

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

**Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”**

**Corso di Laurea in Fisica**

**Tesi di Laurea**

**Anno Accademico 2019/2020**

**Entropia di entanglement e coerenza nel modello di**

**Bose-Hubbard a due siti**

**Relatore**

**Prof. Luca Salasnich**

**Laureando**

**Alberto Brollo**



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Bose-Hubbard a due siti</b>	<b>3</b>
2.1	Il modello . . . . .	3
2.2	Andamenti asintotici del modello . . . . .	4
2.3	Transizioni di fase e parametri di analisi . . . . .	5
2.4	Risultati analitici per poche particelle . . . . .	8
2.5	Risultati numerici nel caso mesoscopico . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Anyon-Hubbard a due siti</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>17</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

Lo scopo principale di questa tesi è lo studio dello stato fondamentale di un numero fissato  $N$  di bosoni interagenti tra loro e immersi in un potenziale simmetrico a doppia buca [1]. La hamiltoniana che descrive questo sistema è detta di Bose-Hubbard a due siti ed è una semplice modellizzazione quantistica di una giunzione Josephson bosonica. Nel 1962 il fisico premio Nobel Brian David Josephson predisse il passaggio di corrente tra due superconduttori separati da un sottile strato isolante, senza l'applicazione di alcun potenziale, ricavando delle esplicite relazioni matematiche oggi note come equazioni di Josephson. Nel caso in esame di bosoni in un potenziale a doppia buca, si ottengono le equazioni di Josephson a partire dall'equazione di Gross-Pitaevskii [2], quindi tramite un'approssimazione di campo medio valida nel caso di un alto numero di particelle debolmente interagenti. Il modello di Bose-Hubbard a due siti permette di confrontare le predizioni semiclassiche della teoria di GP a quelle puramente quantistiche (si veda ad esempio [3]).

Alla fine degli anni novanta si arrivò ad ottenere sperimentalmente dei gas di atomi bosonici ultrafreddi intrappolati in reticoli ottici [4, 5]. Sfruttando l'interferenza di fasci laser si riuscì a creare delle regioni a potenziale periodico nelle quali inserire tali gas e farli raffreddare fino a temperature dell'ordine dei microKelvin. La grande varietà di potenziali ottenibili tramite queste sofisticate tecnologie laser e la possibilità di manipolare con precisione i parametri del sistema hanno permesso di poter studiare in modo sistematico il modello di Bose-Hubbard a due siti e il ruolo di assunzioni e semplificazioni.

Nella prima parte della tesi deriveremo la hamiltoniana del modello, evidenziando le ipotesi sottostanti e il loro significato fisico. Successivamente mostreremo come al variare dell'interazione si ottengano comportamenti molto diversi, dal regime superfluido nel caso non interagente a quello isolante o macroscopicamente *entangled* in caso di forte repulsione o attrazione rispettivamente. Lo studio si concentrerà molto sull'analisi di queste transizioni di fase, introducendo due parametri, uno noto e uno specifico per questo sistema: l'entropia di *entanglement* e la visibilità di coerenza. Studieremo questi parametri sia nel caso di poche particelle ( $N = 2, 3$ ), sia nel caso mesoscopico, ossia di qualche decina, con la differenza che nel primo è possibile ricavare delle formule analitiche mentre nel secondo è necessario procedere per via numerica o perturbativamente sfruttando il teorema di Hellmann-Feynman. Infine, come ultima parte del lavoro, esporremo in maniera introduttiva i risultati che si otterrebbero se il sistema fosse quasi-unidimensionale e le particelle *anyons*. Le probabilità di transizione sembrano essere le stesse, ma compaiono dei termini di fase nelle ampiezze, causando importanti effetti alla coerenza del sistema.



## Capitolo 2

# Bose-Hubbard a due siti

### 2.1 Il modello

Il sistema fisico che vogliamo studiare consiste in  $N$  bosoni interagenti immersi in un potenziale armonico lungo due direzioni e simmetrico a doppia buca lungo l'altra

$$V_{ext} = \frac{m}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + V_{db}(z). \quad (2.1)$$

Le condizioni che sperimentalmente si riescono ad ottenere nei reticoli ottici sono di bassa densità e temperatura dell'ordine dei microKelvin [5]. Modellizziamo questa situazione assumendo temperatura nulla, ovvero che il sistema si trovi nello stato fondamentale, e un potenziale di interazione tra bosoni di contatto  $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ .

Nel linguaggio della seconda quantizzazione una hamiltoniana a molti bosoni può essere scritta, nella base delle coordinate spaziali, come [6]

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}), \quad (2.2)$$

dove  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$  è l'operatore di campo quantistico bosonico. Questo distrugge un bosone in posizione  $\mathbf{r}$  e soddisfa le relazioni di commutazione canoniche:  $[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  e  $[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}')] = [\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = 0$ . L'operatore di campo può essere espanso su una base. Sia  $\{\psi_\alpha(\mathbf{r})\}$  una base per lo spazio di Hilbert di particella singola e siano  $\{\hat{a}_\alpha\}$  gli operatori che distruggono da un bosone la componente lungo la  $\alpha$ -esima funzione d'onda di base. Questi soddisfano le relazioni di commutazione canoniche. Risulta quindi possibile esprimere  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_\alpha \hat{a}_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{r})$ . Discorso analogo vale per l'aggiunto di questo operatore che invece crea un bosone in  $\mathbf{r}$ .

Nel nostro caso assumiamo che le particelle nelle due buche possano occupare solo lo stato non eccitato, quindi  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \hat{a}_L \Phi_L(\mathbf{r}) + \hat{a}_R \Phi_R(\mathbf{r})$  con  $\Phi_k(\mathbf{r}) = w(x)w(y)\phi_k(z)$ . Le funzioni d'onda  $w(x)$  e  $w(y)$  sono lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico mentre le  $\phi_k(z)$  lo sono per la  $k$ -esima buca.<sup>1</sup> Fisicamente questa assunzione ha un'importante conseguenza, le interazioni

<sup>1</sup>Formalmente le funzioni d'onda delle singole buche non sono ben definite. Tuttavia chiudendo un occhio su questo problema si troverebbe  $\Phi_0 = \Phi_L + \Phi_R$  e  $\Phi_1 = \Phi_L - \Phi_R$ , con quest'ultimo primo stato eccitato. Possiamo quindi invertire il ragionamento, trovare i due stati ad energia minore del potenziale a doppia buca e definire  $\Phi_L$  e  $\Phi_R$  a partire da questi.

locali devono essere sufficientemente deboli da non far saltare qualche particella nel primo stato eccitato. Questo problema è ampiamente discusso in [7] e non lo tratteremo ulteriormente.

Inserendo nell'equazione (2.2) la forma esplicita del potenziale di interazione e lo sviluppo dell'operatore di campo troviamo

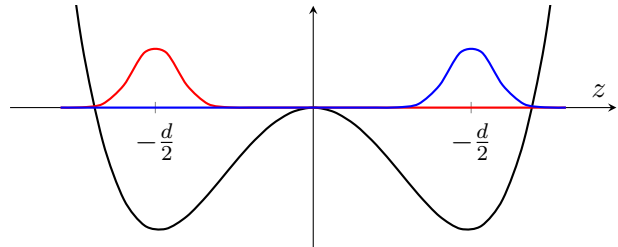
$$\hat{H} = \mathcal{E}\hat{N} - J(\hat{a}_L^\dagger\hat{a}_R + \hat{a}_R^\dagger\hat{a}_L) + \frac{g}{2} \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}), \quad (2.3)$$

dove  $J = -\int dz \phi_R^*(z) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + V_{db}(z) \right) \phi_L(z)$  e  $\mathcal{E} = \hbar\omega + \mathcal{E}_0$ , con  $\mathcal{E}_0$  energia dello stato fondamentale del potenziale a doppia buca. L'altro termine si semplifica sviluppando l'integrando e assumendo che le funzioni d'onda delle buche siano strettamente localizzate (come in **Figura 2.1**), quindi i termini che presentano funzioni d'onda miste si annullano sotto l'integrale. Sfruttando le regole di commutazione degli operatori di creazione e annichilazione e definendo  $U = \frac{gm\omega}{2\pi\hbar} \int dz |\phi_k(z)|^4$  si trova

$$\hat{H} = \mathcal{E}\hat{N} - J(\hat{a}_L^\dagger\hat{a}_R + \hat{a}_R^\dagger\hat{a}_L) + \frac{U}{2}(\hat{n}_L(\hat{n}_L - 1) + \hat{n}_R(\hat{n}_R - 1)), \quad (2.4)$$

con  $\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k$ . Questa hamiltoniana commuta con l'operatore  $\hat{N} = \hat{n}_L + \hat{n}_R$  e con l'operatore  $\hat{T}_{LR}$  che inverte destra e sinistra, ossia l'operatore di parità. Gli autostati, quindi, dovranno essere a parità definita e con un numero costante di bosoni. Il significato fisico dei termini di questa hamiltoniana risulta piuttosto evidente. Il termine  $J$  indica l'*intensità* del tunneling mentre  $U$  quella dell'interazione tra i bosoni.

Concludiamo il paragrafo ricordando le assunzioni che sono state effettuate nella costruzione di questo modello. Si è assunto il sistema a temperatura nulla e con interazioni locali deboli, escludendo di fatto dalla trattazione gli stati eccitati che modificherebbero l'espansione dell'operatore di campo. Si sono trascurate interazioni a distanza, ad esempio di tipo dipolare che potrebbero avvenire tra atomi neutri. Le funzioni d'onda delle buche sono state ipotizzate strettamente localizzate, tralasciando termini di ordine superiore nella hamiltoniana. Infine si è assunta la perfetta simmetria del potenziale. Si può tuttavia vedere che anche differenze dell'ordine del miliardesimo rispetto al termine  $J$  possono creare asimmetrie negli stati [3].



**Figura 2.1:** Un esempio grafico di potenziale a doppia buca con le funzioni d'onda strettamente localizzate.

## 2.2 Andamenti asintotici del modello

Per studiare lo stato fondamentale del sistema riscriviamo la hamiltoniana (2.4) trascurando il termine costante

$$\hat{H} = -J(\hat{a}_L^\dagger\hat{a}_R + \hat{a}_R^\dagger\hat{a}_L) + \frac{U}{2}(\hat{n}_L(\hat{n}_L - 1) + \hat{n}_R(\hat{n}_R - 1)). \quad (2.5)$$



Definendo  $\xi = U/J$ , si distinguono tre possibili regimi: fortemente repulsivo ( $\xi \rightarrow +\infty$ ), fortemente attrattivo ( $\xi \rightarrow -\infty$ ) e non interagente ( $\xi = 0$ )<sup>2</sup>. Nei primi due casi la hamiltoniana risulta essere

$$\hat{H} = \frac{U}{2}(\hat{n}_L(\hat{n}_L - 1) + \hat{n}_R(\hat{n}_R - 1)). \quad (2.6)$$

Questa è diagonale nella base degli stati di Fock sinistra-destra  $\{|i, N-i\rangle\}_{i=0,\dots,N}$ . Per lo stato  $i$ -esimo l'autovalore è  $\mathcal{E}_i = \frac{U}{2}(2i^2 - 2Ni + N^2 - N)$  e gli stati  $i$  e  $N-i$  sono degeneri. Nel regime repulsivo ( $\xi \rightarrow \infty$ ) l'autovalore più piccolo, per  $N$  pari, si ha per  $i = N/2$ . L'autostato è quindi uno stato di Fock detto *gemello*:  $|\text{TWIN}\rangle = |\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle$ .

Per il regime attrattivo ( $\xi \rightarrow -\infty$ ) si trova invece che gli stati non eccitati sono  $i = 0, N$ . Data la simmetria sinistra-destra del problema è più conveniente riscriverli come  $|0_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N, 0\rangle \pm |0, N\rangle)$  in modo che siano autostati anche di  $\hat{T}_{LR}$ . Seppur degeneri in questo caso limite, ciò che troveremo nelle prossime sezioni diagonalizzando la matrice nei casi intermedi e prendendo il limite sarà che lo stato ad energia minore tende a  $|0_{+}\rangle$ . Questo stato è detto di *gatto di Schroedinger macroscopico* perchè risultano *entangled* gli stati in cui tutte le particelle sono nella stessa buca, lo denoteremo  $|\text{CAT}\rangle$ .

Il caso non interagente può essere invece risolto usando il fatto che lo stato di  $N$  particelle è il prodotto tensore di stati di particella singola, dato che queste non interagiscono. Siccome  $[\hat{H}, \hat{T}_{LR}] = 0$  gli stati di particella singola devono essere autostati anche dell'operatore  $\hat{T}_{LR}$  e ci sono solo due possibilità:  $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle \pm |R\rangle)$ . Lo stato fondamentale è detto *stato coerente atomico* e corrisponde a  $|\text{ACS}\rangle = |+\rangle^{\otimes N} = \frac{1}{\sqrt{2^N N!}}(\hat{a}_L^{\dagger} + \hat{a}_R^{\dagger})$ . Espresso nella base degli stati di Fock,  $|\text{ACS}\rangle = \sum_i c_i |i, N-i\rangle$ , risulta avere il modulo quadro dei coefficienti distribuiti secondo una bernoulliana normalizzata  $c_i = \sqrt{\frac{1}{2^N} \binom{N}{i}}$ .

## 2.3 Transizioni di fase e parametri di analisi

Come visto nella sezione precedente, al variare del parametro  $\xi = U/J$  si possono ottenere dei comportamenti molto diversi. In approssimazione semiclassica, quindi alto numero di particelle e interazioni deboli, il sistema può essere assunto in uno stato coerente e descritto dalle equazioni di Josephson, comportandosi perciò similmente ad un superconduttore in una giunzione Josephson. Aumentando la repulsione, il sistema tende allo stato separabile *gemello* che macroscopicamente rappresenta un isolante dato che non c'è passaggio di particelle. Fisicamente questa transizione di fase può essere ottenuta, ad esempio, aumentando lo spessore dell'isolante nella giunzione Josephson, diminuendo di conseguenza  $J$ . Questa transizione di fase può essere descritta studiando la densità di particelle nello spazio del momento. In [8] Pitaevskii e Stringari mostrano che nel caso di due condensati coerenti, quindi le cui funzioni d'onda presentano una fase spaziale costante, si viene a creare interferenza nello spazio del momento, mentre nel caso di due condensati incoerenti questa interferenza non viene predetta.

Un comportamento analogo si trova anche nel caso di finite particelle. L'operatore  $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r})$  è la densità di particelle su volume. Questo si può congetturare osservando che  $\int d^3\mathbf{r}\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger}\hat{a}_{\alpha} = \hat{N}$ . Un discorso analogo può essere fatto nello spazio del momento, in

<sup>2</sup>In accordo con l'assunzione che le interazioni non debbano essere troppo intense, discussa nella precedente sezione, le locuzioni *fortemente repulsivo/attrattivo* sono quindi da intendersi come interazione non intensa e tunneling molto piccolo. Tuttavia per alleggerire la lettura utilizzeremo spesso queste espressioni.

particolare per la sua componente  $z$  che è la direzione veramente interessante in questo problema. Definiamo  $\hat{\Psi}(p) = \hat{a}_L \phi_L(p) + \hat{a}_R \phi_R(p)$  l'operatore che mi distrugge un bosone di momento  $p$  (lungo  $z$ , d'ora in poi lo ometterò), con  $\phi_i(p)$  rappresentazioni di  $\phi_i(z)$  nella base del momento. Queste due funzioni sono legate dalla trasformata di Fourier e può essere dimostrato come segue. Sia  $|\phi\rangle$  uno stato nello spazio di Hilbert astratto. Questo può essere espresso sia nella base della posizione che del momento

$$|\phi\rangle = \int dz \phi(z) |z\rangle = \sum_p \phi(p) |p\rangle. \quad (2.7)$$

Dato che non conosco lo spettro dell'operatore momento (e nemmeno mi interessa) considero uno spettro generico e per semplicità di notazione esprimo la completezza ad esso associata solo con la sommatoria  $\sum_p |p\rangle\langle p| = \mathbb{I}$ . Inserendo una completezza nel membro centrale dell'equazione sopra, trovo  $\sum_p \int dz \phi(z) \langle p|z\rangle |p\rangle$ . Ne segue che  $\phi(p) = \int dz \phi(z) \langle p|z\rangle$ , dove  $\langle z|p\rangle$  è l'autovettore del momento in rappresentazione delle coordinate  $p(z) = A e^{i\frac{p}{\hbar}z}$ . La costante  $A$  è determinata dalla condizione di ortonormalizzazione

$$\int dz p^*(z) p'(z) = \int dz |A|^2 e^{i\frac{p'-p}{\hbar}z} = |A|^2 2\pi \delta(p' - p) \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.8)$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \phi(x) e^{-i\frac{p}{\hbar}x} = \mathcal{F}[\phi(x)](p). \quad (2.9)$$

Per la creazione della figura di interferenza devo aggiungere l'ipotesi che il potenziale sia periodico, in modo che le due buche siano identiche e differiscano solo per una traslazione. Sia  $\varphi_0(z)$  lo stato fondamentale della singola buca, allora detta  $d$  la distanza tra le due possiamo scrivere  $\phi_L(z) = \varphi_0(z + \frac{d}{2})$  e  $\phi_R(z) = \varphi_0(z - \frac{d}{2})$ . Ne segue che  $\hat{\Psi}(p) = \hat{a}_L \mathcal{F}[\varphi_0(z + \frac{d}{2})](p) + \hat{a}_R \mathcal{F}[\varphi_0(z - \frac{d}{2})](p) = [\hat{a}_L e^{i\frac{pd}{2\hbar}} + \hat{a}_R e^{-i\frac{pd}{2\hbar}}] \tilde{\varphi}_0(p)$ . Otteniamo quindi

$$n(p) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(p) \hat{\Psi}(p) \rangle = [\langle \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L \rangle + \langle \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R \rangle + \langle \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R \rangle e^{-i\frac{pd}{\hbar}} + \langle \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L \rangle e^{i\frac{pd}{\hbar}}] |\tilde{\varphi}_0(p)|^2. \quad (2.10)$$

Sfruttando le simmetrie del modello e definendo  $n_0(p) = N |\tilde{\varphi}_0(p)|^2$  si arriva infine a

$$n(p) = n_0(p) \left[ 1 + \alpha \cos\left(\frac{p}{\hbar}d\right) \right], \quad (2.11)$$

con  $\alpha = \frac{2}{N} \langle \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R \rangle$  *visibilità di coerenza*. Questo parametro varia tra zero e uno ed è massimo nello stato coerente atomico. Man mano che si va perdendo la coerenza questo diminuisce tendendo a zero nel stato gemello e di gatto. Nella base degli stati di Fock assume la forma

$$\alpha = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} c_i c_{i+1}^* \sqrt{(i+1)(N-i)}. \quad (2.12)$$

Questa grandezza è, inoltre, strettamente legata alla frazione di particelle condensate. Nel caso di bosoni interagenti quest'ultima può essere calcolata con il criterio di Penrose-Onsanger[9, 10],

ovvero essa è pari all'autovalore maggiore della matrice densità ridotta di particella singola  $\hat{\rho}_1$ . Questa è ottenuta tracciando parzialmente sulla altre  $N-1$  particelle la matrice densità del sistema  $\hat{\rho} = |E_0\rangle\langle E_0|$  con  $|E_0\rangle$  stato macroscopico,

$$\begin{aligned} Tr_{2\dots N}(\hat{\rho}) &= \sum_{\substack{\alpha_2, \dots, \alpha_N \\ \alpha_i=L,R}} \sum_{i,j=0}^N c_i^* c_j \langle \alpha | j, N-j \rangle \langle i, N-i | \alpha \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i,j=0}^N c_i^* c_j \binom{N-1}{k} \left[ \delta_{kj} \frac{1}{\sqrt{\binom{N}{j}}} |R\rangle + \delta_{k+1,j} \frac{1}{\sqrt{\binom{N}{j}}} |L\rangle \right] \left[ \delta_{ki} \frac{1}{\sqrt{\binom{N}{i}}} |R\rangle + \delta_{k+1,i} \frac{1}{\sqrt{\binom{N}{i}}} |L\rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

La seconda uguaglianza si ottiene osservando che in un generico *ket*  $|\alpha\rangle$  ci sono  $k$  stati  $|L\rangle$  e  $(N-1)-k$  stati  $|R\rangle$ . Terminando i conti si trova che la matrice densità ridotta di particella singola nella base  $\{|L\rangle, |R\rangle\}$  è

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \langle \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L \rangle & \langle \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R \rangle \\ \langle \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L \rangle & \langle \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Una derivazione alternativa può essere ottenuta a partire da  $\rho_1(z) = \frac{1}{N} \langle \hat{\Psi}^\dagger(z) \hat{\Psi}(z) \rangle$ . Questa funzione è la densità di probabilità di trovare una particella in  $z$ . Nel caso non interagente, in cui lo stato di singola particella è puro  $|\phi\rangle$ , sarebbe  $\rho_1(z) = |\langle z|\phi\rangle|^2$ . Per estensione, nel caso di una matrice densità si ha  $\rho_1(z) = \langle z|\hat{\rho}_1|z\rangle$ . Nella base  $\{|L\rangle, |R\rangle\}$  la matrice  $\hat{\rho}_1$  ha la forma  $\hat{\rho}_1 = \alpha|L\rangle\langle L| + \beta|R\rangle\langle L| + \beta^*|L\rangle\langle R| + \gamma|R\rangle\langle R|$ . Espandendo a due modi l'operatore di campo bosonico troviamo

$$\rho_1(z) = \frac{1}{N} \left[ \langle \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L \rangle |\phi_L(z)|^2 + \langle \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R \rangle |\phi_R(z)|^2 + \langle \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R \rangle (\phi_L(z)^* \phi_R(z) + \phi_R^*(z) \phi_L(z)) \right], \quad (2.15)$$

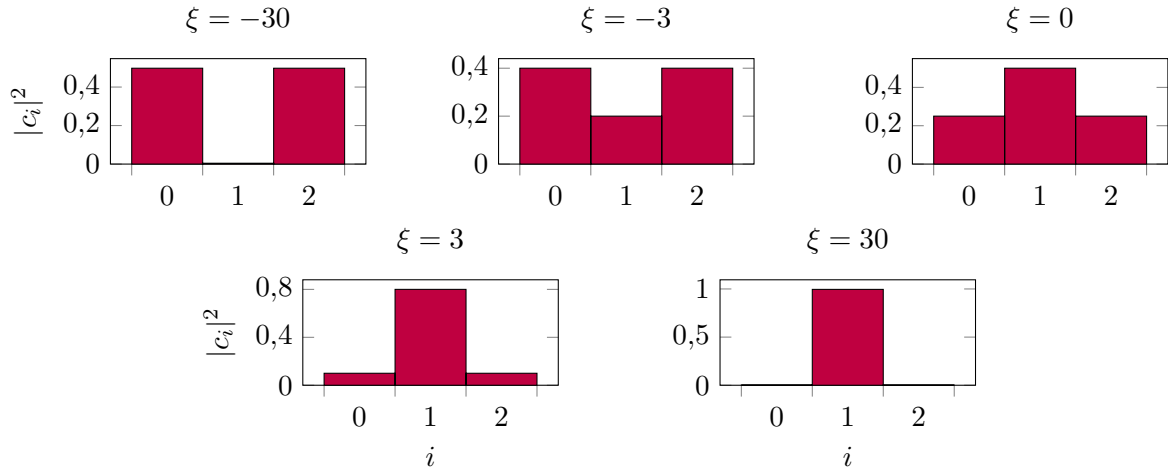
trovando per la matrice densità ridotta un risultato in accordo con l'equazione (2.14).

Sfruttando le proprietà di simmetria dello stato fondamentale e la definizione di visibilità di coerenza  $\alpha$ , troviamo che la frazione condensata è

$$\frac{n_0}{N} = \frac{1}{2}(\alpha + 1). \quad (2.16)$$

Il concetto di condensato in un sistema a due siti è un po' bizzarro dato che entrambi gli stati si trovano ad essere macroscopicamente occupati salvo casi di estremo sbilanciamento, ad esempio vedremo che nel regime debolmente interagente quasi tutte le particelle occupano un unico stato. In presenza di più di uno stato macroscopicamente occupato si dice che il condensato è *frammentato*. L'altro parametro che utilizzeremo per analizzare il sistema è l'*entropia di entanglement* che è una misura della correlazione quantistica tra le due buche. Questa quantità è definita come l'entropia di Von Neuman della matrice densità ridotta di una delle due buche,  $\hat{\rho}_L = Tr_R(\hat{\rho})$ ,

$$S = -Tr[\hat{\rho}_L \log_2 \hat{\rho}_L] = -\sum_{i=0}^N |c_i|^2 \log_2 |c_i|^2. \quad (2.17)$$



**Figura 2.2:** Probabilità di transizione al variare di  $\xi$  per 2 particelle. Le etichette delle colonne indicano il numero di particelle nella buca di sinistra. Come atteso, il sistema è simmetrico tra le due buche e rispetta gli andamenti asintotici predetti.

Questa grandezza vale zero nel caso di uno stato separabile e  $\log_2(N+1)$ , con  $N+1 = \dim(\mathcal{H}_L)$ , nel caso di stato massimamente entangled.

## 2.4 Risultati analitici per poche particelle

Nel caso di  $N=2,3$  è possibile trovare soluzioni analitiche in funzione del parametro  $\xi = U/J$  [11, 7]. Gli stati fondamentali della hamiltoniana (2.5) sono

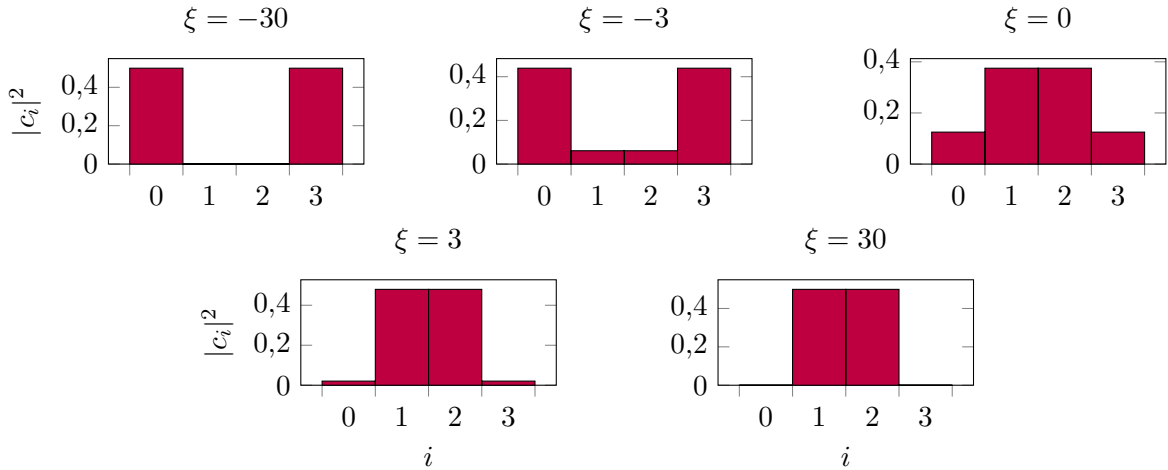
$$|E_0\rangle = A_2 \left( |0, 2\rangle + \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 16}}{2\sqrt{2}} |1, 1\rangle + |2, 0\rangle \right), \quad (2.18)$$

$$|E_0\rangle = A_3 \left( |0, 3\rangle + \frac{1 + \xi + \sqrt{4 + 2\xi + \xi^2}}{\sqrt{3}} |1, 2\rangle + \frac{1 + \xi + \sqrt{4 + 2\xi + \xi^2}}{\sqrt{3}} |2, 1\rangle + |3, 0\rangle \right).$$

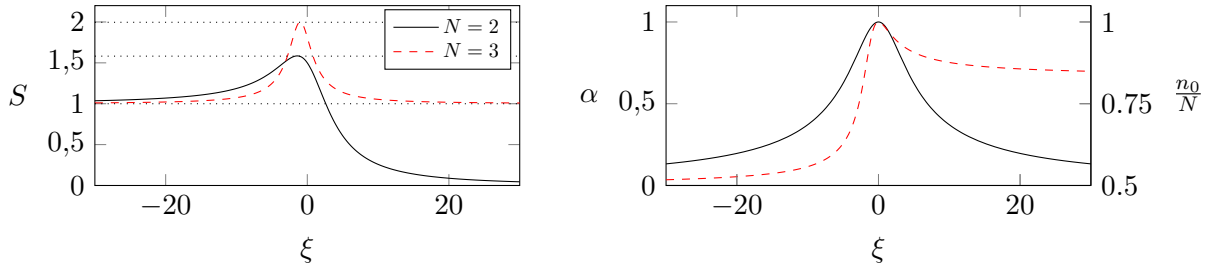
con  $A_2$  e  $A_3$  costanti di normalizzazione. Facendo i limiti dei coefficienti si trova che sono rispettati gli andamenti asintotici ricavati nella sezione 2.2, con l'accortezza che nel caso di 3 particelle il limite per interazione repulsiva porta ad uno stato non separabile che indicheremo come *pseudogemello*  $|PTWIN\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2} \right\rangle + \left| \frac{N+1}{2}, \frac{N-1}{2} \right\rangle \right)$ . Nelle **Figure 2.2 e 2.3** sono riportate le probabilità di transizione in alcuni casi intermedi. Dato che abbiamo ottenuto un'espressione analitica per i coefficienti possiamo scrivere delle formule esplicitamente in funzione di  $\xi$  per la visibilità di coerenza

$$\alpha_{N=2} = \frac{4(\xi + \sqrt{16 + \xi^2})}{16 + \xi^2 + \xi\sqrt{16 + \xi^2}}, \quad (2.19)$$

$$\alpha_{N=3} = \frac{2(1 + \xi + \sqrt{4 + 2\xi + \xi^2})(4 + \xi + \sqrt{4 + 2\xi + \xi^2})}{3(3 + [1 + \xi + \sqrt{4 + 2\xi + \xi^2}]^2)},$$



**Figura 2.3:** Probabilità di transizione al variare di  $\xi$  per 3 particelle. Le etichette delle colonne indicano il numero di particelle nella buca di sinistra. Come atteso, il sistema è simmetrico tra le due buche e rispetta gli andamenti asintotici predetti.



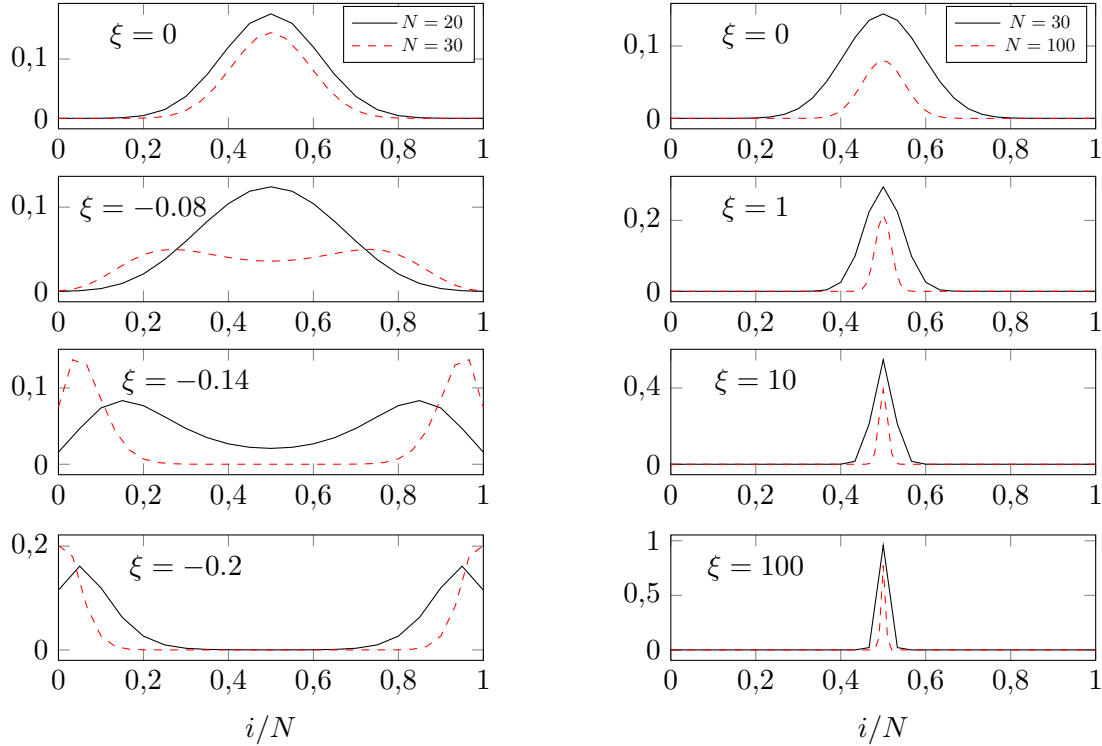
**Figura 2.4:** Entropia di *entanglement* e visibilità di coerenza per 2 (linea continua) e 3 (linea tratteggiata) particelle. In entrambi i casi l'entropia di *entanglement* raggiunge il massimo teorico (linee punteggiate). La visibilità di coerenza diminuisce aumentando l'interazione, ma nel caso di 3 particelle non si azzerava per interazione repulsiva. Nell'asse di destra c'è la frazione di particelle condensate.

e l'entropia di *entanglement*

$$S_{N=2} = -A_2^2 (2 \log_2[A_2^2] + s_2 \log_2[s_2 A_2^2]), \quad (2.20)$$

$$S_{N=3} = -2A_3^2 (\log_2[A_3^2] + s_3 \log_2[A_3^2 s_3]),$$

con  $s_2 = \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 + 16})^2}{8}$  e  $s_3 = \frac{(1 + \xi + \sqrt{4 + 2\xi + \xi^2})}{3}$ . I grafici di queste funzioni sono riportati in **Figura 2.4**. Si vede che diminuendo il *tunneling* si perde coerenza e il condensato si frammenta, anche se nel limite repulsivo  $\alpha$  non si azzerava nel caso di particelle dispari. Vedremo nella prossima sezione l'andamento di questo effetto all'aumentare del numero di particelle. L'entropia di *entanglement* in entrambi i casi raggiunge il suo valore massimo  $\log_2(N+1)$  che si ha quando tutti i coefficienti sono uguali. Nel limite in cui si hanno due stati separabili equiprobabili, stati  $|CAT\rangle$  e stato  $|PTWIN\rangle$ , l'entropia di *entanglement* vale uno. Nel limite di stato gemello vale zero.



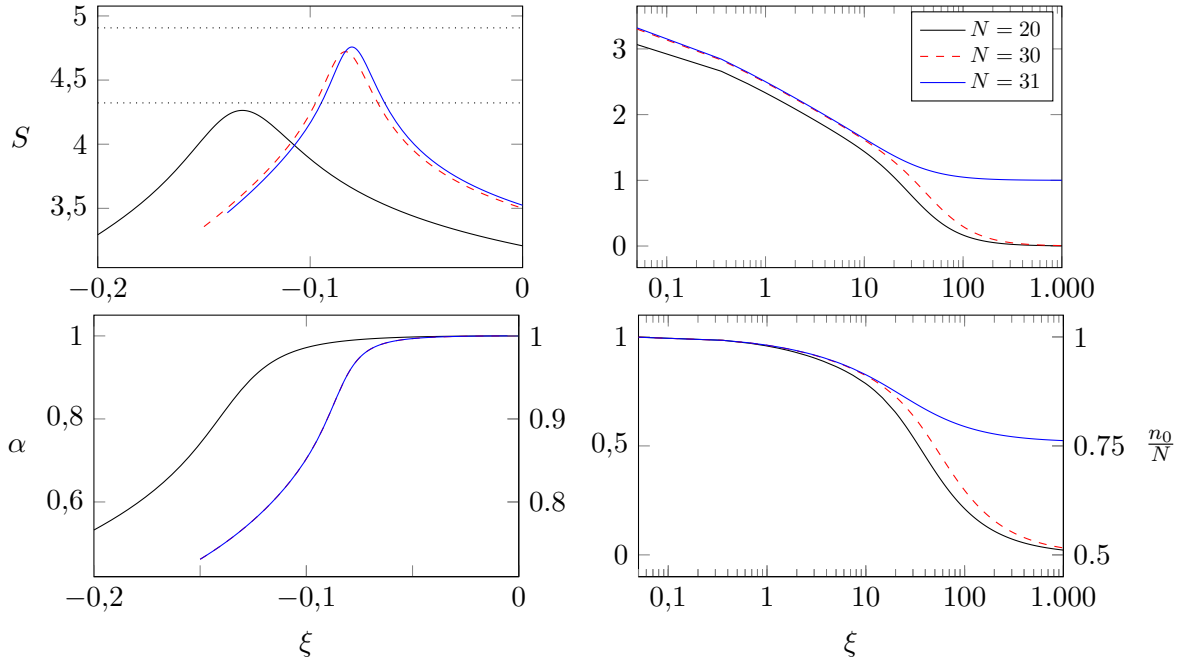
**Figura 2.5:** Probabilità di transizione nel caso mesoscopico. A sinistra il caso attrattivo con la transizione di fase verso lo stato di gatto di Schroedinger, mentre a destra la formazione dello stato separabile nel caso repulsivo. Entrambi i processi sono più netti con un più alto numero di particelle. Come atteso il sistema presenta simmetria sinistra-destra.

## 2.5 Risultati numerici nel caso mesoscopico

Definiamo mesoscopico il caso in cui il numero di particelle è di qualche decina o centinaia, per distinguerlo dal caso di poche particelle, qualche unità, e da quello macroscopico per cui iniziano ad essere valide le approssimazioni semiclassiche, sopra le migliaia. In **Figura 2.5** sono riportate le probabilità di transizione nello stato fondamentale, al variare di  $\xi = U/J$  e per un numero pari di particelle. Nel caso repulsivo abbiamo fatto un esempio con 30 e 100 particelle. Si vede chiaramente la transizione di fase da stato coerente atomico a stato gemello e che questa è più marcata più è alto il numero di bosoni. Un discorso analogo è valido nel caso attrattivo dove vengono mostrate 20 e 30 particelle. Anche qui si vede molto chiaramente la formazione dello stato macroscopicamente *entangled* e il fatto che questo passaggio è più netto all'aumentare del numero di bosoni.

I grafici della visibilità di coerenza e dell'entropia di *entanglement* in **Figura 2.6** evidenziano alcune cose piuttosto interessanti. Attorno a  $\xi = 0$  la visibilità di coerenza esibisce un *plateau* che potrebbe rappresentare una giustificazione microscopica all'applicazione dell'approssimazione semiclassica in condizioni di interazioni deboli. Tuttavia si restringe all'aumentare del numero di particelle quindi questa ipotesi richiederebbe uno studio più accurato. L'entropia di *entanglement* invece presenta il massimo nel caso attrattivo, vicino a zero e con la tendenza ad avvicinarsi all'aumentare del numero di particelle. I picchi sono poco inferiori al massimo teorico e, considerato anche quanto si vede in **Figura 2.4**, sembra esserci la tendenza ad aumentare questo divario al crescere del numero di particelle.

In **Figura 2.6** abbiamo riportato anche un caso a particelle dispari, ossia il cui stato fondamentale



**Figura 2.6:** Parametri di studio delle transizioni di fase nel caso mesoscopico. L'entropia di *entanglement* raggiunge il massimo nel caso attrattivo, senza però raggiungere il massimo teorico (linea punteggiata). La visibilità di coerenza presenta un *plateau* centrale e poi decresce. I diversi andamenti asintotici nel caso fortemente repulsivo a particelle dispari è dovuto alla formazione dello stato pseudo-gemello. Nell'asse di destra dei grafici di  $\alpha$  c'è la frazione condensata.

nel limite fortemente repulsivo è lo pseudo-gemello. Per entrambi i parametri il comportamento è fondamentalmente identico ai casi con particelle pari, se non per piccole differenze dovute al crescere del numero di bosoni, fino ad un certo valore critico di  $\xi > 0$ . Passato questo valore iniziano ad evidenziarsi i diversi andamenti asintotici, l'entropia di *entanglement* tende a uno, mentre la visibilità tende a  $\frac{1}{2} \frac{N+1}{N}$ .

Infine, mostriamo che la visibilità di coerenza può essere ricavata analiticamente sfruttando la teoria delle perturbazioni. Il teorema di Hellmann-Feynman afferma che  $\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial J} = \langle E_0 | \frac{\partial \hat{H}}{\partial J} | E_0 \rangle$ , da cui segue  $\alpha = -\frac{1}{N} \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial J}$ . Nei casi di interazione o *tunneling* molto debole è possibile ricavare delle formule analitiche semplici. Nel regime fortemente attrattivo ( $\xi \rightarrow -\infty$ ) al secondo ordine perturbativo otteniamo

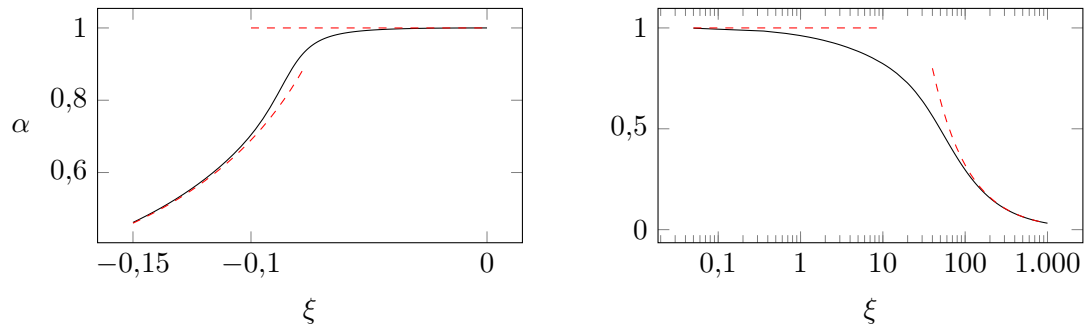
$$\mathcal{E}_0 \sim \frac{UN(N-1)}{2} + \frac{NJ^2}{U(N-1)} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{2}{(N-1)\xi}, \quad (2.21)$$

nel caso fortemente repulsivo ( $\xi \rightarrow \infty$ ) invece

$$\mathcal{E}_0 \sim \frac{UN}{2} \left( \frac{N}{2} - 1 \right) - \frac{J^2}{U} N \left( \frac{N}{2} + 1 \right) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{N+2}{\xi}. \quad (2.22)$$

Infine nel limite di interazioni deboli ( $\xi \sim 0$ )

$$\mathcal{E}_0 \sim -NJ + \frac{UN(N-1)}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1, \quad (2.23)$$



**Figura 2.7:** La linea continua rappresenta la visibilità di coerenza per 30 particelle ottenuta diagonalizzando numericamente la hamiltoniana. Le linee tratteggiate, invece, l'andamento che si ottiene con le formule perturbative. Se applicate nei giusti regimi mostrano un buon andamento.

che è costante come ci saremmo aspettati. In **Figura 2.7** mostriamo in grafico la validità di queste approssimazioni confrontate con i valori ottenuti diagonalizzando la hamiltoniana.



## Capitolo 3

# Anyon-Hubbard a due siti

Uno dei concetti fondamentali alla base della meccanica quantistica è l'indistinguibilità delle particelle identiche. Un'importante conseguenza di questo è che le osservabili non devono essere influenzate da un loro scambio. In dimensione 3 gli operatori che scambiano le particelle sono una rappresentazione del gruppo delle permutazioni e perciò hanno solo due possibili autovalori:  $\pm 1$ . Le particelle la cui funzione d'onda resta invariata sono dette *bosoni* mentre quelle il cui segno viene invertito sono dette *fermioni*. In dimensione 2, invece, gli scambi sono regolati dal gruppo delle trecce la cui rappresentazione sono operatori che non hanno il vincolo  $\hat{O}^2 = \mathbb{I}$  e ammettono quindi come autovalori tutti i possibili numeri complessi a modulo unitario  $e^{i\theta}$ . Per  $\theta = 0, \pi$  otteniamo l'analogo bidimensionale di bosoni e fermioni, mentre le particelle per cui  $0 < \theta < \pi$  le chiamiamo con il nome attribuitogli da Frank Wilzcek, *anyons* [12]. Queste quasi-particelle furono osservate per la prima volta nell'effetto Hall quantistico frazionario.

Nel decennio scorso sono state proposte alcune tecniche sperimentali per la realizzazione di reticoli ottici unidimensionali nei quali intrappolare *anyons* a partire da bosoni [13, 14, 15]. In questo capitolo vedremo come cambiano i risultati esposti precedentemente, nel caso in cui le particelle intrappolate presentino statistica frazionaria. Prima di iniziare è doveroso fare due osservazioni riguardo il concetto di reticolo unidimensionale. Dato il potenziale dell'equazione (2.1), è possibile renderlo quasi-unidimensionale aumentando la frequenza dell'oscillatore armonico. L'altra precisazione riguarda il fatto che gli *anyons* sono un fenomeno che emerge in dimensione 2 e non 1. Tuttavia la nozione di statistica frazionaria può essere estesa. In particolare, gli *anyons* in una dimensione sono definiti dalle relazioni di commutazione generalizzate [13]

$$\hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger - e^{-i\theta \text{sgn}(i-j)} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i = \delta_{ij}, \quad (3.1)$$

$$\hat{a}_i \hat{a}_j - e^{i\theta \text{sgn}(i-j)} \hat{a}_j \hat{a}_i = 0,$$

con  $\text{sgn}(i-j)=0$  per  $i=j$  e  $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$  operatori di annichilazione e creazione anyonici. Da queste relazioni segue che localmente, sullo stesso sito, gli *anyons* si comportano come bosoni, quindi per  $\theta = \pi$  otteniamo pseudo-fermioni, bosoni localmente e fermioni nello scambio tra siti. Possiamo mappare *anyons* e bosoni definendo la trasformazione

$$\hat{a}_L = \hat{b}_L e^{i\theta \hat{n}_R} \quad \hat{a}_R = \hat{b}_R, \quad (3.2)$$

con  $\hat{b}_i$  operatori di annichilazione bosonici e  $\hat{n}_i = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ . Gli operatori  $\hat{a}_i$ , così definiti, obbediscono alle regole di commutazione anyoniche con  $\text{sgn}(L - R) = -1$ .

Con procedimenti analoghi a quello svolti nella sezione 2.1, troviamo che il modello di *Anyon-Hubbard* a due siti può essere descritto da un'equazione uguale alla 2.5 con gli operatori anyonici. Utilizzando la mappa appena introdotta troviamo

$$\hat{H}_a = -J(e^{-i\theta\hat{n}_R}\hat{b}_L^\dagger\hat{b}_R + h.c.) + \frac{U}{2}\left(\hat{n}_L(\hat{n}_L - 1) + \hat{n}_R(\hat{n}_R - 1)\right). \quad (3.3)$$

Procediamo vedendo come variano gli stati fondamentali del caso a poche particelle. Come nel capitolo precedente ci mettiamo nella base degli stati di Fock dove, data la trasformazione fatta, le particelle sono bosoni. Per  $N = 2, 3$  gli stati non eccitati sono rispettivamente (cfr. equazione (2.18))

$$\begin{aligned} |E_0\rangle &= A_2 \left( e^{i\theta}|0, 2\rangle + \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 16}}{2\sqrt{2}}|1, 1\rangle + |2, 0\rangle \right), \\ |E_0\rangle &= A_3 \left( e^{3i\theta}|0, 3\rangle + e^{i\theta}\frac{1 + \xi + \sqrt{4 + 2\xi + \xi^2}}{\sqrt{3}}|1, 2\rangle + \frac{1 + \xi + \sqrt{4 + 2\xi + \xi^2}}{\sqrt{3}}|2, 1\rangle + |3, 0\rangle \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

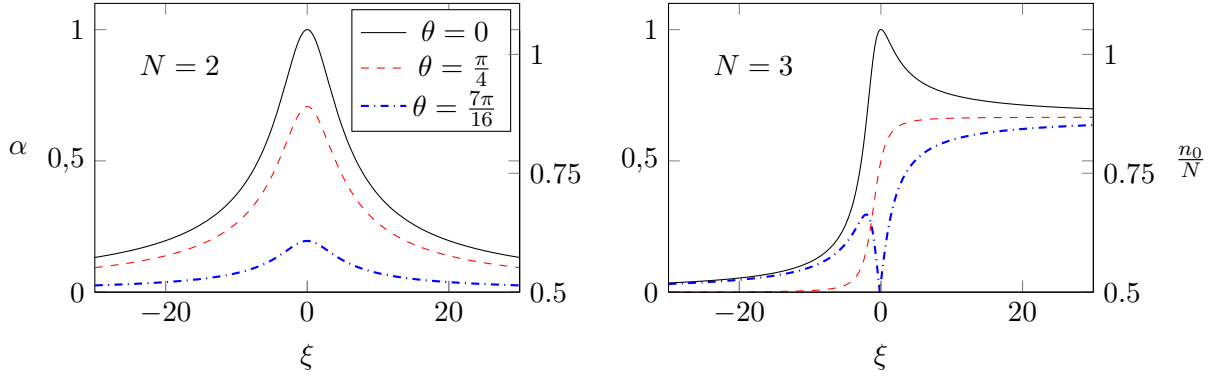
con  $A_2$  e  $A_3$  costanti di normalizzazione. Quanto emerge è che le probabilità di transizione restano invariate ma compaiono dei termini di fase tra gli stati di Fock. L'entropia di *entanglement* quindi non cambia rispetto a quella in **Figura 2.4**. La visibilità di coerenza invece risente di questo cambiamento. La derivazione esposta nella sezione 2.3 non utilizza le regole di commutazione, quindi nel caso di operatori anyonici troviamo lo stesso risultato. Mappando verso gli operatori bosonici troviamo  $\langle \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R \rangle \mapsto \gamma = \langle e^{-i\theta\hat{n}_R} \hat{b}_L^\dagger \hat{b}_R \rangle$ . Chiamiamo  $\gamma$  quest'ultimo valore di aspettazione perchè non può essere la visibilità di coerenza visto che, avendo rotto la simmetria di parità con la trasformazione (3.2), non è più uguale al suo complesso coniugato e quindi non è un numero reale. Tuttavia a partire dall'equazione (2.10) e definendo  $\gamma = |\gamma|e^{i\delta}$  troviamo

$$n(p) = n_0(p) \left[ 1 + \frac{2}{N} |\gamma| \cos\left(\frac{p}{\hbar}d - \delta\right) \right], \quad (3.5)$$

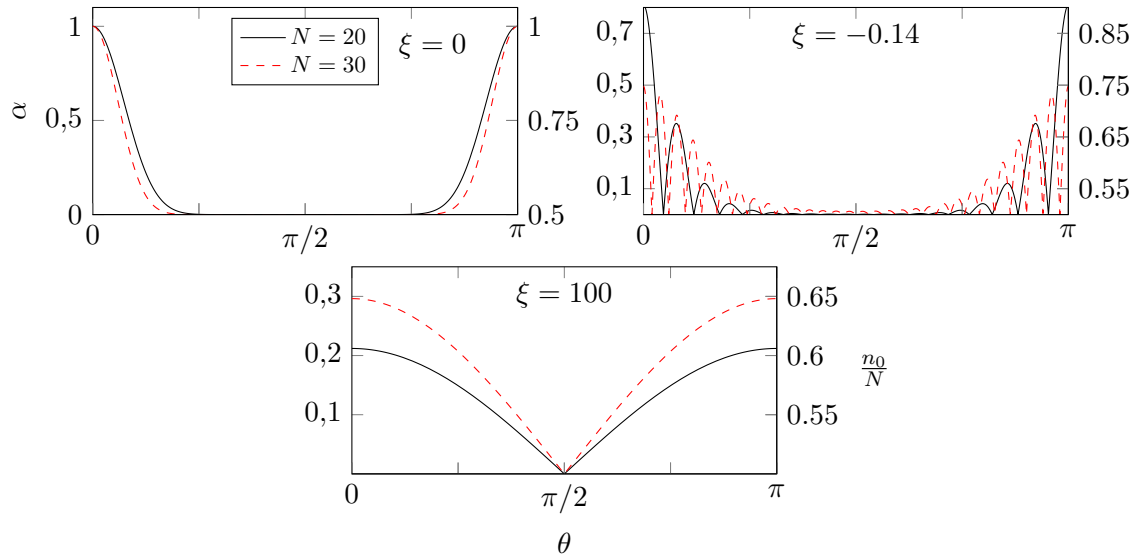
ottenendo quindi  $\alpha = \frac{2}{N} |\gamma|$ . La formula (2.16) per la frazione condensata resta la stessa a patto di usare la nuova definizione di visibilità di coerenza. Le formule analitiche che otteniamo per  $\gamma$  sono

$$\begin{aligned} \gamma_{N=2} &= \alpha_B \cos(\theta) e^{i\theta}, \\ \gamma_{N=3} &= \frac{4}{3} A_3^2 [\sqrt{3} s_3 \cos(2\theta) + s_3^2], \end{aligned} \quad (3.6)$$

con  $s_3 = \frac{1 + \xi + \sqrt{4 + \xi(2 + \xi)}}{\sqrt{3}}$  e  $\alpha_B$  visibilità di coerenza nel caso bosonico. Compaiono dei fattori coseno che riducono la coerenza producendo fenomeni bizzarri se confrontati con i risultati



**Figura 3.1:** Perdita di coerenza per 2 e 3 particelle al variare della fase degli *anyons* considerati. Per  $N = 2$  è presente un fattore  $\cos\theta$  che smorza tutta la curva, mentre per  $N = 3$  si ha anche una parte costante (rispetto a  $\theta$ ) che preserva l'andamento asintotico repulsivo. Nell'asse di destra c'è la frazione condensata.

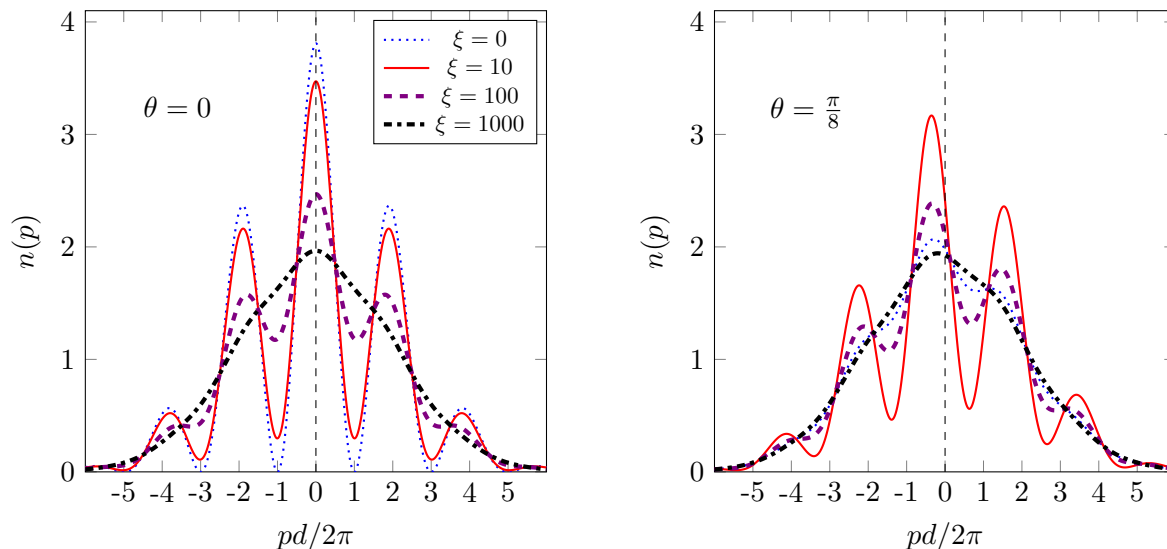


**Figura 3.2:** Perdita di coerenza al variare della fase degli *anyons* nel caso mesoscopico e per alcuni valori di  $\xi = U/J$ . Nel asse di destra c'è la frazione condensata.

riportati nello scorso capitolo. In **Figura 3.1**, ad esempio, si vede che per 3 particelle e  $\theta = \frac{7}{16}\pi$  il condensato è massimamente frammentato e totalmente incoerente per interazione nulla mentre, contrariamente a quanto visto finora, introducendo interazione aumenta la coerenza.

Nel caso mesoscopico abbiamo calcolato le probabilità di transizione nelle stesse situazioni riportate in **Figura 2.5**, ottenendo gli stessi risultati. Di conseguenza, anche l'entropia di *entanglement* non cambia. Tuttavia anche in questi casi, come negli stati (3.4), vi sono dei termini di fase nelle ampiezze di transizione, con rilevanti effetti nella visibilità di coerenza. In **Figura 3.2** mostriamo l'andamento della perdita di coerenza al variare della fase per diversi valori di  $\xi = U/J$ . Nel caso non interagente la decrescita di  $\alpha$  è molto rapida avvicinandosi a  $\theta = \pi/2$  e tende a diventare più netta all'aumentare del numero di particelle. Nel caso di forte repulsione ( $\xi = 100$ ), invece, la perdita di coerenza è meno drastica e più morbida aumentando il numero di bosoni. Infine, per  $\xi = -0.14$  si hanno molte fasi per cui il sistema è incoerente.

L'altro effetto che compare nel caso anyonico è una fase nella figura di interferenza (vedi equa-



**Figura 3.3:** Confronto tra la densità di momento di bosoni e *anyons* per diversi valori dell'interazione. Da notare l'incoerenza del caso non interagente anyonico e lo sfasamento rispetto l'origine.

zione (3.5)). Per evidenziare ciò, in **Figura 3.3** si mostra la densità di momento sia nel caso bosonico che in quello anyonico per  $\theta = \pi/8$ . La funzione d'onda è stata assunta essere una gaussiana centrata in zero e di varianza  $2\sqrt{2}\pi$ , ipotesi non del tutto irrealistica dato che nello stato fondamentale di una buca l'approssimazione armonica può essere valida. La differenza tra le due situazioni è piuttosto netta, soprattutto in assenza di interazione. Inoltre è molto evidente lo sfasamento, con conseguente rottura della parità, nel caso anyonico.

## Capitolo 4

# Conclusioni

La hamiltoniana del modello di Bose-Hubbard a due siti è stata derivata evidenziando le ipotesi sottostanti. La versione discussa in questa tesi è la più semplice, ma può essere facilmente estesa aggiungendo termini e studiata compiendo una trattazione simile a quella svolta in questa tesi. Il comportamento macroscopico del sistema può subire grandi variazioni al variare dell'interazione tra le particelle e i parametri introdotti, entropia di *entanglement* e visibilità di coerenza, permettono di evidenziare molto bene queste transizioni di fase. La teoria perturbativa ci permette inoltre di ricavare formule molto semplici per la visibilità di coerenza anche in casi a molte particelle.

Infine, si è mostrato cosa accade se le particelle coinvolte sono *anyons*. Mentre la correlazione quantistica tra le due buche non risente di questo cambiamento, la coerenza può subire bruschi cali che rendono inapplicabile l'equazione di Gross-Pitaevskii.



# Bibliografia

- [1] G. Mazzearella, L. Salasnich, A. Parola, F. Toigo, Coherence and entanglement in the ground state of a bosonic josephson junction: From macroscopic schrödinger cat states to separable fock states, *Phys. Rev. A* 83 (2011) 053607.
- [2] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi, S. R. Shenoy, Quantum coherent atomic tunneling between two trapped bose-einstein condensates, *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997) 4950–4953.
- [3] B. Julia-Diaz, D. Dagnino, M. Lewenstein, J. Martorell, A. Polls, Macroscopic self-trapping in bose-einstein condensates: Analysis of a dynamical quantum phase transition, *Phys. Rev. A* 81 (2010) 023615.
- [4] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, P. Zoller, Cold bosonic atoms in optical lattices, *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 3108–3111.
- [5] O. Morsch, M. Oberthaler, Dynamics of bose-einstein condensates in optical lattices, *Rev. Mod. Phys.* 78 (2006) 179–215.
- [6] H. Bruus, K. Flensberg, Many-body quantum theory in condensed matter physics, Oxford university press, 2002.
- [7] J. Dobrzyniecki, T. Sowiński, Effective two-mode description of a few ultra-cold bosons in a double-well potential, *Physics Letters A* 382 (6) (2018) 394 – 399.
- [8] L. Pitaevskii, S. Stringari, Interference of bose-einstein condensates in momentum space, *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999) 4237–4240.
- [9] O. Penrose, L. Onsager, Bose-einstein condensation and liquid helium, *Phys. Rev.* 104 (1956) 576–584.
- [10] Q. Zhu, Q. Zhang, B. Wu, Extended two-site bose–hubbard model with pair tunneling: spontaneous symmetry breaking, effective ground state and fragmentation, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 48 (4) (2015) 045301.
- [11] M. Galante, G. Mazzearella, L. Salasnich, Analytical results on quantum correlations of few bosons in a double-well trap (2014). [arXiv:1410.5321](https://arxiv.org/abs/1410.5321).
- [12] S. Rao, Introduction to abelian and non-abelian anyons (2016). [arXiv:1610.09260](https://arxiv.org/abs/1610.09260).
- [13] T. Keilmann, I. McCulloch, M. Roncaglia, Statistically induced phase transitions and anyons in 1d optical lattices, *Nature Communications* 2 (Jun 2011).
- [14] S. Greschner, L. Santos, Anyon hubbard model in one-dimensional optical lattices, *Phys. Rev. Lett.* 115 (2015) 053002.

- [15] M. Bonkhoff, Interacting anyons in a one-dimensional optical lattice, Master's thesis, University of Kaiserslautern (12 2016).