nello spazio tridimensionale.

Una delle caratteristiche fondamentali sono i numeri di gradi di libertà del meccanismo che non vanno a modificare il lavoro finale da svolgere ma che incidono notevolmente nella progettazione e nel costo di sviluppo. Generalmente questi tipi di manipolatori piani presentano 3 gradi di libertà a seconda del numero di catene cinematiche utilizzate e degli attuatori cinematici ridondanti.

Questa tipologia di robot si differenzia in base al numero di gruppi di Assur utilizzati, quest'ultimi sono delle catene cinematiche ottenute per eliminazione del telaio da strutture isostatiche non riducibili, infatti se considero solo quest'ultime nell'equazione di Gruber otterrò come risultato zero. il numero di membri,  $m$ , per la classificazione si divide in due parti, se è pari a tre e ci sono tre accoppiamenti cinematici allora consideriamo delle diadi, come nel nostro caso; mentre se è uguale a cinque e ci sono sei accoppiamenti cinematici otterremo delle triadi, utilizzando un membro ternario e tre secondari, oppure delle tetradi se adoperassimo due membri ternari e tre binari.

La differenza tra una diade e l'altra si ha per il tipo di accoppiamento proposto, nei possibili manipolatori presi in esame se ne trovano solo due, entrambi di classe uno perché permettono solamente un moto relativo rispetto ai 3 consentiti nel piano, la coppia rotoidale (R) che ci permette di eseguire delle rotazioni rispetto a un membro fisso a telaio o semplicemente ad un altro link collegato e la coppia prismatica (P).

Ecco alcune particolari tipologie di manipolatori piani che si differenziano in base al numero e al tipo di diadi utilizzate, in questo caso si ha analizzato la prima configurazione a tre diadi RRR.



**Figura 1.1:** manipolatori ridondanti e non-ridondanti: (a) 3RRR, (b) 4RRR, (c) 6RRR, (d) PRRR + 2RRR, (e) 2PRRR + RRR and (f) 3PRRR.

### 1.3 Metodologia di modellazione cinematica e dinamica

Nonostante abbiano diverse quantità di parti mobili e catene cinematiche, i manipolatori poco studiati presentano una struttura piuttosto simile. In altre parole, le principali differenze tra i manipolatori sono il numero delle catene cinematiche,  $N$ , e quello degli attuatori cinematicamente ridondanti,  $M$ . Questi aspetti modificano il numero di parti mobili in ogni catena cinematica. Per quanto riguarda il numero di catene cinematiche, la differenza tra il manipolatore non ridondante 3RRR ( $N = 3$ ,  $M = 0$ ) e quello ridondante 3PRRR ( $N = 3$ ,  $M = 3$ ) sta nella presenza di 3 coppie prismatiche in aggiunta al precedente poste nei giunti.

Per quanto riguarda il numero di parti mobili, i manipolatori cinematicamente ridondanti ne presentano una o alcune in più, infatti, l'attuatore può muoversi su una guida lineare. La tabella 1.1 riassume il numero di catene cinematiche e quello di attuatori cinematicamente ridondanti per tutte le combinazioni possibili. Questi aspetti vengono sfruttati per ricavare modelli cinematici e dinamici completi sia per ciascuno di essi. I manipolatori possono avere tre tipi di parti mobili: gli attuatori cinematicamente ridondanti ( $j$ ), i collegamenti e gli end-effector ( $e$ ), è stato adottato che  $j = 0$  rappresenta la parte relativa all'attuatore che può traslare in una direzione mentre  $j = 1$  e  $j = 2$  rappresentano rispettivamente i collegamenti 1 e 2 dei membri.

D'altra parte, questi robot possono avere tre, quattro o sei catene cinematiche secondo la 1.2, il pedice  $i$  è impiegato per indicare la catena cinematica in valutazione. In questo modo,  $i$  può essere uguale a 1, 2, o 3 per le 3RRR, mentre da 1 a 6 per le 6RRR. Per esempio, usando la rappresentazione proposta, il manipolatore PRRR + 2RRR presenta una catena cinematica con tre possibili spostamenti e due catene con due parti mobili. Quindi, in questo caso,  $i$  è uguale a 1, 2 o 3, mentre  $j$  diventerà 0, 1 o 2.

Manipolatori	N	M
3 RRR	3	0
4 RRR	4	0
6 RRR	6	0
PRRR + 2RRR	3	1
2PRRR + RRR	3	2
3 PRRR	3	3

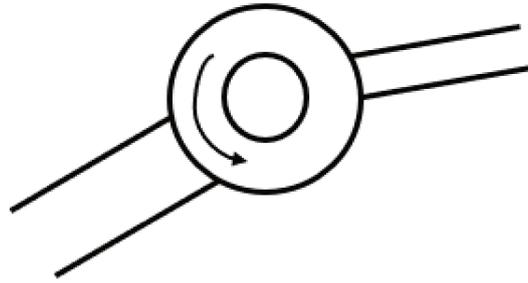
**Tabella 1.1:** Numero di catene cinematiche e attuatori ridondanti per le combinazioni considerate.

## 1.4 Componenti

### 1.4.1 Accoppiamenti cinematici

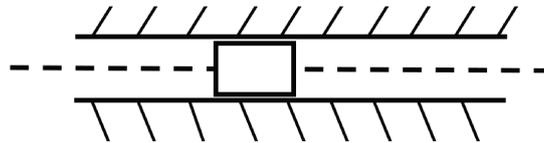
Per i manipolatori si possono utilizzare sei tipologie di coppie cinematiche a seconda del risultato finale che si vuole ottenere e dalla complessità del meccanismo a seconda dei gradi di libertà.

- **Rotoidale:** permette di eseguire delle rotazioni rispetto a un membro fisso a telaio o semplicemente rispetto ad un altro membro collegato.



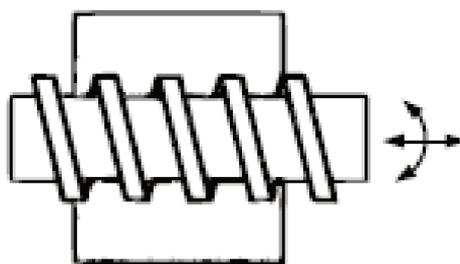
**Figura 1.2:** Coppia rotoidale

- **Prismatica:** dove possiamo solamente spostarci lungo un particolare asse detto appunto asse della prismatica.



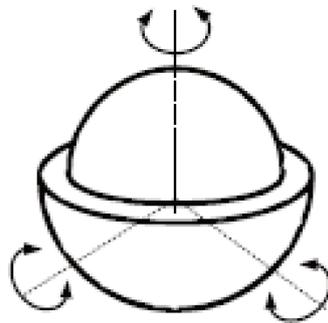
**Figura 1.3:** Coppia prismatica

- **Elicoidale:** che garantisce la traslazione lungo un asse grazie alla filettatura del giunto stesso, siccome il moto rotatorio e di traslazione sono dipendenti tra loro viene considerata anch'essa di classe 1 come le precedenti.



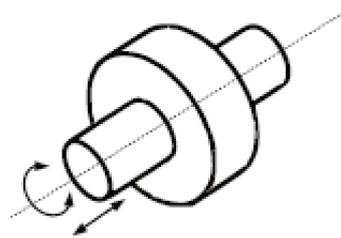
**Figura 1.4:** Vite elicoidale

- **Sferica:** accoppiamento cinematico che presenta tre gradi di libertà garantendo la rotazione intorno a tre assi, chiaramente definita di classe 3.



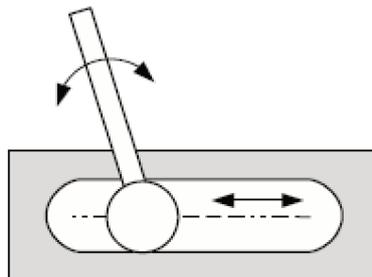
**Figura 1.5:** Coppia sferica

- **Cilindrica:** contemporaneamente può permettere due moti relativi indipendenti, uno di traslazione e uno di rotazione, per questo viene considerata di classe 2.



**Figura 1.6:** Coppia cilindrica

- **Camma piana:** permette una rotazione relativa e una traslazione relativa, può essere costruita realizzando in corpo un alloggiamento rettilineo, nel quale è impegnato un perno, che nell'alloggiamento potrà traslare e ruotare contemporaneamente, anch'essa di classe 2.



**Figura 1.7:** Coppia camma piana

### 1.4.2 Attuatori

Gli attuatori sono quei dispositivi che hanno il compito di muovere i vari bracci del meccanismo in modo che possa coprire tutto lo spazio necessario per seguire le lavorazioni, variano molto sia per il tipo di meccanismo che per la coppia da dover generare oltre che per la precisione prefissata a cui si vuole raggiungere. Infatti, generalmente per questo tipo di automazioni non sono necessarie potenze elevate e si cerca di avere un buon trade-off tra la precisione, la velocità di spostamento dei bracci e il costo. Essi si dividono prevalentemente in tre categorie:

- **Elettrici:** sempre più utilizzati nel campo della robotica perché hanno il vantaggio di essere facilmente controllabili e molte volte non richiedono l'uso di particolari sensori che avrebbero maggior ingombro e quindi maggiori difficoltà di movimento del meccanismo.
- **Pneumatici:** inizialmente i più utilizzati per la loro economicità e affidabilità uniti al fatto che sono facili da programmare, specialmente se si usano delle valvole elettropneumatiche di tipo on/off, però sono molti ingombranti nel complesso quando si tiene conto dei vari tubi di collegamento del gas utilizzato e soprattutto non è facile controllarli dal punto di vista della velocità e della posizione dei pistoni.
- **Idraulici:** vengono utilizzati quando sono necessarie forze elevate con volumi limitati, potendo anche controllarle facilmente attraverso valvole e servo-valvole, sia in velocità che accelerazione; purtroppo però richiedono notevole ingombro non solo all'interno del meccanismo ma anche al di fuori perché necessitano di impianti che molte volte non hanno dimensioni ridotte dove sono presenti a seconda dei casi filtri, serbatoi, accumulatori e altri macchinari, quindi la percentuale di guasto e il costo di manutenzione aumentano esponenzialmente rispetto agli attuatori citati precedentemente.

### 1.4.3 End-effector

Gli end-effector sono quei dispositivi che svolgono l'effettivo lavoro per cui è stato creato il manipolatore, a seconda dei compiti da svolgere da parte del robot possono esserne usati di molteplici tipologie che vanno a incidere in modo determinante l'analisi dinamica del meccanismo a causa delle inerzie date dalla differenza di peso e dimensione. In molti casi si utilizzano delle pinze, ventose o altri dispositivi di presa in modo da poter spostare l'oggetto da lavorare o per poterlo mettere in appositi materiali per l'imballaggio, altre volte si collegano dei dispositivi elettronici, come il laser, se lo scopo è quello di eseguire dei tagli molto accurati e con estrema precisione nelle lamiere o in altri oggetti prevalentemente piani. Infine, è possibile collegare degli utensili per modificare, forare, fresare e intagliare un determinato stampo metallico o plastico.



# Capitolo 2

## Manipolatore piano in esame

*In questo capitolo si andrà a esporre le varie parti del manipolatore, in particolar modo le sue caratteristiche strutturali e i possibili azionamenti elettrici utilizzabili, descrivendo, inoltre, alcuni problemi che si possono riscontrare durante la progettazione.*

### 2.1 Struttura

Precedentemente sono stati descritti le possibili tipologie di manipolatori piani che si possono trovare in ambito industriale; vediamo ora le caratteristiche di quello preso in esame, partendo dalla struttura fisica e dai componenti.

Le parti meccaniche possono essere riassunte in:

- Il telaio, una parte fissa, dove sono montati i motori elettrici
- i membri, ovvero i corpi rigidi in movimento del meccanismo
- i giunti, che permettono l'interconnessione tra le varie parti
- un end-effector, che svolge la funzione finale adottata.

In questo meccanismo sono presenti sei membri rigidi di egual lunghezza collegati tra loro a coppie tramite degli accoppiamenti cinematici, dette coppie rotoidale, le quali possono solamente eseguire solamente una rotazione su un piano ben definito, andando a formare tre catene cinematiche strutturalmente identiche tra loro che definiamo come diadi RRR, in modo da avere tre coordinate libere su cui dover agire per spostare il nostro end-effector, dato che ne sono presenti più di una questo comporta che le varie traiettorie per poter arrivare da un punto all'altro possono essere infinite a causa della sovrapposizione degli effetti dei movimenti dovuti ai tre motori.

La struttura del telaio deve essere il più robusta possibile man mano che le dimensioni dell'intero manipolatore aumentano, questo perché oltre che alla solidità in sé bisogna pensare anche al problema delle possibili vibrazioni che si creano quando il meccanismo è in funzione che generano degli spostamenti involontari andando a

compromettere la precisione e quindi la posizione dell'utilizzatore dove in alcuni casi potrebbero risultare compromettenti per l'esito finale del prodotto.

A differenza delle parti sopra citate i membri si cerca di realizzarli in un materiale leggero mantenendo comunque una certa rigidità strutturale in modo che i contributi di inerzia generati incidano il meno possibile o che addirittura risultano trascurabili nel calcolo della coppia effettiva richiesta da tutto il manipolatore, ma garantendo in ogni caso sicurezza e durabilità delle parti. In seguito possiamo vedere una rappresentazione del meccanismo progettato:

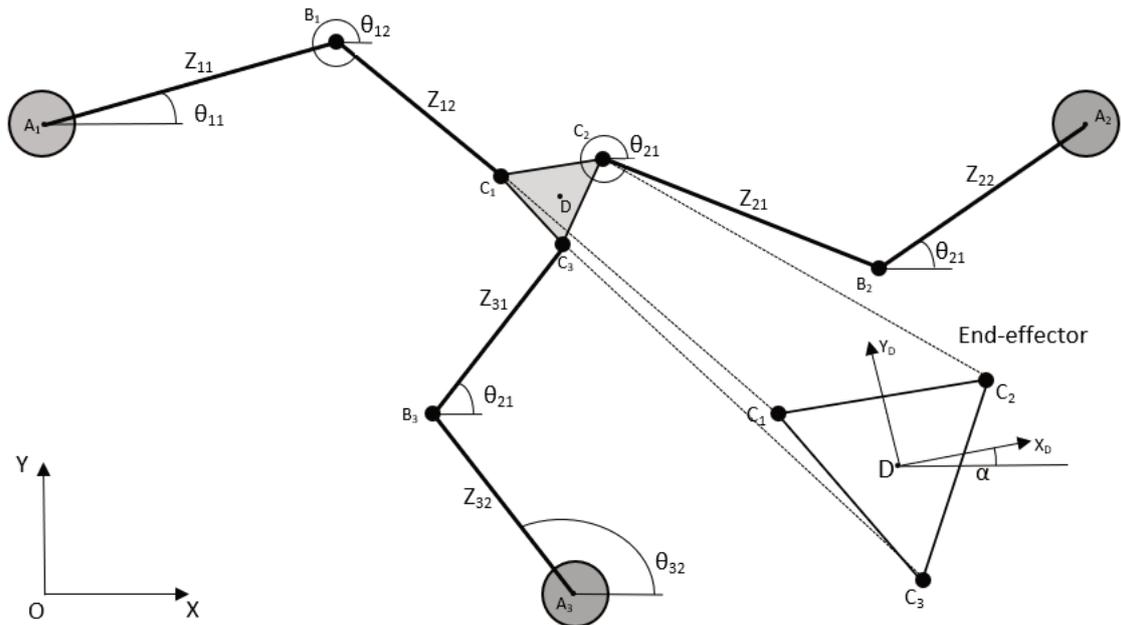


Figura 2.1: Manipolatore piano a 3RRR

## 2.2 Giunti

Come si può vedere dalla figura 1.1 il manipolatore piano composto da tre RRR permette di utilizzare un unico tipo di giunto, la coppia rotoidale, che consente solamente la rotazione di due membri, uno rispetto all'altro. Questa scelta è stata fatta principalmente per non avere ridondanze da tenere in considerazione durante l'analisi cinematica e dinamica che sarebbero andate a incrementare notevolmente la complessità dei calcoli e inoltre anche dal punto di vista di un futuro controllo da parte di un microcontrollore avrebbe avuto un impatto notevole sulla stesura del codice e dei tempi di calcolo. Inoltre, questa configurazione permette di usare meno accoppiamenti cinematici rispetto a quelli proposti e quindi come conseguenza si ha un minor costo economico, sia all'inizio che successivamente in fase di manutenzione.

## 2.3 Motore

La coppia necessaria utilizza in questo tipo di manipolatori può comprendere diverse tipi di configurazioni compresi tra i motori elettrici e gli attuatori lineari, come ad esempio dei pistoni alimentati da valvole, come succede solitamente per le stampanti 3D; invece, nei meccanismi più complessi si applicano delle soluzioni ibride. Siccome l'analisi di questa automazione prevede tre bracci fissi a telaio avremo bisogno quindi di tre attuatori rotanti e non lineari.

In questo caso si può optare per dei motori DC o BLDC, adatti prevalentemente per il loro piccolo ingombro e per la facilità di generare coppia quando le potenze in gioco sono limitate anche se necessitano di almeno un sensore di velocità, oltre a quello di corrente per evitarne i picchi che andrebbero a danneggiare i conduttori presenti al suo interno. Alimentati a 24V se si vogliono controllare tramite un PLC in modo che si possa utilizzare la stessa fonte di alimentazione unita eventualmente a un circuito di potenza, chiaramente se si pensa di adoperare un hardware come questo solamente per un tipo di meccanismo molte volte potrebbe non risultare una scelta molto conveniente, mentre sarebbe più adeguato se fosse parte di un sistema di automazione più complesso dove al suo interno sono presenti più macchine industriali controllate insieme.

Nel caso si pensi di controllare il manipolatore tramite un microcontrollore allora dovrà essere considerata una seconda generazione di tensione diversa dalla precedente, anche questa configurazione qua potrebbe portare ad avere dei costi specifici più elevati in riferimento al solo meccanismo. Un ulteriore tipologia di motori utilizzati può essere quelli a passo classici oppure ibridi, che consentono di avere una alimentazione AC e soprattutto non necessitano di un encoder per la rilevazione della posizione del rotore essendo già a conoscenza in base a come viene alimentato nei vari momenti.

## 2.4 End-effector

Per l'utilizzo finale si è progettato un dispositivo a laser per l'incisione di parti metalliche o altri materiali, che possa essere intercambiabile a seconda dell'uso e della tipologia utilizzata. Questo è possibile grazie alla mobilità del manipolatore dove le sue tre catene cinematiche e i tre gradi di libertà, permettono di disegnare le traiettorie prestabilite e soprattutto di essere anche molto preciso nel risultato finale. Inoltre, se consideriamo l'ingombro abbiamo un'ottima base di partenza perché oltre al dispositivo stesso dovremo solamente aggiungere i collegamenti di alimentazione ed eventualmente di gestione del raggio laser, che essendo un meccanismo piano potremo sviluppare in modo arbitrario verso l'alto senza compromettere la traiettoria dell'end-effector. L'unica componente da tenere bene in considerazione è il peso e le sue dimensioni effettive perché possono incidere sulla sua inerzia e quindi andare a modificare la coppia richiesta e le varie accelerazioni dove si cerca sempre di ottenere dei valori limitati in modo che il meccanismo non sia soggetto a particolari forze riducendo così il fenomeno della fatica e quindi dell'usura nel lungo periodo.



# Capitolo 3

## Analisi cinematica

### 3.1 Introduzione

Data la configurazione di questo manipolatore e analogamente anche quelli già descritti in precedenza, possiamo notare come non ci sia un'unica configurazione per raggiungere una determinata posizione ma avendo più di una coordinata libera, ovvero più motori da poter muovere nello stesso momento, le possibili soluzioni per far arrivare l'end-effector possono essere infinite, tranne in alcuni casi dove uno o più bracci sono già in completa estensione e quindi in un punto di una ipotetica circonferenza con raggio massimo uguale alla somma dei due membri adiacenti.

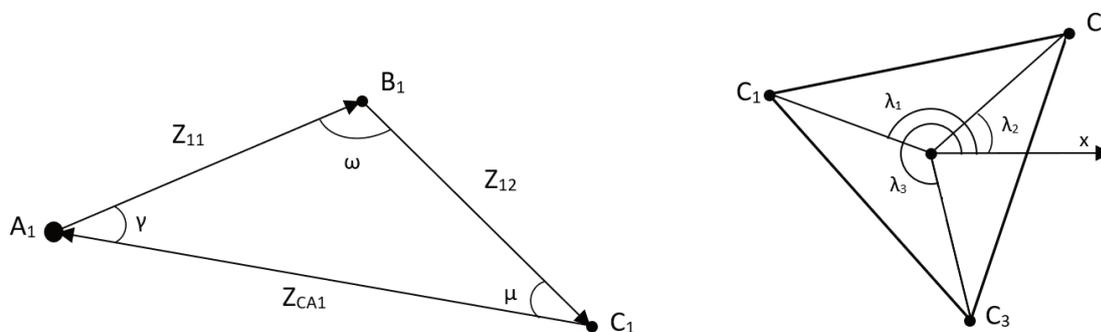
A causa di questo motivo non si partirà da un'analisi diretta ma inversa, per ciò come dato di partenza utilizzeremo le coordinate esplicitate dall'end-effector e successivamente andremo a calcolare i vari angoli che devono assumere i rispettivi membri. In ogni caso, per semplificare tutta la procedura da eseguire definiamo lo schema cinematico attraverso una rappresentazione CAD del meccanismo dove poi si associano un insieme di vettori, uno per ciascun membro, che andranno a formare l'equazione di chiusura.

A questo punto è stato possibile iniziare l'analisi di velocità tramite la composizione di matrici, dove al loro interno sono presenti tutti i coefficienti ricavati precedentemente che vanno a sostituire in ciascuna equazione vettoriale relativa a ogni singolo membro. In modo da poter ricavare il vettore velocità delle coordinate libere necessario per la successiva l'analisi dinamica. Le formule in questo caso sono strettamente correlate perchè da quelle usate precedentemente viene eseguita una derivata di primo grado rispetto al tempo.

## 3.2 Analisi di posizione

Normalmente in un'analisi di posizione classica per i meccanismi a un solo grado di libertà si inizierebbe a capire come è scomponibile la struttura per semplificarlo in diadi o tetradi, oltre al meccanismo base. In questo caso però non procederemo così ma direttamente dalla posizione dove vogliamo collocare l'end-effector, infatti parliamo di analisi di posizione inversa rispetto al calcolo di un normale meccanismo a un solo grado di libertà. Definiamo per la posizione di quest'ultimo le variabili di  $x$  e  $y$  che determineranno la distanza dai due assi cartesiani in qualsiasi momento e che successivamente andremo a variare in base alla traiettoria impostata, considerando un ipotetico piano cartesiano classico, attraverso l'asse delle ascisse e delle ordinate, dove saremo noi in modo arbitrario a scegliere l'origine degli assi in un punto  $O(X_0, Y_0)$ , per la determinazione della posizione si è voluto partire dall'origine degli assi posti in un angolo del piano di lavoro mentre per il valore della rotazione  $\alpha$  si parte dall'asse delle ascisse. In base a dove è collocato l'end-effector prenderemo in considerazione

il suo punto  $D$ , nonché il suo baricentro, oltre ad altri parametri riferiti ad esso, come la distanza e la sua rotazione in modo da individuare la posizione dei punti  $C_i$  necessari per il calcolo degli angoli attraverso l'uso delle diadi. Quest'ultime sono delle catene cinematiche che non alterano il numero di gradi di libertà del meccanismo e che permettono di risolvere il modo semplice e veloce la posizione di ogni membro e il suo angolo di rotazione in quanto possono essere semplificate in un grafico diventando a tutti gli effetti un triangolo scaleno solitamente, figura 3.1, in cui è applicabile il teorema del seno e del coseno, mostrati in seguito.



**Figura 3.1:** Diade catena cinematica 1 e end-effector

Innanzitutto bisogna individuare il punto della coppia cinematica posta in  $C_i$  attraverso il calcolo delle coordinate del vettore  $\mathbf{h}$ , dove per  $i$  s'intende il numero della catena cinematica, che dipende dal suo modulo e dalla sua orientazione e rotazione rispetto all'asse delle ascisse, in questo modo è possibile risalire alla posizione di  $C$  tramite la semplice somma di vettori:

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} + \mathbf{h} \quad (3.1)$$

che scritto rispetto alle coordinate diventa semplicemente:

$$\begin{bmatrix} x_{C_i} \\ y_{C_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \end{bmatrix} + h_i \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \lambda_i) \\ \sin(\alpha + \lambda_i) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

dove  $\lambda_i$  e  $\alpha$  sono gli angoli di rotazione in relazione al vettore  $\mathbf{h}$  e all'interno dell'end-effector rispetto all'asse delle ascisse originario.

Da questo momento è possibile procedere al calcolo di risoluzione della diade ABC, individuando inizialmente un vettore ipotetico di collegamento tra il punto a telaio  $A_i$ , definito come un invariante e quello appena identificato precedentemente  $C_i$ , ottenendo così il vettore  $Z_{AC_i}$  tramite le loro coordinate:

$$Z_{AC_i} = \sqrt{(x_{C_i} - x_{A_i})^2 + (y_{C_i} - y_{A_i})^2} \quad (3.3)$$

oltre al suo modulo è importante anche calcolare il suo angolo di rotazione  $\theta_{AC_i}$

$$\theta_{AC_i} = \arctan\left(\frac{y_{C_i} - y_{A_i}}{x_{C_i} - x_{A_i}}\right) \quad (3.4)$$

Dati gli elementi noti, come la lunghezza dei membri, uniti ai calcoli precedenti sarà possibile usufruire del Teorema del coseno, definito anche come Teorema di Carnot che permette di individuare tutti gli angoli interni del triangolo formato dalla diade in questo caso, per individuare gli angoli effettivi dei due membri necessari a completare l'analisi di posizione.

$$Z_{BC}^2 = Z_{AB}^2 + Z_{AC}^2 - 2Z_{AB}Z_{AC}\cos(\gamma_i) \quad (3.5)$$

Quindi invertendo la formula principale del teorema per il calcolo degli angoli,

$$\gamma_i = \arccos\left(\frac{Z_{i1}^2 + Z_{AC_i}^2 - Z_{i2}^2}{2Z_{i1}Z_{AC_i}}\right) \quad (3.6)$$

$$\mu_i = \arccos\left(\frac{Z_{i2}^2 + Z_{AC_i}^2 - Z_{i1}^2}{2Z_{i2}Z_{AC_i}}\right) \quad (3.7)$$

ottenendo così gli angoli interni del triangolo in modo da determinare quelli effettivi dei due membri della catena cinematica in esame

$$\theta_{i1} = \theta_{AC_i} + \gamma_i \quad (3.8)$$

$$\theta_{i2} = \theta_{AC_i} - \mu_i + \pi \quad (3.9)$$

A questo punto possiamo dire di aver copletato l'analisi di posizione in tutti i suoi elementi utili alle successive analisi di velocità e accelerazione necessarie per il calcolo delle coppie finale, non dimentichiamo che tutti i precedenti calcoli vanno eseguiti per ogni catena cinematica e quindi il numero totale di queste equazioni, come di quelle successive va a moltiplicarsi per tre.

### 3.3 Analisi di velocità

Continuamo la nostra analisi cinematica attraverso la parte relativa alle velocità del meccanismo, che in questo caso si riferiscono solamente a quelle angolari dei rispettivi membri e dell'end-effector perchè non avendo coppie cinematiche prismatiche le uniche velocità relative saranno quelle del punto D. Le equazioni partono da un'idea generale nel quale per procedere bisogna derivare nel tempo alcune espressioni utilizzate nell'analisi di posizione partendo dalla 3.1 che dopo aver eseguito le sue derivate diventerà:

$$\dot{C}_i = \dot{D} + \dot{h}_i = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_h \quad (3.10)$$

Dove il vettore  $\dot{C}_i$  rappresenta la differenza di velocità tra il punto D e il vettore  $h_i$ .

Successivamente bisogna esplicitare le componenti rispetto a  $x$   $y$  delle velocità di  $\dot{C}_i$  derivando quindi la 3.2 per ottenere due valori da utilizzare come se fossero delle coordinate libere per il calcolo dell'equazione di chiusura di velocità applicata alle 3 diadi espresse precedentemente.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{C_i} \\ \dot{y}_{C_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_D \\ \dot{y}_D \end{bmatrix} + h_i \begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \lambda_i) \\ \cos(\alpha + \lambda_i) \end{bmatrix} \dot{\alpha} \quad (3.11)$$

Partendo sempre dall'equazione vettoriale di chiusura della diade  $\dot{C}_i = \dot{Z}_{i1} + \dot{Z}_{i2}$ , quindi, è possibile tramite la derivata risalire alle velocità angolari dei due membri,  $\theta_{i1}$  e  $\theta_{i2}$ .

Per semplificare i passaggi si procederà direttamente alla forma matriciale dell'equazione che deriva dal sistema a due equazioni e due incognite perchè in riferimento al numero di assi utilizzati nel piano.

$$\begin{bmatrix} -Z_{i1} \sin(\theta_{i1}) & -Z_{i2} \sin(\theta_{i2}) \\ Z_{i1} \cos(\theta_{i1}) & Z_{i2} \cos(\theta_{i2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{i1} \\ \dot{\theta}_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{C_i} \\ \dot{y}_{C_i} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

che definendo  $\mathbf{J}$  come la matrice Jacobiana contenente i rapporti di velocità quando viene invertita, tra le velocità angolari  $\theta_{ij}$  e la coordinata libera in questione  $\dot{C}_i$ , dove sarà espressa in questo modo:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -Z_{i1} \sin(\theta_{i1}) & -Z_{i2} \sin(\theta_{i2}) \\ Z_{i1} \cos(\theta_{i1}) & Z_{i2} \cos(\theta_{i2}) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

ora si può riscrivere l'equazione 3.12, semplificandola notevolmente prima di poterla andare a risolvere, ottenendo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{i1} \\ \dot{\theta}_{i2} \end{bmatrix} = \frac{-1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} Z_{i2} \cos(\theta_{i2}) & -(-Z_{i2} \sin(\theta_{i2})) \\ -Z_{i1} \cos(\theta_{i1}) & -Z_{i1} \sin(\theta_{i1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{C_i} \\ \dot{y}_{C_i} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}_{C_i} \\ \dot{y}_{C_i} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Attraverso questo metodo andremo a completare l'analisi di velocità per tutte e 3 le catene cinematiche, fondamentale sia per completare la successiva analisi di accelerazione in quanto tutte le velocità potrebbero andare a variare le accelerazioni angolari in questo caso e in altri anche le accelerazioni relative incognite.

Un altro aspetto importante per l'analisi precedente si può notare attraverso i rapporti di velocità  $\mathbf{K}$  che ci permetteranno di calcolare la coppia necessaria da generare dei motori quando applicheremo il Principio dei lavori virtuali. In questo particolare caso  $\mathbf{K}$  coincide con la matrice inversa della jacobiana,  $\mathbf{K} = \mathbf{J}^{-1}$  se mette in relazione la velocità della coordinata libera e quella del punto  $C$ , diversamente sarebbe se al posto di  $C$  utilizzassimo la velocità di  $D$ ; perchè dall'equazione caratteristica  $\mathbf{J}\dot{X} = \mathbf{A}\dot{q}$ , dove per  $\dot{q}$  s'intende la matrice delle coordinate libere  $\dot{q}_i$ , la matrice  $\mathbf{A}$  non è presente perchè gli elementi di  $\dot{q}_i$  sono già presenti in relazione ai due assi cartesiani  $x$  e  $y$ .

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} k_{\theta_{i1},x_{ci}} & k_{\theta_{i2},y_{ci}} \\ k_{\theta_{i2},x_{ci}} & k_{\theta_{i2},y_{ci}} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

### 3.4 Analisi di accelerazione

L'analisi di accelerazione si svolge in modo analogo e conseguentemente a quella di velocità citata nel paragrafo precedente, infatti, tutto parte dalla stessa formula, la 3.10, dove si effettuerà un'ulteriore derivata rispetto al tempo. L'unica differenza tra la formula sopracitata e quella seguente la si può notare successivamente perchè vi sono presenti i vettori delle coordinate libere accelerazione  $\ddot{C}_i$  insieme alle componenti dell'accelerazione centripeta dei 2 membri,  $Z_{i1}$  e  $Z_{i2}$ , dipendenti dal quadrato delle loro velocità angolari. Questo perchè nella refeqn:vCDH oltre ai termini già citati pocanzi sono presenti anche quelli di accelerazione relativa e di Coriolis, ma nulli in questo caso perchè i nostri meccanismi base sono solamente rotativi, e quindi non presentano uno spostamento relativo dei membri. Possiamo eseguire la derivata all'equazione che diventerà:

$$\ddot{C}_i = \ddot{D} + \ddot{h}_i = \mathbf{a}_d + \mathbf{a}_h \quad (3.16)$$

Dove il vettore  $\ddot{C}_i$  rappresenta la differenza di accelerazione tra il punto D e il vettore  $\mathbf{h}_i$ . Successivamente bisogna esplicitare le componenti rispetto a  $x$   $y$  delle accelerazioni nel punto  $C$  derivando quindi la 3.11 per ottenere due valori da utilizzare come se fossero delle coordinate libere per il calcolo dell'equazione di chiusura di accelerazione applicata alle 3 diadi espresse in precedenza.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_{C_i} \\ \ddot{y}_{C_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_D \\ \ddot{y}_D \end{bmatrix} + h_i \left( \begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \lambda_i) \\ \cos(\alpha + \lambda_i) \end{bmatrix} \ddot{\alpha} + \begin{bmatrix} -\cos(\alpha + \lambda_i) \\ -\sin(\alpha + \lambda_i) \end{bmatrix} \dot{\alpha}^2 \right) \quad (3.17)$$

A questo punto, dopo aver conosciuto l'accelerazione del punto C sarà possibile utilizzare l'equazione di chiusura di accelerazione delle tre diadi presenti dove si avrà  $\ddot{C}_i = \ddot{Z}_{i1} + \ddot{Z}_{i2}$ , analogamente al paragrafo precedente, ottenendo anche in questo caso un sistema lineare a due equazioni e due incognite dove avremo come incognita le accelerazioni angolari dei due membri,  $\ddot{\theta}_{i1}$  e  $\ddot{\theta}_{i2}$ , determinanti dall'accelerazione lineare del punto  $C_i$  e dalle velocità angolari dei due membri che compongono, appunto, l'accelerazione centripeta.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} -Z_{i1} \sin(\theta_{i1}) \ddot{\theta}_{i1} & -Z_{i1} \cos(\theta_{i1}) \dot{\theta}_{i1}^2 & -Z_{i2} \sin(\theta_{i2}) \ddot{\theta}_{i2} & -Z_{i1} \cos(\theta_{i2}) \dot{\theta}_{i2}^2 = \ddot{x}_C \\ Z_{i1} \cos(\theta_{i1}) \ddot{\theta}_{i1} & -Z_{i1} \sin(\theta_{i1}) \dot{\theta}_{i1}^2 & Z_{i2} \cos(\theta_{i2}) \ddot{\theta}_{i2} & -Z_{i2} \sin(\theta_{i2}) \dot{\theta}_{i2}^2 = \ddot{y}_C \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

Dove in forma matriciale diventerà:

$$\begin{bmatrix} -Z_{i1} \sin(\theta_{i1}) & -Z_{i2} \sin(\theta_{i2}) \\ Z_{i1} \cos(\theta_{i1}) & Z_{i2} \cos(\theta_{i2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{i1} \\ \ddot{\theta}_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{C_i} - (-Z_{i1} \cos(\theta_{i1}) \dot{\theta}_{i1}^2 - Z_{i1} \cos(\theta_{i2}) \dot{\theta}_{i2}^2) \\ \ddot{y}_{C_i} - (-Z_{i1} \sin(\theta_{i1}) \dot{\theta}_{i1}^2 - Z_{i2} \sin(\theta_{i2}) \dot{\theta}_{i2}^2) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Come si può dall'equazione precedente otterremo la stessa matrice Jacobiana dell'analisi di velocità, questo permette non solo di semplificare i passaggi una volta che ci si porterà al calcolatore ma potrà servire anche come controprova in caso di necessità.

A questo punto si va a riscrivere la 3.19 attraverso  $\mathbf{J}$  riducendone la lunghezza e la sua complessità.

$$\begin{bmatrix} J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{i1} \\ \ddot{\theta}_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{C_i} - (-Z_{i1} \cos(\theta_{i1}) \dot{\theta}_{i1}^2 - Z_{i1} \cos(\theta_{i2}) \dot{\theta}_{i2}^2) \\ \ddot{y}_{C_i} - (-Z_{i1} \sin(\theta_{i1}) \dot{\theta}_{i1}^2 - Z_{i2} \sin(\theta_{i2}) \dot{\theta}_{i2}^2) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

sviluppando i vari passaggi otterremo infine

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{i1} \\ \dot{\theta}_{i2} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{C_i} - (-Z_{i1} \cos(\theta_{i1}) \dot{\theta}_{i1}^2 - Z_{i1} \cos(\theta_{i2}) \dot{\theta}_{i2}^2) \\ \ddot{y}_{C_i} - (-Z_{i1} \sin(\theta_{i1}) \dot{\theta}_{i1}^2 - Z_{i2} \sin(\theta_{i2}) \dot{\theta}_{i2}^2) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

I risultati ottenuti da quest'ultima analisi cinematica servono soprattutto per il calcolo delle forze d'inerzia nella successiva analisi dinamica come si può vedere in seguito, un aspetto molto importante da tenere in considerazione per le accelerazioni è che bisogna cercare di tenerle ad un valore limitato perchè determinano in modo significativo le forze in gioco nel meccanismo e quindi le rispettive coppie da contrapporre ad esse.

Nel caso ci fossero stati presenti degli attuatori ridondanti, come quelli riportati nella figura 1.1, si avrebbe avuto una notevole complicazione delle formule relative da dover utilizzare, per calcolare ad esempio tutte le velocità e accelerazioni degli attuatori lineari. Chiaramente maggiori sono le velocità e accelerazioni in gioco e successivamente tutte le parti meccaniche dovranno essere progettate in base alle inerzie presenti che dovremmo inserire all'interno dei calcoli per la generazione della coppia.



# Capitolo 4

## Analisi dinamica

### 4.1 Introduzione

L'analisi dinamica ha come scopo il calcolo di tutte le forze agenti nel meccanismo, sia quelle che si generano dal movimento delle parti meccaniche oltre a quelle che dobbiamo generare noi attraverso gli attuatori elettrici. Generalmente ci sono approcci diversi per calcolare i momenti e le forze indotte dal manipolatore che variano a seconda dei casi e in base alla complessità. In questo documento si è preferito studiare la dinamica del meccanismo attraverso un approccio Newtoniano dove si devono andare a studiare tutte le forze agenti su ogni membro, producendo solitamente come controindicazione il numero totale di equazioni da dover sviluppare ma dato il sistema che presenta solo tre catene cinematiche simili e grazie al programma di simulazione si è potuto trascurare questo dettaglio, per poi inserirlo nel secondo metodo.

Prevalentemente nei meccanismi articolati piani che presentano molti membri si utilizza il "Principio dei Lavori Virtuali", definito in gergo PLV, nel quale si determinano le condizioni di equilibrio del sistema partendo dalle relazioni cinematiche, ma può essere applicato solo esclusivamente con vincoli olonomi e tempo invarianti (indipendenti dal tempo), dove un vincolo si dice olonomo quando viene espresso da relazioni finite (vincolo di posizione o velocità). Questo metodo può essere utilizzato nei meccanismi grazie al Principio di D'Alembert dove si enuncia che uno stato di moto si considera in equilibrio quando combaciano le forze esterne e le forze inerziali.

Per il calcolo di generazione della coppia si è preferito utilizzare il PLV perché consentiva di adoperare nelle formule e nei calcoli le matrici create precedentemente attraverso il metodo Newtoniano.

Un secondo metodo da poter utilizzare si basa su una formulazione energetica del sistema calcolata attraverso le Equazioni di Lagrange, dette anche Eulero-Lagrange, si sviluppano sia le forze esterne che quelle di inerzia in termini di energia cinetica del sistema che si conserva in un particolare istante.

## 4.2 Metodo newtoniano

Fondamentale nello studio dinamico del meccanismo è l'esame delle forze agenti su esso, possono essere interne od esterne rispetto al sistema considerato, indipendentemente dal genere di lavoro da esse compiuto. Queste forze poi non vengono utilizzate solamente per il calcolo finale della coppia ma servono anche per un eventuale dimensionamento dei giunti e degli accoppiamenti cinematici, in questo caso per le molteplici coppie rotoidali presenti in questo meccanismo dove sostanzialmente collegano tutti i vari membri presenti. Facendo riferimento al metodo classico per il

calcolo delle forze possiamo notare come esse non siano poche e in particolar modo possiamo notare che non bisogna considerare solamente le accelerazioni ma anche le velocità angolari perché anch'esse generano delle forze nel piano nella direzione della coordinata libera  $\theta_{ij}$ .

Tutte le formule utilizzate successivamente derivano originariamente da tre equazioni espresse nel piano, nella quale in linea generica si utilizza come punto di riferimento il centro di massa del membro considerato, dove per centro di massa o baricentro (CM) si intende la media delle coordinate dei punti del corpo, ponderata rispetto alle masse, divise per ogni direzione, in questo caso, siccome siamo nel piano si utilizzano solamente due equazioni:

$$M\ddot{x}_{CM} = \sum m_i \mathbf{r}_i \quad (4.1)$$

$$M\ddot{y}_{CM} = \sum m_i \mathbf{r}_i \quad (4.2)$$

Questo sistema complesso di equazioni può essere suddiviso in tre fasi distinte:

1. Scomposizione del manipolatore in membri singoli
2. Classificazione di tutte le forze agenti su ogni membro
3. Definizione delle equazioni di equilibrio
  - a. Forze relative all'asse delle ascisse (asse x) del piano (4.3).
  - b. Forze relative all'asse delle ordinate (asse y) del piano (4.4).
  - c. Momenti presenti lungo tutto il membro (4.5).

$$\mathbf{m}\ddot{x}_{CM} = \sum \mathbf{F}_x \quad (4.3)$$

$$\mathbf{m}\ddot{y}_{CM} = \sum \mathbf{F}_y \quad (4.4)$$

$$\mathbf{I}_R^O \ddot{\theta} = \sum \mathbf{M} \quad (4.5)$$

### 4.2.1 Equazioni Newtoniane

Come possiamo notare dall'equazione 4.6 infatti, si considerano le due forze distinte in base alla loro direzione ( $x$  e  $y$ ) derivanti dalla seconda legge della dinamica ( $F = ma$ ) in cui si utilizza la massa del primo dei due membri della stessa catena cinematica che andrà a moltiplicare non solo l'accelerazione relativa ( $\ddot{r}$ ) ma quest'ultima viene sommata all'accelerazione angolare del primo membro ( $\ddot{\theta}$ ) insieme alla sua accelerazione centripeta dipendente dal quadrato della velocità angolare ( $\dot{\theta}$ ), mentre il termine dell'accelerazione di Coriolis è nullo in quanto la lunghezza del membro è fissa e quindi la sua derivata sarà uguale a zero.

$$\mathbf{p}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ij} \\ M_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ij}^x = m_j [\ddot{r}_{ij}^x - \ddot{\theta}_{ij} s_{ij} \sin(\theta_{ij}) - \dot{\theta}_{ij}^2 s_{ij} \cos(\theta_{ij})] \\ F_{ij}^y = m_j [\ddot{r}_{ij}^y - \ddot{\theta}_{ij} s_{ij} \cos(\theta_{ij}) - \dot{\theta}_{ij}^2 s_{ij} \sin(\theta_{ij})] \\ M_{ij} = m_j s_{ij} [\ddot{r}_{ij}^x (\sin(\theta_{ij})) + \ddot{r}_{ij}^y (\cos(\theta_{ij})) + I_j \ddot{\theta}_{ij}] \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Siccome la massa dell'end-effector non si può considerare trascurabile, sarà necessario calcolare anche le sue accelerazioni relative nelle due direzioni ai fini successivi del calcolo inerziale. Diversamente dai membri invece questa volta l'eventuale rotazione dell'oggetto non influisce in modo determinante e quindi si può considerare trascurabile.

$$\mathbf{p}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e^x = \mathbf{m}_e \ddot{X} \\ \mathbf{F}_e^y = \mathbf{m}_e \ddot{Y} \\ M_e = I_e \ddot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Infine dopo aver calcolato tutte le forze presenti nel meccanismo e raggruppate nei due vettori  $\mathbf{p}_{ij}$  e  $\mathbf{p}_e$  possiamo iniziare il calcolo per la generazione della coppia attraverso il Principio dei Lavori Virtuali espresso nel successivo paragrafo.

### 4.3 Principio dei lavori virtuali

Il Principio dei Lavori Virtuali, abbreviato PLV, consente di calcolare le relazioni cinematiche dei meccanismi articolati nelle situazioni di equilibrio attraverso i campi di forza applicati, utilizzando un numero finito di coordinate libere  $q$ , insieme agli spostamenti di posizione cinematici, grazie al tipo di vincoli utilizzati. Come accennato nell'introduzione del capitolo 4, il PLV è applicabile solo per vincoli olonomi e tempo invarianti, dove nel primo caso s'intendono quei vincoli cinematici, definiti di posizione, dove i legami interni sono condizionati da relazioni finite oppure che i rapporti tra le coordinate libere siano espressi tramite equazioni differenziali, di velocità, integrabili. Nel secondo caso, semplicemente i vincoli sono indipendenti dal tempo e quindi si considerano i loro rapporti costanti.

Questo sistema mette in relazione di equilibrio le forze reali con possibili spostamenti virtuali che vengono identificati quando si rispettano tre principali caratteristiche, arbitrari, infinitesimi e devono essere compatibili con i vincoli cinematici del meccanismo. Si possono differenziare dagli spostamenti normali o reali tramite il prefisso  $\delta$ , mentre nel pedice si esplicita a quale asse si riferiscono oppure a un'eventuale rotazione  $\phi$ . L'insieme delle caratteristiche sopra elencate permette di definire uno spostamento virtuale come combinazione lineare di tutte le coordinate libere presenti come esplicitato nell'equazione sottostante:

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \delta q_n \quad (4.8)$$

Successivamente possiamo definire che il lavoro virtuale sarà dato dal prodotto scalare tra le forze reali e gli spostamenti immaginari, 4.9, nel quale se sono paralleli ed equiversi allora genereranno un risultato positivo mentre se sono opposti produrranno un lavoro negativo e contrario al precedente, in un particolare caso l'esito del prodotto risulta nulla, quando i due vettori sono ortogonali tra loro.

$$\delta L_i = \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{P}_i \quad (4.9)$$

Solamente a questo punto si può enunciare il PLV effettivo, il quale esprime che:

*La somma dei lavori virtuali di tutte le forze agenti deve essere nulla, come condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del sistema meccanico.*

$$\sum_i \delta L_i = 0 \quad (4.10)$$

Quindi ora si può definire che per la coppia necessaria al moltiplicata per lo spostamento virtuale angolare,  $\delta\phi$ , del nostro meccanismo equivarrà alla sommatoria di tutte le forze esterne agenti in relazione ai rispettivi spostamenti virtuali per ciascuno di essi, in questo modo otterremo il risultato desiderato limitando notevolmente il numero di equazioni rispetto al metodo Newtoniano.

## 4.4 Generazione della coppia

Solamente dopo le premesse e le equazioni precedenti attraverso l'uso combinato del Principio dei Lavori Virtuali e quello del metodo Newtoniano si può procedere con il calcolo effettivo della coppia generata dal meccanismo in virtù della traiettoria da far percorrere all'end-effector, che ne dipenderà 9 parametri, tre per ciascuna componente di posizione, velocità e accelerazione. Oltre ad essi si noterà come si è voluto fare una comune semplificazione, ovvero che si è trascurato il peso dei 6 membri del meccanismo, spesso usata in questi casi per semplificare i calcoli dato che risulterebbero comunque ininfluenti ai fini del risultato, visto che già in fase di progettazione viene considerata la massa dell'end-effector molto maggiore di quella dei membri dato che conterrà un dispositivo di azione.

Nell'equazione finale 4.11 si vuole partire dal PLV sviluppato nelle due dimensioni dato il meccanismo articolato piano ma con la presenza di 3 coppie da generare dovuti alle 3 catene cinematiche indipendenti.

$$C_1\delta\theta_{11} + C_2\delta\theta_{21} + C_3\delta\theta_{31} + F_{in}^x\delta x_D + F_{in}^y\delta y_D + C_{in}\delta\alpha = 0 \quad (4.11)$$

dove bisogna considerare le 2 forze d'inerzia in questo modo, dalle equazioni Newtoniane, 4.3 e 4.4, ottenendo:

$$F_{in}^x = -m_D\ddot{x}_D \quad (4.12)$$

$$F_{in}^y = -m_D\ddot{y}_D \quad (4.13)$$

da introdurre anche la coppia d'inerzia agente nel meccanismo che potrà variare a seconda dell'end-effector utilizzato, anch'essa deriva dal capitolo 4.2.1 precisamente dalla 4.5,

$$C_{in} = -I_e^{CM}\ddot{\alpha} \quad (4.14)$$

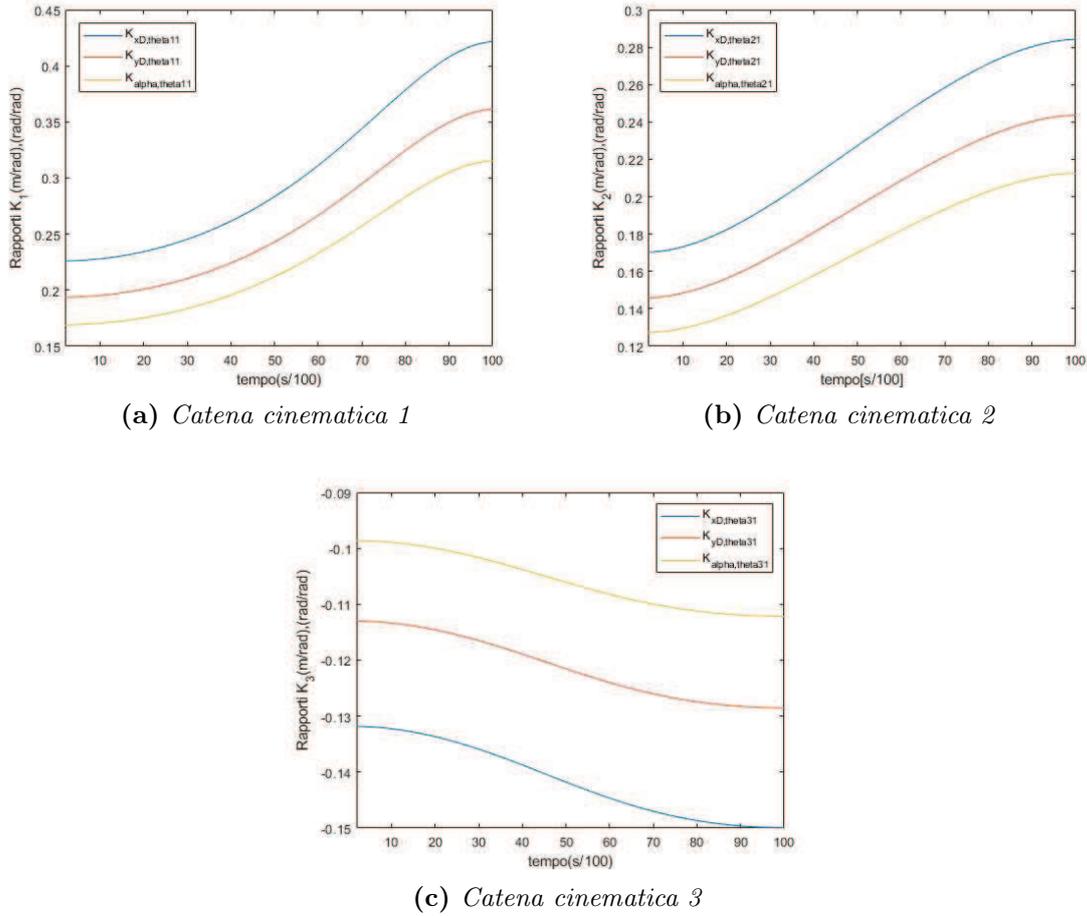
D'ora in avanti si può procedere dividendo le 3 equazioni nelle tre nostre incognite di coppia formulando un sistema, introducendo i rapporti di velocità ogni qualvolta ne è stato generato in modo da poter riferire gli spostamenti virtuali al solo spostamento della coordinata libera, quindi utilizzeremo i tre rapporti di velocità seguenti:

$$k_{x_D,\theta_{i1}} = \frac{\dot{x}_D}{\dot{\theta}_{i1}} \quad (4.15)$$

$$k_{y_D,\theta_{i1}} = \frac{\dot{y}_D}{\dot{\theta}_{i1}} \quad (4.16)$$

$$k_{\alpha,\theta_{i1}} = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\theta}_{i1}} \quad (4.17)$$

In seguito si può notare l'andamento di quest'ultimi citati pocanzi, notando come essendo dipendenti dalla posizione, anche calcolati in questo modo, comunque seguono un andamento simile alla traiettoria di posizione



**Figura 4.1:** Rapporti di velocità

Infine, combinando le varie equazioni sopra citate arriveremo in conclusione a un sistema finale di 3 funzioni dove al calcolatore otterremo i risultati voluti

$$C_1 = -F_{in}^x k_{x_D, \theta_{11}} - F_{in}^y k_{y_D, \theta_{11}} - C_{in} k_{\alpha, \theta_{11}} \quad (4.18)$$

$$C_2 = -F_{in}^x k_{x_D, \theta_{21}} - F_{in}^y k_{y_D, \theta_{21}} - C_{in} k_{\alpha, \theta_{11}} \quad (4.19)$$

$$C_3 = -F_{in}^x k_{x_D, \theta_{31}} - F_{in}^y k_{y_D, \theta_{31}} - C_{in} k_{\alpha, \theta_{11}} \quad (4.20)$$

Ogni calcolo delle coppie  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  varia a seconda dei parametri del punto D e della sua rotazione  $\alpha$ , quindi quando si applicano più vettori che rappresentano la traiettoria da percorrere dell'end-effector conseguentemente non ci risulterà un solo valore ma una sequenza di essi visibili grazie al calcolatore utilizzato, Matlab in questo caso, in un grafico posizione-coppia oppure velocità-coppia.

# Capitolo 5

## Evoluzione dinamica delle prestazioni

### 5.1 Introduzione

Nell'ultimo capitolo di questo elaborato si vuole mostrare come possono venire utilizzate i concetti e le formule precedentemente descritte in modo da ottenere dei valori, in questo caso delle tre coppie, applicabili in un possibile manipolatore reale, uscendo dal campo della simulazione. Per poter fare questo bisogna innanzitutto chiarire quali sono gli input che noi applichiamo al sistema e definire gli invarianti del meccanismo, come possono essere le lunghezze dei membri e la posizione degli attuatori dove esplicheremo appunto le coppie da generare dai motori.

Per poter definire tutto ciò quindi, abbiamo bisogno di una traiettoria da far percorrere all'end-effector che indica la strada e i punti di lavoro fermi o in movimento in base alle mansioni richieste. Nel prossimo paragrafo indicheremo il quale funzione si ha utilizzato e ne mostreremo graficamente degli esempi prodotti tramite il simulatore di calcolo come Matlab. I vari task da compiere vengono quindi espressi mediante una sequenza di comandi che generano a sua volta più traiettorie che successivamente verranno messe in sequenza lungo tutto il tempo di esecuzione del manipolatore.

Quindi come mostrato in seguito basterà indicare solamente il punto di inizio e di fine movimento nel piano di lavoro, per ogni asse, e l'eventuale rotazione dell'end-effector nel caso in cui il suo lavoro equivalente indipendentemente dalla sua angolazione e in alcuni casi lo spostamento lo porterà a ruotare in modo da non indurre il meccanismo in singolarità, creando problemi di coppia e perdendo in alcuni casi una delle coordinate libere del sistema.

Tutto questo permette non solo di essere indipendente dal tipo di hardware che si vuole utilizzare perchè non richiede particolari funzioni ma semplicemente un calcolatore che rispetti i tempi di esecuzione in una possibile applicazione real-time. A vantaggio di ciò si può scegliere anche il software più opportuno in base anche al modo e ai tempi di programmazione e le eventuali modifiche al programma in fasi successive alla messa in servizio della macchina. Durante la fase di progettazione e simulazione, come si può evincere dalle formule di generazione della coppia del paragrafo 4.4, si è fatta un'approssimazione nel caso della massa dei sei membri in quanto venendo considerata come ipotesi molto più piccola della massa dell'end-effector le forze di inerzia generate sono ininfluenti in modo da poter non essere considerate.

## 5.2 Generazione di una traiettoria

Le traiettorie generate successivamente sono delle funzioni molto semplici da poter determinare e soprattutto da impostare in quanto basta decidere solamente i punti di partenza e di arrivo dell'end-effector per poi continuare a modificare questi due parametri per le tre tipologie di valori, asse delle ascisse e ordinate oltre alla rotazione. Dai principi di fisica sappiamo che la posizione e la velocità sono correlate matematicamente in quanto quest'ultima è la derivata della prima, permettendo così di avere gli stessi coefficienti, quando sono presenti, tra le due funzioni; discorso totalmente analogo tra la formula di velocità e accelerazione come si può notare in seguito.

$$x_D = x_D(t) = a_{0x} + a_{1x}t + a_{2x}t^2 + a_{3x}t^3 \quad (5.1)$$

Eseguiamo adesso l'operazione di derivata in funzione del tempo per la funzione  $x_D(t)$  ottenendo:

$$\dot{x}_D = \dot{x}_D(t) = a_{1x} + 2a_{2x}t + 3a_{3x}t^2 \quad (5.2)$$

ripetiamo la stessa operazione per ottenere la funzione dell'accelerazione

$$\ddot{x}_D = \ddot{x}_D(t) = 2a_{2x} + 6a_{3x}t \quad (5.3)$$

Si evita in seguito di mostrare le equazioni per la variabile  $y$  e  $\alpha$  in quanto sono del tutto analoghe tranne per i coefficiente e la denominazione dei pedici chiaramente, ottenendo così nove variabili diverse da inserire nell'analisi dinamica più la determinazione del periodo.

Per i coefficienti citati nelle formule pocanzi vengono scelti in base ai alla posizione di partenza e arrivo consentendo un notevole risparmio del tempo di calcolo e di spazio in memoria nel possibile microcontrollore che avrebbe la funzione di un cervello per il meccanismo. In termini matematici questi elementi possono venire intesi come coefficienti del problema di Cauchy che permettono di sviluppare la funzione nel piano in questo caso o in un possibile spazio.

$$a_{0x} = x_{D0} \quad (5.4)$$

$$a_{1x} = 0 \quad (5.5)$$

$$a_{2x} = \frac{3h_x}{T^2} \quad (5.6)$$

$$a_{3x} = \frac{-2h_x}{T^3} \quad (5.7)$$

Siccome le funzioni che determinano la traiettoria sono espresse nel dominio del tempo bisogna considerare anche un periodo  $T$  nella quale il manipolatore può eseguire lo spostamento, dove minore sarà il valore del periodo e maggiore appariranno i coefficienti derivanti da esso generando alti valori di velocità e di accelerazioni che andranno a influenzare sia le forze d'inerzia del meccanismo che le coppie finali delle coordinate libere, dove a loro volta subiranno un significativo incremento.

Inversamente, invece, se l'end-effector ci metterà più tempo a spostarsi da una due posizioni distinte allora ci permetterà di rilevare valori di coppia decisamente inferiori rispetto al caso precedente con notevole risparmio in termini di energia generata dai motori.

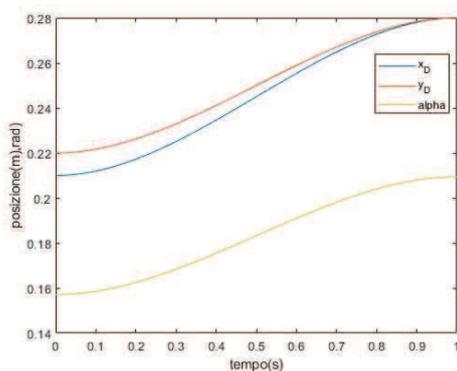
Quindi il tempo  $t$  varierà tra  $[t_0; T]$  mentre i valori di  $h$  varieranno per le tre grandezze considerate come segue:

$$h_x = x_{Df} - x_{D0} \quad (5.8)$$

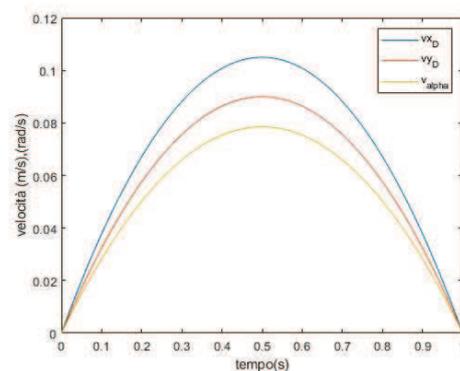
$$h_y = y_{Df} - y_{D0} \quad (5.9)$$

$$h_\alpha = \alpha_{Df} - \alpha_{D0} \quad (5.10)$$

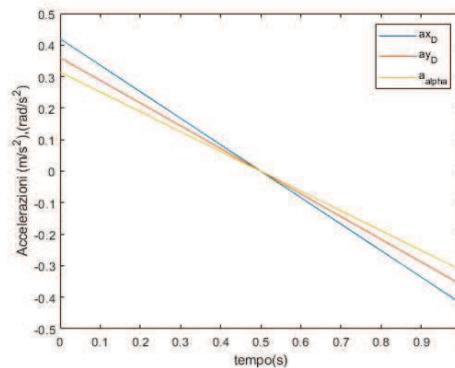
In conclusione al paragrafo si illustrano i grafici di una ipotetica traiettoria riferiti alla posizione, velocità e accelerazione del meccanismo dove possiamo affermare che anche quando si cambiano visibilmente i parametri l'immagine del grafico delle funzioni rimane pressochè lo stesso, con l'unica differenza diventa speculare rispetto all'asse delle ordinate nel caso che il meccanismo torni indietro.



(a) Posizione punto  $D$  e rotazione end-effector



(b) Velocità punto  $D$  e velocità angolare end-effector



(c) accelerazione punto  $D$  e accelerazione angolare end-effector

**Figura 5.1:** Traiettoria del manipolatore

## 5.3 Risultati finali e conclusioni

### 5.3.1 Velocità angolari delle coordinate libere

Nella progettazione di un manipolatore piano, come in questo caso, bisogna verificare passo passo che i risultati ottenuti e i rispettivi grafici siano coerenti nei valori e in tutti quei punti dove sappiamo già a priori cosa deve fare il meccanismo come nel caso della partenza o dell'arrivo. Per questo motivo successivamente si trovano i grafici delle velocità delle coordinate libere precedendo quello delle coppie e infine delle potenze per le 3 catene cinematiche.

In particolare possiamo affermare a priori che tutte le velocità ai giunti devono essere nulle nei punti di partenza e di arrivo, conseguentemente a questo quindi otterremo una fase crescente e decrescente della funzione intervallate da un punto di flesso dove noteremo la velocità angolare massima durante quella traiettoria. Il calcolo delle velocità angolari deriva direttamente dall'analisi di posizione effettuata nel paragrafo 3.2 mentre le formule utilizzate sono quelle riportate nella 3.11 e 3.14, dove successivamente permettono il calcolo dei rapporti di velocità necessari alla generazione della coppia. Quando si applica uno studio di questo tipo qua si cerca di limitare il valore delle velocità delle coordinate libere perchè non incidono direttamente nella coppia ma nella potenza richiesta dai motori per ruotare i membri del meccanismo.

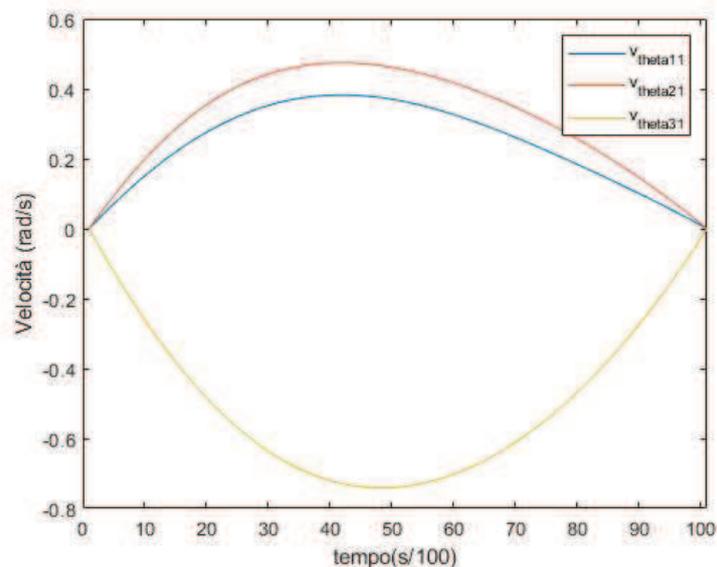


Figura 5.2: Velocità angolari ai giunti

### 5.3.2 Valori di coppia ottenuti

Tramite l'uso del Principio dei Lavori Virtuali, paragrafo 4.3, si ha ottenuto la formula che permette il calcolo delle coppie necessaria da applicare al manipolatore, in riferimento alla 4.18, 4.19 e 4.20, ottenendo così grafici simili a delle rette spezzate dovute al fatto che i termini delle forze d'inerzia, derivanti dalle accelerazioni, prevalgono sugli andamenti sinusoidali dei rapporti di velocità, creando così gli andamenti in figura 5.3.

Anche in questo caso ci sono dei punti in cui si sanno già dove deve passare il grafico, infatti come nel caso precedente quando la velocità arriva nel punto di massimo relativo a questa traiettoria e la sua accelerazione derivante è nulla a causa del cambio di segno successivo, il motore rallenterà fino a fermarsi per poi invertire il proprio moto, creando così una coppia resistente che permette di fermare il meccanismo nella posizione desiderata. Nel precedente grafico è necessario fare una precisazione riguardante l'asse delle ascisse, dove si può notare che il punto di partenza non è zero perchè nella scrittura del programma in Matlab si è preferito utilizzare un ciclo *for* per un andamento discreto di punti che corrispondono a un incremento di un centesimo di secondo ciascuno. Questa particolarità qua bisogna considerarla anche nei grafico delle potenze successivo.

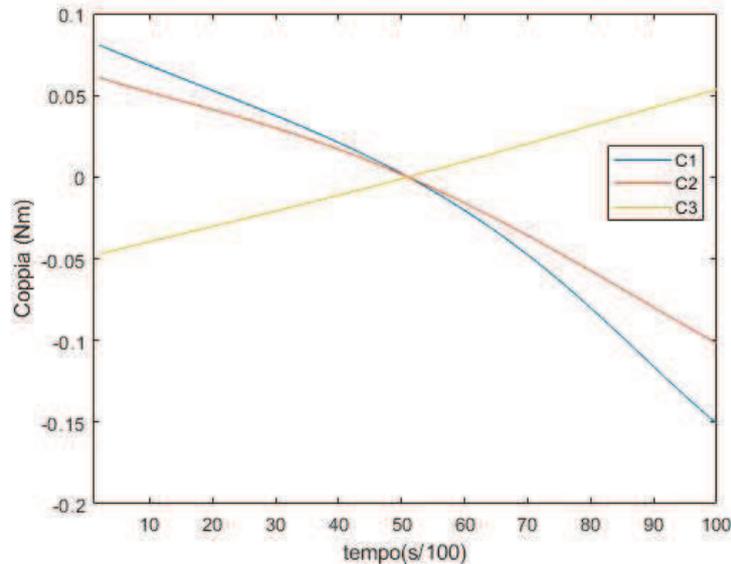


Figura 5.3: Coppie delle tre coordinate libere

### 5.3.3 Potenze richieste dal meccanismo

L'ultimo grafico dell'elaborato riguarda le potenze espresse dalle coordinate libere derivanti dall'insieme delle due figure precedenti, questo perchè chiaramente la potenza si ricava tramite la seguente formula:

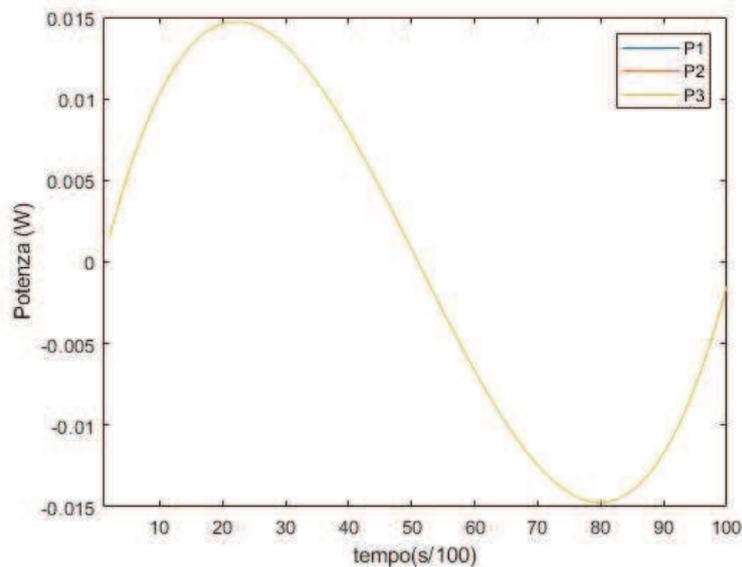
$$P_i = C_i \dot{\theta}_{i1} \quad (5.11)$$

dove ciascuna corrisponderà alla propria catena cinematica di appartenenza.

I risultati ottenuti in simulazione hanno permesso di confermare quanto desunto dai risultati teorici, attraverso l'elaborazione ottenendo così un andamento sinusoidale uguale per tutte e tre le potenze dove chiaramente nei tre punti descritti anche pocanzi, quello iniziale, finale e dove la coppia risulta nulla, si può notare un valore nullo come dovrebbe essere per questioni fisiche del manipolatore.

Data la grandezza relativamente modesta del meccanismo ipotizzato si può notare come sia il valore delle coppie e soprattutto delle potenze sia notevolmente ridotto, anche se comunque il tutto viene considerato per il tempo totale del periodo di un secondo.

Non è scontato che diminuendo a sua volta il tempo di spostamento da un punto all'altro le coppie diminuiscono a loro volta perchè si provocherebbero notevoli valori di accelerazione che ne influirebbero la dinamica, in particolare le forze e la coppia d'inerzia.



**Figura 5.4:** Potenze delle tre coordinate libere

## 5.4 Conclusioni

Tutti i valori inseriti sotto il nome di inavrianti e altri coefficienti noti sono stati studiati in modo da poter ricreare una simulazione quanto più realistica e realizzabile possibile anche perchè questo ci permette di notare eventuali errori che possono nascere in fase di scrittura del codice. Tenendo le dovute proporzioni si potrebbe anche aumentare l'area di lavoro del manipolatore a seconda della necessità e verificando in ogni caso i valori ottenuti, che siano concordi con quanto descritto sopra.

Nota importante di queste conclusioni sono l'utilizzo dei rapporti di velocità dove siccome essi sono indipendenti dalle velocità e quindi variano solamente in base alla posizioni istantanea del meccanismo, in questo elaborato possiamo notare i problemi che possono presentare quando si devono utilizzare le formule 4.17, 4.16 e 4.17. Perchè in alcuni punti la velocità delle coordinate può andare a zero e quindi mandare il calcolatore in errore e non individuare un valore necessario ai successivi calcoli. In questo caso si è dovuto procedere così perchè l'end-effector non presentava solo un andamento lungo i due assi ma gli era permessa anche una rotazione che quindi influiva nel calcolo delle velocità angolari delle coordinate libere.



# Appendice A

## File Matlab

```
%MECCANISMO ARTICOLATO PIANO 3RRR

%invarianti

%posizione A1
xa1 = 0;
ya1 = 0.433;
va1 = [ xa1 ; ya1 ] ;
%posizione A2
xa2 = 0.5;
ya2 = 0.433;
va2 = [ xa2 ; ya2 ] ;
%posizione A3
xa3 = 0.25;
ya3 = 0;
va3 = [ xa3 ; ya3 ] ;
%lunghezza membri (m)
z11 = 0.2;    z12 = 0.2;
z21 = 0.2;    z22 = 0.2;
z31 = 0.2;    z32 = 0.2;

%definizione di una traiettoria per D
%punti di partenza e arrivo per x,y,alpha
xd0=0.21;           %punto di partenza asse x
xdf=0.28;           %punto di arrivo asse x
yd0=0.22;           %punto di partenza asse y
ydf=0.28;           %punto di arrivo asse y
alpha0=pi/20;       %punto di partenza della rotazione alpha
alphaf=pi/15;       %punto di arrivo della rotazione alpha
hx=xdf-xd0;         %distanza da percorrere asse x
hy=ydf-yd0;         %distanza da percorrere asse y
ha=alphaf-alpha0;   %rotazione complessiva alpha
T=1;                %periodo di movimento

%costanti della funzione x(t)
a0x=xd0;
a1x=0;
```

```

a2x= 3*hx/T^2;
a3x=-2*hx/T^3;
%costanti della funzione y(t)
a0y=yd0;
a1y=0;
a2y= 3*hy/T^2;
a3y=-2*hy/T^3;
%costanti della funzione alpha(t)
a0a=alpha0;
a1a=0;
a2a= 3*ha/T^2;
a3a=-2*ha/T^3;

%equazione di x(t)
%grafico posizione in x
t = 0:0.01:T;
xd = a0x + a1x*t + a2x*t.^2 + a3x*t.^3 ;
%grafico velocita'
vxd = a1x + 2*a2x*t + 3*a3x*t.^2 ;
%grafico accelerazione
axd = 2*a2x + 6*a3x*t ;

%equazione di y(t)
%grafico posizione in y
yd = a0y + a1y*t + a2y*t.^2 + a3y*t.^3 ;
%grafico velocita'
vyd = a1y + 2*a2y*t + 3*a3y*t.^2 ;
%grafico accelerazione
ayd = 2*a2y + 6*a3y*t ;

%equazione di alpha(t)
%grafico posizione angolare
alfa = a0a + a1a*t + a2a*t.^2 + a3a*t.^3 ;
%grafico velocita'
v_alfa = a1a + 2*a2a*t + 3*a3a*t.^2 ;
%grafico accelerazione
a_alfa = 2*a2a + 6*a3a*t ;

%massa e inirzia end-effector (D)
mD = 0.5 ;
Id = 0.5*mD*(0.1^2) ;

%angoli e dimensioni end-effector (cm,rad)
h = 0.02;
lambda1 = 150*2*pi/360;
lambda2 = 30*2*pi/360;
lambda3 = 270*2*pi/360;

%riportare il vettore della traiettoria in punti
xD1 = xd ;

```

```

yD1 = yd ;

vxD1 = vxd ;
vyD1 = vyd ;

axD1 = axd ;
ayD1 = ayd ;

alfa1 = alfa ;
v_alfa1 = v_alfa ;
a_alfa1 = a_alfa ;

%ciclo for
for k=1:length(xd)

%riportare i punti della traiettoria in funzione di k
%posizione di D
xD = xD1(k) ;
yD = yD1(k) ;
pD = [ xD ; yD ] ;

%velocita' di D
vxD = vxD1(k) ;
vyD = vyD1(k) ;
vD = [ vxD ; vyD ] ;

%accelerazione di D
axD = axD1(k) ;
ayD = ayD1(k) ;
aD = [ axD ; ayD ] ;

alpha = alfa1(k) ;
v_alpha = v_alfa1(k) ;
a_alpha = a_alfa1(k) ;

%posizione e angoli vettore h
eta1 = lambda1 + alpha;
eta2 = lambda2 + alpha;
eta3 = lambda3 + alpha;
xh1 = h*cos(eta1) ;           %componente x di h1
yh1 = h*sin(eta1) ;           %componente y di h1
vh1 = [ xh1 ; yh1 ] ;         %vettore di h1
xh2 = h*cos(eta2) ;           %componente x di h2
yh2 = h*sin(eta2) ;           %componente y di h2
vh2 = [ xh2 ; yh2 ] ;         %vettore di h2
xh3 = h*cos(eta3) ;           %componente x di h3
yh3 = h*sin(eta3) ;           %componente y di h3
vh3 = [ xh3 ; yh3 ] ;         %vettore di h3

%forze d'inerzia uguali per tutti e tre le coppie C1,C2,C3

```

```

Fin_x = - mD*axD;
Fin_y = - mD*ayD;
Cin = - Id * a_alpha;
fx(k)=Fin_x;
fy(k)=Fin_y;
ca(k)=Cin;

%analisi posizione catena cinematica 1

%posizione di C1
xc1 = xD + xh1 ;
yc1 = yD + yh1 ;
c1 = pD + vh1 ;

%calcoli diade ABC1
%vettore Zac1
Zac1 = sqrt((xc1-xa1)^2+(yc1-ya1)^2) ;
phi_ac1 = atan2(yc1-ya1,xc1-xa1);
gamma1 = acos((z11^2+Zac1^2-z12^2)/(2*z11*Zac1)) ;
mu1 = acos((-z11^2+Zac1^2+z12.^2)/(2*z12*Zac1)) ;
phi_11 = phi_ac1 + gamma1 ;
phi_12 = phi_ac1 - mu1 + pi;

%analisi velocita'

%vettore delle componenti di velocita' di C1
vC1 = vD + [-yh1 ; xh1 ]*v_alpha ;

%matrice Jacobiana
J1 = [ -z11*sin(phi_11)  -z12*sin(phi_12) ;
z11*cos(phi_11)  z12*cos(phi_12) ] ;

%velocita' angolare di phi_11 e phi_12
v_phi1 = J1\vC1 ;
v_phi_1(k) = v_phi1(1) ;

%rapporti di velocita'
K_xD_phi1= vxD/v_phi1(1);
K_yD_phi1= vyD/v_phi1(1);
K_alpha_phi1= v_alpha/v_phi1(1);

kx1(k)= K_xD_phi1(1);
ky1(k)= K_yD_phi1(1);
ka1(k)= K_alpha_phi1(1);

%analisi posizione catena cinematica 2

%posizione di C2
xc2 = xD + xh2 ;
yc2 = yD + yh2 ;

```

```

c2 = pD + vh2 ;

%calcoli diade ABC2
%vettore Zac2
Zac2 = sqrt((xc2-xa2)^2+(yc2-ya2)^2) ;
phi_ac2 = atan2(yc2-ya2,xc2-xa2) ;
gamma2 = acos((z21^2+Zac2^2-z22^2)/(2*z21*Zac2)) ;
mu2 = acos((-z21^2+Zac2^2+z22^2)/(2*z22*Zac2)) ;
phi_21 = phi_ac2 + gamma2 ;
phi_22 = phi_ac2 - mu2 + pi ;

%analisi velocita'

%vettore delle componenti di velocita' di C2
vC2 = vD + [-yh2 ; xh2 ]*v_alpha ;

%matrice Jacobiana
J2 = [ -z21*sin(phi_21)  -z22*sin(phi_22) ;
z21*cos(phi_21)  z22*cos(phi_22) ] ;

%velocita' angolare di phi_21 e phi_22
v_phi2 = J2\vC2 ;
v_phi_2(k) = v_phi2(1) ;

%rapporti di velocita'
K_xD_phi2= vxD/v_phi2(1);
K_yD_phi2= vyD/v_phi2(1);
K_alpha_phi2= v_alpha/v_phi2(1);

kx2(k)= K_xD_phi2(1);
ky2(k)= K_yD_phi2(1);
ka2(k)= K_alpha_phi2(1);

%analisi posizione catena cinematica 3

%posizione di C3
xc3 = xD + xh3 ;
yc3 = yD + yh3 ;
c3 = pD + vh3 ;

%calcoli diade ABC3
%vettore Zac3
Zac3 = sqrt((xc3-xa3)^2+(yc3-ya3)^2) ;
phi_ac3 = atan2(yc3-ya3,xc3-xa3) ;
gamma3 = acos((z31^2+Zac3^2-z32^2)/(2*z31*Zac3)) ;
mu3 = acos((-z31^2+Zac3^2+z32.^2)/(2*z32*Zac3)) ;
phi_31 = phi_ac3 + gamma3 ;
phi_32 = phi_ac3 - mu3 + pi ;

%analisi velocita'

```

```

%vettore delle componenti di velocita' di C3
vC3 = vD + [-yh3 ; xh3 ]*v_alpha ;

%matrice Jacobiana
J3 = [ -z31*sin(phi_31)  -z32*sin(phi_32) ;
z31*cos(phi_31)  z32*cos(phi_32) ] ;

%velocita' angolare di phi_31 e phi_32
v_phi3 = J3\vC3 ;
v_phi_3(k) = v_phi3(1) ;

%analisi dinamica metodo PLV

%rapporti di velocita'
K_xD_phi3= vxD/v_phi3(1);
K_yD_phi3= vyD/v_phi3(1);
K_alpha_phi3= v_alpha/v_phi3(1);

kx3(k)= K_xD_phi3(1);
ky3(k)= K_yD_phi3(1);
ka3(k)= K_alpha_phi3(1);

%calcolo coppia necessaria C1
C1(k) = -Fin_x*K_xD_phi1 -Fin_y*K_yD_phi1 -Cin*K_alpha_phi1;
%calcolo coppia necessaria C2
C2(k) = -Fin_x*K_xD_phi2 -Fin_y*K_yD_phi2 -Cin*K_alpha_phi2;
%calcolo coppia necessaria C3
C3(k) = -Fin_x*K_xD_phi3 -Fin_y*K_yD_phi3 -Cin*K_alpha_phi3;

P1(k) = C1(k)*v_phi_1(k) ;
P2(k) = C2(k)*v_phi_2(k) ;
P3(k) = C3(k)*v_phi_3(k) ;

end

%traiettorie

%traiettorie di posizione
figure(1)
plot(t,xd)
hold on
plot(t,yd)
plot(t,alfa)
legend('x_D','y_D','alpha')
hold off
xlabel('tempo(s)')
ylabel('posizione(m),rad)')
title('Traiettorie delle posizioni','FontSize',10)

```

```

%velocita' delle traiettorie

figure(2);
plot(t,vxd)
hold on
plot(t,vyd)
plot(t,v_alfa)
legend('vx_D','vy_D','v_{alpha}')
hold off
xlabel('tempo(s)')
ylabel('velocita' (m/s),(rad/s)')
title('Traiettorie delle velocita'', 'FontSize',10)

%accelerazioni delle traiettorie

figure(3);
plot(t,axd)
hold on
plot(t,ayd)
plot(t,a_alfa)
legend('ax_D','ay_D','a_{alpha}')
hold off
xlabel('tempo(s)')
ylabel('Accelerazioni (m/s^2),(rad/s^2)')
title('Traiettorie delle accelerazioni', 'FontSize',10)

%velocita', coppie e potenze

figure(4);
plot(v_phi_1)
hold on
plot(v_phi_2)
plot(v_phi_3)
legend('v_{theta11}','v_{theta21}','v_{theta31}')
hold off
xlim([0 101])
xlabel('tempo(s/100)')
ylabel('Velocita' (rad/s)')
title('Velocita' ai giunti', 'FontSize',10)

%grafico delle coppie

figure(5);
plot(C1)
hold on
plot(C2)
plot(C3)
legend('C1','C2','C3')
hold off
xlim([1 100])

```

```

xlabel('tempo(s/100)')
ylabel('Coppia (Nm)')
title('Coppie generate ai giunti','FontSize',10)

%grafico delle potenze
figure(6);
plot(P1)
hold on
plot(P2)
plot(P3)
legend('P1','P2','P3')
hold off
xlim([1 100])
xlabel('tempo(s/100)')
ylabel('Potenza (W)')
title('Potenze generate ai giunti','FontSize',10)

%rapporti di velocita'

figure(7);
plot(kx1)
hold on
plot(ky1)
plot(ka1)
legend('K_{xD,theta11}','K_{yD,theta11}','K_{alpha,theta11}')
hold off
xlim([2 100])
xlabel('tempo(s/100)')
ylabel('Rapporti K_1(m/rad),(rad/rad)')
title('rapporti di velocita' c.c. 1','FontSize',10)

figure(8);
plot(kx2)
hold on
plot(ky2)
plot(ka2)
legend('K_{xD,theta21}','K_{yD,theta21}','K_{alpha,theta21}')
hold off
xlim([2 100])
xlabel('tempo[s/100]')
ylabel('Rapporti K_2(m/rad),(rad/rad)')
title('rapporti di velocita' c.c. 2','FontSize',10)

figure(9);
plot(kx3)
hold on
plot(ky3)
plot(ka3)
legend('K_{xD,theta31}','K_{yD,theta31}','K_{alpha,theta31}')

```

```
hold off
xlim([2 100])
xlabel('tempo (s/100)')
ylabel('Rapporti K_3(m/rad),(rad/rad)')
title('rapporti di velocita' c.c. 3','FontSize',10)
```



# Bibliografia

1. Da silva Fontes, João Vitor and da Silva, Maíra Martins *On the dynamic performance of parallel kinematic manipulators with actuation and kinematic redundancies*. (Brasil) [*Mechanism and Machine Theory*]. Elsevier, 103, 148:166.
2. Boscariol Paolo Boscariol *Appunti dalle lezioni di Meccanica Applicata alle Macchine*. 11 marzo 2021