



Dipartimento di Psicologia dello Sviluppo e della Socializzazione

**Corso di laurea magistrale in Psicologia dello Sviluppo e
dell'educazione**

Tesi di laurea magistrale

**Quale associazione esiste fra l'aritmetica e altre abilità numeriche precoci nei
toddlers? Uno studio**

What association exists between arithmetic and other early numerical skills in
toddlers? A study

Relatrice: prof.ssa Daniela Lucangeli

Correlatrice: dott.ssa Annamaria Porru

Laureanda: **Chiara Galmarini**

Matricola: 1234214

Anno accademico 2022/2023

Alla mia famiglia

Abstract

Le precoci capacità aritmetiche, l'acuità numerica e i principi del conteggio costituiscono parte delle fondamenta su cui si baseranno le competenze matematiche in età scolare, svolgendo un ruolo determinante anche per il successo scolastico negli anni successivi. Il presente lavoro ha voluto indagare tali competenze in bambini tra i 18 e i 36 mesi nell'ottica di voler dimostrare che è possibile approfondire il campo di conoscenza della cognizione numerica anche in bambini frequentanti l'asilo nido, con la prospettiva di fondo di voler sensibilizzare personale educativo e famiglie ad un tema su cui si sta arricchendo il bagaglio di conoscenza in possesso della comunità scientifica.

Le competenze legate al numero sono il risultato dell'interazione fra capacità presenti fin dalla nascita e altre acquisite nel corso dello sviluppo, entrambe mediate dalla cultura di appartenenza e dagli stimoli forniti dall'ambiente in cui si viene cresciuti. Quando si parla di *cognizione numerica* si pensa ad aspetti che hanno a che fare sia con ciò che l'uomo possiede a livello ontogenetico che le acquisizioni che derivano dalle esperienze a cui quotidianamente viene sottoposto.

Tra le competenze innate, il presente studio si è soffermato in particolare sulle *abilità aritmetiche* precoci che sono presenti già a pochi mesi di vita e che sono in continuo cambiamento nel corso dello sviluppo. Posseggono la caratteristica di essere sensibili alla ratio: i bambini in età prescolare sono in grado di compiere delle operazioni aritmetiche con accuratezza crescente all'aumentare del rapporto tra due numeri presentati (competenza che manterranno per tutto il corso della loro vita). Le analisi svolte sul campione che ha partecipato alla ricerca hanno evidenziato come sia presente una sensibilità alla ratio anche nella prima infanzia, ma in maniera differente rispetto a quanto la letteratura sottolinea dal momento che i bambini sono stati più accurati nel rispondere agli item in cui il rapporto era minore (1:2) rispetto a quando era maggiore (1:4) ($F(1, 19) = 15.629, p < .001$).

Inoltre, i bambini in età prescolare sanno anche confrontare le quantità di due insiemi differenti, capacità denominata *acuità numerica*: essa muta con il progredire dello sviluppo e presenta la stessa caratteristica di sensibilità alla ratio di cui si è accennato per le competenze aritmetiche.

Le due abilità appena presentate, entrambe di carattere innato, hanno in comune il sistema cognitivo che sottostà alla loro attivazione: l'*Approximate Number System*. Infatti, dalle analisi, le prove che indagavano le competenze aritmetiche e l'acuità numerica sono risultate in correlazione fra loro ($r=0.694$, $p < .001$), a dimostrazione del fatto che è implicato lo stesso meccanismo.

I bambini che hanno un'età compresa fra i 18 e i 36 mesi, però, posseggono anche altre competenze che rientrano nell'ambito della cognizione numerica. Nella prima infanzia i bambini dimostrano di possedere una serie di concetti che ruotano attorno al mondo dei numeri, tali concetti denominati "*principi del conteggio*" (Gelman & Gallistel, 1978) sono fortemente dipendenti dalle esperienze che i bambini vivono quotidianamente e a questa età iniziano a sperimentarli tramite le interazioni con i loro adulti di riferimento.

INDICE

Introduzione	1
Capitolo 1 La cognizione numerica preverbale	3
1.1 <i>Le teorie di Piaget e Butterworth.</i>	5
1.2 <i>Due sistemi di base: OTS e ANS.</i>	10
1.3 <i>La proto-aritmetica</i>	15
1.4 <i>Altre associazioni: l'effetto SNARC</i>	18
Capitolo 2 L'evoluzione delle competenze matematiche	19
2.1 <i>I principi del conteggio (Gelman e Gallistel)</i>	19
2.2 <i>Le dita e la cognizione incarnata</i>	21
2.3 <i>L'Home Numeracy Environment</i>	24
2.4 <i>Il ruolo della memoria</i>	25
Capitolo 3 La ricerca	28
3.1 <i>Ipotesi di ricerca</i>	28
3.2 <i>Partecipanti</i>	29
3.3 <i>Metodo e strumenti</i>	30
3.4 <i>I task oggetto dello studio</i>	31
3.5 <i>Analisi dei dati</i>	35
3.6 <i>Risultati</i>	35
3.7 <i>Discussione</i>	40
3.8 <i>Limiti e aspetti salienti</i>	42
Conclusione	45
Bibliografia	48

Introduzione

La cognizione numerica è un campo di conoscenza sul quale negli ultimi decenni la ricerca scientifica sta investendo molto in termini di tempo e di risorse.

Sulla base della mia personale esperienza lavorativa all'interno di nidi e di strutture dedicate alla prima infanzia, comprendere il funzionamento e i processi di base che sottostanno alle competenze più complesse diviene fondamentale almeno per due ordini di motivi: in un'ottica strettamente legata alle discipline psicologiche, per supportare lo sviluppo dei bambini tenendo conto del loro potenziale di sviluppo, delle finestre evolutive e della qualità degli stimoli da offrire; per valorizzare l'unicità del bambino stesso, invece, se si vuole dare maggior risalto agli aspetti pedagogici che dovrebbero guidare i servizi educativi e scolastici.

La ricerca nel campo della cognizione numerica è utile anche per poter fornire le indicazioni migliori alle famiglie in termini di stimoli da offrire ma anche per supportare gli operatori che lavorano nei servizi dedicati alla prima infanzia, così da permettere una giusta conoscenza dell'argomento e indirizzare verso spunti di riflessione utili al lavoro educativo stesso. Inoltre, le più recenti direttive ministeriali prevedono l'istituzione di un "*Sistema integrato 0-6*" (D.lgs. n. 65/2017) il quale si prefigge, tra le altre cose, la possibilità che i bambini in questo periodo della vita possano sperimentare un percorso di continuità educativa e scolastica: includere, in tale percorso di continuità, anche gli aspetti che riguardano lo sviluppo cognitivo del bambino non può fare altro che arricchire l'offerta dei servizi stessi, in particolare per quanto riguarda i servizi che si occupano della fascia d'età dello 0 – 3, da sempre e storicamente considerati con finalità prima assistenziali e, solo più recentemente, con finalità educative.

Il seguente testo ha voluto indagare e approfondire alcuni aspetti teorici della cognizione numerica, partendo da ciò che viene considerato innato fino ad arrivare a toccare alcune delle competenze che i bambini dovrebbero possedere prima di fare il loro ingresso alla scuola primaria.

Nel primo capitolo ci si sofferma, in modo particolare, sugli aspetti della cognizione numerica preverbale ovvero quegli elementi che hanno una forte impronta innata, includendo anche una cornice storico-teorica che può aiutare a comprendere come si sono evolute le conoscenze sull'argomento. Nella stessa parte si presentano i due sistemi cognitivi che guidano gli aspetti preverbal, l'*Object Tracking System* (OTS) e l'*Approximate Number System* (ANS). In aggiunta, si tratterà delle prime competenze aritmetiche possedute dai bambini, abilità che possono essere osservate anche a pochi mesi di vita e che costituiscono l'aspetto su cui si concentrerà il capitolo dedicato alla ricerca. Si concluderà, poi, con un accenno all'effetto SNARC.

Il secondo capitolo del testo tratterà invece di alcuni degli elementi che seguono, nel percorso evolutivo del bambino, le competenze preverbal e che si definiscono come ingredienti di supporto alle capacità di conteggio. Si partirà con il chiarire che cosa sono i *principi del conteggio*, definiti dai due studiosi Gelman e Gallistel nel 1978, per poi trattare l'approccio teorico dell'*Embodied Cognition* secondo cui l'apprendimento di competenze legate al numero passa anche attraverso la corporeità. Per lo sviluppo di buone competenze in campo matematico giocano un ruolo non indifferente anche le esperienze che i bambini vivono in ambiente domestico, si vedrà infatti che l'*Home Numeracy Environment* può supportare l'acquisizione ed il consolidamento, ad esempio, di alcuni dei principi del conteggio, anche alla luce dello stretto legame con gli aspetti linguistici dello sviluppo. Infine, si accennerà al ruolo svolto dalla memoria, in particolare dalla memoria di lavoro, nel sostenere la cognizione numerica.

Nel terzo ed ultimo capitolo, infine, si tratterà della ricerca svolta e dei dati che sono emersi nell'indagare le competenze aritmetiche precoci, anche in relazione ad altre abilità numeriche che sono state oggetto di studio e che gravitano attorno al mondo dei numeri.

A chiudere il testo, una breve riflessione sul perché può essere importante, già a partire dall'asilo nido, proporre dei percorsi che abbiano come oggetto la cognizione numerica e su come può essere stimolata tale competenza.

Capitolo 1

La cognizione numerica preverbale

La cognizione numerica è definibile come la capacità di quantificare e rappresentare l'informazione numerica per svolgerne delle semplici operazioni aritmetiche (Cassia, Valenza & Simion, 2012) e, al contrario di quanto potrebbe suggerire il senso comune, non riguarda esclusivamente i bambini che hanno raggiunto un livello minimo di istruzione scolastica, ma, come spesso accade quando si parla di età dello sviluppo, la realtà è leggermente più complessa (Dehaene, 2010).

La recente letteratura scientifica sottolinea come le capacità numeriche dell'essere umano, ma anche di altre specie animali, siano degne di una attenzione specifica e si presentino molto più precocemente di quanto non avevano ipotizzato le prime ricerche nel campo. Se alcuni studiosi, come Piaget, sostenevano che prima di una certa età non avesse senso parlare di abilità numeriche, la ricerca e il progredire degli strumenti di indagine ha consentito di fare enormi passi avanti.

Diviene fondamentale studiare e comprendere come ha origine l'abilità di processare le quantità anche con l'obiettivo di promuovere un miglioramento dei percorsi didattici e formativi dei bambini. Se è vero che, come diversi studi hanno dimostrato, alcuni indicatori rilevati in età precoce sono significativi rispetto al successivo sviluppo e riuscita in campo matematico degli studenti, è bene che si affronti il tema a partire dai primi momenti di vita dell'individuo.

LeFevre (2016) ricorda che una grande spinta allo sviluppo di questo ambito di conoscenza venne dato dalla rivoluzione cognitivista che aprì la possibilità a nuove letture e a nuove modalità di approccio rispetto al "come" avviene lo sviluppo.

Un tale cambiamento di prospettiva ha consentito che venissero rivalutate le competenze percettive del bambino facendo acquistare loro grande valore in quel momento storico, mettendo in secondo piano gli aspetti legati al comportamento e all'azione che erano stati centrali fino a quando il

comportamentismo aveva guidato gli studi sullo sviluppo e le interpretazioni date ai risultati che venivano rilevati (Cassia, Valenza & Simion, 2012).

Per capire come abbiano origine alcuni meccanismi attraverso i quali l'individuo conosce il mondo divenne fondamentale lo studio di bambini molto piccoli le cui capacità non potevano essere rilevate tramite i metodi utilizzati con gli adulti o bambini già in grado di parlare; inoltre, l'immatura capacità dei bambini molto piccoli di regolare i propri stati ed il numero ridotto di espressioni comportamentali possedute dagli stessi, hanno costituito un elemento di sfida per gli studiosi dell'epoca. Si rese necessario ideare dei paradigmi che consentissero di "leggere" il comportamento del bambino come non era ancora stato fatto (Cassia, Valenza & Simion, 2012). Alcune delle tecniche utilizzate per studiare la cognizione di numerica preverbale si basano appunto su alcuni di questi paradigmi e saranno citati più avanti.

Il campo di studio oggetto di questo testo non è privo di influenze e di arricchimenti derivanti dalla collaborazione fra discipline differenti: LeFevre (2016) riassume i più significativi apporti al campo della cognizione numerica individuando 6 aree tematiche strettamente legate ad essa. La *psicofisica* che, grazie all'apporto di studiosi tra cui Fias, Dehaene e Cohen Kadosh, ha consentito di individuare un particolare meccanismo chiamato effetto SNARC da cui è stato possibile dedurre che l'uomo rappresenta i numeri lungo una linea mentale continua; *l'information processing*, dalla quale si è preso spunto per capire che poteva essere utile misurare i tempi di risposta a dei task per fare delle inferenze rispetto a come vengono elaborate le quantità numeriche e di cui l'autrice ricorda il suo personale lavoro ed il contributo di Groen e Parkman; la *neuropsicologia* e le *neuroscienze cognitive* che, anche studiando pazienti con danni cerebrali, hanno individuato i correlati neurali sottostanti la cognizione numerica e hanno formalizzato dei modelli di interpretazione della stessa mediante i lavori svolti da studiosi quali Dehaene, McCloskey e Butterworth; la *didattica della matematica*, inevitabilmente influenzata dalle ricerche promosse in ambito psicologico e di cui LeFevre (2016) ricorda Fuson, Resnick, Greeno, Carpenter e Ginsburg come ricercatori degni di nota; la *psicometria* che ha influenzato il sapere sulla cognizione numerica tramite le ricerche sulle differenze individuali

anche attraverso gli apporti di Geary e, infine, la *psicologia dello sviluppo cognitivo* ha sviluppato dei modelli interpretativi che si sono susseguiti nel tempo a partire dal costruttivismo di Piaget passando dalla visione proposta da Gelman e Gallistel. Tutti questi ambiti, secondo LeFevre (2016), si impongono come protagonisti attivi nella definizione del campo di studio ma anche nella promozione di una continua ricerca volta ad affinare ciò che già si conosce.

Interessante, infine, è anche il fatto che la cognizione numerica possa influenzare il comportamento sociale dei bambini già in età prescolare: in un articolo del 2016, infatti, Chernyak e colleghi (Chernyak et al, 2016) hanno indagato la cognizione numerica e i comportamenti di condivisione verso terze parti di un gruppo di bambini. Gli studiosi hanno rilevato una relazione fra il possesso del principio di cardinalità e la messa in atto di comportamenti di equità.

Dopo aver brevemente definito la varietà di temi che possono intrecciarsi con la cognizione numerica, è ora possibile iniziarne una trattazione più dettagliata.

1.1 Le teorie di Piaget e Butterworth.

Jean Piaget è, senza ombra di dubbio, uno degli autori di maggior rilievo nel campo della psicologia evolutiva. Il lavoro di Piaget ha acquistato importanza soprattutto in riferimento alla teoria sullo sviluppo cognitivo da lui stesso ipotizzata. Il padre del costruttivismo affermava che il bagaglio di conoscenze e l'intelligenza del bambino non sono semplicemente un dato di fatto, innati, immutabili e posseduti fin dalla nascita, piuttosto rappresentano la somma di continue interazioni che avvengono fra il bambino stesso e l'ambiente all'interno del quale è inserito (Schaffer, 2005).

Ha ottenuto un discreto successo la concezione secondo la quale lo sviluppo cognitivo avverrebbe come una sequenza di stadi che vedono l'individuo attore protagonista della sua stessa evoluzione. Questo processo può avvenire grazie a due meccanismi che ne stanno alla base: l'*assimilazione* e l'*accomodamento*. Il primo definisce la modalità con la quale l'individuo acquisisce nuove informazioni tramite le strutture cognitive già in suo possesso; il secondo, si ha quando nelle strutture

mentali avviene un cambiamento finalizzato all'assorbimento delle informazioni nuove (Schaffer, 2005).

Il primo dei quattro stadi ipotizzati da Piaget è lo *stadio senso-motorio* che, indicativamente, è osservabile nei primi due anni di vita del bambino. La conoscenza del mondo avviene attraverso azioni concrete compiute sulla realtà circostante e, di conseguenza, l'apprendimento non può essere slegato dagli oggetti di cui fa esperienza (Schaffer, 2005).

Intorno ai due anni l'individuo acquisisce il pensiero simbolico ed una logica strettamente legata all'*hic et nunc*, dove non sarà difficile osservare il gioco di finzione: Piaget parla di *stadio preoperatorio*. Si tratta di un periodo in cui tratti tipici come l'egocentrismo, l'animismo, la rigidità di pensiero ed il ragionamento prelogico ne definiscono i limiti che vengono superati intorno ai sei/sette anni, quando il pensiero del bambino si fa più flessibile ed efficace, per quanto sempre legato ad oggetti o eventi concreti (Schaffer, 2005). Secondo la teoria sviluppata da Piaget il bambino attraversa tre sotto-stadi prima di giungere all'acquisizione di tali capacità e in questo lasso di tempo fa progressivamente proprie delle abilità che gli consentiranno di manipolare le quantità numeriche negli anni successivi di sviluppo:

- a 3-4 anni non è posseduta la conservazione della quantità e nemmeno la corrispondenza biunivoca;
- a circa 5 anni, inizia ad essere presente la capacità di formare gruppi equivalenti in base a delle qualità dei termini presi in considerazione, per quanto sia una abilità ancora strettamente legata alla concretezza di ciò di cui si fa esperienza;
- intorno ai 6 anni, infine, si consolidano le capacità di seriazione e di classificazione (Lucangeli e Mammarella (2010).

A partire da questa età, secondo Piaget, c'è il passaggio allo stadio *operatorio concreto*. Qui il bambino raggiunge alcune abilità come, ad esempio, la capacità di organizzare mentalmente degli elementi in base a criteri come il peso, il colore, la forma, ecc... (*seriazione*); la capacità di classificare gli elementi in base a dei criteri ed individuare delle relazioni fra i gruppi (*classificazione*) (Schaffer,

2005). Queste abilità consentono al bambino di avvicinarsi al concetto di numero, comprendendone l'arbitrarietà e la sua invariabilità; inoltre, si diventa capaci di ragionare in termini astratti e non più necessariamente attraverso aspetti legati al mondo materiale. Un ultimo concetto a cui Piaget concede particolare attenzione è quello di *conservazione*, cioè la comprensione che caratteristiche come la dimensione, il peso e la quantità rimangono invariati nonostante possa verificarsi un cambiamento di aspetto (Schaffer, 2005).

L'ultimo stadio a cui approda il bambino è quello che Piaget definisce *stadio operatorio formale*, indicativamente intorno agli undici-dodici anni, fase durante la quale viene acquisita la capacità di ragionare tramite astrazioni, di utilizzare il ragionamento deduttivo e di applicare procedure avanzate di problem-solving (Schaffer, 2005).

La teorizzazione di Piaget non è stata priva di critiche, anche alla luce di ricerche successive che hanno provato ad indagare il medesimo argomento. Mehler e Bever (1978) hanno sottoposto bambini di età compresa fra i 2 anni e 6 mesi e i 4 anni e 7 mesi a prove legate alla conservazione della quantità: in una prova ai bambini veniva chiesto di indicare la più numerosa fra due file di palline (prova verbale); in un'altra prova, che utilizzava le caramelle invece delle palline, veniva chiesto loro di scegliere quale fila si volesse mangiare e di mangiare poi le caramelle scelte (prova non verbale). La prova con le palline veniva svolta chiedendo ai bambini di indicare se le due file (fig. 1a) fossero identiche e, successivamente, veniva posta la stessa domanda cambiando la disposizione, allungando la lunghezza della fila e/o aumentando la numerosità degli elementi presenti (fig. 1b – 1c). I due studiosi hanno rilevato che già a partire dai 2 anni e mezzo i bambini sono in grado di superare le prove di conservazione della quantità e che, quindi, le prime abilità numeriche sono presenti nell'individuo molto prima rispetto a quanto ipotizzato da Piaget. Un aspetto interessante emerso dallo studio consiste nell'oscillazione dei risultati ai compiti in base all'età e in base al tipo di prova a cui vengono sottoposti: se una buona percentuale dei bambini più piccoli (2 anni e 6 mesi) sono in grado di portare a termine il compito sia nella condizione con le palline sia in quella con le caramelle, sembra che (in particolare nella condizione in cui vengono utilizzate le palline – Fig 2a) ci sia un

peggiore momento temporaneo della capacità fino ai 4 anni, momento in cui i bambini mostrano delle percentuali di successo al compito in risalita. Come è evidente dai risultati delle prove (Fig.2), c'è una significativa differenza tra le due condizioni: le percentuali di riuscita sono più costanti nella prova non verbale con le caramelle.

Proprio in riferimento a questo studio appena citato, Dehaene (2010) sottolinea che l'apparente calo di competenza nei bambini più grandi, in particolare nel compito verbale con le biglie, poteva essere sintomo di una momentanea confusione che le prove piagetiane provocavano.

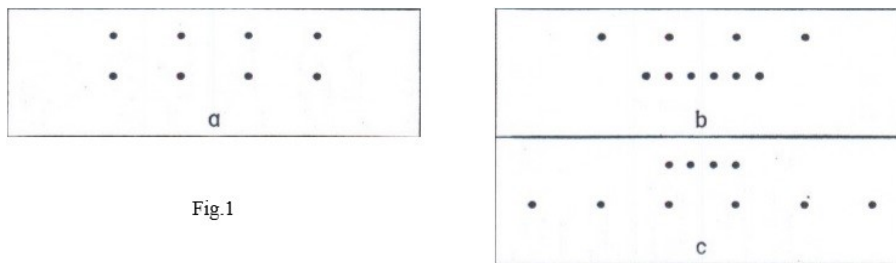


Figura 1 - prove a cui sono stati sottoposti i bambini durante l'esperimento di Mehler e Bever (1978)

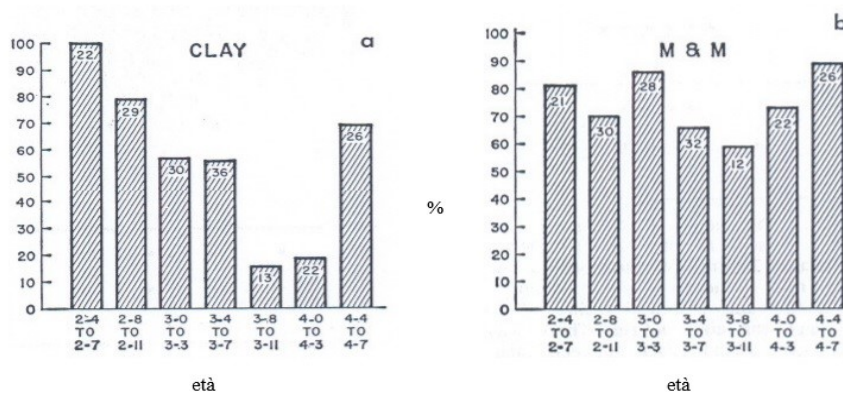


Figura 2 – grafici che descrivono i risultati alle prove dell'esperimento di Mehler e Bever (1978): a sinistra i risultati per le prove con i pallini; a destra i risultati per le prove con le caramelle

Il semplice fatto di porre due volte la medesima domanda al bambino faceva sì che la risposta ne venisse influenzata (aspetto che sottolinea come anche gli elementi linguistici sono di rilevanza nell'indagare la cognizione numerica) e che giustificerebbe le migliori prestazioni nei bambini fra i 3 e i 4 anni di età quando si considera il compito di tipo non verbale (fig. 2b).

L'esperimento condotto da Mehler e Bever (1978) oltre a porre l'attenzione su un limite importante delle prove pensate da Piaget, ha sottolineato il fatto che la competenza numerica potesse essere concepita anche come svincolata dalle abilità verbali dei bambini e che si era reso necessario un ripensamento rispetto ai paradigmi di ricerca utilizzati fino a quel momento. Dehaene (2010) riporta che l'abilità di discriminare fra due insiemi di numerosità differenti è in realtà già presente ben prima dei due anni e già a poche settimane di vita. Per arrivare a questa consapevolezza, gli sperimentatori hanno sottoposto i bambini a prove che si basano sul paradigma dell'abituazione (di cui si parlerà più avanti), a dimostrazione del fatto che il tipo di prova a cui i bambini vengono sottoposti è fondamentale per determinarne le effettive capacità.

Se Piaget proponeva una concezione delle abilità numeriche come esito dell'interazione fra il singolo e l'ambiente in cui cresce, di altro avviso è la tesi innatista di Butterworth che pone l'attenzione sul fatto che il bambino posseda già delle capacità in tale ambito al momento della nascita. Lo studioso afferma infatti che la percezione della numerosità sia da ricondurre ad una serie di circuiti neurali specializzati che si occupano di processare l'informazione numerica (Butterworth & Walsh, 2011). Come riportato da Lucangeli e Mammarella (2010) secondo Butterworth percepire la numerosità sarebbe un processo automatico che è posseduto dall'essere umano fin dalla nascita e i cui neuroni specializzati a questa funzione costituiscono ciò che lui definisce "modulo numerico". Scopo del modulo numerico è classificare il mondo in base alla numerosità e si costituisce come un modulo cognitivo di carattere dominio specifico.

Questa concezione dello sviluppo cognitivo si inserisce all'interno di una cornice più ampia che vede la conoscenza come esito di un processo attivato da meccanismi di rappresentazione e di ragionamento ed è legata a specifici avvenimenti o entità, i quali consentono all'individuo di crearsi una rappresentazione della realtà che lo circonda: degli oggetti, delle persone, dei luoghi e, anche, della numerosità. Si parla di nuclei di conoscenza o *core knowledge* (Cassia, Valenza & Simion, 2012). Secondo Spelke (2000) le particolarità dei *core knowledge systems* sono essenzialmente tre:

- sono di dominio specifico e quindi ogni sistema fa riferimento ad un campo delimitato di conoscenza;
- sono specifici rispetto al compito, perché consentono di risolvere una serie limitata di problemi;
- sono incapsulati, perché hanno la possibilità di agire con un buon livello di indipendenza rispetto agli altri sistemi cognitivi.

Tornando a focalizzarci sulla cognizione numerica, Butterworth e Walsh (2011), a supporto della tesi innatista, sottolineano che le abilità matematiche sono osservabili non solo nella specie umana ma anche in altre specie animali, come le api, i pesci, le scimmie o i roditori, così da dare credito all'ipotesi che sia un dominio con una propria storia filogenetica le cui origini sono da ricercare nell'evoluzione e non solo come dipendente dallo sviluppo linguistico come affermava Piaget. In un loro articolo (Butterworth & Walsh, 2011) gli stessi autori riportano come abbiano individuato, servendosi di strumenti di neuroimaging, le specifiche aree che si attivano quando un individuo è posto dinanzi ad un compito in cui vengono richieste competenze numeriche.

A sostegno delle tesi innatiste sono stati compiuti diversi studi su bambini molto piccoli, sia con pochi giorni di vita sia al di sotto dell'anno, ed i risultati hanno portato ad affermare che la percezione della numerosità abbia effettivamente radici innate (Lucangeli & Mammarella, 2010).

1.2 Due sistemi di base: OTS e ANS

Dopo aver costruito una cornice storico-teorica rispetto le abilità numeriche, è bene iniziare ad approfondire alcuni concetti, tra cui i due sistemi che stanno alla base della cognizione numerica preverbale: l'*object tracking system* (OTS) e l'*approximate number system* (ANS).

L'*object tracking system* è un sistema che permette di mantenere in memoria un certo numero di elementi oltre il quale c'è una caduta nell'accuratezza ed è il sistema che sta alla base del meccanismo del *subitizing*, un processo molto importante per il riconoscimento delle quantità.

Il subitizing si può spiegare sulla base del fatto che il nostro sistema visivo è in grado di localizzare e seguire gli oggetti nello spazio, a patto che questi oggetti occupino posizioni distinte e indipendentemente dalla modalità in cui sono disposti nello spazio gli elementi da contare (sia che siano disposti linearmente che secondo una forma geometrica). Il subitizing concerne i piccoli numeri e si può definire come la capacità dell'individuo di riconoscere in brevissimo tempo la quantità di un insieme di elementi che non vada oltre il 3 o il 4 (Dehaene, 2010). Oltre il limite di questa numerosità il riconoscimento della quantità può avvenire o tramite approssimazione (ANS) oppure attraverso il processo più lento e macchinoso del conteggio, facendo entrare in azione un terzo sistema, l'*exact number system* (Schleifer & Landerl, 2011).

Per studiare il processo della subitizzazione è stato utile rilevare i tempi impiegati per contare ad alta voce una serie di oggetti: così facendo si può osservare una crescita lineare nel tempo di risposta nel momento in cui la numerosità da individuare supera il 3 (Fig.3); a questo aspetto si aggiunge anche una percentuale di crescita del tasso di errore nella risposta (Dehaene, 2010).

Il meccanismo del subitizing è stato rilevato anche in età prescolare ed è emerso che la capacità di subitizzazione aiuta i bambini ad acquisire una rappresentazione simbolica matura del numero e che i deficit nei processi di enumerazione sono spesso associati alle disabilità matematiche (Schleifer & Landler 2011; Ashkenazi et al., 2022). Il range di subitizing, essendo un meccanismo basato sull'OTS, viene influenzato dalla memoria di lavoro visuo-spaziale e dipende anche dall'età del bambino. Se fino ai 2 anni, l'intervallo di subitizing comprende da uno a tre elementi, per i bambini di 3 anni e mezzo l'intervallo aumenta a quattro elementi e per i bambini di 4 anni arriva fino a cinque elementi (Ashkenazi et al., 2022).

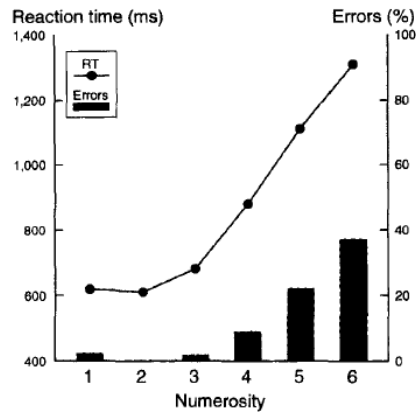


Figura 3 - tempi di reazione per il riconoscimento di una quantità di pallini

Sembra inoltre che l'abilità di subitizing, sia per quanto riguarda la velocità che per quanto riguarda l'accuratezza, possa migliorare tramite un'esposizione ripetuta perché si acquisisce familiarità con le configurazioni visive. Un ulteriore aspetto centrale di questa abilità è che precede la capacità di conteggio (Broda et al., 2019) e l'acquisizione del principio di cardinalità (Cheung & Le Corre, 2018). Le spiegazioni che la letteratura scientifica dà per questo fenomeno sono diverse: se da una parte si sostiene l'ipotesi che il subitizing sia un processo che non richiede attenzione e sia mediato dal sistema visivo e dagli aspetti visuo-spaziali della memoria (Dehaene, 2010; Broda et al., 2019; Ashkenazi et al., 2022), dall'altra, un'ipotesi opposta, ritiene che l'attenzione sia indispensabile affinché si attivi il processo di riconoscimento delle piccole quantità (Olivers & Watson, 2008). Per quanto riguarda la seconda di queste ipotesi, Olivers e Watson (2008) hanno compiuto uno studio che sostiene proprio la dipendenza del subitizing dai processi attentivi partendo dal presupposto che se l'attenzione è richiesta per le operazioni di conteggio con i numeri più grandi di 4, questa sarà necessariamente indispensabile anche per i numeri più piccoli, nonostante sia un'operazione che avviene in parallelo al direccionamento dell'attenzione e, di conseguenza, in maniera più rapida, giustificando così i ridotti tempi di risposta.

Come accennato sopra, a conclusioni opposte sono giunte le osservazioni portate avanti da Dehaene e Cohen (1994) i quali, attraverso lo studio di cinque pazienti con lesioni cerebrali, oltre a sostenere

che il subitizing sia slegato dal processo di conteggio, hanno aggiunto che sia indipendente da dall'orientamento dell'attenzione.

Ashkenazi e colleghi (2022) a fronte di un loro studio su bambini in età prescolare, sostengono che nel subitizing giochi un ruolo importante la memoria di lavoro visuo-spaziale poiché hanno rilevato una correlazione tra il range di subitizing e lo span di memoria di lavoro visuo-spaziale e, inoltre, hanno potuto osservare come quest'ultima influenzi il range di subitizing lungo lo sviluppo.

A conferma dell'importanza di tale meccanismo Schleifer e Landler (2011) hanno affrontato il tema del subitizing e del conteggio confrontando le abilità di bambini a sviluppo tipico e bambini con discalculia, i quali sembra abbiano delle difficoltà proprio in compiti che coinvolgono il subitizing, ma non solo, anche quando si chiede loro di confrontare quantità numeriche più grandi. Le piccole numerosità non sono state le sole ad essere prese in considerazione negli studi che volevano comprendere quali fossero le capacità di base della cognizione numerica: esiste infatti un altro meccanismo fondamentale per processare le quantità chiamato *approximate number system* (ANS).

In questo caso, come suggerisce il nome stesso, entra in gioco l'approssimazione. Si tratta di un meccanismo cognitivo non simbolico che consente di valutare in maniera abbastanza precisa degli insiemi di numerosità sufficientemente grande, al di fuori delle grandezze che interessano il subitizing e che, ovviamente, non è esente da limiti (Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004; Dehaene, 2010).

In letteratura si parla di *effetto distanza*, cioè la crescita in rapidità e accuratezza di risposta nelle situazioni in cui la differenza fra i due valori da confrontare è maggiore (per esempio, risulta più difficile confrontare la coppia 5 e 6 rispetto alla coppia 5 e 7 – fig.4) (Mammarella & Lucangeli, 2010). Ad accompagnare l'effetto distanza esiste anche l'*effetto grandezza* che influenza la capacità di stima delle numerosità in maniera simile: se si considerano due coppie di numeri, il processo per comparare due numeri sarà tanto più lento quanto più grandi saranno i numeri, a patto che venga mantenuta la stessa distanza fra le grandezze da comparare (per esempio, richiede più tempo confrontare 8 e 10 che confrontare 5 e 7 – fig. 4) (Dehaene, 2010).

Gli esperimenti portati avanti per studiare questo aspetto della cognizione numerica hanno permesso di rilevare alcune caratteristiche del meccanismo.

La discriminazione dei numeri è imprecisa e soggetta a limiti di rapporto. Ad esempio, i bambini molto piccoli di 6 mesi sono in grado di distinguere numerosità in rapporto 1:2, ma per essere in grado di discriminare insiemi che hanno un rapporto minore, dovranno attendere di progredire nello sviluppo perché l'ANS è un sistema che migliora in accuratezza con la crescita del bambino e prosegue fino all'età adulta. In aggiunta, questo meccanismo non consente la distinzione di numerosità piccole anche nel caso in cui esse rientrino nel rapporto in cui consentirebbero una distinzione con numeri più elevati (Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004).

Considerare questa abilità è importante non solo per conoscere come funziona lo sviluppo cognitivo del bambino, ma diviene indispensabile dal punto di vista educativo e didattico se si pensa che un percorso mirato a potenziare questa capacità non verbale consente di registrare dei miglioramenti anche nella pratica della matematica formale, in compiti di addizione e sottrazione, come hanno dimostrato in un loro studio Park e Brannon (2013).

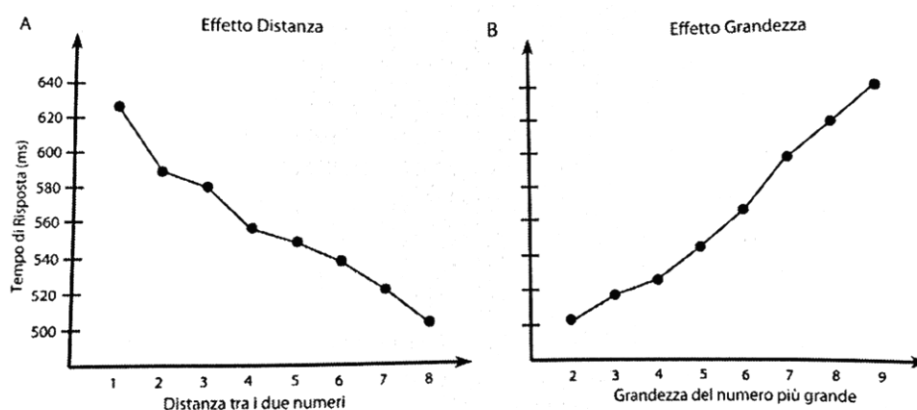


Figura 4 – il tempo impiegato per il riconoscimento di due numeri viene influenzato dall'effetto distanza e dall'effetto grandezza

1.3 La proto-aritmetica

Le abilità appena descritte sono utilizzate per manipolare la numerosità e, come abbiamo visto, presentano delle limitazioni, oltre ad essere comuni sia all'essere umano sia ad alcune specie di animali. Il termine "proto-aritmetica" suggerisce che si tratta di competenze che precedono l'acquisizione di una conoscenza formale della materia (Pantsar, 2019).

Secondo Pantsar (2019) l'uomo attraversa tre stadi nel suo percorso che gli consente di acquisire sempre maggiore competenza nell'aritmetica:

- il primo stadio fa riferimento proprio all'acquisizione delle competenze proto-aritmetiche;
- il secondo stadio costituisce il passaggio ad una cognizione aritmetica in cui ad essere sfruttato è l'exact number system (conteggio)
- il terzo stadio, infine, è il momento in cui l'individuo possiede una maggiore consapevolezza circa gli aspetti formali dell'aritmetica e ne può comprendere le teorie.

Il bambino però non è solo in grado di riconoscere le quantità. Indagare le potenzialità dell'uomo in questo campo non è stato compito semplice, soprattutto considerando il fatto che per poter giungere ad alcune scoperte si è dovuto compiere delle osservazioni e degli studi su bambini molto piccoli. Come accennato all'inizio di questo capitolo, cruciali sono state le tecniche che nel corso del tempo sono progredite e migliorate, oltre ad un cambio di prospettiva che ha consentito di sviluppare nuovi paradigmi adatti allo scopo.

Alcune tecniche sono state utilizzate più frequentemente di altre e si basano sull'assunto che i bambini preferiscono e guardano più a lungo gli stimoli nuovi rispetto a stimoli a cui già sono stati esposti per un determinato lasso di tempo (Lucangeli & Mammarella, 2010).

Un primo modo per indagare le abilità preverbali del bambino è l'utilizzo della tecnica dell'*abituazione/disabituazione* (fig. 5): in questo compito, nella prima fase detta di abituazione, il bambino viene posto dinnanzi ad un certo numero di stimoli raffiguranti la stessa quantità numerica fino al momento in cui il suo tempo di fissazione non inizia a decrescere. La fase di disabituazione si

definisce con la presentazione di due stimoli, uno contenente la stessa quantità numerica dello stimolo in fase di abituazione ed un secondo con una quantità numerica differente (Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004). Tramite la tecnica appena descritta, si è potuto osservare un aspetto interessante delle capacità numeriche dei bambini più piccoli e allo stesso tempo un limite della capacità di riconoscimento delle quantità; Xu e Spelke (2000) sono state in grado di rilevare che i bambini di 6 mesi sanno confrontare insiemi formati da quantità differenti di elementi, a patto che il rapporto fra le due numerosità sia sufficientemente ampio, ad esempio 1:2.



Figura 5 – prova basata sul paradigma dell’abituazione/disabituazione

Oltre alla capacità di distinguere le quantità, si è notato che i bambini molto piccoli sono in grado di compiere delle semplici operazioni di addizione e di sottrazione (come $1 + 1$ e $2 - 1$) e questa capacità è stata rilevabile grazie al paradigma della *violazione dell’aspettativa*.

Wynn (1992), partendo dall’assunto che anche sotto l’anno di vita i bambini sono in grado di riconoscere quando un evento può considerarsi “magico” e quando invece è da considerarsi verosimile, pone i bambini davanti ad una condizione come quella osservabile in Fig. 6. I bambini si trovavano dinnanzi ad un teatrino sul quale poteva essere posto un topolino oppure due a seconda

della condizione. Data la situazione iniziale veniva sollevato uno schermo in maniera tale che venisse impedita la vista del pupazzetto o dei pupazzetti al bambino. In un terzo momento, qualora la situazione iniziale prevedesse un solo pupazzetto, si poteva osservare l'entrata in scena di una mano che aggiungeva un secondo pupazzetto (condizione 1+1), mentre se la situazione iniziale ne prevedeva due, una mano faceva in modo di mostrarsi mentre ne toglieva uno dei due (condizione 2 - 1). Successivamente, lo schermo che mascherava la vista dei pupazzetti veniva fatto cadere e davanti agli occhi del bambino potevano presentarsi due situazioni: una coerente con le aspettative, oppure una che ne violava l'aspettativa. Nella condizione 1 + 1 veniva violata l'aspettativa se, dietro lo schermo, il bambino ritrovava 1 solo pupazzetto invece che 2, mentre nella condizione 2 - 1 l'aspettativa non veniva attesa quando si potevano osservare nuovamente due pupazzetti, invece di 1 (Wynn, 1998).

Le prime abilità aritmetiche (proto-aritmetica) sono quelle su cui si basa lo sviluppo delle successive competenze matematiche e, come ricorda Pansar (2019), il loro sviluppo può essere fortemente mediato da fattori di natura diversa come il riciclaggio neurale, il corpo, l'ambiente e la cultura di appartenenza.

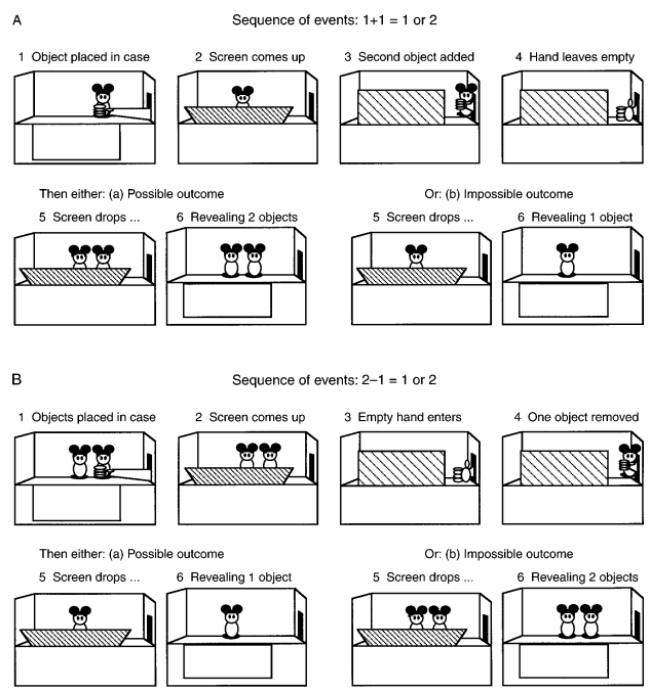


Figura 6 – sequenza della prova nell'esperimento di Wynn (1992) basata sulla violazione dell'aspettativa

1.4 Altre associazioni: l'effetto SNARC

Come già si è accennato all'interno del capitolo e come si approfondirà nel prossimo, la competenza matematica non è slegata dagli aspetti visuo-spaziali della memoria e negli ultimi 20 anni si è cercato di approfondire la relazione tra la comprensione dei concetti numerici e lo spazio, arrivando ad affermare l'esistenza di una rappresentazione mentale dei numeri strettamente legata a specifiche proprietà dello spazio stesso (Lucangeli & Mammarella, 2010).

L'effetto SNARC (Spatial Numerical Association of Response Codes), teorizzato da Dehaene ed il suo gruppo di ricerca, identifica l'abilità di rispondere in maniera più rapida con la mano sinistra in presenza di numeri piccoli e con la mano destra quando sono presentati numeri grandi. Questa capacità dell'essere umano è stata indagata tramite l'utilizzo di compiti basati sul giudizio di parità e sul confronto numerico e inoltre si è osservato che si tratta di una attivazione automatica che avviene nel momento in cui un individuo vede un numero, indipendentemente dal fatto che il compito richieda l'utilizzo di abilità numeriche particolari (Dehaene, 2010; Gevers et al., 2006).

Il fatto che numeri e spazio siano legati fra loro ha suggerito l'idea che le quantità numeriche siano rappresentate nella nostra mente tramite una retta che riflette, tra le altre, anche le proprietà descritte in precedenza dell'effetto grandezza e dell'effetto distanza, dove i singoli numeri sono allineati secondo una posizione che vede i numeri vicini in posizioni vicine sulla retta e, progressivamente, i numeri più grandi sono considerati più vicini tra loro di posizione rispetto ai numeri più piccoli (Dehane, 2010). E' doveroso specificare, però, che la cultura di riferimento e la scolarizzazione giocano un ruolo cruciale nella definizione dell'Effetto SNARC: risulta infatti essere legata all'apprendimento della letto-scrittura, dal momento che la direzionalità dell'associazione numero-spazio segue il verso della scrittura (Lucangeli & Mammarella, 2010; Dehaene, 2010) e inoltre si consolida nel corso dei primi anni della scuola primaria anche in base alle proposte attraverso le quali gli insegnanti possono stimolare l'associazione linea numerica mentale e linea numerica visiva.

Capitolo 2

L'evoluzione delle competenze matematiche

Durante lo sviluppo il bambino acquisisce sempre maggiore competenza nell'utilizzo e nella manipolazione di concetti numerici e delle parole-numero, tutto questo anche grazie alla possibilità di farne ripetutamente esperienza. A favorire questa evoluzione giocano un ruolo rilevante anche gli aspetti corporei e ambientali. I temi trattati nel capitolo precedente costituiscono le fondamenta che si integreranno ad aspetti più complessi, delineati nel presente capitolo, e grazie ai quali il bambino potrà arrivare a comprendere meno intuitivi che vengono trattati negli anni in cui la matematica è affrontata attraverso una pratica formale (Lucangeli & Mammarella, 2010).

2.1. I principi del conteggio (Gelman e Gallistel)

Gelman e Gallistel (1978) sono sostenitori dell'ipotesi innatista circa la cognizione numerica e affermano che lo sviluppo delle abilità legate al numero passa attraverso quelli che hanno denominato come "principi del conteggio".

Tali principi consentirebbero agli individui di creare un ponte fra le abilità innate dell'essere umano (che sono condivise anche con altre specie animali) e le conoscenze che derivano da un apprendimento mediato dalla cultura di appartenenza (Lucangeli & Mammarella, 2010). Gelman e Gallistel affermano infatti che la padronanza di specifici principi di conteggio è alla base della capacità dei bambini di impegnarsi in un pensiero matematico complesso, padronanza che permetterà una buona riuscita in ambito scolastico negli anni di educazione formale (Niklas, Cöhrssen & Tayler, 2016).

I principi del conteggio secondo i due autori (Gelman & Gallistel, 1978) sono i seguenti:

- 1) Corrispondenza biunivoca: fa riferimento al fatto che ad ogni unità di un certo insieme che viene contato deve corrispondere una singola parola-numero, così che l'etichetta della parola-

numero non sia associabile a più di un elemento. Il bambino deve quindi essere in grado di contare ogni elemento una sola volta senza farlo doppiamente oppure saltando qualche oggetto dell'insieme;

- 2) Ordine stabile: possedere questo principio significa essere in grado di ordinare le parole-numero in una sequenza fissa;
- 3) Cardinalità: è il principio secondo il quale, mentre si sta svolgendo un'operazione di conteggio, l'ultima parola-numero utilizzata costituisce la numerosità di quell'insieme di elementi. Per poter applicare il principio il bambino deve saper utilizzare in maniera adeguata i due precedenti;
- 4) Astrazione: è possibile applicare i tre principi precedenti e, quindi, contare, qualsiasi cosa sia raggruppata in un insieme;
- 5) Irrilevanza dell'ordine: secondo cui l'ordine con il quale vengono contati degli oggetti è irrilevante e non influisce sulla numerosità finale.

Di rilevanza è il fatto che, come ricorda Dehaene (2010) citando un lavoro di Karen Wynn, ciò che permette al bambino di mettere in pratica questi principi è la consapevolezza dello scopo per il quale si possono utilizzare. In altre parole, fino al momento in cui l'individuo non comprende che contare serve per indicare il "quanto" di un insieme al bambino può non venire in mente che per rispondere alla domanda "quanti sono?" sarebbe sufficiente contare gli elementi presenti.

Uno spunto di riflessione interessante viene rilevato da Sarnecka e Carey (2008) che in un loro lavoro riportano due interpretazioni differenti rispetto all'acquisizione dei cinque principi del conteggio. I due studiosi riportano che Gelman e Gallistel sostenevano che un bambino piccolo già a 2 anni è in grado di applicare questi principi perchè prima li comprende a livello intuitivo (principles-before-skills). Gli stessi studiosi (Sarnecka e Carey, 2008) riportano però che il fatto che capiti spesso di osservare anche bambini più grandi violare il principio di corrispondenza biunivoca o il principio di ordine stabile costituirebbe una prova del fatto che i principi sono acquisiti in maniera graduale e molto lentamente facendone prima esperienza in maniera ripetuta (skills-before-principles). Secondo

tale visione i principi si potrebbero dire veramente acquisiti solo quando il bambino dimostra di avere delle competenze consolidate.

2.2. *Le dita e la cognizione incarnata*

Lungo il corso della storia il genere umano si è dovuto ingegnare per poter rendere le operazioni di conteggio il più semplici possibili e, soprattutto, intelleggibili in maniera rapida. Se anticamente venivano utilizzati dei sassolini per rappresentare le singole unità da contare o degli intagli riportati su delle pietre o su del legno, il conteggio si è reso via via più sofisticato e astratto fino ad arrivare a servirsi delle parti del corpo umano come strumento atto allo scopo. Alcune parti del corpo venivano così sfruttate come rappresentazione di un numero ben preciso e questo stratagemma ha consentito all'uomo di ampliare notevolmente la propria possibilità di conteggio (Dehane, 2010; Lucangeli & Mammarella, 2010).

Ancora oggi, però, il numero non è completamente slegato dalla corporeità dell'individuo e una precisa corrente di studi che prende il nome di *Emodied cognition* ha compiuto degli approfondimenti in questo campo di ricerca: è un approccio che non si è soffermato a studiare solo quanto concerne il campo dei numeri, ma più in generale si è occupato di indagare come la cognizione umana tragga le proprie radici da una dimensione strettamente legata al corpo (Soylu, Lester & Newman, 2018). La connessione tra il corpo e, in particolare, tra le dita e le abilità numeriche è emersa anche da studi di neuroimmagine che hanno indicato un'attivazione sovrapposta di reti corticali per il processamento numerico ed il movimento delle dita (Barrocas et al., 2020).

Come ricordano Soyly, Lester e Newman (2018), il corpo dei bambini ma in particolare mani e dita, costituiscono uno strumento preziosissimo per la costruzione delle reti neurali che consentono lo strutturarsi delle competenze legate al numero. Gli autori mettono però in evidenza come gli approcci didattici alla matematica e le evidenze delle neuroscienze, per quanto si muovano nella stessa direzione, si sviluppino a partire da presupposti differenti. La prima, infatti, sostiene l'utilizzo delle

dita come supporto per il passaggio da una rappresentazione concreta del numero ad una più astratta, mentre le neuroscienze ne sostengono l'importanza sulla base del fatto che costituiscono uno strumento di supporto allo sviluppo della cognizione umana.

I tre studiosi (Soylu, Lester & Newman, 2018) individuano due teorie di pensiero rispetto al ruolo delle dita nello sviluppo delle abilità numeriche: un approccio che riprende i principi del costruttivismo ed uno che si lega al filone di pensiero dell'embodied cognition.

La prospettiva costruttivista, partendo da alcuni dei concetti elaborati da Piaget, sostiene che le dita siano rilevanti nell'apprendimento di principi di base come la cardinalità e l'ordine stabile poiché si pongono come un collegamento tangibile con il mondo fisico: il corpo consentirebbe di fare ripetutamente esperienza dei due principi fino ad arrivare a comprenderne il significato, in più, in età prescolare le dita costituirebbero anche un facilitatore per l'apprendimento di strategie di conteggio. Steffe e Von Glasersfeld sostengono che il bambino, prima di possedere alcune abilità legate ai numeri, sviluppa una serie di capacità:

- la capacità di percepire gli oggetti come entità discrete (capacità che in particolare richiederebbe coordinazione visiva e manuale);
- successivamente, impara ad etichettare gli oggetti che percepisce come singoli elementi della realtà che lo circonda comprendendo anche che una proprietà degli stessi è la "pluralità" (un oggetto può essere presente in più di una singola unità);
- infine, il bambino arriva a comprendere che, ad esempio, la parola "quattro" si collega sia alla sequenza di parole "uno, due, tre, quattro" sia ad una quantità di oggetti che possono essere presenti in un insieme: acquisisce una concezione astratta del numero (Soylu, Lester & Newman, 2018).

L'approccio dell'embodied cognition parte invece da un altro presupposto, cioè che la cognizione umana sia radicata nel corpo e che quest'ultimo fornisca una importante funzione di supporto per il sistema senso-motorio, il quale stimola lo sviluppo cognitivo dell'uomo e, quindi, stimola anche gli aspetti legati alla cognizione numerica. Secondo i sostenitori di tale approccio, l'utilizzo delle dita

nel conteggio non solo aiuta lo sviluppo della cognizione numerica durante l'infanzia, ma svolge un ruolo importante anche durante il periodo adulto. Di conseguenza, la capacità di processare i numeri ed il corpo non si slegano gradualmente durante lo sviluppo passando da un livello concreto (senso-motorio) ad un livello astratto, come invece sostenevano le tesi costruttiviste, al contrario continuano ad influenzarsi a vicenda. Questo tipo di approccio sarebbe sostenuto anche da studi neuro-cognitivi. (Soylu, Lester & Newman, 2018)

Le dita, come già accennato, costituiscono per il bambino uno strumento molto utile che consente di processare ed elaborare l'informazione numerica quando ne fa esperienza. Con l'obiettivo di indagare in modo completo l'intelligenza numerica del bambino, anche alla luce del possibile carattere predittivo sulle capacità future, diviene rilevante comprendere due aspetti: la rappresentazione numerica delle *dita* e la gnosi delle stesse (Noël, 2005).

Per quanto riguarda la rappresentazione numerica delle dita si parla di:

- *finger counting*, un aiuto che i bambini utilizzano quando devono contare le quantità oppure fare delle operazioni aritmetiche. Una modalità di approccio a semplici compiti di natura numerica che sembra essere associata ad una maggiore accuratezza di risposta già in età prescolare ma anche nelle prime classi della scuola primaria, in seguito alla quale avviene un passaggio a strategie più avanzate in cui il conteggio tramite le dita diviene un'azione interiorizzata ed il concetto di numero più astratto;
- *finger montring*, ovvero la capacità di rappresentare e comunicare, tramite le dita, un'informazione numerica.

La gnosi delle dita, infine, essendo la capacità di localizzare uno stimolo sulle dita stesse si lega alle due competenze precedenti ed è una competenza su cui, come conseguenza, si basa la conoscenza numerica ed il conteggio (Soylu, Lester & Newman, 2018). Barrocas e colleghi (2020) sottolineano che la gnosi delle dita può essere veicolata anche dalle capacità fine motorie, così che entrambi questi aspetti si caratterizzino come fondamentali per facilitare l'apprendimento di alcune abilità numeriche. In bambini in età prescolare, infatti, avere una buona padronanza del movimento delle proprie dita

può spingere ad usare in misura maggiore le stesse per contare, facilitando l'acquisizione delle basi del conteggio. Come ricordano Soyly e colleghi (2016) essere in grado di rispondere in maniera adeguata a dei task di finger gnosis significa saper attivare una rappresentazione interna della propria mano e quindi mapparla, sfruttando una serie di processi necessari per la generazione della risposta, tra cui memoria di lavoro e competenze spaziali.

2.3 *L'Home Numeracy Environment*

Nel prendersi carico di un bambino è indispensabile coinvolgere anche la famiglia almeno per due ordini di motivi. Essa costituisce il primo luogo deputato alla conoscenza e, inoltre, l'ambiente di apprendimento domestico, si configura come uno degli aspetti su cui si può intervenire con maggiore facilità a differenza, ad esempio, dello stato socioeconomico o del grado di istruzione dei genitori, tutti elementi che concorrono ad influenzare lo sviluppo cognitivo del bambino (Niklas, Cohnsen & Tayler, 2016).

LeFevre è tra le prime studiose ad essersi occupata del tema della *Home Numeracy Environment*, arrivando a delineare una serie di attività che concorrono a supportare la creazione di un ambiente domestico stimolante per lo sviluppo delle abilità matematiche (LeFevre et al., 2009; Susperreguy et al., 2020; Bonifacci et al., 2021).

Nello sviluppo delle competenze numeriche, basti pensare che a supportare l'acquisizione del principio di cardinalità in bambini di età compresa tra 1 e 3 anni può essere utile anche una semplice attività come il contare ad alta voce gli elementi di un insieme di oggetti, in particolare quando le serie contengono quattro o più elementi. In maniera simile, anche le credenze dei genitori nei confronti della matematica sembrano influenzare il tipo di esperienza legata ai numeri che i bambini possono avere (Susperreguy et al., 2020).

In un loro studio Gunderson e Levine (2011) hanno rilevato che anche il tipo di dialoghi che vengono promossi dai genitori riguardo i numeri possono influenzare l'apprendimento di alcuni principi legati

ad essi, in particolare quello della cardinalità. Nel loro lavoro i due studiosi sottolineano infatti che, nei bambini piccoli, il contare o nominare insieme di oggetti promuove l'acquisizione del principio di cardinalità e in modo particolare quando ad essere considerati sono insiemi di oggetti contenenti un numero di elementi compreso fra i 4 e i 10, quindi al di fuori del range del subitizing. Fare esperienza esclusivamente di discorsi sui numeri che comprendano piccole quantità non consentirebbe poi di generalizzare il principio e di utilizzare la stessa capacità quando si considerano insiemi più numerosi.

Come riportano alcuni studi (Susperreguy et al., 2020; Bonifacci et al., 2021; Lucangeli & Mammarella, 2010; Butterworth, 2007; Gelman & Butterworth, 2007) lo sviluppo della cognizione numerica si lega anche alle abilità di linguaggio e, di conseguenza, anche a come vengono stimulate in ambiente domestico.

Bonifacci e colleghi (2021) in particolare, hanno indagato l'home numeracy e l'home literacy in relazione allo status socioeconomico delle famiglie e sottolineano che entrambi possono costituire un fattore di protezione importante all'interno delle realtà più svantaggiate e che, nel momento in cui l'home numeracy non viene stimolata in maniera adeguata, l'home literacy environment può rappresentare un ulteriore fattore protettivo. In altre parole, l'Home Numeracy e l'Home Literacy possono influenzare a vicenda l'acquisizione delle competenze del bambino nell'uno e nell'altro campo.

2.4 Il ruolo della memoria

A permettere lo sviluppo delle competenze numeriche gioca un ruolo anche la memoria e ognuna delle sue componenti è associabile ad una specifica competenza (Coolen e Castronovo, 2023; Lucangeli e Mammarella, 2010).

La memoria di lavoro permette di mantenere ed elaborare diversi tipi di informazione per un breve lasso di tempo, consente di portare a termine dei compiti ed opera affinché vengano recuperate

informazioni nella memoria a lungo termine (Lucangeli e Mammarella, 2010). Queste capacità sono indispensabili per concludere, tra gli altri, anche i compiti di natura numerica a cui i bambini sono chiamati a dover rispondere soprattutto nel periodo in cui inizia l'apprendimento formale della matematica dove, per la risoluzione di compiti complessi, ha un ruolo importante la memoria di lavoro (Coolen e Castronovo, 2023).

La memoria di lavoro possiede due sistemi di riferimento, ognuno dei quali elabora informazioni di tipo differente, il loop fonologico ed il taccuino visuo-spaziale, due sistemi il cui assessment si poggia su compiti che coinvolgono la memoria a breve termine (Bull, Espy & Wiebe, 2008). Sussiste però un limite nel momento in cui si vuole valutare questo tipo di abilità in bambini piccoli, ovvero che le loro capacità cognitive sono ancora acerbe, in modo particolare l'inibizione, la capacità di shifting e la capacità di mantenere in memoria e manipolare delle informazioni (funzioni esecutive).

Volendo approfondire la cognizione numerica nei bambini, diversi studiosi (Bull, Espy & Wiebe, 2008; Traverso et al., 2021) si sono soffermati ad indagare anche la relazione presente tra le funzioni esecutive e le abilità di calcolo, trovando che le prime sono in grado di sostenere le seconde già da prima dell'ingresso a scuola per poi mantenere tale funzione di supporto anche negli anni seguenti.

Prima dell'ingresso alla scuola primaria a possedere un ruolo rilevante sono le abilità visuo-spaziali. I bambini in età prescolare, infatti, utilizzano strategie di questo tipo per apprendere la sequenza di conteggio e posizionare piccoli numeri su una linea numerica (Coolen e Castronovo, 2023). In seguito all'ingresso nella scuola primaria, poi, l'utilizzo di tale metodologia va progressivamente perdendosi a favore di un approccio di tipo verbale (Lucangeli e Mammarella, 2010; Coolen e Castronovo, 2023) in particolare quando l'obiettivo ultimo è memorizzare i fatti aritmetici (Dehaene, 2010). Coolen e Castronovo (2023) rilevano che, nonostante le diverse forme di memoria siano strettamente collegate tra loro, ognuna di esse gioca un ruolo unico in particolare rispetto all'età dei bambini. Il loro studio ha evidenziato che la memoria visuo-spaziale a breve termine è in grado di predire i risultati in matematica fino all'età di 6-7 anni, mentre per la memoria verbale a breve termine non si è osservata la stessa correlazione.

Il sistema visuo-spaziale supporta anche altri aspetti dell'elaborazione numerica non verbale come la grandezza del numero, la stima e la rappresentazione delle informazioni in forma spaziale (ad esempio per la linea numerica mentale) (Bull, Espy & Wiebe, 2008). Lo studio di Bull e colleghi (2008) sottolinea infatti che una buona comprensione delle relazioni spaziali e l'abilità di manipolare materiale visuo-spaziale nella memoria di lavoro sia predittivo per il successo in matematica.

Capitolo 3

La ricerca

Nel tentativo di andare all'origine dello sviluppo della cognizione numerica, acquista senso la possibilità di indagare e quantificare le abilità possedute dai bambini già dai primi anni di vita. Le strutture che accolgono bambini così piccoli sono chiamate quotidianamente ad arricchire il proprio bagaglio professionale e teorico per poter offrire le risposte più adeguate in termini di proposte educative e supporto alle famiglie.

Come si è parlato nei capitoli precedenti, le capacità legate al numero sono il risultato dell'interazione fra competenze presenti fin dalla nascita e competenze acquisite nel corso dello sviluppo, mediate dalla cultura di appartenenza e dagli stimoli forniti dall'ambiente in cui si viene cresciuti (Lucangeli & Mammarella, 2010).

Lo studio di cui si tratta in questo capitolo prende in esame, in modo particolare, l'Approximate Number System, sistema cognitivo che gioca un ruolo cruciale nelle competenze aritmetiche precoci, influenzando le prestazioni nei compiti di proto-aritmetica (Starr et al., 2018).

3.1. Ipotesi di ricerca

Lo studio ha voluto indagare tre ipotesi di ricerca.

- 1) In un compito di proto-aritmetica, i bambini dimostrano di essere significativamente più bravi negli item con ratio 1:4 rispetto a quelli con ratio 1:2?

Diverse ricerche hanno dimostrato che l'ANS cambia nel corso dello sviluppo anche nei bambini in età prescolare le cui prestazioni si modificano all'aumentare o al diminuire della ratio (Halberda & Feigenson, 2008; Odic et al., 2012; Starr et al., 2018; Xu & Spelke, 2000). Di conseguenza, ci si aspetta che le prestazioni nel compito di proto-aritmetica siano influenzate dalla ratio ma anche dall'età dei bambini: in particolare, si prevede la possibilità che i bambini ottengano dei punteggi

migliori quando la ratio al compito era di 1:4 rispetto a quando era di 1:2 e che i partecipanti più grandi potessero ottenere punteggi migliori.

- 2) Le abilità aritmetiche sono positivamente associate al compito di comparison (ANS) sulla base della ratio?

Il compito di addizione approssimata e di comparison richiedono l'attivazione del medesimo sistema cognitivo (ANS), di conseguenza ci aspettiamo una correlazione positiva fra i due compiti.

- 3) Le abilità aritmetiche sono positivamente associate ad altre abilità numeriche come il conteggio e la comprensione lessicale delle parole numero?

Le abilità aritmetiche si costituiscono come capacità preverbalì indipendenti dall'apprendimento formale e di cui è possibile rilevare traccia già a pochi giorni dalla nascita, oltre che un elemento in grado di influenzare lo sviluppo delle competenze numeriche successive già in età prescolare. Data l'età dei partecipanti al presente studio, tuttavia, ci si aspetta che non sia presente una correlazione significativa tra le competenze aritmetiche preverbalì e altre abilità legate ai principi del conteggio dal momento che lo sviluppo di tali principi inizia proprio in questa fascia d'età e che, si suppone, i bambini non ne abbiano ancora fatta sufficiente esperienza.

3.2. Partecipanti

Allo studio hanno partecipato un totale di 22 bambini, di cui 15 maschi e 7 femmine.

Al momento dell'inizio della raccolta dati, i bambini avevano un'età compresa fra i 18 e i 36 mesi ($M=31.182$; $d.s.=4.636$) ed erano tutti frequentanti un asilo nido della provincia di Varese.

Per ogni bambino, inoltre, si chiedeva anche la partecipazione di un genitore affinché venisse compilato un questionario.

3.3. Metodo e strumenti

I genitori dei bambini hanno acconsentito a far partecipare gli stessi allo studio tramite la compilazione del consenso informato, in seguito al quale veniva loro richiesto di completare un questionario che chiedeva di riportare alcune caratteristiche famigliari (come titolo di studio dei genitori, lavoro svolto, componenti nucleo familiare, ecc.), le competenze linguistiche del bambino, le attività di home numeracy e di home literacy.

Dopo aver fornito il consenso, i bambini sono stati sottoposti ad una serie di task che indagavano alcuni aspetti della cognizione numerica.

Le prove erano elaborate tramite la piattaforma *Labadvanced* e proposte mediante un tablet connesso a Internet (Samsung Galaxy Tab S2 - 9,7" - 32GB - WiFi).

I bambini sono stati fatti sedere ad un tavolino, ad una distanza di circa 40-50 cm dallo schermo, in una stanza del servizio educativo frequentato e appositamente strutturata per la somministrazione: il più possibile priva di distrazioni.

Ogni prova ha avuto la durata di circa 10 minuti e tutti i task sono stati svolti all'interno dell'asilo nido durante le ore di frequenza dei bambini.

Le risposte ai singoli task sono state rilevate tramite un protocollo cartaceo e, durante la somministrazione, il punteggio veniva registrato anche in maniera digitale dal software utilizzato per riprodurre le diverse prove. A supporto, è stato utilizzato anche un quaderno all'interno del quale annotare eventuali aspetti salienti emersi durante la somministrazione.

Ogni prova poteva iniziare quando il bambino mostrava di essere a proprio agio in modo da assicurarsi la sua collaborazione.

Per rispondere alle richieste delle varie prove il bambino doveva interagire con il dispositivo seguendo la richiesta fornita da una voce registrata a introduzione del compito e la sperimentatrice interagiva solo quando necessario. Qualora il bambino mostrasse la volontà di interrompere la somministrazione, questa veniva terminata.

3.4. I task oggetto dello studio

I bambini sono stati sottoposti alle prove della batteria BIN 18-36 (Batteria per la valutazione dell'intelligenza numerica) che indaga, tramite diversi compiti, aree differenti della cognizione numerica. Per il presente studio sono stati analizzati i dati emersi dalle seguenti prove.

- *Addizione approssimata (proto-aritmetica)*. Il compito valuta le capacità dei bambini di compiere delle semplici addizioni. Veniva mostrato un breve filmato della durata di 2000 ms in cui due riquadri (uno proveniente da destra e uno da sinistra dello schermo), caratterizzati dalla presenza di una stessa quantità di pallini, scorrevano verso un altro riquadro occludente posto nella parte centrale fino a scomparire. La richiesta del compito era di indicare quanti pallini fossero presenti all'interno della scatola (occludente). Si doveva selezionare l'alternativa corretta fra due possibilità di risposta. Le due quantità di pallini fra cui il bambino era chiamato a scegliere venivano mostrate all'interno di due differenti riquadri fermi sullo schermo e, dopo averne selezionato uno, il dispositivo dava un feedback audiovisivo positivo o negativo in base alla correttezza della risposta, con il conseguente passaggio all'item successivo (fig.7). Le possibilità di risposta si differenziavano fra loro in base alla ratio (1:2 o 1:4). Gli item presentavano le seguenti addizioni: $1+1=2, 4$ o 8 ; $2+2=2, 4$ o 8 ; $4+4=2, 4$ o 8 . Il compito, in totale, era formato da 18 item.

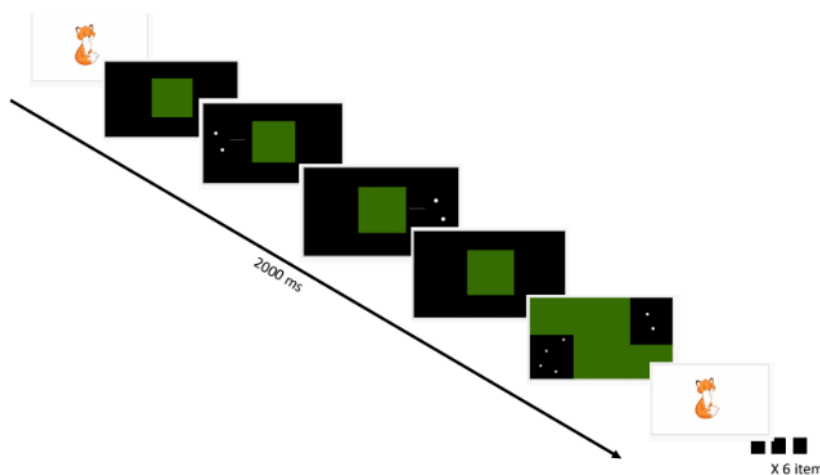


Figura 7 – esempio di sequenza video a cui erano sottoposti i bambini durante il compito di addizione approssimata.

- *Compito di comparison (ANS)*. Obiettivo del task è di valutare l'acuità numerica, cioè la capacità di confrontare la numerosità di due insiemi e di confrontarlo rispetto a due possibilità di risposta. Anche questo compito iniziava in seguito all'ascolto di una consegna vocale riprodotta dal dispositivo e con tre item di prova. In ogni item veniva mostrato per un breve lasso di tempo un riquadro nero con all'interno dei puntini bianchi, successivamente si mostrava nella parte superiore dello schermo un riquadro contenente la stessa quantità di pallini e nella parte inferiore le due possibilità di risposta. I partecipanti dovevano individuare l'alternativa che conteneva la stessa quantità di elementi dell'insieme iniziale (per un totale di 24 item). I due insiemi si differenziavano in base alla ratio (1:2 o 2:3). I pallini presenti nel riquadro iniziale sono stati disposti nello spazio in maniera differente rispetto a quelli presenti sulla risposta corretta, così che la caratteristica rilevante dello stimolo visivo non fosse lo stimolo stesso ma la quantità in esso contenuto. Una volta che il bambino selezionava la propria risposta veniva fornito un feedback audiovisivo in base alla correttezza della stessa (Fig.8).

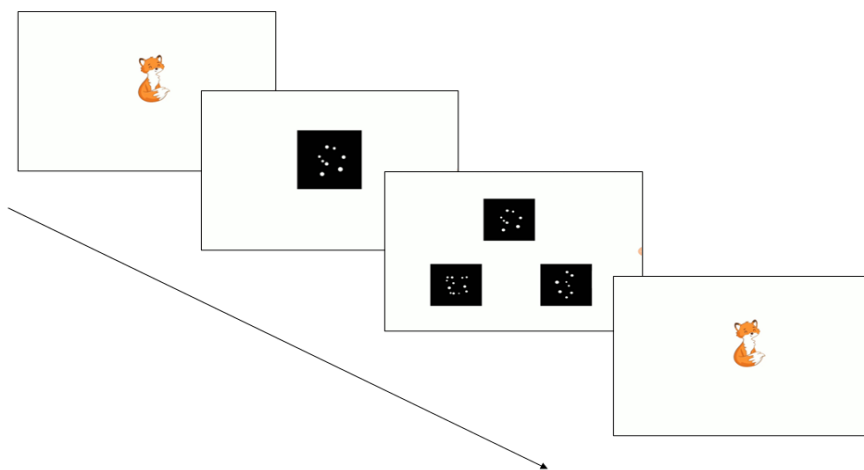


Figura 8 - Esempio di sequenza video a cui erano sottoposti i bambini nel compito legato all'ANS

In riferimento alla terza ipotesi indagata nello studio, si è deciso di osservare e utilizzare anche i risultati emersi in altre prove. Tali prove erano legate ad alcuni principi del conteggio (cardinalità e corrispondenza biunivoca) oltre ad altre competenze che la letteratura ha rilevato come utili per comprendere la cognizione numerica in età precoce (comprensione delle parole-numero, utilizzo delle dita):

- *Give a Number Task (G-A-N)*. Tramite questo compito si può valutare se il bambino possiede il principio di cardinalità. Viene presentato un albero su cui sono presenti 10 mele rosse ed un cesto posto in basso sulla destra: compito del bambino è seguire l'indicazione fornita dal dispositivo e trascinare all'interno del cesto il numero di mele richiesto dalla consegna vocale. Il passaggio all'item successivo avveniva tramite tocco sullo schermo del tablet da parte dell'adulto una volta terminata la richiesta (Fig.9).



Figura 9 - esempio di item del Give a Number Task: "Metti nel cesto 4 mele"

- *Counting finger*. Tramite questo compito si valuta se il bambino sia in grado di contare utilizzando le dita, ad esempio chiedendo di contare le dita della propria mano o di indicare la propria età con le dita. Uno dei tre item prevedeva inoltre che il bambino pronunciasse una sequenza di parole-numero rispondendo alla domanda "Sai contare?": in questo modo era possibile una prima valutazione del principio di ordine stabile.

- *Comprensione semantica.* Questo task valuta la comprensione delle parole numero da parte del bambino, il quale doveva selezionare sullo schermo l'insieme corretto di caramelle a fronte di tre possibilità di scelta in base all'indicazione fornita da un comando vocale (ad esempio "dove ci sono quattro caramelle?"; fig. 10). Il task indagava anche la conoscenza del concetto di "zero".

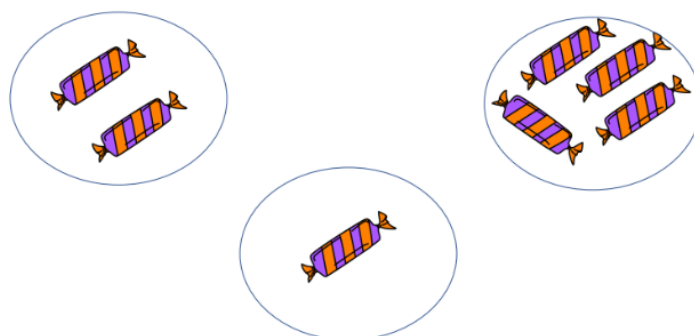


Figura 10 - es. item di comprensione semantica: "Dove ci sono quattro caramelle?"

- *Conteggio - Corrispondenza Biunivoca.* Il compito permette di valutare l'acquisizione del principio di corrispondenza biunivoca tramite dei task il cui scopo è quello di indicare la giusta corrispondenza in termini di quantità oppure in termini di dimensione (Fig. 10 – 11).

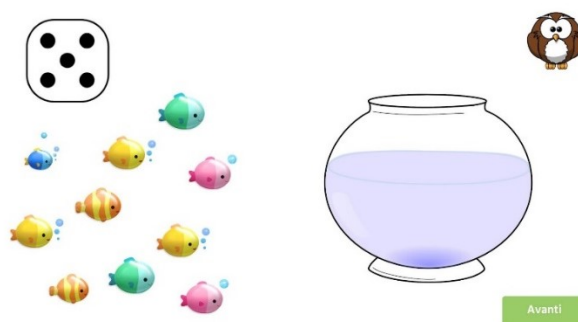


Figura 11 - compito di corrispondenza biunivoca: "metti nell'acquario tanti pesci quanti quelli del dado"



Figura 12 - compito di corrispondenza biunivoca: "quali sono le scarpe di questa bambina?"

3.5. *Analisi dei dati*

I punteggi alle singole prove sono stati raccolti tramite il programma *Labvanced* che riproduceva i task, gli stessi dati sono stati successivamente trasportati su Microsoft Excel al fine di sommarne i totali per ogni partecipante e, infine, elaborati con il software JASP.

Più nello specifico, sono state condotte analisi descrittive riguardanti le abilità di addizione approssimata e di comparison (OTS e ANS), così da rilevare i principali indici descrittivi relativi ai due compiti. Successivamente, sono state svolte anche delle analisi correlazionali con l'obiettivo di comprendere quali competenze fossero in stretta relazione fra loro e, infine, si sono compiuti degli approfondimenti tramite un'analisi ANOVA con l'obiettivo di confrontare le medie ottenute nel compito di proto-aritmetica per capire se esistono delle differenze statisticamente significative. Per svolgere questo tipo di analisi, l'intero campione di partecipanti è stato diviso in tre gruppi in base all'età: un primo gruppo comprendeva i bambini fra i 18 e i 24 mesi (N=4), un secondo gruppo comprendeva i bambini fra i 25 e i 30 mesi (N=3) ed un terzo gruppo era formato dai bambini con più di 31 mesi (N= 15).

3.6 *Risultati*

Analisi descrittiva delle abilità di proto-aritmetica. Nel compito di proto-aritmetica i bambini hanno mostrato discrete prestazioni ($M=7.227$, $DS=3.841$) e in più della metà degli item che componevano il task sono stati in grado di rispondere correttamente. Si sono volute osservare anche le capacità dei bambini nel compito di proto-aritmetica prendendo in considerazione separatamente gli item aventi ratio 1:2 e 1:4. La tabella 1 riassume media e deviazione standard del compito in base alla ratio, mentre il grafico 1 evidenzia la differenza di prestazione dei partecipanti in base alla ratio degli item a cui sono stati sottoposti.

Nell'analizzare le prestazioni al compito si è voluto osservare se i punteggi medi dei bambini si differenziassero in base al tipo di addizione che si chiedeva loro di svolgere: i dati hanno mostrato delle prestazioni pressoché identiche sia che la richiesta fosse di compiere la somma 1+1 (M= 2.818, DS= 1.622) sia che fosse 2+2 (M= 2.409, DS= 1.681) oppure 4+4 (M= 2.000, DS= 1.345).

	N	MEDIA		DEVIAZIONE STANDARD	
		Ratio 1:2	Ratio 1:4	Ratio 1:2	Ratio 1:4
PROTO-ARITMETICA TOT	22	4.955	2.273	2.870	1.667

Tabella 1 - Analisi descrittiva del compito di proto-aritmetica in base alla ratio

Analisi descrittiva del compito di comparison. Nel compito di comparison i bambini hanno dimostrato abilità discrete (M=10.455, DS=5.115) con più della metà dei partecipanti (N=12) che sono stati in grado di ottenere un punteggio che raggiungeva almeno il 50% di risposte corrette.

Anche per questo compito si è svolta una analisi descrittiva tenendo conto della ratio degli item che componevano la prova: negli item con ratio 2:3 i partecipanti hanno mostrato una media più elevata (M=5.818, DS=3.157) rispetto agli item con ratio 1:2 (M=4.636, DS= 2.536). I valori sono riassunti nella tabella 2.

	N	MEDIA		DEVIAZIONE STANDARD	
		Ratio 1:2	Ratio 2:3	Ratio 1:2	Ratio 2:3
COMPARISON TOT	22	4.636	5.818	2.536	3.157

Tabella 2 - Media e deviazione standard ottenuti nel compito di comparison in base alla ratio

Analisi descrittiva delle altre competenze numeriche. Le altre competenze numeriche su cui si è voluto porre attenzione nel nostro studio hanno rilevato delle prestazioni migliori nel compito di corrispondenza biunivoca (M=6.773, DS=4.011) rispetto ai compiti che indagavano il principio di

cardinalità con il *Give-A-Number task* ($M=1.364$, $DS=0.790$), la comprensione lessicale delle parole numero ($M=4.318$, $DS=1.912$) e la capacità di conteggio tramite le dita ($M=4.227$, $DS=4.669$).

Analisi correlazionale. Tramite una analisi correlazionale si è voluto indagare la possibile presenza di una qualche associazione fra alcuni dei compiti che hanno composto la batteria di valutazione. Una prima analisi correlazionale si è svolta in riferimento al compito di proto-aritmetica e al compito di comparison, entrambi i task erano basati su una abilità di carattere preverbale, e si sono osservate delle significative correlazioni sia rispetto alle prestazioni generali ($r= 0.694$, $p= <.001$) sia rispetto alle prestazioni ottenute in base alla ratio ($r= 0.675$, $p= < .001$; $r= 0.587$, $p= < .001$). La tabella 3 riporta i valori ottenuti.

Una seconda analisi ha voluto rilevare le possibili correlazioni presenti fra le abilità aritmetiche (compito di proto-aritmetica) e altre abilità numeriche, fra le quali si è voluto prendere in considerazione, in particolare, le abilità di conteggio (corrispondenza biunivoca e cardinalità), la comprensione lessicale (delle parole numero) e la capacità di contare utilizzando le dita (counting finger). La tabella 4 mostra chiaramente come, nel campione esaminato, le abilità rilevate tramite il compito di proto-aritmetica non siano in correlazione con nessuna delle abilità appena citate. Altre correlazioni significative da segnalare sono quelle emerse fra il compito che indagava il principio di cardinalità (Give a Number) e la comprensione delle parole-numero ($r= 0.639$, $p= 0.001$) e fra queste ultime e la capacità di contare attraverso le dita ($r= 0.588$, $p= 0.004$) e, infine, tra il compito di corrispondenza biunivoca e il counting finger ($r= 0.764$, $p= < .001$)

		PROTO- ARITMETICA	VISUAL RECOGNITION TOT	VISUAL RECOGNITION 1:2	VISUAL RECOGNITION 2:3
PROTO- ARITMETICA	Spearman's rho	-			
	p-value	-			
VISUAL RECOGNITION TOT	Spearman's rho	0.694*	-		
	p-value	< .001	-		
VISUAL RECOGNITION 1:2	Spearman's rho	0.675*	0.794*	-	
	p-value	< .001	< .001	-	
VISUAL RECOGNITION 2:3	Spearman's rho	0.587*	0.830*	0.418	-
	p-value	< .001	< .001	0.003	-

Tabella 3 - Analisi correlazionale tra proto-aritmetica e VR.
* correlazioni statisticamente significative

		PROTO- ARIT.	G-A-N TASK (CARD.)	PAROLE NUMERO (COMPRESIONE)	CORR. BIUNIVOCA	COUNTING FINGER
PROTO- ARITMETICA	Spearman's rho	-				
	p-value	-				
G-A-N TASK (CARDINALITÀ)	Spearman's rho	0.268	-			
	p-value	0.228	-			
PAROLE NUMERO (COMPRESIONE)	Spearman's rho	0.029	0.639*	-		
	p-value	0.899	0.001	-		
CORRISPONDENZ A BIUNIVOCA	Spearman's rho	0.219	0.148	0.379	-	
	p-value	0.328	0.511	0.082	-	
COUNTING FINGER	Spearman's rho	0.350	0.388	0.588*	0.764*	-
	p-value	0.110	0.074	0.004	< .001	-

Tabella 4 – Analisi correlazionale fra proto-aritmetica e altri compiti
* correlazioni statisticamente significative

ANOVA del compito delle abilità aritmetiche. Nel presente studio si è voluto indagare la presenza di differenze statisticamente significative a partire dall'età dei bambini nel compito di proto-aritmetica, tenendo conto anche della ratio degli item che componevano la prova. Come già accennato in precedenza, per questo tipo di analisi i partecipanti sono stati suddivisi in tre gruppi in base all'età.

I risultati mostrano una differenza significativa fra le competenze aritmetiche dei bambini se si prende in considerazione la ratio, ma, al contrario, non si riscontra una varianza significativa tra i gruppi di età diversa. Dai risultati emersi in questa analisi non è quindi possibile escludere che le differenze di prestazione rilevate in base all'età siano dovute al caso. Le tabelle 5 e 6 riassumono l'ANOVA delle due variabili.

CASO	SUM OF SQUARES	DF	MEAN SQUARE	F	P
RATIO PROTO-ARITH	58.000	1	58.000	15.629	< .001*
RATIO PROTO-ARITH *	5.878	2	2.939	0.792	0.467
GRUPPO ETÀ					
RESIDUALS	70.508	19	3.711		

Tabella 5 - Varianza interna ai gruppi
* differenza significativa tra le medie

CASO	SUM OF SQUARES	DF	MEAN SQUARE	F	P
GRUPPO ETÀ	5.557	2	2.778	0.353	0.707
RESIDUALS	149375	19	7.862		

Tabella 6 - Varianza tra i gruppi

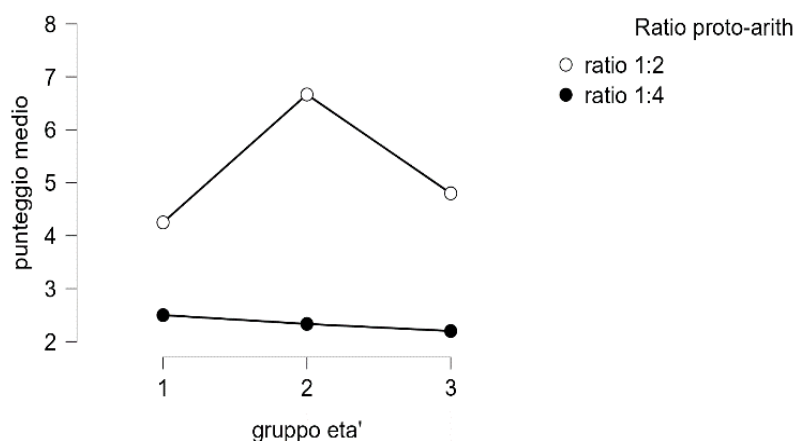


Grafico 1 - medie rilevate in base alla ratio e in base all'età

3.7 *Discussione.*

La prima delle ipotesi da cui è partita la presente analisi voleva indagare se le prestazioni in un compito di proto-aritmetica fossero influenzate dalla ratio e se anche l'età fosse una variabile in grado di fornire una qualche giustificazione al variare delle prestazioni osservate. Starr e colleghi (2018), in particolare, hanno rilevato che in un compito che testava le abilità aritmetiche dei bambini di 4 anni questi ultimi ottenevano dei punteggi migliori quando il rapporto tra le quantità da confrontare era di 1:4, rispetto a quando il rapporto era di 1:2. Sulla base di tale ricerca, il presente studio voleva verificare se anche i bambini di età compresa fra i 18 e i 36 mesi potessero ottenere delle prestazioni simili.

Diversi anni prima Xu e Spelke (2000) avevano dimostrato che il rapporto 1:2 è già discriminabile a partire dai 6 mesi di età. Era lecito aspettarsi che i bambini partecipanti allo studio trovassero minori difficoltà con un rapporto di 1:4 essendo più ampio. Le analisi svolte sul compito di proto-aritmetica hanno rilevato invece prestazioni migliori quando la ratio era di 1:2 a confronto della ratio 1:4 ($F(1, 19) = 15.629, p = <.001$): tale risultato si pone in contraddizione rispetto ad altri studi simili che è possibile trovare in letteratura (Starr et al., 2018; Halberda & Feigenson, 2008).

Al contrario di quanto ipotizzato, una variabile che non ha influenzato la prestazione al compito di addizione approssimata è l'età dei bambini ($F(2,19) = 0.353, p = 0.707$) anche in questo caso la letteratura sul tema afferma come la sensibilità alla ratio muti nel corso dello sviluppo, anche nella prima infanzia, e che maggiore sia il rapporto, migliori siano le prestazioni (Starr et al., 2018; Halberda & Feigenson, 2008). L'assenza di significatività in rapporto all'età nelle prestazioni legate alle abilità aritmetiche potrebbe essere giustificata dal fatto che la prova, così com'è stata strutturata, non sia adeguata a misurare le abilità aritmetiche in bambini così piccoli.

La seconda delle ipotesi su cui si basa lo studio prevede che le competenze aritmetiche dei bambini siano in relazione con l'acuità numerica, giustificando quindi una correlazione tra i risultati ottenuti nelle prove di proto-aritmetica e i risultati al compito di comparison.

Proprio in riferimento alla capacità di rilevare e discriminare la numerosità di due insiemi, misurata tramite il compito di comparison, lo studio è partito da due assunti: a) trattandosi di una prova che, come per l'addizione approssimata, implicava l'attivazione dell'ANS, i punteggi ottenuti nei due compiti devono essere in correlazione fra loro; b) tenendo conto dell'età, dal momento che la capacità di discriminare le numerosità (*acuità numerica*) è fortemente legata alla ratio, i bambini avrebbero dovuto mostrare prestazioni migliori nel rapporto 1:2 rispetto al rapporto 2:3.

I risultati ottenuti confermano solo in parte l'ipotesi iniziale: si è visto infatti che i due diversi compiti, quello di addizione approssimata e di comparison (*acuità numerica*) sono effettivamente in correlazione fra loro ($r=0.694$, $p < .001$); quindi, all'aumentare della prestazione in un compito aumenta la prestazione anche nell'altro tipo di prova. Tale risultato sarebbe giustificabile dal fatto che i due compiti richiedono l'attivazione di uno stesso sistema cognitivo (l'ANS, appunto).

Per riassumere: le prime due ipotesi appena analizzate partono dall'assunto che la capacità di discriminazione numerica e la capacità di addizionare siano entrambe legate al medesimo sistema cognitivo poiché entrambe richiedono l'attivazione dell'Approximate Number System, aspetto che verrebbe confermato dalla correlazione emersa fra le due prove; inoltre, le analisi svolte sul compito di addizione approssimata, mostrano che la ratio è risultata determinante nell'operare con le quantità, per quanto i dati in possesso non ci permettano di concordare con la letteratura sul tema che sostiene che ad una ratio maggiore corrispondano migliori prestazioni.

Infine, l'ultimo degli aspetti su cui si è concentrato lo studio era quello di comprendere se ci fosse una qualche correlazione fra le abilità aritmetiche e altre competenze numeriche indagate.

Imparare a contare è una competenza strettamente legata ai principi del conteggio teorizzati da Gelman e Gallistel (1978), acquisiti dal bambino tramite l'esperienza ancora prima di iniziare l'apprendimento formale della matematica sia grazie agli stimoli proposti in ambienti educativi sia all'interno dell'ambiente domestico (cfr. *Home Numeracy Environment*), costituendosi come punto di incontro fra le competenze innate del bambino e quelle più complesse (Butterworth, 2007).

Alcuni studi hanno dimostrato come l'acuità dell'ANS in età prescolare sia in correlazione con le abilità matematiche (Libertus et al., 2014; Libertus et al., 2013; Scalise & Purpura, 2022). I partecipanti al presente studio hanno un'età compresa fra i 18 e i 36 mesi, fase della vita in cui la nostra ipotesi prevede che non sia ancora presente un'esperienza così importante dei concetti matematici tale da giustificare una qualche correlazione fra abilità innate e principi del conteggio come invece può emergere più avanti nello sviluppo. Si è infatti rilevato che le abilità aritmetiche non presentano correlazione né con il principio di cardinalità (Give a number task, $r=0.268$, $p=0.228$), né con il compito legato alla comprensione delle parole numero ($r=0.029$, $p=0.899$), né con i compiti sulla corrispondenza biunivoca ($r=0.219$, $p=0.328$) e neppure con il counting finger ($r=0.350$, $p=0.110$). Di interesse è invece la presenza di correlazioni fra alcune di queste altre competenze numeriche: tra il principio di cardinalità e la comprensione di parole numero ($r=0.639$, $p=0.001$), tra questa e il counting finger ($r=0.588$, $p=0.004$) e fra il counting finger e le prove di corrispondenza biunivoca ($r=0.764$, $p<.001$): tali correlazioni sosterrrebbero l'ipotesi di un supporto vicendevole fra tutte le abilità che ruotano intorno alla cognizione numerica.

3.8 Limiti e aspetti salienti

Una caratteristica saliente del lavoro svolto è che ha voluto indagare alcuni aspetti della cognizione numerica nel periodo prescolare e, in particolare, in una fascia d'età che è stata poco approfondita in letteratura.

Il presente studio, tuttavia, non è esente da alcuni limiti. I risultati emersi in riferimento alle competenze aritmetiche, al compito di comparison e nelle altre prove analizzate potrebbero essere stati influenzati dal fatto che il campione su cui è stato svolto lo studio era molto ristretto, tale aspetto infatti limita la possibilità di fare inferenze generalizzabili. In aggiunta, anche l'età dei partecipanti non era equamente distribuita, con una maggiore rappresentatività di bambini in procinto di compiere i 3 anni di età.

Una difficoltà emersa durante la fase di raccolta dati è legata alla capacità, di bambini così piccoli, di mantenersi concentrati sulla stessa proposta per un lasso di tempo prolungato: la tenuta attentiva dei partecipanti, infatti, non ha permesso di portare a termine in ogni occasione tutte le prove, costringendo all'interruzione prima che tutti gli item fossero svolti. Tale fatica ha generato la presenza di dati mancanti, i quali potrebbero aver compromesso le analisi statistiche.

Un ultimo limite dello studio è in riferimento alla sensibilità dello schermo del tablet che, in alcune occasioni, ha reso difficile la selezione da parte del bambino della risposta, in particolare per quelle prove in cui era necessario il trascinamento degli elementi (GaN task e compiti di corrispondenza biunivoca) rendendo necessario l'intervento dell'adulto. Al contrario, in altri casi, ha determinato alcune risposte non volute perché sfiorato inavvertitamente dal bambino il cui controllo motorio, a questa età, è a volte incerto.

Un primo elemento che ha giocato a favore della somministrazione sono state le prove stesse che sono sempre state in grado di attirare l'attenzione dei bambini mantenendoli attivi e interessati; positiva è stata anche la presenza di feedback in alcuni dei compiti, stimolanti per la prosecuzione dei task e da cui i bambini mostravano di essere divertiti. In riferimento alle singole prove, dunque, i compiti relativi alla corrispondenza biunivoca e nello specifico i trial che chiedevano ai bambini di trascinare nella boccia di vetro un certo numero di pesciolini sono risultati di difficile comprensione per i piccoli partecipanti e, quindi, in futuro, potrebbe essere utile rivedere questo tipo di task. Al contrario, il compito legato alle abilità aritmetiche e alla acuità numerica, probabilmente per il loro carattere più intuitivo e per la presenza di feedback audiovisivi, è stato molto apprezzato dai partecipanti che hanno mostrato di comprendere le consegne richieste senza particolare fatica.

Ulteriore aspetto che ha facilitato la raccolta dati è che la sperimentatrice che ha somministrato le prove svolgeva anche il ruolo di educatrice all'interno della struttura in cui sono stati coinvolti i partecipanti, così facendo si è reso meno complesso l'aggancio relazionale sia con i bambini che con le famiglie per poter ottenere il consenso a partecipare allo studio.

Positivi sono stati anche i tempi scelti per l'ingresso nella struttura: la somministrazione è stata svolta nei mesi di aprile e maggio, momenti dell'anno in cui i bambini frequentanti il nido hanno, generalmente, ormai assimilato le routine della struttura e si sentono a loro agio al suo interno conoscendone le dinamiche.

A partire da questa ricerca si potrebbero svolgere delle ulteriori analisi longitudinali per verificare come le abilità dei bambini evolveranno nel tempo: in particolare, per i più piccoli che al momento dell'inizio della somministrazione avevano fra i 18 e i 24 mesi e per i quali è previsto ancora un anno di frequenza all'asilo nido, rilevare nuovamente la loro prestazione alla fine del successivo anno scolastico così da osservare eventuali cambiamenti nelle abilità già testate; ugualmente, una rilevazione simile potrebbe essere interessante per i bambini che, dopo la somministrazione, hanno iniziato la scuola dell'infanzia per rilevare il cambiamento di competenze al termine del primo anno di frequenza. Per tale studio, per il gruppo di bambini che ancora frequenterà l'asilo nido si potrebbe prevedere anche un training specifico e promosso dalle educatrici di riferimento con l'obiettivo di potenziare la cognizione numerica; interessante sarebbe anche sensibilizzare le famiglie all'Home Numeracy Environment, verificando se una conoscenza approfondita dell'argomento possa modificare le abitudini domestiche legate ai numeri e, di contro, anche le competenze nello stesso campo.

Conclusione

Prendendo come campione bambini di età compresa fra i 18 e i 36 mesi, il presente studio ha voluto indagare principalmente le abilità aritmetiche precoci in relazione ad altre abilità numeriche, oltre alle capacità di riconoscimento visivo rispetto alle competenze aritmetiche.

I due principali compiti su cui si è focalizzata l'analisi, la proto-aritmetica ed il comparison, sono legati alla cognizione numerica preverbale e attivano competenze non strettamente dipendenti dalla cultura di appartenenza o dall'apprendimento formale. L'Approximate Number System è il sistema che li accomuna: diverse ricerche hanno voluto indagare le abilità di addizione approssimata e di confronto fra quantità utilizzando dei compiti simili a quelli sfruttati per compiere il presente studio (Xenidou-Dervou et al., 2014; Xenidou-Dervou et al., 2013; Starr et al., 2018; Halberda & Feigenson, 2008).

Mediante compiti differenti si è indagato l'emergere del principio di cardinalità, di corrispondenza biunivoca, la comprensione delle parole numero e l'utilizzo delle dita per contare: le analisi svolte non hanno consentito di rilevare una correlazione significativa fra le abilità aritmetiche e le altre competenze numeriche appena citate. Le uniche correlazioni emerse sono tra il compito legato al principio di cardinalità e il compito che indagava la comprensione delle parole numero, tra quest'ultimo e la capacità di conteggio con le dita e tra il compito legato alla corrispondenza biunivoca ed il conteggio con le dita. Tali correlazioni si possono leggere alla luce di una influenza reciproca che queste abilità hanno nel far emergere e, successivamente, consolidare le capacità riguardo la cognizione numerica.

In linea con quanto atteso per l'età dei partecipanti allo studio, si è osservato che tutte le competenze indagate e legate ai principi del conteggio sono ancora in via di acquisizione e che non si possono considerare ancora pienamente padroneggiate dai bambini: tali principi, come ricorda Butterworth (2007) in un suo articolo, si consolidano fino intorno all'età di 6 anni, momento in cui il bambino si accinge all'apprendimento formale della materia in ambiente scolastico. Nei due compiti legati alle

competenze preverbal, al contrario, i bambini hanno mostrato delle prestazioni migliori e dei punteggi più elevati, suggerendo la presenza di competenze più solide per quanto, anch'esse, continueranno a migliorarsi nel corso dello sviluppo e in relazione alle esperienze compiute dal bambino stesso.

Se, come ricordano Brazelton e Greenspan (2001), fra i bisogni più importanti del bambino c'è la necessità di avere esperienze pensate in base alle proprie differenze individuali ma anche adeguate al grado di sviluppo raggiunto, è facile intuire che il ruolo dell'adulto sia fondamentale affinché venga sostenuto il consolidamento delle competenze legate alla cognizione numerica. Si è già trattato, in precedenza, di come l'Home Numeracy Environment costituisca un approccio utile in tal senso: secondo i ricercatori che si occupano del tema (Bonifacci et al., 2021; Susperreguy et al., 2020) i bambini possono essere stimolati ad approcciarsi al mondo dei numeri in due modi, tramite dei momenti formali o tramite delle attività di tipo informale.

Come suggerisce il termine, si parla di approccio formale nel momento in cui l'obiettivo delle attività proposte è puramente didattico. L'adulto sceglie intenzionalmente delle attività tramite le quali può insegnare delle specifiche competenze matematiche e si tratta di proposte che si differenziano in base allo scopo che perseguono. Si riconoscono le *attività di mappatura*, quelle in cui ci si concentra sul modo di rappresentare i numeri e sul riconoscimento degli stessi e le *attività operative* in cui i bambini manipolano le cifre e le quantità (e si costituiscono come proposte più complesse rispetto alle prime) (Susperreguy et al., 2020). Le proposte di tipo informale, invece, sono quelle in cui il bambino ha la possibilità di sperimentare concetti legati al numero e alla matematica ma in maniera indiretta e senza che questa costituisca lo scopo principale per il quale si decide di intraprendere l'attività. Rientrano nella categoria, ad esempio, il gioco delle carte, giochi con contenuti legati ai numeri o, addirittura, la cucina (Susperreguy et al., 2020).

Per quanto riguarda le attività di tipo formale, le proposte domestiche che sono esplicitamente incentrate sulla matematica, come contare oggetti o utilizzare libri con attività numeriche, hanno predetto le prime abilità matematiche dei bambini in età prescolare così come le attività di tipo

informale, a prova del fatto che l'Home Numeracy Environment gioca un ruolo fondamentale nello sviluppo delle competenze numeriche (Susperreguy et al., 2020).

In conclusione, la letteratura scientifica nel campo della cognizione numerica sottolinea che non si è mai troppo piccoli per iniziare a parlare di numeri e che un approccio attento e ponderato rispetto a queste abilità può fare la differenza nella formazione e nella futura riuscita scolastica: i bambini, infatti, essendo già competenti in questo campo da molto piccoli, hanno un grande potenziale su cui è importante investire. Il presente studio, infatti, ha dimostrato che i bambini sono in grado di mantenersi attivi e portare a termine richieste che coinvolgono il campo dei numeri. Tale aspetto è rilevante anche in prospettiva di progettare interventi educativi mirati a potenziare e sollecitare la cognizione numerica, ambito per il quale i bambini hanno mostrato un buon grado di interesse. In più, si è osservato che iniziare a studiare la cognizione numerica in bambini frequentanti l'asilo nido è possibile attraverso alcuni strumenti e alcune prove rese salienti e adatte all'età di cui si vuole approfondire la conoscenza.

Bibliografia

- Ashkenazi, S., Habar, H., Shemesh, V. & Silverman, S. (2022). Early Subitizing Development: The Role of Visuospatial Working Memory. *European Journal of Education and Pedagogy*. (3)2, 79-85
- Barrocas, R., Roesch, S., Gawrilow, C. & Moeller, K. (2020). Putting a Finger on Numerical Development – Reviewing the Contributions of Kindergarten Finger Gnosis and Fine Motor Skills to Numerical Abilities. *Frontiers in Psychology*. 11:1012
- Bonifacci P, Compiani D, Affranti A. & Peri B. (2021) Home Literacy and Numeracy Interact and Mediate the Relationship Between Socio-Economic Status and Early Linguistic and Numeracy Skills in Preschoolers. *Frontiers in Psychology*, 12:662265
- Brazelton, T. B & Greenspan, S. I. (2001). I bisogni irrinunciabili dei bambini. Ciò che un bambino deve avere per crescere e imparare. Milano: Raffaello Cortina Editore
- Bull, R., Espy, K. A. & Wiebe, S. A. (2008) Short-Term Memory, Working Memory, and Executive Functioning in Preschoolers: Longitudinal Predictors of Mathematical Achievement at Age 7 Years, *Developmental Neuropsychology*, 33 (3), 205-228
- Butterworth, B., & Walsh, V. (2011). Neural basis of mathematical cognition. *Current Biology*, 21 (16), R618-R621
- Butterworth, B., Varma, S. & Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: From Brain to Education. *Science*, 332 (6033), 1049-1053
- Butterworth, B. (2007). Lo sviluppo delle capacità aritmetiche. *Difficoltà in matematica*, 4 (1), 9-40
- Chernyak, N., Sandham, B., Harris, P. L., & Cordes, S. (2016). Numerical Cognition Explains Age-Related Changes in Third-Party Fairness. *Developmental Psychology*, 52 (10), 1555-1562

- Cheung, P. & Le Corre, M. (2018). Parallel Individuation Supports Numerical Comparisons in Preschoolers. *Journal of Numerical Cognition*, 4 (2), 380-409
- Christodoulou, J., Lac, A. & Moore D. S. (2017). Babies and Math: A Meta-Analysis of Infants' Simple Arithmetic Competence. *Developmental Psychology*, 53 (8), 1405–1417
- Coolen, I. E. J. I., & Castronovo, J. (2023). How Memory Counts in Mathematical Development. *Journal of Cognition*, 6 (1): 1, 1–12.
- Dehaene, S. (2010). Il Pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi. Milano: Raffaello Cortina Editore
- Dehaene, S. & Changeux, J. P. (1993). Development of Elementary Numerical Abilities: A Neuronal Model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 5 (4), 390-407
- Dehaene, S. & Cohen, L. (1994). Dissociable Mechanisms of Subitizing and Counting: Neuropsychological Evidence From Simultanagnosic Patients. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*. 20 (5), 958-975
- Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L. & Wilson, A, J. (2004). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, 14, 218–224
- Feigenson, L., Dehaene, S. & Spelke, E. (2004). Core System of Number, *Trends in Cognitive Sciences*, 8 (7), 307-314
- Feigenson, L., Carey, S. & Hauser, M. (2002). The representations underlying infants' choice of more: object-files versus analog magnitudes. *Psychological Science*, 13, 150–156
- Feigenson, L. & Carey, S. (2005). On the limits of infants' quantification of small object arrays. *Cognition*, 97, 295–313
- Gelman, R. & Butterworth, B. (2007). Quale relazione esiste tra numeri e linguaggio? *Difficoltà in matematica*, 3 (2), 129-140

- Gunderson, E. A. & Levine, S. C. (2011). Some types of parent number talk count more than others: relations between parents' input and children's cardinal-number knowledge. *Developmental Science* 14(5), 1021–1032
- Halberda, J. & Feigenson, L. (2008). Developmental Change in the Acuity of the “Number Sense”: The Approximate Number System in 3-, 4-, 5-, and 6-Year-Olds and Adults. *Developmental Psychology*, 44 (5), 1457-1465
- LeFevre, J. A. (2016). Numerical Cognition: Adding It Up. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 70 (1), 3-11
- LeFevre, J. A., Skwarchuk, S. L., Smith-Chant, B. L., Fast, L., Kamawar, D., & Bisanz, J. (2009). Home numeracy experiences and children's math performance in the early school years. *Canadian Journal of Behavioural Science*, 41(2), 55.
- Libertus, M. E., Feigenson, L. & Halberda, J. (2011). Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability, *Developmental Science*, 14:6, 1292-1300
- Lucangeli, D. & Mammarella, I. C., (a cura di) (2010). Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione, intervento. Milano: Franco Angeli
- Mehler, J. & Bever, T. G. (1978). Cognitive Capacity of Very Young Children. *Iowa Science Teachers Journal*, 6 (4), 29-32
- Frank Niklas, Caroline Cohrssen & Collette Tayler (2016) Improving Preschoolers' Numerical Abilities by Enhancing the Home Numeracy Environment, *Early Education and Development*, 27 (3), 372-383
- Nieder, A. (2020). Neural constraints on human number concepts. *Current Opinion in Neurobiology*, 60, 28-36

- Noel, M. P. (2005). Finger gnosis: a predictor of numerical abilities in children? *Child Neuropsychology*, *11*:413-430,
- Odic, D., Libertus, M. E., Feigenson, L. & Halberda, J. (2013). Developmental Change in the Acuity of Approximate Number and Area Representations. *Developmental Psychology*, *49* (6), 1103–1112
- Olivers, C. N. L., & Watson, D. G. (2008). Subitizing requires attention. *Visual Cognition*, *16* (4), 439-462
- Pantsar, M. (2019). The Enculturated Move From Proto-Arithmetic to Arithmetic. *Frontiers in Psychology*, *10*:1454
- Park, J. & Brannon, E. M. (2013). Training the approximate number system improves math proficiency. *Psychological Science*, *24* (10), 2013-2019
- Sarnecka, B. W. & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition*, *108*, 662-674
- Scalise, N. R., & Purpura, D. J. (2022). Numerical development in preschool: Examining potential mediators of children’s approximate number system and mathematics achievement. *Journal of Educational Psychology*, *114*(5), 1192–1204
- Schaffer, R. (2005). *Psicologia dello sviluppo: Un’introduzione*. Milano: Raffaello Cortina
- Schleifer, P., & Landerl, K. (2011). Subitizing and counting in typical and atypical development. *Developmental Science*, *14* (2), 280-291
- Soylu, F., Lester, F. K. Jr. & Newman, S. M. (2018). You Can Count on Your Fingers: The Role of Fingers in Early Mathematical Development. *Journal of Numerical Cognition*, *4* (1), 107–135
- Starr, A., Tomlinson, R.C. & Brannon, E. M. (2018) The Acuity and Manipulability of the ANS Have Separable Influences on Preschoolers’ Symbolic Math Achievement. *Frontiers in Psychology*, *9*:2554

- Susperreguy, M. I, Di Lonardo Burr, S., Xu, C., Douglas, H., LeFevre, J.A. (2020). Children's Home Numeracy Environment Predicts Growth of their Early Mathematical Skills in Kindergarten. *Child Development, 91* (5), 1663-1680
- Traverso, L., Tonizzi, I., Usai, M. C. & Viterbori, P. (2021). The relationship of working memory and inhibition with different number knowledge skills in preschool children. *Journal of Experimental Child Psychology,*
- Wynn, K. (1998) Psychological foundations of number: numerical competence in human infants. *Trends in Cognitive Sciences, 2*, 296–303
- Xenidou-Dervou, I., De Smedt, B., Van Der Schoot, M. & Van Lieshout, E. C. D. M. (2013). Individual differences in kindergarten math achievement: The integrative roles of approximation skills and working memory. *Learning and Individual Differences, 28*, 119–129
- Xenidou-Dervou, I., Van Lieshout, E. C. D. M. & Van Der Schoot, M. (2014). Working memory in nonsymbolic approximate arithmetic processing: a dual-task study with preschoolers. *Cognitive Science, 38*, 101-127
- Xu, C. & LeFevre, J. A. (2016). Training Young Children on Sequential Relations Among Numbers and Spatial Decomposition: Differential Transfer to Number Line and Mental Transformation Tasks. *Developmental Psychology, 52* (6), 854-86
- Xu, F. & Spelke, E.S. (2000) Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition 74*, B1–B11