



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
“TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Algebre di Clifford, Spinori e l'Equazione di Dirac in uno Spazio-Tempo Curvo

Relatore:
Prof. Francesco Bottacin

Laureanda:
Nidia Favaretto
Matricola: **1203103**

25 settembre 2020
Anno Accademico 2019/2020

Introduzione

"La bellezza matematica è una qualità che non si può definire, non più di quanto si possa definire la bellezza nell'arte, ma che gli studiosi di matematica non hanno alcuna difficoltà a percepire."

Paul A. M. Dirac

Non è raro che a un matematico, ma credo anche a un fisico, vengano poste domande di questo tipo: "A cosa serve studiare tutto questo nella vita di ogni giorno? Cosa c'è di così bello?" Fornire una risposta, che sia soddisfacente per chi non ha avuto l'occasione di avvicinarsi alla matematica, di scoprirne le sue potenzialità e di appassionarsene, certamente non è cosa facile. L'argomento di questa tesi può essere un esempio di come un'equazione matematica con una semplice ma elegante formulazione racchiuda in sé una "bellezza teorica", un notevole significato fisico e importanti applicazioni.

Il nucleo centrale di questo lavoro è rappresentato dall'*Equazione di Dirac*, ma non ci si vuole limitare ad una semplice riscrittura di uno dei risultati più importanti della fisica del Novecento, bensì si vogliono analizzare quelle costruzioni della geometria che permettono di formulare in modo rigoroso l'equazione nell'ambito della relatività ristretta e generale.

Si partirà da una descrizione dettagliata del *gruppo delle rotazioni dello spazio* $SO(3)$ e del suo rivestimento doppio dato dal *gruppo speciale unitario* $SU(2)$, per poi ampliare la trattazione a una dimensione maggiore in cui non entrano più in gioco solamente le coordinate spaziali ma anche quella temporale. Entreremo così nell'ambito della relatività ristretta, parlando del *gruppo di Lorentz ristretto* $SO^+(3, 1)$ e del *gruppo speciale lineare* $SL(2, \mathbb{C})$, che ne costituisce il ricoprimento. La teoria sottostante a tutto ciò è quella delle algebre di Clifford e dei Gruppi di Spin. La loro definizione si rivelerà quindi di fondamentale importanza per un'esposizione rigorosa dell'equazione di Dirac. Un'*algebra di Clifford* è una struttura algebrica che generalizza la nozione di numero complesso e quaternione, ed è un'algebra generata da uno spazio vettoriale con una forma quadratica. La loro teoria è strettamente collegata a quella del gruppo $SO(3)$ dal momento che il gruppo $SU(2)$ si può costruire come un sottogruppo dell'algebra di Clifford, che è detto *gruppo di Spin* ed è indicato con $Spin(3)$. In modo del tutto analogo si potrà definire il gruppo $Spin(3, 1)$, coincidente con il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ che costituisce

il ricoprimento del gruppo $SO^+(3,1)$. In fisica i gruppi di Spin sono usati per descrivere le simmetrie dei fermioni, ed emergeranno nella definizione di struttura di Spin sulla varietà pseudo-Riemanniana, mentre ritroveremo le algebre di Clifford nella definizione delle matrici di Dirac e dell'algebra di Dirac. Come si può intuire già da questi primi argomenti, è attraverso il linguaggio della geometria differenziale che si possono introdurre le costruzioni usate per descrivere il moto delle particelle con Spin semi-intero, trattato dall'equazione di Dirac. Solamente a questo punto è possibile dedicarsi alla formulazione dell'equazione, che tratteremo in due diversi scenari: lo spazio-tempo di Minkowski e lo spazio-tempo curvo.

Uno dei più importanti risultati conseguiti dal fisico britannico Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) è certamente l'equazione che porta il suo nome: l'*Equazione di Dirac*. Quest'ultima è un'equazione che descrive il moto delle particelle con Spin $1/2$, generalmente dette fermioni, nello spazio-tempo e per questo unifica in sé i principi della meccanica quantistica e della teoria della relatività. Comparve per la prima volta nel 1928, con la pubblicazione dell'articolo *The quantum theory of the electron*, anche se non era la prima equazione relativistica per il moto gli elettroni ad essere proposta.

Già dal 1927 Dirac aveva tra i suoi progetti quello di trovare una relazione tra le due teorie più influenti della fisica dell'epoca, la meccanica quantistica e la teoria della relatività, ma prima di lui furono i fisici Klein e Gordon a pubblicare un'equazione del moto delle particelle valida anche a velocità vicine a quelle della luce. L'equazione di Klein-Gordon nasce in realtà dall'equazione di Schrödinger, che in letteratura è la prima equazione d'onda a comparire, ma è non relativistica. A differenza di quest'ultima, l'equazione di Klein-Gordon è relativistica, ma presenta due inconvenienti. In primo luogo non era compatibile con la meccanica quantistica elaborata da Dirac, poiché era del secondo ordine nel tempo, e poi il quadrato del modulo della funzione d'onda, interpretabile come una distribuzione di probabilità, poteva assumere valori negativi. L'obiettivo era quello di formulare un'equazione che contenesse una derivata del primo ordine nel tempo, come era già nell'equazione di Schrödinger, per essere consistente con la fisica quantistica, e che fosse invariante rispetto a trasformazioni del sistema di riferimento, per rispettare i principi della relatività. Ciò che ne risultò fu un'equazione che, nonostante fosse ricavata da studi prettamente teorici, era in accordo con i dati sperimentali spiegando perfettamente sia il moto degli elettroni, sia lo Spin, ovvero il momento rotatorio intrinseco. La bellezza di questa equazione, oltre all'interpretazione fisica, sta proprio nella sua formulazione puramente teorica, che unisce al linguaggio della fisica quello della matematica tramite la geometria spinoriale.

Ottenute per via esclusivamente matematica sono alcune delle componenti di questa equazione. Dalla combinazione delle matrici di Pauli, elemento fondamentale della meccanica quantistica, si ottengono le *matrici di Dirac*, che

costituiscono una base per l'algebra di Clifford $Cl_4(\mathbb{C})$, detta *algebra di Dirac*. Allo stesso modo l'*operatore di Dirac* \not{D} è un operatore differenziale che nasce dall'idea di calcolare la radice quadrata di un operatore del secondo ordine, ed è definito dalla composizione delle matrici di Dirac con l'operatore ∂ . Infine gli *Spinori di Dirac* sono gli elementi dello spazio vettoriale corrispondente all'algebra di Dirac, e sono le funzioni d'onda introdotte per descrivere i fermioni. Nascono dalla generalizzazione del tensore, ma se ruotati attorno a un asse restituiscono un oggetto di segno opposto a quello iniziale. Per questo lo spinore diventa l'oggetto geometrico ideale per la rappresentazione dei fermioni, dal momento che nelle sue proprietà ritroviamo la naturale descrizione dello Spin. Lo spinore di Dirac è formalmente un campo complesso a quattro componenti, indicato con $\psi = (\psi_L, \psi_R)$, che fornisce una rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz $SO^+(3, 1)$ e che generalizza lo spinore a due componenti appartenente al gruppo di Spin che ricopre $SO(3)$.

L'equazione di Dirac portò con sé dei risultati inaspettati. Di rilievo è l'esistenza di soluzioni ad energia negativa. Inizialmente queste soluzioni, considerate insensate dal punto di vista fisico, non furono prese in considerazione, ma portarono poi a una nuova scoperta. È proprio in relazione a ciò che Dirac affermò: «*la mia equazione è stata più intelligente di me*». A partire dal 1929 cominciarono a nascere le prime ipotesi su quello che oggi è conosciuto come *Mare di Dirac*, secondo cui il vuoto è un mare di particelle che occupano gli stati ad energia negativa, per questo inosservabili. Compiendo un salto quantico, le particelle passano a un livello di energia positiva lasciando libera una buca nel mare, e risultando osservabili. Questo portò presto a capire che una buca, o lacuna, doveva corrispondere a una particella con massa uguale a quella dell'elettrone e carica opposta. Tali particelle furono identificate con i protoni, le uniche particelle allora conosciute di carica positiva, anche se di massa molto maggiore dell'elettrone. La soluzione definitiva venne presentata da Dirac nell'articolo *Quantised singularities in the electromagnetic field*, pubblicato nel 1931, in cui predisse l'esistenza di una nuova particella, l'antielettrone, oggi detto *positrone*, di massa identica a quella dell'elettrone e carica opposta. I positroni vennero poi osservati negli studi sui raggi cosmici effettuati dal fisico Anderson l'anno seguente. L'importanza di questa scoperta è sensazionale, e la nominiamo qui per evidenziare quanto questa equazione sia importante non solo per le ricerche svolte nei laboratori di fisica, ma anche nella vita quotidiana di tutti noi. Basti pensare a titolo di esempio che i positroni vengono utilizzati, oltre che in ambito scientifico, anche in ambito medico nell'esame diagnostico denominato PET (Positron Emission Tomography).

Fino a questo punto ci si è mossi all'interno dei confini della relatività ristretta. Un balzo in avanti nella fisica è stato compiuto con l'introduzione della teoria della relatività generale, secondo cui lo spazio-tempo non è più

piatto, ma incurvato dalla presenza di una massa. Come accade nel passaggio dallo spazio tridimensionale allo spazio di Minkowski, anche per la relatività generale l'obiettivo è di riformulare le leggi della fisica nello spazio quadridimensionale curvo. Risulta naturale chiedersi allora come l'equazione di Dirac possa essere riscritta in questo nuovo ambiente. Come sempre, è la geometria differenziale a venirci in aiuto con la nozione di metrica e varietà Riemanniana. Mentre lo spazio di Minkowski è dato dalla combinazione delle tre dimensioni spaziali x, y, z con la variabile temporale t , il modo più semplice di modellizzare uno spazio curvo è quello di considerarlo come una varietà pseudo-Riemanniana M , che localmente si può approssimare ad uno spazio-tempo piatto. La metrica introdotta in questo spazio ha la stessa segnatura $(3, 1)$ della metrica di Minkowski ma i coefficienti non sono costanti, poiché dipendono dal punto sulla varietà.

Nel formulare l'equazione di Dirac nello spazio curvo si devono affrontare alcuni punti fondamentali. Gli spinori ψ non possono essere semplicemente trasferiti come funzioni dallo spazio-tempo piatto a funzioni in una varietà pseudo-Riemanniana o a sezioni del fibrato tangente associato, poiché non ne rispettano le proprietà. In generale infatti gli spinori sono elementi del gruppo di Spin che costituisce il ricoprimento del gruppo $SO^+(3, 1)$. Quest'ultimo non è altro che il gruppo di struttura del fibrato tangente associato alla varietà M che rappresenta lo spazio curvo. Risulta quindi necessario poter costruire delle funzioni che siano a valori nel gruppo di Spin $Spin(3, 1)$, che equivale al gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$. Questo è possibile solo se si può passare dal fibrato tangente con gruppo di struttura $SO^+(3, 1)$ ad un nuovo fibrato associato al fibrato tangente con gruppo di struttura $SL(2, \mathbb{C})$, che chiameremo *Fibrato Spinoriale*. La riduzione del fibrato tangente al fibrato spinoriale non è immediata e questo problema è generalmente noto come *rialzamento del gruppo strutturale di un fibrato vettoriale*. È possibile definire il fibrato spinoriale solo se la varietà M ammette una *struttura di Spin*, ma esiste un'ostruzione topologica all'esistenza di una struttura di Spin, rappresentata da una classe di coomologia nel gruppo $H^2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Le strutture di Spin esistono solo se la *seconda classe di Stiefel-Whitney* è nulla. Come vedremo, il problema del rialzamento del gruppo di struttura di un fibrato vettoriale può essere affrontato in un contesto del tutto generale. Nell'ambito dello studio dell'equazione di Dirac, vogliamo poter rialzare il gruppo di struttura del fibrato tangente dal gruppo $SO^+(3, 1)$ al suo gruppo di Spin $SL(2, \mathbb{C})$. Solo a questo punto sarà possibile definire un fibrato opportuno, le cui sezioni siano esattamente gli spinori di Dirac. Tramite la rappresentazione $\rho : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(4, \mathbb{C})$ del gruppo di Spin $SL(2, \mathbb{C})$, possiamo definire delle nuove funzioni di transizione, e quindi un nuovo fibrato associato al fibrato tangente che ha come gruppo di struttura il gruppo speciale lineare. Il fibrato spinoriale di Dirac così definito è un fibrato vettoriale complesso, le cui sezioni sono gli spinori di Dirac.

Avendo costruito un nuovo fibrato, è naturale introdurre una connessione

associata. In questo contesto dobbiamo infatti scegliere una connessione opportuna che ci permetta di riformulare l'operatore di Dirac in termini di una derivata covariante. Il fibrato spinoriale è stato ottenuto a partire dal fibrato tangente alla varietà, per cui intuitivamente anche la connessione dovrà dipendere dalla connessione definita sul fibrato tangente. La connessione di Levi-Civita è senza dubbio la migliore connessione che si possa scegliere sul fibrato TM grazie alle sue proprietà. Così la nuova connessione, che chiameremo *Connessione di Spin*, sarà indotta in modo canonico dalla connessione di Levi-Civita e dalla rappresentazione ρ , e si potrà calcolare in modo esplicito. Il lavoro a questo punto è concluso, non ci rimane che riscrivere il nuovo operatore di Dirac per lo spazio curvo.

La tesi è articolata in cinque capitoli. Di questi, i primi tre sono dedicati all'esposizione delle nozioni e degli oggetti geometrici fondamentali per poter trattare l'equazione di Dirac, mentre i restanti, di maggiore interesse, si concentrano sulla formulazione dell'equazione nello spazio-tempo piatto e nello spazio curvo.

Nel primo capitolo si analizzano il gruppo delle rotazioni dello spazio $SO(3)$, il gruppo speciale unitario $SU(2)$ e le algebre di Lie associate. Lo studio di questi gruppi verrà affrontato anche in relazione al gruppo dei quaternioni unitari, che si può identificare con $SU(2)$. Ogni quaternione unitario definisce una rotazione dello spazio, per cui si può determinare un omomorfismo tra il gruppo dei quaternioni, e quindi $SU(2)$, e il gruppo $SO(3)$. Tale omomorfismo costituisce il ricoprimento universale doppio del gruppo $SO(3)$, e con la sua costruzione si raggiunge l'obiettivo preposto per il capitolo.

Il secondo capitolo rappresenta una naturale estensione del primo allo spazio-tempo di Minkowski. I gruppi studiati in questo caso sono il gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3,1)$ e il gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$. Di nuovo esamineremo le loro proprietà e le algebre di Lie associate. Lo scopo del capitolo è ancora quello di dimostrare che il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ costituisce un rivestimento doppio universale del gruppo $SO^+(3,1)$.

Nel terzo capitolo vengono presentati i risultati principali riguardanti le algebre di Clifford e i gruppi di Spin. Vengono inseriti a questo punto della tesi per formalizzare ciò che è stato trattato nei primi capitoli e trovano applicazione anche in seguito. I gruppi che costituiscono i rivestimenti trattati in precedenza sono usualmente chiamati gruppi di Spin, rispettivamente $Spin(n)$ e $Spin(p, q)$. Sono definiti come sottogruppi di un'algebra, detta algebra di Clifford. Verranno quindi prima discusse le definizioni di algebra e gruppo di Clifford con proprietà ed esempi, e in seguito definiti i gruppi di Spin e i ricoprimenti universali che costituiscono.

0. Introduzione

L'oggetto del quarto capitolo è l'Equazione di Dirac nello spazio-tempo piatto. La sua formulazione segue a quella dell'equazione di Schrödinger e di Klein-Gordon, di cui verranno dati alcuni cenni fondamentali. A partire dall'equazione di Klein-Gordon cercheremo di introdurre un nuovo operatore, che sia una sorta di radice quadrata dell'operatore di d'Alembert, e che sia lineare nella derivata temporale. Per definire l'operatore di Dirac, sarà necessario introdurre dei coefficienti di natura matriciale, le Matrici di Dirac. A questo punto ci concentreremo sullo studio della funzione d'onda dell'equazione, e quindi sugli Spinori di Dirac. L'invarianza relativistica dell'equazione di Dirac è discussa nel penultimo paragrafo. Concludiamo il capitolo con una breve esposizione, di carattere storico, sul Mare di Dirac e sulla scoperta del positrone.

Infine, nell'ultimo capitolo si è generalizzata la formulazione dell'Equazione di Dirac allo spazio curvo, oggetto della relatività generale. Il problema da affrontare si concretizza nella formulazione di un nuovo operatore, espresso in termini delle derivate covarianti, che agisca sulle funzioni d'onda rappresentate ora dalle sezioni di un fibrato. Sarà necessario che la varietà che rappresenta lo spazio curvo ammetta una struttura di Spin, ovvero che sia possibile rialzare il gruppo di struttura del fibrato tangente dal gruppo $SO^+(3, 1)$ al gruppo $SL(2, \mathbb{C})$. Lo studio del rialzamento del gruppo strutturale di un fibrato vettoriale costituirà quindi l'argomento centrale del capitolo. Dopo aver richiamato alcune nozioni di geometria differenziale e della coomologia di Čech, il problema verrà affrontato da un punto di vista teorico, per poi essere ripreso nel caso in questione. Il rialzamento al gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ rende possibile la definizione del fibrato spinoriale di Dirac. L'ultimo paragrafo è dedicato alla costruzione e al calcolo della connessione di Spin. Il capitolo, e quindi l'intera tesi, si conclude con la formulazione dell'operatore di Dirac nello spazio-tempo curvo.

Indice

Introduzione	iii
1 I Gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$	1
1.1 Brevi richiami e definizioni	2
1.2 Il Gruppo delle Rotazioni dello Spazio $SO(3)$	4
1.3 Il Gruppo $SU(2)$	7
1.4 Quaternioni Unitari e Rotazioni in \mathbb{R}^3	11
2 I Gruppi $SO^+(3, 1)$ e $SL(2, \mathbb{C})$	15
2.1 Il Gruppo di Lorentz	16
2.2 L'algebra di Lie associata a $SO^+(3, 1)$	18
2.3 Il Gruppo $SL(2, \mathbb{C})$	21
3 Algebre di Clifford e Gruppi di Spin	25
3.1 Algebre di Clifford e Gruppi di Clifford	25
3.2 Il Gruppo $Spin(n)$	32
3.3 Il Gruppo $Spin(p, q)$	34
4 Equazione di Dirac nello Spazio di Minkowski	37
4.1 Equazione di Schrödinger	38
4.2 Equazione di Klein-Gordon	39
4.3 Equazione di Dirac	41
4.4 Gli Spinori di Dirac	46
4.5 L'Operatore di Dirac	50
4.6 La scoperta del positrone	52
5 Equazione di Dirac nello Spazio-Tempo Curvo	55
5.1 Richiami di geometria differenziale	56
5.2 Cenni di Coomologia di Čech	62
5.3 Rialzamento del gruppo di struttura del fibrato vettoriale	64
5.4 Il Fibrato Spinoriale	66
5.5 La Connessione di Spin	70
Bibliografia	77

Capitolo 1

I Gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$

In geometria, con la notazione $SO(3)$ si indica il gruppo delle rotazioni dello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 , ovvero le isometrie che preservano l'orientazione dello spazio. Per descrivere le rotazioni sarà necessario indicare un asse attorno al quale avviene la rotazione, e un angolo che ne indica l'ampiezza. Il gruppo delle rotazioni ha una naturale struttura di varietà differenziabile, ed è un gruppo di Lie. Le rotazioni, essendo delle trasformazioni lineari in \mathbb{R}^3 , si possono rappresentare attraverso delle matrici, che vedremo essere delle matrici ortogonali con determinate proprietà. Definiremo quindi il *gruppo ortogonale* $O(n)$ e il *gruppo speciale ortogonale* $SO(n)$.

Il gruppo $SU(2)$, che riveste un ruolo particolarmente importante nella teoria dei gruppi di Lie, è costituito dalle matrici unitarie con determinante uguale a uno, ed è chiamato *gruppo speciale unitario*. Quello che vogliamo studiare in questo capitolo è il legame tra questi due gruppi: cercheremo infatti di dimostrare che $SU(2)$ è un rivestimento universale doppio di $SO(3)$, e che possiamo quindi definire un omomorfismo suriettivo tra essi.

Lo studio del gruppo speciale unitario e del gruppo delle rotazioni è importante per le applicazioni nell'ambito della fisica. Ci permette infatti di descrivere le particelle elementari con Spin intero. Vedremo nei capitoli successivi come si può ampliare questo discorso alle particelle relativistiche, spostando la nostra analisi nello spazio quadridimensionale.

Per investigare le proprietà che mettono in relazione questi due gruppi, e quindi per costruire l'omomorfismo suriettivo a cui abbiamo accennato, partiremo dallo studio delle proprietà di $SO(3)$ e di $SU(2)$, e delle loro algebre di Lie. Per questo analizzeremo le proprietà delle rotazioni e introdurremo le matrici di Pauli per descrivere il gruppo speciale unitario. Infine, studieremo l'*insieme dei quaternioni* e il *gruppo dei quaternioni unitari*. Grazie all'identificazione di quest'ultimo con la sfera S^3 e poi con il gruppo $SU(2)$, e al fatto che ogni quaternioni unitario definisce una rotazione, sarà possibile definire il rivestimento doppio universale per il gruppo speciale ortogonale.

1.1 Brevi richiami e definizioni

In questo primo paragrafo, di carattere introduttivo, richiamiamo alcune delle definizioni che ricorreranno più volte nel corso della trattazione, principalmente nei primi due capitoli, e che riteniamo fondamentali. Altri richiami si troveranno poi nel corso dei capitoli, quando saranno necessari.

Iniziamo con la definizione di Gruppo di Lie e Algebra di Lie.

Definizione 1.1.1 (Gruppo di Lie). *Un Gruppo di Lie è un gruppo G dotato di una struttura di varietà differenziabile tale che il prodotto e l'inverso*

$$\begin{array}{ll} G \times G \rightarrow G & G \rightarrow G \\ (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 & g \mapsto g^{-1} \end{array}$$

siano applicazioni di classe C^∞ .

Definizione 1.1.2 (Algebra di Lie). *Un'Algebra di Lie è una struttura costituita da uno spazio vettoriale V su un campo \mathbb{K} e da un operatore binario $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$, detto prodotto di Lie, che soddisfa le seguenti proprietà:*

1. è anticommutativo, ovvero $[x, y] = -[y, x]$
2. è lineare, ovvero $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$
3. soddisfa l'identità di Jacobi: $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$
4. è nilpotente, cioè $[x, x] = 0$

per ogni $x, y, z \in V$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Osservazione. Sia A un'algebra non commutativa sul campo \mathbb{K} . Allora possiamo fornire A di una struttura di algebra di Lie tramite il *commutatore* $[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A$ definito da:

$$[x, y] = xy - yx \quad \forall x, y \in A$$

Si verifica facilmente che il commutatore soddisfa le proprietà della definizione precedente, ed è quindi un prodotto di Lie.

Si può dimostrare che ad ogni gruppo di Lie è possibile associare, in modo canonico, un'algebra di Lie. Un modo per dimostrare questo fatto è tramite la nozione di campi vettoriali invarianti a sinistra (per cui si può vedere [2, pagina 162]). Infatti l'algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie è definita come l'algebra dei campi vettoriali invarianti a sinistra, dove il prodotto di Lie è il commutatore di due campi vettoriali, e quest'algebra si può identificare con lo spazio tangente al gruppo di Lie nel suo elemento neutro. L'algebra di Lie quindi riassume tutte le proprietà fondamentali del gruppo. Lo strumento che ci permetterà di passare dall'algebra di Lie al

gruppo di Lie sarà l'applicazione esponenziale.

Nel caso dei gruppi di Lie, il sottospazio dei campi vettoriali invarianti a sinistra induce una struttura di algebra di Lie particolarmente importante. Infatti se G è un gruppo di Lie con elemento neutro $e \in G$, allora lo spazio tangente all'elemento neutro, considerato con la sua struttura di spazio vettoriale e con l'operazione $[\cdot, \cdot] : T_e G \times T_e G \rightarrow T_e G$, è detto *algebra di Lie \mathfrak{g} associata al gruppo G* .

Definizione 1.1.3 (Mappa Esponenziale). *Sia G un gruppo di Lie e \mathfrak{g} l'algebra di Lie associata. La mappa esponenziale*

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

di $A \in \mathfrak{g}$ è data da $\exp(A) = \gamma_A(1)$ dove la funzione $\gamma_A : \mathbb{R} \rightarrow G$ è l'unico sottogruppo di G a un parametro generato da A .

La mappa $\gamma_A : \mathbb{R} \rightarrow G$ è la curva integrale uscente dall'elemento neutro e del campo vettoriale invariante a sinistra X associato ad A . In particolare se $s \in \mathbb{R}$, si ha che $t \mapsto \gamma_A(st)$ è un semigruppato a un parametro tangente a sX nell'elemento neutro, quindi $\exp(sA) = \gamma_A(s)$. Possiamo dire in generale che tutti i sottogruppi a un parametro di G sono della forma $t \mapsto \exp(tA)$ per qualche $A \in \mathfrak{g}$, e viceversa, la curva integrale uscente da $e \in G$ e tangente ad $A \in \mathfrak{g}$ è data da $t \mapsto \exp(tA)$. Ci interessa osservare la definizione della mappa esponenziale nel caso in cui gli elementi del gruppo di Lie siano di tipo matriciale. Infatti in questo caso essa coincide con l'esponenziale della matrice dato dall'usuale definizione:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Quindi nell'insieme delle matrici di un gruppo di Lie, la mappa esponenziale è la restrizione dell'esponenziale di una matrice all'algebra di Lie \mathfrak{g} associata a G . La mappa esponenziale gode di varie proprietà, ricordiamo in particolare che essa è un diffeomorfismo suriettivo di un intorno dell'elemento neutro $0 \in \mathfrak{g}$ in un intorno dell'elemento neutro $e \in G$. Per maggiori dettagli è possibile leggere [2, pagine 165-166].

Vediamo infine le seguenti due definizioni, fondamentali per comprendere e raggiungere l'obiettivo principale di questo capitolo, ovvero la costruzione di un rivestimento doppio del gruppo delle rotazioni.

Definizione 1.1.4 (Diffeomorfismo Locale). *Un'applicazione $F : X \rightarrow Y$ tra varietà è un diffeomorfismo locale se ogni $P \in X$ ha un intorno aperto $U \subset X$ tale che $F(U)$ sia aperto in Y e $F|_U : U \rightarrow F(U)$ sia un diffeomorfismo.*

Una classe importante di diffeomorfismi locali è costituita dai rivestimenti.

Definizione 1.1.5 (Rivestimento). *Un'applicazione differenziabile fra varietà $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ è un rivestimento se:*

1. π è suriettiva;
2. ogni $P \in X$ possiede un intorno aperto connesso $U \subset X$ tale che la restrizione di π a qualsiasi componente connessa \tilde{U} di $\pi^{-1}(U)$ sia un diffeomorfismo tra \tilde{U} e U

Inoltre un rivestimento $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ è detto universale se \tilde{X} è semplicemente connesso.

1.2 Il Gruppo delle Rotazioni dello Spazio $SO(3)$

Ogni rotazione dello spazio è descritta da una mappa che trasforma una base ortonormale di \mathbb{R}^3 in un'altra base ortonormale. Come ogni trasformazione lineare, le rotazioni di \mathbb{R}^3 possono essere rappresentate da una matrice. Se chiamiamo R tale rotazione, rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ di \mathbb{R}^3 , le colonne della matrice di R saranno date da (Re_1, Re_2, Re_3) . Inoltre poiché la base canonica è una base ortonormale, e la rotazione deve preservare angoli e lunghezze, le colonne di R devono costituire una nuova base ortonormale. Questa condizione si esprime con la seguente relazione:

$$RR^T = R^T R = \mathbb{1}$$

Le matrici che soddisfano questa proprietà sono dette *matrici ortogonali*, e formano il *gruppo ortogonale* $O(3)$. In generale, gli elementi di questo gruppo sono le matrici delle isometrie dello spazio Euclideo di dimensione 3.

Calcoliamo il determinante di queste matrici:

$$\det(RR^T) = (\det R)^2 = \det \mathbb{1} = 1$$

Quindi $\det R = \pm 1$. Le matrici delle isometrie con $\det R = 1$ descrivono le rotazioni dello spazio e formano un sottogruppo del gruppo ortogonale, definito nel seguente modo.

Definizione 1.2.1 (Gruppo Speciale Ortogonale $SO(3)$). *Detto $O(n, \mathbb{K})$ il gruppo delle matrici ortogonali $n \times n$ sul campo \mathbb{K} , il sottogruppo $SO(n)$, detto gruppo speciale ortogonale, è l'insieme delle matrici ortogonali con determinante unitario:*

$$SO(n) = \{ A \in M(n, \mathbb{K}) \mid A^{-1} = A^T, \det A = 1 \}$$

In particolare se il campo è $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il gruppo $SO(3)$ descrive le rotazioni dello spazio.

1.2 Il Gruppo delle Rotazioni dello Spazio $SO(3)$

Ogni rotazione dello spazio quindi si può rappresentare con una unica matrice ortogonale, con determinante unitario. Cerchiamo ora di capire come costruire tale matrice. Un'arbitraria rotazione dello spazio può essere descritta attraverso un asse di rotazione, e un angolo di rotazione attorno a questo asse. Consideriamo per esempio la rotazione in senso antiorario attorno all'asse z dello spazio, descritta dall'angolo di rotazione ϑ . La matrice di questa rotazione è data da

$$R(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In modo del tutto analogo è possibile definire le matrici di rotazione attorno all'asse x e all'asse y .

Osserviamo ora che il gruppo $SO(3)$ è un gruppo di Lie, poiché la composizione di due rotazioni del tipo $R(\vartheta)$ è ancora una rotazione dello stesso tipo, così come l'inverso. Sappiamo che ad ogni gruppo di Lie è possibile associare la sua algebra di Lie, uno spazio vettoriale della stessa dimensione del gruppo, chiuso rispetto all'operazione che abbiamo chiamato prodotto di Lie. Gli elementi dell'algebra di Lie associata al gruppo speciale ortogonale, che indicheremo con $\mathfrak{so}(3)$, sono per definizione gli elementi dello spazio tangente alla sottovarietà $SO(3)$, nel punto definito dall'elemento identità. L'algebra $\mathfrak{so}(3)$ è costituita allora dallo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche di dimensione 3×3 . Procediamo con la seguente costruzione.

La mappa esponenziale per $SO(3)$, definita da:

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{so}(3) &\rightarrow SO(3) \\ A &\mapsto e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \end{aligned}$$

per ogni matrice antisimmetrica $A \in \mathfrak{so}(3)$, ci permette di descrivere in modo del tutto generale le rotazioni dello spazio attorno ad un qualsiasi asse. Possiamo allora definire la matrice $R(\vartheta)$, che descrive la rotazione di angolo ϑ attorno all'asse z , tramite la mappa esponenziale $\exp : \mathfrak{so}(3) \rightarrow SO(3)$, come:

$$R(\vartheta) = \exp(\vartheta E_3)$$

per qualche matrice $E_3 \in \mathfrak{so}(3)$. Allora differenziando rispetto a ϑ , e calcolando nel punto $\vartheta = 0$, otteniamo che

$$E_3 = \left. \frac{d}{d\vartheta} \exp(\vartheta E_3) \right|_{\vartheta=0} = \left. \frac{d}{d\vartheta} R(\vartheta) \right|_{\vartheta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per le matrici di rotazione attorno alle altre direzioni dello spazio, possiamo definire le matrici E_1 ed E_2 che descrivono

1. I Gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$

le rotazioni rispettivamente attorno all'asse x e all'asse y . In questo modo abbiamo definito una base per l'algebra $\mathfrak{so}(3)$, formata dalle matrici

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo ora le relazioni di commutazione per le matrici appena definite. Con un semplice calcolo matriciale, ricordando che il prodotto di Lie è definito come $[E_i, E_j] = E_i E_j - E_j E_i$, si ottengono le seguenti relazioni:

$$[E_1, E_2] = E_3 \quad [E_2, E_3] = E_1 \quad [E_3, E_1] = E_2$$

Osserviamo che le relazioni appena trovate corrispondono alle relazioni che si hanno tra i vettori della base canonica di \mathbb{R}^3 attraverso il prodotto vettoriale. Possiamo quindi identificare ogni matrice dell'algebra di Lie associata al gruppo delle rotazioni con un vettore di \mathbb{R}^3 .

Analizziamo quindi il gruppo delle rotazioni con l'aggiunta di un nuovo parametro, con l'obiettivo di descrivere le rotazioni attorno ad un generico asse. La *velocità angolare* è la grandezza $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$, da cui possiamo ricavare l'espressione per l'angolo di rotazione $\vartheta = \omega t$. Se $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ rappresenta la generica direzione dell'asse di rotazione, allora si ha che

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=0} = \omega \times \vec{r}(0)$$

Gli elementi di questo gruppo sono quindi delle matrici di rotazione dipendenti da un unico parametro, corrispondente alla variabile t :

$$R(t) = \exp(tS)$$

per qualche matrice antisimmetrica $S \in \mathfrak{so}(3)$. Allora $\vec{r}(t) = R(t)\vec{r}(0) = \exp(tS)\vec{r}(0)$. Differenziando questa condizione rispetto al tempo t , e calcolando l'espressione in $t = 0$, otteniamo che

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=0} = S\vec{r}(0)$$

e confrontandola con l'espressione ottenuta in precedenza possiamo concludere che $S(\vec{r}) = \omega \times \vec{r}$. Notiamo quindi che, come avevamo già osservato poco fa, le matrici antisimmetriche E_1, E_2, E_3 sono semplicemente le matrici della trasformazione lineare definita dal prodotto vettoriale

$$E_j(\vec{r}) = e_j \times \vec{r}$$

dove gli e_j rappresentano i vettori della base canonica di \mathbb{R}^3 . Allora possiamo scrivere la matrice della rotazione $R(t)$ in funzione della velocità angolare ω e del tempo t :

$$R(t) = \exp(E_j \omega^j t) = \exp(\vec{E} \cdot \omega t)$$

Ritornando ora ad una scrittura che coinvolga l'angolo di rotazione definito inizialmente, espresso in funzione della velocità angolare e del tempo, $\vartheta = \omega t = \frac{d\vartheta}{dt}t$, otteniamo la seguente espressione per la matrice di rotazione:

$$R(\vartheta) = \exp(\vartheta \vec{E} \cdot \vec{n})$$

La matrice $R(\vartheta)$ rappresenta quindi una rotazione di angolo ϑ attorno ad un generico asse di rotazione con direzione data dal vettore $\vec{n} = (x, y, z)$ di norma unitaria.

Possiamo infine esplicitare questa scrittura. Dato il vettore $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, definiamo $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$, e calcoliamo il seguente prodotto:

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = xE_1 + yE_2 + zE_3 = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3)$$

Allora la matrice di rotazione si può scrivere come:

$$\begin{aligned} R(\vartheta) &= \exp(\vartheta \vec{E} \cdot \vec{n}) = \exp(\vartheta(xE_1 + yE_2 + zE_3)) \\ &= \exp\left(\vartheta \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{1} + 2cs(\vec{n} \cdot \vec{E}) + 2s^2(\vec{n} \cdot \vec{E})^2 \end{aligned}$$

dove l'ultima espressione, in cui compaiono $c = \cos \frac{\vartheta}{2}$ e $s = \sin \frac{\vartheta}{2}$, si ottiene dallo sviluppo dell'esponenziale della matrice.

Abbiamo visto quindi che il gruppo $O(3)$ descrive in generale le isometrie dello spazio Euclideo di dimensione 3, e abbiamo analizzato in particolare la struttura del gruppo $SO(3)$, che comprende le rotazioni dello spazio, rappresentate da matrici ortogonali con determinante unitario. Nel capitolo seguente cercheremo di ampliare queste considerazioni in funzione della relatività ristretta. Ci troveremo infatti a lavorare in uno spazio vettoriale di dimensione quattro, detto *Spazio di Minkowski* e una generalizzazione delle rotazioni sarà fornita dalle *trasformazioni di Lorentz*, che costituiscono il *gruppo di Lorentz*.

1.3 Il Gruppo $SU(2)$

Lo scopo di questo paragrafo è quello di descrivere il gruppo di Lie $SU(2)$, e l'algebra di Lie associata, per arrivare a definire un ricoprimento universale di $SO(3)$, e quindi l'omomorfismo $SU(2) \rightarrow SO(3)$.

Per raggiungere questo obiettivo, cominciamo col cercare una relazione tra il *gruppo speciale unitario* e il *gruppo dei quaternioni unitari*. In particolare vogliamo dimostrare che il gruppo $SU(2)$ è isomorfo al gruppo dei quaternioni \mathbb{H} con modulo uguale a uno, ed è quindi diffeomorfo alla sfera tridimensionale $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$. Vedremo in seguito che i quaternioni unitari si possono usare

1. I Gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$

per rappresentare le rotazioni dello spazio a tre dimensioni, e di conseguenza questa identificazione ci permetterà di stabilire una relazione tra il gruppo $SU(2)$ e il gruppo delle rotazioni dello spazio $SO(3)$, e di trovare quindi un omomorfismo suriettivo da $SU(2)$ in $SO(3)$ con nucleo $\{1, -1\}$. Inoltre vedremo che il gruppo $SU(2)$ si può identificare con il gruppo di Spin $Spin(3)$.

Il *gruppo speciale unitario* $SU(n)$ è un gruppo di Lie di dimensione $n^2 - 1$, compatto e semplicemente connesso. Esso è definito come segue:

Definizione 1.3.1 (Gruppo Speciale Unitario). *Il gruppo di Lie $SU(n)$ è il gruppo delle matrici unitarie $n \times n$ con determinante uguale a uno.*

$$SU(n) = \{ U \in M(n, \mathbb{K}) \mid \bar{U}^T U = U \bar{U}^T = \mathbb{1}, \det U = 1 \}$$

Cerchiamo ora di capire quali relazioni ci siano tra il gruppo speciale unitario e il *gruppo dei quaternioni unitari*. Consideriamo l'insieme degli elementi del tipo $a + bi + cj + dk$ tali che a, b, c, d siano numeri reali, che viene usualmente indicato con \mathbb{H} :

$$\mathbb{H} = \{ a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

Gli elementi i, j, k , che si comportano in modo simile all'unità immaginaria per i numeri complessi, soddisfano le seguenti proprietà:

- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- $ij = k$ e $ji = -k$, $jk = i$ e $kj = -i$, $ik = j$ e $ki = -j$

L'insieme \mathbb{H} forma uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo dei numeri reali, con base data da $\{1, i, j, k\}$, per cui possiamo interpretare i, j, k come i versori dei tre assi spaziali. Osserviamo che, dato il generico quaternione $z = a + bi + cj + dk$, possiamo calcolare il quadrato del modulo di z come:

$$|z|^2 = z\bar{z} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Si può facilmente verificare che l'insieme $\{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$ definisce un gruppo, detto *Gruppo dei Quaternioni Unitari*. In particolare possiamo osservare che la definizione appena introdotta per il gruppo dei quaternioni unitari coincide con la definizione della sfera contenuta in \mathbb{R}^4 . Ricordiamo infatti che la sfera \mathbb{S}^3 di raggio unitario è generalmente definita in questo modo:

$$\mathbb{S}^3 = \{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1 \} \subset \mathbb{R}^4$$

Pertanto si ha che:

$$\{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} = \mathbb{S}^3$$

Dunque la sfera \mathbb{S}^3 eredita dal gruppo dei quaternioni unitari una struttura di gruppo non abeliano. Inoltre si può dimostrare che essa costituisce un

gruppo di Lie semplicemente connesso, ovvero è tale che ogni curva chiusa in esso può essere deformata fino a ridursi ad un singolo punto.

Compriamo ora un passo in più. I quaternioni possono essere espressi tramite matrici 2×2 a coefficienti complessi nel seguente modo. Consideriamo un generico quaternione $z = v + wj = a + bi + cj + dk$, con $v = a + bi$ e $w = c + di$. Esso si può rappresentare con la seguente matrice:

$$A_z = \begin{pmatrix} v & w \\ -\bar{w} & \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - ib \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$$

Attraverso questa identificazione, possiamo vedere che gli elementi di base $1, i, j, k$ del gruppo dei quaternioni sono rappresentati dalle seguenti matrici:

$$1 \leftrightarrow \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i \leftrightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad j \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad k \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Questa rappresentazione dei quaternioni ci fornisce delle interessanti proprietà. Per prima cosa osserviamo infatti che il determinante della matrice A_z è uguale al quadrato della norma del quaternione corrispondente:

$$\det(A_z) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |z|^2$$

Inoltre questa identificazione tra quaternioni e matrici induce una identificazione tra il gruppo dei quaternioni unitari e il gruppo speciale unitario $SU(2)$. L'idea intuitiva è racchiusa nel fatto che le matrici che abbiamo appena definito rispettano le proprietà delle matrici di $SU(2)$. Inoltre l'uguaglianza tra il determinante della matrice e la norma del quaternione ci permette di dire che se una matrice del tipo A_z ha determinante uguale a 1, di conseguenza anche il corrispondente quaternione ha norma unitaria. Infine poiché tutte le matrici di $SU(2)$ hanno determinante unitario possiamo affermare che il gruppo speciale unitario $SU(2)$ è isomorfo al gruppo dei quaternioni unitari.

Cerchiamo ora di costruire l'isomorfismo tra il gruppo dei quaternioni unitari e il gruppo $SU(2)$ in modo più rigoroso, usando le *matrici di Pauli* definite per la meccanica quantistica. Per farlo, iniziamo con la definizione di tali matrici, per poi andare a studiare l'algebra di Lie associata al gruppo speciale unitario, che ci permetterà di costruire l'isomorfismo cercato.

Definizione 1.3.2 (Matrici di Pauli). *Le Matrici di Pauli sono le seguenti matrici 2×2 a coefficienti complessi:*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Oltre ad essere matrici complesse, le matrici di Pauli sono matrici hermitiane ed unitarie.

1. I Gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$

Ricordiamo in particolare che una matrice A si dice *hermitiana* se $A = A^\dagger$, dove con il simbolo A^\dagger indichiamo la matrice trasposta e coniugata della matrice A . Una matrice si dice *unitaria* se è una matrice quadrata a coefficienti complessi che soddisfa la relazione:

$$AA^\dagger = A^\dagger A = \mathbb{1}$$

Osserviamo inoltre che le matrici di Pauli hanno determinante $\det(\sigma_i) = -1$ e traccia $\text{tr}(\sigma_i) = 0$. Tali matrici inoltre soddisfano le seguenti relazioni:

- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$ e $\sigma_2\sigma_1 = -i\sigma_3$
- $\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1$ e $\sigma_3\sigma_2 = -i\sigma_1$
- $\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$ e $\sigma_3\sigma_1 = -i\sigma_2$

Le relazioni appena trovate definiscono delle relazioni di commutazione e anticommutazione, che possono essere riscritte con una notazione compatta:

$$\begin{aligned} [\sigma_i, \sigma_j] &= \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbb{1} \end{aligned}$$

dove con ε_{ijk} indichiamo il *tensore di Levi-Civita* e con δ_{ij} il *delta di Kronecker*.

Consideriamo ora l'algebra di Lie associata al gruppo speciale unitario $SU(2)$. Essa corrisponde allo spazio vettoriale formato dalle matrici antihermitiane con traccia nulla, e viene indicata con $\mathfrak{su}(2)$. Ci interessa, a partire dalle matrici di Pauli, cercare di definire un base per l'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$ su \mathbb{R} . L'idea è quella di moltiplicare le matrici di Pauli per l'unità immaginaria i , ottenendo le seguenti matrici $\tilde{\sigma}_i$

$$\tilde{\sigma}_1 = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\sigma}_2 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\sigma}_3 = i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Osserviamo che, a differenza delle matrici di Pauli, queste nuove matrici sono matrici antihermitiane, complesse e con traccia nulla. Esse costituiscono quindi una base per l'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$. Inoltre tali matrici soddisfano le seguenti relazioni:

- $\tilde{\sigma}_1^2 = \tilde{\sigma}_2^2 = \tilde{\sigma}_3^2 = -\mathbb{1}$
- $\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 = -\tilde{\sigma}_3$ e $\tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_3$
- $\tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_3 = -\tilde{\sigma}_1$ e $\tilde{\sigma}_3\tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_1$

- $\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_3 = \tilde{\sigma}_2$ e $\tilde{\sigma}_3\tilde{\sigma}_1 = -\tilde{\sigma}_2$

In notazione compatta, possiamo scrivere il prodotto di Lie per queste matrici come: $[\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_j] = 2\tilde{\sigma}_k$.

È importante osservare che le matrici $\tilde{\sigma}_i$, ottenute a partire dalle matrici di Pauli, sono esattamente le matrici che avevamo introdotto precedentemente come rappresentazione dei quaternioni, e godono quindi delle stesse proprietà. Possiamo allora identificare i quaternioni $1, i, j, k$ e le matrici $\tilde{\sigma}_i$ nel seguente modo:

$$1 \leftrightarrow \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i \leftrightarrow \tilde{\sigma}_3 \quad j \leftrightarrow \tilde{\sigma}_2 \quad k \leftrightarrow \tilde{\sigma}_1$$

Di conseguenza, ogni quaternionone $z = a + bi + cj + dk$ si può rappresentare sotto forma di matrice tramite l'identificazione che abbiamo appena studiato, ottenendo la seguente relazione:

$$\begin{aligned} z = a + bi + cj + dk &\leftrightarrow A_z = a\mathbb{1} + b\tilde{\sigma}_3 + c\tilde{\sigma}_2 + d\tilde{\sigma}_1 \\ &= \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'identificazione che abbiamo ottenuto tra i quaternioni e le matrici $\tilde{\sigma}_i$, ci permette in generale di definire un'identificazione tra il gruppo dei quaternioni unitari e il gruppo speciale unitario $SU(2) \subset M(2, \mathbb{C})$, come avevamo visto in precedenza. Allora:

$$\{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\} \cong SU(2)$$

Ricordiamo inoltre che il gruppo dei quaternioni unitari è isomorfo alla sfera di raggio uno contenuta nello spazio \mathbb{R}^4 . Possiamo quindi concludere che:

$$SU(2) \cong \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\} \cong \mathbb{S}^3$$

La corrispondenza tra la sfera \mathbb{S}^3 e il gruppo speciale unitario $SU(2)$ ci porta un'altra importante informazione. Infatti, dal fatto che la sfera è una varietà semplicemente connessa, possiamo dedurre che anche il gruppo $SU(2)$ lo sia.

1.4 Quaternioni Unitari e Rotazioni in \mathbb{R}^3

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che i quaternioni unitari, nell'identificazione con \mathbb{R}^4 , sono isomorfi alla sfera \mathbb{S}^3 , e anche al gruppo speciale unitario $SU(2)$. Quello che vogliamo analizzare ora è il legame tra i quaternioni e le rotazioni dello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 . In particolare vogliamo dimostrare che ogni quaternionone unitario definisce una rotazione dello spazio.

1. I Gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$

Nello spazio tridimensionale, ogni rotazione si può descrivere mediante un angolo ϑ e un asse di rotazione rappresentato dal vettore unitario \vec{n} . I quaternioni forniscono un semplice modo di tradurre questa rappresentazione con asse e angolo in quattro numeri, e possono essere usati per applicare la rotazione che stiamo considerando ad un particolare punto dello spazio \mathbb{R}^3 . Consideriamo quindi $\mathbb{H}_0 = \{0 + bi + cj + dk \mid b, c, d \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}$, che è l'insieme dei quaternioni aventi la prima coordinata nulla. Possiamo identificare questo insieme con \mathbb{R}^3 ponendo:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\leftrightarrow \mathbb{H}_0 \\ x = (x_1, x_2, x_3) &\leftrightarrow q(x) = x_1i + x_2j + x_3k \end{aligned}$$

dove i, j, k sono vettori unitari che rappresentano i tre assi cartesiani dello spazio tridimensionale. Un quaternione $z \in \mathbb{H}$, tale che $|z| = 1$, definisce una trasformazione, che chiamiamo R_z , di \mathbb{H}_0 in sé stesso, grazie all'operazione di coniugio:

$$\begin{aligned} R_z : \mathbb{H}_0 &\rightarrow \mathbb{H}_0 \\ q(x) &\mapsto R_z(q(x)) = zq(x)z^{-1} \end{aligned}$$

Infatti si può verificare con un semplice calcolo che per ogni $q(x) \in \mathbb{H}_0$, anche $zq(x)z^{-1} \in \mathbb{H}_0$, ovvero è un quaternione avente la prima coordinata nulla. Inoltre, dall'identificazione di \mathbb{H}_0 con \mathbb{R}^3 , l'applicazione R_z appena costruita è una funzione lineare $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Ricordiamo ora che abbiamo scelto $|z| = 1$. Grazie a questa ipotesi, possiamo dedurre che ogni mappa R_z è un'isometria di $\mathbb{H}_0 \cong \mathbb{R}^3$, in quanto preserva la norma:

$$|R_z(q(x))| = |zq(x)z^{-1}| = |z||q(x)||z^{-1}| = |q(x)|$$

Si può verificare inoltre che il $\det(R_z) = 1$, quindi l'isometria $R_z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ descrive una rotazione. Con queste osservazioni siamo quindi riusciti ad associare ad ogni quaternione z una rotazione nello spazio tridimensionale. Approfondiamo questo aspetto generale con un calcolo esplicito.

Abbiamo visto che la mappa $R_z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresenta una rotazione per ogni $z \in \mathbb{H}$ con $|z| = 1$. Più in generale, possiamo dimostrare che ogni rotazione di \mathbb{R}^3 è del tipo R_z , per qualche $z \in \mathbb{H}$ con $|z| = 1$. Infatti la matrice ortogonale per una generica rotazione R_z , dato il quaternione $z = a + bi + cj + dk$ con $|z| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ è descritta dalla seguente matrice:

$$R_z = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2bc - 2ad & 2bd + 2ac \\ 2bc + 2ad & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ 2bd - 2ac & 2cd + 2ab & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

con $\det(R_z) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^3 = 1$. Ritroviamo quindi con questa osservazione la corrispondenza tra la matrice e il suo determinante con il quaternione

che la genera e la sua norma.

Osserviamo un altro fatto molto importante. Due rotazioni R_z e $R_{z'}$ coincidono, ovvero possiamo porre $R_z = R_{z'}$, se e solo se $z = z'$ oppure $z = -z'$. Ad ogni rotazione non è quindi associato un unico quaternionione, ma i quaternioni z e $-z$ generano la stessa matrice di rotazione, definendo una corrispondenza di tipo 2 : 1.

In questo modo, associando ad ogni quaternionione unitario una rotazione, abbiamo costruito una mappa

$$\{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\} \rightarrow SO(3)$$

dal gruppo dei quaternioni unitari al gruppo speciale ortogonale $SO(3)$, che descrive le rotazioni dello spazio. Nel paragrafo precedente inoltre, abbiamo visto che il gruppo dei quaternioni unitari $\{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$ è isomorfo alla sfera \mathbb{S}^3 e al gruppo speciale unitario $SU(2)$. Allora, in generale possiamo definire un omomorfismo tra il gruppo speciale unitario $SU(2)$ e il gruppo delle rotazioni $SO(3)$:

$$\begin{aligned} SU(2) &\rightarrow SO(3) \\ A_z &\mapsto R_z \end{aligned}$$

Tale omomorfismo è suriettivo, ma non iniettivo. Infatti la controimmagine di un elemento di $SO(3)$ è data da due elementi opposti in $SU(2)$. Di conseguenza, il nucleo di questo omomorfismo è l'insieme $\ker = \{1, -1\}$. Possiamo definire quindi un isomorfismo di gruppi di Lie:

$$\frac{SU(2)}{\{1, -1\}} \cong SO(3)$$

Inoltre, nell'identificazione di $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$, considerare il quoziente della sfera per il sottogruppo $\{1, -1\}$ equivale ad identificare i punti diametralmente opposti della sfera \mathbb{S}^3 . Infatti possiamo dire che:

$$\frac{\mathbb{S}^3}{\sim} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$$

grazie al fatto che due punti antipodali x e $-x$ della sfera corrispondono allo stesso punto del piano proiettivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Abbiamo pertanto le seguenti relazioni:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \cong \frac{\mathbb{S}^3}{\sim} \cong \frac{SU(2)}{\{1, -1\}} \cong SO(3)$$

Pensiamo ora a $SU(2)$ e $SO(3)$ come varietà differenziabili, e quindi come gruppi di Lie. L'omomorfismo suriettivo $SU(2) \rightarrow SO(3)$ che abbiamo appena costruito, è un rivestimento doppio di $SO(3)$, che ha come gruppo fondamentale il gruppo ciclico $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ con due elementi.

1. I Gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$

Ricordiamo inoltre che dall'isomorfismo del gruppo speciale unitario con la sfera $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$ e dal fatto che quest'ultima è semplicemente connessa, ricaviamo che anche il gruppo $SU(2)$ è semplicemente connesso. Allora, per definizione, $SU(2)$ è il rivestimento universale di $SO(3)$. Tale rivestimento viene indicato in altri termini con $SU(2) = Spin(3)$, dove $Spin(3)$ è chiamato *Gruppo di Spin*.

Il gruppo di Spin, $Spin(n)$ in generale, rappresenta il rivestimento doppio del gruppo speciale ortogonale $SO(n)$. Inoltre per $n > 2$, $Spin(n)$ è semplicemente connesso e quindi coincide con il rivestimento universale di $SO(n)$. Nel caso particolare che abbiamo analizzato in questo capitolo, l'omomorfismo suriettivo $SU(2) \rightarrow SO(3)$ costituisce un rivestimento doppio del gruppo speciale ortogonale $SO(3)$, e possiamo definire una sequenza corta esatta di gruppi di Lie:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow Spin(3) \longrightarrow SO(3) \longrightarrow 1$$

In conclusione possiamo dire che l'omomorfismo suriettivo di gruppi di Lie, definito dalla mappa tra $Spin(3)$ e $SO(3)$, è un rivestimento doppio che ha come nucleo l'insieme $\{1, -1\}$. Dal fatto che $Spin(3)$ è semplicemente connesso, la mappa $Spin(3) \rightarrow SO(3)$ è un rivestimento universale doppio del gruppo delle rotazioni dello spazio $SO(3)$. In altri termini, dal momento che $SO(3)$ non è semplicemente connesso, non ha solo l'usuale rappresentazione data dalle matrici di dimensione 3×3 , ma ammette anche una rappresentazione non triviale a due valori data dalle matrici di $SU(2)$, che agiscono sui vettori complessi di \mathbb{C}^2 . Tali vettori complessi sono indicati generalmente con $(\psi_1, \psi_2) \in \mathbb{C}^2$ e sono chiamati *Spinori*. Si dice che il gruppo speciale unitario $SU(2)$ fornisce una naturale rappresentazione spinoriale, data dal ricoprimento a due fogli, del gruppo speciale ortogonale $SO(3)$. In tal senso $SU(2)$ è identificato con $Spin(3)$.

Capitolo 2

I Gruppi $SO^+(3, 1)$ e $SL(2, \mathbb{C})$

In questo capitolo si vogliono descrivere il *gruppo di Lorentz* e il *gruppo speciale lineare*, con lo scopo di trovarne una relazione. In fisica e matematica, il gruppo di Lorentz è il gruppo che comprende tutte le trasformazioni tra due sistemi di riferimento, dette trasformazioni di Lorentz, nello *spazio-tempo di Minkowski*. L'introduzione di questo spazio, dato dalla combinazione di uno spazio Euclideo tridimensionale e della coordinata temporale, è strettamente collegata allo studio della relatività ristretta.

Ai fini della nostra trattazione, introdurremo le proprietà fondamentali del gruppo di Lorentz $O(3, 1)$ per poi concentrarci sullo studio del suo sottogruppo, chiamato *gruppo di Lorentz ristretto*, che indicheremo con $SO^+(3, 1)$. Questo gruppo è formato dalle trasformazioni di Lorentz che preservano non solo l'orientazione dello spazio, ma anche la direzione del tempo. Studieremo poi l'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$ associata al gruppo di Lorentz, e la relazione con $SO^+(3, 1)$ attraverso la mappa esponenziale.

Il secondo gruppo che andremo ad analizzare è invece il *gruppo speciale lineare*, definito sul campo dei numeri complessi, e che indicheremo con $SL(2, \mathbb{C})$. Esso è costituito dalle matrici invertibili a coefficienti nel campo complesso, di dimensione 2×2 , con determinante uguale a uno. Anche in questo caso studieremo l'algebra di Lie associata $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Già da questa breve introduzione, risulta evidente uno stretto collegamento tra le tematiche che andremo ad affrontare in questo capitolo e gli argomenti che abbiamo trattato nel capitolo precedente. Anche in questo caso il nostro obiettivo sarà quello di trovare una relazione tra il gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3, 1)$ e il gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$. In particolare si potrà dimostrare che esiste un omomorfismo suriettivo tra $SO^+(3, 1)$ e $SL(2, \mathbb{C})$, e soprattutto che il gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$ costituisce il ricoprimento universale doppio per il gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3, 1)$.

2.1 Il Gruppo di Lorentz

Dal punto di vista matematico, lo *spazio di Minkowski* è uno spazio vettoriale reale a quattro dimensioni, in cui è definita una forma bilineare simmetrica e non degenera che viene usualmente detta *metrica di Minkowski*. Definiamo allora *Spazio-Tempo di Minkowski* uno spazio \mathcal{M} di dimensione quattro, dotato di un prodotto scalare con segnatura $(3,1)$ che costituisce la nostra metrica. In particolare lo spazio \mathbb{R}^4 con la metrica definita dalla matrice

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definisce uno spazio-tempo di Minkowski.

Vediamo ora come definire il gruppo di Lorentz a partire dalle omonime trasformazioni definite sullo spazio di Minkowski.

Definizione 2.1.1 (Gruppo di Lorentz). *Il gruppo di Lorentz è costituito dall'insieme delle trasformazioni lineari sullo spazio di Minkowski:*

$$O(3,1) = \{ \Lambda \in M(4, \mathbb{R}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \}$$

dove la matrice Λ descrive una trasformazione di Lorentz, mentre η è la matrice della metrica di Minkowski.

Cerchiamo di analizzare nei dettagli la struttura di questo gruppo.

Iniziamo col considerare un evento fisico $x^\mu = (ct, x, y, z)^T$ descritto dalla coordinata temporale ct , con c velocità della luce, e dalle coordinate spaziali x, y, z nello spazio quadridimensionale. Definiamo *intervallo spazio-temporale* la distanza

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

nello spazio-tempo. Consideriamo poi una *trasformazione di Lorentz* nello spazio di Minkowski, ovvero una trasformazione di coordinate tra due sistemi di riferimento, lineare ed omogenea. La proprietà fondamentale che caratterizza queste trasformazioni è di lasciare invariata la forma quadratica ds^2 , per cui possiamo scrivere che $ds^2 = ds'^2$. Indichiamo quindi con Λ la matrice che descrive la trasformazione di Lorentz. Come esempio, consideriamo una trasformazione di Lorentz lungo l'asse x dello spazio tridimensionale tra due sistemi di riferimento con assi paralleli e concordi. Allora la matrice della trasformazione ha la seguente espressione:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ è chiamato *fattore di Lorentz*, e v rappresenta la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento inerziali per cui è definita la trasformazione. In modo analogo si possono definire le trasformazioni lungo le altre direzioni y e z dello spazio, o lungo una generica direzione spaziale. Osserviamo inoltre che tali trasformazioni sono caratterizzate dall'aver $\det(\Lambda) = \pm 1$. La trasformazione lineare Λ agisce sul quadrivettore x^μ , o equivalentemente sul differenziale delle coordinate dx^μ , nel seguente modo:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \text{e} \quad dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu$$

Considerando la proprietà fondamentale delle trasformazioni di Lorentz, ovvero la condizione di invarianza degli intervalli $ds^2 = ds'^2$, ed esplicitandola, possiamo ricavare la condizione su Λ che abbiamo incontrato nella definizione del gruppo delle trasformazioni di Lorentz. Infatti:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta dx^\alpha dx^\beta \end{aligned}$$

da cui otteniamo ancora che

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta$$

Osservando che $\Lambda^\mu{}_\alpha = (\Lambda^T)^\mu{}_\alpha$, riusciamo quindi a ricavare l'equazione che caratterizza in maniera generale, e in funzione della metrica di Minkowski η , una trasformazione di Lorentz Λ tra le coordinate di due sistemi inerziali. In notazione matriciale scriveremo che:

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$$

Quest'ultima relazione fornisce la definizione di trasformazione di Lorentz. Si dimostra con dei semplici calcoli che le matrici Λ di tali trasformazioni formano un gruppo, che è esattamente il *Gruppo di Lorentz* $O(3,1)$. Tale gruppo è chiamato anche *gruppo pseudo-ortogonale*, per analogia con le trasformazioni del gruppo ortogonale $O(4)$ rappresentato dalle matrici R che soddisfano alla relazione $R^T \mathbb{1} R = \mathbb{1}$.

Studiamo ora due importanti proprietà delle trasformazioni di Lorentz.

La prima proprietà riguarda il determinante delle matrici Λ che, come abbiamo già osservato, può assumere solo due valori, e può essere uguale a ± 1 . Infatti:

$$\det \eta = \det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det \Lambda^T \det \eta \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 \det \eta$$

da cui $\det \Lambda = \pm 1$. Le trasformazioni con determinante negativo, che rappresentano le inversioni degli assi spaziali, sono generalmente dette *improprie*.

2. I Gruppi $SO^+(3, 1)$ e $SL(2, \mathbb{C})$

Queste ultime, da sole, non formano un gruppo poiché mancano dell'identità. Le trasformazioni di Lorentz *proprie*, ovvero con $\det(\Lambda) = 1$ formano invece il gruppo $SO(3, 1)$.

La seconda proprietà delle trasformazioni di Lorentz che consideriamo riguarda l'elemento Λ^0_0 di una matrice Λ . Sfruttando il fatto che $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ e che $\eta_{00} = -1$, otteniamo che:

$$\begin{aligned}\eta_{00} &= -1 \\ &= \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 \eta_{\mu\nu} = \delta_{ij} \Lambda^i_0 \Lambda^j_0 - (\Lambda^0_0)^2\end{aligned}$$

da cui ricaviamo che $(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_i (\Lambda^i_0)^2 \geq 1$. In particolare abbiamo queste uniche due possibilità

$$\Lambda^0_0 \leq -1 \text{ oppure } \Lambda^0_0 \geq 1$$

Nel caso in cui l'entrata Λ^0_0 sia negativa, le trasformazioni includono un'inversione temporale. Possiamo quindi classificare le trasformazioni di Lorentz, oltre che in base al segno del determinante della matrice Λ , anche attraverso il segno della componente Λ^0_0 . Con queste proprietà, il gruppo di Lorentz $O(3, 1)$ si divide in quattro componenti connesse:

$$\begin{aligned}SO^+(3, 1) &= L_+^\uparrow : \det(\Lambda) = 1 \quad \text{e} \quad \Lambda^0_0 \geq 1 \\ L_+^\downarrow &: \det(\Lambda) = 1 \quad \text{e} \quad \Lambda^0_0 \leq -1 \\ L_-^\uparrow &: \det(\Lambda) = -1 \quad \text{e} \quad \Lambda^0_0 \geq 1 \\ L_-^\downarrow &: \det(\Lambda) = -1 \quad \text{e} \quad \Lambda^0_0 \leq -1\end{aligned}$$

La componente $SO^+(3, 1)$, che contiene l'identità, descrive l'insieme delle trasformazioni di Lorentz che preservano l'orientazione dello spazio tridimensionale, poiché $\det \Lambda > 0$, e anche la direzione del tempo, poiché $\Lambda^0_0 \geq 1$. Di conseguenza rappresenta l'insieme delle trasformazioni che conservano l'orientazione dello spazio di Minkowski. Questa componente forma il cosiddetto *gruppo di Lorentz ristretto*.

Il gruppo $SO^+(3, 1)$ contiene come sottogruppo il gruppo speciale ortogonale $SO(3)$, formato dalle matrici ortogonali con determinante unitario, che descrivono le rotazioni dello spazio. Da questo, possiamo notare una certa corrispondenza con gli argomenti affrontati nel capitolo precedente. Proseguiamo quindi la trattazione approfondendo le proprietà del gruppo $SO^+(3, 1)$ e del gruppo $SL(2, \mathbb{C})$.

2.2 L'algebra di Lie associata a $SO^+(3, 1)$

Come abbiamo fatto nel capitolo precedente con lo studio del gruppo delle rotazioni dello spazio e del gruppo speciale unitario, allo stesso modo vogliamo ora riuscire a costruire un rivestimento universale per il gruppo di

Lorentz. Un modo per studiare vari aspetti del gruppo di Lorentz, come per ogni gruppo di Lie, è attraverso lo studio dell'algebra di Lie associata.

Il gruppo di Lorentz proprio $SO(3, 1)$ è un gruppo di Lie matriciale, e la sua algebra di Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$ è un'algebra di matrici. Ricordiamo che l'algebra di Lie di un gruppo di matrici è data dallo spazio vettoriale delle matrici X tali che, nel nostro caso, $\exp(tX) \in O(3, 1)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ è la matrice diagonale che descrive la metrica, per definizione l'algebra di Lie è data dalle matrici di dimensione 4×4 tali che $\eta X \eta = -X^T$. Esplicitamente consiste delle matrici della forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d & e \\ b & -d & 0 & f \\ c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

dove a, b, c, d, e, f sono numeri reali arbitrari. Quindi l'algebra di Lie ha dimensione sei sul campo dei numeri reali \mathbb{R} .

Cerchiamo ora di scrivere una base per l'algebra di Lie associata al gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3, 1)$. La relazione che intercorre tra l'algebra di Lie, solitamente indicata $\mathfrak{so}(3, 1)$, e il gruppo di Lorentz ristretto è come sempre rappresentata dalla mappa esponenziale

$$\exp : \mathfrak{so}(3, 1) \rightarrow SO^+(3, 1)$$

che nel caso del gruppo di Lorentz, coincide con l'esponenziale della matrice ed è suriettiva. Quindi ogni elemento del gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3, 1)$ può essere espresso attraverso la matrice esponenziale di un elemento dell'algebra di Lie. Consideriamo allora una trasformazione di Lorentz Λ , e rappresentiamola usando la mappa esponenziale. Otteniamo che $\Lambda(t) = e^{tS} \in O(3, 1)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per un elemento S dell'algebra di Lie. Di nuovo, grazie alla definizione del gruppo di Lorentz abbiamo che:

$$(e^{tS})^T \eta e^{tS} = \eta$$

Differenziamo ora questa espressione rispetto alla variabile temporale t , e poniamo $t = 0$. Si ottiene allora che $S^T \eta + \eta S = 0$. Infine, per la simmetria della matrice η , possiamo concludere che

$$(\eta S)^T = -\eta S \text{ e quindi } \eta S \eta = -S^T$$

Questa condizione è la stessa che abbiamo usato per descrivere le matrici dell'algebra di Lie del gruppo di Lorentz $O(3, 1)$, ma risulta valida anche per le matrici $\Lambda(t) \in SO^+(3, 1)$. Notiamo quindi che il gruppo di Lorentz $O(3, 1)$, il gruppo proprio di Lorentz $SO(3, 1)$, e il gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3, 1)$ hanno la stessa algebra di Lie, definita da:

$$\mathfrak{so}(3, 1) = \{ S \in M(4, \mathbb{R}) \mid e^{tS} \in SO(3, 1) \forall t \}$$

2. I Gruppi $SO^+(3, 1)$ e $SL(2, \mathbb{C})$

Infine, scrivendo la relazione a cui soddisfano le matrici S in componenti, abbiamo che:

$$\eta_{\mu\rho}S_{\sigma\rho}\eta_{\sigma\nu} = -S_{\mu\nu}$$

Possiamo nuovamente osservare da questa condizione che gli elementi sulla diagonale della matrice S sono nulli, la prima riga e la prima colonna della matrice coincidono, mentre per le altre entrate della matrice, quindi con μ, ν maggiori o uguali a 1, vale la relazione di antisimmetria. Possiamo quindi dedurre che la dimensione dell'algebra di Lie associata al gruppo di Lorentz ristretto è uguale a 6.

Una base per l'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$ associata al gruppo di Lorentz $SO^+(3, 1)$ è data dallo spazio vettoriale delle matrici J_n e K_m . In particolare, le matrici J_n sono i tre generatori delle rotazioni dello spazio tridimensionale, mentre le matrici K_m rappresentano i tre generatori dei boosts, ovvero delle trasformazioni di Lorentz tra le coordinate di due sistemi inerziali con assi paralleli e concordi, origini coincidenti all'istante iniziale, e velocità relativa arbitraria. Esplicitando tali generatori otteniamo:

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & K_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ J_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ J_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Osserviamo che per gli elementi di questa base valgono le seguenti relazioni di commutazione:

- $[J_l, J_m] = i\varepsilon_{lmn}J_n$
- $[J_l, K_m] = i\varepsilon_{lmn}K_n$
- $[K_l, K_m] = -i\varepsilon_{lmn}J_n$

dove con il simbolo ε_{lmn} indichiamo il Tensore di Levi-Civita. Quindi con queste relazioni di commutazione e lo spazio vettoriale dei generatori J_n, K_m abbiamo definito completamente l'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$.

2.3 Il Gruppo $SL(2, \mathbb{C})$

Dopo aver analizzato il gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3, 1)$ e l'algebra di Lie associata $\mathfrak{so}(3, 1)$, per poterne costruire un rivestimento, andiamo ad esaminare il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$, e in seguito la sua relazione con $SO^+(3, 1)$.

Definizione 2.3.1 (Gruppo Speciale Lineare Complesso). *Il Gruppo Speciale Lineare $SL(2, \mathbb{C})$ è il gruppo di dimensione 3 nel campo dei numeri complessi \mathbb{C} definito da:*

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{ A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \det A = 1 \}$$

dove con $GL(n, \mathbb{K})$ indichiamo il gruppo generale lineare, ovvero l'insieme delle matrici $n \times n$ invertibili a coefficienti nel campo \mathbb{K} .

Osserviamo che ogni matrice del gruppo speciale lineare, essendo una matrice invertibile con determinante uguale a uno, si può scrivere come il prodotto di una matrice unitaria e una matrice hermitiana definita positiva, avente determinante unitario. Dal punto di vista topologico quindi, la topologia del gruppo $SL(n, \mathbb{C})$ è data dal prodotto della topologia di $SU(n)$ e della topologia del gruppo delle matrici hermitiane con determinante uguale a uno e autovalori positivi. Una matrice hermitiana con queste caratteristiche può essere unicamente espressa come l'esponenziale di una matrice hermitiana a traccia nulla. Inoltre, dal momento che $SU(n)$ è uno spazio semplicemente connesso, possiamo concludere che lo sia anche $SL(n, \mathbb{C})$, per ogni n . Per quanto riguarda la dimensione del gruppo speciale lineare, dalle stesse considerazioni possiamo dedurre che ha dimensione $n^2 - 1$ in uno spazio Euclideo. Quindi il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ ha dimensione uguale a 3 nel campo dei numeri complessi \mathbb{C} , e ha dimensione pari a 6 nel campo dei numeri reali \mathbb{R} .

Come abbiamo fatto per i gruppi che abbiamo analizzato in precedenza, cerchiamo ora di descrivere l'algebra di Lie associata al gruppo $SL(2, \mathbb{C})$. L'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ associata al gruppo speciale lineare è definita da

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{ A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \mid \text{tr}(A) = 0 \}$$

e comprende quindi le matrici complesse 2×2 aventi traccia nulla. L'operatore di Lie per quest'algebra è di nuovo dato dal commutatore $[\cdot, \cdot]$. L'algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ costituisce uno spazio vettoriale di dimensione 6 nel campo dei numeri reali, e una sua base è:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_3, \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_1, \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_2, \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_3 \right\}$$

dove con $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ indichiamo le matrici di Pauli già definite nel capitolo precedente. Per rendere più chiara e lineare la notazione, denotiamo nel

2. I Gruppi $SO^+(3, 1)$ e $SL(2, \mathbb{C})$

modo seguente gli elementi della base appena introdotti:

$$j_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_n \quad \text{e} \quad k_m = \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_m$$

Osserviamo che gli elementi j_n e k_m di questa base ereditano dalle matrici di Pauli e dalla relazione $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ le seguenti proprietà di commutazione:

- $[j_l, j_m] = i\varepsilon_{lmn}j_n$
- $[j_l, k_m] = i\varepsilon_{lmn}k_n$
- $[k_l, k_m] = -i\varepsilon_{lmn}j_n$

Ci si accorge immediatamente che queste relazioni corrispondono alle relazioni di commutazione che avevamo trovato per gli elementi J_n, K_m , che generano la base dell'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$ associata al gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3, 1)$.

Possiamo quindi definire una relazione tra gli elementi delle algebre di Lie associate rispettivamente al gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ e al gruppo $SO^+(3, 1)$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathfrak{so}(3, 1) \\ j_n &\mapsto J_n \\ k_n &\mapsto K_n \end{aligned}$$

Questa mappa costituisce un isomorfismo. Vedremo che, rialzando questo isomorfismo dalle algebre di Lie ai rispettivi gruppi grazie alla mappa esponenziale, riusciremo a definire un omomorfismo suriettivo tra i gruppi $SO^+(3, 1)$ e $SL(2, \mathbb{C})$.

Ci rimane ancora da definire la relazione tra l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ e il gruppo speciale lineare, a cui è associata. La mappa esponenziale tra l'algebra di Lie e il gruppo di Lie:

$$\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$$

è un'applicazione non suriettiva. È possibile infatti trovare un elemento Q del gruppo $SL(2, \mathbb{C})$, come per esempio la matrice $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ che non sia immagine di nessun elemento $q \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ tramite la mappa esponenziale, ovvero tale che $Q = \exp(q)$.

Per costruire l'omomorfismo suriettivo di gruppi di Lie tra $SL(2, \mathbb{C})$ e $SO^+(3, 1)$ possiamo procedere come segue.

Definiamo innanzitutto l'azione del gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$ sullo spazio-tempo di Minkowski, che possiamo ottenere scrivendo ogni punto dello spazio-tempo come una matrice 2×2 hermitiana tramite le matrici di

Pauli. Consideriamo lo spazio delle matrici hermitiane su \mathbb{R} , di dimensione quattro:

$$H(2, \mathbb{C}) = \{ A \in M(2, \mathbb{R}) \mid A^\dagger := \bar{A}^T = A \}$$

Per gli elementi di questo insieme non richiediamo alcuna ipotesi sulla traccia delle matrici. Scegliamo come base per lo spazio $H(2, \mathbb{C})$, l'insieme formato dalle tre matrici di Pauli σ_i con l'aggiunta della matrice identità $\mathbb{1}$. Allora ogni punto $X = (ct, x, y, z)$ dello spazio di Minkowski si può scrivere come una matrice del tipo:

$$X = \begin{pmatrix} ct + z & x - iy \\ x + iy & ct - z \end{pmatrix} = ct\mathbb{1} + x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3$$

Possiamo quindi identificare lo spazio delle matrici hermitiane $H(2, \mathbb{C})$ con lo spazio di Minkowski, in modo tale che l'opposto del determinante della matrice hermitiana, $-\det(X) = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$, corrisponda alla lunghezza al quadrato del quadrivettore che rappresenta il punto X sullo spazio-tempo. Il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ agisce sullo spazio delle matrici hermitiane $H(2, \mathbb{C})$ attraverso la mappa

$$X \mapsto AXA^\dagger$$

che preserva il determinante. Quindi il gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$ agisce sullo spazio di Minkowski tramite delle isometrie e questo permette di definire una mappa, che è in realtà un omomorfismo, tra $SL(2, \mathbb{C})$ e il gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3, 1)$. Tale mappa è usualmente detta *Spinor Map*. Considerando quindi i gruppi di Lie e le algebre di Lie associate possiamo costruire tale omomorfismo, rappresentato dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathfrak{so}(3, 1) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ SL(2, \mathbb{C}) & \longrightarrow & SO^+(3, 1) \end{array}$$

dove ritroviamo l'isomorfismo tra le algebre di Lie, la mappa esponenziale $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ che abbiamo visto essere non suriettiva e la mappa esponenziale suriettiva $\exp : \mathfrak{so}(3, 1) \rightarrow SO^+(3, 1)$.

L'omomorfismo $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^+(3, 1)$ ha come nucleo il sottogruppo di due elementi $\{ \mathbb{1}, -\mathbb{1} \}$, e definisce quindi una mappa suriettiva.

A questo punto, possiamo dire di aver dimostrato che la mappa di spinori tra il gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$ e il gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3, 1)$ è un rivestimento doppio suriettivo, il cui nucleo è $\{ \mathbb{1}, -\mathbb{1} \} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Per il primo teorema di isomorfismo, abbiamo un isomorfismo tra i seguenti gruppi di Lie:

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\{ \mathbb{1}, -\mathbb{1} \}} \cong SO^+(3, 1)$$

2. I Gruppi $SO^+(3, 1)$ e $SL(2, \mathbb{C})$

Ci rimane un'ultima importante considerazione da fare: dal momento che $SL(2, \mathbb{C})$ è semplicemente connesso, quello che abbiamo definito è un ricoprimento universale per il gruppo $SO^+(3, 1)$.

In conclusione, possiamo dire che l'omomorfismo $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^+(3, 1)$ è un rivestimento universale doppio del gruppo di Lorentz e ha come gruppo fondamentale il gruppo ciclico $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Possiamo allora definire la sequenza corta esatta di gruppi di Lie:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SO^+(3, 1) \longrightarrow \{1\}$$

Concludiamo il capitolo con quest'ultima osservazione. Certamente emerge leggendo questi primi due capitoli una stretta correlazione. Come siamo riusciti a costruire un rivestimento universale doppio per il gruppo delle rotazioni $SO(3)$ dello spazio tridimensionale, allo stesso modo siamo riusciti a farlo per il gruppo delle trasformazioni di Lorentz che preservano l'orientazione di spazio e tempo nello spazio di Minkowski. Per il primo caso abbiamo usato il gruppo speciale unitario $SU(2)$, che si avvicina molto, anche solo nella definizione, al gruppo speciale lineare usato nel secondo contesto. Infatti se restringiamo l'omomorfismo $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^+(3, 1)$ allo spazio tridimensionale, otteniamo esattamente l'omomorfismo $SU(2) \rightarrow SO(3)$ studiato nel capitolo precedente. Inoltre, entrambi sono ricoprimenti doppi, nel senso che due elementi del gruppo di ricoprimento vengono mappati in un unico elemento del quoziente. Questo significa in altre parole che il gruppo fondamentale sia per $SO(3)$ che per $SO^+(3, 1)$ è isomorfo al gruppo ciclico con due elementi $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Lo studio dei rivestimenti a due fogli costituisce una caratteristica importante nella definizione del gruppo di Spin. Come abbiamo definito il gruppo di Spin $Spin(3)$ per il ricoprimento dato da $SU(2)$, allo stesso modo possiamo introdurre il gruppo di Spin $Spin(3, 1) \cong SL(2, \mathbb{C})$. Questi ricoprimenti doppi spinoriali, come vedremo nel capitolo seguente, sono strettamente collegati alle algebre di Clifford.

Capitolo 3

Algebre di Clifford e Gruppi di Spin

In questo capitolo vogliamo introdurre le nozioni più importanti relative alle algebre di Clifford per poter formalizzare dal punto di vista matematico quanto è stato trattato nei due capitoli precedenti. Finora abbiamo infatti visto che il gruppo $Spin(3)$ costituisce il rivestimento universale doppio del gruppo speciale ortogonale $SO(3)$, e allo stesso modo il gruppo $Spin(3, 1)$ è il ricoprimento del gruppo di Lorentz $SO^+(3, 1)$. In generale, vedremo che il gruppo di Spin $Spin(n)$ è definito come un certo sottogruppo di un'algebra $Cl(V, \Phi)$, detta *algebra di Clifford*. Quest'ultima è un'algebra generata da uno spazio vettoriale V su cui è definita una forma quadratica Φ . Risulta quindi necessario introdurre le algebre di Clifford per poter descrivere in modo completo i gruppi di Spin.

Dopo aver analizzato il gruppo $Spin(n)$, definiremo anche il gruppo $Spin(p, q)$, associato ad un'algebra di Clifford relativa a una forma quadratica con segnatura (p, q) , e ne esamineremo alcune proprietà.

In questo capitolo non scenderemo nei dettagli della trattazione, e considereremo solamente le nozioni fondamentali per la comprensione dell'argomento. Per ogni approfondimento e per le dimostrazioni si può consultare [3].

3.1 Algebre di Clifford e Gruppi di Clifford

Iniziamo la nostra descrizione con alcuni brevi richiami, che risultano fondamentali per lo studio di un'algebra di Clifford. Vedremo infatti che essa si costruisce a partire dall'algebra tensoriale e da una forma quadratica definite su uno spazio vettoriale V . Per questo iniziamo ricordando le definizioni di prodotto tensoriale e algebra tensoriale. Denoteremo con \mathbb{K} un generico campo, che consideriamo di caratteristica diversa da 2. Ai fini della nostra trattazione possiamo assumere che $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3. Algebre di Clifford e Gruppi di Spin

Definizione 3.1.1 (Prodotto Tensoriale). Siano V_1, \dots, V_p spazi vettoriali sul campo \mathbb{K} . Il prodotto tensoriale di V_1, \dots, V_p è la coppia (T, \otimes) , dove T è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $\otimes : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow T$ è una mappa p -lineare per cui vale la proprietà universale del prodotto tensoriale: per ogni spazio vettoriale W e per ogni mappa multilineare $f : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow W$, esiste un'unica applicazione lineare, $f_\otimes : T \rightarrow W$, tale che

$$f = f_\otimes \circ \otimes$$

ovvero tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_p & \xrightarrow{\otimes} & T \\ & \searrow f & \downarrow f_\otimes \\ & & W \end{array}$$

Lo spazio T viene usualmente denotato con $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$.

Dato uno spazio vettoriale V su un campo \mathbb{K} , possiamo definire un'algebra, che chiameremo $T(V)$, e un'applicazione lineare $i : V \rightarrow T(V)$ che soddisfi la seguente proprietà: data una qualunque algebra A , per ogni funzione lineare $f : V \rightarrow A$, vi è un unico omomorfismo $\bar{f} : T(V) \rightarrow A$ tale che $f = \bar{f} \circ i$, ovvero tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & T(V) \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & A \end{array}$$

Definizione 3.1.2 (Algebra Tensoriale). Dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita sul campo \mathbb{K} , possiamo costruire il seguente spazio vettoriale:

$$T^p(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p \text{ volte}}$$

Allora l'algebra $T(V)$, costruita come la somma diretta:

$$T(V) = \bigoplus_{p \geq 0} T^p(V)$$

è detta algebra tensoriale di V .

Molte algebre di particolare interesse si possono definire come il quoziente di un'algebra tensoriale $T(V)$. Questo accade per esempio nella definizione dell'algebra esterna $\wedge(V)$, dove possiamo prendere il quoziente modulo l'ideale generato da tutti gli elementi della forma $v \otimes v$, per ogni $v \in V$. Un'algebra di Clifford può essere vista come un raffinamento dell'algebra esterna,

in cui il quoziente di $T(V)$ viene considerato modulo l'ideale generato dagli elementi del tipo $v \otimes v - \Phi(v) \cdot 1$, dove Φ è la forma quadratica associata alla forma bilineare simmetrica $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ definita nello spazio vettoriale V , e $\cdot : \mathbb{K} \times T(V) \rightarrow T(V)$ denota il prodotto scalare dell'algebra tensoriale.

Definizione 3.1.3 (Algebra di Clifford). *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, con una forma bilineare simmetrica $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, e la forma quadratica associata $\Phi(v) = \varphi(v, v)$. Un'algebra di Clifford associata a V e Φ è un'algebra reale, che denotiamo con $Cl(V, \Phi)$, con un'applicazione lineare $i : V \rightarrow Cl(V, \Phi)$ tale che $(i(v))^2 = \Phi(v) \cdot 1$ per ogni $v \in V$. Inoltre per ogni algebra associativa reale A , e per ogni mappa lineare $f : V \rightarrow A$, tali che*

$$(f(v))^2 = \Phi(v) \cdot 1_A \quad \text{per ogni } v \in V$$

dove 1_A rappresenta l'elemento identità di A , vi è un unico omomorfismo di algebre $\bar{f} : Cl(V, \Phi) \rightarrow A$ tale che $f = \bar{f} \circ i$, ovvero tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & Cl(V, \Phi) \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & A \end{array}$$

L'esistenza dell'algebra di Clifford $Cl(V, \Phi)$ descritta da questa definizione è sempre garantita dalla seguente costruzione. Consideriamo l'algebra tensoriale $T(V)$, e riscriviamo l'identità fondamentale della definizione prendendo un opportuno insieme quoziente. Nel nostro caso, consideriamo l'ideale \mathfrak{A} generato dagli elementi della forma $v \otimes v - \Phi(v) \cdot 1$, con $v \in V$. Possiamo definire l'algebra di Clifford $Cl(V, \Phi)$ come l'insieme quoziente $T(V)/\mathfrak{A}$. La mappa $i : V \rightarrow Cl(V, \Phi)$ allora è data dalla seguente composizione

$$V \longrightarrow T(V) \longrightarrow T(V)/\mathfrak{A}$$

Osserviamo inoltre che se la forma quadratica è identicamente nulla, quindi se $\Phi \equiv 0$, allora l'algebra di Clifford $Cl(V, 0)$ coincide esattamente con l'algebra esterna $\bigwedge(V)$.

Consideriamo ora la forma quadratica Φ sullo spazio V , e la forma bilineare $\varphi(u, u) = \Phi(u)$. Allora si ha che:

$$\Phi(u + v) - \Phi(u) - \Phi(v) = 2\varphi(u, v)$$

per ogni $u, v \in V$. Da questa relazione e dal fatto che $(i(u + v))^2 = (i(u))^2 + (i(v))^2 + i(u)i(v) + i(v)i(u)$, unito alla proprietà soddisfatta dalla funzione i , per cui $(i(v))^2 = \Phi(v) \cdot 1$, otteniamo che:

$$i(u)i(v) + i(v)i(u) = 2\varphi(u, v) \cdot 1$$

3. Algebre di Clifford e Gruppi di Spin

Ora, data una forma bilineare φ , possiamo sempre scegliere una base ortogonale per V data da $\{u_1, \dots, u_n\}$, ovvero tale che $\varphi(u_j, u_k) = 0$ per ogni $j \neq k$. Allora in questa base possiamo riscrivere l'identità fondamentale presente nella definizione di algebra di Clifford come:

$$i(u_j)i(u_k) + i(u_k)i(u_j) = 0 \quad \text{per ogni } j \neq k$$

Da queste relazioni possiamo ricavare alcune importanti informazioni sulla base di un'algebra di Clifford. Infatti se lo spazio vettoriale V ha dimensione finita, allora la dimensione di $Cl(V, \Phi)$ è uguale a $2^{\dim V}$. A tal proposito si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema 3.1.1. *Per ogni spazio vettoriale V di dimensione finita n , la mappa $i : V \rightarrow Cl(V, \Phi)$ è iniettiva. Inoltre, data la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V , i prodotti di $2^n - 1$ termini:*

$$i(e_{i_1})i(e_{i_2}) \cdots i(e_{i_k}), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \quad \text{e} \quad 0 \leq k \leq n$$

e 1 formano una base di $Cl(V, \Phi)$. Quindi l'algebra di Clifford associata a V ha dimensione 2^n .

Questo significa quindi che possiamo definire, data la base ortogonale di V , una base dell'algebra di Clifford utilizzando tutti i possibili prodotti formati da vettori di base distinti. Il numero di questi possibili prodotti formati da k elementi estratti dagli n elementi della base di V è dato dal coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$. Per cui la dimensione dell'algebra di Clifford è

$$\dim Cl(V, \Phi) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

L'iniettività della mappa i ci permette di semplificare la nostra notazione e scrivere u al posto di $i(u)$. Allora dal teorema appena enunciato possiamo dedurre che, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortogonale di V , allora l'algebra $Cl(V, \Phi)$ è definita dai generatori $\{e_1, \dots, e_n\}$, per i quali valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} e_j^2 &= \Phi(e_j) \cdot 1 \quad \text{con } 1 \leq j \leq n \\ e_j e_k &= -e_k e_j \quad \text{con } 1 \leq j, k \leq n \text{ e } j \neq k \end{aligned}$$

In conclusione, possiamo dire che una base per l'algebra di Clifford $Cl(V, \Phi)$ è data da:

$$\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \text{ e } 0 \leq k \leq n\}$$

Prima di proseguire con lo studio delle algebre di Clifford, riportiamo alcuni semplici esempi.

Esempio 3.1.1. Sia $V = \mathbb{R}$, e_1 l'unico vettore della base, e assumiamo che la forma quadratica sia definita da $\Phi(x_1e_1) = -x_1^2$. Allora, una base dell'algebra $Cl(\mathbb{R}, \Phi)$ è data da $\{1, e_1\}$. Inoltre abbiamo che $e_1^2 = -1$. Grazie alla biiezione $e_1 \mapsto i$, l'algebra di Clifford $Cl(\mathbb{R}, \Phi)$ è isomorfa all'algebra dei numeri complessi \mathbb{C} .

Esempio 3.1.2. Sia ora $V = \mathbb{R}^2$ ed $\{e_1, e_2\}$ la base canonica associata a V . Definiamo la forma quadratica Φ come $\Phi(x_1e_1 + x_2e_2) = -x_1^2 - x_2^2$. Allora l'algebra $Cl(\mathbb{R}^2, \Phi)$ è descritta dalla base $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$. Inoltre possiamo verificare che valgono le seguenti relazioni:

$$e_2e_1 = -e_1e_2 \quad e_1^2 = e_2^2 = -1 \quad (e_1e_2)^2 = -1$$

Se consideriamo la biiezione

$$e_1 \mapsto i \quad e_2 \mapsto j \quad e_1e_2 \mapsto k$$

è facile verificare che le relazioni appena calcolate corrispondono alle proprietà soddisfatte dai quaternioni:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

Pertanto l'algebra $Cl(\mathbb{R}^2, \Phi)$ è isomorfa al corpo dei quaternioni \mathbb{H} .

Esempio 3.1.3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3, con la base $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ generata dalle matrici di Pauli σ_i , e con la forma quadratica data dal prodotto scalare $\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle = \delta_{ij}$. In questo caso V rappresenta lo spazio delle matrici hermitiane con traccia nulla. Questo spazio non è chiuso per moltiplicazione, per esempio $\sigma_1\sigma_1 = \mathbb{1} \notin V$. Possiamo pensare di risolvere questo problema considerando i prodotti definiti nel seguente modo:

$$e_1 = \sigma_1 \quad e_2 = \sigma_2 \quad e_3 = \sigma_3 \quad e_4 = \sigma_1\sigma_2 \\ e_5 = \sigma_2\sigma_3 \quad e_6 = \sigma_1\sigma_3 \quad e_7 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i\mathbb{1} \quad e_8 = (e_1)^2 = \mathbb{1}$$

In questo modo abbiamo costruito un nuovo spazio vettoriale chiuso rispetto alla moltiplicazione tra i suoi elementi di base. Lo spazio vettoriale formato dalle combinazioni degli elementi e_i ha dimensione 8 e corrisponde all'algebra associativa formata dalle matrici 2×2 a coefficienti complessi. In particolare quest'algebra, generata dalle matrici di Pauli, è detta *algebra di Pauli*.

Proseguiamo ora con l'analisi delle algebre di Clifford, ricordando che il nostro obiettivo è quello di definire un'azione dell'algebra $Cl(V, \Phi)$ su V in modo che tale azione, ristretta a qualche sottogruppo moltiplicativo dell'algebra, ci fornisca l'omomorfismo suriettivo su $SO(n)$. Esaminiamo alcune importanti proprietà delle algebre di Clifford.

3. Algebre di Clifford e Gruppi di Spin

Le algebre di Clifford sono *algebre $\mathbb{Z}/2$ -graduate*. Per spiegare meglio questo fatto, ci serve prima introdurre un automorfismo canonico α , e un antiautomorfismo t , che giocano un ruolo fondamentale nell'analisi delle algebre di Clifford.

Proposizione 3.1.1. *Ogni algebra di Clifford $Cl(V, \Phi)$ ha un unico anti-automorfismo canonico $t : Cl(V, \Phi) \rightarrow Cl(V, \Phi)$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

$$t(xy) = t(y)t(x) \quad t \circ t = id \quad t(i(v)) = i(v)$$

per ogni $x, y \in Cl(V, \Phi)$ e per ogni $v \in V$.

Inoltre per ogni algebra di Clifford possiamo definire un unico automorfismo canonico $\alpha : Cl(V, \Phi) \rightarrow Cl(V, \Phi)$ tale che:

$$\alpha \circ \alpha = id \quad e \quad \alpha(i(v)) = -i(v) \quad \text{per ogni } v \in V$$

Dal momento che α è un'involuzione, ovvero $\alpha \circ \alpha = id$, possiamo decomporre l'algebra $Cl(V, \Phi)$ nei due autospazi di α :

$$Cl(V, \Phi) = Cl^0(V, \Phi) \oplus Cl^1(V, \Phi)$$

dove $Cl^i(V, \Phi) = \{x \in Cl(V, \Phi) \mid \alpha(x) = (-1)^i x\}$ con $i = 0, 1$. Inoltre, dal fatto che α è un automorfismo, segue che se $x \in Cl^i(V, \Phi)$ e $y \in Cl^j(V, \Phi)$, allora $xy \in Cl^{i+j \pmod{2}}(V, \Phi)$. Questo conferisce all'algebra di Clifford $Cl(V, \Phi)$ la struttura di algebra graduata, e diremo che essa è un'algebra $\mathbb{Z}/2$ -graduata. Il sottospazio $Cl^0(V, \Phi)$ forma una sottoalgebra di $Cl(V, \Phi)$, chiamata *sottoalgebra pari*. Il sottospazio $Cl^1(V, \Phi)$ invece costituisce la parte dispari di $Cl(V, \Phi)$, ma non è una sottoalgebra. In altri termini possiamo dire che se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di V , allora ogni elemento dell'algebra $Cl(V, \Phi)$ si può scrivere come una combinazione lineare della forma $\sum_J \lambda_J e_J$, dove ogni elemento di $Cl^0(V, \Phi)$ è rappresentato da un elemento e_J che è il prodotto di un numero pari di fattori, mentre gli elementi di $Cl^1(V, \Phi)$ sono dati da un elemento e_J che è costituito dal prodotto di un numero dispari di fattori.

Procediamo ora nella nostra analisi delle algebre di Clifford e definiamo una nuova funzione sull'algebra $Cl(V, \Phi)$, detta *coniugazione di Clifford*, che è la mappa:

$$x \mapsto \bar{x} = t(\alpha(x)) = \alpha(t(x)) \quad \text{per ogni } x \in Cl(V, \Phi)$$

Osserviamo che se la base di V è $\{e_1, \dots, e_n\}$, allora le mappe t e α sono completamente determinate dalla loro azione sugli elementi della base. Infatti:

$$\begin{aligned} t(e_i) &= e_i & t(e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k}) &= e_{i_k}e_{i_{k-1}} \cdots e_{i_1} & t(1) &= 1 \\ \alpha(e_i) &= -e_i & \alpha(e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k}) &= (-1)^k e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k} & \alpha(1) &= 1 \end{aligned}$$

per $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Di conseguenza anche la coniugazione è ben definita sugli elementi della base come:

$$\begin{aligned}\bar{e}_i &= -e_i \\ \overline{e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}} &= (-1)^k e_{i_k} e_{i_{k-1}} \dots e_{i_1}\end{aligned}$$

dove $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, e $\bar{1} = 1$. Quindi la coniugazione si comporta come un antiautomorfismo.

Definizione 3.1.4 (Gruppo di Clifford). *Dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita, e una forma quadratica Φ , il gruppo di Clifford di Φ è il gruppo degli elementi invertibili x tali che $\alpha(x)vx^{-1} \in V$:*

$$\Gamma(\Phi) = \{ x \in Cl(V, \Phi)^* \mid \alpha(x)vx^{-1} \in V \text{ per ogni } v \in V \}$$

dove con $Cl(V, \Phi)^*$ indichiamo il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di $Cl(V, \Phi)$.

Definiamo anche il *Gruppo di Clifford Speciale*, che indichiamo con $\Gamma^+(\Phi)$, come:

$$\Gamma^+(\Phi) = \Gamma(\Phi) \cap Cl^0(V, \Phi)$$

Si può verificare che i gruppi di Clifford generalizzano in un certo senso i quaternioni. La formula $\alpha(x)vx^{-1}$ definisce un'azione del gruppo di Clifford sullo spazio vettoriale V che preserva la forma quadratica Φ , e definisce quindi un omomorfismo tra il gruppo di Clifford e il gruppo ortogonale. Per ogni elemento $x \in \Gamma(\Phi)$, se $v \in V$ e $\Phi(v) \neq 0$, allora esiste una mappa:

$$\begin{aligned}\rho_x : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto \alpha(x)vx^{-1} \quad \forall v \in V\end{aligned}$$

che corrisponde ad una riflessione su un iperpiano ortogonale al vettore x . In generale, è possibile definire una mappa $\rho : \Gamma(\Phi) \rightarrow GL(V)$ definita da

$$\rho(x)(v) = \alpha(x)vx^{-1}$$

per ogni $x \in \Gamma(\Phi)$ e per ogni $v \in V$. Quello che si può dimostrare è che ρ , ristretta al gruppo di Clifford speciale, è un omomorfismo suriettivo da $\Gamma^+(\Phi)$ in $SO(n)$. Il nucleo della mappa $\rho : \Gamma(\Phi) \rightarrow GL(V)$ è $\ker(\rho) = \mathbb{R}^* \cdot 1$, ovvero il gruppo moltiplicativo degli elementi non nulli del campo \mathbb{R} moltiplicato per $1 \in Cl(V, \Phi)$. Questo ci permette di definire la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^* \cdot 1 \longrightarrow \Gamma^+(\Phi) \longrightarrow SO(n) \longrightarrow 1$$

Introduciamo infine la mappa $N : Cl(V, \Phi) \rightarrow Cl(V, \Phi)$, chiamata *norma spinoriale*, e definita da:

$$N(x) = x\bar{x}$$

Per la norma $N(\cdot)$ vale la seguente proposizione:

3. Algebre di Clifford e Gruppi di Spin

Proposizione 3.1.2. *Se $x \in \Gamma(\Phi)$, allora $N(x) \in \mathbb{R}^* \cdot 1$. Inoltre la restrizione della norma N al gruppo $\Gamma(\Phi)$ è un omomorfismo $N : \Gamma(\Phi) \rightarrow \mathbb{R}^* \cdot 1$, e $N(\alpha(x)) = N(x)$ per ogni $x \in \Gamma(\Phi)$.*

3.2 Il Gruppo $Spin(n)$

Lo studio delle algebre di Clifford e dei gruppi di Clifford è fondamentale per la descrizione dei gruppi di Spin, che abbiamo già incontrato nei capitoli precedenti. Infatti tali gruppi sono definiti come un certo sottogruppo dell'algebra $Cl(V, \Phi)$.

Definizione 3.2.1 (Gruppo $Pin(n)$ e Gruppo $Spin(n)$). *Dato lo spazio vettoriale V di dimensione finita n , si definisce il gruppo $Pin(n)$ come il nucleo $\ker(N)$ dell'omomorfismo $N : \Gamma(\Phi) \rightarrow \mathbb{R}^* \cdot 1$, e il gruppo $Spin(n)$ come $Pin(n) \cap \Gamma^+(\Phi)$.*

Osserviamo che se $N(x) = 1$, allora l'elemento x è invertibile e $x^{-1} = \bar{x}$, poiché $x\bar{x} = N(x) = 1$. Allora il gruppo $Pin(n)$ è il sottogruppo del gruppo di Clifford $\Gamma(\Phi)$ formato dagli elementi di norma uguale a 1, e i gruppi $Pin(n)$ e $Spin(n)$ si possono scrivere nel seguente modo:

$$\begin{aligned} Pin(n) &= \{ x \in Cl(V, \Phi) \mid xvx^{-1} \in V \text{ per ogni } v \in V, N(x) = 1 \} \\ Spin(n) &= \{ x \in Cl^0(V, \Phi) \mid xvx^{-1} \in V \text{ per ogni } v \in V, N(x) = 1 \} \end{aligned}$$

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, è possibile definire un omomorfismo dal gruppo di Clifford $\Gamma^+(\Phi)$ al gruppo speciale ortogonale. Il seguente teorema ci permette di formalizzare questa considerazione.

Teorema 3.2.1. *La restrizione della mappa $\rho : \Gamma(\Phi) \rightarrow GL(V)$ al gruppo di Spin è un omomorfismo suriettivo:*

$$\rho : Spin(n) \rightarrow SO(n)$$

il cui nucleo è $\ker(\rho) = \{-1, 1\}$.

In generale, quando V è uno spazio vettoriale sui numeri reali di dimensione $n \geq 3$, il gruppo $Spin(n)$ è semplicemente connesso. In questo caso quindi il gruppo di Spin costituisce un rivestimento universale doppio del gruppo speciale ortogonale $SO(n)$, ed è tale che esista una sequenza corta esatta di gruppi di Lie:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow Spin(n) \longrightarrow SO(n) \longrightarrow 1$$

Nel primo capitolo abbiamo accennato al fatto che $Spin(3) \cong SU(2)$. Approfondiamo ora questo fatto, analizzando nel dettaglio il gruppo $Spin(3)$. Consideriamo l'algebra Cl_3 , ovvero l'algebra di Clifford definita sullo spazio

vettoriale dei numeri reali di dimensione $n = 3$. Essa è generata da otto elementi:

$$\{ 1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2e_3 \}$$

che soddisfano le seguenti relazioni:

$$e_j^2 = -1 \quad e_je_k = -e_ke_j \quad \text{con } 1 \leq j, k \leq 3, j \neq k$$

Allora il gruppo di Spin $Spin(3)$ è costituito da tutti i prodotti

$$\prod_{i=1}^{2k} (a_i e_1 + b_i e_2 + c_i e_3)$$

che consistono in un numero pari di fattori, e tali che $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$. A partire dalle relazioni che intercorrono tra gli elementi di base dell'algebra Cl_3 , possiamo dire che ogni elemento x si può scrivere come

$$x = a1 + be_2e_3 + ce_3e_1 + de_1e_2$$

dove x soddisfa la condizione per cui $xvx^{-1} \in \mathbb{R}^3$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Inoltre, dalla definizione di gruppo di Spin segue che $N(x) = 1$. Per l'operazione di coniugazione abbiamo che $\bar{x} = a1 - be_2e_3 - ce_3e_1 - de_1e_2$. Allora, calcolando la norma di $x \in Cl_3$ otteniamo:

$$N(x) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Questa espressione, unita alla condizione $N(x) = 1$, si può tradurre in una relazione tra i coefficienti a, b, c, d , per cui otteniamo che $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Risulta allora che il gruppo $Spin(3)$ consiste degli elementi $x \in Cl_3$ del tipo $x = a1 + be_2e_3 + ce_3e_1 + de_1e_2$, con la condizione che $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Se definiamo la seguente biiezione:

$$i \mapsto e_2e_3 \quad j \mapsto e_3e_1 \quad k \mapsto e_1e_2$$

possiamo dimostrare che si ha un isomorfismo tra il gruppo speciale unitario $SU(2)$, che si può identificare con l'insieme dei quaternioni di norma unitaria, e il gruppo $Spin(3)$.

Osserviamo inoltre che la condizione $N(x) = 1$ implica che $x^{-1} = \pm \bar{x}$. Per cui se $x = a1 + be_2e_3 + ce_3e_1 + de_1e_2 = a1 + bi + cj + dk \in Spin(3)$, allora $x^{-1} = \bar{x} = a1 - be_2e_3 - ce_3e_1 - de_1e_2 = a1 - bi - cj - dk$ corrisponde all'operazione di coniugazione definita nei quaternioni. Usando l'identificazione precedente tra gli elementi della base di Cl_3 e i quaternioni i, j, k , possiamo verificare che sono soddisfatte anche le seguenti relazioni:

- $(e_1e_2e_3)^2 = 1$

3. Algebre di Clifford e Gruppi di Spin

- $(e_1e_2e_3)i = i(e_1e_2e_3) = -e_1,$
 $(e_1e_2e_3)j = j(e_1e_2e_3) = -e_2,$
 $(e_1e_2e_3)k = k(e_1e_2e_3) = -e_3$
- $(e_1e_2e_3)e_1 = -i, (e_1e_2e_3)e_2 = -j, (e_1e_2e_3)e_3 = -k$

Quindi se $x = a1 + bi + cj + dk \in Spin(3)$, per ogni $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\alpha(x)vx^{-1} &= x(v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3)x^{-1} \\ &= x(e_1e_2e_3)^2(v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3)x^{-1} \\ &= (e_1e_2e_3)x(e_1e_2e_3)(v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3)x^{-1} \\ &= -(e_1e_2e_3)x(v_1i + v_2j + v_3k)x^{-1}\end{aligned}$$

Questo calcolo dimostra che le rotazioni $R \in SO(3)$ indotte da $x \in Spin(3)$ possono essere viste come le rotazioni indotte dal quaternionione $a1 + bi + cj + dk$ sui quaternioni con prima coordinata nulla, usando la mappa:

$$v \mapsto -(e_1e_2e_3)v \quad x \mapsto -(e_1e_2e_3)x$$

che permette di associare ad un vettore $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ il quaternionione con prima coordinata nulla $v_1i + v_2j + v_3k$ e viceversa.

3.3 Il Gruppo $Spin(p, q)$

Per ogni forma quadratica Φ su \mathbb{R} non degenera, possiamo scegliere una base ortogonale in cui Φ abbia la seguente espressione:

$$\Phi(x_1, \dots, x_{p+q}) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - (x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2)$$

dove i numeri p e q dipendono solamente dalla forma quadratica. La forma quadratica che corrisponde a p, q viene indicata con $\Phi_{p,q}$, e la coppia (p, q) è detta *segnatura* di Φ .

Sia ora $n = p + q$ la dimensione dello spazio vettoriale V relativo a $\Phi_{p,q}$. Denotiamo l'algebra di Clifford associata alla forma quadratica $\Phi_{p,q}$ con $Cl_{p,q}$, e il corrispondente gruppo di Clifford con $\Gamma_{p,q}$. Di conseguenza il gruppo di Clifford speciale, in questo contesto, è $\Gamma_{p,q}^+ = \Gamma_{p,q} \cap Cl_{p,q}^0$. L'algebra di Clifford che abbiamo trattato nei paragrafi precedenti corrisponde, in questa notazione, all'algebra $Cl_{0,n}$.

Una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ per \mathbb{R}^n con segnatura (p, q) è costituita dai vettori a due a due ortogonali, di cui p hanno norma 1, e q hanno norma uguale a -1 . Quindi si ha la stessa relazione per gli elementi di base dell'algebra $Cl_{p,q}$.

Prima di introdurre i gruppi $Pin(p, q)$ e $Spin(p, q)$, ritorniamo su due esempi che abbiamo visto nel primo paragrafo, analizzandoli in questo nuovo contesto.

Esempio 3.3.1. $Cl_{0,1}$ su \mathbb{R} è un'algebra a due dimensioni, generata dal singolo vettore e_1 , il cui quadrato è uguale a -1 . Di conseguenza essa è isomorfa al campo dei numeri complessi \mathbb{C} .

Esempio 3.3.2. L'algebra $Cl_{0,2}$ su \mathbb{R} è un'algebra di dimensione quattro, generata da $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$. Gli ultimi tre elementi della base hanno quadrato -1 e anticommutano tra loro. Pertanto quest'algebra è isomorfa al corpo dei quaternioni \mathbb{H} .

Definizione 3.3.1 (Gruppo $Pin(p, q)$ e Gruppo $Spin(p, q)$). *Definiamo il gruppo $Pin(p, q)$ come l'insieme degli elementi invertibili in $Cl_{p,q}$ che hanno norma uguale a ± 1 :*

$$Pin(p, q) = \{x \in \Gamma_{p,q} \mid N(x) = \pm 1\}$$

Allora, il gruppo di $Spin$ è definito come l'insieme degli elementi di $Pin(p, q)$ che sono prodotto di un numero pari di vettori di norma uguale a 1:

$$Spin(p, q) = Pin(p, q) \cap \Gamma_{p,q}^+$$

Da questa definizione, possiamo quindi riscrivere il gruppo di $Spin$ come:

$$Spin(p, q) = \{x \in Cl_{p,q}^0 \mid xv\bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ per ogni } v \in \mathbb{R}^n, N(x) = 1\}$$

Il gruppo $Pin(p, q)$ è un ricoprimento del gruppo $O(p, q)$. Possiamo definire il gruppo pseudo-ortogonale $O(p, q)$ come il gruppo delle isometrie, e quindi delle applicazioni lineari f , tali che

$$\Phi_{p,q}(f(v)) = \Phi_{p,q}(v) \quad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^n$$

Allora il gruppo $SO(p, q)$ è il sottogruppo di $O(p, q)$ formato dalle isometrie $f \in O(p, q)$ con la proprietà che $\det(f) = 1$. Il gruppo $Spin(p, q)$ costituisce un rivestimento doppio del gruppo $SO(p, q)$. Il seguente teorema generalizza a questo contesto quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente.

Teorema 3.3.1. *La restrizione della mappa ρ al gruppo $Spin(p, q)$ è un omomorfismo suriettivo*

$$\rho : Spin(p, q) \rightarrow SO(p, q)$$

il cui nucleo è $\ker(\rho) = \{-1, 1\}$.

Nel secondo capitolo abbiamo visto come il gruppo di $Spin$ di segnatura $(3, 1)$ costituisca un ricoprimento universale del gruppo di Lorentz $SO^+(3, 1)$. Questo fatto si può dimostrare in modo del tutto generale. Infatti si può vedere che per ogni $p, q \geq 0$, il gruppo $Spin(p, q)$ è un ricoprimento doppio di $SO(p, q)$. Inoltre per ogni $n \geq 3$, il gruppo $Spin(n)$ è semplicemente connesso, e quindi costituisce un ricoprimento universale.

3. Algebre di Clifford e Gruppi di Spin

Le algebre di Clifford hanno numerose applicazioni in geometria differenziale e in fisica teorica. Esamineremo nei prossimi capitoli l'algebra generata dalle *matrici di Dirac*. Queste matrici γ soddisfano la seguente proprietà:

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\eta_{ij}$$

dove η è la matrice di una forma quadratica di segnatura (p, q) . Queste relazioni, come vedremo, definiscono l'algebra di Clifford $Cl_{p,q}(\mathbb{C})$. Nel nostro caso considereremo lo spazio-tempo con la metrica di Minkowski, che ha segnatura $(3, 1)$. L'isomorfismo che si può definire tra l'algebra di Clifford e l'algebra delle matrici complesse vedrà coinvolte le matrici di dimensione 4×4 a coefficienti complessi. Queste matrici vengono utilizzate per esprimere l'*equazione di Dirac*, che regola il moto delle particelle con Spin semi-intero, e per introdurre l'*operatore di Dirac*.

I gruppi di Spin hanno svariate applicazioni. In fisica per esempio sono usati per descrivere le simmetrie dei fermioni. In geometria differenziale invece si usano per definire una struttura di Spin su varietà pseudo-Riemanniane, che permette di rialzare il gruppo di struttura di un fibrato vettoriale. Vedremo che il gruppo di Spin è il gruppo di struttura del *fibrato spinoriale*, che useremo per descrivere le funzioni d'onda dell'equazione di Dirac nello spazio curvo. La connessione definita su tale fibrato è la *connessione di Spin*, che permette di semplificare molte questioni di relatività generale. Lo studio di questo fibrato e della connessione associata ci permetterà di scrivere l'equazione di Dirac nello spazio-tempo curvo.

Capitolo 4

Equazione di Dirac nello Spazio di Minkowski

Nella fisica delle particelle, l'*Equazione di Dirac* è un'equazione d'onda relativistica formulata dal fisico britannico *Paul Dirac* nel 1928. Quest'equazione descrive il moto dei fermioni, ovvero delle particelle con Spin $1/2$, come gli elettroni, mediante una funzione d'onda a quattro componenti, detta *Spinore di Dirac*, che è una naturale estensione dello spinore a due componenti non relativistico. La sua formulazione rappresenta un importante passo in avanti nello sviluppo della fisica teorica, poiché è consistente sia con i principi della meccanica quantistica, sia con le teorie della relatività ristretta, e porta alla definizione di quella branca della fisica che prende il nome di meccanica quantistica relativistica. L'espressione originale dell'equazione proposta da Dirac nell'articolo *The quantum theory of the electron* era data da:

$$\left(\beta mc^2 + c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i \right) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

dove $\psi(\vec{r}, t)$ è la funzione d'onda che descrive un elettrone di massa m , nello spazio-tempo con coordinate $\vec{r} = (x, y, z)$ e t . Le componenti p_i rappresentano le componenti dell'operatore impulso, presente anche nell'equazione di Schrödinger, che descrive l'evoluzione temporale dello stato di un sistema, ma non è un'equazione relativistica. L'*equazione di Schrödinger* è un'equazione lineare alle derivate parziali che ha come incognita la funzione d'onda di un sistema quantistico, e quindi descrive lo stato del sistema in ogni posizione spaziale e in ogni istante temporale.

La presenza nell'equazione sia della velocità della luce c , sia della costante di Planck ridotta \hbar riflette il legame con la relatività e la meccanica quantistica. Infatti, lo scopo di Dirac era quello di spiegare dal punto di vista relativistico il comportamento degli elettroni, e l'idea alla base dei suoi studi era di riuscire a riscrivere proprio l'equazione di Schrödinger in una formulazione che fosse invariante dal punto di vista relativistico.

Il primo tentativo di formulare un'equazione per il moto gli elettroni consistente con la relatività si deve però a Klein e Gordon. L'equazione che presentarono, detta appunto *equazione di Klein-Gordon*, descrive il moto delle particelle scalari, ovvero con Spin nullo, e nasce sempre dall'esigenza di riscrivere in notazione covariante l'equazione di Schrödinger. È un'equazione d'onda relativistica, del secondo ordine nello spazio e nel tempo.

In queste equazioni, assume un ruolo di primaria importanza il significato della funzione d'onda. Nell'interpretazione di Copenaghen della meccanica quantistica infatti, la funzione ψ rappresenta una descrizione del sistema quantistico in termini di distribuzione di probabilità. Vedremo che nell'equazione di Klein-Gordon emergono degli inconvenienti relativi all'interpretazione probabilistica, e sarà l'equazione di Dirac a risolverli, definendo una densità di probabilità sempre positiva.

Sulla base dello sviluppo storico di queste teorie, ricorderemo le caratteristiche principali delle equazioni di Schrödinger e di Klein-Gordon, per poi analizzare nel dettaglio la formulazione dell'equazione di Dirac, e alcune proprietà degli spinori di Dirac. Concluderemo il capitolo con un breve commento su una delle più grandi scoperte della fisica moderna, che nasce proprio dallo studio di questa equazione: l'esistenza del *positrone*.

4.1 Equazione di Schrödinger

Nell'ambito della meccanica quantistica, l'*equazione di Schrödinger* rappresenta una delle più importanti equazioni per determinare l'evoluzione temporale dello stato di un sistema. Formulata da Schrödinger nel 1925 e pubblicata l'anno seguente, è un'equazione differenziale alle derivate parziali, lineare, complessa e non relativistica che ha come incognita la funzione d'onda ψ . In particolare la variabile ψ definisce lo stato del sistema in ogni istante di tempo e in ogni posizione. Questa equazione venne introdotta a partire dall'ipotesi di de Broglie dell'*onda di materia* per cui anche ai corpi materiali, e quindi alle particelle, possono essere associate delle proprietà caratteristiche delle onde. Nonostante tali onde fossero associate a particelle relativistiche e la prima equazione proposta da Schrödinger fosse relativistica, quella poi pubblicata non lo è. Infatti applicando la prima equazione all'elettrone presente nell'atomo di idrogeno, si ottennero dei risultati non compatibili con i dati sperimentali, mentre in un'approssimazione non relativistica i calcoli concordavano con le osservazioni. Il legame con la meccanica quantistica emerge invece dalla relazione tra la funzione d'onda e l'interpretazione probabilistica che le si associa: il quadrato del modulo della funzione d'onda corrisponde alla probabilità di trovare una particella in un certo punto dello spazio.

L'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo si presenta con la seguente

formulazione generale:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t)$$

dove $\hbar = h/2\pi$ è la costante di Planck ridotta. L'incognita dell'equazione è la funzione d'onda $\psi(\vec{r}, t)$, dipendente dal punto $\vec{r} = (x, y, z)$ nello spazio tridimensionale e dalla variabile temporale t . Infine, \hat{H} rappresenta l'*operatore hamiltoniano*, che nell'ambito della meccanica quantistica è dato da:

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \hat{U}(\vec{r})$$

dove compare l'operatore *energia potenziale* \hat{U} e la massa m della particella. Quindi possiamo scrivere esplicitamente l'equazione di Schrödinger come:

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \hat{U}(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t) = 0$$

L'equazione di Schrödinger è un'equazione non relativistica. Un importante passo in avanti verso una formulazione consistente con le leggi della relatività ristretta avvenne con l'introduzione dell'*equazione di Klein-Gordon* e poi dell'*equazione di Dirac*, che descrivono rispettivamente il moto delle particelle con Spin 0 e con Spin 1/2.

4.2 Equazione di Klein-Gordon

L'equazione di Klein-Gordon rappresenta il primo tentativo di dare una formulazione relativistica all'equazione di Schrödinger. È un'equazione del secondo ordine nella derivata temporale ed è relativistica, ma non è compatibile con la teoria della meccanica quantistica, poiché richiedeva che un'equazione d'onda fosse lineare nella derivata rispetto al tempo. Inoltre, questa equazione presenta alcune problematiche, principalmente legate all'interpretazione della funzione d'onda in termini di probabilità. Dirac, come vedremo, partirà proprio da questi inconvenienti per cercare un'equazione generale che descrivesse il moto dell'elettrone e che fosse compatibile con i fondamenti della meccanica quantistica e con la teoria della relatività ristretta.

Vediamo in breve quali sono i passaggi fondamentali che portano all'equazione di Klein-Gordon. Possiamo ricavare l'espressione di questa equazione a partire dall'equazione di Schrödinger

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \hat{U}(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t) = 0$$

Consideriamo una particella non relativistica libera. La sua energia è descritta dalla formula:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

4. Equazione di Dirac nello Spazio di Minkowski

dove \vec{p} rappresenta la quantità di moto, e m la massa della particella. Possiamo allora riscrivere l'equazione di Schrödinger nel caso di una particella libera come

$$\hat{E}\psi(\vec{r}, t) = \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi(\vec{r}, t)$$

dove abbiamo introdotto l'operatore energia \hat{E} , e l'operatore impulso \hat{p} :

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla$$

L'equazione di Schrödinger, come abbiamo già detto, non è invariante dal punto di vista relativistico. Ci interessa invece costruire un'equazione quantistica relativistica che descriva la funzione d'onda di una particella libera. Introduciamo allora l'espressione relativistica per l'energia, che tiene in considerazione sia la massa a riposo sia l'energia cinetica della particella. L'energia totale relativistica è data da:

$$\hat{E} = \sqrt{\hat{p}^2c^2 + m^2c^4}$$

Sostituendo questa espressione per l'operatore energia all'interno dell'equazione di Schrödinger $\hat{E}\psi = \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi$ ci imbattiamo subito in un primo inconveniente. Applicando infatti l'operatore ∇ , ci troviamo a dover calcolare la radice quadrata di un operatore differenziale. Per risolvere questo problema, un'idea è quella di considerare la relazione quadratica tra l'operatore energia e l'operatore impulso, per cui $\hat{E}^2 = \hat{p}^2c^2 + m^2c^4$, e una sorta di quadrato per l'equazione, ottenendo quindi:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi = [\hat{p}^2c^2 + m^2c^4]\psi$$

Sostituendo anche l'espressione dell'operatore impulso $\hat{p} = -i\hbar\nabla$, e svolgendo alcuni semplici calcoli possiamo ottenere la seguente equazione:

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0$$

conosciuta attualmente come *Equazione di Klein-Gordon*. Osserviamo che scritta in forma covariante, questa equazione assume un'espressione piuttosto semplice e compatta:

$$\partial_\mu\partial^\mu\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0$$

In particolare, se introduciamo l'operatore di d'Alembert

$$\square = \partial_\mu\partial^\mu = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

l'equazione di Klein-Gordon si può scrivere nel seguente modo:

$$\left(\square - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

Il vantaggio dell'equazione di Klein-Gordon è senza dubbio quello di trattare spazio e tempo nello stesso modo, in quanto l'operatore di d'Alembert risulta essere un invariante relativistico, ovvero non cambia se viene applicata una trasformazione relativistica. Questa equazione porta però con sé anche alcuni problemi, che non possono assolutamente essere trascurati. Ci concentriamo in particolare sul problema che emerge quando si vuole dare un significato in termini di probabilità alla funzione d'onda, poiché tra le soluzioni di questa equazione possiamo trovare stati a energia negativa. Ricordiamo infatti che per l'equazione di Schrödinger, se una particella è descritta da una funzione d'onda $\psi(\vec{r}, t)$ normalizzabile, allora il modulo al quadrato della funzione d'onda si può interpretare come la probabilità di trovare la particella nel punto \vec{r} al tempo t :

$$\rho(\vec{r}, t)_S = |\psi(\vec{r}, t)|^2$$

e per questo motivo, deve essere una grandezza definita positiva. Nel caso della soluzione dell'equazione di Klein-Gordon si ottiene la seguente densità di probabilità:

$$\rho(\vec{r}, t)_{KG} = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left[\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right]$$

che non è sempre definita positiva, ma può essere anche negativa o nulla. Vedremo nel seguente paragrafo che sarà Dirac, con l'equazione che porta il suo nome, a risolvere gli inconvenienti dell'equazione di Klein-Gordon.

4.3 Equazione di Dirac

L'equazione di Dirac è un'equazione d'onda che descrive in modo invariante dal punto di vista relativistico il moto dei fermioni, ovvero le particelle della meccanica quantistica con Spin pari a 1/2. Venne formulata da Dirac nel 1928 con lo scopo di risolvere alcuni degli inconvenienti generati dall'equazione di Klein-Gordon, che rappresenta la prima generalizzazione dell'equazione di Schrödinger all'ambito relativistico. L'equazione di Schrödinger, come abbiamo visto, tratta lo spazio e il tempo in modo differente, e non è relativistica. La prima equazione relativistica per le onde venne proposta sempre da Schrödinger, ma presto abbandonata. Fu in seguito riformulata da Klein e Gordon. In particolare, per una particella di massa m , l'equazione di Klein-Gordon si esprime come:

$$\left(\square - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

4. Equazione di Dirac nello Spazio di Minkowski

dove ψ è la funzione d'onda, e \square è l'operatore di d'Alembert definito, tramite la matrice $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ della metrica di Minkowski, come:

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

Per semplicità nella trattazione, da questo momento poniamo convenzionalmente le costanti \hbar e c uguali a uno, come si usa spesso in fisica. Con questa nuova convenzione, l'equazione di Klein-Gordon assume la seguente espressione:

$$-\partial_t^2 \psi + \nabla^2 \psi = m^2 \psi$$

e quindi, con l'operatore di d'Alembert otteniamo:

$$\square \psi = m^2 \psi$$

Uno degli obiettivi che si prefiggeva Dirac era quello di trovare un'equazione relativistica che potesse avere un'interpretazione probabilistica consistente con i principi della meccanica quantistica. Questo significava trovare una soluzione al problema di interpretazione della funzione d'onda in termini di densità di probabilità, poiché dall'equazione di Klein-Gordon emergevano valori negativi. Dirac cercò inoltre di ottenere un'equazione del primo ordine nel tempo t , come lo era l'equazione di Schrödinger. Inoltre per la relatività ristretta, si richiedeva che l'equazione fosse del primo ordine anche nelle variabili spaziali x, y, z . Per questo Dirac fu portato a costruire un operatore differenziale del primo ordine:

$$\not{\partial} = \sum_j \gamma_j \partial_j = \gamma^j \partial_j$$

dove i γ^j sono dei coefficienti costanti tali che

$$\square \psi = \not{\partial} (\not{\partial} \psi)$$

Questa definizione significa che possiamo interpretare l'operatore $\not{\partial}$, detto *operatore di Dirac*, come una sorta di radice quadrata dell'operatore di d'Alembert. Più in generale, è possibile riscrivere l'equazione di Klein-Gordon come

$$\square \psi = \not{\partial} (\not{\partial} \psi) = m^2 \psi$$

Ciò vuol dire che possiamo risolvere questa equazione passando per la soluzione dell'*equazione di Dirac*:

$$\not{\partial} \psi = \gamma^j \partial_j \psi = m \psi$$

In realtà svolgendo i calcoli nell'equazione di Klein-Gordon, e usando la definizione che abbiamo dato per gli operatori \square e $\not{\partial}$, dobbiamo osservare

che:

$$\begin{aligned}\square &= \not{\partial}\not{\partial} = (\gamma^j \partial_j)(\gamma^k \partial_k) \\ &= \gamma^j \gamma^k \partial_j \partial_k = \frac{\gamma^j \gamma^k + \gamma^k \gamma^j}{2} \partial_j \partial_k\end{aligned}$$

per cui è richiesto che i coefficienti γ^j soddisfino la seguente proprietà:

$$\gamma^j \gamma^k + \gamma^k \gamma^j = 2\eta^{jk}$$

Risulta evidente da quest'ultima osservazione che i coefficienti γ^j non possono essere scalari, ma devono avere espressione matriciale, e devono essere matrici di dimensione 4×4 . In particolare si può vedere che i numeri γ generano un'algebra di Clifford, che deve avere dimensione 4. Da questa proprietà sui coefficienti γ segue immediatamente che anche la funzione d'onda deve essere formata da quattro componenti. Infatti la funzione d'onda di Dirac, detta anche *Spinore di Dirac*, è una funzione dello spazio vettoriale complesso composta da quattro componenti, che non sono però componenti di un quadrivettore ma sono di natura spinoriale e trasformano quindi in modo differente sotto l'azione di trasformazioni di Lorentz. Infatti, uno spinore mostra un'inversione di segno quando viene applicata una rotazione completa. Per questo motivo è importante precisare la notazione usata: gli indici μ, ν, \dots servono per indicare le componenti di un quadrivettore, come fatto finora, e gli indici i, j, \dots si usano per indicare le componenti di uno spinore di Dirac.

Il nostro obiettivo, giunti a questo punto, è quello di dare una costruzione formale dei coefficienti γ , per poter in seguito analizzare le proprietà degli spinori di Dirac e dell'operatore di Dirac.

Per proseguire con la trattazione, abbiamo bisogno di introdurre due nuove applicazioni. Definiamo quindi due nuove mappe che associano a un vettore $x \in \mathbb{R}^4$ le matrici x_* e $x^* \in H(2, \mathbb{C})$ nel seguente modo. Sia $x = (t, \vec{r}) = (t, x, y, z) \in \mathcal{M}$ un vettore dello spazio di Minkowski e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ il vettore formato dalle matrici di Pauli, allora

$$\begin{aligned}x \in \mathcal{M} &\mapsto x_* = t\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \in H(2, \mathbb{C}) \\ x_* &= \begin{pmatrix} t + z & x - iy \\ x + iy & t - z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Allo stesso modo possiamo definire un'altra applicazione tra lo spazio di Minkowski \mathcal{M} e le matrici hermitiane $H(2, \mathbb{C})$, e la chiameremo x^* . Allora si ha che

$$\begin{aligned}x \in \mathcal{M} &\mapsto x^* = -t\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \in H(2, \mathbb{C}) \\ x^* &= \begin{pmatrix} -t + z & x - iy \\ x + iy & -t - z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

4. Equazione di Dirac nello Spazio di Minkowski

Osserviamo ora alcune semplici proprietà che valgono per queste applicazioni, e che useremo nelle prossime dimostrazioni. Se calcoliamo i determinanti delle matrici associate alle due mappe x_* e x^* otteniamo che

$$\det x_* = \det x^* = -\langle x, x \rangle$$

Inoltre vale la seguente relazione:

$$x_*x^* = x^*x_* = \langle x, x \rangle \mathbb{1}$$

dove, considerata la metrica η , si ha che $\langle x, y \rangle = x^T \eta y$. Queste due mappe ci permettono di identificare lo spazio di Minkowski \mathcal{M} con l'insieme delle matrici hermitiane $H(2, \mathbb{C})$. Si noti che generalizzano la costruzione del ricoprimento di $SO^+(3, 1)$ data dal gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ di cui si è parlato nel secondo capitolo.

Abbiamo visto nei capitoli precedenti, che le matrici di Pauli generano un'algebra di Clifford di dimensione 3, e soddisfano la relazione di anticommutazione $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}$. Vi è in generale una procedura standard per passare da un'algebra di dimensione n , che chiamiamo Cl_n , a una di dimensione $n + 1$, e quindi Cl_{n+1} . Vogliamo quindi passare dall'algebra definita dalle matrici di Pauli a un'algebra Cl_4 . Dobbiamo poi considerare un'altra complicazione: la relatività ci richiede infatti di usare la metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ definita nello spazio \mathcal{M} , al posto della metrica δ_{ij} in \mathbb{R}^3 .

Iniziamo considerando l'algebra di Pauli. La mappa x_* in questo caso è data dal prodotto del vettore $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ con il vettore $\vec{\sigma}$ per cui:

$$x_* = \vec{r} \cdot \vec{\sigma}$$

e restituisce una matrice di dimensione 2×2 . Ad esempio, il primo vettore $(1, 0, 0)$ della base canonica di \mathbb{R}^3 viene mandato da questa applicazione nella prima matrice di Pauli, $(1, 0, 0)\vec{\sigma} = \sigma_1$, e così via. A partire da questo, spostandoci nello spazio quadridimensionale, possiamo definire una mappa $\gamma : \mathbb{R}^4 \rightarrow M(4, \mathbb{C})$ come:

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_* \\ x^* & 0 \end{pmatrix}$$

che ci permette di associare ad ogni vettore e_j della base canonica di \mathbb{R}^4 una matrice $\gamma_j = \gamma(e_j)$ di dimensione 4×4 a coefficienti complessi, espressa in termini delle matrici di Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e della matrice identità $\mathbb{1}$. Le matrici γ_j non hanno espressione univoca, ma una possibile rappresentazione è

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\mathbb{0}$ rappresenta la matrice nulla 2×2 . Se scriviamo queste matrici in modo esplicito otteniamo:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le matrici γ_j appena definite vengono chiamate *Matrici Gamma* o *Matrici di Dirac*. Sono matrici unitarie di dimensione 4×4 e soddisfano la relazione di anticommutazione, per cui

$$\{\gamma_j, \gamma_k\} = \gamma_j \gamma_k + \gamma_k \gamma_j = 2\eta_{jk} \mathbb{1}$$

Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 4.3.1. *Per ogni $x, y \in \mathcal{M}$, si ha che*

$$\gamma(x)\gamma(y) + \gamma(y)\gamma(x) = 2\langle x, y \rangle \mathbb{1}$$

dove $\langle x, y \rangle = x^T \eta y$ e η è la metrica di Minkowski.

Dimostrazione. Entrambi i membri dell'equazione presente nel teorema sono funzioni bilineari simmetriche di x e y . Ricordiamo allora che per ogni funzione f di questo tipo vale la relazione

$$4f(x, y) = f(x + y, x + y) - f(x - y, x - y)$$

Allora è sufficiente verificare la relazione nel caso in cui $x = y$. Quindi:

$$\begin{aligned} \gamma(x)\gamma(x) &= \begin{pmatrix} \mathbb{0} & x_* \\ x^* & \mathbb{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{0} & x_* \\ x^* & \mathbb{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_* x^* & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & x^* x_* \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \langle x, x \rangle \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \langle x, x \rangle \mathbb{1} \end{pmatrix} = \langle x, x \rangle \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \langle x, x \rangle \mathbb{1} \end{aligned}$$

□

Dal teorema possiamo dedurre che le matrici di Dirac generano un'algebra di Clifford $Cl_4(\mathbb{C})$ sullo spazio di Minkowski con metrica $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, detta *Algebra di Dirac*. La scrittura dell'equazione di Dirac tramite le matrici di Dirac è certamente vantaggiosa, poiché rende evidente l'invarianza relativistica dell'equazione. Quindi, la formulazione covariante dell'equazione è data da:

$$(\gamma^j \partial_j - m)\psi = 0$$

4. Equazione di Dirac nello Spazio di Minkowski

e, se usiamo la scrittura con l'operatore di Dirac $\not{\partial}$, otteniamo:

$$(\not{\partial} - m)\psi = 0$$

Osservazione. Se introduciamo nuovamente le costanti c e \hbar , che abbiamo posto inizialmente uguali a uno, otteniamo la seguente formulazione per l'equazione di Dirac:

$$\left(\gamma^j \partial_j - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

L'equazione di Dirac si può interpretare come un'equazione agli autovalori, le cui soluzioni sono dei vettori a quattro componenti, ma non dei quadrivettori. Una soluzione particolare dell'equazione, che prende in generale il nome di *Spinore di Dirac*, può essere data da

$$\begin{aligned}\psi^{(1,2)} &= e^{-imt} e^{(1,2)} \\ \psi^{(3,4)} &= e^{imt} e^{(3,4)}\end{aligned}$$

dove $e^{(i)}$ sono i vettori della base ortonormale dello spazio a quattro dimensioni. Le prime due soluzioni sono ad energia positiva, mentre le altre due a energia negativa. Inoltre la densità di probabilità associata alla funzione d'onda risulta essere sempre positiva, poiché è definita da:

$$\rho(\vec{r}, t)_D = \sum_{i=1}^4 |\psi_i(\vec{r}, t)|^2 \geq 0$$

Non ci soffermiamo sullo studio della soluzione dell'equazione di Dirac, ma è importante osservare che rimane ancora un problema da risolvere. Non si riescono infatti a eliminare le energie negative, che continuano a costituire due degli autovalori dell'equazione. Per ovviare a questo problema, Dirac ipotizzò l'esistenza del cosiddetto *mare di fermioni* o *Mare di Dirac*, ovvero un modello teorico in cui il vuoto è visto come mare di particelle che occupano gli stati a energia negativa. Particelle con le proprietà descritte da Dirac per il mare di fermioni, furono in seguito scoperte. Portano il nome di *positroni*, e sono l'antiparticella dell'elettrone.

4.4 Gli Spinori di Dirac

Nel paragrafo precedente abbiamo analizzato le matrici di Dirac γ e l'algebra Cl_4 da esse generata, detta algebra di Dirac. Lo spazio complesso \mathbb{C}^4 , su cui sono definite queste matrici, è lo spazio dei valori della funzione ψ . Per questo la funzione d'onda ψ si può rappresentare come un vettore colonna formato da quattro funzioni complesse. In realtà le quattro componenti della funzione ψ non costituiscono le componenti di un quadrivettore, ma

sono di natura spinoriale. In questo paragrafo andremo ad esaminare alcune proprietà della funzione d'onda per l'equazione di Dirac, o meglio andremo a definire gli *Spinori di Dirac*, ovvero un particolare oggetto usato per descrivere le funzioni d'onda relativistiche per particelle con Spin 1/2. Introdurre gli spinori si rivela necessario per descrivere il moto dei fermioni, poiché se usassimo un quadrivettore non potremmo rappresentare in modo corretto il momento rotatorio intrinseco. Infatti dopo una rotazione completa attorno a un asse, un vettore torna alla propria posizione originale, cosa che non accade per gli oggetti con Spin semi-intero. Lo spinore di Dirac generalizza lo spinore a due componenti, che è usato per descrivere lo Spin dell'elettrone non relativistico nello spazio tridimensionale, e serve a rappresentare lo stato dell'elettrone relativistico definito sullo spazio di Minkowski.

L'idea alla base dello sviluppo dell'equazione di Dirac, come abbiamo visto, era quella di costruire un operatore differenziale del primo ordine che si potesse interpretare come una sorta di radice quadrata dell'operatore di d'Alembert. Quello che abbiamo ottenuto è un operatore, denotato con $\not{\partial}$, definito a partire dalle matrici γ :

$$\not{\partial} = \sum_j \gamma_j \partial_j = \gamma^j \partial_j$$

Ci rimane a questo punto un altro problema da affrontare, ovvero l'invarianza relativistica dell'equazione. Finora, per definire le matrici γ abbiamo usato un particolare riferimento nello spazio di Minkowski, mentre risulta fondamentale avere la stessa rappresentazione di queste matrici in ogni riferimento considerato, per non incorrere nel rischio di definire un operatore $\not{\partial}$ diverso per ogni riferimento. Infatti l'operatore $\not{\partial}$, così come è stato definito non è invariante, per cui se cambiando il sistema di coordinate riusciamo a mantenere la stessa espressione per le matrici γ_j , ciò che cambia è l'operatore di derivazione ∂_j applicato alla funzione d'onda ψ . Cerchiamo quindi di trasformare le funzioni ψ in modo tale che la loro rappresentazione sia indipendente dal sistema di riferimento scelto.

Abbiamo definito una generica matrice γ , per un vettore $x = (t, \vec{r}) \in \mathbb{R}^4$ come:

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_* \\ x^* & 0 \end{pmatrix}$$

e dalla definizione dei coefficienti γ_j , abbiamo che $\gamma(x) = x^j \gamma_j$. Ricordiamo inoltre che lo spazio di Minkowski, attraverso le mappe x_* e x^* si può identificare con lo spazio $H(2, \mathbb{C})$ delle matrici hermitiane. In particolare possiamo definire un'azione del gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$ sullo spazio-tempo \mathcal{M} attraverso le matrici hermitiane nel seguente modo. Consideriamo una matrice $A \in SL(2, \mathbb{C})$, e la mappa lineare $\hat{\Lambda}[A]$:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}[A] : \mathcal{M} &\rightarrow H(2, \mathbb{C}) \\ x &\mapsto \hat{\Lambda}[A](x)_* := Ax_*A^\dagger = Ax_*\bar{A}^T \end{aligned}$$

4. Equazione di Dirac nello Spazio di Minkowski

Allora tale mappa ci porta a definire un omomorfismo suriettivo di $SL(2, \mathbb{C})$ sul gruppo di Lorentz $SO^+(3, 1)$:

$$\hat{\Lambda} : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^+(3, 1)$$

che costituisce il ricoprimento doppio del gruppo di Lorentz, di cui abbiamo già parlato nel secondo capitolo, e dove Λ è una trasformazione di Lorentz:

$$x' = \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) x = \Lambda x$$

La trasformazione di Lorentz Λ , attraverso la mappa $\hat{\Lambda} : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^+(3, 1)$ corrisponde a due matrici $\pm A \in SL(2, \mathbb{C})$. Di queste, ne possiamo considerare una, poiché i coefficienti della trasformazione Λ sono costanti. Per semplicità possiamo scegliere $+A$. Inoltre, come alla matrice x_* abbiamo associato, tramite la mappa $\hat{\Lambda}[A]$, la matrice Ax_*A^\dagger , così possiamo fare anche per x^* .

Lemma 4.4.1. *La matrice 2×2 associata a $\hat{\Lambda}[A]$ tramite la mappa x^* è*

$$\hat{\Lambda}[A](x)^* := A^{\dagger-1} x^* A^{-1}$$

Possiamo allora dimostrare il seguente teorema, che ci permette di definire una relazione tra le matrici γ espresse in due diversi sistemi di coordinate, legati tra loro da una trasformazione di Lorentz.

Teorema 4.4.1. *Sia $\rho : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(4, \mathbb{C})$ la rappresentazione delle matrici del gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ come matrici 4×4 a coefficienti complessi, definita da:*

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{\dagger-1} \end{pmatrix}$$

Allora le matrici di Dirac soddisfano la relazione

$$\gamma(\hat{\Lambda}[A](x)) = \rho(A)\gamma(x)\rho(A)^{-1}$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione di $\gamma(x)$ che abbiamo introdotto precedentemente, applicata al contesto richiesto dall'enunciato del teorema, per cui:

$$\begin{aligned} \gamma(\hat{\Lambda}[A](x)) &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{\Lambda}[A](x)_* \\ \hat{\Lambda}[A](x)^* & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & Ax_*A^\dagger \\ A^{\dagger-1}x^*A^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{\dagger-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_* \\ x^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \rho(A)\gamma(x)\rho(A^{-1}) = \rho(A)\gamma(x)\rho(A)^{-1} \end{aligned}$$

□

Osservazione. Notiamo che x e $\hat{\Lambda}[A](x)$ sono le componenti dello stesso vettore x in due diversi sistemi di riferimento di Lorentz.

Vediamo ora come possiamo interpretare questo risultato. Finora, l'espressione della matrice $\gamma(x)$ dipendeva dal riferimento locale scelto. Se tuttavia per ogni trasformazione di Lorentz Λ nello spazio \mathcal{M} operiamo un cambio di riferimento nello spazio \mathbb{C}^4 , dato dal cambio di base definito con la matrice $\rho(A)$, allora dal teorema possiamo dedurre che

$$\gamma(x) : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$$

è una trasformazione lineare ben definita e indipendente dal sistema di riferimento di Lorentz. Questo segue dal fatto che, se M è la matrice di una trasformazione lineare, allora M cambia rispetto a un cambio di riferimento ρ secondo la regola $M \mapsto \rho M \rho^{-1}$.

La relazione del teorema precedente si può riscrivere in componenti nel seguente modo. Siano $\hat{\Lambda}^i_j$ le entrate della matrice $\hat{\Lambda}[A]$. Allora, dalla definizione $\gamma(x) = x^j \gamma_j$, abbiamo le seguenti due espressioni:

$$\begin{aligned} \gamma(\hat{\Lambda}[A](x)) &= \hat{\Lambda}^i_j x^j \gamma_i \\ \rho(A) \gamma(x) \rho(A)^{-1} &= \rho(A) x^j \gamma_j \rho(A)^{-1} \end{aligned}$$

Uguagliando i due termini, secondo la relazione $\gamma(\hat{\Lambda}[A](x)) = \rho(A) \gamma(x) \rho(A)^{-1}$ che ci viene fornita dal teorema, otteniamo che

$$\hat{\Lambda}^i_j \gamma_i = \rho(A) \gamma_j \rho(A)^{-1}$$

L'usuale rappresentazione del gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$ attraverso le matrici A di dimensione 2×2 è detta *rappresentazione spinoriale*, quando tale gruppo è pensato come un ricoprimento doppio del gruppo di Lorentz $SO^+(3, 1)$. Tale rappresentazione è indicata con la scrittura $\mathcal{D}(1/2, 0)$. La rappresentazione che si basa sull'uso delle matrici $A^{\dagger-1}$ è detta *cospinoriale* ed è indicata con $\mathcal{D}(0, 1/2)$. Possiamo definire poi i seguenti oggetti: gli spinori a due componenti ψ_L che trasformano sotto l'azione di A sono detti *levogiri*, mentre i cospinori ψ_R , che trasformano sotto l'azione di $A^{\dagger-1}$ sono detti *destrogiri*.

Affinché $\gamma(x)$ sia una trasformazione lineare ben definita, che agisca sugli spinori

$$\mathbb{C}^4 \ni \psi \mapsto \gamma(x) \psi \in \mathbb{C}^4$$

allora $\psi = (\psi_L, \psi_R)^T$ deve essere uno spinore a quattro componenti, normalmente detto *spinore di Dirac*. Quest'ultimo viene trasformato tramite la rappresentazione definita da ρ nel seguente modo:

$$\psi \mapsto \psi' = \rho(A) \psi$$

4. Equazione di Dirac nello Spazio di Minkowski

per ogni trasformazione di Lorentz Λ nello spazio di Minkowski \mathcal{M} .

In conclusione possiamo enunciare il seguente corollario, che riassume quanto abbiamo fin qui discusso.

Corollario 4.4.1. *Una trasformazione di Lorentz $\Lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ deve essere accompagnata da un cambio di base $\rho(A) : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ nello spazio degli spinori. In questo modo $\gamma(x)$ agisce sugli spinori di Dirac.*

La rappresentazione del gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$, e quindi del gruppo di Lorentz $SO^+(3, 1)$ si scrive come $\mathcal{D}(1/2, 1/2)$ ed è data dalla somma diretta di $\mathcal{D}(1/2, 0)$ con $\mathcal{D}(0, 1/2)$. Uno spinore di Dirac è quindi un elemento dello spazio vettoriale complesso quadridimensionale considerato con la rappresentazione $\mathcal{D}(1/2, 0) \oplus \mathcal{D}(0, 1/2)$.

4.5 L'Operatore di Dirac

L'operatore di Dirac è un operatore differenziale costruito come una sorta di radice quadrata di un operatore del secondo ordine, ovvero dell'operatore di d'Alembert. Nei paragrafi precedenti abbiamo visto quale sia l'idea intuitiva alla base della formulazione dell'operatore di Dirac. Cerchiamo di approfondire ora qualche dettaglio.

Consideriamo lo spazio-tempo \mathcal{M} con la metrica di Minkowski. Una funzione d'onda ψ è uno spinore di Dirac se è una funzione definita nello spazio \mathcal{M} a valori in \mathbb{C}^4 , e rispetta le proprietà enunciate nel corollario 4.4.1 del paragrafo precedente. Possiamo scrivere le componenti della funzione d'onda in termini degli spinori a due componenti levogiro ψ_L e destro giro ψ_R , per cui:

$$\psi = (\psi_L, \psi_R)^T = (\psi_L^1, \psi_L^2, \psi_R^1, \psi_R^2)^T = (\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4)^T$$

Per quanto riguarda le matrici γ , abbiamo finora definito quelle covarianti, indicate con l'indice $j = 1, 2, 3$ in basso, come:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo definire anche le matrici γ controvarianti, indicate con l'indice j in alto. La relazione fra queste è data dalla trasformazione tramite la metrica η :

$$\gamma^j = \eta^{jk} \gamma_k$$

Perciò, anche i coefficienti γ^j soddisfano la relazione di anticommutazione definita per gli elementi dell'algebra di Clifford che abbiamo visto nel teorema 4.3.1

$$\gamma^j \gamma^k + \gamma^k \gamma^j = 2\eta^{jk} \mathbb{1}$$

A questo punto, ricordiamo che abbiamo definito l'*operatore di Dirac* come l'operatore differenziale $\not\partial = \gamma^j \partial_j$, che applicato alla funzione d'onda ψ fornisce:

$$\not\partial \psi := \gamma^j \frac{\partial \psi}{\partial x^j}$$

Questa definizione dell'operatore di Dirac dipende da una particolare scelta del sistema di coordinate x^j . Vediamo ora cosa accade se applichiamo la medesima definizione a un nuovo sistema di coordinate descritto da una trasformazione di Lorentz Λ , per cui $x' = \Lambda x = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)x$. In questo caso la funzione d'onda ψ , per quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente, si trasforma nel seguente modo:

$$\psi' = \rho(A)\psi$$

dove A è una matrice costante. Allora, applicando la definizione che abbiamo introdotto per l'operatore di Dirac, e per la funzione d'onda ψ' otteniamo

$$\begin{aligned} \not\partial' \psi' &= \gamma_j \eta'^{jk} \frac{\partial \psi'}{\partial x'^k} = \gamma_j \eta'^{jk} \rho(A) \frac{\partial \psi}{\partial x'^k} \\ &= \gamma_j \eta'^{jk} \rho(A) \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \\ &= \gamma_j \frac{\partial x'^j}{\partial x^r} \rho(A) \eta^{ri} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Osserviamo che la metrica η' coincide con la metrica η , poiché entrambe hanno coefficienti costanti nello spazio-tempo di Minkowski, mentre la loro espressione è differente quando si considera lo spazio-tempo curvo. Questo calcolo, unito all'uguaglianza $\hat{\Lambda}^i_j \gamma_i = \rho(A) \gamma_j \rho(A)^{-1}$, ci porta a concludere che

$$\not\partial' \psi' = \rho(A) \gamma_r \eta^{ri} \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$$

Allora l'implicazione

$$\psi' = \rho(A)\psi \implies \not\partial' \psi' = \rho(A) \not\partial \psi$$

mostra che l'operatore di Dirac $\not\partial$ è un operatore differenziale del primo ordine ben definito che agisce sugli spinori a quattro componenti del tipo $\mathcal{D}(1/2, 1/2)$ nello spazio di Minkowski.

Per concludere la descrizione dell'operatore di Dirac, cerchiamo di darne una sua rappresentazione matriciale esplicita. Ricordando che la metrica $\eta^{jk} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, le matrici $\gamma^j = \eta^{jk} \gamma_k$ sono definite da

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

4. Equazione di Dirac nello Spazio di Minkowski

per $j = 1, 2, 3$. Allora, dalla definizione $\not{\partial} = \gamma^j \partial_j$ segue che

$$\begin{aligned}\not{\partial} &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}\partial_0 + \sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2 + \sigma_3\partial_3 \\ \mathbb{1}\partial_0 + \sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2 + \sigma_3\partial_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\partial} \\ \mathbb{1}\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\partial} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

dove, come abbiamo già fatto, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e $\vec{\partial} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$.

In questo modo possiamo riscrivere l'equazione di Dirac $(\not{\partial} - m)\psi = 0$ come il sistema

$$\begin{cases} (-\partial_t + \vec{\sigma} \cdot \vec{\partial})\psi_R = m\psi_L \\ (\partial_t + \vec{\sigma} \cdot \vec{\partial})\psi_L = m\psi_R \end{cases}$$

formato da quattro equazioni alle derivate parziali accoppiate attraverso gli spinori a due componenti ψ_L e ψ_R .

4.6 La scoperta del positrone

Concludiamo questo capitolo con un commento di carattere storico e culturale sugli studi che portarono alla scoperta dell'esistenza del positrone. Di sicuro questa scoperta rappresenta una delle più importanti implicazioni dell'equazione di Dirac, e uno dei più grandi risultati della fisica moderna.

Abbiamo accennato nel corso del capitolo al *Mare di Dirac*, un modello teorico che rivoluziona il concetto di vuoto per cui quest'ultimo è in realtà un mare infinito di particelle a energia negativa. La sua esistenza venne ipotizzata da Dirac nel 1930 per risolvere il problema degli stati quantistici a energia negativa che emergeva dalla soluzione dell'equazione da lui formulata. Abbiamo visto che questa equazione, nata dall'idea di dare una descrizione del moto dell'elettrone consistente con la relatività, ammette come soluzione anche stati ad energia negativa. Infatti, l'equazione relativistica che lega energia, massa e impulso è $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Se cerchiamo le soluzioni di tale equazione, siamo portati a scrivere che $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, tralasciando però la soluzione negativa. Infatti vi è anche la possibilità che $E = -\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$. Nonostante le energie negative non si osservino in natura, la loro esistenza nella teoria non poteva essere trascurata. Dalla precedente espressione poi si può notare come per energie negative non fosse possibile individuare un limite inferiore, e quindi uno stato di energia minima che permettesse di definire una condizione di stabilità dell'elettrone. Questo problema venne risolto interpretando lo stato fondamentale vuoto come un mare di particelle che occupano gli stati a energia negativa, rendendoli così inaccessibili, in accordo con quanto affermato dal *Principio di Esclusione di Pauli*.

Rimane ancora un'altra questione da risolvere. Un elettrone a energia negativa avrebbe potuto infatti compiere un salto quantico, passando in uno stato ad energia positiva, e diventando allora osservabile. Lo spazio vuoto

lasciato, detto *buca* o *lacuna* nel mare di particelle, doveva perciò essere occupato da un particella analoga all'elettrone ma con carica opposta. Una particella con queste caratteristiche venne scoperta qualche anno più tardi, e oggi prende il nome di *Positrone*, o antiparticella dell'elettrone.

Chiaramente furono molti i fisici che studiarono questi fenomeni. Inizialmente lo stesso Dirac cercò di dare una spiegazione alla soluzione ad energia negativa della sua equazione osservando come un elettrone con energia negativa si muovesse all'interno di un campo magnetico come se la sua carica fosse in realtà positiva. In un primo momento venne quindi esplorata la possibilità che la particella che rispettasse queste condizioni potesse essere il protone, nonostante la sua massa fosse ben maggiore rispetto a quella dell'elettrone. All'epoca infatti i protoni erano le uniche particelle conosciute di carica positiva, e l'introduzione di nuove particelle non era ben vista dai fisici, poiché sarebbe stata una supposizione teorica e non una derivazione dai dati sperimentali. Fu Oppenheimer ad opporsi a questa prima identificazione con i protoni, dimostrando come tale ipotesi non poteva essere compatibile con l'esistenza dell'atomo di idrogeno, poiché la sua validità avrebbe necessariamente portato alla distruzione stessa dell'atomo di idrogeno dovuta alla grande differenza tra le masse del protone e dell'elettrone. Alla stessa conclusione era giunto anche il matematico Hermann Weyl. Nasce a questo punto, con l'articolo *Quantised singularities in the electromagnetic field* pubblicato da Dirac nel 1931, l'idea dell'esistenza di una particella non ancora osservata sperimentalmente, chiamata *antielettrone*, che avrebbe dovuto avere la stessa massa dell'elettrone ma carica opposta. In seguito, Feynman propose una nuova interpretazione delle soluzioni a energia negativa dell'equazione, e quindi del positrone: quest'ultimo doveva essere infatti un elettrone che si muove a ritroso nel tempo, che equivale a dire che tale particella presenta una carica elettrica positiva.

Il primo fisico a osservare il positrone fu Dmitri Skobeltsyn nel 1929, durante un esperimento sulla rilevazione della radiazione gamma nei raggi cosmici. Altri furono i fisici Blackett e Occhialini, ma nessuno di loro pubblicò qualcosa a riguardo. Il merito della scoperta, avvenuta nel 1932, si deve a Carl David Anderson. Il positrone fu la prima evidenza scientifica dell'esistenza dell'antimateria e fu scoperto durante un esperimento per lo studio dei raggi cosmici, osservando che tale particella si comportava in modo simile ad un elettrone, ma si muoveva in direzione opposta rispetto a quest'ultimo se posta all'interno di un campo magnetico, mostrando così una carica positiva.

Capitolo 5

Equazione di Dirac nello Spazio-Tempo Curvo

In fisica matematica, come si può facilmente immaginare, l'*Equazione di Dirac nello spazio-tempo curvo* generalizza alla relatività generale la formulazione dell'equazione di Dirac che abbiamo analizzato nel capitolo precedente. Il passaggio dallo spazio-tempo piatto allo spazio curvo non è immediato, per cui dovremo prima soffermarci su alcune questioni di natura geometrica. Ci poniamo l'obiettivo di riformulare l'equazione introducendo un nuovo *operatore di Dirac*, espresso in termini delle derivate covarianti per lo spazio curvo, che agisca sulle funzioni d'onda ψ , rappresentate in questo contesto dalle sezioni di un particolare fibrato. Per prima cosa ci dovremo spostare dallo spazio-tempo di Minkowski, su cui era definita la metrica η , allo spazio curvo, generalmente modellizzato da una varietà differenziabile M e localmente approssimabile ad uno spazio piatto, su cui introdurremo una metrica pseudo-Riemanniana g con la stessa segnatura della metrica di Minkowski ma con coefficienti non costanti. Per poter parlare di equazione di Dirac poi, dovremmo assicurarci che tale varietà abbia una struttura di Spin, ovvero dovremmo poter rialzare il gruppo di struttura del fibrato tangente TM associato alla varietà dal gruppo di Lorentz ristretto al gruppo speciale lineare. La prima parte del capitolo sarà dedicata quindi alla descrizione di quanto serve per poter definire tale struttura di Spin. Inizieremo con dei richiami sulle nozioni di geometria differenziale che useremo nel corso della trattazione, e ci concentreremo poi sul problema del rialzamento del gruppo di struttura di un fibrato vettoriale.

La seconda parte del capitolo sarà invece dedicata alla costruzione del *fibrato spinoriale di Dirac*, le cui sezioni sono gli spinori di Dirac ψ , e al calcolo della *connessione di Spin*. Data una struttura di Spin sulla varietà, per definire il fibrato spinoriale sarà necessario individuare delle opportune funzioni di transizione, a valori nel gruppo di struttura $SL(2, \mathbb{C})$, e che soddisfino le tipiche proprietà delle funzioni di transizione. Definito quindi tale fibrato ci

5. Equazione di Dirac nello Spazio-Tempo Curvo

rimane da introdurre la giusta connessione. Sappiamo in generale che su ogni varietà è possibile definire infinite connessioni, con il vantaggio di poter scegliere la connessione migliore per descrivere un certo problema. Per esempio sul fibrato tangente ad una varietà pseudo-Riemanniana è possibile definire la connessione di Levi-Civita, che è l'unica connessione con alcune particolari proprietà, e di cui conosciamo esplicitamente i coefficienti. In questa situazione ci troviamo però a lavorare in un fibrato diverso dal fibrato tangente, anche se strettamente collegato. Perciò dobbiamo introdurre un'opportuna connessione che ci permetta di definire una derivata covariante con cui siamo in grado di derivare le sezioni del nostro fibrato, e quindi le funzioni d'onda ψ che descrivono il moto di particelle con Spin $1/2$. Concluderemo quindi il capitolo con il calcolo esplicito dei coefficienti della connessione di Spin a partire dalla connessione di Levi-Civita, e con la formulazione dell'operatore di Dirac nello spazio-tempo curvo.

5.1 Richiami di geometria differenziale

Prima di entrare nel vivo delle questioni che ci porteranno a formulare l'operatore di Dirac nello spazio curvo, dedichiamo un paragrafo al richiamo di tutte quelle nozioni di geometria differenziale che riteniamo fondamentali per la comprensione degli argomenti, e che saranno usate nel corso del capitolo.

Una varietà topologica è un insieme che può essere identificato localmente con un aperto di \mathbb{R}^n . A partire da questo vogliamo definire una varietà differenziabile, per cui è necessario che due diverse identificazioni della stessa parte dell'insieme con un aperto di \mathbb{R}^n determinino delle funzioni di classe C^∞ . Sia quindi M uno spazio topologico, $U \subset M$ un aperto, allora diremo che la coppia (U, φ) è una *carta* di M se $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) = V \subset \mathbb{R}^n$ è un omeomorfismo sull'aperto V di \mathbb{R}^n . L'inversa di φ , $\varphi^{-1} : V \rightarrow U \subset M$ è detta *parametrizzazione locale*. Una carta ci permette di introdurre un sistema di *coordinate locali* $\varphi(\cdot) = (x^1(\cdot), \dots, x^n(\cdot))$, con $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, sull'aperto U . In questo modo possiamo identificare ogni punto di U con una n -upla di numeri reali, trasferendo in un certo senso sull'insieme $U \subset M$ le coordinate di \mathbb{R}^n . Ora, se consideriamo due carte locali, (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) , possiamo definire il *cambiamento di carta* o *cambiamento di coordinate* nel seguente modo. Se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, abbiamo che

$$\begin{array}{ccc}
 & U_1 \cap U_2 & \\
 \varphi_1 \swarrow & & \searrow \varphi_2 \\
 \mathbb{R}^n \supset V_1 & \xleftrightarrow{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}} & V_2 \subset \mathbb{R}^n \\
 & \xleftarrow{\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}} &
 \end{array}$$

Le funzioni $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ e $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ sono omeomorfismi tra aperti di \mathbb{R}^n . Si definiscono *funzioni di transizione* le mappe $\eta_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ che soddisfano le

seguenti proprietà:

- $\eta_{ii} = id$
- $\eta_{ji} = \eta_{ij}^{-1}$ su $U_i \cap U_j$
- $\eta_{ij} \circ \eta_{jk} = \eta_{ik}$ su $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Definizione 5.1.1 (Varietà Topologica). Una varietà topologica è una coppia (M, \mathcal{U}) , dove M è uno spazio topologico e \mathcal{U} è un atlante su M , ovvero una famiglia di carte $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tali che $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Dalla definizione di varietà, sappiamo che ogni punto di M ha un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n , per cui le proprietà locali della topologia di una varietà sono le stesse della topologia di \mathbb{R}^n . Di solito si suppone che la topologia di una varietà sia di Hausdorff e a base numerabile. Possiamo quindi dare una definizione formale di varietà differenziabile:

Definizione 5.1.2 (Varietà Differenziabile). Una varietà differenziabile di dimensione n è un insieme M provvisto di una struttura differenziabile che induce su M una topologia di Hausdorff a base numerabile.

Uno degli obiettivi di questo capitolo sarà quello di definire una struttura di Spin sulla varietà. Per questo dobbiamo soffermarci sul concetto di fibrato.

Definizione 5.1.3 (Fibrato Vettoriale). Un fibrato vettoriale di rango r su una varietà M è una varietà differenziabile E , con un'applicazione differenziabile suriettiva $\pi : E \rightarrow M$ fra una varietà E , detta spazio totale del fibrato, e la varietà M , detta base del fibrato, che soddisfa le seguenti proprietà:

- (i) per ogni $p \in M$, la fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ è uno spazio vettoriale di dimensione r su \mathbb{R} ;
- (ii) per ogni $p \in M$, esiste un intorno aperto $U \subset M$ di p e un diffeomorfismo $\chi : E|_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$, detto trivializzazione locale, tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc}
 E|_U = \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\chi} & U \times \mathbb{R}^r \\
 & \searrow \pi & \downarrow p_1 \\
 & & U
 \end{array}$$

dove abbiamo indicato con $p_1 : U \times \mathbb{R}^r \rightarrow U$ la proiezione sul primo fattore, e tale che la restrizione di χ a ciascuna fibra sia un isomorfismo di spazi vettoriali: $\chi|_p : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^r$.

5. Equazione di Dirac nello Spazio-Tempo Curvo

Dato un fibrato vettoriale E , diremo che la carta locale (U, φ) *banalizza* il fibrato se esiste una trivializzazione locale del fibrato definita su $\pi^{-1}(U)$, mentre un atlante banalizza il fibrato se ogni sua carta lo fa. Consideriamo quindi un atlante $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i, \chi_i)\}_{i \in I}$ che banalizza il fibrato E , le applicazioni $\eta_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(r, \mathbb{R})$ sono dette *funzioni di transizione* e sono definite dalla seguente composizione:

$$\begin{aligned} \chi_i \circ \chi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^r &\rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^r \\ (p, v) &\mapsto (p, \eta_{ij}(p)v) \end{aligned}$$

per ogni $p \in U_i \cap U_j$ e per ogni $v \in \mathbb{R}^r$. Le funzioni di transizione soddisfano le stesse proprietà che abbiamo richiamato prima per le funzioni di transizione tra carte. In un fibrato vettoriale le funzioni di transizione η_{ij} sono funzioni a valori in $GL(r, \mathbb{R})$, mentre più in generale, come nel caso dei fibrati principali, le funzioni di transizione sono a valori in uno specifico gruppo di Lie G , per cui $\eta_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$. Allora diremo che G è il *gruppo di struttura* del fibrato. Tra i fibrati vettoriali, certamente gioca un ruolo molto importante il fibrato tangente. Si può vedere che ad ogni punto di una varietà è possibile associare uno spazio vettoriale della stessa dimensione della varietà, lo *spazio tangente* $T_p M$, definito dall'insieme delle derivazioni nel punto $p \in M$. Il *fibrato tangente* ha a sua volta una struttura naturale di varietà, di dimensione pari al doppio di quella della varietà di partenza.

Definizione 5.1.4 (Fibrato Tangente). *Sia M una varietà differenziabile. Il fibrato tangente è dato dall'unione disgiunta degli spazi tangenti*

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}$$

con la proiezione $\pi : TM \rightarrow M$, tale che $(p, v) \mapsto p$.

La fibra in p è $\pi^{-1}(p) = \{(p, v) \mid v \in T_p M\} \cong T_p M$.

Infine, con *sezione di un fibrato*, si intende una applicazione dalla base a valori nello spazio totale del fibrato che associa ad ogni punto un elemento della fibra su quel punto. Nel nostro contesto, le sezioni del fibrato saranno rappresentate dagli spinori di Dirac ψ .

Definizione 5.1.5 (Sezione). *Una sezione di E su un aperto $U \subset M$ è un'applicazione differenziabile $s : U \rightarrow E$ tale che $\pi \circ s = id_U$, cioè tale che $s(p) = (p, v)$ dove $v \in E_p$ per ogni $p \in U$.*

Per poter parlare dell'equazione di Dirac nello spazio curvo ci servono ancora alcune nozioni, importanti per definire il fibrato spinoriale e la connessione di Spin. Una connessione è in generale una struttura che ci permette di derivare campi vettoriali. Il problema è che in genere non si ha un modo intrinseco di definire la derivata di una sezione di un fibrato lungo un campo

di vettori, che si traduce concretamente nell'impossibilità di scrivere un rapporto incrementale, dal momento che i valori di un campo vettoriale in punti diversi appartengono a spazi vettoriali diversi. Nel nostro contesto avremo bisogno di introdurre una connessione specifica per il fibrato spinoriale, per poter derivare le sue sezioni, ovvero le funzioni d'onda ψ .

Definizione 5.1.6 (Connessione). Una connessione su un fibrato vettoriale E è una funzione:

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) &\rightarrow \mathcal{E}(M) \\ (X, s) &\mapsto \nabla_X s \end{aligned}$$

dove X è un campo vettoriale e s una sezione del fibrato, tale che:

- (i) è \mathcal{C}^∞ -lineare in X , ovvero $\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} s = f_1 \nabla_{X_1} s + f_2 \nabla_{X_2} s$
- (ii) è \mathbb{R} -lineare in s , per cui $\nabla_X (a_1 s_1 + a_2 s_2) = a_1 \nabla_X s_1 + a_2 \nabla_X s_2$
- (iii) soddisfa la regola di Leibniz: $\nabla_X (fs) = f \nabla_X s + X(f)s$

per ogni $X, X_1, X_2 \in \mathcal{T}(M)$, $s, s_1, s_2 \in \mathcal{E}(M)$, e $f, f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

La sezione $\nabla_X s \in \mathcal{E}(M)$ è detta *derivata covariante* di s lungo il campo vettoriale X . Infine, una connessione definita sul fibrato tangente TM è detta *connessione lineare* su M .

Teorema 5.1.1. Ogni fibrato E sulla varietà differenziabile M ammette una connessione.

Dimostrazione. Si veda [2, pagina 317]. □

In modo del tutto generale, è possibile dare un'espressione locale per una connessione, scegliendo un sistema di coordinate locali date dalla carta (U, φ) che trivializza il fibrato E e un riferimento locale $\{e_1, \dots, e_r\}$ su U . La carta determina inoltre una base locale per TM data da $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$. Allora possiamo scrivere che:

$$\nabla_{\partial_j} e_h = \sum_{k=1}^r \Gamma_{jh}^k e_k$$

per delle opportune funzioni $\Gamma_{jh}^k \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Nel caso in cui $E = TM$ allora tali funzioni sono dette *simboli di Christoffel*. I coefficienti Γ_{jh}^k determinano completamente la connessione.

Quando parleremo di connessione di Spin, andremo a calcolare esplicitamente i coefficienti della matrice di 1-forme ω . Una connessione su E si può infatti definire anche come un operatore \mathbb{R} -lineare $\nabla : \mathcal{E}(M) \rightarrow A^1(E)$ a valori nell'insieme delle 1-forme su E , tale che

$$\nabla(fs) = f \nabla s + df \otimes s$$

5. Equazione di Dirac nello Spazio-Tempo Curvo

per ogni $s \in \mathcal{E}(M)$ e per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Il legame con la definizione precedente sta nella seguente relazione, per $X \in \mathcal{T}(M)$:

$$\nabla_X s = \langle \nabla s, X \rangle$$

Allora, scelto il riferimento locale $\{e_1, \dots, e_r\}$ su U che banalizza E , possiamo definire una matrice $\omega = (\omega_j^k)$ di 1-forme su U ponendo:

$$\nabla e_j = \sum_{k=1}^r \omega_j^k \otimes e_k$$

Nelle coordinate locali (x^1, \dots, x^n) , si può calcolare che

$$\omega_j^k = \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^k dx^i$$

dove i coefficienti Γ_{ij}^k sono i simboli di Christoffel della connessione. La matrice di 1-forme $\omega = (\omega_j^k)$ è detta la *1-forma della connessione* nel riferimento assegnato. Se $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_r\}$ è un altro riferimento locale per il fibrato E sull'aperto U , allora esiste una matrice invertibile $A = (a_h^k)$ tale che $\tilde{e}_h = \sum_k a_h^k e_k$. La 1-forma $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_i^h)$ della connessione rispetto a questo nuovo riferimento si può esprimere in forma matriciale come:

$$\tilde{\omega} = A^{-1}\omega A + A^{-1}dA$$

Quando parliamo di equazione di Dirac, ci stiamo muovendo poi in uno spazio dotato di una certa metrica. Infatti tratteremo lo spazio-tempo curvo come una varietà pseudo-Riemanniana, su cui è definita una metrica di Lorentz. Concludiamo quindi con alcune definizioni e risultati su questo argomento.

Definizione 5.1.7 (Metrica Riemanniana). *Una metrica Riemanniana su una varietà M è un campo tensoriale g_p simmetrico e definito positivo, ovvero tale che:*

$$\begin{aligned} g_p(v, w) &= g_p(w, v) \quad \forall p \in M, \forall v, w \in T_p M \\ g_p(v, v) &> 0 \quad \forall v \neq 0 \end{aligned}$$

La coppia (M, g_p) è detta varietà Riemanniana.

In altri termini, possiamo dire che una metrica Riemanniana su una varietà associa ad ogni punto $p \in M$ un prodotto scalare $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definito positivo che dipende in modo \mathcal{C}^∞ dal punto p . Ci sono alcune situazioni, come nello studio della relatività generale, in cui è utile considerare varietà con un campo tensoriale che gode di proprietà simili a quelle di una metrica Riemanniana ma non necessariamente definito positivo.

Definizione 5.1.8 (Metrica pseudo-Riemanniana). Una metrica pseudo-Riemanniana su M è un campo tensoriale g simmetrico, non degenero ma non necessariamente definito positivo.

La coppia (M, g) è detta varietà pseudo-Riemanniana.

Se g è una metrica pseudo-Riemanniana sulla varietà connessa M , diremo che g ha segnatura (r, s) , con $r, s \in \mathbb{N}$, se r è la massima dimensione di un sottospazio di $T_p M$ su cui g è definita positiva, e s è la massima dimensione di un sottospazio di $T_p M$ su cui g è definita negativa. Se la varietà ha dimensione n , allora $r + s = n$, e per continuità la segnatura non dipende dal punto $p \in M$. Una metrica pseudo-Riemanniana di segnatura $(n - 1, 1)$ oppure $(1, n - 1)$ viene chiamata *metrica di Lorentz*.

In una carta locale (U, φ) , con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, possiamo esprimere la metrica in coordinate locali come:

$$g = \sum_{h,k=1}^n g_{hk} dx^h \otimes dx^k = g_{hk} dx^h \otimes dx^k$$

La matrice g_{hk} è simmetrica, non degenera e definita positiva, o eventualmente di segnatura (r, s) . La matrice inversa della metrica g_{hk} è indicata con g^{hk} . Si può inoltre dimostrare il seguente teorema.

Teorema 5.1.2. Ogni varietà differenziabile M ammette una metrica Riemanniana.

Dimostrazione. Si veda [2, pagina 337]. □

Nel fibrato tangente ad una varietà pseudo-Riemanniana (M, g) vi è una connessione privilegiata che sappiamo calcolare esplicitamente, ovvero la *Connessione di Levi-Civita*.

Teorema 5.1.3 (Teorema di Levi-Civita). Su ogni varietà pseudo-Riemanniana (M, g) esiste un'unica connessione ∇ definita sul fibrato tangente TM che sia

- simmetrica, o priva di torsione, per cui

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$$

- compatibile con la metrica, ovvero tale che

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

dove X, Y, Z sono campi vettoriali su M e $\langle Y, Z \rangle = g(Y, Z)$.

Tale ∇ soddisfa:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle = & \frac{1}{2} \left(X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle + \right. \\ & \left. + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \right) \end{aligned}$$

5. Equazione di Dirac nello Spazio-Tempo Curvo

In particolare se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è un riferimento locale ortonormale per TM , si ha che

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle [e_i, e_j], e_k \rangle - \langle [e_j, e_k], e_i \rangle + \langle [e_k, e_i], e_j \rangle \right)$$

I simboli di Christoffel di ∇ sono dati da

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

Dimostrazione. Si rimanda a [2, pagina 347 e seguenti]. \square

La connessione definita da questo teorema è detta *connessione di Levi-Civita* associata alla varietà pseudo-Riemanniana M ed è l'unica connessione ∇ simmetrica e compatibile con la metrica.

5.2 Cenni di Coomologia di Čech

In questo paragrafo richiamiamo alcune definizioni fondamentali relative alla coomologia di Čech. Non scendiamo in ulteriori dettagli, e quanto menzionato è tutto ciò che risulta utile ai fini della descrizione del problema di rialzamento del gruppo di struttura del fibrato vettoriale, che affronteremo in seguito per poter definire il fibrato spinoriale di Dirac.

Sia M una varietà differenziabile, e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di M , per il quale supponiamo che l'insieme degli indici I sia ordinato. Consideriamo inoltre un gruppo di Lie H , che sia commutativo, per i cui elementi useremo la notazione moltiplicativa. Questo significa che il prodotto di due elementi di H , $h_1, h_2 \in H$, sarà indicato con $h_1 h_2 = h_1 \cdot h_2$, e l'inverso di un elemento $h \in H$ sarà indicato con h^{-1} . Introduciamo la seguente notazione:

$$U_{ij} = U_i \cap U_j \quad U_{ijh} = U_i \cap U_j \cap U_h \quad \dots \quad U_{i\dots n} = U_i \cap \dots \cap U_n$$

con cui quindi intendiamo indicare l'intersezione degli aperti che costituiscono il ricoprimento della varietà differenziabile M .

Se U è un sottoinsieme aperto di M , definiamo con $\Gamma(U, H)$ l'insieme delle funzioni $f : U \rightarrow H$ di classe C^∞ . Introduciamo ora le seguenti definizioni:

$$C^0(\mathcal{U}, H) = \prod_{i \in I} \Gamma(U_i, H) \quad C^1(\mathcal{U}, H) = \prod_{i < j} \Gamma(U_{ij}, H)$$

$$C^2(\mathcal{U}, H) = \prod_{i < j < h} \Gamma(U_{ijh}, H) \quad C^3(\mathcal{U}, H) = \prod_{i < j < h < k} \Gamma(U_{ijhk}, H)$$

e così via per ogni intersezione di aperti in \mathcal{U} .

Introduciamo poi le seguenti funzioni, che definiscono degli omomorfismi di gruppi:

- La funzione $\delta = \delta^0 : C^0(\mathcal{U}, H) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, H)$. Sia $h = (h_i)_{i \in I} \in C^0(\mathcal{U}, H)$, per cui le h_i sono delle funzioni $h_i : U_i \rightarrow H$, allora $\delta(h) \in C^1(\mathcal{U}, H)$ è la famiglia di funzioni $\delta(h)_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, H)$ date da:

$$\delta(h)_{ij} : U_{ij} \rightarrow H \quad \delta(h)_{ij} = h_j|_{U_{ij}} \cdot (h_i|_{U_{ij}})^{-1}$$

- La funzione $\delta = \delta^1 : C^1(\mathcal{U}, H) \rightarrow C^2(\mathcal{U}, H)$. Sia $h = (h_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(\mathcal{U}, H)$, per cui le h_{ij} sono delle funzioni $h_{ij} : U_{ij} \rightarrow H$, e poniamo per convenzione che $h_{ji} = h_{ij}^{-1}$. Allora $\delta(h) \in C^2(\mathcal{U}, H)$ è la famiglia di funzioni $\delta(h)_{ijh} \in \Gamma(U_{ijh}, H)$ date da:

$$\delta(h)_{ijh} : U_{ijh} \rightarrow H \quad \delta(h)_{ijh} = h_{jh}|_{U_{ijh}} \cdot (h_{ih}|_{U_{ijh}})^{-1} \cdot h_{ij}|_{U_{ijh}}$$

- Continuando come nei punti precedenti, definiamo la funzione $\delta = \delta^2 : C^2(\mathcal{U}, H) \rightarrow C^3(\mathcal{U}, H)$ come segue. Sia $h = (h_{ijh})_{i,j,h \in I} \in C^2(\mathcal{U}, H)$, per cui le h_{ijh} sono delle funzioni $h_{ijh} : U_{ijh} \rightarrow H$. Allora $\delta(h) \in C^3(\mathcal{U}, H)$ è la famiglia di funzioni $\delta(h)_{ijhkh} \in \Gamma(U_{ijhkh}, H)$ date da:

$$\begin{aligned} \delta(h)_{ijhkh} : U_{ijhkh} &\rightarrow H \\ \delta(h)_{ijhkh} &= h_{jkh}|_{U_{ijhkh}} \cdot (h_{ihk}|_{U_{ijhkh}})^{-1} \cdot h_{ijk}|_{U_{ijhkh}} \cdot (h_{ijh}|_{U_{ijhkh}})^{-1} \end{aligned}$$

Osserviamo che l'immagine di δ^0 è contenuta nel nucleo di δ^1 , e allo stesso modo l'immagine di δ^1 è contenuta nel nucleo di δ^2 . Proseguendo così, possiamo in generale definire la funzione $\delta^i : C^i(\mathcal{U}, H) \rightarrow C^{i+1}(\mathcal{U}, H)$, e per ogni $i \geq 1$ avremo che l'immagine di δ^{i-1} sarà contenuta nel nucleo di δ^i . Quello che abbiamo ottenuto è un complesso di gruppi abeliani. Ne ricordiamo quindi la definizione:

Definizione 5.2.1 (Complesso di Gruppi). *Un complesso di gruppi è una successione di gruppi abeliani A_i e di omomorfismi $\delta_i : A_i \rightarrow A_{i+1}$ definiti per ogni numero intero i , tale che la composizione di due omomorfismi successivi dia come risultato l'omomorfismo banale, ovvero:*

$$\delta_{i+1} \circ \delta_i = 0$$

Nel nostro caso quindi, possiamo definire la successione:

$$\{1\} \rightarrow C^0(\mathcal{U}, H) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{U}, H) \xrightarrow{\delta^1} C^2(\mathcal{U}, H) \xrightarrow{\delta^2} C^3(\mathcal{U}, H) \rightarrow \dots$$

e possiamo porre

$$H^i(\mathcal{U}, H) = \frac{\ker(\delta^i)}{\text{Im}(\delta^{i-1})}$$

Definizione 5.2.2 (Gruppo di Coomologia). *Il gruppo $H^i(\mathcal{U}, H)$ appena definito viene detto l' i -esimo gruppo di coomologia di Čech.*

Naturalmente i gruppi di coomologia $H^i(\mathcal{U}, H)$ che abbiamo costruito dipendono dal ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ che abbiamo scelto inizialmente per la varietà differenziabile M . Ai fini della nostra trattazione, non andiamo a esaminare nel dettaglio come si comporterebbero i gruppi H^i qualora venga cambiato il ricoprimento aperto da cui dipendono.

Nel nostro caso infatti ci basta osservare che gli aperti U_i sono omeomorfi ad aperti di \mathbb{R}^n , e di conseguenza i gruppi di coomologia $H^i(\mathcal{U}, H)$ non dipendono dal ricoprimento aperto scelto, ma solamente dalla topologia della varietà differenziabile M . Per questo useremo la scrittura più generale $H^i(M, H)$ al posto di $H^i(\mathcal{U}, H)$.

5.3 Rialzamento del gruppo di struttura del fibrato vettoriale

A partire da questo paragrafo entriamo nel vivo della questione trattata dal capitolo. L'obiettivo, come già anticipato, è quello di descrivere l'operatore di Dirac nello spazio-tempo curvo rappresentato dalla varietà differenziabile M , ma per farlo è necessario che tale varietà ammetta una struttura di Spin, ovvero sia tale che il gruppo di struttura del fibrato tangente TM possa essere rialzato dal gruppo di Lorentz ristretto al gruppo speciale lineare.

Il lavoro verrà organizzato nel modo seguente. In questo paragrafo affronteremo il problema del rialzamento del gruppo di struttura del fibrato vettoriale da un punto di vista prettamente teorico, mentre nel prossimo paragrafo cercheremo di trasportare la medesima costruzione nel contesto che ci interessa, fino a definire il fibrato spinoriale di Dirac.

Consideriamo una varietà differenziabile M e un fibrato vettoriale E di rango r su M . Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di M tale che E ristretto ad ogni aperto U_i sia isomorfo al fibrato triviale $U_i \times \mathbb{R}^r$. Abbiamo visto che sulle intersezioni $U_{ij} = U_i \cap U_j$ possiamo definire le funzioni di transizione

$$\eta_{ij} : U_{ij} \rightarrow GL(r, \mathbb{R})$$

Supponiamo che tutte le funzioni di transizione η_{ij} siano a valori in un sottogruppo G del gruppo generale lineare $GL(r, \mathbb{R})$. In questo caso diremo che il *gruppo di struttura* del fibrato E può essere ridotto a G .

Consideriamo quindi il fibrato E con gruppo di struttura G . E è descritto dalle funzioni di transizione $\eta_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$ che soddisfano le seguenti proprietà

$$\eta_{ii} = \mathbb{1}_r \quad \eta_{ji} = \eta_{ij}^{-1} \quad \eta_{ij} \cdot \eta_{jh} = \eta_{ih}$$

Supponiamo inoltre di conoscere la sequenza corta esatta di gruppi data da:

$$\{1\} \longrightarrow H \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow \{1\}$$

5.3 Rialzamento del gruppo di struttura del fibrato vettoriale

dove l'applicazione $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ è un omomorfismo suriettivo, con nucleo H , che è quindi un sottogruppo di \tilde{G} . Supponiamo inoltre che H sia un gruppo abeliano contenuto nel centro di \tilde{G} , ovvero tale che gli elementi di H commutino con tutti gli elementi di \tilde{G} .

Il problema che ci poniamo e che vogliamo risolvere ora è quello di rialzare le funzioni di transizione $\eta_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$ a delle funzioni $\tilde{\eta}_{ij} : U_{ij} \rightarrow \tilde{G}$. Osserviamo che per i, j fissati questo è certamente possibile grazie alla suriettività dell'omomorfismo $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$, anche se la scelta delle funzioni $\tilde{\eta}_{ij}$ non è unica. Infatti, moltiplicando le funzioni $\tilde{\eta}_{ij}$ per delle funzioni $f_{ij} : U_{ij} \rightarrow H$ si ottengono delle nuove funzioni $\tilde{\eta}'_{ij} = \tilde{\eta}_{ij} \cdot f_{ij}$ che rialzano le η_{ij} assegnate, poiché $\pi(\tilde{\eta}'_{ij}) = \pi(\tilde{\eta}_{ij}) = \eta_{ij}$.

In generale, per ogni i, j , con $i < j$, scegliamo un possibile rialzamento $\tilde{\eta}_{ij}$, e supponiamo che $\tilde{\eta}_{ji} = \tilde{\eta}_{ij}^{-1}$, in modo tale che soddisfi la seconda proprietà delle funzioni di transizione che vogliamo verificare. Quello che accade è che il prodotto $\tilde{\eta}_{ij} \cdot \tilde{\eta}_{jh}$ non sarà necessariamente uguale a $\tilde{\eta}_{ih}$, come invece richiede la terza proprietà per le funzioni di transizione. Infatti, sull'intersezione $U_{ijh} = U_i \cap U_j \cap U_h$ si ha che:

$$\begin{aligned}\pi(\tilde{\eta}_{ij} \cdot \tilde{\eta}_{jh}) &= \pi(\tilde{\eta}_{ij}) \cdot \pi(\tilde{\eta}_{jh}) = \eta_{ij} \cdot \eta_{jh} \\ \pi(\tilde{\eta}_{ih}) &= \eta_{ih}\end{aligned}$$

da cui non possiamo dedurre l'uguaglianza delle due espressioni per le $\tilde{\eta}_{ij}$, mentre possiamo dire che differiscono per prodotto con delle opportune funzioni $f_{ijh} : U_{ijh} \rightarrow H$, ovvero

$$\tilde{\eta}_{ij} \cdot \tilde{\eta}_{jh} = f_{ijh} \cdot \tilde{\eta}_{ih}$$

Le funzioni f_{ijh} definiscono un elemento $f = \{ f_{ijh} \} \in C^2(\mathcal{U}, H)$. Per quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente, questo elemento appartiene al nucleo della funzione $\delta = \delta^2$. Infatti, ricordando che gli elementi di H commutano con gli elementi di \tilde{G} , possiamo calcolare:

$$\begin{aligned}\delta(f)_{ijhk} &= f_{jhk} \cdot (f_{ihk})^{-1} \cdot f_{ijk} \cdot (f_{ijh})^{-1} \\ &= f_{jhk} \cdot f_{ijk} \cdot (f_{ijh} \cdot f_{ihk})^{-1} \\ &= f_{jhk} \cdot f_{ijk} \cdot (\tilde{\eta}_{ij} \cdot \tilde{\eta}_{jh} \cdot \tilde{\eta}_{ih}^{-1} \cdot \tilde{\eta}_{ih} \cdot \tilde{\eta}_{hk} \cdot \tilde{\eta}_{ik}^{-1})^{-1} \\ &= f_{jhk} \cdot f_{ijk} \cdot (\tilde{\eta}_{ij} \cdot \tilde{\eta}_{jh} \cdot \tilde{\eta}_{hk} \cdot \tilde{\eta}_{ik}^{-1})^{-1} \\ &= f_{jhk} \cdot f_{ijk} \cdot (\tilde{\eta}_{ij} \cdot f_{jhk} \cdot \tilde{\eta}_{jk} \cdot \tilde{\eta}_{ik}^{-1})^{-1} \\ &= f_{jhk} \cdot f_{ijk} \cdot (f_{jhk} \cdot \tilde{\eta}_{ij} \cdot \tilde{\eta}_{jk} \cdot \tilde{\eta}_{ik}^{-1})^{-1} \\ &= f_{jhk} \cdot f_{ijk} \cdot (f_{jhk} \cdot f_{ijk} \cdot \tilde{\eta}_{ik} \cdot \tilde{\eta}_{ik}^{-1})^{-1} \\ &= (f_{jhk} \cdot f_{ijk}) \cdot (f_{jhk} \cdot f_{ijk})^{-1} = 1\end{aligned}$$

5. Equazione di Dirac nello Spazio-Tempo Curvo

L'elemento $f = \{ f_{ijh} \}$ appena costruito, permette di definire una classe di coomologia nel gruppo quoziente

$$H^2(M, H) = \frac{\ker(\delta^2)}{\text{Im}(\delta^1)}$$

Se tale classe è nulla, ovvero se esiste un elemento $g = \{ g_{ij} \} \in C^1(\mathcal{U}, H)$ tale che $\delta^1(g) = f$, per cui

$$\exists g = \{ g_{ij} \} \in C^1(\mathcal{U}, H) \text{ tale che } f_{ijh} = g_{jh} \cdot g_{ih}^{-1} \cdot g_{ij}$$

allora possiamo modificare la nostra scelta relativa alle funzioni di transizione $\tilde{\eta}_{ij}$ ponendo

$$\tilde{\eta}'_{ij} = g_{ij}^{-1} \tilde{\eta}_{ij}$$

Verifichiamo che queste nuove funzioni $\tilde{\eta}'_{ij}$ soddisfino la terza proprietà delle funzioni di transizione. Nell'intersezione dei tre aperti $U_{ijh} = U_i \cap U_j \cap U_h$ avevamo che $\tilde{\eta}_{ij} \cdot \tilde{\eta}_{jh} = f_{ijh} \cdot \tilde{\eta}_{ih}$, e quindi ora per le nuove funzioni $\tilde{\eta}'_{ij}$ otteniamo che:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}'_{ij} \cdot \tilde{\eta}'_{jh} &= g_{ij}^{-1} \tilde{\eta}_{ij} g_{jh}^{-1} \tilde{\eta}_{jh} \\ &= g_{ij}^{-1} g_{jh}^{-1} \tilde{\eta}_{ij} \tilde{\eta}_{jh} \\ &= g_{ij}^{-1} g_{jh}^{-1} f_{ijh} \tilde{\eta}_{ih} \\ &= g_{ij}^{-1} g_{jh}^{-1} g_{jh} g_{ih}^{-1} g_{ij} \tilde{\eta}_{ih} \\ &= g_{ij}^{-1} g_{ij} g_{ih}^{-1} \tilde{\eta}_{ih} \\ &= g_{ih}^{-1} \tilde{\eta}_{ih} = \tilde{\eta}'_{ih} \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto delle nuove funzioni di transizione $\tilde{\eta}'_{ij} : U_{ij} \rightarrow \tilde{G}$, a valori sul gruppo \tilde{G} , che permettono di rialzare il gruppo strutturale G del fibrato vettoriale E al gruppo \tilde{G} .

Se invece la classe di coomologia in $H^2(M, H)$ definita dall'elemento $f = \{ f_{ijh} \}$ non è nulla, e quindi non è possibile definire le funzioni g_{ij} come sopra, allora non è possibile rialzare il gruppo di struttura del fibrato vettoriale E da G a \tilde{G} . Si dice che la classe di coomologia in $H^2(M, H)$ definita dall'elemento $f = \{ f_{ijh} \}$ rappresenta l'*ostruzione* al possibile rialzamento del gruppo di struttura da G a \tilde{G} .

5.4 Il Fibrato Spinoriale

In questo paragrafo esamineremo quali problemi emergono nel trasportare l'operatore di Dirac dallo spazio-tempo piatto allo spazio curvo, e la loro possibile soluzione. Abbiamo già detto che, per parlare di operatore di Dirac, abbiamo bisogno che sulla varietà che rappresenta lo spazio-tempo curvo sia

definita una struttura di Spin, perciò sia necessario poter rialzare il gruppo di struttura del fibrato tangente dal gruppo $SO^+(3, 1)$ al suo gruppo di Spin $SL(2, \mathbb{C})$. Avere una struttura di Spin sulla varietà M ci consente di definire il *fibrato spinoriale*, ovvero il fibrato vettoriale complesso le cui sezioni sono le funzioni d'onda dell'equazione di Dirac su cui agisce l'operatore di Dirac che vogliamo definire. Procediamo con ordine e per prima cosa, partendo da quanto visto nel paragrafo precedente, cerchiamo di affrontare il problema del rialzamento del gruppo di struttura nel nostro contesto. Una volta approfondito il significato dell'avere una struttura di Spin, vedremo come costruire il fibrato spinoriale.

Al posto dello spazio di Minkowski, consideriamo una varietà M pseudo-Riemanniana di dimensione 4 orientabile rispetto allo spazio e al tempo. Quello che vogliamo riuscire a costruire sono delle funzioni analoghe agli spinori a quattro componenti, su cui agisca l'operatore di Dirac definito sulla varietà M . Per questo dobbiamo prima costruire un opportuno fibrato le cui sezioni saranno esattamente le funzioni d'onda dell'equazione di Dirac. Il fibrato vettoriale associato alla varietà M , che nel paragrafo precedente era chiamato generalmente E e di cui dobbiamo rialzare il gruppo di struttura, è rappresentato ora dal fibrato tangente TM , su cui possiamo introdurre una metrica di Lorentz, che ha quindi segnatura $(3, 1)$. Le funzioni di transizione, definite sull'intersezione degli aperti U_i e U_j di M , prendono valori in un gruppo G che nel nostro caso è il gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3, 1)$, per cui

$$\eta_{ij} : U_{ij} \rightarrow SO^+(3, 1)$$

Nel capitolo precedente, quando abbiamo discusso degli spinori di Dirac, abbiamo associato a una trasformazione di Lorentz Λ una matrice A , che era una delle due matrici del gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ che ricoprivano la trasformazione Λ . Nel fare questa scelta non ci eravamo imbattuti in grossi inconvenienti, poiché stavamo considerando il caso di una matrice Λ a coefficienti costanti. In questo contesto invece il problema che si presenta nel rialzare le funzioni di transizione dalle $\eta_{ij} : U_{ij} \rightarrow SO^+(3, 1)$ alle funzioni $\tilde{\eta}_{ij} : U_{ij} \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ è più articolato. Infatti ci troviamo a dover scegliere per ogni matrice $\Lambda(x)$, che corrisponde alla funzione $\eta_{ij}(x)$, una matrice $A(x)$, che corrisponde a una funzione $\tilde{\eta}_{ij}(x)$ nel gruppo $SL(2, \mathbb{C})$, tra le due matrici $\pm A(x)$, e dovremmo farlo in modo continuo. Le funzioni $\eta_{ij}(x)$ per il fibrato tangente certamente soddisfano le proprietà fondamentali delle funzioni di transizione, ma non è chiaro se possano essere scelte anche le funzioni $\tilde{\eta}_{ij}(x)$ in modo tale che siano consistenti con le suddette proprietà, a causa dell'ambiguità di scelta tra $\pm A$. Ricordiamo infatti che il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ è un ricoprimento doppio del gruppo $SO^+(3, 1)$.

Se è possibile scegliere le funzioni $\tilde{\eta}_{ij}$ in modo che soddisfino le proprietà delle funzioni di transizione, allora diremo che abbiamo rialzato il gruppo di

5. Equazione di Dirac nello Spazio-Tempo Curvo

struttura del fibrato tangente sulla varietà M dal gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3, 1)$ al gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$, e in questo caso la varietà M acquisisce una struttura di Spin.

Non ci serve aggiungere nulla per concludere il discorso sul rialzamento del gruppo di struttura, poiché è sufficiente ripercorrere quanto trattato nel paragrafo precedente. Confrontando la situazione che stiamo analizzando e la trattazione teorica che abbiamo già affrontato, possiamo dedurre che il gruppo \tilde{G} è dato nel nostro caso dal gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$, poiché costituisce il rivestimento del gruppo di Lorentz ristretto, mentre l'omomorfismo suriettivo $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ corrisponde al ricoprimento doppio del gruppo $SO^+(3, 1)$, il cui nucleo è dato da $H = \{ \mathbb{1}, -\mathbb{1} \} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pertanto il gruppo di struttura è dato dal gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$, piuttosto che dal gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3, 1)$. Di conseguenza, l'ostruzione all'esistenza di una struttura di Spin, e quindi al rialzamento del gruppo di struttura da $G = SO^+(3, 1)$ a $\tilde{G} = SL(2, \mathbb{C})$, è rappresentata da una classe di coomologia nel gruppo $H^2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ che è detta *seconda classe di Stiefel-Whitney* del fibrato vettoriale E , e quindi nel nostro caso del fibrato tangente TM . La varietà M ammette una struttura di Spin se e solo se questa classe è nulla. In conclusione, la varietà M ammette una struttura di Spin quando risulta possibile rialzare il gruppo di struttura associato al fibrato tangente TM dal gruppo $SO^+(3, 1)$ al gruppo $SL(2, \mathbb{C})$.

Prima di proseguire con la costruzione del fibrato spinoriale, è utile soffermarsi alcune righe per cogliere il significato di avere una struttura di Spin. Consideriamo una varietà pseudo-Riemanniana M , orientabile nello spazio e nel tempo, e assumiamo che il fibrato tangente abbia come gruppo di struttura $SO^+(3, 1)$. In questo gruppo consideriamo una curva chiusa $t \mapsto \Lambda(t)$ che inizia e termina nel punto $\mathbb{1}$. Il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ è un ricoprimento a due fogli del gruppo di Lorentz, per cui la curva $\Lambda(t)$ è coperta da un'unica curva $t \mapsto A(t)$ in $SL(2, \mathbb{C})$ che inizia nel punto $\mathbb{1}$. Ora, sappiamo dai primi capitoli che il gruppo speciale lineare è semplicemente connesso, mentre la curva $\Lambda(t)$ è omotopa o ad una rotazione attorno ad un asse, per esempio l'asse z , oppure a una funzione costante. Perciò ci troviamo nella seguente situazione. Per $t = 0$ si ha che $A(0) = \mathbb{1}$ e $\Lambda(0) = \mathbb{1}$. Se la matrice $\Lambda(t)$ descrive una curva che rappresenta una rotazione attorno ad un asse, al termine della rotazione ritorna nella matrice identica $\mathbb{1}$. Quello che succede invece nello spazio $SL(2, \mathbb{C})$ è che, dopo una rotazione completa, la matrice $A(t)$ si ritrova nella posizione $-\mathbb{1}$. Infatti entrambe le matrici $\pm\mathbb{1}$ di $SL(2, \mathbb{C})$ vengono proiettate nella matrice identica $\mathbb{1} \in SO^+(3, 1)$. Se la matrice $\Lambda(t)$ compie un secondo giro completo attorno ad un asse, allora la matrice $A(t)$ viene mandata in $\mathbb{1}$. Questo significa che un numero dispari di rotazioni della matrice $\Lambda(t) \in SO^+(3, 1)$ porta la matrice $A(t)$ da $+\mathbb{1}$ a $-\mathbb{1}$, mentre un numero pari di rotazioni della matrice $\Lambda(t)$ porta la matrice $A(t)$ da $+\mathbb{1}$ a $+\mathbb{1}$. In questa situazione non ci è servito richiedere che M abbia una struttura

di Spin. Diversa è invece la situazione seguente.

Consideriamo ora un punto p e un intorno U coperto da un sistema di riferimento di Lorentz, che chiamiamo e_U . Possiamo prendere un altro riferimento f , tale che $f(p) = e_U(p)$ nel punto p e lo trasportiamo lungo una curva chiusa $C(t)$, $0 \leq t \leq 1$, contenuta in U . Possiamo confrontare allora $f(C(t))$ con $f(p) = f(C(0))$ come segue. Comparando $f(C(t))$ con il riferimento e_U abbiamo che $f(C(t)) = e_U(C(t))\Lambda(t)$, per una curva chiusa $t \mapsto \Lambda(t)$ in $SO^+(3, 1)$. Come prima, tale curva può essere coperta da una curva $A(t)$ in $SL(2, \mathbb{C})$ con punto iniziale $\mathbb{1}$. Siamo tentati di dire che la curva $A(t)$ raggiunge il punto $\pm\mathbb{1}$ a seconda del numero pari o dispari di rotazioni, ma in realtà questo risultato non è ben definito, poiché può dipendere dal riferimento e_U che abbiamo scelto. Se la varietà M ammette una struttura di Spin, ovvero se il gruppo di struttura del fibrato tangente può essere rialzato a $SL(2, \mathbb{C})$, questo inconveniente può essere risolto e quindi possiamo dire in quali casi il nostro riferimento f , trasportato lungo la curva $C(t)$, ha compiuto un numero pari o dispari di rotazioni complete. Questo perché possiamo considerare il fibrato dei riferimenti associato al gruppo speciale lineare sulla varietà M , e quindi il fibrato dei riferimenti usando il gruppo di struttura $SL(2, \mathbb{C})$. La curva $C(t)$ viene quindi ricoperta da un'unica curva in tale fibrato, definita tramite il riferimento f . Per ritornare al punto iniziale relativo a $C(t)$, la curva "sollevata" al ricoprimento ritornerà al suo punto iniziale se il numero di rotazioni sarà pari, o a un punto nel fibrato dei riferimenti relativo al punto $-\mathbb{1} \in SL(2, \mathbb{C})$ se il numero di rotazioni sarà dispari.

Ritorniamo ora al discorso principale. Da questo punto assumeremo sempre che lo spazio-tempo rappresentato dalla varietà M abbia una struttura di Spin. Solo in questa situazione infatti sarà possibile parlare dell'equazione di Dirac. Come possiamo dedurre dal Corollario 4.4.1, le funzioni d'onda dell'elettrone, ovvero gli spinori di Dirac a quattro componenti definiti sullo spazio di Minkowski, saranno sostituiti in questo nuovo contesto dalle sezioni di un fibrato associato al fibrato tangente su M attraverso la rappresentazione $\rho : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(4, \mathbb{C})$ introdotta con il Teorema 4.4.1 del capitolo precedente. Dal momento che M ha una struttura di Spin, possiamo sostituire il gruppo di struttura dato dal gruppo di Lorentz con il gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$, mentre la fibra relativa al fibrato tangente su M è data sempre da \mathbb{R}^4 . Infatti, come abbiamo già visto, il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ agisce su \mathbb{R}^4 associando a una 4-upla $x = (t, \vec{r}) \in \mathbb{R}^4$ una matrice di dimensione 2×2 tramite la mappa $x_* = t\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}$. Allora la matrice $A \in SL(2, \mathbb{C})$ agisce su x tramite la mappa $x_* \mapsto Ax_*A^{-1}$, che associa alla 4-upla una matrice hermitiana.

Vediamo cosa accade per quanto riguarda le funzioni di transizione. Se le η_{ij} sono le funzioni di transizione per il fibrato tangente TM con gruppo di struttura $SO^+(3, 1)$, allora le $\tilde{\eta}_{ij}$ sono le funzioni di transizione a valori nel gruppo $SL(2, \mathbb{C})$. Quindi in una varietà, avere una struttura di Spin ci per-

5. Equazione di Dirac nello Spazio-Tempo Curvo

mette di definire un nuovo fibrato tramite la definizione delle nuove funzioni di transizione. Possiamo costruire allora il *Fibrato Spinoriale di Dirac*, che indicheremo con \mathcal{SM} , o più semplicemente \mathcal{S} , la cui fibra è lo spazio \mathbb{C}^4 e le cui funzioni di transizione nell'intersezione degli aperti U_i e U_j sono le

$$\rho_{ij} : U_{ij} \rightarrow GL(4, \mathbb{C})$$

definite dalla composizione della rappresentazione ρ con le funzioni di transizione $\tilde{\eta}_{ij}$ rialzate al gruppo di struttura $SL(2, \mathbb{C})$:

$$\rho_{ij}(x) = \rho(\tilde{\eta}_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_{ij}(x) & 0 \\ 0 & \tilde{\eta}_{ij}(x)^{\dagger-1} \end{pmatrix}$$

Il fibrato spinoriale di Dirac \mathcal{S} appena costruito è semplicemente il fibrato vettoriale complesso associato al fibrato tangente con gruppo di struttura $SL(2, \mathbb{C})$ tramite la rappresentazione ρ del Teorema 4.4.1, e le sue sezioni ψ fungeranno da funzioni d'onda sulla varietà M . Questi spinori hanno la proprietà che una rotazione completa dello spazio \mathbb{R}^3 manda uno spinore ψ nel suo opposto $-\psi$.

Rimane quest'ultimo problema da affrontare. La costruzione dell'operatore di Dirac

$$\not{D} = \sum_j \gamma_j \partial_j = \gamma^j \partial_j$$

che abbiamo esposto nell'ambito dello spazio di Minkowski, non funziona nello spazio-tempo curvo. Infatti, nella dimostrazione relativa al cambiamento di sistema di riferimento, per cui $\not{D}'\psi' = \rho(A)\not{D}\psi$, abbiamo usato il fatto che la matrice $A \in SL(2, \mathbb{C})$ fosse a coefficienti costanti, poiché nello spazio-tempo piatto possiamo definire un sistema di coordinate globali. Dobbiamo quindi ora sostituire la derivazione $\partial_j\psi = \partial\psi/\partial x^j$ con una sorta di derivata covariante. La connessione di Levi-Civita sulla varietà M non va bene, poiché il fibrato tangente TM alla varietà e il fibrato spinoriale \mathcal{S} sono differenti. Abbiamo bisogno di definire una nuova connessione sul fibrato \mathcal{S} che sia associata a TM attraverso la rappresentazione ρ del gruppo di Lorentz $SO^+(3, 1)$ tramite il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$.

5.5 La Connessione di Spin

Abbiamo già visto che sul fibrato tangente a una varietà pseudo-Riemanniana possiamo introdurre una connessione privilegiata rispetto alle altre possibili, la *connessione di Levi-Civita*, che sappiamo calcolare esplicitamente tramite i simboli di Christoffel. L'obiettivo di questo paragrafo è quello di ricavare una nuova connessione a partire dalla connessione di Levi-Civita, definita sul fibrato spinoriale \mathcal{S} , dato dalla rappresentazione spinoriale:

$$\rho : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(4, \mathbb{C})$$

Tale connessione, detta *Connessione di Spin*, ci permetterà di definire la derivata covariante nel fibrato \mathcal{S} , e quindi di scrivere il nuovo operatore di Dirac nello spazio curvo.

Consideriamo la varietà pseudo-Riemanniana M , con la connessione di Levi-Civita. Come abbiamo già detto, assumiamo che la varietà M abbia una struttura di Spin, ovvero sia tale che sia possibile rialzare il gruppo di struttura del fibrato tangente a $SL(2, \mathbb{C})$. Allora, per ogni vettore \vec{x} tangente a M , possiamo considerare la 1-forma della connessione $\omega(\vec{x})$, che è definita sullo spazio tangente al gruppo di Lorentz $SO^+(3, 1)$ nell'origine, e quindi sull'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$. La 1-forma di connessione ω per il fibrato tangente con gruppo di struttura il gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3, 1)$ è semplicemente la connessione di Levi-Civita. Dobbiamo ora costruire una connessione sul fibrato tangente, che ha come gruppo di struttura il gruppo speciale lineare $SL(2, \mathbb{C})$. Sappiamo che il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ costituisce un ricoprimento doppio del gruppo di Lorentz ristretto, e chiamiamo $\Lambda : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^+(3, 1)$ tale rivestimento. Se consideriamo il differenziale di tale mappa, $\Lambda_* : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{so}(3, 1)$, possiamo associare alla connessione $\omega(\vec{x}) \in \mathfrak{so}(3, 1)$ un'unica connessione $\omega'(\vec{x}) \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, che è definita nell'algebra di Lie associata al ricoprimento $SL(2, \mathbb{C})$, tramite

$$\Lambda_*\omega'(\vec{x}) = \omega(\vec{x})$$

Quindi la connessione $\omega' \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ è definita a partire dalla connessione di Levi-Civita ω sul fibrato tangente alla varietà M . Rimane da mostrare che la definizione è ben posta, per cui cambiando sistema di riferimento, la 1-forma della connessione deve essere tale che

$$\Lambda_*\omega'_V(\vec{x}) = \Lambda_*[A^{-1}\omega'_U(\vec{x})A + A^{-1}dA(\vec{x})]$$

Questo segue dal fatto che Λ_* è una corrispondenza 1 : 1. Per una dimostrazione generale si rimanda a [1, Teorema 18.27], mentre il nostro obiettivo è quello di esplicitare con un calcolo la matrice di 1-forme relativa a ω' .

A questo punto abbiamo definito una connessione sul fibrato tangente TM , il cui gruppo di struttura è $SL(2, \mathbb{C})$, e conosciamo una rappresentazione ρ di $SL(2, \mathbb{C})$ data dalle matrici di dimensione 4×4 che abbiamo visto con il Teorema 4.4.1. Abbiamo visto inoltre che il fibrato spinoriale di Dirac è associato al fibrato tangente tramite la rappresentazione ρ . Questo ci permette di costruire una connessione sul fibrato spinoriale \mathcal{S} tramite il differenziale della rappresentazione ρ , che indichiamo con $\rho_* : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$. Quello che otteniamo è la 1-forma per la *connessione di Spin* Ω , data da

$$\Omega(\vec{x}) = \rho_*\omega'(\vec{x})$$

dove \vec{x} è il vettore tangente al punto x in M .

5. Equazione di Dirac nello Spazio-Tempo Curvo

Cerchiamo allora di rappresentare la 1-forma della connessione Ω con un calcolo esplicito. L'idea alla base del nostro procedimento è la seguente. Grazie al Teorema di Levi-Civita, conosciamo l'espressione dei simboli di Christoffel che definiscono completamente la connessione ω . Dobbiamo quindi calcolare la connessione ω' , e per farlo dobbiamo conoscere la funzione Λ_* , dal momento che $\Lambda_*\omega' = \omega$. Tramite il differenziale della rappresentazione ρ , possiamo infine calcolare la 1-forma della connessione di Spin Ω .

Iniziamo quindi calcolando la mappa $\Lambda_* : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{so}(3, 1)$, che identifica l'algebra di Lie del gruppo speciale lineare con quella del gruppo di Lorentz. L'algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ consiste delle matrici A quadrate di dimensione 2×2 a coefficienti complessi, con traccia nulla. Possiamo scrivere tali matrici come

$$A = \frac{A + A^\dagger}{2} + \frac{A - A^\dagger}{2}$$

ovvero come la somma di una matrice hermitiana e una antihermitiana, entrambe con traccia nulla. Nel secondo capitolo abbiamo visto che una possibile base per l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ è data dalle matrici di Pauli σ_j e da $i\sigma_j$, per $j = 1, 2, 3$. Dal momento che $i\sigma_1 = \sigma_2\sigma_3$ e così via, e se definiamo $\sigma_0 = \mathbb{1}$, possiamo scrivere la base dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ come:

$$\{ \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \sigma_0\sigma_1, \sigma_0\sigma_2, \sigma_0\sigma_3 \}$$

Per quanto riguarda il gruppo di Lorentz, abbiamo visto che è generato dalle rotazioni e dai boosts. Le matrici di base che descrivono le rotazioni sono le E_j introdotte nel primo capitolo per $j = 1, 2, 3$ a cui dobbiamo aggiungere nel nostro caso una riga e una colonna di zeri. Inoltre in questa situazione è conveniente introdurre un segno meno, così otteniamo delle matrici 4×4 che denotiamo nel seguente modo:

$$-E_1 = E_{23} \quad -E_2 = E_{31} \quad -E_3 = E_{12}$$

Un boost nel piano t, x è descritto dalla matrice 2×2 che ha la seguente espressione:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso abbiamo bisogno di aggiungere delle entrate nulle per ottenere una matrice di dimensione 4×4 , e in modo analogo possiamo definire le matrici per gli altri boosts. Allora la base dell'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$ è

data dalle seguenti matrici:

$$\begin{aligned}
 E_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & E_{01} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 E_{31} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{02} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 E_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{03} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

dove le matrici E_{ij} , con $i, j \neq 0$, sono antisimmetriche, mentre le E_{0i} sono matrici simmetriche.

Dato l'omomorfismo $\Lambda : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^+(3, 1)$, abbiamo visto che $\Lambda[A](x)_* = Ax_*A^\dagger$, per una matrice $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Se consideriamo una matrice $H \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, il differenziale della trasformazione Λ , che indichiamo con $\Lambda_*[H]$, è una trasformazione lineare che corrisponde a:

$$x_* \mapsto \left. \frac{d}{dt} [\exp(tH)x_* \exp(tH^\dagger)] \right|_{t=0}$$

dove x_* è la mappa che ad ogni vettore \vec{x} tangente in un punto ad M associa una matrice in $H(2, \mathbb{C})$, definita nel capitolo precedente. Allora per $H \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ abbiamo che:

$$\Lambda_*[H](x)_* = \left. \frac{d}{dt} [\exp(tH)x_* \exp(tH^\dagger)] \right|_{t=0}$$

Vogliamo calcolare i valori di Λ_* , e quindi l'immagine tramite questa trasformazione di ogni elemento della base di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Consideriamo per prima cosa le matrici $H = \sigma_0\sigma_j = \sigma_j$ per $j = 1, 2, 3$. Dal momento che $\sigma_j^\dagger = \sigma_j$, e usando poi $\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}\mathbb{1}$, abbiamo che:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_*[\sigma_j](x)_* &= \left. \frac{d}{dt} [\exp(t\sigma_j)x_* \exp(t\sigma_j^\dagger)] \right|_{t=0} \\
 &= \{\sigma_j, x_*\} \\
 &= \{\sigma_j, \sigma_0x^0 + \sigma_kx^k\} \\
 &= 2\sigma_jx^0 + \{\sigma_j, \sigma_k\}x^k \\
 &= 2\sigma_jx^0 + 2\delta_{jk}\sigma_0x^k = 2\sigma_jx^0 + 2\sigma_0x^j
 \end{aligned}$$

5. Equazione di Dirac nello Spazio-Tempo Curvo

Quindi, se per esempio prendiamo $j = 1$, la trasformazione $\Lambda_*[\sigma_1]$ manda il vettore (x^0, x^1, x^2, x^3) nel vettore $(2x^1, 2x^0, 0, 0)$, e quindi $\Lambda_*[\sigma_0\sigma_1] = 2E_{01}$. In generale, per $j = 1, 2, 3$ abbiamo trovato che:

$$\sigma_0\sigma_j \mapsto 2E_{0j}$$

Consideriamo ora $H = i\sigma_j = \sigma_h\sigma_k$ per $j, h, k = 1, 2, 3$, e ricordiamo che $[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{jkl}\sigma_l$. Con un calcolo analogo al precedente, per cui

$$\begin{aligned} \Lambda_*[i\sigma_j](x)_* &= \frac{d}{dt} [\exp(it\sigma_j)x_* \exp(-it\sigma_j^\dagger)] \Big|_{t=0} \\ &= i[\sigma_j, x_*] \\ &= i[\sigma^j\sigma_j, (\sigma_0x^0 + \sigma_kx^k)\sigma_k] \\ &= i\sigma^jx^0[\sigma_j, \sigma_0] + i\sigma^jx^k[\sigma_j, \sigma_k] \\ &= -2\sigma^jx^k\varepsilon_{jkl}\sigma_l \end{aligned}$$

otteniamo che la trasformazione Λ_* manda le matrici $\sigma_h\sigma_k$ della base di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ nelle matrici $2E_{hk}$ della base $\mathfrak{so}(3, 1)$:

$$\sigma_2\sigma_3 \mapsto 2E_{23} \quad \sigma_3\sigma_1 \mapsto 2E_{31} \quad \sigma_1\sigma_2 \mapsto 2E_{12}$$

In questo modo abbiamo descritto la trasformazione Λ_* in modo completo. Proseguiamo ora con il calcolo della 1-forma di connessione ω' definita sul fibrato con gruppo di struttura $SL(2, \mathbb{C})$. Consideriamo quindi la connessione di Levi-Civita $\omega = (\omega^i_j)$ sulla varietà pseudo-Riemanniana M . Ricordando che $\omega^i_0 = \omega_{i0} = -\omega_{0i} = \omega^0_i$ per ogni i , e che $\omega^i_j = -\omega^j_i$ per $i, j \neq 0$, possiamo scrivere la matrice delle 1-forme:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega^0_1 & \omega^0_2 & \omega^0_3 \\ \omega^0_1 & 0 & \omega^1_2 & \omega^1_3 \\ \omega^0_2 & -\omega^1_2 & 0 & \omega^2_3 \\ \omega^0_3 & -\omega^1_3 & -\omega^2_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo ricavare una relazione tra la connessione ω e le matrici E_{ij} . Infatti

$$\omega = \sum_{i < j} E_{ij}\omega^i_j$$

Siamo in grado a questo punto di calcolare la connessione ω' , usando la relazione $\omega = \Lambda_*\omega'$ e i calcoli fatti in precedenza per la trasformazione Λ_* . Inoltre, ricordando che $\omega^0_k = \omega^{0k}$, otteniamo la seguente espressione per la connessione ω' :

$$\omega' = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \sigma_i\sigma_j\omega^{ij}$$

i cui termini sono matrici 2×2 hermitiane a traccia nulla. Siamo quasi giunti all'obiettivo che ci eravamo prefissati.

Possiamo ora calcolare la connessione di Spin Ω grazie alla relazione $\Omega = \rho_*\omega'$. Dalla rappresentazione ρ , definita da

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{\dagger-1} \end{pmatrix}$$

per una matrice $A \in SL(2, \mathbb{C})$, ricaviamo l'espressione del suo differenziale ρ_* , per cui per ogni $H \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, si ha:

$$\rho_*(H) = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & -H^{\dagger} \end{pmatrix}$$

Allora, la connessione Ω è data da:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha < \beta} \omega^{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha}\sigma_{\beta} & 0 \\ 0 & -\sigma_{\beta}\sigma_{\alpha} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \omega^{0k} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega^{ij} \begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Osserviamo ora che possiamo riscrivere le matrici presenti nell'espressione di Ω in funzione delle matrici di Dirac che abbiamo definito nel capitolo precedente. Infatti:

$$\gamma_0\gamma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma_i\gamma_j = \begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_j \end{pmatrix}$$

Quindi la connessione assume la seguente espressione:

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_k \omega^{0k} \gamma_0\gamma_k + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega^{ij} \gamma_i\gamma_j$$

Infine, usando una scrittura più compatta, la *connessione di Spin* Ω sul fibrato spinoriale \mathcal{S} è data da

$$\Omega = \frac{1}{4} \omega^{jk} \gamma_j\gamma_k = \frac{1}{4} \omega_{jk} \gamma^j\gamma^k = \frac{1}{8} \omega_{jk} [\gamma^j, \gamma^k]$$

La connessione di Spin ci permette di esprimere la *derivata covariante* nel fibrato spinoriale \mathcal{S} che nel nostro contesto, applicata alle sezioni ψ del fibrato, diventa:

$$\frac{\nabla\psi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{4} \omega_{jk} \left(\frac{dx}{dt} \right) \gamma^j\gamma^k \psi$$

Abbiamo finalmente raggiunto quanto voluto: possiamo riformulare l'*operatore di Dirac nello spazio curvo*, che agisce sulle funzioni d'onda ψ . L'operatore $\not{\partial} = \gamma^j \partial_j$, nello spazio-tempo curvo con la connessione di Spin, applicato alla funzione ψ , assume la seguente espressione:

$$\gamma^i \left[\partial_i(\psi) + \frac{1}{4} \omega_{ik}^j \gamma_j \gamma^k \psi \right] = \not{\partial} \psi + \frac{1}{4} \omega_{ik}^j \gamma^i \gamma_j \gamma^k \psi$$

Bibliografia

- [1] Theodore Frankel, *The Geometry of Physics - An Introduction - Second Edition*, Cambridge University Press, New York, 2004
- [2] Marco Abate, Francesca Tovena, *Geometria Differenziale*, Springer-Verlag, Milano, 2011
- [3] Jean Gallier, *Clifford Algebras, Clifford Groups, and a Generalization of the Quaternions: The **Pin** and **Spin** Groups*, University of Pennsylvania, Philadelphia, 2012
- [4] W.H. Greub, S. Halperin, An intrinsic definition of the Dirac operator, *Collectanea Mathematica*, **26.1** (1975), 19-37. <http://eudml.org/doc/43805>