

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"

Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

## **L'Orizzonte Cosmologico Apparente**

Laureando:

**Gianmarco Cracco**

Matricola 1103275

Relatore:

**Prof. Sabino Matarrese**





*A chi mi è stato vicino.*



---

## Sommario

In relatività generale, un orizzonte gravitazionale (detto anche apparente) è una superficie che separa le geodetiche nulle che si dirigono verso un osservatore da quelle che si allontanano. Anche l'Universo stesso ne possiede uno, tuttavia, al contrario di quello presente nelle metriche di Schwarzschild e Kerr, esso è dipendente dal tempo e pertanto in un futuro potrà diventare un orizzonte degli eventi.

In questo elaborato esamineremo come nella metrica di FRW esista tale orizzonte e come mai è importante per una corretta interpretazione delle misure cosmologiche.

---

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Geometria e dinamica dell'Universo</b>	<b>3</b>
1.1 Il principio cosmologico e la metrica FRW . . . . .	3
1.2 Dinamica . . . . .	7
1.2.1 Tensore energia-impulso . . . . .	7
1.2.2 Curvatura dello spaziotempo . . . . .	8
1.2.3 Costante cosmologica . . . . .	9
1.3 Redshift . . . . .	10
1.4 Modello $\Lambda$ CDM . . . . .	10
<b>2 Gli orizzonti in cosmologia</b>	<b>13</b>
2.1 Orizzonte delle particelle e degli eventi . . . . .	13
2.2 Introduzione all'orizzonte apparente . . . . .	15
2.2.1 Postulato di Weyl . . . . .	17
2.2.2 Geodetiche . . . . .	19
<b>3 L'Orizzonte cosmologico appartente</b>	<b>23</b>
3.0.1 Confronto con gli altri orizzonti . . . . .	25
<b>4 Equivoci in cosmologia</b>	<b>27</b>
4.1 Velocità di recessione . . . . .	27
4.2 Inflazione . . . . .	28
4.3 Galassie in recessione superluminale . . . . .	29
<b>5 Conclusione</b>	<b>31</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>33</b>

---

# Elenco delle figure

1.1.1 Curvatura dell'Universo . . . . .	4
1.1.2 Universo in espansione . . . . .	6
2.1.1 Orizzonte delle particelle e degli eventi . . . . .	15
2.1.2 Orizzonte delle particelle e degli eventi e sfera di Hubble . . .	16
2.2.1 Visualizzazione del postulato di Weyl . . . . .	18
2.2.2 Misura delle distanze nel contesto dell'orizzonte apparente . .	22
4.1.1 Velocità in funzione dello redshift . . . . .	29

ELENCO DELLE FIGURE

---

# Introduzione

Il termine *orizzonte* viene utilizzato in svariati ambiti della fisica, in particolare in relatività generale, con il noto orizzonte degli eventi per i buchi neri, e in cosmologia per denotare l'orizzonte degli eventi e delle particelle. Ciascuno di questi ha il proprio scopo e significato, ma spesso c'è confusione tra di essi, anche a causa della possibilità di descrivere ciascuno sia utilizzando le coordinate comoventi sia le distanze proprie.

Nella presente tesi ci concentreremo quindi sull'esistenza di un orizzonte apparente (o gravitazionale, spesso questi due termini verranno utilizzati indistintamente) e le relative conseguenze, facendo poi anche dei confronti con i due orizzonti sopracitati. Tale orizzonte ha raggio  $R_h$ , che coincide con il raggio della più famosa sfera di Hubble: infatti l'esistenza di quest'ultima segue proprio dalla presenza dell'orizzonte apparente.

questo scritto si basa principalmente sulla rielaborazione di due articoli: *The apparent (gravitational) horizon in cosmology* di F.Melia[1] e *Expanding Confusion: Common Misconceptions of Cosmological Horizons and the Superluminal Expansion of the Universe* di M. Tamara Davis e C. H. Lineweaver[2].

Nel primo capitolo (1) sono elencate le nozioni introduttive che saranno utili per lo studio vero e proprio dell'orizzonte apparente, quali la metrica *FRW*, le equazioni di Friedmann, l'importanza del redshift e infine una panoramica su cosa sappiamo attualmente dell'Universo in cui viviamo.

Nel secondo (2) vengono esposti l'orizzonte degli eventi e delle particelle, sfera di Hubble e l'introduzione all'orizzonte apparente. Quest'ultimo è approfondito nel capitolo seguente (2.2.21) che presenta inoltre due teoremi che ne conseguono.

Nell'ultimo capitolo (4), infine, sono affrontati tre concetti che spesso vengono interpretati in modo errato.

## Notazioni e convenzioni

Per la maggior parte della tesi verranno usate le unità di misura naturali, quindi  $c = \hbar \equiv 1$ : tempo e spazio hanno dunque la stessa unità di misura. Dal capitolo 3 verranno reintrodotte quelle usuali, in quanto facilitano la comprensione delle quantità in gioco.

La segnatura del tensore metrico è  $(+, -, -, -)$  quindi  $ds^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2$  nello spazio di Minkowski. I 4-vettori sono denominati con le lettere maiuscole (per esempio  $X^\mu$ ), dove gli indici greci corrono da 0 a 3; per essi verrà usata la notazione di Einstein per sottintendere le sommatorie.

Gli indici latini  $i, j, k, \dots$  rappresentano i soli indici spaziali. Infine le quantità scritte in grassetto (es.  $\mathbf{x}$ ) indicano i 3-vettori spaziali.

# Capitolo 1

## Geometria e dinamica dell'Universo

### 1.1 Il principio cosmologico e la metrica FRW

Tutte le attuali teorie cosmologiche si basano sul cosiddetto *Principio Cosmologico*:

**Principio cosmologico.** *Ogni osservatore comovente osserva l'Universo attorno a sé, a tempo fissato (nel proprio sistema di riferimento), come omogeneo e isotropo.*

Nel quale:

- Per comovente si intende solidale con la sorgente della geometria dell'Universo o in altre parole, un osservatore è comovente se rivela la radiazione cosmica di fondo come isotropa entro qualche parte per milione.
- Gli aggettivi isotropo e omogeneo sono riferiti alla distribuzione di massa-energia su grande scala, cioè osservando l'Universo con bassa risoluzione spaziale.

È doveroso precisare che tale principio si basa su due tipi di assunzioni:

- L'isotropia è supportata dalle osservazioni che possiamo effettuare sull'Universo, come quelle riguardanti la radiazione cosmica di fondo (*CMB*), o dall'isotropia nelle proprietà statistiche di clusering delle galassie.
- L'omogeneità invece non può essere dimostrata sperimentalmente a causa delle nostre scarse capacità di esplorazione dell'Universo. Tuttavia la correttezza delle teorie che ne conseguono supportano la validità di questa ipotesi.

L'omogeneità e l'isotropia spaziale permettono di rappresentare l'Universo come una sequenza, temporalmente ordinata, di "fette" tridimensionali, ciascuna di queste omogenea ed isotropa.

Andiamo ora classificare i diversi tipi di Universo restringendoci momentaneamente al caso di una superficie bidimensionale, in quanto più facile da visualizzare.

Utilizzeremo direttamente le coordinate polari.

- Curvatura nulla: è il caso del classico piano cartesiano e la distanza infinitesima è semplicemente  $dl^2 = a^2 (dr^2 + r^2 d\varphi^2)$ ;
- Curvatura negativa: è un'iperboloide,  $dl^2 = a^2 (\sinh^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)$  (in questo caso il raggio è immaginario);
- Curvatura positiva: è una sfera e  $dl^2 = a^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)$  (dove  $a = R$ , con  $R$  raggio della sfera).

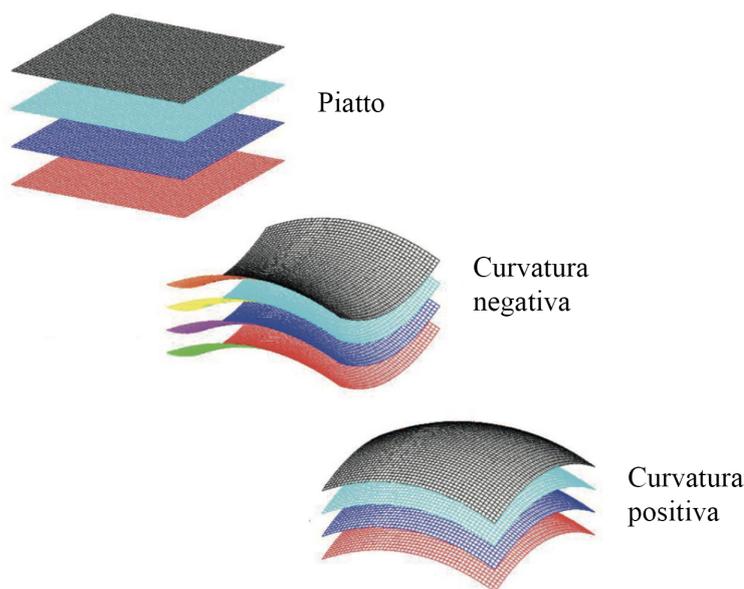


Figura 1.1.1: Visualizzazione della curvatura dell'Universo come superficie 2D

Mostriamo ora come con un semplice cambio di variabili è possibile ottenere la metrica di Friedmann-Robertson-Walker<sup>1</sup>, cioè la metrica che descrive il nostro Universo.

Associamo  $k = \pm 1$  rispettivamente alla curvatura positiva e negativa mentre  $k = 0$  per quella nulla.

<sup>1</sup>D'ora in poi verrà chiamata semplicemente metrica *FRW*.

Nel caso di curvatura positiva, ponendo  $r := \sin \theta$  otteniamo:

$$dl^2 = a^2 \left( \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\varphi^2 \right) \quad (1.1.1)$$

mentre per la curvatura negativa, definendo  $r := \sinh \theta$ :

$$dl^2 = a^2 \left( \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\varphi^2 \right) \quad (1.1.2)$$

Per tornare al caso tridimensionale basterà quindi sostituire  $d\varphi^2$  con  $d\Omega^2$  e definendo  $\chi = \begin{cases} \arcsin r & k = +1 \\ \operatorname{arcsinh} r & k = -1 \end{cases}$  otteniamo:

$$dl^2 = a^2 \left( d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2 \right) \quad k = +1 \quad (1.1.3)$$

$$dl^2 = a^2 \left( d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2 \right) \quad k = -1 \quad (1.1.4)$$

Riassumendo quindi, la metrica FRW si può scrivere come:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \\ &= \begin{cases} dt^2 - a^2(t) (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2) & k = +1, r = \sin \chi \\ dt^2 - a^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) & k = 0 \\ dt^2 - a^2(t) (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2) & k = -1, r = \sinh \chi \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

nella quale  $r$  è una variabile adimensionale e  $a(t)$  è una funzione del tempo cosmico detto *fattore di scala*.

Alternativamente la metrica può essere scritta in maniera più compatta come:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (1.1.6)$$

con

$$\gamma_{ij} \equiv \delta_{ij} + k \frac{x_i x_j}{1 - k(x_k x^k)}, \quad \text{per } k = \begin{cases} 0 \\ +1 \\ -1 \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Presentiamo un'ulteriore forma per la metrica di *FRW*: introducendo un tempo fittizio, detto *conforme*

$$dt = a(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad d\tau = \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.1.8)$$

L'equazione (1.1.5) diventa pertanto

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ d\tau^2 - \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \right] \quad (1.1.9)$$

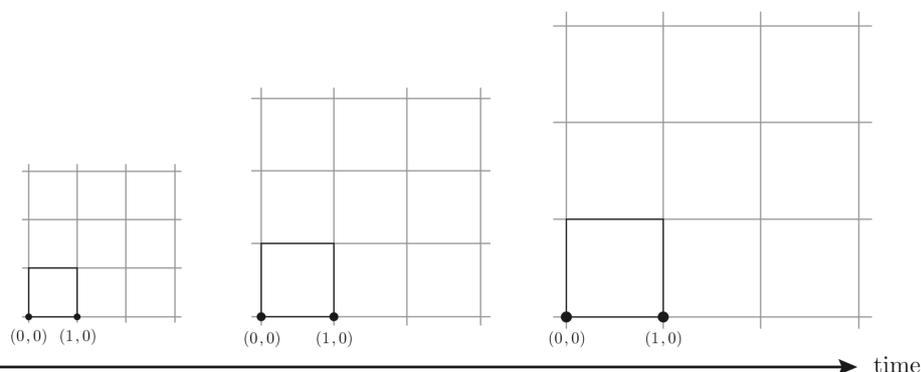


Figura 1.1.2: Universo in espansione: la distanza tra coordinate comoventi rimane la medesima ad ogni tempo, mentre quella tra coordinate fisiche è proporzionale al fattore di scala  $a(t)$ .

Questa scrittura rende evidente come, la metrica  $FRW$ , scritta in funzione del tempo conforme, sia proporzionale tramite il fattore  $a(\tau)$  alla metrica di Minkowski, nel caso l'Universo sia piatto. Tale termine  $a(\tau)$  è detto *fattore conforme* e la trasformazione che lega le due metriche è detta *trasformazione conforme*, o meglio, *trasformazione di Weyl*. Esse possono essere viste come delle dilatazioni delle quattro coordinate in funzione dello spazio e del tempo (in questo particolare caso solo del tempo).

Alla luce di quello appena esposto, introduciamo il seguente concetto: dato che la luce percorre geodetiche nulle ( $ds^2 = 0$ ), essa si propaga nello stesso modo in entrambe le metriche citate; se usiamo il tempo conforme questo si traduce in:

$$\Delta\tau = \pm\Delta r \quad (1.1.10)$$

cioè ad una variazione di tempo conforme corrisponde una variazione di distanze comoventi. Torneremo su questo nel paragrafo §2.1.

Infine, la stessa metrica può essere ulteriormente riscritta utilizzando le coordinate cartesiane con l'espressione:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \frac{(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{\left(1 + \frac{k|\mathbf{x}|^2}{4}\right)^2} \quad (1.1.11)$$

dove le coordinate  $x_i = \{x_1, x_2, x_3\}$  sono dette coordinate comoventi e la figura (1.1.2) mostra graficamente la relazione con le coordinate fisiche  $x_i^{fis} = a(t)x_i$ .

La velocità di un oggetto è chiaramente:

$$v_i^{fis} \equiv \frac{dx_i^{fis}}{dt} = a(t) \frac{dx_i}{dt} + \frac{da}{dt} x_i \equiv v_i^{pec} + v_i^{rec} \quad (1.1.12)$$

dove, nell'ultima uguaglianza,  $v_i^{\text{pec}}$  è la velocità peculiare, cioè la velocità che possiede l'oggetto stesso, mentre  $v_i^{\text{rec}}$ , detta velocità di recessione, è la velocità dovuta all'espansione dell'Universo. Essa può essere scritta anche come  $v_i^{\text{rec}} = Hx_i^{\text{fis}}$  con

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.1.13)$$

detta costante di Hubble.

## 1.2 Dinamica

La dinamica dell'Universo è dettata dalla celebre equazione di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.2.1)$$

dove  $G_{\mu\nu}$  è il tensore di Einstein che "misura" la curvatura dell'Universo,  $G$  è la costante di gravitazione universale e  $T_{\mu\nu}$  è il tensore energia-impulso. Andiamo ora ad analizzare le conseguenze di quest'equazione in un Universo governato dalla metrica *FRW*.

### 1.2.1 Tensore energia-impulso

Iniziamo caratterizzando il tensore energia-impulso che, nel caso in cui l'Universo rispetti il principio cosmologico, dovrà avere la stessa forma di quello di un fluido perfetto[3]:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu} \quad (1.2.2)$$

nel quale  $\rho$  e  $P$  sono rispettivamente la densità di energia e la pressione del fluido,  $U^\mu := dX^\mu/ds$  è la 4-velocità relativa tra fluido ed osservatore e  $g_{\mu\nu}$  è chiaramente il tensore metrico.

Dividiamo il tensore  $T_{\mu\nu}$  nel 3-scalare  $T_{00}$ , nei 3-vettori  $T_{i0}$  e  $T_{0j}$  e nel 3-tensore  $T_{ij}$ . L'isotropia implica che i 3-vettori siano identicamente nulli. Per lo stesso motivo attorno ad un generico punto  $\mathbf{x} = 0$ ,  $T_{ij}$  deve essere proporzionale a  $\delta_{ij}$  e quindi  $g_{\mu\nu}$

$$T_{ij}(\mathbf{x} = 0) \propto \delta_{ij} \propto g_{ij}(\mathbf{x} = 0). \quad (1.2.3)$$

L'omogeneità invece comporta che la relazione di proporzionalità debba essere invariante per cambiamenti di coordinate e quindi dipendente solo dal tempo.

Queste caratteristiche fanno sì che  $T_{\mu\nu}$  abbia la forma:

$$T_\nu^\mu = g^{\mu\lambda} T_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \quad (1.2.4)$$

Più genericamente può essere espresso anche come

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + P)U^{\mu}U_{\nu} - P\delta_{\nu}^{\mu}. \quad (1.2.5)$$

Per un osservatore comovente  $U^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$  e si ottiene di nuovo l'equazione (1.2.2).

Come evolvono  $\rho$  e  $P$  nel tempo? Nello spazio di Minkowski l'energia e il momento si conservano nel tempo: per questo  $\dot{\rho} = -\partial_i T^{i0}$  (la densità di energia varia come la divergenza del flusso di energia). Allo stesso modo, per la densità di momento vale l'equazione di Eulero  $\dot{T}_{i0} = \partial_i P$ .

Queste due leggi possono essere combinate nella conservazione del tensore energia impulso:

$$\partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0 \quad (1.2.6)$$

che nel caso di un sistema di riferimento non localmente inerziale diventa:

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = \partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T_{\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} T_{\lambda}^{\mu} = 0. \quad (1.2.7)$$

L'evoluzione della densità di energia si ottiene per  $\nu = 0$

$$\partial_{\mu} T_0^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T_0^{\lambda} - \Gamma_{\mu 0}^{\lambda} T_{\lambda}^{\mu} = 0 \quad (1.2.8)$$

Inoltre, dato che  $T_0^i = 0$  per isotropia l'equazione (1.2.8) si riduce a:

$$\frac{d\rho}{dt} + \Gamma_{\mu 0}^{\mu} \rho - \Gamma_{\mu 0}^{\lambda} T_{\lambda}^{\mu} = 0. \quad (1.2.9)$$

Per come è definito  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ <sup>2</sup>,  $\Gamma_{\mu 0}^{\lambda} \neq 0$  solo se  $\mu = \lambda$  e sono entrambi indici spaziali. Questo, insieme a  $\Gamma_{j0}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i$ , rendono l'equazione di continuità (1.2.9) uguale a:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \quad (1.2.10)$$

## 1.2.2 Curvatura dello spaziotempo

Riprendiamo l'equazione (1.2.1) e analizziamo ora il primo membro. Esso può essere riscritto come:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (1.2.11)$$

dove  $R_{\mu\nu}$  è il tensore di Ricci definito da:

$$R_{\mu\nu} := \partial_{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} \quad (1.2.12)$$

mentre lo scalare di Ricci è:

$$R := R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.2.13)$$

---

<sup>2</sup> $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} := \frac{1}{2}g^{\lambda\gamma} (\partial_{\mu} g_{\nu\gamma} + \partial_{\nu} g_{\mu\gamma} - \partial_{\gamma} g_{\mu\nu})$

Le componenti miste di (1.2.12),  $R_{i0} = R_{0i}$ , non serve calcolarle in quanto saranno nulle per via dell'isotropia. Quelle che rimangono sono:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (1.2.14)$$

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]g_{ij}. \quad (1.2.15)$$

La (1.2.13) diventa quindi:

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right] \quad (1.2.16)$$

Quindi le componenti non nulle di (1.2.11) sono:

$$G_0^0 = 3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right] \quad G_j^i = \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]\delta_j^i \quad (1.2.17)$$

che unite all'espressione (1.2.4) di  $T_{\mu\nu}$  e richiamando l'uguaglianza (1.1.13) generano:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (1.2.18)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (1.2.19)$$

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P) \quad (1.2.20)$$

Nelle quali è stata inclusa anche la (1.2.10).

Queste tre equazioni sono dette *equazioni di Friedmann*.

### 1.2.3 Costante cosmologica

Nell'equazione (1.2.1) andrebbe aggiunto il termine relativo alla costante cosmologica  $\Lambda$ . Storicamente andrebbe posto a primo membro, nella cosiddetta parte "geometrica", ottenendo

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.2.21)$$

così come aveva proposto Einstein. Ad oggi invece si preferisce spostarlo a secondo membro, in quanto si ritiene possa avere a che fare con la sorgente del campo gravitazionale:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \tilde{T}_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad \tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}.$$

In ogni caso la conservazione del tensore energia-impulso  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$  rimane invariata e quindi la trattazione appena svolta rimane corretta.

### 1.3 Redshift

Tutto ciò che conosciamo dell'Universo è collegato alla luce che riceviamo dagli oggetti distanti: per questo è utile studiare il comportamento del redshift che subiscono le lunghezze d'onda  $\lambda$  che riceviamo. Seguendo una descrizione quantistica, essa è inversamente proporzionale al momento del fotone ( $\lambda = \frac{h}{p}$ ), poiché si dimostra che  $p(t) \propto \frac{1}{a(t)}$  (cioè il momento diminuisce con l'espansione dell'Universo)  $\lambda$  è proporzionale ad  $a(t)$ .

La luce emessa al tempo  $t_1$  con lunghezza d'onda  $\lambda_1$  sarà rivelata, al tempo  $t_0 > t_1$ , modificata come segue:

$$\lambda_0 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \lambda_1. \quad (1.3.1)$$

Dato che  $a(t_0) > a(t_1)$ , anche la lunghezza d'onda aumenta  $\lambda_0 > \lambda_1$ .

Il redshift è usualmente definito come:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \quad (1.3.2)$$

che quindi, richiamando l'eq.(1.3.1) può essere riscritta in funzione solo dei parametri di scala:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (1.3.3)$$

Differenziando questa equazione rispetto a  $t$  otteniamo  $\frac{dt}{R(t)} = -\frac{dz}{a(t_0)} H(z)$ , nella quale utilizziamo il redshift per parametrizzare la costante di Hubble anziché il tempo.

In questo modo la coordinata comovente di un oggetto in funzione del redshift è:

$$r(z) = \frac{1}{a(t_0)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (1.3.4)$$

Per ottenere la velocità, sarà sufficiente inserire  $r(z)$  in  $v = \dot{a}(t)r(z)$  che non è altro che la legge di Hubble in funzione del redshift.

### 1.4 Modello $\Lambda$ CDM

Concludiamo descrivendo brevemente il modello standard della cosmologia, detto  $\Lambda$ CDM, in quanto faremo riferimento ad esso più volte[4].

- **Espansione:** sappiamo da quasi un secolo che l'espansione dell'Universo è regolata dalla legge di Hubble,  $v = H_0 r$ , tuttavia, il valore della costante  $H_0$  è stato determinato ben dopo. Se la parametrizziamo come  $H_0 = 100h \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$ , attualmente siamo certi che  $h = (0.72 \pm 0.08)$  entro una sigma di confidence level. Ulteriori misurazioni inoltre ci dicono che l'espansione ha accelerazione positiva.

- **Geometria:** le misurazioni attuali, in particolare quelle sulla radiazione cosmica di fondo, supportano la piattezza dell'Universo.
- **Destino:** nei modelli cosmologici più supportati l'Universo sopravvive per sempre piuttosto che ricollassare su sé stesso: la costante cosmologica è ciò che regola l'espansione accelerata. Tuttavia non è da escludere che  $\Lambda$  possa essere solo un fenomeno temporaneo per lasciare posto ad un termine negativo che porterebbe ad un collasso.
- **Contenuto:** l'Universo è composto da barioni e materia oscura ( $\Omega_M \simeq 0.30$ ), ed energia oscura ( $\Omega_{DE} \simeq 0.70$ ).



## Capitolo 2

# Gli orizzonti in cosmologia

### 2.1 Orizzonte delle particelle e degli eventi

Iniziamo ora lo studio dei diversi orizzonti.

Come accennato nel §1.1 lo studio della propagazione della luce è più conveniente usando il *tempo conforme*. Dato che lo spazio-tempo è isotropico, possiamo sempre definire un sistema di coordinate tale per cui la luce viaggi solo in direzione radiale ( $\theta = \phi = 0$ ).

Richiamiamo la relazione (1.1.10):

$$\Delta\tau = \pm\Delta r \quad (2.1.1)$$

nella quale il segno + corrisponde ai fotoni che si allontanano, mentre il – a quelli che si avvicinano. Quest’equazione mostra l’utilità di usare il tempo conforme: i raggi di luce corrispondono a rette inclinate a  $45^\circ$  nelle coordinate  $\chi - \tau$  (fig.2.1.1). Se invece avessimo utilizzato il tempo fisico  $t$  allora i coni-luce sarebbero stati curvi (cfr. fig.2.1.2).

Definiamo quindi gli orizzonti citati nell’introduzione: quello delle particelle e quello degli eventi. Il primo limita le distanze alle quali possono essere osservati gli eventi passati, o in altre parole, quanto distante hanno viaggiato i fotoni rispetto ad un osservatore a partire dal big bang, il secondo invece limita la distanza alla quale sarà possibile osservare eventi futuri e quindi separa gli eventi che non sono causalmente connessi.

- **Orizzonte delle particelle:** l’equazione (2.1.1) ci dice che la distanza massima comovente che la luce può percorrere tra due istanti di tempo  $\tau_1$  e  $\tau_2 > \tau_1$ , è semplicemente  $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ . Quindi, se il Big Bang è avvenuto a  $t_i \equiv 0$ , la maggior distanza che la luce possa raggiungere al tempo  $t$  per un osservatore sarà:

$$\chi_p(\tau) = \tau - \tau_i = \int_{t_i=0}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.1.2)$$

Questo è detto *orizzonte (comovente) delle particelle*. Visivamente può essere identificato come l'intersezione tra il cono luce passato di un osservatore  $p$  e la superficie di tipo luce  $\tau = \tau_i$ . Ogni tipo di influenza causale deve provenire dall'interno di quella regione: solo le particelle comoventi le cui linee di Universo intersecano il cono luce passato possono mandare un segnale a  $p$ . Specifichiamo che ogni osservatore ha un proprio orizzonte delle particelle.

Aggiungiamo inoltre la forma dell'eq.(2.1.2) in termini di distanza propria:

$$R_p(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.1.3)$$

- **Orizzonte degli eventi:** così come ci sono eventi passati che non possiamo vedere, allo stesso modo ci sono eventi futuri che non saremo mai in grado di osservare. Sempre in coordinate comoventi, la distanza maggiore dalla quale un osservatore al tempo  $t_f$  può ricevere un segnale emesso ad ogni istante di tempo successivo  $t$  è:

$$\chi_e(\tau) = \tau_f - \tau = \int_t^{\tau_f} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.1.4)$$

Esso è chiamato *orizzonte (comovente) degli eventi* ed è simile al più noto orizzonte degli eventi dei buchi neri. Notiamo come questo possa essere finito anche nel caso il tempo fisico sia infinito dato che i due sono legati tramite il fattore di scala  $a(t)$ .

Di nuovo aggiungiamo l'espressione in termini di distanza propria:

$$R_e(t) = a(t) \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.1.5)$$

- **Sfera di Hubble:** Utilizzando la legge di Hubble  $v = H_0 r$ , la sfera di Hubble è definita come la distanza oltre la quale la velocità di recessione supera quella della luce. Questa è quindi:

$$R_H = \frac{c}{H}. \quad (2.1.6)$$

In accordo con il modello  $\Lambda$ CDM, tutti gli oggetti che si allontanano da noi con redshift maggiore di  $z \simeq 1.46$  lo stanno facendo con una velocità maggiore di  $c$ . È importante sottolineare come questo non sia in contraddizione con la relatività speciale: infatti il moto non avviene in un sistema di riferimento inerziale. Essa tuttavia non rappresenta un orizzonte vero e proprio in quanto non separa gli eventi connessi causalmente da quelli non.

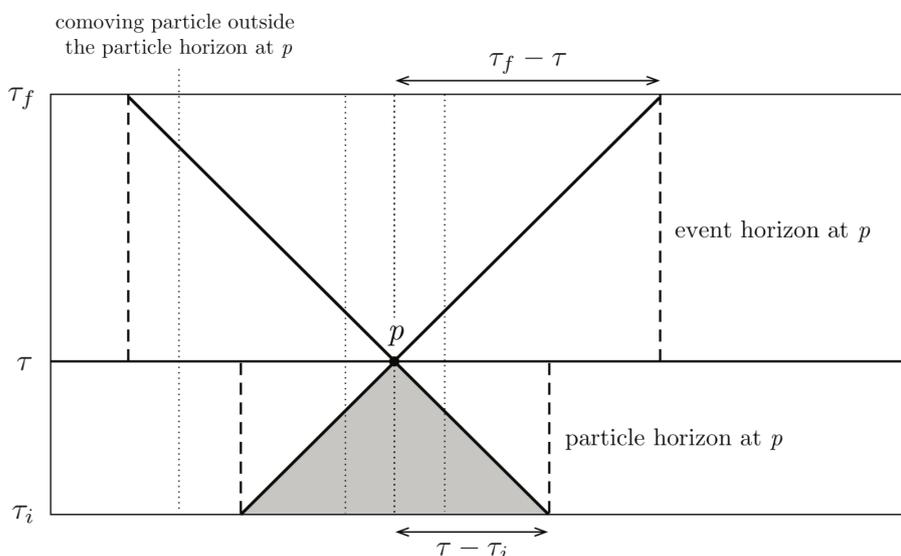


Figura 2.1.1: Diagramma spazio-tempo che illustra il concetto degli orizzonti: le linee tratteggiate rappresentano le linee di Universo di oggetti comoventi. L'orizzonte degli eventi è la massima distanza a cui possiamo mandare un segnale, l'orizzonte delle particelle è la massima distanza da cui possiamo ricevere un segnale.

In riferimento alla fig.(2.1.2), la forma a goccia del cono-luce passato mostra il perché possiamo osservare oggetti che si allontanano da noi con velocità superluminale. La luce che viene emessa da questi oggetti si propaga verso di noi con velocità peculiare uguale a  $c$ , ma poiché la velocità di recessione a quella distanza è maggiore di  $c$ , la velocità totale è ancora superluminale. Tuttavia, siccome la sfera di Hubble dipende dal tempo, alcuni fotoni possono essere superati da essa e trovarsi quindi in una regione con velocità subluminare e raggiungerci. Gli oggetti stessi che hanno emesso i fotoni invece, si sono allontanati sempre di più continuando a muoversi con velocità maggiori di  $c$ : per questo possiamo osservare sorgenti che si allontanano più velocemente della luce. Torneremo su questo nel paragrafo §4.3.

## 2.2 Introduzione all'orizzonte apparente

Il concetto di orizzonte gravitazionale in ambito cosmologico non è ben definito come per gli oggetti compatti che vengono studiati in relatività generale. Infatti per una distribuzione sferica di massa, come può essere una stella circondata dal vuoto, appare un orizzonte gravitazionale quando il suo raggio è sufficientemente piccolo per far sì che la velocità di fuga sia maggiore di  $c$ . Le metriche che descrivono un tale sistema sono quelle di

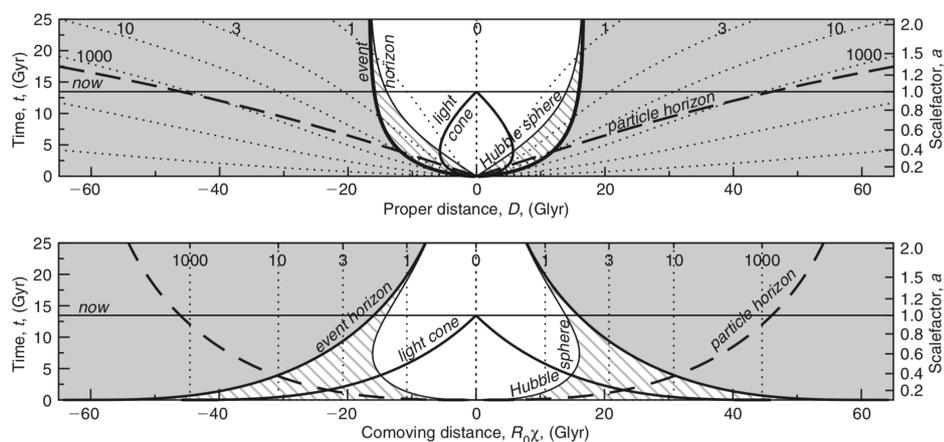


Figura 2.1.2: Diagrammi spazio-tempo che rappresentano le principali caratteristiche dell'espansione dell'Universo con  $(\Omega_M, \Omega_{DE}) = (0.3, 0.7)$  con  $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Le linee verticali tratteggiate mostrano le linee di Universo di oggetti comoventi, noi siamo quella centrale. Ad ognuna di questa è associato il relativo valore di redshift (visibile nell'asse orizzontale superiore). Il fattore di scala  $a \equiv a/a_0$  è usato come asse verticale alternativo. Tutti gli eventi che possiamo osservare attualmente sono all'interno del nostro cono-luce passato. Invece tutti gli oggetti al di fuori della sfera di Hubble stanno recedendo da noi con velocità maggiore di  $c$ .

Nella prima immagine in alto troviamo la velocità dei fotoni rispetto a noi: essa non è costante (come si vede dalla pendenza del cono-luce). I fotoni emessi al di fuori della sfera di Hubble all'inizio si muovono con velocità superluminale, solo quando passano dalla zona tratteggiata in grigio a quella bianca la velocità diventa minore di  $c$  e quindi possono raggiungerci. Nella seconda immagine la distanza propria è stata sostituita con la distanza comovente.

Schwarzschild e Kerr<sup>3</sup> che sono indipendenti dal tempo e pertanto il loro orizzonte apparente è statico e si identifica direttamente come *orizzonte degli eventi*.

Per capire l'importanza del raggio dell'orizzonte gravitazionale, come ingrediente fondamentale della cosmologia, è necessario innanzitutto introdurre il teorema di Birkhoff, che non è altro che la generalizzazione relativistica del teorema di Gauss:

**Teorema di Birkhoff.** *Per una distribuzione sferica ed omogenea di massa, lo spazio al di fuori di essa deve essere regolato dalla metrica di Schwarzschild.*

Riportiamo anche il relativo corollario che ci sarà ulteriormente utile:

**Corollario.** *La curvatura dello spazio-tempo ad una distanza  $R$  relativa ad un qualsiasi centro di coordinate dipende solamente dall'energia–massa con-*

<sup>3</sup>Ricordiamo che la prima metrica descrive la geometria dello spazio-tempo al di fuori di una distribuzione sferica di massa con momento angolare e carica uguali a zero. La metrica di Kerr invece riguarda lo spazio-tempo al di fuori di un buco nero rotante.

tenuta all'interno di una sfera di raggio  $R$ ; grazie alla simmetria sferica, il resto dell'Universo non ha influenza sulla metrica presente a quel raggio[5].

Questo concetto può sembrare poco chiaro in quanto l'origine delle coordinate può essere posta in ogni punto dell'Universo; in realtà ciò che conta è solo la curvatura relativa. La curvatura misurata ad un certo raggio  $R$  da un certo osservatore sarà diversa da quella misurata da un altro punto. Immaginiamo ora che l'osservatore estenda la propria prospettiva prendendo un raggio sempre più grande. Ad un certo punto la sua sfera di raggio  $R$  sarà sufficientemente grande per creare un orizzonte gravitazionale, proprio come avviene per la situazione descritta prima per metrica di Schwarzschild e Kerr. Tale raggio sarà quindi:

$$R_h = 2GM \quad (2.2.1)$$

con  $M$  detta massa di *Misner-Sharp*, che rappresenta la massa di una sfera di raggio  $R_h$ :

$$M \equiv \frac{4\pi}{3} R_h^3 \rho. \quad (2.2.2)$$

Tuttavia, al contrario delle due metriche citate in precedenza, ora  $R_h$  può variare al passare del tempo, perciò in ogni caso esso definisce un orizzonte gravitazionale. Potrebbe diventare un orizzonte degli eventi in caso le proprietà del fluido cosmico lo consentano.

Esso, ad ogni istante di tempo cosmico, separa le geodetiche nulle che si dirigono verso di noi da quelle che si allontanano (questo risulterà più chiaro una volta ottenuta l'eq.(2.2.21)).

Al contrario dello spazio-tempo che circonda un oggetto compatto, la metrica di *FRW* è sempre a simmetria sferica e per questo la massa di *Misner-Sharp* e l'orizzonte apparente sono collegati (come abbiamo visto nel corollario del teorema di Birkhoff). Infatti in presenza di simmetria sferica, la definizione generale di orizzonte apparente è proprio la (2.2.1).

In altre parole, l'uso del teorema di Birkhoff e il suo corollario ci ha permesso di definire un orizzonte gravitazionale che può essere identificato come orizzonte appartenente, il quale è definito in modo generale, anche per simmetrie non sferiche.

### 2.2.1 Postulato di Weyl

Introduciamo ora il postulato di Weyl, che ci permetterà di riscrivere la metrica di *FRW* (1.1.5) in modo tale da far risaltare la presenza di  $R_h$ :

**Postulato di Weyl.** *Le linee di Universo di galassie e particelle formano una famiglia di geodetiche che non si intersecano, convergenti al passato.*

o, in altre parole, affinché il principio cosmologico sia valido in ogni istante di tempo, le linee di Universo devono essere perpendicolari in ogni

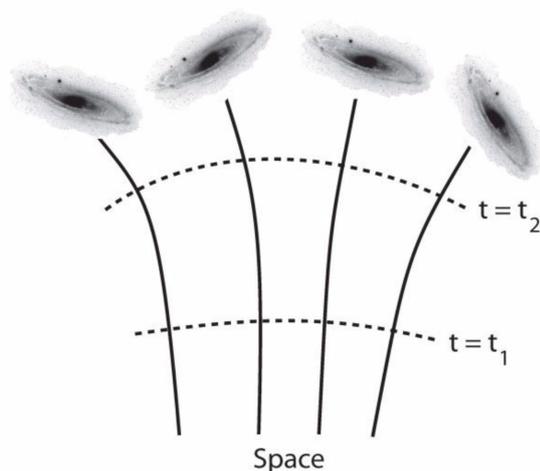


Figura 2.2.1: Visualizzazione del postulato di Weyl

punto ad un'ipersuperficie di tipo spazio (vedi fig. (2.2.1)). Per soddisfare questa condizione, ogni distanza in un Universo che obbedisce alla metrica *FRW* deve essere esprimibile come prodotto tra una distanza comovente  $r$  e una funzione del tempo cosmico  $a(t)$ , cioè

$$R(t) = a(t)r. \quad (2.2.3)$$

Definiamo quindi per convenienza:

$$a(t) := e^{f(t)} \quad (2.2.4)$$

dove  $f(t)$  è una funzione solo del tempo cosmico  $t$ . Questa equazione unita alla precedente consente di scrivere:

$$r = Re^{-f} \quad (2.2.5)$$

e quindi

$$dr = e^{-f(t)}dR - Re^{-f(t)}f(t)dt \quad (2.2.6)$$

Imponendo  $k = 0$ , cioè prendendo in considerazione un Universo piatto, sostituiamo quest'ultima equazione in (1.1.5) ottenendo:

$$ds^2 = [1 - (R\dot{f})^2] dt^2 + 2R\dot{f}dt dR - dR^2 - R^2 d\Omega^2. \quad (2.2.7)$$

Se definiamo ora per comodità:

$$\Phi := 1 - (R\dot{f})^2 \quad (2.2.8)$$

la (2.2.7) diventa, sistemando man mano i termini

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \Phi dt^2 + 2R\dot{f}dt dR - \Phi^{-1}\Phi dR^2 - R^2 d\Omega^2 \\
 &\Downarrow \\
 ds^2 &= \Phi \left[ dt + R\dot{f}\Phi^{-1}dR \right]^2 - \Phi^{-1}dR^2 - R^2 d\Omega^2 \\
 &\Downarrow \\
 ds^2 &= \Phi \left[ 1 + R\dot{f}\dot{R}\Phi^{-1} \right]^2 dt^2 - \Phi^{-1}dR^2 - R^2 d\Omega^2 \quad (2.2.9)
 \end{aligned}$$

Il significato del fattore  $\dot{f}$  e della funzione  $\Phi$  può essere trovato utilizzando nuovamente il corollario del teorema di Birkhoff: come abbiamo visto, ciò che può misurare un osservatore alla distanza  $R$  è influenzato solamente dall'energia-massa presente entro quella distanza.

Sostituendo ora la (2.2.2) in (2.2.1) e unendo poi la (1.2.18) ottengo:

$$R_h^2 = \frac{3}{8\pi G\rho} \Rightarrow R_h = \frac{1}{H} = \frac{a}{\dot{a}} = \frac{1}{\dot{f}} \quad (2.2.10)$$

In questo modo la (2.2.9) diventa

$$ds^2 = \Phi \left[ 1 + \left( \frac{R}{R_h} \right) \dot{R}\Phi^{-1} \right]^2 dt^2 - \Phi^{-1}dR^2 - R^2 d\Omega^2 \quad (2.2.11)$$

dove  $\Phi$  è chiaramente diventato  $\Phi = 1 - \left( \frac{R}{R_h} \right)^2$

## 2.2.2 Geodetiche

Riprendiamo ora l'equazione che regola il postulato di Weyl((2.2.3)) che combinata insieme alla sua derivata temporale  $\dot{R} = \dot{a}r$  porge:

$$\dot{R} = \frac{\dot{a}}{a}R = HR. \quad (2.2.12)$$

Invertendo la (2.2.10) otteniamo  $H = \frac{1}{R_h}$  e quindi l'equazione precedente può essere scritta semplicemente come  $\dot{R} = \frac{R}{R_h}$ .

In questo modo possiamo riscrivere il termine esclusivamente temporale del tensore metrico,  $g_{tt}$ , della (2.2.11) come:

$$g_{tt} = \Phi \left[ 1 + \left( \frac{R}{R_h} \right)^2 \Phi^{-1} \right]^2 \quad (2.2.13)$$

che riarrangiando di nuovo i conti<sup>4</sup> diventa banalmente  $g_{tt} = \Phi^{-1}$ . La (2.2.11) è quindi diventata

$$ds^2 = \Phi^{-1}dt^2 - \Phi^{-1}dR^2 - R^2 d\Omega^2. \quad (2.2.14)$$

---


$$\begin{aligned}
 {}^4 g_{tt} &= \Phi + 2 \left( \frac{R}{R_h} \right)^2 + \left( \frac{R}{R_h} \right)^4 \Phi^{-1} = 1 + \left( \frac{R}{R_h} \right)^2 + \left( \frac{R}{R_h} \right)^4 \left[ 1 - \left( \frac{R}{R_h} \right)^2 \right]^{-1} = \\
 &= \frac{1 - \left( \frac{R}{R_h} \right)^4 + \left( \frac{R}{R_h} \right)^4}{1 - \left( \frac{R}{R_h} \right)^2} = \Phi^{-1}
 \end{aligned}$$

Sistemiamo ora l'addendo relativo al termine  $dR$ : dal postulato di Weyl otteniamo la sua forma differenziale espressa come  $dR = \dot{a}(t)dtr$ , che unita alla (2.2.10) e alla (2.2.3) diventa  $dR = \left(\frac{R}{R_h}\right) dt$ .

Se inoltre riduciamo lo studio ad una particella che si muove solo in direzione radiale cioè  $d\Omega = 0$ , la (2.2.14) diventa semplicemente:

$$ds = dt. \quad (2.2.15)$$

Questa equazione mostra chiaramente come  $t$  sia il tempo cosmico misurato in un sistema di riferimento comovente ovunque nell'Universo. In questa situazione siamo degli osservatori in caduta libera e pertanto i nostri orologi devono misurare il passaggio del tempo senza influenze di tipo gravitazionale.

La situazione cambia se analizziamo il comportamento della metrica a distanza fissata  $R = R_0$  dall'osservatore: mentre prima  $R$  era associato a particelle in espansione insieme al flusso di Hubble, ora fissiamo  $R_0$  e immaginiamo che le particelle passino a questa distanza, facendo così ci aspettiamo che emergano effetti di tipo gravitazionale.

Infatti tornando alla (2.2.11),  $dR = 0$  per quanto appena detto, e se di nuovo restringiamo lo studio a moti puramente radiali anche  $d\Omega = 0$ .

Otteniamo quindi

$$ds^2 = \Phi_0 dt^2 \quad (2.2.16)$$

dove

$$\Phi_0 \equiv 1 - (R_0/R_h)^2. \quad (2.2.17)$$

Questo risultato riproduce elegantemente gli effetti che avrebbero prodotto le metriche di Schwarzschild e Kerr per cui il tempo ad una distanza fissata  $R_0$  da una sorgente gravitazionale non è più il tempo proprio. Infatti per ogni intervallo finito  $ds$ ,  $\lim_{R_0 \rightarrow R_h} dt = \infty$ , e ciò associa a  $R_h$  le stesse caratteristiche che normalmente si ottengono dal raggio di Schwarzschild.

Se ora invece prendiamo in considerazione delle geodetiche di tipo luce, la condizione  $ds^2 = 0$  unita alla restrizione a moti puramente radiali, fanno sì che la metrica  $FRW$  diventi:

$$dt = \pm a dr^5 \quad (2.2.18)$$

il che implica che lungo una geodetica di tipo luce che si propaga verso l'interno valga:

$$\dot{r} = -\frac{1}{a} \quad (2.2.19)$$

Il moto del raggio di luce relativo ad un osservatore nell'origine del sistema di coordinate espresso in termini del raggio proprio  $R_\gamma$  però essere descritto

---

<sup>5</sup>che non è altro che l'eq.(2.1.1) ma in termini di distanza propria.

come:

$$\frac{dR_\gamma}{dt} = \dot{a}r_\gamma + a\dot{r}_\gamma \quad (2.2.20)$$

o anche:

$$\frac{dR_\gamma}{dt} = \left( \frac{R_\gamma}{R_h} - 1 \right) \quad (2.2.21)$$

In quest'ultima espressione abbiamo considerato un raggio di luce che si propaga verso l'origine (da qui il segno  $-$ , se si stesse propagando verso l'esterno sarebbe bastato mettere il segno  $+$ ). È molto semplice mostrare come sostituendo nell'eq (2.2.11)  $\dot{R}$  con  $dR_\gamma/dt$  e ponendo  $dR = (dR_\gamma/dt) dt$  si ottenga proprio  $ds = 0$ , come richiesto dalle geodetiche nulle.

Questo dimostra come, indipendentemente dal sistema di coordinate che usiamo per scrivere la geodetica di una particella, sia con che senza gli effetti gravitazionali, il comportamento della luce è sempre consistente con le proprietà che seguono dalle geodetiche nulle.

Dall'eq.(2.2.21) tuttavia possiamo ottenere due importanti conseguenze:

- $dR_\gamma/dt = 0$  quando  $R_\gamma = R_h$ . In altre parole, la velocità della luce, misurata in termini di distanza propria per unità di tempo cosmico possiede due componenti che si eguagliano in  $R_h$ : il primo è dovuto all'espansione della legge di Hubble in sé

$$\frac{dR_{\gamma\text{Hubb}}}{dt} = \left( \frac{R_\gamma}{R_h} \right) = H R_\gamma \quad (2.2.22)$$

l'altro invece è la velocità della luce misurata in un sistema di riferimento comovente, cioè:

$$\frac{dR_{\gamma\text{com}}}{dt} = -1 \quad (2.2.23)$$

- Se  $R_\gamma > R_h$ , la distanza propria del fotone aumenta sebbene esso stia puntando verso l'origine delle coordinate (ricordiamo appunto la presenza del segno  $-$ ). In termini di distanza propria, il fotone si avvicina a noi solo se si trova all'interno del nostro orizzonte apparente, ma poiché  $R_h$  è anch'essa funzione del tempo,  $\dot{R}_\gamma$  può cambiare segno a secondo che  $R_h$  sia maggiore di  $R_\gamma$  o viceversa.

Per esempio, facendo riferimento all'immagine (2.2.2), un fotone che viene emesso oltre il nostro orizzonte apparente  $R_h(t_e)$  al tempo  $t_e < t_0$  (la zona a sinistra di  $t_{max}$ ), può iniziare il suo viaggio allontanandosi da noi (misurato in termini di distanza propria), fermarsi quando  $R_\gamma = R_h$  (il punto nero a  $t_{max}$ ) e quindi cambiare direzione successivamente quando e se  $R_h$  sarà cresciuto più velocemente di  $R_\gamma$  tanto da superarlo.

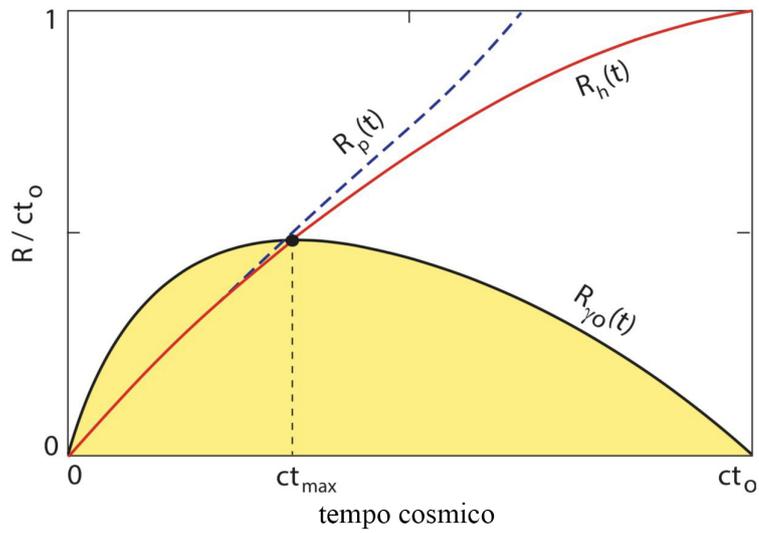


Figura 2.2.2: La curva  $R_{\gamma_0}(t)$  rappresenta la geodetica nulla che raggiunge l'osservatore al tempo  $t_0$ . Solo i fotoni emessi lungo questa curva possono essere visti nel presente. La curva rossa  $R_h(t)$ , mostra l'evoluzione al passare del tempo del raggio dell'orizzonte gravitazionale. Prima del tempo  $t_{max}$ , al quale il fotone raggiunge la massima distanza propria dall'osservatore,  $R_{\gamma_0}$  è maggiore di  $R_h$  perciò in riferimento all'eq. (2.2.21) deve aumentare con il passare del tempo. Questo processo si inverte a  $t_{max}$ , dopo il quale  $R_{\gamma_0} < R_h$ , cioè  $\dot{R}_{\gamma_0} < 0$ . La linea blu tratteggiata rappresenta l'orizzonte delle particelle.

## Capitolo 3

# L'Orizzonte cosmologico appartente

Il comportamento di  $\dot{R}_\gamma$  appena descritto conferma  $R_h$  come il raggio di un orizzonte gravitazionale (o apparente) per un osservatore posto nell'origine delle coordinate. I fotoni emessi oltre questa superficie, anche se stanno puntando verso di noi, in realtà si stanno allontanando. Quelli emessi all'interno invece seguono la geodetica nulla che ci raggiunge. In quest'ottica, l'orizzonte apparente si comporta così anche nelle metriche di Schwarzschild e Kerr, ma al contrario di queste,  $R_h$  ora dipende dal tempo. Per questo l'orizzonte può cambiare ed eventualmente mostrare in futuro zone attualmente inaccessibili.

Per essere precisi, la parte attualmente visibile dell'Universo, al tempo  $t_0$ , si ottiene integrando l'eq (2.2.21), per un certo  $R_h(t)$ , da  $t = 0$ , cioè quando è avvenuto il big bang, fino al presente. La dimensione propria dell'Universo è determinata dalla massima distanza raggiungibile, in termini di distanza propria, dalle geodetiche nulle che ci raggiungono a  $t_0$ .

Non è corretto dire che i fotoni che osserviamo possano oltrepassare  $R_h$  avanti e indietro senza restrizioni: come abbiamo visto nell'introduzione, sono solo le geodetiche nulle che ci raggiungono che determinano la porzione visibile dell'Universo nel presente.

L'orizzonte gravitazionale è dipendente dall'osservatore: i raggi di luce che attraversano avanti e indietro la superficie posta a  $R_h$  e poi continuano verso l'infinito non potranno mai essere rivelati da noi.

Possiamo quindi presentare due teoremi riguardo l'Universo visibile:

**Teorema 1.** *In un Universo che si espande monotonamente con  $\dot{H} \leq 0$  e  $\dot{R}_h \geq 0 \forall t \in [0, t_0]$  la porzione di Universo visibile oggi è sempre minore o uguale al nostro orizzonte gravitazionale, i.e.,  $R_{\gamma, \max} \leq R_h(t_0)$ .*

*Dimostrazione.* Tutte le geodetiche nulle soddisfano la condizione iniziale

$R_\gamma(0) = 0$ . Le geodetiche nulle che ci raggiungono devo inoltre soddisfare la condizione  $\lim_{t \rightarrow t_0} R_\gamma(t) = 0$ . Dunque  $\exists t_{\max} \in [0, t_0]$ , al quale  $R_\gamma$  ha un punto stazionario, cioè:

$$\left. \frac{dR_\gamma}{dt} \right|_{t_{\max}} = 0 \quad (3.0.1)$$

Questo implica, utilizzando l'eq.(2.2.21) che

$$R_{\gamma, \max} \equiv R_\gamma(t_{\max}) = R_h(t_{\max}) \quad (3.0.2)$$

Ma  $\dot{R}_h \geq 0 \forall t \in [0, t_0]$  mentre

$$\frac{dR_\gamma}{dt} \leq 0 \quad \forall t \in [t_{\max}, t_0] \quad (3.0.3)$$

perciò l'eq.(3.0.2) diventa:

$$R_{\gamma, \max} = R_h(t_{\max}) \leq R_h(t_0) \quad (3.0.4)$$

□

Per mostrare in pratica il significato di questo teorema applichiamo l'eq.(2.2.21) a due casi speciali<sup>6</sup>:

- Consideriamo un sistema cosmologico in cui  $R_h = ct$ . In questa situazione vale  $H(t) = 1/t$  perciò l'equazione (2.2.21) diventa:

$$\frac{dR_\gamma}{dt} = \frac{R_\gamma}{t} - c \quad (3.0.5)$$

che unita alla condizione iniziale  $R_\gamma(t=0) = R_\gamma(t_0) = 0$  ha come soluzione

$$R_\gamma(t) = ct \ln\left(\frac{t_0}{t}\right). \quad (3.0.6)$$

Al punto critico,  $dR_\gamma/dt = 0$  cioè  $t_{\max} = t_0/e$  e quindi

$$R_{\gamma, \max}^{R_h=ct} = \frac{1}{e} R_h(t_0) \approx 0.37 R_h(t_0) \quad (3.0.7)$$

- Consideriamo ora uno spazio di *de Sitter*: la costante di Hubble  $H(t) = H_0$  è fissata e così il raggio dell'orizzonte gravitazionale diventa, usando l'eq(2.2.10),  $R_h^{\text{de Sitter}} = c/H_0$ . In questo caso l'eq (2.2.21) ha come soluzione

$$R_{\gamma, \max}^{\text{de Sitter}} = R_h(t_0) \quad (3.0.8)$$

Il modello  $\Lambda$ CDM cade tra questi due modelli semplificati,  $R_{\gamma, \max}$  è tipicamente circa la metà di  $R_h(t_0)$  per ogni modello cosmologico (tranne chiaramente quello appena visto di *de Sitter*).

---

<sup>6</sup>Re-introduciamo l'uso di  $c$  in quanto considerando distanze è più pratico procedere con le unità di misura usuali.

---

**Teorema 2.** *Sebbene un Universo contenente energia fantasma<sup>7</sup> possa avere un raggio gravitazionale  $R_h(t)$  che varia non monotonicamente nel tempo, nessuna delle geodetiche nulle che ci ha raggiunto ha mai superato l'orizzonte gravitazionale.*

*Dimostrazione.* Siano  $R_{h,i}^{\max}, i = 1 \dots N$  gli  $N$  massimi ordinati di  $R_h$  nell'intervallo  $t_{\max} \in [0, t_0]$  t.c.  $R_{h,1}^{\max} \geq R_{h,2}^{\max} \geq \dots \geq R_{h,N}^{\max}$ . Inoltre sia  $t_{\max} \in [0, t_0]$  il tempo al quale

$$R_h(t_{\max}) = R_{h,1}^{\max} \quad (3.0.9)$$

Ora supponiamo che  $R_\gamma(t_{\max}) > R_{h,1}^{\max}$ : in tal caso  $dR_\gamma/dt \geq 0 \forall t \in [t_{\max}, t_0]$ ,  $R_\gamma(t_0) \neq 0$ , così  $R_\gamma(t_0) \neq 0$ , il che viola il requisito che i fotoni rivelati da noi oggi seguano le geodetiche nulle che ci raggiungono al tempo  $t_0$ . Nel caso speciale in cui l'Universo sia dominato completamente da energia fantasma, l'orizzonte si stringerà sempre attorno all'osservatore, così  $R_h$  ha solo un massimo (al tempo  $t_{max} = 0$ ), e i raggi di luce ci raggiungono solo se  $R_\gamma < R_h$  al big bang.  $\square$

Insieme questi due teoremi rendono chiaro come, indipendentemente da come  $R_h$  evolva, nessuno dei raggi di luce che riveliamo oggi sono stati generati oltre il nostro orizzonte gravitazionale. Infatti, tolto il modello di de Sitter, in cui l'orizzonte gravitazionale è pre-esistente e statico (cfr. eq.(3.0.8)), tutti le altre tipologie di Universi in espansione hanno un limite su ciò che possiamo osservare, talvolta alla metà del nostro raggio gravitazionale,  $R_h(t_0)$ , a volte ancora meno (cfr. eq.(3.0.7)).

### 3.0.1 Confronto con gli altri orizzonti

La ragione per cui vale la restrizione che abbiamo appena fatto nel caso di metrica  $FRW$ , è che in tutti i modelli, tolto quello di de Sitter, non c'erano sorgenti di fotoni pre-esistenti a distanza finita dall'origine delle coordinate dell'osservatore, prima del big bang (a  $t = 0$ ). Per questo, i fotoni più distanti che riveliamo oggi possono essere stati emessi solo dopo che l'ultimo ha avuto tempo a sufficienza per raggiungere la maggior distanza propria da noi, che è circa la metà di  $R_h(t_0)$ .

Riprendiamo ora i concetti di *orizzonte delle particelle e degli eventi* (cfr. §2.1) per poterli confrontare con l'orizzonte gravitazionale.

Iniziamo derivando rispetto al tempo l'eq.(2.1.3); otteniamo

$$\dot{R}_p = c \left( \frac{R_p}{R_h} + 1 \right), \quad (3.0.10)$$

---

<sup>7</sup>Un fluido perfetto è caratterizzato solo dalla densità di energia  $\rho$  e dalla pressione isotropa  $P$ . Per tanto possiamo, per esempio, supporre che la relazione sia del tipo  $P = \omega \rho c^2$ . Facendo variare  $\omega$  si ottengono diverse configurazioni per l'Universo, in particolar modo se  $\omega < 1$  si ottiene quello in cui è presente l'energia fantasma.

che va confrontata con l'eq.(2.2.21): essa descrive il moto di un fotone che si allontana dall'origine delle coordinate dell'osservatore. La sua soluzione (eq.(2.1.3)) quindi restituisce la massima distanza propria che può aver raggiunto dal big bang fino al tempo  $t$ ; ma questa non è la stessa distanza propria che un fotone può aver percorso raggiungendoci al tempo  $t_0$ , dato che come abbiamo visto  $R_{\gamma 0}(t_{\max})$ , nella fig.2.2.2, è sempre minore di  $R_h(t_0)$ . Inoltre,  $R_p(t)$  non ha limiti superiori, infatti il secondo membro di (3.0.10) è sempre maggiore di  $c$ , perciò  $R_p$  supera facilmente  $R_h$  (si veda la linea blu tratteggiata della fig.2.2.2).

Quindi la ragione per cui  $R_h$  è più importante di  $R_p$  nelle osservazioni cosmologiche è che non vedremo mai fotoni che si stanno allontanando da noi, raggiungere distanze proprie pari all'orizzonte delle particelle. Come abbiamo già notato in altre occasioni, le geodetiche nulle devono necessariamente raggiungerci affinché noi possiamo rivelare i fotoni che si muovono lungo di esse.

Per quanto riguarda invece l'*orizzonte degli eventi*, se deriviamo l'equazione l'eq.(2.1.5) otteniamo

$$\dot{R}_e = c \left( \frac{R_e}{R_h} - 1 \right). \quad (3.0.11)$$

Il significato fisico di  $R_e$  è simile a  $R_\gamma$  se non per il fatto che rappresenta un orizzonte per i fotoni che ci raggiungeranno in futuro, non oggi.

Questo è il perché l'orizzonte apparente non è necessariamente un orizzonte degli eventi, potrebbe diventare tale, ma dipende dall'equazione di stato del fluido cosmico.

## Capitolo 4

# Equivoci in cosmologia

Analizziamo ora alcune credenze errate riguardo l'espansione dell'Universo:

1. le velocità di recessione non possono superare la velocità della luce;
2. l'inflazione causa un'espansione superluminale dell'Universo ma quella normale no.
3. le galassie con velocità di recessione maggiori di  $c$  esistono ma non possiamo vederle.

### 4.1 Velocità di recessione

Una falsa credenza è che l'espansione dell'Universo non possa avvenire più veloce della luce. Poiché la legge di Hubble prevede recessioni superluminali per distanze maggiori alla sfera di Hubble, spesso è stato suggerito come fosse necessario applicare le correzioni della relatività speciale (RS) a tali velocità. Tuttavia è ampiamente accettato il fatto che sia necessaria la relatività generale (RG) e non quella speciale per descrivere le misure di natura cosmologica. Infatti non c'è alcuna contraddizione con la relatività speciale fintanto che il moto superluminale avviene al di fuori di un sistema di riferimento inerziale. Le galassie che si allontanano da noi a tali velocità possono essere a riposo localmente e il loro moto in un sistema di riferimento inerziale rimane correttamente descritto dalla RS. La velocità di recessione, invece può essere maggiore della velocità della luce.

In RS, il redshift è direttamente collegato alle velocità: è tramite questo concetto che Hubble nel '29 convertì il redshift delle galassie misurate in velocità giungendo alla legge lineare dell'espansione dell'Universo. La RG invece interpreta il redshift cosmologico in maniera differente, infatti la velocità è dovuta all'espansione dello spazio, non al movimento attraverso esso e pertanto questo non può essere calcolato con la formula classica della RS.

Le due velocità in funzione di  $z$  sono quindi:

$$\text{GR} \quad v_{rec}(t, z) = \frac{c}{a(t_0)} \dot{a}(t) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (4.1.1)$$

$$\text{SR} \quad v_{pec}(z) = c \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} \quad (4.1.2)$$

Dove la prima formula rappresenta la velocità di recessione, quindi quella dovuta all'espansione dell'Universo, descritta appunto dalla RG per quanto appena detto. La seconda invece è la velocità peculiare dell'oggetto descritta correttamente dalla RS. La formula (4.1.1) è in funzione di  $t$  poiché quando osserviamo un oggetto con redshift  $z$  dobbiamo specificare in quale momento vogliamo calcolare la sua velocità di recessione: se per esempio fissiamo  $t = t_0$  otteniamo la velocità che ha oggi, se invece poniamo  $t = t_{em}$  otteniamo la velocità che aveva al momento dell'emissione dei fotoni.

Questa variazione di velocità in funzione del tempo può essere notata nel cambiamento di pendenza delle linee di Universo nella prima immagine della fig.2.1.2.

Sebbene la RS descriva in modo errato il redshift cosmologico, per diversi decenni è stato utilizzato per convertire  $z$  in velocità: questo poiché l'eq.(4.1.2) approssimata al primo ordine è uguale la legge di Hubble. Nella figura 4.1.1 possiamo vedere come nelle diverse configurazioni di Universo, gli oggetti con  $z \sim 1.5$  abbiano tutti velocità di recessione maggiori di  $c$ .

## 4.2 Inflazione

Spesso l'inflazione dell'Universo viene descritta come *espansione superluminale*. Questo è fuorviante in quanto ogni espansione descritta dalla legge di Hubble produce velocità di recessione maggiori di  $c$  per oggetti sufficientemente lontani. Anche durante il periodo inflazionario, gli oggetti all'interno della sfera di Hubble recedono a velocità minori di quella della luce, mentre quelli che si trovano all'esterno recedono in modo superluminale. Questa situazione è identica anche per i periodi successivi, tranne per il fatto che  $H$  nei primi momenti dell'Universo era molto più grande. Durante l'inflazione, la distanza propria dalla sfera di Hubble rimane costante e coincide con l'orizzonte degli eventi.

Sarebbe corretto descrivere l'inflazione come espansione superluminale se tutte le distanze entro la lunghezza di Planck  $l_{pl} \sim 10^{-35}$  m stessero recedendo più velocemente della luce. Risolvendo

$$D_H = \frac{c}{H} = l_{pl} \Rightarrow H = 10^{43} \text{s}^{-1} = 10^{62} \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \quad (4.2.1)$$

Si trova che se la costante di Hubble durante l'inflazione fosse maggiore di questo valore allora sarebbe corretto chiamarla *espansione superluminale*.

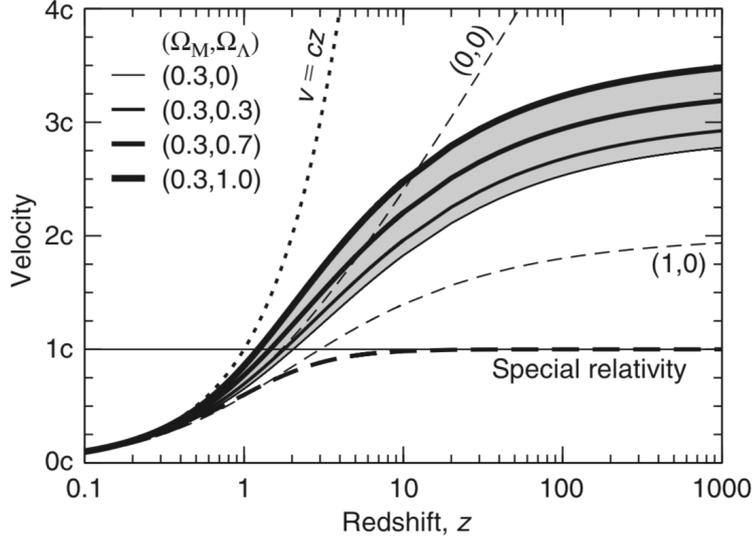


Figura 4.1.1: Plot della velocità in funzione dello redshift sotto diverse assunzioni. L'approssimazione  $v = cz$  per piccoli  $z$  è valido sia per RG che RS. Le curve sono state ottenute utilizzando rispettivamente le eq.(4.1.1) e (4.1.2), ponendo  $\dot{R}(t) = \dot{R}_0$ , il fattore di scala attuale. Le linee con diverso spessore rappresentano le diverse configurazioni di Universo possibili.

### 4.3 Galassie in recessione superluminale

Spesso si pensa che le galassie che recedono da noi con velocità superluminale non siano osservabili, vediamo come questo non sia vero.

Abbiamo visto come la velocità dei fotoni che si dirigono verso di noi non sia costante, ma uguale a  $v_{rec} - c$ . Sebbene i fotoni siano nella regione superluminale e quindi si allontanano da noi (utilizzando le distanze proprie) anche la sfera di Hubble è in espansione. Se l'Universo si sta espandendo con accelerazione negativa allora  $H$  diminuisce, come diminuisce  $\dot{a}$  (e quindi la sfera di Hubble rimpicciolisce), se invece l'Universo si espande con accelerazione positiva,  $H$  comunque diminuisce dato che  $\dot{a}$  cresce più di  $a$ . Fintantoché la sfera di Hubble si espande più velocemente di quanto si muovano i fotoni, essa ad un certo punto li supererà facendoli entrare nella regione subluminali.

Il nostro cono luce presente nella prima immagine in alto della fig.2.1.2 mostra come ogni fotone che osserviamo è stato emesso nei primi 5 miliardi di anni nelle regioni che stavano recedendo da noi con velocità superluminale. Solo quando la sfera di Hubble, espandendosi li avrà superati allora saranno entrati in regioni subluminali.

Se risolviamo l'eq.(4.1.1) per un Universo che obbedisce al modello  $\Lambda$ CDM  $(\Omega_M, \Omega_{DE}) = (0.3, 0.7)$  troviamo che tutte le galassie che possiedono  $z \sim 1.46$

stanno recedendo con velocità maggiori di quella della luce. Ad oggi sono state osservate una centinaia di galassie con redshift maggiore di quello appena citato.

## Capitolo 5

# Conclusione

Nella presente tesi abbiamo visto come, grazie al corollario del teorema di Birkhoff si possa giustificare la presenza di un orizzonte apparente anche per l'Universo stesso. La differenza principale tra quest'orizzonte e quello presente nelle metriche di Schwarzschild e Kerr, è che in questo caso, il raggio dipende dal tempo.

Abbiamo quindi riarrangiato la metrica *FRW* per far risaltare la presenza di  $R_h$ : facendo così abbiamo dimostrato come la superficie che viene definita dall'orizzonte separi effettivamente le geodetiche nulle che ci raggiungono, da quelle che invece si allontanano sempre di più.

Dall'esistenza dell'orizzonte apparente seguono due teoremi: il primo afferma che la porzione visibile dell'Universo è sempre minore o uguale al nostro orizzonte gravitazionale ( $R_{\gamma, \max} \leq R_h(t_0)$ ). Il secondo, invece, conferma come, in un Universo contenente energia fantasma, sebbene esso possa avere un orizzonte gravitazionale che varii non monotonicamente nel tempo, nessuna delle geodetiche nulle che ci ha raggiunto abbia mai superato  $R_h$ .

Nel caso le condizioni del fluido cosmico lo consentano, l'orizzonte apparente potrà diventare un orizzonte degli eventi.

Come ultimo argomento abbiamo affrontato alcuni degli equivoci più comuni in cosmologia: le velocità di recessione possono effettivamente superare  $c$  senza violare la relatività ristretta, è errato supporre espansioni superluminali solo durante il periodo dell'inflazione e infine la possibilità di rivelare galassie che recedono da noi con velocità superiori a quella della luce.



# Bibliografia

- [1] F. Melia, “The apparent (gravitational) horizon in cosmology,” *American Journal of Physics*, vol. 86, no. 8, pp. 585–593, 2018.
- [2] T. M. Davis and C. H. Lineweaver, “Expanding confusion: Common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe,” *Publications of the Astronomical Society of Australia*, vol. 21, no. 1, p. 97–109, 2004.
- [3] D. Baumann, *Cosmology Part III: Mathematical Tripos*.
- [4] A. Liddle, *An introduction to modern cosmology; 2nd ed.* Chichester: Wiley, 2003.
- [5] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York, NY: Wiley, 1972.