



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

ETERNAL VERTEX COVER

RELATORE

PROF. MANUEL FRANCESCO APRILE

LAUREANDO

LUCA BOGANI

MATRICOLA

1074228

ANNO ACCADEMICO

2021-2022

16 DICEMBRE 2022

Abstract

Ipotizzando una sequenza infinita di attacchi sugli archi di un grafo, si cerca una strategia di difesa utilizzando il minor numero di guardie mobili piazzate sui nodi del grafo. La difesa avviene spostando una guardia da un vertice al suo adiacente lungo l'arco attaccato, con la possibilità di muovere anche altre guardie su vertici adiacenti al loro nodo di riferimento. Analizzando i lavori di Klostermeyer e Mynhardt prima, e di Babu et al. poi, si dipinge un quadro d'insieme su questa classe di problemi, soffermandosi in particolar modo sulle due caratterizzazioni di lower e upper bound, analizzando infine un algoritmo in tempo lineare per una specifica classe di grafi.

Ai miei genitori, per la pazienza.
Agli amici che mi hanno aiutato e a quelli che non ho saputo aiutare.

Contenuti

ABSTRACT	iii
1 INTRODUZIONE	i
2 CASI SEMPLICI	4
3 RISULTATI GENERALI	9
4 CARATTERIZZAZIONE PER EVC = 2MVC	12
5 CARATTERIZZAZIONE PER EVC = MVC	24
6 CACTUS	33
BIBLIOGRAFIA	45

1

Introduzione

Dato un grafo $G = (V, E)$, un *trasversale* (o *vertex cover*) è un insieme $T \subseteq V$ tale che per ogni arco in E almeno una delle sue estremità sia in T . Si parla di *trasversale minimo* (o *minimum vertex cover*) se la cardinalità di T è minima, ed in quel caso utilizziamo la scrittura $mvc(G)$ ad indicare la cardinalità di T , ossia il minimo numero di nodi in grado di saturare tutti gli archi di G .

Immaginiamo ora un gioco in cui due partecipanti si alternano in una fase di attacco ed una di difesa. Il giocatore in difesa dispone al più una guardia su ogni nodo del grafo, ed il gioco ha quindi inizio. Se la guardia s è posta sul nodo v , scriviamo $s = g(v)$ e $v = g^{-1}(s)$.

Un “attacco” corrisponde alla scelta di un arco $e \in E$; per difenderlo, occorre far attraversare l’arco e ad una guardia presente su una delle sue estremità, rispettando il limite di al più una guardia per nodo. È inoltre possibile, durante la difesa, spostare un qualsiasi altro numero di guardie attraverso archi adiacenti al loro nodo corrente. Nel caso in cui siano presenti guardie su entrambe le estremità dell’arco scelto, un semplice scambio delle due guardie è sufficiente a mantenere una difesa valida senza modificare la configurazione nel suo complesso; per questo motivo nel corso dei capitoli saranno considerati solamente attacchi su archi con un vertice scoperto.

Il giocatore in attacco inizia quindi il suo turno scegliendo un arco del grafo da attaccare, e lo scopo del giocatore in difesa è quello di difendere tale arco come spiegato. Ipotizzando una sequenza infinita di attacchi di questo tipo, l’obiettivo è quello di riuscire a difenderli in una sequenza infinita di riarrangiamenti della configurazione delle guardie. È immediato notare

come ogni configurazione difensiva delle guardie sia necessariamente un trasversale, in quanto ogni arco deve essere protetto da almeno una guardia in qualsiasi momento. Per questo motivo per tale problema prende il nome di *trasversale eterno* (o *eternal vertex cover*).

Di interesse è la ricerca di una soluzione che utilizzi il minor numero di guardie possibile; indicheremo tale numero con $evc(G)$.

Il problema, introdotto da Klostermeyer e Mynhardt nel 2009 [1], presenta dunque una variazione dinamica alla ricerca del trasversale minimo. Solo in rari casi i due concetti coincidono, e generalmente la ricerca del trasversale minimo è solamente un punto di partenza per poter elaborare una strategia di difesa eterna.

Diamo un semplice esempio del funzionamento di un trasversale eterno:



Immagine 1.1: *Il trasversale minimo (in verde) non coincide con il trasversale eterno (in blu).*

Consideriamo il grafo in figura. $\{v_2\}$ è un trasversale minimo in quanto entrambi gli archi del grafo sono toccati da v_2 . Tuttavia, esso non è un trasversale eterno: un attacco sull'arco v_1v_2 ci obbligherebbe a spostare la guardia in v_2 sul nodo v_1 , lasciando scoperto l'arco v_2v_3 . Viceversa, un attacco sull'arco v_2v_3 ci obbligherebbe a spostare la guardia in v_2 sul nodo v_3 , lasciando scoperto l'arco v_1v_2 .

L'insieme $\{v_1, v_2\}$, invece, è una possibile configurazione di un trasversale eterno. Un attacco sull'arco v_1v_2 è difeso scambiando le guardie in v_1 e v_2 tra loro, mentre un attacco sull'arco v_2v_3 è difeso spostando la guardia in v_2 sul nodo v_3 . A quel punto un ulteriore attacco sull'arco v_2v_3 verrebbe difeso spostando la guardia in v_3 sul nodo di v_2 ritornando alla situazione di partenza, mentre un attacco sull'arco v_1v_2 verrebbe difeso spostando la guardia in v_1 sul nodo in v_2 , ottenendo una situazione speculare e analoga a quella di partenza.

La tesi è organizzata come segue: nel Capitolo 2 viene mostrata la relazione tra $mvc(G)$ ed $evc(G)$ in alcuni casi semplici quali cammini, cicli ed alberi. Successivamente, nel Capitolo 3 si analizzano dei risultati più generali andando a stabilire un lower-bound ed un upper-bound per il valore $evc(G)$. Il Capitolo 4 ed il Capitolo 5 sono quindi dedicati alla caratterizzazione dei grafi per cui vale rispettivamente $evc(G) = 2 mvc(G)$ e $evc(G) = mvc(G)$. Il Capitolo 6 prende infine in considerazione la classe dei *cactus*, particolari tipi di grafo, cercando un algoritmo in tempo lineare per la determinazione di un trasversale eterno.

2

Casi semplici

Il primo approccio al calcolo del trasversale eterno si ha con grafi dalla struttura semplice, che garantiscono una facile comprensione dell'argomento che si andrà a trattare. Non solo ciò è utile per acquisire familiarità col problema, ma fornisce dei risultati che torneranno d'aiuto quando si andranno ad analizzare classi più complesse di grafi e quando si cercheranno veloci contro-esempi.

NOTAZIONI E TERMINOLOGIA DEL CAPITOLO

Specialmente nella trattazione di alberi verranno utilizzati termini specifici, di cui preventivamente spieghiamo il significato per non appesantire enunciati e dimostrazioni.

Detto $T = (V, E)$ un albero, una *foglia* di T è un nodo $v \in V$ di grado 1.

Il termine *discendenti* di un nodo $u \in V$ è generalmente utilizzato nell'ambito di grafi orientati, dove indica tutti i nodi $v_i \in V$ per cui esiste un cammino orientato da u a v_i . Nel nostro caso, tale termine sarà utilizzato lavorando con grafi non orientati, ma in un contesto in cui si fa riferimento ad un ordine di percorrenza dei nodi.

In modo simile, il termine *figlio* di un nodo u è solitamente utilizzato per indicare un nodo v per cui esiste l'arco orientato uv . Come in quanto specificato sopra, il termine sarà utilizzato in un contesto appropriato, pur lavorando con un grafo non orientato.

PROPOSIZIONE 2.1

Sia C_n il ciclo di lunghezza n .

$$\forall n \geq 3, \text{evc}(C_n) = \text{mvc}(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

Dimostrazione Un trasversale minimo per C_n si ottiene partendo da un qualsiasi nodo del grafo e proseguendo lungo il ciclo includendone uno sì e uno no. Un insieme U creato in questo modo fa sì che ogni arco del ciclo sia incidente in almeno un nodo di U , che è quindi un trasversale. Nel caso n sia pari, la cardinalità del trasversale minimo sarà quindi $\frac{n}{2}$ (la rimozione di un nodo dal trasversale lascerebbe scoperti due archi); in caso di n dispari, il metodo appena descritto si concluderà con due nodi adiacenti entrambi nel trasversale, dando come risultato $\frac{n+1}{2}$ (la rimozione di un nodo dal trasversale lascerebbe scoperto un arco). In generale, scriviamo quindi che il trasversale minimo ha cardinalità $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Detto D un trasversale minimo di C_n , posizioniamo una guardia su ogni vertice di D . Per difendere un attacco su un arco e di C_n è sufficiente muovere una guardia su uno dei nodi di e lungo l'arco e contemporaneamente muovere ogni altra guardia nella medesima direzione. Ecco quindi che $\text{evc}(C_n) = \text{mvc}(C_n)$. □

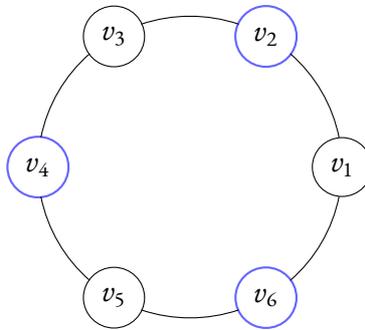


Immagine 2.1: C_6 , un ciclo di lunghezza 6, con trasversale eterno $\{v_2, v_4, v_6\}$.

PROPOSIZIONE 2.2

Sia P_n il cammino con n nodi.

$$\forall n \geq 1, \text{evc}(P_n) = n - 1 = \begin{cases} 2 \text{mvc}(P_n) & \text{se } n \text{ é dispari} \\ 2 \text{mvc}(P_n) - 1 & \text{se } n \text{ é pari} \end{cases}$$

Dimostrazione Per $n = 1$ non sono richieste guardie, mentre per $n = 2$ é sufficiente una sola guardia; supponiamo quindi che valga $n \geq 3$. Consideriamo P_n come sequenza di nodi: $P_n = v_1, \dots, v_n$. Sia D un eternal vertex cover minimo per P_n . Certamente $|D| \leq n - 1$; detto infatti v_i il nodo senza guardia, un attacco su un arco a lui adiacente (ossia $v_{i-1}v_i$ oppure $v_i v_{i+1}$) verrà difeso dalla guardia sul nodo vicino (v_{i-1} oppure v_{i+1} , rispettivamente).

Supponiamo ora, per assurdo, che valga $|D| \leq n - 2$ (ossia che vi siano almeno due nodi senza guardia). Sia i il più piccolo indice per cui v_i non abbia una guardia. Per difendere un attacco sull'arco $v_i v_{i+1}$, la guardia $g(v_{i+1})$ si sposterà in v_i , ed eventualmente delle guardie nei vertici successivi si sposteranno in nodi adiacenti con un indice minore (nel caso in cui lo spostamento di $g(v_{i+1})$ lasci scoperti due nodi adiacenti). Sia ora j il più piccolo indice per cui v_j non abbia una guardia e ripetiamo il procedimento. Essendo $|D| \leq n - 2$, si raggiunge un momento in cui vi é una guardia in v_{n-1} ma nessuna guardia in v_{n-2} e v_n . A questo punto un attacco sull'arco $v_{n-2}v_{n-1}$ non può essere difeso, in quanto lo spostamento di $g(v_{n-1})$ lascerebbe scoperto l'arco $v_{n-1}v_n$. Perciò D non può essere un eternal vertex cover minimo, da cui l'assurdo. \square



Immagine 2.2: P_6 , un cammino di lunghezza 6, con trasversale eterno $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$.

La seguente Proposizione é un risultato sul limite inferiore della cardinalità di un eternal vertex cover per un generico albero. Un risultato più forte, che dimostrerà come tale limite inferiore sia soddisfatto ad uguaglianza, verrà enunciato e dimostrato nel prossimo capitolo.

PROPOSIZIONE 2.3

Sia $T = (V, E)$ un albero non banale, e sia L l'insieme delle sue foglie.

$$evc(T) \geq |V \setminus L| + 1$$

Dimostrazione Poiché la Proposizione 2.2 risolve il problema nel caso di un cammino, analizziamo in questo caso un albero T che abbia almeno un nodo di grado ≥ 3 . Supponiamo per assurdo di avere un eternal vertex cover minimo $D \subset V$ con cardinalità $|V \setminus L|$. Sia l una foglia di T ; prima o dopo un attacco sull'arco adiacente ad l , l avrà una guardia; possiamo quindi partire da una configurazione in cui l sia protetto da una guardia. Sia b_0 il nodo con grado ≥ 3 più vicino a l , e sia Q_0 il cammino da l a b_0 in T . Se in Q_0 vi sono nodi senza guardia, chiamiamo u_0 il più vicino ad l e chiamiamo v_0 il nodo adiacente consecutivo che certamente avrà una guardia (nel caso in cui sia $b_0 = u_0$, v_0 sarà un nodo adiacente a b_0 che non fa parte del cammino). Il cammino è quindi $Q_0 = \{l, \dots, u_0, v_0, \dots, b_0\}$. Un attacco sull'arco u_0v_0 viene difeso spostando $g(v_0)$ in u_0 ; in questo modo una sequenza ripetuta di analoghi attacchi su archi del cammino porta ad una configurazione in cui ogni nodo in Q_0 è difeso da una guardia.

In $T \setminus Q_0$ si contano $|L| - 1$ foglie e $|L|$ nodi senza guardia; infatti in Q_0 era presente una sola foglia (da cui $|L| - 1$) e detto n il numero di nodi in Q_0 , in $T \setminus Q_0$ ho $|V| - n$ nodi, di cui $|D| - n$ guardie. Ne segue che vi sono $|V| - n - (|D| - n) = |V| - |D| = |V| - |V| + |L| = |L|$ nodi senza guardia. Perciò $\exists c_1 \in T \setminus Q_0$ adiacente a b_0 tale che T_1 , il sottoalbero di T indotto da c_1 e dai suoi discendenti, contenga più nodi scoperti che foglie (principio dei cassetti).

Sia $b_1 \in T_1$ il nodo con grado ≥ 3 più vicino a c_1 (se esiste); sia Q_1 il cammino da c_1 a b_1 in T_1 . Ripetiamo la procedura utilizzata sopra finché ogni nodo di Q_1 risulta protetto da una guardia. Osserviamo che nessuna guardia in $T \setminus T_1$ può muoversi in T_1 durante questo procedimento, in quanto a distanza > 1 dai discendenti di c_1 . Analogamente a quanto visto, b_1 ha un figlio c_2 tale che il sottoalbero T_2 indotto da c_2 e dai suoi discendenti contenga più nodi scoperti che foglie.

Eventualmente, ripetendo il procedimento un numero sufficiente di volte, si otterrà un sottoalbero T_k di T che contiene più nodi scoperti che foglie, ma non contiene nessun nodo di grado ≥ 3 ; in altre parole, T_k è un cammino con almeno due nodi non protetti da guardie. Per la Proposizione 2.2, segue che la configurazione di guardie in T_k non può proteggere T_k .

Poichè le guardie in $T \setminus T_k$ non possono muoversi per difendere un attacco su un arco di T_k , ne segue che D non protegge T . \square

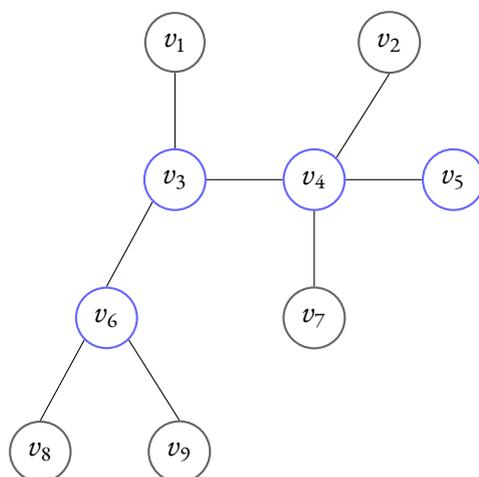


Immagine 2.3: Un albero T con trasversale eterno $\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$.

3

Risultati generali

In questo capitolo sono esposti risultati che riguardano grafi connessi di natura più generale. Seguendo la prima parte del lavoro di Klostermeyer e Mynhardt [1], vengono definiti importanti stime della quantità $evc(G)$ che saranno vitali nei successivi capitoli e affineranno i risultati riguardo gli alberi.

TEOREMA 3.1

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso non banale; sia D un trasversale di G tale che $\langle D \rangle$ sia connesso. Vale allora

$$evc(G) \leq |D| + 1$$

Dimostrazione Se $D = V$ il risultato è immediato, per cui supponiamo valga $V \setminus D \neq \emptyset$. Sia ora $d \in V \setminus D$ un nodo adiacente ad un nodo di D , e piazziamo una guardia su ogni nodo di $D \cup \{d\}$. Chiamiamo *guardia ombra* la guardia $g(d)$ e la indichiamo con s . Dopo ogni difesa la guardia ombra cambierà posizione, ed indicheremo con $g^{-1}(s)$ il nodo occupato da s .

L'idea di fondo è che, essendo $\langle D \rangle$ connesso, tutte le guardie in D sono a due a due adiacenti; essendo inoltre un trasversale, significa che ogni nodo scoperto è a distanza 1 da una guardia. L'aggiunta della guardia ombra permetterà di difendere di volta in volta un arco diverso muovendo le guardie lungo il cammino che unisce la guardia ombra e l'arco attaccato.

Formalizziamo ora questa idea con una strategia di difesa.

Supponiamo venga attaccato l'arco $e = uv$, con una guardia in u . Sia P il cammino da $g^{-1}(s)$ a u in $\langle D \cup g^{-1}(s) \rangle$ (tale cammino esiste in quanto $\langle D \rangle$ è connesso e $g^{-1}(s)$ è adiacente ad almeno un vertice di D in G). Muoviamo $g(u)$ in v e contemporaneamente spostiamo tutte le guardie in P lungo i suoi archi nella medesima direzione. La guardia in v diventa ora la guardia ombra, pertanto scriviamo $g(v) = s$. In questa configurazione, ogni nodo di D contiene una guardia e $\langle D \cup g^{-1}(s) \rangle$ è connesso. Potendo ripetere questa strategia di difesa, G è protetto da ogni sequenza di attacchi, da cui segue la tesi. \square

COROLLARIO 3.1

Sia $T = (V, E)$ un albero non banale.

$$evc(T) = |V \setminus L| + 1$$

Dimostrazione Il sottoalbero B indotto dai nodi interni di T (ovvero nodi che non sono foglie) è connesso, e B è chiaramente un trasversale; dal Teorema 3.1 segue che $evc(T) \leq |B| + 1 = |V \setminus L| + 1$. Per la Proposizione 2.3, $evc(T) \geq |V \setminus L| + 1$, da cui segue la tesi. \square

COROLLARIO 3.2

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso non banale; sia X un trasversale di G tale che $\langle X \rangle$ abbia k componenti connesse. Allora

$$evc(G) \leq |X| + k$$

Dimostrazione Poichè G è connesso, le componenti di $\langle X \rangle$ sono a distanza 2 l'una dall'altra: se fosse > 2 si avrebbero due nodi consecutivi senza guardia, mentre X è un trasversale. Ognuna di queste componenti verrebbe connessa ad un'altra con l'aggiunta del singolo nodo che le divide, per cui è possibile connettere tutte le componenti di $\langle X \rangle$ con l'aggiunta di al più $k - 1$ nodi. Esiste dunque un insieme D con al più $|X| + k - 1$ nodi che contiene X (è quindi certamente un trasversale) e induce un sottografo connesso. Applicando il Teorema 3.1, otteniamo che $evc(G) \leq |D| + 1 \leq |X| + k$. \square

COROLLARIO 3.3

Per ogni grafo G connesso non banale, vale

$$mvc(G) \leq evc(G) \leq 2 mvc(G)$$

Dimostrazione La prima disuguaglianza é immediata; la seconda segue dal Corollario 3.2 in quanto un trasversale minimo ha al piú $mvc(G)$ componenti. \square

4

Caratterizzazione per $evc = 2mvc$

Per quanto visto nel capitolo precedente, il massimo valore assunto da $evc(G)$ è $2mvc(G)$; in questo capitolo verranno caratterizzati i grafi che verificano questo upper-bound. Seguendo l'intuizione di Klostermeyer e Mynhardt [1], costruiremo delle classi \mathcal{T} , \mathcal{G} e \mathcal{H} di grafi con $\mathcal{T} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{H}$, dimostrando poi come la classe \mathcal{H} consista di tutti e soli i grafi non banali che soddisfano l'upper-bound.

LA CLASSE \mathcal{T}

Sia T' un albero con almeno 3 nodi. Per prima cosa suddividiamo ogni arco di T' : detto uv un generico arco del grafo, aggiungiamo un nodo p tra u e v , ottenendo due archi up e pv al posto dell'originale arco uv . Successivamente eliminiamo ogni foglia del nuovo albero; ciò che rimane sarà l'albero T , e definiamo \mathcal{T} come la famiglia di alberi generati in questo modo. Ogni $T \in \mathcal{T}$ ha le seguenti proprietà:

- **P1** I cammini massimali in T hanno lunghezza pari (ossia un numero dispari di nodi).
Un cammino massimale P in un albero va da una foglia ad un'altra foglia. Per costruzione, un cammino massimale in T attraversa, nell'ordine: 1 arco da una foglia ad un nodo interno, un numero pari di archi tra nodi interni (dovuto alla suddivisione degli archi originali di T'), 1 arco da un nodo interno ad una foglia. Si ottiene così un cammino di lunghezza pari.

- **P₂** Due nodi con grado ≥ 3 in T hanno distanza pari.

Un nodo con grado 3 è certamente uno dei nodi originali di T' , in quanto la suddivisione di archi crea solamente nuovi nodi di grado = 2. Detti u e v due nodi interni in T' con $d(u, v)_{T'} = k$, la suddivisione di archi comporta che $d(u, v)_T = 2k$.

- **P₃** Un nodo con grado ≥ 3 in T è a distanza dispari da una foglia.

Per costruzione, il nodo adiacente ad una foglia in T è un nodo originale di T' , e la distanza in T tra due nodi originali è pari, da cui l'enunciato.

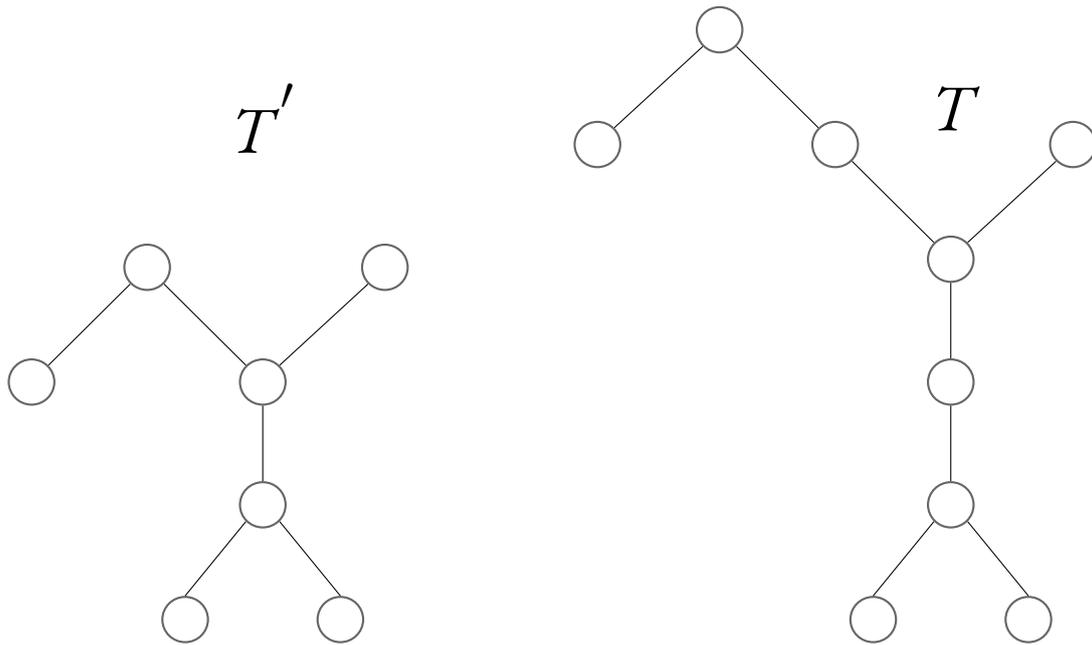


Immagine 4.1: Da un albero T' costruiamo $T \in \mathcal{T}$.

Viceversa, ogni albero che soddisfa le proprietà precedenti è in \mathcal{T} ; per verificarlo, si consideri la bipartizione di $T = (V, E)$ in $V = A \cup B$ (si può fare in quanto un albero è un grafo bipartito). Osserviamo che, poiché un cammino massimale ha un numero dispari di nodi, non può essere $|A| = |B|$; scegliamo quindi $|A| < |B|$. Usando P_2 e P_3 ed il fatto che un cammino massimale parte da e arriva in una foglia, se ne deduce che tutte le foglie saranno in B e tutti i nodi con grado ≥ 3 saranno in A . Inoltre, tutti i nodi adiacenti ad una foglia saranno anche loro in A .

Una volta descritto in questo modo, è più semplice eseguire le operazioni inverse di quelle effettuate per costruire la classe \mathcal{T} . Poichè le foglie nell'albero di partenza rimangono foglie, si può semplificare il processo inverso evitando l'aggiunta di foglie e attuando solamente una contrazione tra ogni nodo in B di grado = 2 e un suo adiacente. Il risultato sarà un grafo che rimarrà connesso e aciclico, ossia un albero.

Osserviamo inoltre che, poichè T è bipartito, A è un trasversale minimo per T .

LA CLASSE \mathcal{G}

Per ogni $T \in \mathcal{T}$ con trasversale minimo A , consideriamo ogni coppia di nodi $x, y \in A$ tale che $d(x, y) = 2$ e aggiungiamo un numero di nodi a piacere (anche zero) congiungendoli con x e y , arrivando a formare il grafo G . Chiaramente A rimane un trasversale minimo anche per un tale G , avendo aggiunto solamente archi adiacenti a nodi di A . Definiamo \mathcal{G} come la famiglia di grafi costruiti in questo modo, e osserviamo che $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}$.

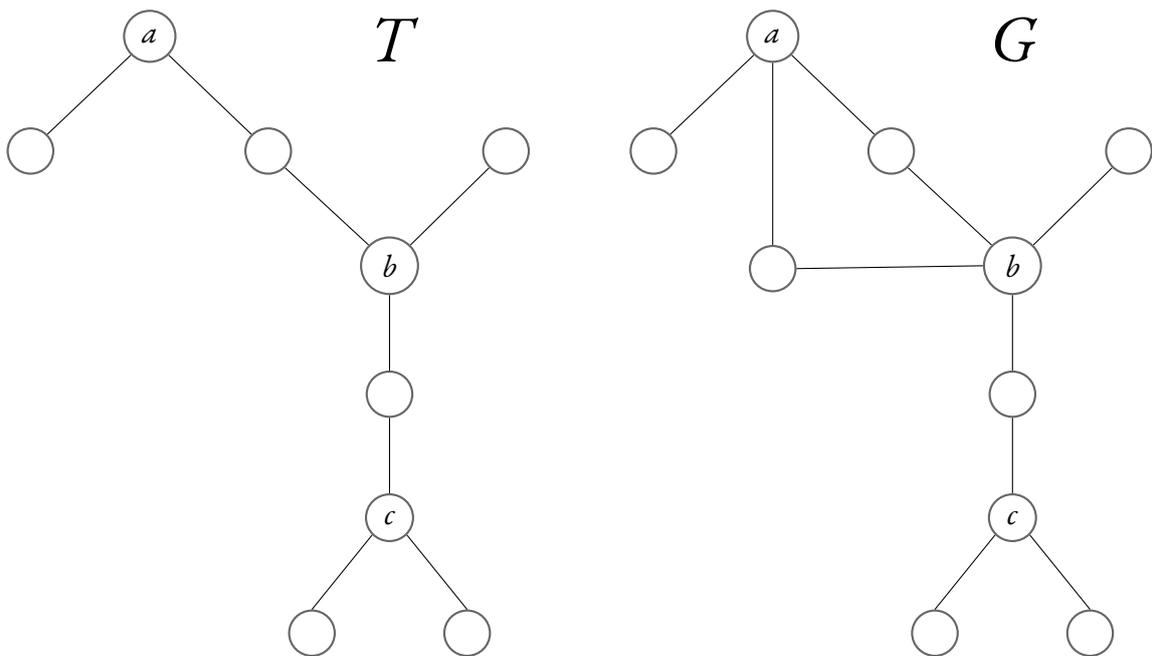


Immagine 4.2: Da $T \in \mathcal{T}$ costruiamo $G \in \mathcal{G}$, con $A = \{a, b, c\}$ trasversale minimo di G .

LA CLASSE \mathcal{H}

Sia $G \in \mathcal{G}$ con trasversale minimo A ; definiamo $A_\varepsilon := \{x \in A : x \text{ sia a distanza } 2 \text{ da un solo } y_x \in A\}$. Ogni nodo in A_ε é adiacente ad una foglia di G ; come visto nella costruzione di \mathcal{T} , A contiene tutti i nodi di supporto (ossia adiacenti a foglie) di T e tutti i nodi di grado ≥ 3 di T , e questo rimane vero anche per G , poiché aggiungiamo solo nodi non adiacenti a foglie e di grado $= 2$. Supponiamo di avere un nodo u di A con grado $k \geq 2$, avente distanza 2 da un unico nodo in A , chiamato v ; chiamiamo n_1, \dots, n_k i nodi adiacenti a u , con n_1, \dots, n_j i nodi adiacenti sia a u che a v , $1 \leq j \leq k - 1$ (questo perché durante la costruzione di G può essere aggiunto un numero di nodi a piacere). Se tra i discendenti di u lungo i nodi n_{j+1}, \dots, n_k vi fossero nodi a distanza > 2 , avremmo un arco non saturato e verrebbe meno la natura di trasversale di A . Perciò l'unica possibilità rimasta è che n_{j+1}, \dots, n_k siano foglie.

Per un qualsiasi $x \in A$ t.c. $\text{deg}(x) = r \geq 3$, colleghiamo con un arco ogni foglia adiacente a x con y_x . Possiamo ripetere questo passaggio per ogni nodo di A_ε , a patto che il nuovo grafo H mantenga la proprietà $\delta(H) = 1$ (ossia il nodo con grado minore ha grado 1); questa è una limitazione alla costruzione di \mathcal{G} , non vi sono motivazioni intrinseche per cui non si possa fare. Osserviamo che A rimane il trasversale minimo unico di H e definiamo \mathcal{H} come la famiglia di grafi costruiti in questo modo.

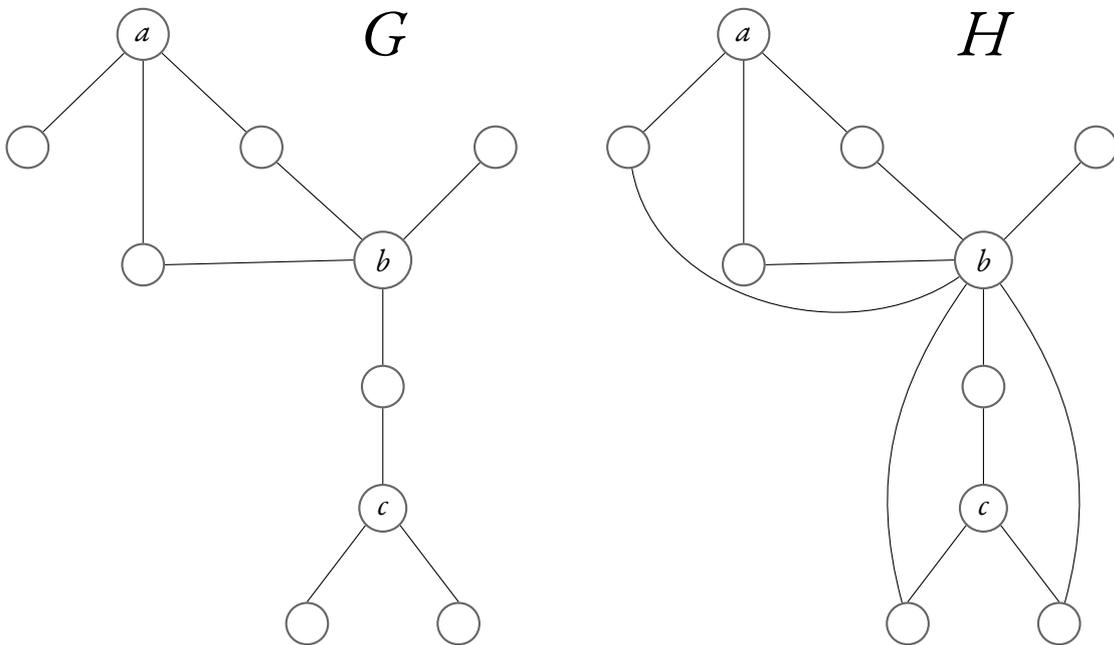


Immagine 4.3: Da $G \in \mathcal{G}$ costruiamo $H \in \mathcal{H}$; $A = \{a, b, c\}$ e $A_\varepsilon = \{a, c\}$.

DEFINIZIONE 4.1 Un nodo $x \in G$ si dice *separator* se la sua rimozione sconnette G . Un grafo si dice *biconnesso* se non possiede nodi separatori.

TEOREMA 4.1

$$evc(G) = 2 mvc(G) \iff G \in \mathcal{H}$$

Dimostrazione Per prima cosa, mostriamo che $evc(G) = 2 mvc(G) \implies G \in \mathcal{H}$. Sia X un trasversale minimo di G tale che $\langle X \rangle$ abbia il minor numero di componenti connesse possibile. Allora X non contiene nodi esterni di G , in quanto se $v \in X$ fosse un nodo esterno e u fosse il suo vicino, allora $u \notin X$ per la minimalità di X . Poiché X è un trasversale, ogni vicino di u deve essere in X per poter difendere l'arco tra lui e u . Dato che $deg(u) \geq 2$, avremmo infine che $\langle (X \setminus v) \cup u \rangle$ ha meno componenti connesse di $\langle X \rangle$. In parole povere, scambiando u con v nella scelta del trasversale minimo, il risultato sarebbe un grafo indotto con meno componenti connesse, contro l'ipotesi effettuata.

Se un qualche nodo in $V \setminus X$ fosse adiacente ad almeno tre nodi in X , allora esisterebbe un insieme D con al più $2 mvc(G) - 2$ nodi che contiene X e tale che $\langle D \rangle$ sia connesso. Per poter connettere il sottografo generato da X , infatti, dovremmo aggiungere nel peggiore dei casi un nodo per ciascun nodo di X ; tuttavia, se esistesse un nodo come da ipotesi, esso svolgerebbe la funzione di "connettore" per tre nodi, portando la stima a $2 mvc(G) - 2$. Per il Teorema 3.1, ne seguirebbe che $evc(G) \leq 2 mvc(G) - 1$, contro le ipotesi. Possiamo quindi affermare che $V \setminus X$ non possiede nodi adiacenti a più di due nodi di X .

Osserviamo ora che se $\langle X \rangle$ contenesse almeno un arco, allora possiederebbe al più $mvc(G) - 1$ componenti connesse. Per il Corollario 2, avremmo che $evc(G) \leq 2 mvc(G) - 1$, contro le ipotesi. Ne concludiamo quindi che X non contiene archi.

Per quanto appena visto, $X = \{x_1, \dots, x_{mvc(G)}\}$ è un insieme stabile (ossia è un insieme di nodi del grafo nessuno dei quali è adiacente agli altri), quindi G è bipartito ed ogni nodo in $V \setminus X$ è adiacente ad uno o due nodi in X (per cui $1 \leq deg(v) \leq 2 \forall v \in V \setminus X$). Per $i = 1, \dots, mvc(G)$, sia $V_i = epn(x_i, X)$ (ossia i vicini di x_i adiacenti solo e soltanto ad x_i). Per $i, j = 1, \dots, mvc(G)$, con $i \neq j$, sia $V_{ij} = N(x_i) \cap N(x_j)$ (ricordando che $N(x)$ è il sottografo generato dai nodi adiacenti ad x , x escluso). Avendo mostrato che X non contiene nodi esterni di G , ogni nodo esterno è in uno degli insiemi V_i . Ogni componente biconnessa (o *blocco*) B di G è isomorfo a K_2 (un arco) o $K_{2,r}$ con $r \geq 2$, ed i nodi separatori di B sono in X .

Sia G^* il grafo ottenuto lasciando un solo nodo in ogni insieme V_i e V_{ij} . Otteniamo un

grafo che non contiene 4 – *cicli* (cicli di lunghezza 4), in quanto se avessimo un 4-ciclo questo sarebbe $\{a, b, c, d\}$ con $a, c \in X$ e $b, d \in V \setminus X$; ma $N(b) = N(d) = \{a, c\}$, e nella costruzione di G^* dovremmo per forza rimuovere uno tra a e c , andando a rompere il 4-ciclo. Consideriamo tre possibili casi riguardo la struttura di G^* .

CASO I G^* contiene un ciclo C , per cui $G \notin \mathcal{H}$. Infatti, come visto nei precedenti paragrafi, un grafo in \mathcal{H} si ottiene a partire da un albero aggiungendo nodi e archi che fanno sì che alcuni nodi in G abbiano più di un vicino in comune. Se fosse $G \in \mathcal{H}$, la costruzione di G^* ci porterebbe ad avere un albero, che è aciclico. L'obiettivo sarà mostrare che è sempre possibile ricondursi ad una particolare configurazione di guardie per cui valga $evc(G) \leq 2 mvc(G) - 1$.

Poiché G^* non ha 4-cicli, allora $C \cong C_{2k}$ per un qualche $k \geq 3$ in quanto G è bipartito. Dato che in un grafo bipartito la cardinalità di un trasversale minimo è uguale a quella di un matching massimo, G^* ha un matching massimo che satura ogni nodo di X . Possiamo quindi scegliere il matching $M = \{x_i y_i : i = 1, \dots, mvc(G)\}$ tale che almeno un nodo $w \in X \cap V(C)$ sia accoppiato ad un altro nodo $w' \in V(C)$. Se così non fosse, ossia se avessimo $x_i \in V(C)$ e $y_i \notin V(C)$, detto y'_i un vicino di x_i nel ciclo C , potremmo scegliere il matching $(M \setminus x_i y_i) \cup x_i y'_i$ osservando che y'_i non è saturato da M . Detto x_1 il nodo di $X \setminus w$ nel ciclo C adiacente a w' , e detto Y il sottoinsieme di $V(G) \setminus X$ che contiene gli altri nodi del matching, definiamo $D = X \cup (Y \setminus y_1)$. Si ha dunque che, poiché $|Y| = |X| - 1$, allora $|D| = 2 mvc(G) - 1$.

La strategia di difesa inizia piazzando una guardia su ogni x_i e una guardia-ombra di x_i su ogni y_i , ad eccezione di y_1 . L'idea è quella di mantenere una guardia su ogni nodo x_i e un matching da X ai nodi protetti di $V(G) \setminus X$ che saturi tutti i nodi di X tranne uno. Questo matching determinerà le guardie-ombra s_i di ogni guardia $g(x_i)$. Il nodo non saturato da M in X non rimarrà lo stesso durante tutta la strategia di difesa, ma rimarrà nel ciclo C e la sua guardia, che manca di una guardia-ombra, la denotiamo con u . La guardia u sarà sempre adiacente all'ombra di un'altra guardia su un nodo in $X \cap V(C)$; chiamiamo *anchor guard* tale guardia ed indichiamo con a lei e con s la sua ombra. L'obiettivo è dunque quello di mantenere possibile il cammino u, s, a nel grafo G in ogni momento. La configurazione iniziale prevede quindi $g^{-1}(u) = x_1, g^{-1}(s) = w', g^{-1}(a) = w, g^{-1}(s_i) = y_i$. Ogni configurazione di guardie che soddisfa le condizioni sopra descritte verrà detta *equivalente a D*.

Consideriamo ora un attacco all'arco $x_i z_i$ di G , con $z_i \in V(G) \setminus X$; analizziamo i due possibili sottocasi:

- **Sottocaso I.1** x_i è in un ciclo di G^* .

- Se $g(x_i) \notin u, a$, è sufficiente spostare $g(x_i)$ in z_i e s_i in x_i , per poi ridefinire $s_i = g(z_i)$ come nuova guardia-ombra.
- Se $g(x_i) = a$, spostiamo $g(x_i)$ in z_i e s_i in x_i ; in questo modo viene però meno il cammino u, s, a . Chiamiamo allora x_j l'altro nodo in C a distanza 2 da $g^{-1}(u)$; l'assenza di 4-cicli ci garantisce che $x_i \neq x_j$.
 - * Se s_j è adiacente a u , allora ridefiniamo l'anchor guard: $g(x_j) = a$ e $s_j = s$.
 - * Se s_j non è adiacente a u , per prima cosa spostiamo $g(x_j)$ su un vicino di u e la guardia-ombra s_j diventa la nuova anchor guard. Dopo questa mossa, $g(x_j) = a$ e $s_j = s$.
- Infine, consideriamo il caso in cui $g(x_i) = u$. Sia $g(x_j) = a$ e sia x_k l'altro nodo in C a distanza 2 da x_j . Come già osservato, l'assenza di 4-cicli garantisce che $x_i \neq x_k$. Spostiamo ora u in z_i e s in x_i .
 - * Se z_i è un vicino sia di x_i che di x_j , è sufficiente scambiare i ruoli di $g(z_i)$ e s per mantenere il cammino u, s, a .
 - * In caso contrario, o $z_i \notin V(C)$ oppure z_i è adiacente a x_m , con $m \neq j$ l'altro nodo in C a distanza 2 da x_i (se $C \cong C_6$ si ha $m = k$). Chiamiamo $g(z_i) = s_i$ in modo che $g(x_i)$ ottenga un'ombra, e chiamiamo $g(x_j) = u$, così da rendere x_j la guardia u senza ombra.
 - Se $g^{-1}(s_k)$ è adiacente a x_j , chiamiamo $s_k = s$ e $g(x_k) = a$.
 - Se $g^{-1}(s_k)$ non è adiacente a x_j , prima spostiamo $g(x_k)$ in un vicino di s_k e spostiamo s_k in x_k , per poi chiamare $s_k = s$ e $g(x_k) = a$.

In ognuno dei precedenti casi, al termine degli spostamenti di guardie otteniamo una configurazione in cui ogni nodo di X è protetto da guardie, ognuna delle quali ha una guardia-ombra, tranne il singolo nodo $g^{-1}(u)$ all'interno del ciclo C . Per questo nodo abbiamo un'anchor guard a con $g^{-1}(a) \in X$, la cui ombra s è adiacente a u . possiamo dunque affermare di avere una configurazione equivalente a D .

- **Sottocaso 1.2** x_i non si trova in un ciclo di G^* . Allora s_i esiste e non si trova in un ciclo di G^* . L'esistenza è data dal fatto che $\deg(g^{-1}(s_i)) \geq 1$ in quanto il grafo è connesso. Inoltre, se si trovasse in un ciclo a cui x_i non appartiene, in quanto nodo adiacente ad x_i dovrebbe essere $\deg(g^{-1}(s_i)) \geq 3$, ma sappiamo che in G^* il grado massimo di un nodo non in X è 2. Se un qualche nodo z con $N_G(z) = N_G(z_i)$ è protetto da una guardia, spostiamo $g(x_i)$ in z_i e $g(z)$ in x_i , ottenendo una configurazione equivalente

a D . Supponiamo dunque non sia questo il caso, ossia che non esista un nodo z con tali proprietà.

Sia P il cammino $v, \dots, y_i, x_i, z, \dots, w$ in G^* , dove: $N_G(z) = N_G(z_i)$ (è possibile che sia $z = z_i$), $N_G(y_i) = N_G(g^{-1}(s_i))$, v e w sono nodi esterni oppure nodi ciclici di G^* (non necessariamente entrambi dello stesso tipo, e può accadere che $v = y_i$ o $w = z$), e nessuno dei nodi interni di P è nodo ciclico di G^* . Chiaramente tutti i nodi di P a distanza pari da x_i sono in X , e se v o w sono nodi ciclici di G^* allora sono anch'essi in X (in quanto hanno grado ≥ 3). Per il modo in cui è stato scelto D , il cammino P contiene inizialmente al più un nodo non protetto; infatti, almeno $\lfloor \frac{V(P)}{2} \rfloor$ nodi di P sono in X ed ognuno di essi è protetto da una guardia che a sua volta possiede una guardia-ombra. L'unica possibile eccezione è z , che abbiamo supposto non essere protetto, quindi ogni altro nodo di P deve essere protetto. Spostiamo quindi $g(x_i)$ in s_i e z_i in x_i .

- Se v è un nodo esterno di G , spostiamo tutte le guardie presenti in $v - g^{-1}(s_i)$, sotto-cammino di P , di un nodo verso $g^{-1}(s_i)$. Ogni guardia-ombra diventa quindi una guardia per un nodo in X , ed ogni guardia precedentemente in X diventa una guardia-ombra. In questa nuova configurazione esiste ancora un cammino simile a P con un unico nodo non protetto, v .
- Se v è un nodo esterno di G^* ma non di G , allora $v = x_j$ per un qualche j tale che $V_j = \emptyset$ (ossia v non ha vicini di grado 1). Detto P' il sotto-cammino di P da v a x_i , ogni nodo di X in P' è protetto da una guardia che possiede un'ombra in P' , il quale inizia e termina con un nodo di X . Esistono quindi nodi $x_k, x_l \in V(P')$ tali che le loro ombre s_k ed s_l proteggano nodi in V_{kl} (che è l'insieme dei nodi contemporaneamente adiacenti a x_k e x_l in G). Senza perdita di generalità, possiamo supporre che x_k preceda x_l nel cammino P . Per prima cosa spostiamo $g(x_i)$ in z_i e s_i in x_i , poi spostiamo le guardie in $s_l - g^{-1}(s_i)$, sotto-cammino di P , di un nodo verso $g^{-1}(s_i)$. Infine, spostiamo $g(x_k)$ in uno dei nodi di V_{kl} e s_k in x_k . Per la nuova configurazione esiste un cammino simile a P in cui ogni nodo è protetto da guardie.
- Se v non è un nodo esterno di G^* , allora è un nodo ciclico di G^* e chiamiamo tale ciclo C' . Considero il nodo adiacente a v in P e lo chiamiamo v' . spostiamo le guardie in $v' - g^{-1}(s_i)$, sotto-cammino di P , di un nodo verso $g^{-1}(s_i)$. Spostiamo poi le guardie in v e C' in accordo a quanto visto nel sotto-caso 1.1. Per la nuova configurazione esiste un cammino simile a P in cui ogni nodo è protetto da guardie.

Poiché ogni nuova configurazione è equivalente a D , anche per il sotto-caso 1.2 è stato mostrato che $evc(G) \leq 2mvc(G) - 1$. Con questo si può concludere che se G^* contiene almeno un ciclo, allora $evc(G) \leq 2mvc(G) - 1$, quindi $G \notin \mathcal{H}$.

CASO 2 G^* è aciclico e $\delta(G) \geq 2$, oppure G^* è aciclico, $\delta(G) = 1$ e G ha un 4-ciclo come *blocco esterno* (un blocco con un unico nodo separatore). Verrà mostrato che $evc(G) < 2 mvc(G)$. Poiché G^* è aciclico, ha $mvc(G) - 1$ cammini di lunghezza 2 che connettono nodi di X , che equivale a dire che $V_{ij} \neq \emptyset$ per esattamente $mvc(G) - 1$ coppie i, j . Posizioniamo una guardia su ciascun x_i ed una guardia-ombra s_{ij} su un nodo v_{ij} in ciascuno dei V_{ij} non vuoti.

- Se $\delta(G) \geq 2$, allora $G \notin \mathcal{H}$ e $V_i = \emptyset$ per ogni $i = 1, \dots, mvc(G)$. Se un nodo z non è protetto, allora $z \in V_{ij}$ per una qualche coppia i, j . Per difendere un attacco sull'arco $x_i z$, è sufficiente spostare $g(x_i)$ in z e s_{ij} in x_i . Quindi G può essere protetto da $2 mvc(G) - 1$ guardie.
- Se $\delta(G) = 1$ e G possiede un 4-ciclo B come blocco esterno, osserviamo che il nodo di B a distanza 2 dal nodo separatore è in X , e lo chiamiamo x_1 (è in X in quanto il nodo separatore ha grado ≥ 2 e G è bipartito). Fino a che le foglie di G non sono protette, la strategia per proteggere archi incidenti a nodi di V_{ij} è la stessa vista nel caso $\delta(G) \geq 2$.
 - Per difendere un attacco su un arco $x_k l$ in cui l è una foglia, si procede come segue. Assumiamo senza perdita di generalità che $P = x_1, v_{1,2}, x_2, \dots, v_{k-1,k}, x_k, l$ sia il cammino da x_1 ad l in G^* . Allora ogni nodo di P è protetto da una guardia, e le guardie-ombre s_{ij} si trovano nei v_{ij} . In G , spostiamo le guardie nei nodi di P un nodo più vicino ad l , ad eccezione di x_1 ; l'intento è di mantenere protetto x_1 in quanto parte del 4-ciclo. Se successivamente verrà attaccato l'arco $x_2 z$, con $z \in V_{1,2}$, sarà sufficiente ripristinare lo spostamento appena effettuato.
 - Se nella configurazione di guardie una foglia di G è protetta, consideriamo un attacco all'arco $x_m z$ dove $z \in V_{mj}$ per un qualche j , e un nodo di V_{mj} è protetto da una guardia-ombra. In questo caso la strategia di difesa è uguale a quella vista nel caso precedente.
 - Se nella configurazione di guardie una foglia di G è protetta, diciamo l , consideriamo un attacco all'arco $x_m z$ dove z è una foglia. Per un qualche $j = 2, \dots, k$ esiste un cammino Q' in G^* da z a x_j . Sia Q il cammino in G^* da z a l composto da Q' seguito dal sotto-cammino $x_j - l$ di P . La strategia di difesa consiste nello spostare tutte le guardie in Q di un nodo verso z .
 - Consideriamo infine la situazione in cui, dato un cammino P come precedentemente definito, la foglia l sia protetta da una guardia e vi sia un attacco all'arco $x_1 z$. Spostiamo $g(x_1)$ in z , $g(x_2)$ nell'altro nodo di $V_{1,2}$ e ripristiniamo tutti gli spostamenti di guardie effettuati per proteggere l'arco $x_k l$. Otteniamo quindi una nuova configurazione di guardie, ma la strategia di difesa rimane pressoché inalterata: ogniqualvolta una guardia in $V_{1,2}$ si sposta su x_2 , l'altra guardia in $V_{1,2}$ si sposta in x_1 .

In ognuno di questi casi è stato mostrato che G può essere difeso da $2mvc(G) - 1$ guardie. Inoltre, nessuno dei grafi considerati appartiene a \mathcal{H} ; nei casi analizzati, infatti, o $\delta(G) \geq 2$ oppure G possiede un blocco esterno che non è né un arco né isomorfo a $K_{2,r}$ con $r \geq 3$, caratteristiche necessarie da quanto visto nella costruzione della classe \mathcal{H} .

CASO 3 G^* è aciclico, $\delta(G) = 1$ e nessun blocco esterno di G è un 4-ciclo. Si distinguono due sotto-casi in base alla presenza o meno di un blocco esterno isomorfo a $K_{2,r}$ con $r \geq 3$. In entrambi, verrà provato che $G \in \mathcal{H}$.

- **Sottocaso 3.1** Ogni blocco esterno di G è un arco. X è stabile, non contiene foglie di G o G^* ed ogni nodo interno di G^* non in X è adiacente ad esattamente due nodi in X . Quindi G^* ha esattamente $2mvc(G) - 1$ nodi interni. Inoltre, G^* soddisfa le condizioni P_1, P_2, P_3 per gli alberi della classe \mathcal{T} , dunque $G^* \in \mathcal{T}$. Tenendo a mente come è stato costruito G^* , si può risalire a G aggiungendo $|V_i| - 1$ nuove foglie ad ogni nodo x_i , ottenendo ancora un albero $T \in \mathcal{T}$, per poi unire ogni coppia di nodi $x_i, x_j \in X$ a distanza 2 l'uno dall'altro con $|V_{ij}| - 1$ nuovi nodi. Si ottiene dunque un grafo $G \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$.
- **Sottocaso 3.2** G possiede almeno un blocco esterno isomorfo a $K_{2,r}$ con $r \geq 3$. Per ognuno di tali blocchi B_i , chiamiamo $x_i \in X$ il nodo di G di grado r e $x_j \in X$ l'unico nodo di G a distanza 2 da x_i . Detti $z_1, \dots, z_k \in V_{ij}$ con $1 \leq k < |V_{ij}|$, costruiamo il grafo G' cancellando gli archi z_1x_j, \dots, z_kx_j . Definiamo dunque V'_i, V'_{ij} e G'^* in modo analogo a quanto fatto in precedenza. Allora ogni blocco esterno di G' è un arco, e $V'_{ij} \neq \emptyset$ quando $V_{ij} \neq \emptyset$. In modo analogo a quanto visto nel sottocaso 3.1, possiamo affermare che $G'^* \in \mathcal{T}$ e che $G' \in \mathcal{G}$. Poiché la costruzione di G' a partire da G utilizza i passaggi inversi della costruzione della classe \mathcal{H} a partire dalla classe \mathcal{G} , possiamo quindi affermare che $G \in \mathcal{H}$.

Quanto visto conclude la dimostrazione del fatto che $evc(G) = 2mvc(G) \implies G \in \mathcal{H}$.

Rimane ora da dimostrare l'altra implicazione, ossia $G \in \mathcal{H} \implies evc(G) = 2mvc(G)$. Si consideri un grafo $G \in \mathcal{H}$ con trasversale minimo $X = \{x_1, \dots, x_{mvc(G)}\}$, e siano V_i e V_{ij} definiti come nei precedenti paragrafi. Per una qualsiasi coppia $x_i, x_j \in X$ tale che $d(x_i, x_j) = 2$, il sottografo di G indotto da $x_i, x_j \cup V_{ij}$ è isomorfo a $K_{2,r}$ con $r = |V_{ij}|$, mentre il sottografo indotto da $x_i \cup V_i$ è isomorfo a $K_{1,r}$ con $r = |V_i|$ (detto anche *stella*). Quando $V_{ij}, V_i \neq \emptyset$, chiamiamo i sottografi $\langle x_i, x_j \cup V_{ij} \rangle$ e $\langle x_i \cup V_i \rangle$ *frammenti* di G . I nodi in X sono dunque o separatori di G o nodi di grado $r \geq 3$ che appartengono ad un

frammento di tipo $K_{2,r}$. Il grafo G_* , ottenuto come in precedenza, è in questo caso un albero; i frammenti di G formano quindi una struttura simile ad un albero.

Prima di procedere con la dimostrazione vera e propria, è utile definire alcuni termini. Un nodo $x \in X$ viene detto *nodo ramificante* se è contenuto in almeno tre frammenti. Viene detto *frammento esterno* un frammento che contiene esattamente un nodo separatore, ossia un frammento isomorfo a $K_{1,r}$ oppure isomorfo ad un $K_{2,r}$ che contiene un nodo x_i di grado $r \geq 3$. Data la struttura di G , assimilabile a quella di un albero, è possibile fissare un nodo esterno v come radice e immaginare che la direzione di tutti gli archi sia in allontanamento da v . In questo caso, definiremo i *livelli* del grafo radicato G come i livelli dell'albero G^* con radice v .

Sia D un qualsiasi insieme di $2 \text{mvc}(G) - 1$ nodi di G ; piazziamo una guardia su ogni nodo di D . Un frammento ha una *equa distribuzione di guardie* se è una stella ed ha una guardia oppure se è del tipo $K_{2,r}$ ed ha tre guardie. Un frammento S ha *divario k di guardie* se k è la differenza tra il numero di guardie in S e il numero di guardie in un'equa distribuzione per S (k può essere anche negativo o zero). Si considerino i sottografi-frammenti di G consistenti in frammenti di G e stelle $K_{1,r}$ ottenute rimuovendo un nodo da un frammento $K_{2,r}$. Un *cammino di frammenti* è un sottografo-frammento connesso in cui ogni nodo separatore è contenuto in esattamente 2 frammenti. Si dice che un sottografo-frammento H è *sguarnito*, *neutro* o *avvantaggiato* se la somma dei divari di guardie effettuata sui frammenti di H è rispettivamente negativa, zero o positiva. Se G è radicato ed H è un frammento sguarnito (ossia un sottografo-frammento che consiste di un unico frammento) in G , allora almeno uno dei livelli di H non è protetto da guardie. Un tale livello viene detto *livello sguarnito*.

Poiché G^* ha esattamente $\text{mvc}(G) - 1$ nodi con due vicini in X , e $|X| = \text{mvc}(G)$, possiamo posizionare $2 \text{mvc}(G) - 1$ guardie in G^* (e quindi su G) in modo tale che ogni frammento abbia un divario di guardie nullo. Dato che lo spostamento di guardie non cambia il divario totale di guardie in G , se ne deduce che G è neutrale dopo ogni spostamento.

Mostriamo ora che $2 \text{mvc}(G) - 1$ guardie non sono sufficienti a proteggere G . Supponiamo per assurdo che la configurazione D protegga G , e seguiamo la dimostrazione della Proposizione 2.3. Poiché $\delta(G) = 1$, G ha un nodo esterno l che consideriamo come radice di G . Prima o dopo un attacco su un arco incidente ad l , l contiene una guardia. Se G possiede nodi ramificanti, sia b_0 il nodo ramificante più vicino a l . Si ha $b_0 \in X$ in quanto b_0 ha grado ≥ 3 . Sia Q_0 il cammino di frammenti in G da l a b_0 .

Se un qualche frammento di Q_0 è sguarnito, chiamiamo S_0 il frammento sguarnito più vicino ad l , e chiamiamo u_0 un nodo in uno dei livelli sguarniti di S_0 . Poiché D è un trasver-

sale, u_0 ha un figlio protetto da una guardia. Dato che tutti i figli di u_0 sono nello stesso livello, sia v_0 uno qualsiasi dei figli di u_0 . L'unico modo di difendere un attacco sull'arco u_0v_0 è spostare $g(v_0)$ in u_0 . È possibile muovere altre guardie, ma nessuna guardia su un antenato di u_0 può muoversi ad un livello inferiore di quello di u_0 . Per questo motivo, solamente le guardie che proteggono i discendenti di u_0 possono difendere un arco su un livello inferiore a quello di u_0 . Una sequenza di attacchi porta ad una configurazione di guardie in cui nessun frammento di Q_0 è sguarnito, ed il frammento contenente l è avvantaggiato (ossia ha più guardie di quelle presenti in un'equa distribuzione). Poiché G è neutrale esiste c_1 figlio di b_0 tale che il frammento-sottografo G_1 di G , indotto dalla stella contenente c_1 e dai discendenti di c_1 , è sguarnito. Sia b_1 , se esiste, il nodo ramificante di G_1 più vicino a c_1 e sia Q_1 il cammino di frammenti in G_1 da c_1 a b_1 . Se un frammento S_1 di Q_1 è sguarnito, consideriamo il nodo u_1 in un livello sguarnito di S_1 e ripetiamo la precedente sequenza di attacco e difesa fino a che nessun frammento in Q_1 è sguarnito. Si noti che durante questo procedimento nessuna guardia di un nodo nel cammino da G a G_1 può spostarsi in un livello di G_1 inferiore a quello di u_1 . Così come per b_0 , anche b_1 ha un figlio c_2 tale che il frammento-sottografo G_2 di G , indotto dalla stella contenente c_2 e dai discendenti di c_2 , è sguarnito.

Ripetendo questo processo si giunge eventualmente ad un G_k sguarnito che non contiene nodi ramificanti, ossia G_k è un cammino di frammenti. Senza perdita di generalità, si supponga che il frammento sguarnito S di G_k sia il frammento esterno di G contenuto in G_k ; se così non fosse, si potrebbe continuare la difesa degli archi nei frammenti precedenti come visto sopra. Se $S \cong K_{1,r}$ allora S non contiene guardie (se ne avesse non sarebbe sguarnito), quindi gli archi adiacenti a foglie non sono protetti in caso di attacco. Se $S \cong K_{2,r}$ con $r \geq 3$, allora S contiene al più due guardie. Siano x e y i nodi di grado r in S , dove x ha grado r anche in G (ossia x è il nodo di G_k alla massima distanza da l). Sia poi $N(x) \cap N(y) = \{z_1, \dots, z_r\}$. Se x non è protetto, allora al più due nodi in $\{z_1, \dots, z_r\}$ sono protetti da una guardia; ma $r \geq 3$, per cui almeno un arco xz_i non è protetto in caso di attacco. Assumiamo dunque che x sia protetto. Se un nodo z_i , diciamo z_1 , è protetto, allora y non è protetto in quanto S è sguarnito; ne segue che l'arco yz_2 non è protetto in caso di attacco. Va quindi supposto che nessun nodo z_i sia protetto, e che le due guardie siano in x e y . Per difendere un attacco in xz_1 , si deve per forza spostare $g(x_1)$ in z_1 . In questo modo però si lasciano scoperti xz_2 e xz_3 ; vanno spostate delle guardie in z_2 e z_3 , ma abbiamo una sola guardia a disposizione.

Si è così mostrato che $2 \text{mvc}(G) - 1$ guardie non sono sufficienti a proteggere G , quindi per forza di cose $\text{evc}(G) = 2 \text{mvc}(G)$, e la dimostrazione ha termine. \square

5

Caratterizzazione per $evc = mvc$

La domanda che sorge spontanea a questo punto é: per quali grafi vale $evc(G) = mvc(G)$? Per quanto non si sappia ancora dare una risposta definitiva a tale domanda nel caso generale, Babu et al. [2] presentano delle condizioni necessarie e delle condizioni sufficienti, per poi andare ad analizzare una particolare classe di grafi per cui si è in grado di caratterizzare con esattezza la proprietà.

PROPOSIZIONE 5.1 [CONDIZIONE SUFFICIENTE]

Se G possiede due trasversali minimi disgiunti, e ogni arco di G è contenuto in un matching massimo, allora $evc(G) = mvc(G)$.

Dimostrazione Siano A_1 e A_2 i due trasversali minimi disgiunti di G . Sia A_1 che A_2 sono indipendenti (cioè i nodi del sottoinsieme non sono adiacenti) e ogni arco unisce un nodo di A_1 con un nodo di A_2 . Questo perchè ogni arco di G unisce solamente due nodi, e se ogni nodo di A_1 o A_2 satura ogni arco, non possiamo avere due nodi adiacenti nello stesso insieme. Ne segue che G è bipartito, quindi la cardinalità di un matching massimo è uguale a quella di un trasversale minimo; allora il matching è perfetto e unisce nodi di A_1 con nodi di A_2 .

Piazziamo una guardia su ogni nodo di A_1 . Consideriamo un arco uv , con $u \in A_1$, e chiamiamo M il matching perfetto contenente uv . Per difendere un attacco su uv , muoveremo tutti i nodi da A_1 ad A_2 lungo gli archi di M . Potendo ripetere questa strategia a volontà, otteniamo che $evc(G) = mvc(G)$. \square

OSSERVAZIONE 5.1

Entrambe le ipotesi sono richieste per poter verificare l'asserto precedente.

Si prenda ad esempio il cammino $P_{2n} = v_1, \dots, v_{2n}$ con $n \geq 2$: possiede due trasversali minimi A_1 e A_2 , con $A_1 = \{v_1, v_3, \dots, v_{2n-1}\}$ e $A_2 = \{v_2, v_4, \dots, v_{2n}\}$, ma l'unico matching massimo è $M = \{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2n-1}v_{2n}\}$ con cardinalità $|M| = n$. Un cammino è bipartito, per cui $mvc(P_{2n}) = |M| = n$; dalla Proposizione 1.2, però, sappiamo che $evc(P_{2n}) = 2n - 1 > n$ per $n \geq 2$.

Sia invece S_n il grafo a stella con $n + 1$ nodi. Ogni arco di S_n è contenuto in un matching massimo di cardinalità 1, ma vi è un unico trasversale minimo (composto dal solo nodo centrale). Essendo S_n un albero in cui si hanno n foglie e $n + 1$ nodi, dal Corollario 3.1 si ottiene che $evc(S_n) = [(n + 1) - n] + 1 = 2 > 1$.

D'altro canto, le condizioni della Proposizione 5.1 non sono necessarie affinché $evc(G) = mvc(G)$. Dalla Proposizione 2.1 sappiamo che per ogni ciclo C_n (che ricordo essere il ciclo con n nodi) vale $evc(C_n) = mvc(C_n)$, ma nel caso in cui n sia dispari non possiamo avere due trasversali minimi disgiunti, in quanto avremmo che $\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n + 1$.

PROPOSIZIONE 5.2

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso non banale.

$$evc(G) = mvc(G) \implies \forall v \in V, G \text{ ha un trasversale minimo } S_v \text{ contenente } v$$

Dimostrazione Supponiamo valga $evc(G) = mvc(G)$, e sia \mathcal{C} la famiglia di eternal vertex cover minimi di G (ossia in cui ogni configurazione ha esattamente $mvc(G)$ nodi). Consideriamo un qualsiasi nodo $v \in V$. Se una configurazione in \mathcal{C} non prevede una guardia in v , un attacco su un arco adiacente a v farà sì che la successiva configurazione avrà una guardia in v . Poichè ogni trasversale in \mathcal{C} è minimo, segue la tesi. \square

Questa condizione necessaria non è però sufficiente; lo si può vedere prendendo in esame il cammino P_{2n} , $n > 1$. Come visto nella Osservazione 5.1, P_{2n} possiede due trasversali minimi disgiunti di cardinalità n , per cui ogni nodo apparterrà all'uno o all'altro; tuttavia, sappiamo che $evc(P_{2n}) = 2n - 1 > n$ per $n > 1$. Serve quindi una condizione più forte per poter generalizzare la Proposizione 5.2.

DEFINIZIONE 5.1 Sia $G = (V, E)$; sia $U \subseteq V$, e definiamo $evc_U(G)$ come il più piccolo intero k tale che G possieda una famiglia \mathcal{C} di eternal vertex cover in cui ogni configurazione è un trasversale di cardinalità k che contiene tutti i nodi in U . Definisco $mvc_U(G)$ come la minima cardinalità di un trasversale di G che contiene tutti i nodi di U . Osserviamo che quando $U = \emptyset$, $mvc_U(G) = mvc(G)$ e $evc_U(G) = evc(G)$.

PROPOSIZIONE 5.3

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso non banale, con $U \subseteq V$.

$$evc_U(G) = mvc_U(G) \implies \forall v \in V \setminus U, mvc_{U \cup v}(G) = mvc_U(G)$$

Dimostrazione Sia \mathcal{C} la famiglia di eternal vertex cover di G in cui ogni configurazione contiene tutti i nodi di U e ha cardinalità uguale a quella del più piccolo trasversale che contiene tutti i nodi di U . Consideriamo un nodo $v \in V \setminus U$; se una configurazione di \mathcal{C} non prevede una guardia in v , un attacco su un arco adiacente a v farà sì che la successiva configurazione avrà una guardia in v . Pertanto, essendo la cardinalità di ogni configurazione in \mathcal{C} la stessa, otteniamo la tesi. La famiglia relativa \mathcal{C}_v sarà più piccola di \mathcal{C} ma la cardinalità delle loro configurazioni sarà uguale. \square

PROPOSIZIONE 5.4

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso. Sia $X \subseteq V$ l'insieme dei nodi separatori di G . Se $evc(G) = mvc(G)$, allora per ogni famiglia \mathcal{C} di eternal vertex cover minimi di G , ogni configurazione di \mathcal{C} è un trasversale contenente tutti i nodi di X . Di conseguenza, si ha che $evc_X(G) = mvc_X(G) = evc(G) = mvc(G)$.

Dimostrazione Sia $evc(G) = mvc(G) = k$. Se $X = \emptyset$, la conclusione è immediata; sia quindi $X \neq \emptyset$. Mostriamo che per ogni famiglia \mathcal{C} di eternal vertex cover minimi di G , tutti i nodi separatori di G sono protetti da guardie in ogni configurazione.

Sia x un nodo separatore di G ; detta $H = (V_H, E_H)$ una componente connessa di $\langle V \setminus \{x\} \rangle$ (il grafo ottenuto rimuovendo il nodo x), chiamiamo $H_1 = \langle V_H \cup \{x\} \rangle$ e $H_2 = \langle V \setminus V_H \rangle$. H_1 e H_2 hanno in comune il solo nodo x e sono disgiunti per archi. Sia $k_1 = mvc(H_1)$ e $k_2 = mvc(H_2)$; mostriamo che $k = mvc(G) \in \{k_1 + k_2 - 1, k_1 + k_2\}$.

Se per assurdo gli unici trasversali minimi per H_1 e per H_2 fossero degli S_i ed S_j tali che $x \notin S_i, S_j$, avremmo che $S_i \cup S_j$ sarebbero gli unici trasversali minimi per G , che a loro volta

non conterrebbero x . Dalla Proposizione 5.2 sappiamo però che ciò non è possibile in quanto esiste una configurazione $S \in \mathcal{C}$ con $x \in S$, per cui esisterà sempre una famiglia di trasversali minimi di H_1 o una di H_2 (oppure entrambe) da cui sceglierne uno che avrà la stessa cardinalità di un trasversale minimo contenente il nodo x . Possiamo quindi affermare che $k_1 = |S \cap V_{H_1}|$ o $k_2 = |S \cap V_{H_2}|$, oppure sono valide entrambe le uguaglianze.

Se valgono entrambe le uguaglianze, allora $k = k_1 + k_2 - 1$ (in quanto stiamo contando due volte il nodo x), perciò G possiede solo trasversali minimi che contengono x (un trasversale minimo che non contiene x , infatti, avrebbe cardinalità $= k_1 + k_2$). Questo implica che in ogni configurazione in \mathcal{C} , il nodo x è protetto da una guardia.

Possiamo quindi, senza perdita di generalità, considerare il caso in cui vale solamente $k_2 = |S \cap V_{H_2}|$, ossia quando solo H_1 non possiede trasversali minimi contenenti x . Se x non è protetto da una guardia in una certa configurazione $S' \in \mathcal{C}$, deve valere $|S' \cap V_{H_1}| = k_1$ e $|S' \cap V_{H_2}| = k_2$. In questa configurazione, consideriamo un attacco sull'arco ux in H_1 ; la guardia in u deve muoversi da u a x . Questo non è tuttavia possibile perchè H_1 possiede solamente k_1 guardie e non abbiamo trasversali minimi contenenti x di cardinalità k_1 . Ne deduciamo quindi che x deve sempre essere protetto da una guardia in qualunque configurazione di \mathcal{C} .

Dall'arbitrarietà di x , ne segue che tutti i nodi di X devono essere protetti da guardie in tutte le configurazioni della famiglia \mathcal{C} , per cui $evc_X(G) = mvc_X(G) = evc(G) = mvc(G)$. \square

TEOREMA 5.1 [CONDIZIONE NECESSARIA]

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso non banale. Sia $X \subseteq V$ l'insieme dei nodi separatori di G . Se $evc(G) = mvc(G)$, allora $\forall v \in V \setminus X$ esiste un trasversale minimo S_v di G tale che $X \cup \{v\} \subseteq S_v$.

Dimostrazione Supponiamo valga $evc(G) = mvc(G)$; dalla Proposizione 5.4 abbiamo che $evc_X(G) = mvc_X(G) = mvc(G)$. Per la Proposizione 5.3 sappiamo che $\forall v \in V \setminus X$ vale $mvc_{X \cup \{v\}}(G) = mvc_X(G)$. Unendo le due, otteniamo che $\forall v \in V \setminus X$ si ha $mvc_{X \cup \{v\}} = mvc(G)$. Ciò vuol dire che esiste un trasversale minimo contenente tutti i nodi separatori e il nodo v , da cui la tesi. \square

OSSERVAZIONE 5.2 [CONTROESEMPIO]

Un'interessante osservazione che segue dal teorema è che se $evc(G) = mvc(G)$, allora G deve avere un trasversale minimo contenente tutti i nodi separatori. Il teorema appena visto offre una condizione necessaria più forte di quella osservata nella Proposizione 5.2, pur non

essendo comunque una condizione sufficiente.

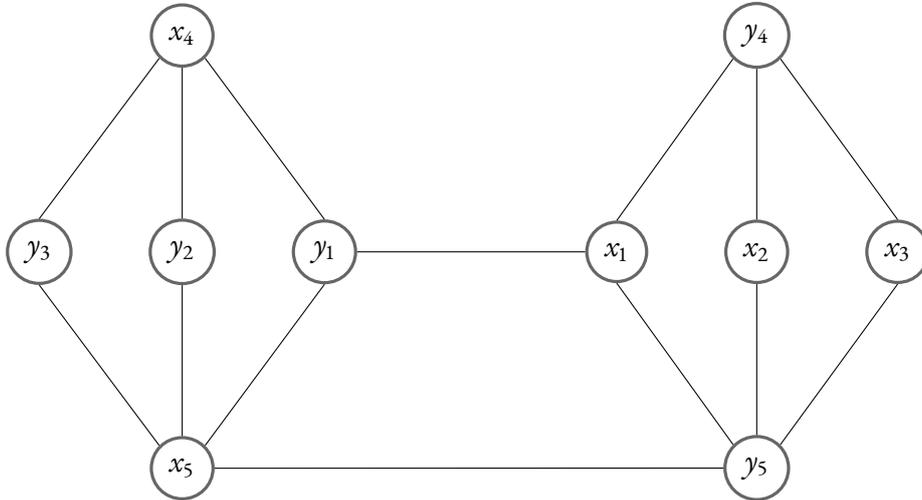


Immagine 5.1: Il grafo $G = (X, Y, E)$ portato come controesempio.

Si consideri infatti il grafo $G = (X, Y, E)$, con $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ illustrato qui sopra. G non ha nodi separatori (è biconnesso), per cui l'insieme dei nodi separatori è \emptyset . Si osserva anche che ogni nodo v di G è contenuto in un trasversale minimo S (X oppure Y) tale che $v \subseteq S$. È facile notare come $mvc(G) = 5$, e come l'unico trasversale minimo contenente x_2 sia $S_{x_2} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Per difendere un attacco su un arco incidente in x_2 , dunque, le guardie devono per forza di cose muoversi nella configurazione S_{x_2} . Successivamente, un attacco sull'arco x_5y_5 obbliga le guardie a spostarsi in una configurazione contenente y_5 . Gli unici trasversali minimi contenenti y_5 sono $S_1 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, $S_2 = \{x_1, x_4, x_5, y_4, y_5\}$, $S_3 = \{y_1, y_4, y_5, x_4, x_5\}$. Poiché l'arco x_5y_5 non appartiene ad alcun matching massimo di G , non si può passare dalla configurazione S_{x_2} alla configurazione S_1 perché $x_5 \notin S_1$. In seguito all'attacco su x_5y_5 , quando la guardia in x_5 si sposta in y_5 nessuna altra guardia può spostarsi in x_5 in quanto nessuno dei vicini di x_5 è protetto da una guardia in S_{x_2} . Per questo motivo, né S_2 né S_3 sono configurazioni valide in quanto presentano una guardia in x_5 . Ciò dimostra che $evc(G) \neq mvc(G)$, e prova che la condizione espressa dal Teorema 5.1 non sia sufficiente, ma solo necessaria.

COROLLARIO 5.1

Per ogni grafo G connesso con almeno tre vertici e grado minimo 1, vale

$$evc(G) \neq mvc(G)$$

Dimostrazione Se esiste un nodo di grado 1, il suo vicino è un nodo separatore, e non possono essere entrambi in un trasversale minimo (poichè lo stesso insieme a cui sottraggo il nodo di grado 1 sarebbe un trasversale con cardinalità minore). \square

LA CLASSE \mathcal{F}

La famiglia di grafi \mathcal{F} consiste di tutti i grafi $G = (V, E)$ per cui ogni trasversale minimo contenente tutti i nodi separatori di G induce un sottografo connesso.

Fanno parte della classe \mathcal{F} :

- i grafi localmente connessi, ovvero i grafi G in cui $N(v)$ induce un grafo connesso $\forall v \in G$.
- i grafi cordali, ovvero i grafi in cui per ogni ciclo di lunghezza ≥ 4 esiste un arco non appartenente al ciclo che connette due nodi del ciclo.
- i grafi in cui ogni trasversale minimo induce un sottografo connesso.

NOTAZIONI

$\forall U \subseteq V$, indichiamo con $\langle U \rangle$ il sottografo indotto su G dall'insieme U . Un trasversale S di G è detto *trasversale connesso* se $\langle S \rangle$ è connesso.

TEOREMA DI HALL [3]

Sia $G = (X, Y, E)$ un grafo bipartito finito, dove X e Y sono gli insiemi di partizione ed E è l'insieme degli archi. Dato $W \subseteq X$, $N_G(W)$ indica l'insieme dei nodi di Y adiacenti ad almeno un nodo di W .

Esiste un matching che satura tutti i nodi di $X \iff \forall W \subseteq X$ vale $|W| \leq |N_G(W)|$

LEMMA 5.1

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso non banale. Sia $U \subseteq V$ e supponiamo che ogni trasversale S di G con cardinalità $mvc_U(G)$ che contiene U sia connesso. Allora vale:

$$\forall v \in V \setminus U, mvc_{U \cup \{v\}}(G) = mvc_U(G) \implies evc_U(G) = mvc_U(G)$$

Dimostrazione Sia $k = mvc_U(G)$ e supponiamo che ogni trasversale S di G con $U \subseteq S$ e $|S| = k$ sia connesso.

Supponiamo inoltre che $\forall v \in V \setminus U, mvc_{U \cup \{v\}}(G) = k$. Mostreremo l'esistenza di una famiglia \mathcal{C} di eternal vertex cover di G con esattamente k guardie, tale che in ogni configurazione di \mathcal{C} tutti i nodi di U siano protetti.

Quale configurazione iniziale si può considerare un trasversale S come da ipotesi. È sufficiente mostrare che, partendo da un trasversale S_i di G con $U \subseteq S_i$ e $|S_i| = k$, un attacco sull'arco uv con $u \in S_i, v \notin S_i$ può essere difeso spostandosi su una configurazione S_j tale che $U \cup \{v\} \subseteq S_j$ e $|S_j| = k$.

Consideriamo quindi un attacco su un arco uv tale che $u \in S_i, v \notin S_i$. Sia Γ l'insieme dei trasversali di G con cardinalità k e che contengono sia il nodo v che tutti i nodi di U . Mostreremo che è possibile difendersi dall'attacco su uv muovendosi da una configurazione S_i ad una S_j , dove $S_j \in \Gamma$ è un trasversale tale per cui $|S_i \Delta S_j|$ sia minima.

Sia $T = S_i \cap S_j$, quindi $S_i = T \uplus A$ e $S_j = T \uplus B$. Poichè S_i è un trasversale di G disgiunto da B , B è un insieme indipendente (nessuno dei suoi nodi è adiacente ad un altro). In modo analogo, anche A è un insieme indipendente. Di conseguenza, $H = \langle A \uplus B \rangle$ è un grafo bipartito. Inoltre, poichè $|S_i| = |S_j|$, ne segue che $|A| = |B|$.

Affermazione 1 H ha un matching perfetto.

Dimostrazione Osserviamo che $U \subseteq T$. Consideriamo un insieme $B' \subseteq B$. Poichè

$S_i = T \uplus A$ è un trasversale di G , abbiamo che $N_G(B') \subseteq T \uplus A$. Se $|N_H(B')| < |B'|$, allora $S' = T \uplus (B \setminus B') \uplus N_H(B')$ è un trasversale di cardinalità $< k$ e tale che $U \subseteq S'$, contro l'ipotesi che $mv_U(G) = k$. Abbiamo allora che $\forall B' \subseteq B, |N_H(B')| \geq |B'|$; per il Teorema di Hall, si ha che H ha un matching perfetto. \square

Poichè $v \in S_j \setminus S_i$, si ha che $|A| = |B| \geq 1$.

Affermazione 2 $\forall x \in A$, il grafo bipartito $H \setminus \{x, v\}$ ha un matching perfetto.

Dimostrazione Se $H \setminus \{x, v\}$ è vuoto, l'asserto è verificato dall' Affermazione 1; supponiamo quindi che non sia vuoto. Consideriamo un insieme non vuoto $B' \subseteq (B \setminus \{v\})$. Grazie all' Affermazione 1, sappiamo che $|N_H(B')| \geq |B'|$. Se $|N_H(B')| = |B'|$, allora $S' = T \uplus (B \setminus B') \uplus N_H(B')$ è un trasversale di G con $|S'| = k$ e $(U \cup \{v\}) \subseteq S'$. Ma allora $|S_i \Delta S'| = |A \cup (B \setminus B')| < |A \cup B| = |S_i \Delta S_j|$, contraddicendo il fatto che S_j sia stato scelto per minimizzare la differenza simmetrica. Abbiamo quindi che $|N_H(B')| \geq |B'| + 1$ e $|N_H(B') \setminus \{x\}| \geq |B'|$. Dal Teorema di Hall, segue che $H \setminus \{x, v\}$ ha un matching perfetto. \square

Possiamo ora completare la dimostrazione del Lemma 1, descrivendo come un attacco sull'arco uv può essere difeso.

Caso 1. $u \in A$:

Per l' Affermazione 2, esiste un matching perfetto M in $H \setminus \{u, v\}$. Per difendere l'attacco, spostiamo $g(u)$ in v e contemporaneamente muoviamo ogni guardia in $A \setminus \{u\}$ su $B \setminus \{v\}$ lungo gli archi di M .

Caso 2. $u \in T$:

Ricordo che $|A| = |B| \geq 1$. Dalle ipotesi del Lemma, il trasversale $S_i = T \uplus A$ è connesso. Sia P il cammino minimo da A a u in $\langle S_i \rangle$. Per la minimalità di P , il cammino avrà un solo nodo x in A ; scriverò $P = (x, z_1, \dots, z_t = u)$ con $z_i \in T$ per $1 \leq i \leq t$. Dall' Affermazione 2, si sa che esiste un matching perfetto M in $H \setminus \{x, v\}$. Per difendere l'attacco spostiamo $g(u)$ in v , $g(x)$ in z_1 e $g(z_i)$ in $z_{i+1} \forall i \leq t - 1$. Infine spostiamo ogni guardia in $A \setminus \{u\}$ in $B \setminus \{v\}$ lungo gli archi di M .

In entrambi i casi l'attacco viene difeso con successo e la nuova configurazione è S_j . \square

TEOREMA 5.2 [CARATTERIZZAZIONE]

Sia $G = (V, E)$ un grafo non banale nella classe \mathcal{F} . Sia $X \subseteq V$ l'insieme dei nodi separatori di G . Allora vale:

$$evc(G) = mvc(G) \iff \forall v \in V \setminus X \text{ esiste un trasversale minimo } S_v \text{ di } G \text{ t.c. } (X \cup \{v\}) \subseteq S_v$$

Dimostrazione Come già visto, il Teorema 5.1 dimostra l'implicazione " \implies ". Mostriamo quindi unicamente l'implicazione " \impliedby ".

Supponiamo che, per ogni trasversale minimo S di G per cui $X \subseteq S$, $\langle S \rangle$ sia connesso (lo possiamo fare perchè $G \in \mathcal{F}$). Se $\forall v \in V \setminus X$ esiste un trasversale minimo S_v di G tale che $(X \cup \{v\}) \subseteq S_v$, allora vale $Mvc_X(G) = mvc(G)$. Avendo noi supposto $\langle S \rangle$ connesso, con S un qualsiasi trasversale minimo, allora anche il sottografo generato da un trasversale di G con cardinalità $Mvc_X(G)$ che contiene X è connesso. Possiamo quindi applicare il Lemma, da cui otteniamo che $evc_X(G) = Mvc_X(G) = mvc(G)$. Poichè $Mvc(G) \leq evc(G) \leq evc_X(G)$, otteniamo che $evc(G) = mvc(G)$. \square

COROLLARIO 5.2

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso in cui ogni trasversale minimo induce un sottografo connesso. Se $\forall v \in V$ esiste un trasversale minimo S_v di G con $v \in S_v$, allora $evc(G) = mvc(G)$. In caso contrario, $evc(G) = mvc(G) + 1$.

Dimostrazione Applicando il Teorema 3.1 si ottiene la stima $evc(G) \leq mvc(G) + 1$. Se ogni trasversale minimo induce un sottografo connesso, allora $G \in \mathcal{F}$ e si può applicare il Teorema 5.2, da cui segue la tesi. \square

OSSERVAZIONE 5.3

Se $G = (V, E)$ è un grafo connesso in cui ogni trasversale minimo induce un sottografo connesso, si osserva che $evc(G) = \min\{k : \forall v \in V, G \text{ ha un trasversale di cardinalità } k \text{ contenente } v\}$. Ciò segue dal fatto che $\forall v \in V$ esiste un trasversale di G con cardinalità $Mvc(G) + 1$ che contiene v .

6

Cactus

Dopo aver analizzato gli aspetti più teorici ci si chiede se, dato un grafo G e un naturale k , G abbia un trasversale eterno composto da al più k guardie; Fomin et al. hanno dimostrato come questo problema sia NP-difficile [4]. Nei capitoli precedenti si sono date formule precise solamente per alcune classi di grafi, e ci si domanda se sia possibile trovare un algoritmo polinomiale per ulteriori classi. In questo capitolo si analizzerà il lavoro di Babu et al. [5] andando a definire una proprietà comune alle classi di grafi per cui esiste un algoritmo polinomiale, utilizzandola per trovare un algoritmo in tempo lineare per la classe dei cactus.

DEFINIZIONE 6.1 Un *cactus* è un grafo connesso in cui ogni coppia di cicli ha al più un nodo in comune.

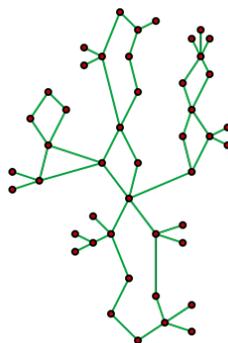


Immagine 6.1: *Un esempio di cactus* [6].

L'interesse nella classe dei cactus deriva dalla peculiarità della loro struttura: ogni blocco (o componente biconnessa) di un cactus, infatti, è un singolo arco oppure un ciclo. Come visto nel Capitolo 2, il calcolo del trasversale eterno di cicli e archi è immediato. Altra caratteristica dei cactus è quella di possedere una struttura estremamente simile a quella degli alberi: contraendo ogni ciclo nel cactus in un solo nodo, infatti, ciò che si ottiene è un albero.

Nella Proposizione 2.3 avevamo ottenuto una stima dal basso della cardinalità di un trasversale eterno per un generico albero T utilizzando un metodo ricorsivo. L'obiettivo è dunque quello di decomporre un cactus nei suoi singoli blocchi e sfruttare la ricorsione per calcolare il numero di guardie necessarie in ognuno dei casi base, ottenendo così un risultato per il grafo di partenza. Prima di giungere all'algoritmo ricorsivo, tuttavia, sono necessarie alcune definizioni e osservazioni.

UN PRIMO ESEMPIO Osserviamo un caso semplice di cactus per capire l'idea alla base del procedimento:

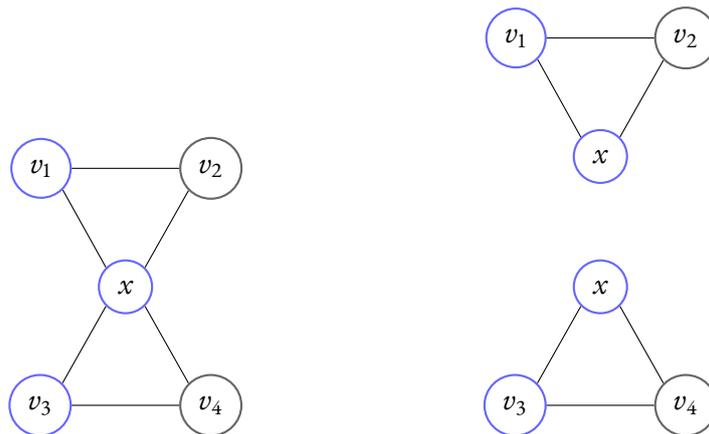


Immagine 6.1: Un cactus G composto da due cicli con un nodo in comune.

Il grafo G possiede il trasversale eterno $\{v_1, x, v_3\}$, e decomponendo G nei suoi blocchi si ottengono due cicli B_1 e B_2 di lunghezza 3. Ora possiamo calcolare facilmente la cardinalità di un trasversale eterno per B_1 e B_2 (in questo caso è $= 2$ per entrambi). Ricomponendo il grafo G , dobbiamo ricordare che un nodo del grafo è in comune e tenerne conto nel calcolo: in questo caso avremo che la cardinalità di un trasversale eterno per G è $2 + 2 - 1 = 3$.

Vediamo ora cosa succede nel caso non si abbia un cactus:

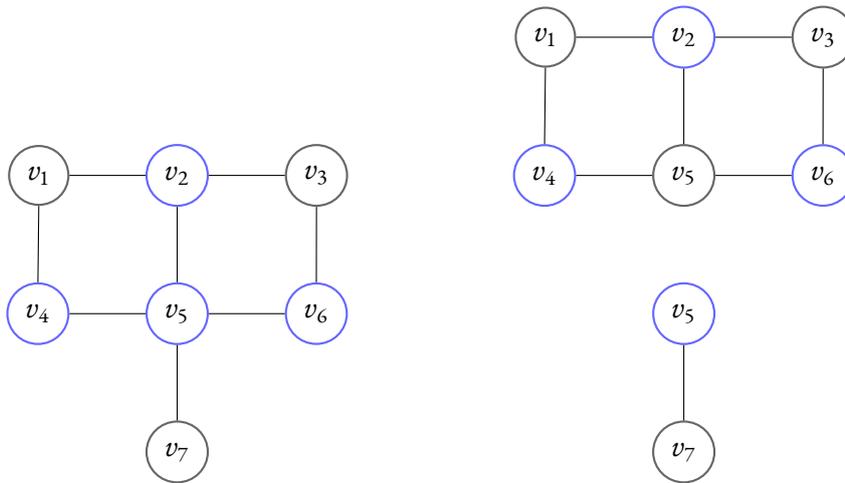


Immagine 6.3: Un grafo G non cactus, composto da due blocchi.

Questo grafo G è stato decomposto nei suoi due blocchi B_1 e B_2 ; in questo caso si presentano due problemi. Si nota infatti che un trasversale eterno per G è dato da $\{v_2, v_4, v_5, v_6\}$, di cardinalità 4. I trasversali eterni per B_1 e B_2 sono rispettivamente $\{v_2, v_4, v_6\}$ e $\{v_5\}$, con cardinalità 3 e 1. Al contrario di quanto successo nell'esempio precedente, il nodo separatore non deve essere sottratto dal calcolo della cardinalità per un trasversale eterno di G . Ciò però non è un comportamento comune a tutti i grafi non cactus, e non è difficile trovare altri esempi in cui non basta semplicemente sommare le cardinalità dei blocchi per ottenere un risultato corretto.

In secondo luogo, cosa più importante, il calcolo del trasversale eterno per alcuni dei blocchi non è immediato. Un grafo qualsiasi può avere blocchi arbitrariamente complessi o addirittura essere un unico blocco, rendendo futile il tentativo di calcolo per ricorsione.

DEFINIZIONE 6.2 Sia G un grafo e $x \in V(G)$. Scriviamo G_x^+ per indicare il grafo ottenuto aggiungendo a G il nodo v e il solo arco xv .

OSSERVAZIONE 6.1

$$evc(G_x^+) \leq evc(G) + 1$$

Dimostrazione Sia $evc(G) = k$, e sia v il nodo in $V(G_x^+) \setminus V(G)$. Come strategia di difesa per G_x^+ utilizziamo k guardie allo stesso modo di come faremmo per il grafo G , e la guardia

in più protegge esclusivamente l'arco xv . Se xv è attaccato mentre x non è protetto, allora la guardia si sposterà da v a x ; nel turno successivo, la guardia tornerà in v indipendentemente dall'arco attaccato. In questo modo è sempre possibile difendere un attacco su un arco di G_x^+ . \square

DEFINIZIONE 6.3 Sia x un nodo separatore di un grafo G connesso; sia H una componente connessa di $G \setminus x$. Sia G_0 il sottografo indotto da $V(H) \cup x$. G_0 viene detto x -componente di G , e G è detta x -estensione di G_0 . Poniamo attenzione al fatto che nel definire un grafo G' come x -estensione di G , non è richiesto che x sia un nodo separatore di G (lo sarà certamente per G').

DEFINIZIONE 6.4 [PROPRIETÀ CARDINE] Sia x un nodo non separatore di G . Se le seguenti sono valide per una qualsiasi x -estensione G' di G , si dice che G soddisfa la proprietà cardine:

- se $evc(G_x^+) \leq evc_x(G)$, allora per ogni trasversale eterno C' di G' il numero di guardie in $V(G)$ è almeno $evc_x(G) - 1$.
- se $evc(G_x^+) > evc_x(G)$, allora per ogni trasversale eterno C' di G' il numero di guardie in $V(G)$ è almeno $evc_x(G)$.

Poniamo attenzione al fatto che, partendo dalla x -estensione di G più semplice (ossia G_x^+), dobbiamo verificare una proprietà su una qualsiasi x -estensione di G . Ciò torna utile quando sappiamo che la proprietà cardine è verificata, in quanto possiamo dedurre una stima delle guardie presenti in un sottografo del grafo di partenza semplicemente analizzando G_x^+ .

OSSERVAZIONE 6.2 Se un grafo G soddisfa la proprietà cardine ed x è un nodo non separatore di G , allora $evc_x(G) \leq evc(G_x^+) \leq evc_x(G) + 1$.

Dimostrazione Sia v il nodo in $V(G_x^+) \setminus V(G)$. Ogni trasversale eterno in G_x^+ possiede $evc(G_x^+)$ guardie; prima o dopo un attacco sull'arco xv esiste una configurazione di guardie in cui v è protetto da una guardia. Per la proprietà cardine, in quella configurazione il numero di guardie in $V(G)$ deve essere almeno $evc_x(G) - 1$. Abbiamo però anche una guardia in $v \notin V(G)$, per cui $evc(G_x^+) \geq evc_x(G)$. L'Osservazione 6.1 ci garantisce che $evc(G_x^+) \leq evc(G) + 1$, e dal fatto che $evc(G) \leq evc_x(G)$ segue la tesi. \square

DEFINIZIONE 6.5 Sia G un grafo e sia x un nodo di G .

- G si dice di *Tipo 1* relativamente ad x se $evc(G_x^+) = evc_x(G)$.
- G si dice di *Tipo 2* relativamente ad x se $evc(G_x^+) > evc_x(G)$.

OSSERVAZIONE 6.3 Un albero è di Tipo 1 relativamente ad ogni suo nodo. Un ciclo pari è di Tipo 1 relativamente ad ogni suo nodo, mentre un ciclo dispari è di Tipo 2 relativamente ad ogni suo nodo. Un grafo completo con più di tre nodi è di Tipo 2 relativamente ad ogni suo nodo.

Dall'Osservazione 6.2, se G soddisfa la proprietà cardine ed x è un nodo non separatore di G , allora G è o di Tipo 1 o di Tipo 2 relativamente ad x .

DEFINIZIONE 6.6 Sia x un nodo separatore di un grafo connesso G . Viene indicato con $C_x(G)$ l'insieme delle x -componenti di G . Per $i = 1, 2$ si indica con $T_i(G, x)$ l'insieme delle x -componenti di G di Tipo i relativamente ad x .

LEMMA 6.1 Sia G un grafo connesso e sia x un nodo separatore di G tale che ogni componente di G soddisfa la proprietà cardine.

- Se tutte le x -componenti di G sono di Tipo 2, allora

$$evc(G) = evc_x(G) = 1 + \sum_{G_i \in C_x(G)} (evc_x(G_i) - 1)$$

- In caso contrario,

$$evc(G) = evc_x(G) = 2 + \sum_{G_i \in T_1(G, x)} (evc_x(G_i) - 2) + \sum_{G_i \in T_2(G, x)} (evc_x(G_i) - 1)$$

Dimostrazione Omessa.

OSSERVAZIONE 6.4 Sia G un grafo connesso e sia x un nodo separatore di G tale che ogni x -componente di G soddisfa la proprietà cardine. Se almeno una delle x -componenti di G è di Tipo 1 relativamente a x , allora G è di Tipo 1 relativamente a x . In caso contrario, G è di Tipo 2 relativamente a x .

Dimostrazione Quando vengono aggiunti la foglia v e l'arco xv durante la costruzione di G_x^+ , tale arco è una componente di Tipo 1 relativamente a x . Inoltre, questa componente ha $evc_x = 2$. Inserendo queste informazioni nelle espressioni del Lemma 6.1, si ottiene quanto richiesto. \square

OSSERVAZIONE 6.5 Sia G un grafo che soddisfa la proprietà cardine e sia x un qualsiasi nodo di G . Se $evc(G) < evc_x(G)$, allora G è di Tipo 1 relativamente a x .

Dimostrazione Se $evc(G) < evc_x(G)$, per l'Osservazione 6.1 si ha che $evc_x(G_x^+) \leq evc(G) + 1 \leq evc_x(G)$. Se x non è un nodo separatore di G , per l'Osservazione 6.3 G è di Tipo 1 o di Tipo 2 relativamente a x , per cui $evc(G_x^+) \geq evc_x(G)$. Se x è un nodo separatore di G , x è un nodo non separatore per ogni x -componente di G , ed ogni x -componente di G soddisfa la proprietà cardine. Per l'Osservazione 6.4, G è di Tipo 1 o Tipo 2 relativamente a x , per cui $evc(G_x^+) \geq evc_x(G)$. Ne segue che $evc_x(G) = evc(G_x^+)$, ossia G è di Tipo 1 relativamente a x . \square

LEMMA 6.2 Sia G un grafo e sia $x \in V(G)$. Sia $H = G_x^+$, con v il nodo aggiunto. Se ogni x -componente di H soddisfa la proprietà cardine, allora H è di Tipo 1 relativamente a $v \iff G$ è di Tipo 1 relativamente a x .

Dimostrazione Omessa.

LEMMA 6.3 Sia G un grafo e sia v un nodo di grado 2 in G tale che i suoi vicini v_1 e v_2 non siano adiacenti. Sia G' il grafo ottenuto eliminando v e aggiungendo l'arco v_1v_2 . Allora $evc_v(G) = evc(G') + 1$.

Dimostrazione Omessa.

DEFINIZIONE 6.7 Sia X l'insieme dei nodi separatori di un grafo G . Se B è un blocco di G , definiamo l'insieme delle B-componenti di G come $C_B(G) = \{G_i : G_i \in C_x \text{ per un qualche } x \in X \cap V(B), \text{ con } G_i \text{ che non ha archi in comune con } B\}$. Analogamente, se P è un cammino in G , definiamo l'insieme delle P-componenti di G come $C_P(G) = \{G_i : G_i \in C_x \text{ per un qualche } x \in X \cap V(P), \text{ con } G_i \text{ che non ha archi in comune con } P\}$.

DEFINIZIONE 6.8 Dato un blocco B di un grafo connesso G , il Tipo di una B-componente è da intendersi relativamente al nodo che tale B-componente ha in comune con B . Per $i = 1, 2$, definiamo $T_i(G, B)$ come l'insieme delle B-componenti di G che hanno Tipo i . Analogamente, con $T_i(G, P)$ si intende l'insieme delle P-Componenti di P che hanno Tipo i .

DEFINIZIONE 6.9 Dato un blocco B di un grafo connesso G , definiamo

$$\chi(G, B) = |V(B) \cap X| + \sum_{\substack{G_i \in T_1(G, B) \\ x_i \in V(G_i) \cap V(B)}} (evc_{x_i}(G_i) - 2) + \sum_{\substack{G_i \in T_2(G, B) \\ x_i \in V(G_i) \cap V(B)}} (evc_{x_i}(G_i) - 1)$$

Analogamente, per un cammino P di un grafo connesso G , definiamo

$$\chi(G, P) = |V(P) \cap X| + \sum_{\substack{G_i \in T_1(G, P) \\ x_i \in V(G_i) \cap V(P)}} (evc_{x_i}(G_i) - 2) + \sum_{\substack{G_i \in T_2(G, P) \\ x_i \in V(G_i) \cap V(P)}} (evc_{x_i}(G_i) - 1)$$

Se B è un blocco di G tale che tutte le B-componenti di G soddisfino la proprietà cardine, allora il numero totale di guardie su $\bigcup_{G_i \in C_B(G)} (V(G_i))$ in ogni trasversale eterno di G (o in una estensione di G) è almeno $\chi(G, B)$. Vale chiaramente l'analogo per un cammino P .

DEFINIZIONE 6.10 Sia P un cammino in un grafo connesso G . Chiamiamo *mucchio di nodi* e lo indichiamo con $VB_G(P)$ l'insieme $V(P) \cup \bigcup_{G_i \in C_P(G)} (V(G_i))$, ossia l'insieme consistente dei nodi di P e dei nodi di ogni x-componente di G che contiene nodi di P ma non archi di P .

DEFINIZIONE 6.11 Sia G un grafo connesso e sia X l'insieme dei nodi separatori di G . Un cammino P in G si dice *cammino movimentato* se:

- P è un cammino indotto in G oppure è un cammino ottenuto rimuovendo un arco da un ciclo indotto in G
- gli estremi di P sono in X
- ogni sotto-cammino P' di P con entrambi gli estremi in X ha un numero pari di nodi non in X

LEMMA 6.4 Sia G un grafo connesso e sia P un cammino movimentato in G . Sia X l'insieme dei nodi separatori di G . Se ogni P-componente in $C_P(G)$ soddisfa la proprietà cardine, allora in ogni configurazione di un trasversale eterno di G il numero di guardie in $VB_G(P)$ è almeno $\frac{|V(P)\setminus X|}{2} + \chi(G, P)$. Inoltre, se $VB_G(P) \neq V(G)$ e il numero di guardie in $VB_G(P)$ è esattamente $\frac{|V(P)\setminus X|}{2} + \chi(G, P)$, allora almeno un nodo v adiacente agli estremi di P , con $v \notin VB_G(P)$, è protetto da una guardia.

Dimostrazione Omessa.

LEMMA 6.5 Sia G un grafo connesso, e sia B un blocco di G che forma un ciclo. Sia X l'insieme dei nodi separatori di G . Supponiamo che ogni B-componente $G_i \in C_B(G)$ soddisfi la proprietà cardine. Se $T_1(G, B) = \emptyset$, allora $evc(G) = \left\lceil \frac{|V(B)\setminus X|}{2} \right\rceil + \chi(G, B)$. In caso contrario, $evc(G) = \left\lceil \frac{|V(B)\setminus X|+1}{2} \right\rceil + \chi(G, B)$.

Dimostrazione Omessa.

LEMMA 6.6 Sia B un ciclo di lunghezza n che forma un blocco del grafo connesso G . Sia X l'insieme dei nodi separatori di G , sia $v \in V(B) \setminus X$ e sia $k = |X \cap V(B)|$. Supponiamo che ogni B-componente in $C_B(G)$ soddisfi la proprietà cardine. Il Tipo di G relativamente a v si calcola come segue:

- Se $T_1(G, B) \neq \emptyset$ e $n-k$ è pari, allora $evc_v(G) = evc(G) = evc(G_v^+)$. Se $T_1(G, B) \neq \emptyset$ e $n-k$ è dispari, allora $evc_v(G) = evc(G) + 1 = evc(G_v^+)$. In entrambi i casi, G è di Tipo 1 relativamente a v .
- Se $T_1(G, B) = \emptyset$ e $n-k$ è pari, allora $evc_v(G) = evc(G) + 1 = evc(G_v^+)$ e G è di Tipo 1 relativamente a v . Se $T_1(G, B) = \emptyset$ e $n-k$ è dispari, allora $evc_v(G) = evc(G) < evc(G_v^+) = evc_v(G) + 1$ e G è di Tipo 2 relativamente a v .

Dimostrazione Omessa.

TEOREMA 6.1 Ogni cactus soddisfa la proprietà cardine.

Dimostrazione Sia G un cactus; la dimostrazione procede per induzione sul numero di nodi separatori in G . Il caso base è quello in cui non vi sono nodi separatori in G . G è dunque

un singolo nodo, un arco oppure un ciclo. In ciascuno di questi casi, la stima dal basso sul numero di guardie in $V(G)$ imposta dalla proprietà cardine è uguale alla cardinalità del trasversale minimo dei rispettivi grafi. Il teorema è quindi verificato per il caso base.

Assumiamo ora che il teorema valga per ogni cactus con al più k nodi separatori, $k \geq 0$. Sia G il cactus con $k + 1$ nodi separatori e sia X l'insieme dei nodi separatori. Sia v un nodo non separatore di G , con G' una qualsiasi v -estensione di G . Bisogna mostrare che in una qualsiasi configurazione di un trasversale eterno per G' , il numero di guardie in $V(G)$ è come richiesto dalla proprietà cardine. Poiché v è un nodo non separatore di G , è una foglia oppure è un nodo di grado 2 appartenente ad un blocco B (che è un ciclo). L'obiettivo è trovare una stima dal basso per il numero di guardie in $V(G)$ per una qualsiasi configurazione del trasversale eterno C' di G' .

Si consideri innanzitutto il caso in cui v è una foglia di G . Sia w il vicino di v in G , e si definisca $H = G \setminus v$. Dato che G ha almeno un nodo separatore, w deve essere un nodo separatore di G .

- Se w è un nodo separatore di H , si consideri una w -componente H_i di H . H_i è un cactus, ed i suoi nodi separatori sono meno dei nodi separatori di H , per cui H_i soddisfa la proprietà cardine. Inoltre, G' è una w -estensione di H_i . In C' , il numero di guardie in $V(H_i)$ è almeno $evc_w(G) - 1$ se $H_i \in T_1(H, w)$ ed è esattamente $evc_w(H_i)$ se $H_i \in T_2(H, w)$.

Il numero totale di guardie in $V(H)$ è quindi almeno $1 + \sum_{H_i \in T_1(H, w)} (evc_w(H_i) - 2) + \sum_{H_i \in T_2(H, w)} (evc_w(H_i) - 1)$. Dal Lemma 6.1, se v è protetto da una guardia in C' allora il numero di guardie in $V(G)$ è almeno $evc(G)$. Se invece v non è protetto in C' , per difendere un attacco sull'arco vw va spostata una guardia da $V(H)$ a v .

Per questo motivo, in C' , il numero di guardie in $V(H)$ è uno in più del minimo precedentemente menzionato. Anche in questo caso, dunque, il numero di guardie in $V(G)$ presenti nella configurazione C' deve essere almeno $evc(G)$.

Dal Lemma 6.1, si ha che $evc(G_v^+) = evc(G) + 1$. Dal Lemma 6.2, il Tipo di G relativamente a v è lo stesso di H relativamente a w .

- Se H è di Tipo 1 relativamente a w , si ha che $evc(G_v^+) = evc_v(G) = evc(G) + 1$. È stato quindi mostrato che il numero di guardie in $V(G)$ è almeno $evc(G) = evc_v(G) - 1$.
- Se H è di Tipo 2 relativamente a w , allora $evc(G_v^+) > evc_v(G)$. Poiché $evc(G_v^+) = evc(G) + 1$, in questo caso deve valere $evc_v(G) = evc(G)$. È stato quindi mostrato che il numero di guardie in $V(G)$ è almeno $evc(G) = evc_v(G)$.

In entrambi i casi, la proprietà cardine viene mantenuta.

- Se w non è un nodo separatore di H , G' è una w -estensione di H . Dalla proprietà cardine di H , in una configurazione C' il numero di guardie in $V(G)$ deve essere almeno pari a $evc_w(G)$ se H è di Tipo 1 e almeno $evc_w(G)+1$ se H è di Tipo 2 relativamente a w . Dal Lemma 6.1, quando H è di Tipo 1 relativamente a w si ha $evc(G) = evc_w(H)$, mentre quando H è di Tipo 2 relativamente a w si ha $evc(G) = evc_w(H) + 1$. Dal Lemma 6.2, il Tipo di G relativamente a v è il Tipo di H relativamente a w .
 - Se H è di Tipo 1 relativamente a w , si ha che $evc(G_v^+) = evc_v(G) = evc(G) + 1$. Il numero di guardie in $V(G)$ è allora almeno $evc_w(H) = evc_v(G) - 1$.
 - Se H è di Tipo 2 relativamente a w , si ha che $evc(G_v^+) > evc_v(G)$. Poiché $evc(G_v^+) = evc(G) + 1$, in questo caso deve valere $evc_v(G) = evc(G)$. Il numero di guardie in $V(G)$ è allora almeno $evc_w(H) = evc_v(G) - 1$.

In entrambi i casi, la proprietà cardine viene mantenuta.

Si consideri ora il caso in cui v è un nodo di G di grado 2 appartenente ad un blocco B di G , con B un ciclo. Si supponga che $|V(B)| = n_b$. Sia X l'insieme dei nodi separatori di G , e sia $k_b = |X \cap V(B)|$. Come in precedenza, l'obiettivo è trovare una stima dal basso per il numero di guardie in $V(G)$ per una qualsiasi configurazione del trasversale eterno C' di G' . Siano p e q i più vicini nodi di v in $X \cap V(B)$ in senso rispettivamente orario e antiorario. Sia P il cammino in B da p a q che non contiene v . Si osservi che ogni B-componente di G soddisfa la proprietà cardine grazie all'ipotesi induttiva, e che G' è un'estensione per ognuna di tali componenti. Si ha dunque una stima dal basso sul numero di guardie in $V(G_i)$, per ogni $G_i \in C_B(G)$. In modo simile, la condizione espressa nel Lemma 6.4 deve essere soddisfatta per ogni sotto-cammino movimentato P' di P .

- Se $T_1(G, B) = \emptyset$, utilizzando quanto visto nel Lemma 6.5 si può mostrare che il numero di guardie in $V(G)$ nel trasversale eterno C' deve essere almeno $evc(G)$. Dal Lemma 6.6, quando $n_b - k_b$ è pari G è di Tipo 1 relativamente a v e $evc_v(G) = evc(G) + 1$. Poiché il numero di guardie in $V(G)$ è almeno $evc(G) = evc_v(G) - 1$, la proprietà cardine è rispettata. In modo simile, quando $n_b - k_b$ è dispari G è di Tipo 2 relativamente a v e $evc_v(G) = evc(G)$, rispettando la proprietà cardine.
- Se $T_1(G, B) \neq \emptyset$ e $n_b - n_k$ è pari, il numero di guardie in $V(G)$ nel trasversale eterno C' deve essere almeno $evc(G) - 1$. Dal Lemma 6.6, G è di Tipo 1 relativamente a v e $evc(G) = evc_v(G)$. Poiché il numero di guardie in $V(G)$ è almeno $evc(G) - 1 = evc_v(G) - 1$, la proprietà cardine è rispettata.
- Se $T_1(G, B) \neq \emptyset$ e $n_b - n_k$ è dispari, il numero di guardie in $V(G)$ nel trasversale eterno C' deve essere almeno $evc(G)$. Dal Lemma 6.6, G è di Tipo 1 relativamente a

v e $evc(G) = evc_v(G) + 1$. Poiché il numero di guardie in $V(G)$ è almeno $evc(G) = evc_v(G) - 1$, la proprietà cardine è rispettata.

È stato mostrato come in ogni caso la stima dal basso sul numero di guardie in $V(G)$ soddisfa le condizioni della proprietà cardine, quindi G soddisfa la proprietà cardine. Per induzione, segue che ogni cactus soddisfa la proprietà cardine. \square

È ora possibile descrivere un algoritmo ricorsivo, basato sui principi della programmazione dinamica, per ottenere la cardinalità di un trasversale eterno di un cactus utilizzando il Lemma 6.1. Vedremo come il cactus di partenza verrà suddiviso in una serie di sotto-grafi appartenenti alle stesse categorie anche se a profondità diverse di ricorsione, riuscendo a calcolare quanto richiesto senza dover risolvere singolarmente ogni singolo sotto-problema nella ricorsione.

Tale algoritmo prenderà come input un cactus G ed un nodo v di G , restituendo $evc(G)$, $evc_v(G)$ ed il Tipo di G relativamente a v . Nel caso in cui G sia un nodo, un arco o un ciclo la risposta è già nota e può essere calcolata in tempo lineare.

In tutti gli altri casi, G ha almeno un nodo separatore. Separiamo le operazioni dell'algoritmo in base alla natura del nodo v su cui viene chiamato l'algoritmo.

- Se v è un nodo separatore, si chiama ricorsivamente l'algoritmo su ogni v -componente di G insieme al nodo v . Si può quindi utilizzare il Lemma 6.1 per calcolare $evc(G)$ ed $evc_v(G)$ in tempo costante dai risultati della chiamata ricorsiva. Sfruttando le informazioni della chiamata ricorsiva, è possibile utilizzare l'Osservazione 6.4 per ottenere il Tipo di G relativamente a v .
- Se v è una foglia, sia w il suo vicino in G ; si chiama ricorsivamente l'algoritmo su $(G \setminus v, w)$. Per il Lemma 6.2, il Tipo di G relativamente a v è lo stesso di quello di $G \setminus v$ relativamente a w ; inoltre, $evc_v(G) = evc_w(G \setminus v) - 1$. Quindi $evc(G) = evc_w(G \setminus v)$ se G è di Tipo 1 relativamente a v , e $evc(G) = evc_w(G \setminus v) + 1$ se G è di Tipo 2 relativamente a v . Dai risultati della chiamata ricorsiva su $(G \setminus v, w)$ è quindi possibile ottenere il risultato in tempo costante.
- L'ultimo caso è quello in cui v è un nodo di un ciclo B in G ; si chiama quindi ricorsivamente l'algoritmo su ogni B -componente di G insieme al rispettivo nodo separatore che condivide con B . Con questa informazione, è possibile utilizzare il Lemma 6.5 per calcolare $evc(G)$ in un tempo proporzionale al numero di B -componenti, ed utilizzare il Lemma 6.6 per calcolare $evc_v(G)$, sempre in un tempo proporzionale al numero di B -componenti.

Per quanto visto, l'algoritmo copre ogni caso e fornisce un risultato in tempo lineare rispetto alla dimensione di G .

Bibliografia

- [1] W. F. Klostermeyer and C. M. Mynhardt, “Edge protection in graphs.” *Australas. J Comb.*, vol. 45, pp. 235–250, 2009.
- [2] J. Babu, L. S. Chandran, M. Francis, V. Prabhakaran, D. Rajendraprasad, and N. J. Warrier, “On graphs whose eternal vertex cover number and vertex cover number coincide,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 319, pp. 171–182, 2022.
- [3] R. Diestel, “Graph theory. fifth. vol. 173,” *Graduate Texts in Mathematics. Paperback edition of [MR3644391]. Springer, Berlin*, 2018.
- [4] F. V. Fomin, S. Gaspers, P. A. Golovach, D. Kratsch, and S. Saurabh, “Parameterized algorithm for eternal vertex cover,” *Information Processing Letters*, vol. 110, no. 16, pp. 702–706, 2010.
- [5] J. Babu, V. Prabhakaran, and A. Sharma, “A linear time algorithm for computing the eternal vertex cover number of cactus graphs,” *arXiv preprint arXiv:2005.08058*, 2020.
- [6] D. E. at English Wikipedia, “Cactus graph,” 2007, [Online; accessed 06-December-2022]. [Online]. Available: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2453366>

