



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI INDUSTRIALI
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCATRONICA

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI MEDIANTE
PIANIFICAZIONE OTTIMA DEL MOTO:
SOLUZIONE DI TWO-POINT
BOUNDARY VALUE PROBLEMS**

Relatore: Ch.mo Prof. DARIO RICHIEDEI

Correlatore: Ing. PAOLO BOSCARIOL

Laureando: RICCARDO SGRO'

Matricola 1104587-IMC

ANNO ACCADEMICO 2015-2016

Sommario

Questa tesi si propone di studiare teoricamente e sperimentalmente il problema della riduzione delle vibrazioni in sistemi meccanici, mediante pianificazione ottima del moto. In particolare, si utilizzeranno tecniche di pianificazione basate sulla soluzione di Two-Point Boundary Value Problems.

Le simulazioni e i test sperimentali sono stati svolti considerando sistemi di tipo carrello-pendolo, dapprima a due gradi di libertà (ossia uno di traslazione e uno di oscillazione del carico), estendendo poi lo studio con l'aggiunta un ulteriore gdl di oscillazione. I risultati ottenuti, tuttavia, hanno una valenza del tutto generale, poiché l'approccio risolutivo di un TPBVP può essere applicato ad un generico sistema vibrante, sia lineare che non-lineare.

Inoltre, per far fronte all'incertezza e alla variabilità dei parametri del modello, sono state studiate delle versioni robuste del TPBVP, che prevedono l'utilizzo di funzioni di sensitività all'interno dello stato. La tecnica proposta consente di introdurre vincoli sulle variabili e imporre il grado di continuità e dolcezza desiderate.

Al fine di risolvere il problema TPBVP, sono state adottate diverse tecniche numeriche ed il risultato è stato confrontato con il noto e diffuso metodo dell'Input Shaping, evidenziando pregi e difetti delle diverse metodologie.

Indice

Sommario	iii
Indice	v
Elenco delle tabelle	vii
Elenco delle figure	ix
1 Introduzione	1
2 Pianificazione del moto mediante TPBVP	3
2.1 Two-Point Boundary Value Problems	3
2.1.1 Soluzione tramite integrale di convoluzione	4
2.1.2 Soluzione tramite matrice esponenziale	5
2.1.3 Differenze Finite	6
2.1.4 Shooting	7
2.1.5 Collocazione Polinomiale	8
2.2 Soluzione Robusta	9
3 Test Case: Carrello a 2 gdl	13
3.1 Modello	13
3.1.1 Modello nello spazio di stato	15
3.1.2 Modello con ingresso in accelerazione	16
3.1.3 Modello con jerk	17
3.2 Simulazioni	18
3.2.1 Confronto tra ingresso in forza e in accelerazione	19
3.2.2 Pianificazione con ingresso accelerazione	21
3.2.3 Pianificazione semplice e robusta	27
3.2.4 Confronto tecniche di pianificazione robusta	30
3.2.5 Simulazioni modello con jerk	34
3.2.6 Considerazioni	37
3.3 Setup sperimentale	37
3.4 Risultati sperimentali	42
3.4.1 Determinazione dei parametri del sistema	42
3.4.2 Test pianificazione TPBVP	44
3.4.3 Test pianificazione TPBVP robusta	48
4 Test Case: Carrello a 3 gdl	53
4.1 Modello	53
4.2 Working Model	57
4.3 Simulazioni	59
4.3.1 Confronto tra ingresso in forza e in accelerazione	60
4.3.2 Pianificazione semplice e robusta	61
4.3.3 Simulazioni modello con jerk	69
4.3.4 Considerazioni	74
4.4 Setup sperimentale	75
4.5 Risultati sperimentali	75
4.5.1 Determinazione dei parametri del sistema	75
4.5.2 Test pianificazione TPBVP a 3 gdl	76

5	Test Case: Carrello a 4 gdl	79
5.1	Modello	79
5.2	Simulazioni	80
	Conclusioni	83
	Ringraziamenti	85
	Bibliografia	87
A	Input Shaping	89
B	Legge di Moto Armonica	93
C	Dimensionamento del sistema per una futura realizzazione	95
C.0.1	Viti a ricircolo di sfere	95
C.0.2	Teoria del dimensionamento di una VRS	99
C.0.3	Dimensionamento e scelta	106

Elenco delle tabelle

3.1	Confronto ingresso accelerazione e forza con diversi tempi di azionamento $T_{az}[s]$	19
3.2	Confronto tecniche con tempo di azionamento 2 [s].	21
3.3	Confronto tecniche con tempo di azionamento 1.5 [s].	23
3.4	Confronto tecniche con tempo di azionamento 1.1 [s].	25
3.5	Confronto tecniche con tempo di azionamento 0.75 [s].	26
3.6	Confronto tecniche con tempo di azionamento 2 [s].	28
3.7	Confronto tecniche robuste.	30
3.8	Confronto tecniche con tempo di azionamento 2 [s].	35
4.1	Confronto ingresso in forza e in accelerazione con $T_{az} = 2[s]$	60
4.2	Confronto ingresso in forza e in accelerazione con $T_{az} = 1.5[s]$	60
4.3	Confronto tecniche con tempo di azionamento 2.5 [s].	63
4.4	Confronto tecniche con tempo di azionamento 2 [s].	64
4.5	Confronto tecniche con tempo di azionamento 1.5 [s].	65
4.6	Confronto tecniche con tempo di azionamento 2 [s].	70
4.7	Confronto tecniche con tempo di azionamento 1.5 [s].	71

Elenco delle figure

3.1	Schema del carrello a 2 gdl.	13
3.2	Schema sistema con filtro in ingresso.	17
3.3	Schema Simulink.	18
3.4	Curva di sensitività al variare della lunghezza l	20
3.5	Ingrandimento della curva di sensitività al variare della lunghezza l	21
3.6	Curva di sensitività al variare della lunghezza l	22
3.7	Traiettoria del carrello pianificata per un $T_{az} = 1.5s$: Confronto tra ZV e bvp5c.	24
3.8	Traiettoria del carrello pianificata per un $T_{az} = 1.1s$: Confronto tra ZV e bvp5c.	24
3.9	Traiettoria del carrello pianificata per un $T_{az} = 0.75s$	24
3.10	Traiettoria del carrello y e del pendolo θ , pianificate nel caso semplice e robusto con $T_{az} = 2s$	29
3.11	Curve di sensitività al variare della lunghezza l , con pianificazione semplice e robusta con $T_{az} = 2s$	29
3.12	Confronto delle curve di sensitività tra lo ZVD shaper e le tecniche TPBVP robuste, al variare della lunghezza l	31
3.13	Dettaglio delle curve di sensitività con pianificazione robusta.	31
3.14	Curve di sensitività al variare della lunghezza l , con pianificazione semplice in 0.75s e robusta in 1.5s.	32
3.15	Traiettoria del carrello y pianificata con uno ZVD e con bvp5c robusto in un $T_{az} = 2.5s$	33
3.16	Traiettoria del carrello y pianificata con bvp5c robusto in un $T_{az} = 1.5s$	33
3.17	Accelerazione del carrello relativamente al modello con jerk e a quello in accelerazione.	34
3.18	Simulazione di una pianificazione del moto in $T_{az} = 2s$, ottenuta con il modello con jerk e la tecnica delle differenze finite: \ddot{y}, \dot{y} e y	36
3.19	Simulazione di una pianificazione del moto in $T_{az} = 2s$, ottenuta con il modello con jerk e la tecnica delle differenze finite: $\dot{\theta}$ e θ	36
3.20	Particolare della sovraelongazione dell'accelerazione finale.	36
3.21	Schema del robot Adept Quattro TM s650H e in basso dettaglio del controller real-time Adept SmartController TM CX.	38
3.22	Videocamera utilizzata nel setup sperimentale.	39
3.23	Schema del setup sperimentale.	39
3.24	Vista dalla telecamera, con particolare del pendolo e del monitor.	40
3.25	Schema delle interazioni tra i tre task real-time.	41
3.26	Angolo di oscillazione osservato in evoluzione libera.	43
3.27	Confronto delle risposte del sistema ad una traiettoria pianificata in un tempo $T_{az} = 1.5s$ con soluzioni TPBVP e ZV.	45
3.28	Particolare del picco di oscillazione durante la movimentazione (a sinistra) e dell'oscillazione residua (a destra) per una traiettoria pianificata in un $T_{az} = 1.5s$	45
3.29	Confronto delle risposte del sistema ad una traiettoria pianificata in un tempo $T_{az} = 1.1s$ con tecnica bvp5c e con ZV con legge armonica.	46
3.30	Traiettoria pianificata con la tecnica bvp5c in un $T_{az} = 1.1s$. Confronto tra posizione comandata, riferimento e posizione effettiva del robot.	46
3.31	Traiettoria pianificata con le differenze finite in un $T_{az} = 0.75s$ utilizzando il modello con jerk.	47

3.32	Confronto tra traiettoria pianificata con il modello con ingresso in accelerazione e quello con il jerk nello stato in un $T_{az} = 0.75s$.	47
3.33	Confronto tra pianificazione semplice e robusta ottenuta con le differenze finite per un $T_{az} = 2s$.	49
3.34	Test di robustezza con lunghezza ridotta di $18cm$ rispetto al valore nominale. Confronto tra pianificazione semplice e robusta ottenuta con le differenze finite per un $T_{az} = 2s$.	49
3.35	Test di robustezza con lunghezza ridotta di $6cm$ rispetto al valore nominale. Confronto tra pianificazione semplice e robusta ottenuta con le differenze finite per un $T_{az} = 2s$, utilizzando il modello con il jerk nello stato.	50
3.36	Confronto tra pianificazioni robuste ottenute con l'input shaping e con le differenze finite per un $T_{az} = 2.5s$.	50
3.37	Test di robustezza con lunghezza ridotta di $6cm$ rispetto al valore nominale. Confronto tra pianificazioni robuste ottenute con l'input shaping e con le differenze finite per un $T_{az} = 2.5s$.	51
4.1	Schema del pendolo a 3 gdl.	53
4.2	Schema del pendolo a 3 gdl implementato in Working model.	57
4.3	Forza F in ingresso al sistema.	58
4.4	Confronto simulazione Matlab e Working Model.	59
4.5	Curva di sensitività al variare della lunghezza di l_2 . A sinistra effetto su θ_1 , a destra rispetto a θ_2 .	61
4.6	Curva di sensitività al variare del coefficiente di elasticità k (a sinistra) e del coefficiente di smorzamento c (a destra).	61
4.7	Curva di sensitività al variare della lunghezza l_1 (a sinistra) e di l_2 (a destra).	62
4.8	Traiettoria pianificata nel caso semplice e robusto con le DF in un $T_{az} = 2s$.	66
4.9	Traiettoria pianificata con ZVD e bvp5c robusto in un $T_{az} = 2.5s$.	66
4.10	Curve di sensitività rispetto a θ_1 al variare della lunghezza di l_2 .	67
4.11	Curve di sensitività rispetto a θ_2 al variare della lunghezza di l_2 .	68
4.12	Curve di sensitività rispetto a θ_1 al variare della lunghezza di l_1 .	68
4.13	Curve di sensitività rispetto a θ_2 al variare della lunghezza di l_1 .	69
4.14	Accelerazione \ddot{y} relativa al modello con jerk e a quello in accelerazione.	69
4.15	Simulazione per uno spostamento di $0.2m$ in un $T_{az} = 2s$, ottenuta con il modello con il jerk e la tecnica delle differenze finite: \ddot{y}, \dot{y} e y .	71
4.16	Simulazione per uno spostamento di $0.2m$ in un $T_{az} = 2s$, ottenuta con il modello con il jerk e la tecnica delle differenze finite: $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_2$ e θ_2 .	72
4.17	Particolare della sovraelongazione dell'accelerazione finale.	72
4.18	Curva di sensitività al variare della lunghezza l_2 . A sinistra effetto su θ_2 , a destra effetto su θ_2 .	73
4.19	Risposta in frequenza del sistema a 3 gdl.	75
4.20	Risposta del sistema a 3 gdl ad una traiettoria pianificata in un $T_{az} = 2s$ con differenze finite e ZV con legge armonica.	77
4.21	Risposta del sistema a 3 gdl ad una traiettoria pianificata in un $T_{az} = 2s$ con il jerk nello stato.	77
4.22	Risposta del sistema a 3 gdl ad una traiettoria robusta pianificata in un $T_{az} = 2s$.	78
5.1	Schema del carrello a 4 gdl.	79
5.2	Accelerazione \ddot{y} in ingresso al sistema.	80
5.3	Simulazione test case a 4 gdl: \dot{y} e y .	81
5.4	Simulazione test case a 4 gdl: θ_1 e θ_1 .	81
5.5	Simulazione test case a 4 gdl: $\Delta\theta_2$ e $\Delta\theta_2$.	81

5.6	Simulazione test case a 4 gdl: $\Delta\dot{\theta}_3$ e $\Delta\theta_3$.	81
A.1	Risposta con input shaping.	89
A.2	ZVD shaper.	91
A.3	Schema Simulink per un multi-mode shaping.	91
B.1	Legge di moto normalizzata.	93
C.1	Rendimento di VRS e viti trapezie.	96
C.2	Diverse tipologie di chiocciola.	97
C.3	Precarico con sfere maggiorate.	98
C.4	Precarico a trazione (a sinistra) e a compressione (a destra).	98
C.5	Curve passo-diametro ammissibili.	102
C.6	Valore dei coefficienti K_{vite} e K_{carico} in relazione ai differenti vincoli.	103
C.7	Rappresentazione schematica di un modello a 2 gdl di una VRS.	104
C.8	Classe di precisione del passo di una VRS.	106
C.9	Leggi di moto e valori di velocità, accelerazioni e forze richieste: primo avanzamento.	107
C.10	Leggi di moto e valori di velocità, accelerazioni e forze richieste: secondo avanzamento e ritorno.	108
C.11	Curve dei vincoli in un diagramma $d - p$.	109
C.12	Dati tecnici unità lineare protetta a vite ML80 HPV.	110

Introduzione

La ricerca di un continuo miglioramento delle prestazioni, in termini di precisione di posizione, velocità e tempo di azionamento, unita ad un desiderio di migliorarsi e superare i precedenti limiti fisici e controllistici, porta all'insorgere di un insieme di problematiche, che diventano sempre più attuali ed imprescindibili nel mondo dell'automazione.

Tutte le macchine, portate al limite delle proprie prestazioni, presentano una certa flessibilità, che viene esasperata nel caso di sistemi che siano caratterizzati da una spiccata dinamica oscillatoria. Tali vibrazioni, oltre a determinare delle sollecitazioni strutturali, una perdita di efficienza e un maggiore dispendio energetico, possono essere anche pericolose. Si pensi, ad esempio, ad un carico sospeso traslante, che possiamo assimilare ad un pendolo, che nella sua movimentazione, a causa della sua oscillazione caratteristica, può urtare oggetti o persone uscendo dal proprio spazio di lavoro, o ad un fluido in movimento che, per il proprio moto oscillatorio, può fuoriuscire dal contenitore con conseguenze anche gravi, e.g. sostanze chimiche o metallo fuso nel settore siderurgico.

Si può, dunque, ricorrere a metodi di controllo in feedback (i.e. in anello chiuso), che prevedano una misura e una retroazione su una variabile controllata. Tuttavia, pur essendo controllori avanzati ed affidabili, possono risultare, in certe situazioni, complessi da gestire, piuttosto costosi e di difficile implementazione, poiché richiedono necessariamente l'installazione di sensori dedicati e delicati, che sono sensibili a guasti e malfunzionamenti. In alternativa a questi, vengono sviluppate delle tecniche in feedforward (i.e. in catena aperta), nelle quali il controllo non è basato sulla misura della variabile controllata, ma sulla predizione della dinamica, individuando degli ingressi ottimi per il sistema [1, 2, 3, 4].

Attraverso l'analisi e la risoluzione di Two-Point Boundary Value Problems (TPBVP) [1, 5, 6], questa tesi si propone di studiare una pianificazione ottima del moto in catena aperta, in grado di minimizzare le vibrazioni di un sistema dinamico. Pianificare il moto significa stabilire le modalità con le quali deve avvenire il movimento da un punto iniziale ad un punto finale (i.e. definire una traiettoria con profili di posizione, velocità ed accelerazione), consentendo al sistema di controllo di inseguire correttamente la traiettoria ed evitando l'insorgere di sollecitazioni alla struttura. Tra le tecniche di pianificazione, occorre citare l'Input Shaping, che ormai si è largamente diffusa ed imposta anche nel mondo industriale, proprio per la semplicità e l'immediatezza realizzativa. Consente, infatti, di ridurre l'effetto delle vibrazioni derivanti dal moto di un meccanismo, eliminando una o più frequenze di risonanza del sistema, considerando una traiettoria in ingresso ottenuta dalla convoluzione di una legge di moto desiderata ed un'opportuna sequenza di impulsi. Una forte limitazione di questo metodo, tuttavia, è legata al tempo di azionamento, perché ogni impulso deve essere sfasato, rispetto al precedente, di un tempo pari a metà del periodo di oscillazione del sistema; si ha, pertanto, un limite temporale inferiore, al di sotto del quale non si può pianificare una movimentazione e che dipende dalle caratteristiche del sistema stesso. Inoltre, è necessaria una precisa conoscenza dei parametri in gioco, in particolare della frequenza naturale e dello smorzamento del sistema, per poter impostare correttamente i tempi e le ampiezze degli impulsi.

Con l'obiettivo di minimizzare le vibrazioni, insieme al tempo di movimentazione, svilupperemo, quindi, le diverse tecniche TPBVP e cercheremo di evidenziare pregi e difetti, paragonandole anche all'Input Shaping e mostrando come permettano di ottenere traiettorie con tempi di azionamento inferiori ai limiti imposti dall'altro metodo. In particolare,

le tecniche di soluzione del TPBVP prese in considerazione saranno:

- Differenze finite
- Shooting
- Collocazione polinomiale
- Soluzione analitica tramite integrale di convoluzione
- Soluzione analitica tramite matrice esponenziale

Inoltre, sarà considerato il TPBVP robusto, che vada cioè ad aumentare lo stato del modello, utilizzando delle funzioni di sensitività, per avere una risposta ottima il più possibile insensibile a variazioni od incertezze sui parametri del sistema, aspetto spesso critico e molto diffuso anche a livello industriale. Una situazione comune può essere quella di un robot che debba movimentare un carico variabile, ad esempio nelle operazioni di pick & place, andando, dunque, ad alterare la dinamica del modello.

Nel capitolo successivo sarà introdotta, brevemente, la teoria della pianificazione e del TPBVP, con riferimento alle tecniche che saranno poi utilizzate e confrontate, nel terzo capitolo, per simulare e testare sperimentalmente un pendolo a due gradi di libertà. Nel quarto capitolo verrà, invece, considerata un'estensione del sistema, aggiungendo un ulteriore grado di libertà e ricavando, pertanto, il nuovo e più complesso modello, sul quale sarà ulteriormente simulato e testato un approccio TPBVP. Nel quinto capitolo sarà mostrata una breve presentazione di un sistema a quattro gradi di libertà, verificato in simulazione, ma pensato per applicazioni future. Infine, verranno esposte le conclusioni e possibili sviluppi futuri, proponendo anche un dimensionamento di un sistema di test, azionato con un motore brushless e una vite a ricircolo di sfere.

Pianificazione del moto mediante TPBVP

In letteratura esistono molteplici tecniche di pianificazione del moto. In questo capitolo, verrà introdotto il concetto di Two-Points Boundary Value Problems (TPBVP), mostrando dei metodi utilizzati per la sua risoluzione.

Quando si dispone di una buona conoscenza del modello, molteplici metodi di pianificazione presentano un alto livello di performance, tuttavia evidenziano spesso una mancanza di robustezza. Infatti, una traiettoria ottimizzata per un sistema dinamico, non è più ottimale per una versione perturbata dello stesso sistema, soprattutto nel caso di tecniche basate su un tradizionale controllo ottimo. Sarà, dunque, introdotto rapidamente l'utilizzo di funzioni di sensitività nello stato, per ottenere una soluzione maggiormente robusta ad errori e variazioni parametriche.

2.1 Two-Point Boundary Value Problems

In matematica, nel campo delle equazioni differenziali, un boundary value problem è determinato da un'equazione differenziale insieme a delle condizioni al contorno. Si definiscono, dunque, Two-Point Boundary Value Problems (TPBVP) [7] dei problemi che presentino una Ordinary Differential Equation (ODE) e il valore della soluzione in due diversi punti.

Le equazioni di un sistema dinamico lineare possono essere scritte in forma di stato:

$$\dot{x}(t) = F(x, t, u) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1.1)$$

Considerando un sistema con n stati e m ingressi di controllo, A è una matrice di dimensione $(n \times n)$, x è un vettore di stato $(n \times 1)$, B è una matrice $(n \times m)$, u è un vettore $(m \times 1)$.

Lo scopo del problema è quello di determinare $u(t)$, tale che porti il sistema dallo stato iniziale noto x_0 al tempo t_0 allo stato finale stabilito x_f nel tempo t_f fissato. Andremo, dunque, a minimizzare una funzione di costo quadratica del tipo:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f(x, t, u) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (2.1.2)$$

Dove Q è una matrice $(n \times n)$ simmetrica semidefinita positiva, mentre R è una matrice $(m \times m)$ simmetrica definita positiva. Tali matrici vanno a pesare, rispettivamente, il costo di allontanarci dallo stato desiderato e il costo dell'ingresso da fornire al sistema.

Per risolvere il problema, si può aumentare lo stato aggiungendo i moltiplicatori di Lagrange, i.e. un vettore λ che abbia la stessa dimensione del vettore dello stato x :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix};$$

Consideriamo, allora, l'Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= f + \lambda^T(t)F(x, t, u) \\ &= f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_n F_n\end{aligned}\quad (2.1.3)$$

La soluzione di un problema di ottimo si può ottenere usando il principio del minimo di Pontryagin [8]. Abbiamo tre relazioni fondamentali per trovare il minimo:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \quad (2.1.4)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \quad (2.1.5)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \quad (2.1.6)$$

Possiamo determinare un controllo ottimo u^* , che sia soluzione dell'Eq. (2.1.4); sostituendo poi tale u^* nell'Hamiltoniano $\mathcal{H}(x, t, \lambda, u)$, si elimina la dipendenza dall'ingresso, ottenendo $\mathcal{H}^*(x, t, \lambda)$. L'Eq. (2.1.5) può, dunque, essere applicata valutando le derivate parziali del nuovo Hamiltoniano \mathcal{H}^* , rispetto ai moltiplicatori di Lagrange.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \lambda_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \lambda_n} \end{bmatrix} \quad (2.1.7)$$

In modo analogo possiamo valutare l'Eq. (2.1.6), cioè le derivate parziali di \mathcal{H}^* rispetto allo stato x .

$$\dot{\lambda} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.1.8)$$

Le Eq. (2.1.7) e (2.1.8) definiscono due sistemi dinamici, o, equivalentemente, due gruppi di equazioni differenziali ordinarie (ODE), che possono essere uniti in un unico sistema:

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} \quad (2.1.9)$$

Il problema iniziale è stato, pertanto, ricondotto a quello di trovare una traiettoria ottimale per il sistema dinamico nell'Eq. (2.1.9), che dovrà rispettare le condizioni iniziali (i.e. $x(t_0) = x_0$ e $x(t_f) = x_f$). Osserviamo che tale sistema è autonomo, i.e non ha nessun ingresso; la sua evoluzione, dunque, dipende solo dallo stato iniziale $y(t_0)$ e si può ottenere trovando il corretto valore iniziale di tutti i moltiplicatori di Lagrange λ_i . In alcuni casi la soluzione può essere trovata analiticamente, mentre in generale si può ottenere con metodi numerici, e.g. con il metodo di collocazione, molto diffuso e disponibile in ambiente Matlab tramite la funzione `bvp5c`.

2.1.1 Soluzione tramite integrale di convoluzione

Definito il problema TPBVP da risolvere, cerchiamo una soluzione analitica [9].

Consideriamo l'integrale di convoluzione:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-At} B u(t) dt$$

Ma definiamo

$$u(t) = C\lambda(t)$$

E vale

$$\lambda(t) = e^{-A^T t} \lambda(0)$$

$$\rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-At} BC e^{-A^T t} \lambda(0) dt \quad (2.1.10)$$

Conoscendo il valore di x_f , possiamo, allora, calcolare la Eq. (2.1.10) al tempo t_f

$$x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-At} BC e^{-A^T t} \lambda(0) dt - x(t_f) = 0 \quad (2.1.11)$$

Risolviendo, quindi, l'equazione omogenea (2.1.11), otteniamo il valore di $\lambda(0)$. Questa soluzione, tuttavia, può portare a calcoli molto onerosi, utilizzando espressioni integrali, limitando molto anche il numero di parametri simbolici che possano essere utilizzati.

2.1.2 Soluzione tramite matrice esponenziale

Questo metodo va a sfruttare la formulazione in matrici esponenziali [10] per alleggerire e velocizzare i conti. Usando i Lagrangiani, la soluzione ottima soddisfa la seguente espressione:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (2.1.12)$$

Possiamo, dunque, passare in forma esponenziale:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{St} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow x(t_f) = S_{11}(t_f) \cdot x(0) + S_{12}(t_f) \cdot \lambda(0) \quad (2.1.13)$$

dove si usa la notazione

$$e^{St} = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) \end{bmatrix}$$

Se il calcolo computazionale di e^{St} risultasse complesso, si può pensare di trovare una matrice M tale da trasformare S nella canonica forma di Jordan $M^{-1}SM = J$, così $e^{St} = Me^{Jt}M^{-1}$.

Conosciamo $x(t_f)$ e $x(0)$ (boundary conditions), mentre l'unica incognita è $\lambda(0)$, che posso ricavare invertendo $S_{22}(t_f)$:

$$\lambda(0) = S_{12}^{-1}(t_f)[x(t_f) - S_{11}(t_f)x(0)] \quad (2.1.14)$$

Allora possiamo calcolare $x(t)$, $\lambda(t)$ e $u(t) = f(\lambda(t))$; la soluzione generale può essere scritta, unendo le Eq. (2.1.13) e (2.1.14), come:

$$x(t) = [S_{11}(t) - S_{12}(t)S_{12}^{-1}(t_f)S_{11}(t_f)]x(0) + S_{12}(t)S_{12}^{-1}(t_f)x(t_f) \quad (2.1.15)$$

2.1.3 Differenze Finite

La tecnica delle differenze finite (DF) [11] è basata su un'approssimazione, che permette di sostituire le equazioni differenziali con delle equazioni alle differenze finite in forma algebrica, ottenendo così delle soluzioni associate ad una griglia di punti.

Consideriamo un TPBVP del tipo:

$$\begin{aligned} y'' &= f(t, y, y'), & t \in [t_0, t_f] \\ y(t_0) &= a, & y(t_f) = b \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Il metodo può essere riassunto nella seguente procedura:

- Generare una griglia.

Si va, pertanto, a creare un insieme finito di punti, sui quali andiamo a cercare dei valori che rappresentino una soluzione approssimata dell'equazione differenziale. Un esempio può essere una griglia Cartesiana uniforme:

$$t_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{1}{n}$$

- Rappresentare la derivata con delle formule delle DF, in ogni punto della griglia in cui la soluzione non sia nota, per ottenere un sistema algebrico di equazioni.

Osserviamo che per una generica funzione ϕ , derivabile due volte, vale:

$$\phi''(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(t - \Delta t) - 2\phi(t) + \phi(t + \Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

Possiamo, pertanto, approssimare $y''(t)$ sfruttando tale relazione, compiendo un piccolo errore ϵ . Conseguentemente, ad ogni punto della griglia t_i , possiamo sostituire l'equazione differenziale nel problema con:

$$\frac{y(t_i - h) - 2y(t_i) + y(t_i + h)}{h^2} = f(t_i) + \epsilon \quad (2.1.17)$$

Otteniamo, così, un'approssimazione alle differenze finite per $y(t)$ ad ogni t_i e, definendo la soluzione $Y_i \simeq y(t_i)$, abbiamo un sistema di equazioni algebriche:

$$\begin{aligned} \frac{a - 2Y_1 + Y_2}{h^2} &= f(t_1) \\ \frac{Y_1 - 2Y_2 + Y_3}{h^2} &= f(t_2) \\ &\vdots \\ \frac{Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}}{h^2} &= f(t_i) \\ &\vdots \\ \frac{Y_{n-2} - 2Y_{n-1} + b}{h^2} &= f(t_{n-1}) \end{aligned}$$

- Risoluzione del sistema di equazioni algebriche.

Il sistema può essere scritto come:

Chord Method

- Fissiamo due valori qualsiasi per c_0 e c_1 .
- Per entrambi risolviamo l'IVP, con un metodo numerico, nell'intervallo $[t_0, t_f]$.
- Usiamo un'interpolazione lineare, tra i punti $(c_0, G(c_0))$ e $(c_1, G(c_0))$ per ottenere c_2 :

$$c_2 = c_1 - \left(\frac{c_1 - c_0}{G(c_1) - G(c_0)} \right) \cdot G(c_1)$$

- Allora, ad ogni step di iterazione considero:

$$c_k = c_{k-1} - \left(\frac{c_{k-1} - c_{k-2}}{G(c_{k-1}) - G(c_{k-2})} \right) G(c_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots$$

- Terminiamo l'iterazione quando $|G(c_k)|$ è minore di un ϵ piccolo a piacere.

2.1.5 Collocazione Polinomiale

I metodi di Collocazione Polinomiale consentono di approssimare numericamente un problema di Cauchy, ovvero genericamente permettono di risolvere delle equazioni differenziali. In letteratura sono disponibili svariate tecniche, appartenenti a questa classe di metodi; in questo contesto, pertanto, faremo riferimento al metodo *Lobatto IIIA Runge-Kutta* [14, 15], che viene implementato nella funzione `bvp5c` di Matlab, che sarà largamente utilizzata nel seguito. L'idea del metodo di collocazione implicita è quella di approssimare, ad ogni punto della griglia, la soluzione con un polinomio, che dipenda dal tempo, e di andare a determinare i diversi coefficienti di tale polinomio.

Consideriamo il metodo di Lobatto basato sulla regola della quadratura trapezoidale. Supponiamo di avere un sistema di ODE del tipo:

$$y' = f(t, y), \quad t \in [t_0, t_f], \quad y(t_0) = y_0 \quad (2.1.20)$$

Applicando la regola trapezoidale all'Eq. (2.1.20), otteniamo la relazione:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$$

Dove $h_n = t_{n+1} - t_n$ è la dimensione dell'intervallo. Cercheremo, dunque, la soluzione ad un sistema di equazioni, che può essere espresso come:

$$F(y_{n+1}) := y_{n+1} - y_n - \frac{h_n}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})) = 0 \quad (2.1.21)$$

Tale espressione è non lineare, quando $f(t, y)$ è non lineare in y . Partendo, allora, da una supposizione iniziale $y_{n+1}^{(0)} \simeq y_{n+1}$, la soluzione y_{n+1} può essere approssimata iterativamente con il metodo di Newton come:

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_{n+1}^{(k)} + p_{n+1}^{(k)}, \quad J_n p_{n+1}^{(k)} = -F(y_{n+1}^{(k)})$$

Consideriamo ora la famiglia di metodi Runge-Kutta, basati sulla quadratura trapezoidale di Lobatto. Il problema può essere espresso come segue:

$$Y_{ni} = y_n + h_n \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j h, Y_{nj}) \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (2.1.22)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{j=1}^s b_j f(t_n + c_j h, Y_{nj})$$

dove $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$ e a_{ij}, b_i sono i coefficienti del metodo, comunemente rappresentati dalla matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^s$ e dal vettore $b = (b_1, b_2, \dots, b_s)^T$. Vale, inoltre, $s \geq 2$ e Y_n^j , per $j = 1, \dots, s$, sono chiamati "internal stages" e possono essere considerati come un'approssimazione della soluzione a $t_n + c_j h_n$; l'approssimazione numerica al tempo $t_{n+1} = t_n + h_n$ è data da y_{n+1} .

In particolare, la famiglia Lobatto IIIA Runge-Kutta, presenta:

$$a_{1j} = 0, a_{sj} = b_j \quad j = 1, \dots, s.$$

L'implementazione di questi metodi impliciti Runge-Kutta può essere complessa, però permettono di ottenere delle buone proprietà di convergenza e stabilità.

Nel seguito della trattazione ci riferiremo a questo metodo con il nome della funzione Matlab usata, i.e. `bvp5c`.

2.2 Soluzione Robusta

Lo scopo è quello di aumentare la robustezza della soluzione, i.e. dell'algoritmo di pianificazione della traiettoria, a possibili variazioni o incertezze sui parametri del sistema. Supponiamo, ad esempio, di avere un parametro η , che cambi al trascorrere del tempo o il cui valore esatto sia ignoto, allora siamo in presenza di un sistema perturbato.

L'idea è quella di aumentare l'ODE del sistema con la dinamica della sua funzione di sensitività [7, 16, 17], che viene definita come la derivata parziale del vettore dello stato, fatta rispetto al parametro variabile.

Consideriamo una funzione $\Omega(x, t, \eta)$, con derivata parziale prima continua, rispetto a x e η , per ogni $(t, x, \eta) \in [t_0, t_f] \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p$.

Sia

$$\dot{x} = \Omega(t, x, \eta_0) \quad (2.2.1)$$

un'equazione differenziale con un'unica soluzione $x(t, \eta)$ in $[t_0, t_f]$, dove $x(t_0) = x_0$ e η_0 è il valore nominale del parametro η . Allora, la differenziabilità di Ω rispetto a x e η , implica che la soluzione $x(t, \eta)$ sia differenziabile, rispetto a η vicino a η_0 .

Possiamo scrivere:

$$x(t, \eta) = x_0 + \int_{t_0}^t \Omega(s, x(s, \eta), \eta) ds \quad (2.2.2)$$

Allora, la derivata parziale di x , rispetto a η , risulta:

$$x_\eta(t, \eta) = \int_{t_0}^t \frac{\partial \Omega}{\partial x}(s, x(s, \eta), x_\eta(s, \eta)) + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}(s, x(s, \eta), \eta) ds \quad (2.2.3)$$

dove

$$x_\eta = \frac{\partial x(t, \eta)}{\partial \eta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial x_0}{\partial \eta} = 0.$$

Considerando la derivata temporale, vediamo che $x_\eta(t, \eta)$ soddisfa all'equazione differenziale:

$$\frac{\partial x_\eta(t, \eta)}{\partial t} = A(t, \eta)x_\eta(t, \eta) + B(t, \eta) \quad (2.2.4)$$

con

$$A(t, \eta) = \left. \frac{\partial \Omega(x, t, \eta)}{\partial x} \right|_{x=x(t, \eta)}$$

$$B(t, \eta) = \left. \frac{\partial \Omega(x, t, \eta)}{\partial \eta} \right|_{x=x(t, \eta)}$$

Sia $S(t) = x_\eta(t, \eta)$, allora possiamo riscrivere l'Eq. (2.2.4) come:

$$\dot{S}(t) = A(t, \eta)S(t) + B(t, \eta) \quad (2.2.5)$$

$S(t)$ viene definita funzione di sensitività e l'Eq. (2.2.5) è l'equazione di sensitività. Le funzioni di sensitività permettono di stimare l'effetto delle variazioni parametriche sulla soluzione dell'Eq. (2.2.2) e verranno, dunque, usate per aumentare la dinamica del modello ed incrementare la robustezza del sistema, rispetto al parametro η , imponendo a tali funzioni un valore nullo in certi punti della traiettoria.

Allora, per ogni equazione del sistema di ODE in Eq. (2.1.1), possiamo definire una funzione di sensitività, sfruttando la notazione vista nell'Eq. (2.2.5). Facendo le derivate parziali di $F(x, t, u, \eta)$ rispetto al parametro incerto η , otteniamo un nuovo insieme di equazioni differenziali.

Vale:

$$S(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial \eta} \quad (2.2.6)$$

$$\dot{S}(t) = \frac{\partial F(x, t, u, \eta)}{\partial \eta}$$

Il vettore $\dot{S}(t)$, dunque, viene usato per aumentare la dinamica del sistema, ottenendo una versione robusta R dell'ODE del sistema:

$$R = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{S}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x, t, u, \eta) \\ A(t, \eta)S(t) + B(t, \eta) \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

L'ottimizzazione del problema robusto può, quindi, essere posta come:

$$\min J(x(t), S(t), t, u) = \min \int_{t_0}^{t_f} f(x, S, t, u) dt \quad (2.2.8)$$

Tale che

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= x_f \\ S(t_0) &= 0 \\ S(t_f) &= 0 \\ \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{S}(t) \end{bmatrix} &= R(x(t), S(t), t, u) \end{aligned}$$

A differenza del problema generale, dunque, viene usata la versione aumentata della dinamica del sistema R , introdotta precedentemente. Inoltre, sono state aggiunte le condizioni iniziale e finale sulla S , che assicurano che la sensitività della traiettoria risultante sia minima. In altre parole, andiamo ad imporre che la soluzione sia insensibile alle variazioni del parametro η , rispetto al suo valore nominale.

In questo caso, è stata considerata l'incertezza rispetto ad un solo parametro (i.e. η), ma il metodo permette di prendere in considerazione un numero arbitrario di parametri variabili. Se abbiamo $x(t) \in \mathcal{R}^n$ e un numero m di parametri incerti, allora otterremo $S(t) \in \mathcal{R}^{nm}$.

Test Case: Carrello a 2 gdl

In questo capitolo verrà considerato il test case di un sistema a due soli gradi di libertà (gdl), che si può pensare come un carrello traslante accoppiato ad una massa sospesa oscillante, tramite una fune inestensibile. Per quanto semplice come configurazione, può essere rappresentativo, tuttavia, di molteplici applicazioni industriali (e.g. si pensi al caso di un carroponete).

Per prima cosa, dunque, sarà presentato il modello matematico, che tenga conto della dinamica del pendolo in esame. Successivamente verranno considerate le diverse tecniche di pianificazione del moto, già brevemente riassunte a livello teorico, avvalendosi delle simulazioni eseguite in ambiente Matlab e Simulink e confrontandone i diversi pregi e difetti. Infine, verranno mostrati i risultati sperimentali ottenuti dai test in laboratorio.

3.1 Modello

Consideriamo un carrello, che possa traslare unicamente in una direzione y , e un pendolo ad esso collegato, che possa oscillare solo secondo un angolo θ (giacente sul piano x - y e considerato rispetto alla verticale), come schematizzato in Fig. 3.1. La massa traslante M si suppone priva di attrito durante la sua movimentazione, così come si suppone priva di attrito l'oscillazione sul perno; indichiamo, invece, con m la massa, supposta puntiforme, sospesa grazie ad una fune inestensibile di lunghezza l . Il sistema, inoltre, giacendo su un piano verticale, sarà soggetto ad una forza di gravità g .

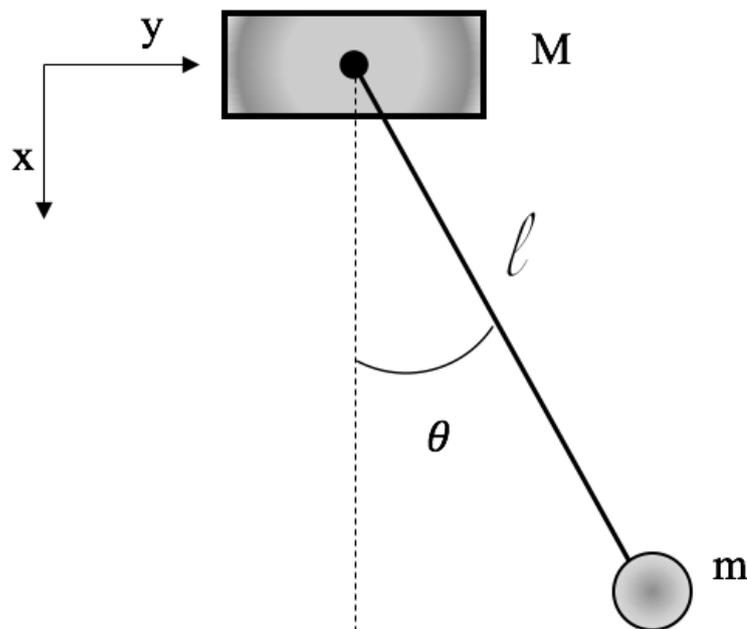


Fig. 3.1: Schema del carrello a 2 gdl.

Per ricavare il modello si può sfruttare l'approccio di Lagrange [18, 19]. Per il principio di conservazione dell'energia, il lavoro è uguale all'energia cinetica dei due membri meno l'energia potenziale:

$$L = T - U \quad (3.1.1)$$

Determinato L , si andrà a calcolare il Lagrangiano, che nel caso generale si può esprimere come:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \xi_i \quad \forall i \in [1, n] \quad (3.1.2)$$

con q coordinate libere del sistema, n uguale al numero di gdl del sistema, che nel caso in esame si riduce a due (i.e. y e θ), mentre ξ rappresenta la coppia applicata dall'esterno al sistema.

Considerando l'energia cinetica dei singoli membri abbiamo:

$$T_y = \frac{1}{2} M \dot{y}^2$$

$$T_\theta = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \underbrace{(\dot{x}_\theta^2 + \dot{y}_\theta^2)}_{v_\theta^2}$$

dove

$$x_\theta = l \cos(\theta) \quad \rightarrow \dot{x}_\theta = -l \sin(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

$$y_\theta = l \sin(\theta) + y \quad \rightarrow \dot{y}_\theta = l \cos(\theta) \cdot \dot{\theta} + \dot{y}$$

Pertanto, calcolando v_θ^2 risulta:

$$\begin{aligned} v_\theta^2 &= \dot{x}_\theta^2 + \dot{y}_\theta^2 = l^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 + l^2 \cos^2(\theta) \dot{\theta}^2 + 2l \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{y} \\ &= \dot{y}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{y} \end{aligned}$$

Andando, allora, a valutare l'energia cinetica e potenziale totali, possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{y} \quad (3.1.3)$$

$$U = -mgl \cos(\theta)$$

Si possono, dunque, sostituire tali valori nell'Eq. (3.1.1) e andare a considerare le derivate parziali del Lagrangiano, secondo l'approccio standard in Eq. (3.1.2).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= (M + m) \ddot{y} + m l \cos(\theta) \ddot{\theta} - m l \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= J \ddot{\theta} + m l^2 \ddot{\theta} + m l \cos(\theta) \ddot{y} + mgl \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Possiamo raccogliere le Eq. (3.1.4), appena viste, in forma matriciale.

$$\begin{bmatrix} M + m & m l \cos(\theta) \\ m l \cos(\theta) & J + m l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m l \dot{\theta} \sin(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mgl \sin(\theta) \end{bmatrix} = F \quad (3.1.5)$$

Tale modello risulta non lineare; si può, però, linearizzare considerando le semplificazioni: $\sin(\theta) \approx \theta$ e $\cos(\theta) \approx 1$. Assumiamo, inoltre, $J = 0$, nell'ipotesi di avere la sola massa concentrata puntiforme m .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M+m & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix} = F \quad (3.1.6)$$

dove si è fatto un leggero abuso di notazione, andando a chiamare M anche la matrice di massa; mentre C rappresenta la matrice di smorzamento, in questo caso nulla per ipotesi, e K è la matrice di rigidità.

3.1.1 Modello nello spazio di stato

L'implementazione del modello, ai fini della simulazione, risulta più agevole passando in forma di stato. Nell'analisi dei sistemi dinamici, una rappresentazione in spazio di stato è una descrizione di un sistema dinamico, in cui si fa riferimento a delle variabili di stato, che sono un sottoinsieme delle variabili del sistema e rappresentano la sua evoluzione ad ogni dato istante di tempo. Per un sistema lineare tempo-invariante (LTI), una generica rappresentazione state-space assume la forma:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + BU(t) \\ Y(t) &= CX(t) + DU(t) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

In tale espressione, $X(t)$ indica lo stato del sistema ed è un vettore ($n \times 1$), supponendo di avere n coordinate libere; $U(t)$ rappresenta l'ingresso del sistema e ha dimensione ($r \times 1$), assumendo un sistema con r possibili ingressi; $Y(t)$ è il vettore di uscita ($m \times 1$), dove m sono le variabili ritenute di interesse in uscita, delle quali si vuole valutare la dinamica. Conseguentemente, le matrici avranno le seguenti dimensioni: la A è una ($n \times n$), la B è una ($n \times r$), la C è una ($m \times n$) e la D è una ($m \times r$).

L'Eq. (3.1.6) si può riscrivere nella forma:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx &= F \\ \Rightarrow \ddot{x} &= -M^{-1}C\dot{x} - M^{-1}Kx + M^{-1}F \end{aligned}$$

dove

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}$$

Sfruttando, pertanto, la precedente espressione, possiamo scrivere:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -M^{-1}C & M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} M^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}}_B F \quad (3.1.8)$$

Invertendo, dunque, la matrice di massa M e svolgendo i prodotti matriciali, si trova il modello in spazio di stato nella forma dell'Eq. (3.1.7):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{mg}{M} \\ 0 & 0 & 0 & -g\frac{(M+m)}{Ml} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ y \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \\ \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ y \\ \theta \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ y \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

dove si è nuovamente indicata con M la massa del carrello traslante, mentre con u ci si riferisce all'unico ingresso agente sul sistema, i.e. la forza F_y orizzontale, applicata sul carrello. In uscita sono state considerate tutte le variabili di stato, poiché risulterà utile osservare anche le velocità nella valutazione delle simulazioni. Il modello ottenuto può, quindi, essere utilizzato in ambiente Matlab, per implementare e simulare le diverse tecniche di pianificazione del moto, citate nella precedente sezione teorica.

3.1.2 Modello con ingresso in accelerazione

Il modello presentato sopra, si propone come un modello in forza (i.e. l'ingresso è espresso come una forza agente sul carrello). Tuttavia, valutando come ingresso l'accelerazione del carrello $\ddot{y} = u$, si giunge ad una versione molto più semplice dello stesso sistema, nella quale si perde la dipendenza dalle masse dei singoli membri, riducendo il carico computazionale richiesto nella soluzione del TPBVP, soprattutto nel caso in cui si cerchi una soluzione analitica.

Ragionare con ingresso in posizione (o in accelerazione), inoltre, risulta più efficace dal punto di vista dell'utilizzo in sistemi di controllo reali e più affidabile, perché si sfrutta un anello interno (tipica struttura dei controllori ad anelli annidati), che compensa eventuali dinamiche non modellate.

Considerando solo la seconda riga dell'Eq. (3.1.6), possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta &= 0 \\ \implies \ddot{\theta} &= -\frac{1}{l}\ddot{y} - \frac{g}{l}\theta \end{aligned}$$

Avendo, pertanto, ricavato l'espressione di $\ddot{\theta}$ e assumendo $\ddot{y} = u$, il modello può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{g}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \\ \theta \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \\ \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \\ \theta \\ y \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \\ \theta \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

3.1.3 Modello con jerk

Risolvendo un TPBVP con il modello in accelerazione, appena presentato, si può ottenere una traiettoria ottima con un profilo di accelerazione del carrello discontinuo. Tuttavia, avendo attuatori reali, sarà impossibile seguire perfettamente tale discontinuità (i.e. l'accelerazione effettiva ottenuta sarà diversa dal riferimento $\ddot{y} \neq \ddot{y}_{ref}$), con un possibile deterioramento delle prestazioni del moto pianificato. Per cercare di risolvere tale problema, si può aumentare lo stato, andando ad introdurre nel modello il jerk del carrello, in questo modo saremo in grado di imporre delle condizioni iniziali e finali anche sull'accelerazione (i.e. porre accelerazioni iniziale e finale nulle). Consideriamo, pertanto, un filtro in ingresso che tenga conto della dinamica (della banda passante) del sistema da comandare, come nello schema di Fig. 3.2.

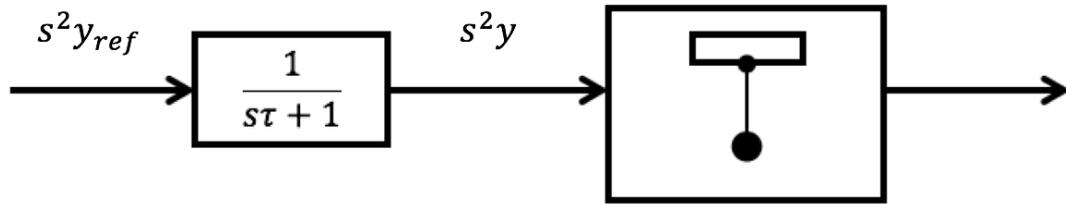


Fig. 3.2: Schema sistema con filtro in ingresso.

Allora vale:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_{ref} &= \ddot{y}\tau + \ddot{y} \\ \Rightarrow \ddot{y} &= \frac{u}{\tau} - \frac{\ddot{y}}{\tau}\end{aligned}$$

Inoltre sappiamo che

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= -\frac{1}{l}\ddot{y} - \frac{g}{l}\theta \\ \ddot{y} &= \ddot{y} \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta} \\ \dot{y} &= \dot{y}\end{aligned}$$

Possiamo, dunque, scrivere il modello aumentato nella forma:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{g}{l} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{y} \\ \theta \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{y} \\ \theta \\ y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{y} \\ \theta \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}\tag{3.1.11}$$

3.2 Simulazioni

I modelli matematici ottenuti, i.e. modello in forza, in accelerazione e con jerk, che corrispondono rispettivamente alle Eq. (3.1.9), (3.1.10) e (3.1.11), possono essere utilizzati per eseguire delle simulazioni in ambiente Matlab e Simulink.

In questa sezione verranno analizzate le diverse tecniche di pianificazione studiate, ponendo particolare attenzione al variare del tempo di azionamento imposto, ad una serie di valori di interesse quali: picco di oscillazione massimo nel tempo di azionamento e quello residuo al termine della movimentazione; spostamento massimo, velocità e accelerazione, massime e RMS, del carrello, valutandone anche la continuità; sensitività alle variazioni parametriche; tempo computazionale. Gli input shaper ZV e ZVD (un breve richiamo teorico viene riportato in Appendice A), essendo già largamente utilizzati ed affermati, saranno presi come riferimento per valutare i pregi e i difetti delle altre tecniche.

Inoltre, nell’ottica di dover testare le traiettorie pianificate sperimentalmente in laboratorio, le simulazioni considereranno i seguenti parametri:

- lunghezza della fune $l = 1$ metro,
- massa equivalente del carrello $M = 32$ kg,
- massa del carico sospeso $m = 0.7$ kg.

In tal caso, la frequenza di oscillazione vale:

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = 0.4985\text{Hz}$$

dove $g \simeq 9.81$ è l’accelerazione di gravità. Quindi il periodo risulta:

$$T = \frac{1}{f} \simeq 2\text{s}$$

Allora, nel caso dell’Input Shaping, che presenta un ritardo di $T/2$ nell’applicazione del secondo impulso, dovremo avere necessariamente un tempo di azionamento $T_{az} > 1\text{s}$, che aumenta al crescere del numero di impulso. Vedremo, invece, come con altre tecniche, a discapito di una maggiore accelerazione richiesta, riusciremo a pianificare movimentazioni in tempi inferiori.

Le simulazioni sono state effettuate in Simulink, sfruttando il modello in forma di stato e passando, in catena aperta con il blocco “From Workspace”, l’ingresso ottimo calcolato risolvendo il TPBVP; i dati in uscita vengono poi raccolti e visualizzati con un blocco “Scope” (i.e. oscilloscopio). Lo schema utilizzato è riportato in Fig. 3.3.

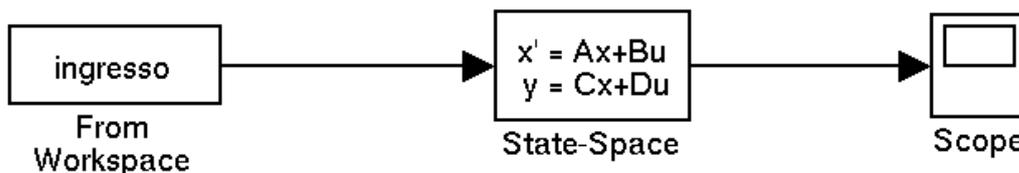


Fig. 3.3: Schema Simulink.

3.2.1 Confronto tra ingresso in forza e in accelerazione

In Tab. 3.1 viene presentato un confronto tra l'utilizzo del modello con ingresso in forza e quello in accelerazione, presentati nella sezione precedente.

Possiamo osservare come i risultati ottenuti siano sostanzialmente uguali dal punto di vista delle prestazioni, in termini di oscillazioni massime della massa sospesa e di velocità ed accelerazioni richieste al carrello. Nel caso di ingresso in forza, però, si ha un notevole aumento della complessità computazionale, che si può vedere, in particolare, dall'esagerato aumento del tempo di calcolo nel caso di soluzione con la tecnica delle differenze finite. Tale problema viene esasperato se consideriamo i metodi per ottenere una soluzione analitica (i.e. soluzione integrale ed esponenziale richiamati nella sezione teorica), perché, considerando l'ingresso in forza, nel modello compaiono anche le masse dei diversi membri. Aumenta, dunque, il numero dei parametri da considerare e Matlab tende a bloccarsi durante la risoluzione.

Per il resto, osserviamo come, con la funzione `bvp5c`, il tempo di calcolo resti limitato anche spingendosi a valori di T_{az} molto bassi. Viceversa con le differenze finite, il tempo di calcolo cresce velocemente al diminuire del tempo di azionamento, raggiungendo rapidamente un numero di iterazioni richieste inaccettabile per il modello con ingresso in forza.

Guardando la sensitività¹ al variare della lunghezza della fune, che sostiene la massa sospesa, si nota che l'andamento della curva è molto simile per entrambi i modelli, ma l'approccio in accelerazione risulta leggermente più robusto alle variazioni parametriche (i.e. la curva di sensitività è più bassa). La curva di sensitività, nel caso di $T_{az} = 2s$, è riportata in Fig. 3.4.

Tab. 3.1: Confronto ingresso accelerazione e forza con diversi tempi di azionamento $T_{az}[s]$.

Tecnica	$T_{az}[s]$	θ Max [rad]	θ Residuo Max [rad]	Tempo di calc[s]
DF acc	2	0.040911	3.1938e-05	2.0064
DF forza	2	0.040969	3.2457e-05	43.9572
bvp5c acc	2	0.040895	1.2986e-07	7.2245
bvp5c forza	2	0.040953	1.2481e-07	7.9338
DF acc	1.5	0.070654	3.2122e-05	2.3951
DF forza	1.5	0.070713	3.3025e-05	424.6425
bvp5c acc	1.5	0.070617	5.3449e-07	6.8665
bvp5c forza	1.5	0.070675	5.2165e-07	7.8252
DF acc	0.5	0.61517	0.00013792	1330.2652
DF forza	0.5	-	-	-
bvp5c acc	0.5	0.61509	8.9483e-06	6.9326
bvp5c forza	0.5	0.61514	9.1537e-06	7.8101

¹Per sensitività, in questo contesto, andiamo a considerare il valore massimo del picco di oscillazione residuo al termine della movimentazione pianificata, al variare di un parametro, i.e. in presenza di un errore sul valore nominale di un parametro.

Tecnica	Δy Max [m]	\dot{y} Max [m/s]	\dot{y} RMS [m/s]	\ddot{y} Max [m/s ²]
DF acc	0.20001	0.13821	0.074173	0.77165
DF forza	0.20001	0.13845	0.074206	0.76564
bvp5c acc	0.2	0.13818	0.074166	0.77133
bvp5c forza	0.2	0.13842	0.074199	0.76533
DF acc	0.20003	0.28137	0.12385	2.8198
DF forza	0.20003	0.28152	0.12394	2.8043
bvp5c acc	0.2	0.28128	0.12381	2.8189
bvp5c forza	0.2	0.28143	0.1239	2.8033
DF acc	1.0715	6.9063	3.6732	268.7658
DF forza	-	-	-	-
bvp5c acc	1.0712	6.9036	3.672	268.6964
bvp5c forza	1.0713	6.9035	3.6724	267.0205

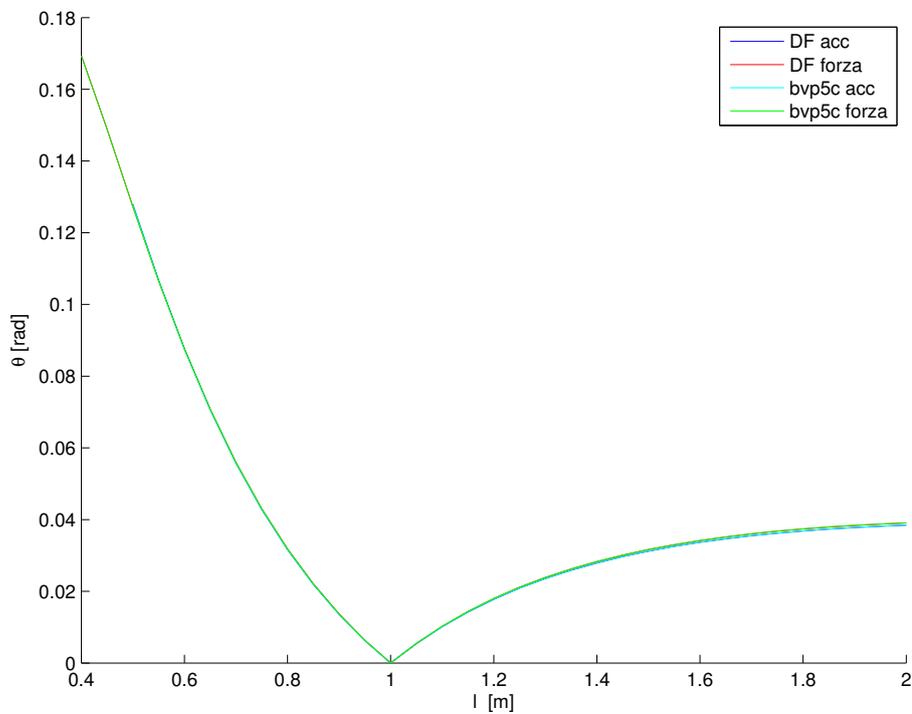


Fig. 3.4: Curva di sensitività al variare della lunghezza l .

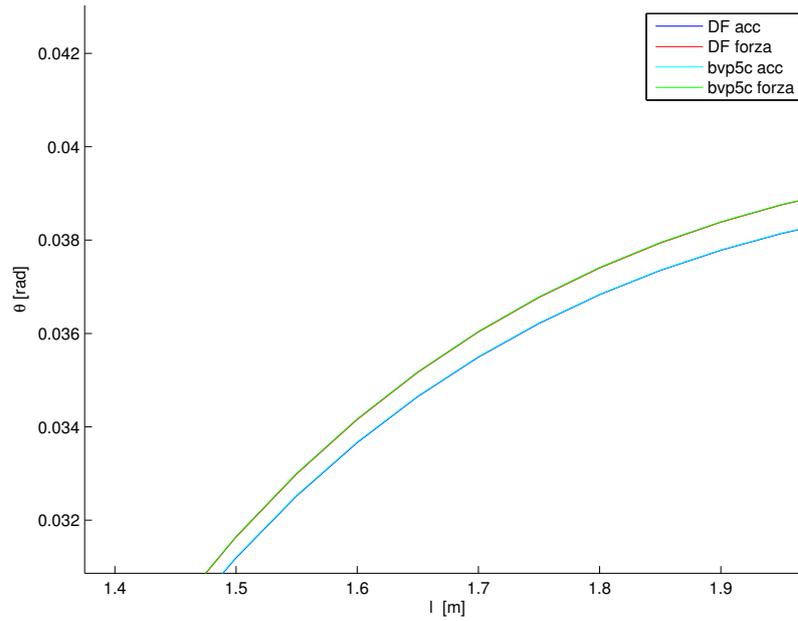


Fig. 3.5: Ingrandimento della curva di sensitività al variare della lunghezza l .

3.2.2 Pianificazione con ingresso accelerazione

Andiamo a paragonare le varie tecniche di pianificazione, con diversi tempi di azionamento e considerando il modello con ingresso in accelerazione, confrontandole con un tradizionale ZV shaper, calcolato sfruttando una legge di moto armonica (vedere Appendice B).

In Tab. 3.2 sono riportati i valori di interesse con un tempo di azionamento di 2 secondi. Possiamo osservare come il picco massimo di oscillazione della massa sospesa sia molto simile per tutte le diverse soluzioni del TPBVP e più piccolo rispetto a quello generato dallo ZV, soprattutto nel caso del θ residuo dopo la movimentazione. In particolare, il risultato migliore in simulazione, rispetto al picco residuo, si ottiene con il metodo bvp5c, mentre la tecnica dello Shooting si dimostra la meno efficace nel ridurre la vibrazione residua.

Anche guardando le velocità e le accelerazioni del carrello, otteniamo dei risultati molto simili tra loro. Le tecniche TPBVP presentano valori di velocità massima e RMS ed accelerazione RMS inferiori a quelli dello ZV, mostrando, tuttavia, un'accelerazione massima richiesta più elevata. Un'altra volta il risultato peggiore è quello ottenuto con lo Shooting, che necessita di un'accelerazione RMS quasi doppia, rispetto alle altre.

Tab. 3.2: Confronto tecniche con tempo di azionamento 2 [s].

Tecnica	θ Max [rad]	θ Residuo Max [rad]	Tempo di calcolo [s]
ZV	0.045174	0.000871	0.00025623
DF	0.040911	3.1938e-05	2.0064
bvp5c	0.040895	1.2986e-07	7.2245
Shooting	0.040874	0.00031425	1.9354
Integrale	0.0409	1.1104e-05	72.447
Esponenziale	0.0409	1.1104e-05	8.8009

Tecnica	Δy Max [m]	\dot{y} Max [m/s]	\dot{y} RMS [m/s]
ZV	0.20099	0.15733	0.078614
DF	0.20001	0.13821	0.074173
bvp5c	0.2	0.13818	0.074166
Shooting	0.20046	0.13831	0.074316
Integrale	0.2	0.13819	0.074166
Esponenziale	0.2	0.13819	0.074166

Tecnica	\ddot{y} Max [m/s^2]	\ddot{y} RMS [m/s^2]	\ddot{y} Continua
ZV	0.49348	0.34873	No
DF	0.77165	0.28332	No
bvp5c	0.77133	0.27904	No
Shooting	0.77122	0.47022	No
Integrale	0.77133	0.27259	No
Esponenziale	0.77133	0.27259	No

Considerando la sensitività dei diversi metodi in Fig. 3.6, a fronte di una variazione della lunghezza del pendolo, tutte le soluzioni TPBVP rispondono meglio dello ZV. La pianificazione con le differenze finite risulta leggermente migliore delle altre, mentre lo shooting è il meno robusto alle variazioni parametriche.

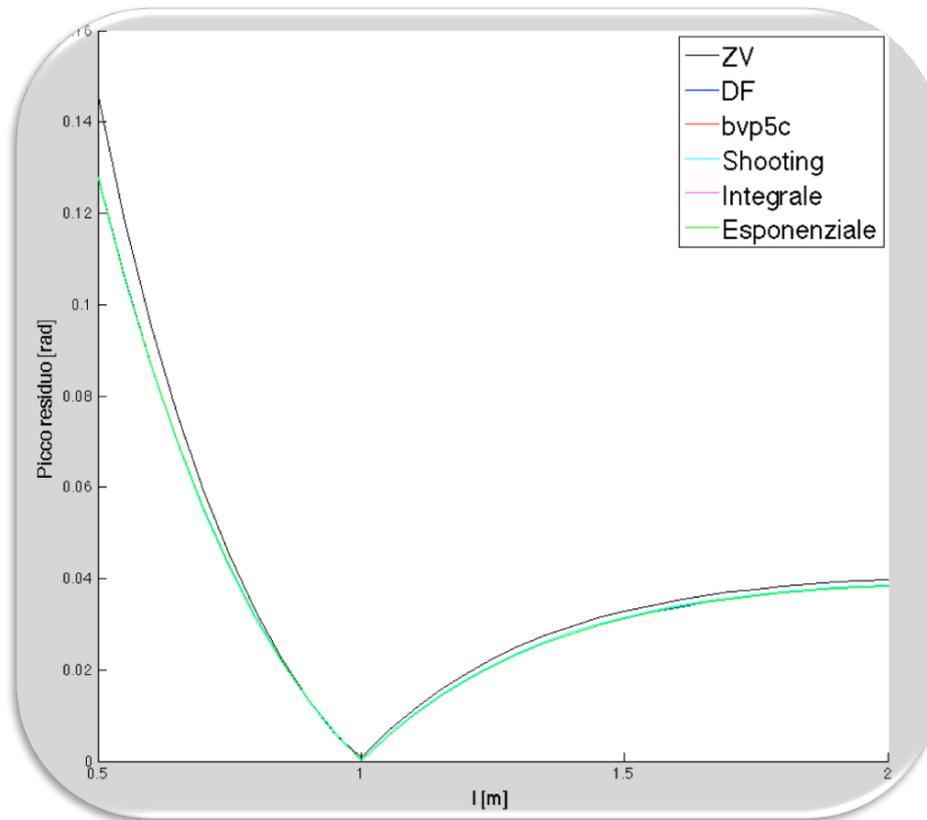


Fig. 3.6: Curva di sensitività al variare della lunghezza l .

Tali considerazioni valgono, invariate, anche per un tempo di azionamento di 1.5s in Tab. 3.3. In generale, riducendo il tempo di azionamento, abbiamo inevitabilmente un aumento del picco massimo di oscillazione, osservato durante la movimentazione, ed un leggero incremento del picco residuo.

Tab. 3.3: Confronto tecniche con tempo di azionamento 1.5 [s].

Tecnica	θ Max [rad]	θ Residuo Max [rad]	Tempo di calcolo [s]
ZV	0.074381	0.00093836	0.00016161
DF	0.070654	3.2122e-05	2.3951
bvp5c	0.070617	5.3449e-07	6.5189
Shooting	0.070247	0.0011746	2.031
Integrale	0.070619	1.217e-05	72.2058
Esponenziale	0.070619	1.217e-05	8.3154
Tecnica	Δy Max [m]	\dot{y} Max [m/s]	\dot{y} RMS [m/s]
ZV	0.20296	0.31515	0.12851
DF	0.20003	0.28137	0.12385
bvp5c	0.2	0.28128	0.087551
Shooting	0.20143	0.28167	0.12408
Integrale	0.2	0.28128	0.12381
Esponenziale	0.2	0.28128	0.12381
Tecnica	\ddot{y} Max [m/s ²]	\ddot{y} RMS [m/s ²]	\ddot{y} Continua
ZV	1.9739	1.1395	No
DF	2.8198	1.0214	No
bvp5c	2.8189	1.0054	No
Shooting	2.8187	1.804	No
Integrale	2.8189	1.0328	No
Esponenziale	2.8189	1.0328	No

La vera criticità, però, si vede nella crescita delle velocità e soprattutto delle accelerazioni richieste, che raggiungono valori molto elevati. Questo rapido incremento delle accelerazioni non è dovuto solo alla diminuzione del tempo concesso alla movimentazione, ma anche allo spostamento stesso, perché, pur rimanendo all'interno delle condizioni di posizione iniziale e finale, si hanno una o più inversioni del moto (i.e. il carrello avanza, poi torna indietro e dopo avanza nuovamente). Si ha un aumento, dunque, dello spazio netto percorso, come mostrato nelle Fig. 3.7 e 3.8, nelle quali si mostra un confronto tra la traiettoria del carrello pianificata con la tecnica dell'input shaping e quella ottenuta dalla risoluzione del TPBVP.

Fino a giungere al caso estremo, come si vede in Fig. 3.9, in cui, per ridurre le vibrazioni residue, il carrello nelle sue inversioni del moto torna più indietro di quella che era la posizione iniziale e si sposta oltre la posizione finale. Bisognerà, pertanto, prestare particolare attenzione a quelli che potrebbero essere dei vincoli od ostacoli spaziali da non superare.

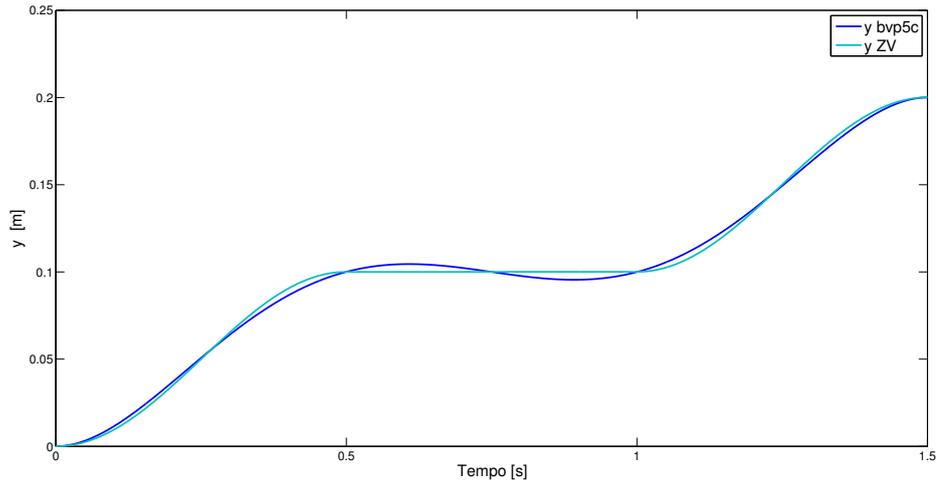


Fig. 3.7: Traiettoria del carrello pianificata per un $T_{az} = 1.5s$: Confronto tra ZV e bvp5c.

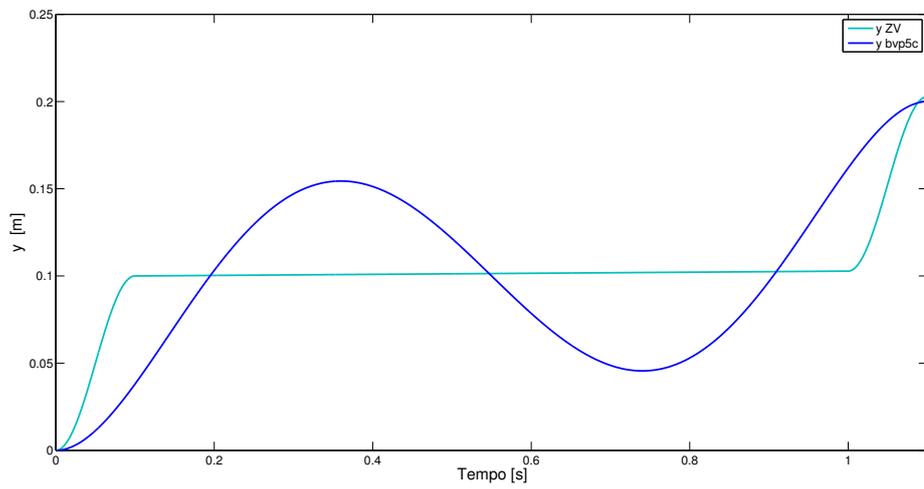


Fig. 3.8: Traiettoria del carrello pianificata per un $T_{az} = 1.1s$: Confronto tra ZV e bvp5c.

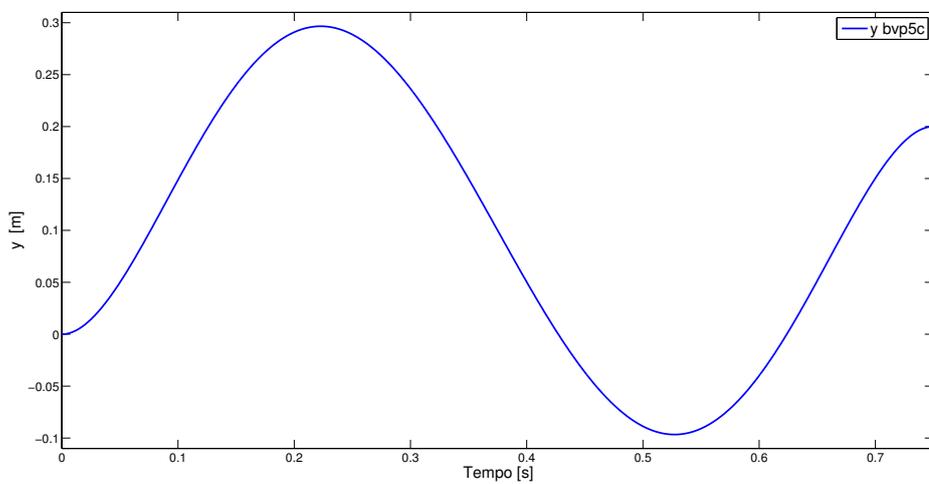


Fig. 3.9: Traiettoria del carrello pianificata per un $T_{az} = 0.75s$.

Tuttavia, è proprio la possibilità di pianificare con delle inversioni del moto che costituisce un punto di forza delle tecniche TPBVP, permettendo di aumentare molto le prestazioni rispetto al normale ZV. In Tab. 3.4 vediamo, infatti, che il tradizionale input shaping è al limite delle sue possibilità e richiede accelerazioni di gran lunga più elevate rispetto alle altre tecniche, che continuano invece a garantire un buon funzionamento. Con la soluzione del TPBVP, possiamo, inoltre, scendere a tempi di azionamento inferiori a metà del periodo di oscillazione (nel caso in esame è appunto di 1 secondo), che è il limite al di sotto del quale lo ZV non può proprio scendere. Osserviamo, confrontando le Tab. 3.4 e Tab. 3.5, che col TPBVP possiamo ottenere in 0.75s una traiettoria del tutto paragonabile a quella che si può ottenere con uno ZV in 1.1s.

Una sostanziale differenza, tra i diversi metodi, si nota guardando i tempi di calcolo. Lo ZV è di gran lunga il più rapido, come era prevedibile, perché viene ricavato da una legge di moto armonica normalizzata già pronta, che deve solo essere adattata all'ampiezza e al tempo richiesti. I metodi integrale ed esponenziale, invece, danno sostanzialmente la stessa soluzione, che, essendo analitica, impiegherà sempre il medesimo tempo per essere calcolata, a prescindere dai valori dei parametri che saranno sostituiti in un secondo momento; però, si vede come sia nettamente preferibile passare per la matrice esponenziale, che risulta sensibilmente più veloce, piuttosto che calcolare l'integrale. La tecnica dello Shooting risulta la più veloce e si mantiene più o meno costante come tempo di calcolo impiegato, così come il metodo bvp5c trova la soluzione impiegando circa sempre lo stesso tempo, seppur maggiore del caso precedente, mentre le differenze finite risultano particolarmente veloci nel caso $T_{az} = 2s$, ma, al diminuire del tempo di azionamento, aumenta notevolmente il tempo di calcolo, a causa dell'elevato numero di iterazioni che viene richiesto al solutore.

Per tutte queste simulazioni, l'accelerazione è ovviamente discontinua, tuttavia, vale la pena sottolinearlo, perché in fase di test il motore non sarà in grado di seguire esattamente tali discontinuità. A tal fine è stato sviluppato anche il modello con jerk, le cui simulazioni verranno presentate successivamente.

Tab. 3.4: Confronto tecniche con tempo di azionamento 1.1 [s].

Tecnica	θ Max [rad]	θ Residuo Max [rad]	Tempo di calcolo [s]
ZV	0.097138	0.0018406	8.8563e-05
DF	0.12912	7.2572e-06	5.4623
bvp5c	0.12906	1.6586e-06	7.3582
Shooting	0.12737	0.0033036	2.061
Integrale	0.12906	1.9121e-05	72.1009
Esponenziale	0.12906	1.9121e-05	8.3765

Tecnica	Δy Max [m]	\dot{y} Max [m/s]	\dot{y} RMS [m/s]
ZV	0.20284	1.5714	0.33495
DF	0.20005	0.67343	0.30268
bvp5c	0.2	0.67319	0.21396
Shooting	0.20371	0.67453	0.3024
Integrale	0.2	0.6732	0.30256
Esponenziale	0.2	0.6732	0.30256

Tecnica	\ddot{y} Max [m/s^2]	\ddot{y} RMS [m/s^2]	\ddot{y} Continua
ZV	49.348	14.8756	No
DF	10.6239	3.936	No
bvp5c	10.6208	3.8772	No
Shooting	10.6203	6.8511	No
Integrale	10.6208	3.987	No
Esponenziale	10.6208	3.987	No

Tab. 3.5: Confronto tecniche con tempo di azionamento 0.75 [s].

Tecnica	θ Max [rad]	θ Residuo Max [rad]	Tempo di calcolo [s]
ZV	-	-	-
DF	0.27481	4.2594e-05	60.4066
bvp5c	0.27473	4.8927e-06	7.6592
Shooting	0.26834	0.010383	1.7649
Integrale	0.27473	2.9355e-05	72.6914
Esponenziale	0.27473	2.9355e-05	8.4093

Tecnica	Δy Max [m]	\dot{y} Max [m/s]	\dot{y} RMS [m/s]
ZV	-	-	-
DF	0.39335	2.0685	1.0299
bvp5c	0.39324	2.0678	1.0295
Shooting	0.38668	2.0734	0.64935
Integrale	0.39324	2.0678	1.0295
Esponenziale	0.39324	2.0678	1.0295

Tecnica	\ddot{y} Max [m/s^2]	\ddot{y} RMS [m/s^2]	\ddot{y} Continua
ZV	-	-	-
DF	51.7925	19.543	No
bvp5c	51.7787	19.263	No
Shooting	51.7768	35.3604	No
Integrale	51.7787	19.7323	No
Esponenziale	51.7787	19.7323	No

3.2.3 Pianificazione semplice e robusta

Con il termine pianificazione “semplice” andiamo ad indicare la tradizionale pianificazione ottima del moto, che vada, dunque, a minimizzare le vibrazioni e massimizzare le prestazioni del sistema dinamico, partendo dall’ipotesi di conoscere esattamente i valori di tutti i parametri in gioco. In realtà, spesso avremo solo un valore nominale di tali parametri, che possono presentare una certa incertezza o variabilità nel tempo, in questo modo la traiettoria calcolata non è più la soluzione ottima. In presenza di un sistema perturbato, possiamo, quindi, adottare una pianificazione robusta, che vada a considerare anche delle equazioni di sensitività come visto nell’Eq. (2.2.6), che, in questo caso, vengono derivate rispetto alla lunghezza l del pendolo:

$$S(t) = \frac{\partial x}{\partial l}$$

Tuttavia, si è visto che considerare la sensitività rispetto all’intero vettore dello stato può portare a matrici singolari, che complicano notevolmente la risoluzione. Pertanto, poiché lo scopo è quello di minimizzare la vibrazione residua del pendolo (i.e. portare a zero l’angolo θ), la funzione sensitività viene valutata solo rispetto alla posizione e alla velocità angolari del pendolo, trascurando l’effetto che può avere sul carrello una variazione della lunghezza della fune e quindi le sensitività $\frac{\partial \dot{y}}{\partial l}$ e $\frac{\partial y}{\partial l}$. D’altra parte tale effetto è trascurabile dal rapporto d’inerzie.

Consideriamo allora:

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial l} \\ S_2(t) &= \frac{\partial \theta}{\partial l} \end{aligned}$$

Lo stato aumentato risulta:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

Considerando $\dot{S}(t)$ andremo, invece, ad aumentare la dinamica del sistema, come visto nell’Eq. (2.2.7). Utilizzando il modello con ingresso in accelerazione, vale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \frac{g\theta}{l^2} - \frac{g}{l} \cdot S_2(t) \\ S_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

La soluzione ottima del problema si trova minimizzando la funzione di costo, presentata nell’Eq. (2.2.8). Si ripercorre la risoluzione teorica di un TPBVP, vista nel secondo capitolo, aggiungendo i moltiplicatori di Lagrange e considerando l’Hamiltoniano.

Tale robustezza, però, può intaccare le prestazioni della traiettoria ed aumentare molto la complessità computazionale; andiamo, dunque, a confrontare le diverse tecniche presentate.

Dalla Tab. 3.8, possiamo osservare come si abbia, per tutti i metodi, un aumento del picco massimo di oscillazione e di quello residuo, che comunque resta su valori molto buoni. Come previsto, si ha un forte aumento del tempo di calcolo, proprio per la maggiore complessità del modello aumentato. Si nota poi un consistente aumento delle velocità massima e RMS, ma soprattutto delle accelerazioni massima e RMS richieste. Confrontando, infatti, la traiettoria pianificata nel caso semplice e robusto, in Fig. 3.10, vediamo come la pianificazione robusta porti a forti inversioni del moto durante la movimentazione, con un conseguente spazio netto percorso y dal carrello molto più grande degli $0.2m$ teorici, richiedendo accelerazioni elevate. Come già osservato nella sezione precedente, tale aspetto diventa tanto più significativo, quanto più si riduce il tempo di azionamento ed occorrerà prestare attenzione ai possibili vincoli strutturali presenti, quando la traiettoria pianificata si estenderà oltre le posizioni iniziale e finale.

Focalizzandoci, però, sulle curve di sensitività, riportate in Fig. 3.11, osserviamo il risultato desiderato; con la pianificazione robusta, la curva risulta appiattita intorno al valore nominale della lunghezza l , i.e. il picco massimo di oscillazione residuo dopo la movimentazione resta contenuto, risentendo molto meno degli errori sul valore del parametro l , rispetto al caso non robusto.

Non vengono qui considerati i metodi analitici, perché, nel caso robusto, aumentando lo stato, il modello diventa complesso da gestire per trovare una soluzione analitica.

Tab. 3.6: Confronto tecniche con tempo di azionamento 2 [s].

Tecnica	θ Max [rad]	θ Residuo Max [rad]	Tempo di calcolo [s]
DF	0.040911	3.1938e-05	2.0064
DF Rob	0.077737	0.00014084	11.7771
bvp5c	0.040895	1.2986e-07	7.2245
bvp5c Rob	0.078864	1.4132e-06	12.2255
Shooting	0.040874	0.00031425	1.9354
Shooting Rob	0.07824	0.00085841	21.8854
Tecnica	Δy Max [m]	\dot{y} Max [m/s]	\dot{y} RMS [m/s]
DF	0.20001	0.13821	0.074173
DF Rob	0.20014	0.46536	0.1982
bvp5c	0.2	0.13818	0.074166
bvp5c Rob	0.20001	0.47403	0.19985
Shooting	0.20046	0.13831	0.074316
Shooting Rob	0.20264	0.47416	0.19947
Tecnica	\ddot{y} Max [m/s ²]	\ddot{y} RMS [m/s ²]	\ddot{y} Continua
DF	0.77165	0.28332	No
DF Rob	8.4477	2.4106	No
bvp5c	0.77133	0.27904	No
bvp5c Rob	8.19	2.3407	No
Shooting	0.77122	0.47022	No
Shooting Rob	8.1891	4.2948	No

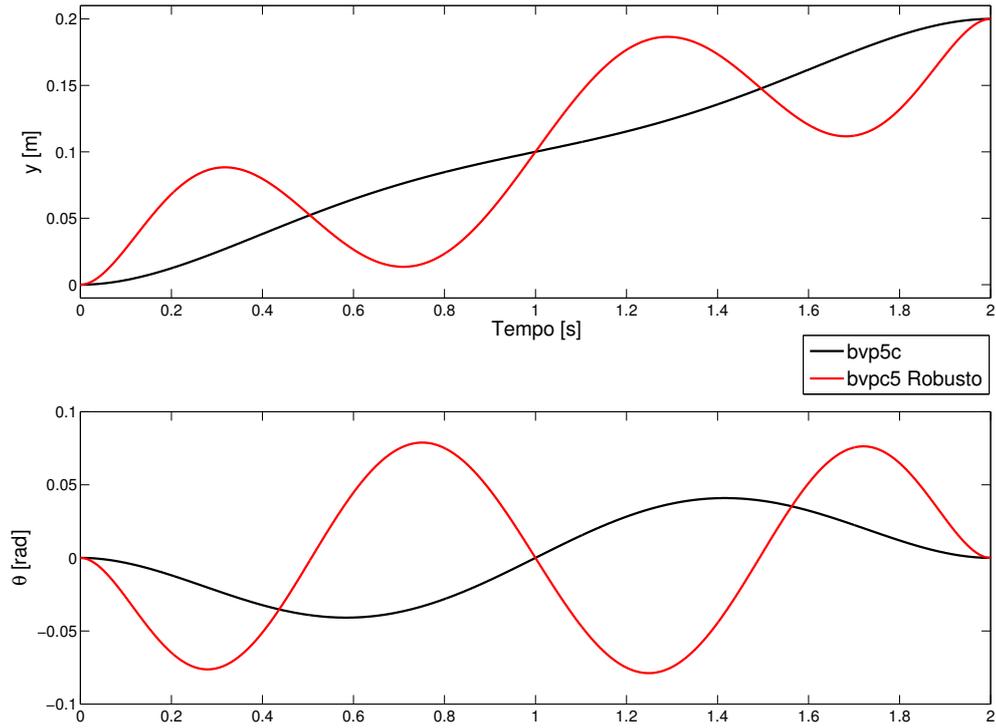


Fig. 3.10: Traiettoria del carrello y e del pendolo θ , pianificate nel caso semplice e robusto con $T_{az} = 2s$.

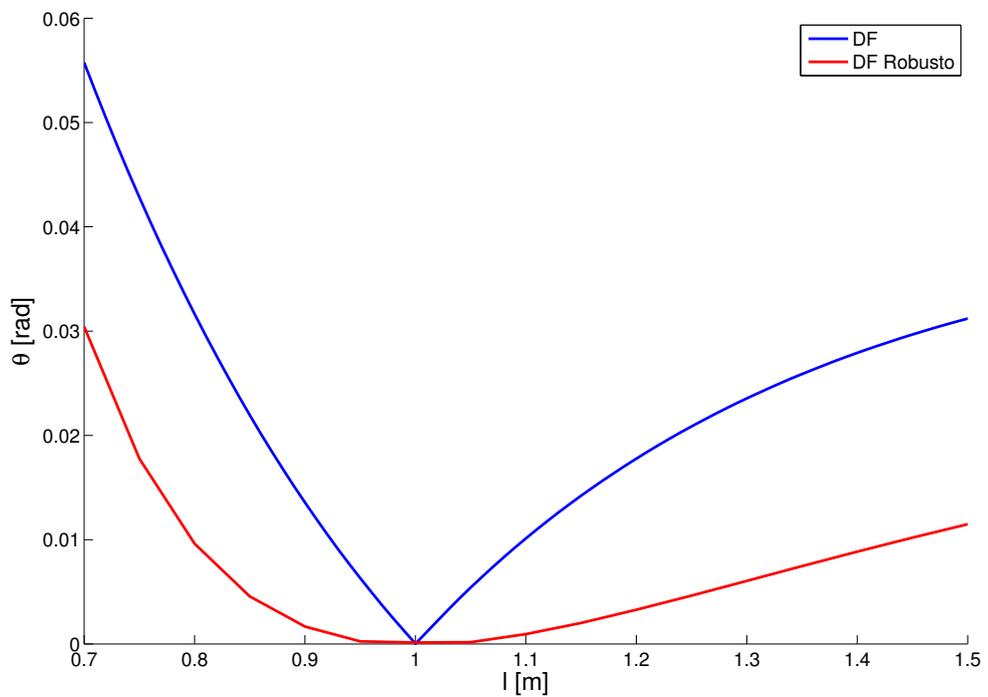


Fig. 3.11: Curve di sensitività al variare della lunghezza l , con pianificazione semplice e robusta con $T_{az} = 2s$.

3.2.4 Confronto tecniche di pianificazione robusta

Il questa sezione cercheremo di capire quale possa essere il metodo di pianificazione robusta migliore e maggiormente efficace. Le simulazioni delle traiettorie, ottenute dalla soluzione del TPBVP con diversi tempi di azionamento e considerando il modello con ingresso in accelerazione, vengono confrontate con un ZVD shaper (vedere Appendice A), calcolato sfruttando una legge di moto armonica.

Tab. 3.7: Confronto tecniche robuste.

Tecnica	$T_{az}[s]$	θ Max [rad]	θ Residuo Max [rad]	Tempo di calcolo [s]
ZVD	2.5	0.037537	6.2641e-05	0.00053131
DF Rob	2.5	0.034241	3.6151e-05	3.4804
bvp5c Rob	2.5	0.034479	4.4799e-07	11.6414
Shooting Rob	2.5	0.034336	0.00032197	33.8583
ZVD	1.5	-	-	-
DF Rob	1.5	0.30876	0.00034794	214.9263
bvp5c Rob	1.5	0.31066	2.2597e-05	12.5042
Shooting Rob	1.5	0.30798	0.00307	16.2023
Tecnica	$T_{az}[s]$	Δy Max [m]	\dot{y} Max [m/s]	\dot{y} RMS [m/s]
ZVD	2.5	0.20617	0.3149	0.086386
DF Rob	2.5	0.20005	0.18398	0.072336
bvp5c Rob	2.5	0.2	0.18841	0.072956
Shooting Rob	2.5	0.2008	0.18852	0.07303
ZVD	1.5	-	-	-
DF Rob	1.5	0.547	2.0999	0.9743
bvp5c Rob	1.5	0.55041	2.1214	0.97819
Shooting Rob	1.5	0.55082	2.1199	0.97536
Tecnica	$T_{az}[s]$	\ddot{y} Max [m/s ²]	\ddot{y} RMS [m/s ²]	\ddot{y} Continua
ZVD	2.5	1.9739	0.76442	No
DF Rob	2.5	1.93	0.53124	No
bvp5c Rob	2.5	1.8357	0.51396	No
Shooting Rob	2.5	1.8356	0.89733	No
ZVD	1.5	-	-	-
DF Rob	1.5	52.8617	15.6176	No
bvp5c Rob	1.5	51.9653	15.2007	No
Shooting Rob	1.5	51.9608	28.8509	No

Dalla Tab. 3.7, vediamo come le diverse tecniche TPBVP portino a valori molto simili. Anche nel caso robusto, il metodo di Shooting risulta il peggiore sia come picco massimo residuo, sia come accelerazione RMS. Osservando i tempi di calcolo, anche questa volta, la soluzione con le differenze finite risulta la più rapida per tempi di azionamento elevati;

tuttavia, al diminuire del T_{az} cresce enormemente il numero di iterazioni necessarie e conseguentemente il tempo computazionale, che, invece, con la funzione `bvp5c` si mantiene abbastanza costante. Quest'ultima, inoltre, presenta il picco residuo minimo.

Le curve di sensitività, riportate in Fig. 3.12 per un $T_{az} = 2.5s$, presentano un andamento molto simile tra loro, ma, focalizzandoci sull'ingrandimento in Fig. 3.13, possiamo notare come tutte le soluzioni TPBVP siano leggermente più robuste dello ZVD shaper. In particolare, il risultato migliore (i.e. la curva più bassa) è fornito dalla pianificazione robusta ottenuta con le differenze finite.

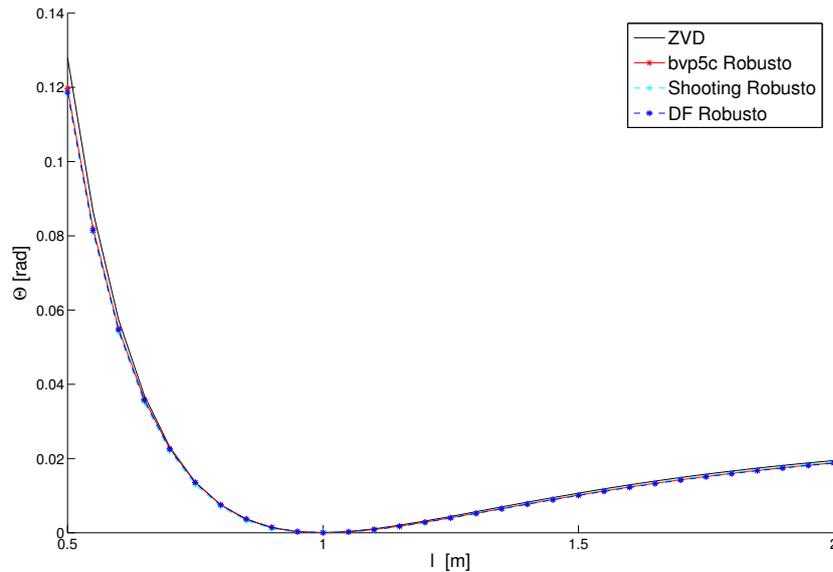


Fig. 3.12: Confronto delle curve di sensitività tra lo ZVD shaper e le tecniche TPBVP robuste, al variare della lunghezza l .

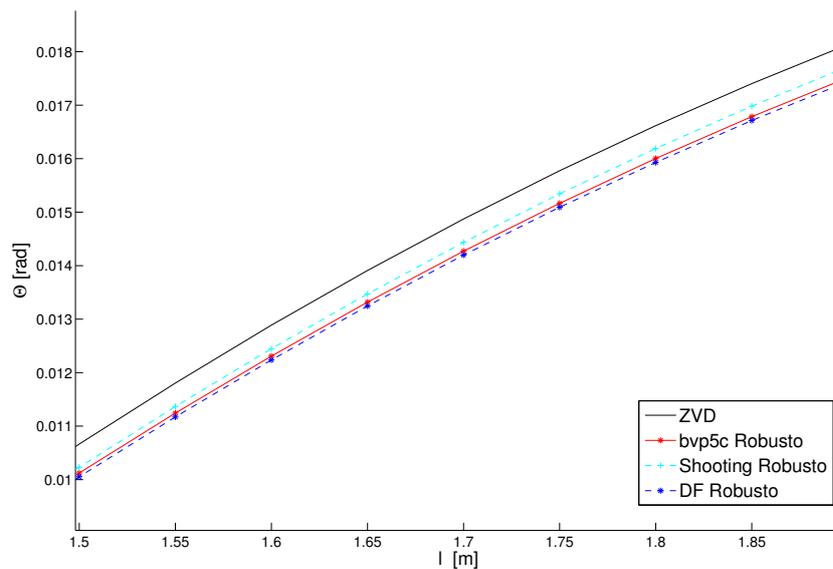


Fig. 3.13: Dettaglio delle curve di sensitività con pianificazione robusta.

Poiché lo ZVD shaper usa una sequenza di tre impulsi sfasati tra loro di metà del periodo di oscillazione, il tempo minimo di azionamento sarà:

$$T_{az} > 2 \cdot \frac{T}{2} = T \simeq 2s.$$

Questo vincolo può costituire una forte limitazione alle prestazioni del sistema; nel caso robusto, dunque, risulta ancor più evidente il vantaggio di ricorrere alla soluzione di un TPBVP, consentendo di pianificare il moto in tempi inferiori al periodo di oscillazione del sistema.

In Tab. 3.7 sono riportati i valori relativi a un $T_{az} = 1.5s$, che presentano delle accelerazioni assolutamente comparabili a quelle di una pianificazione non robusta in un $T_{az} = 0.75s$, come era stato mostrato Tab. 3.5. Viene evidenziato, pertanto, a parità di accelerazione massima richiesta, un forte aumento del tempo di movimentazione per ottenere una soluzione robusta. D'altra parte, però, possiamo confrontare le due curve di sensitività in Fig. 3.14, vedendo come si riduca notevolmente l'oscillazione residua θ del pendolo al variare di l nel caso robusto. Bisognerà, quindi, considerare sempre un trade off tra quelle che possono essere le prestazioni desiderate e la robustezza ricercata.

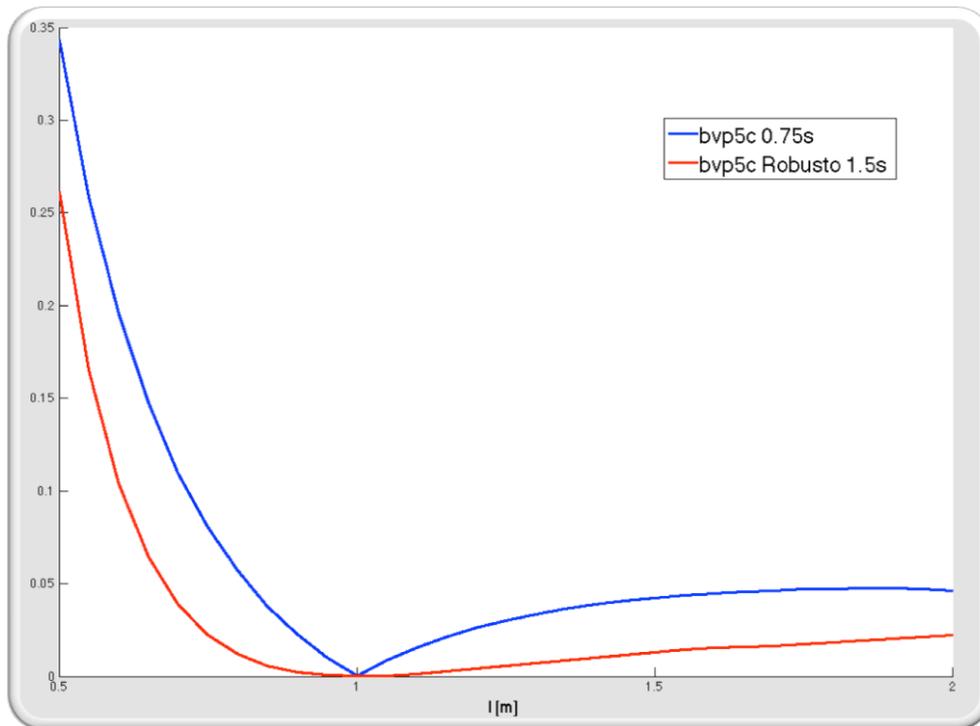


Fig. 3.14: Curve di sensitività al variare della lunghezza l , con pianificazione semplice in 0.75s e robusta in 1.5s.

In Fig. 3.15 viene riportata la traiettoria del carrello y , confrontando la soluzione pianificata con lo ZVD e quella ottenuta con il bvp5c robusto. L'input shaping, per come viene definito, non ha inversioni del moto; vediamo, invece, che otteniamo delle leggere inversioni del moto risolvendo il TPBVP già per una traiettoria pianificata in un $T_{az} = 2.5s$. Analogamente a quanto già visto nelle sezioni precedenti, tale effetto viene accentuato riducendo il tempo di azionamento, come possiamo vedere in Fig. 3.16, tanto da uscire dall'intervallo definito dalle posizioni iniziale e finale. Tuttavia, prestando attenzione a non uscire dallo spazio di lavoro od urtare altri oggetti, queste inversioni permettono di scendere a T_{az} inferiori al periodo di oscillazione T .

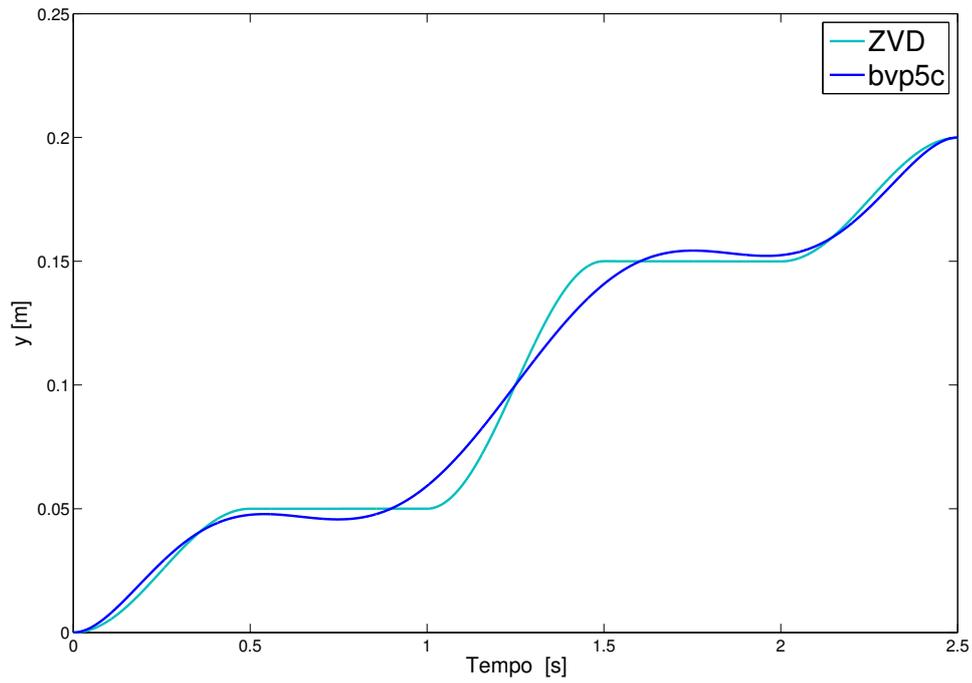


Fig. 3.15: Traiettoria del carrello y pianificata con uno ZVD e con bvp5c robusto in un $T_{az} = 2.5s$.

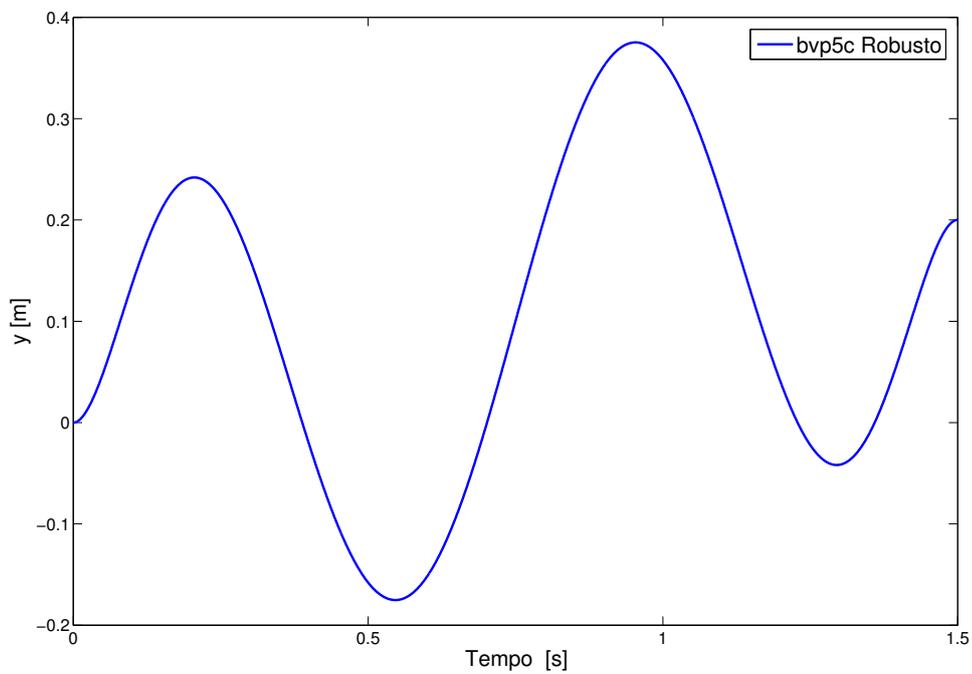


Fig. 3.16: Traiettoria del carrello y pianificata con bvp5c robusto in un $T_{az} = 1.5s$.

3.2.5 Simulazioni modello con jerk

Valutiamo, ora, delle simulazioni che implementino il modello con jerk, come visto nella Eq. (3.1.11). In questo modo, saremo in grado di considerare anche la dinamica del sistema di attuazione ed evitare la presenza di discontinuità in accelerazione; avendo, infatti, \ddot{y} nello stato, potremo imporre delle condizioni iniziali e finali nulle. Tuttavia, la maggiore complessità del modello, crea diversi problemi computazionali (e.g. il metodo dello Shooting non riesce a giungere a convergenza, mentre la funzione `bvp5c` arriva a matrici singolari), ai quali risponde bene ed in modo costante solo la tecnica delle differenze finite.

Osserviamo, innanzitutto, come, aggiungendo il jerk al modello, si riesca effettivamente a pianificare un'accelerazione continua, come mostrato in Fig. 3.17, con tutti i vantaggi che ne conseguono a livello di dolcezza del moto e di inseguimento del riferimento della traiettoria.

In Tab. 3.5, viene presentato un confronto delle prestazioni tra il modello in accelerazione e quello con il jerk, andando a pianificare la traiettoria con le differenze finite e considerando sia il caso semplice, sia quello robusto. Possiamo, pertanto, osservare un miglioramento in termini di accelerazione massima richiesta, mentre i valori RMS di velocità ed accelerazione restano sostanzialmente invariati, con un conseguente leggero peggioramento della velocità massima del carrello. Anche il picco massimo di oscillazione del pendolo presenta un leggero incremento, rispetto al modello in accelerazione; al contrario, però, il picco residuo viene ridotto, soprattutto nella pianificazione robusta. I tempi di calcolo, infine, subiscono un inevitabile forte incremento, dovuto alla maggiore complessità del modello.

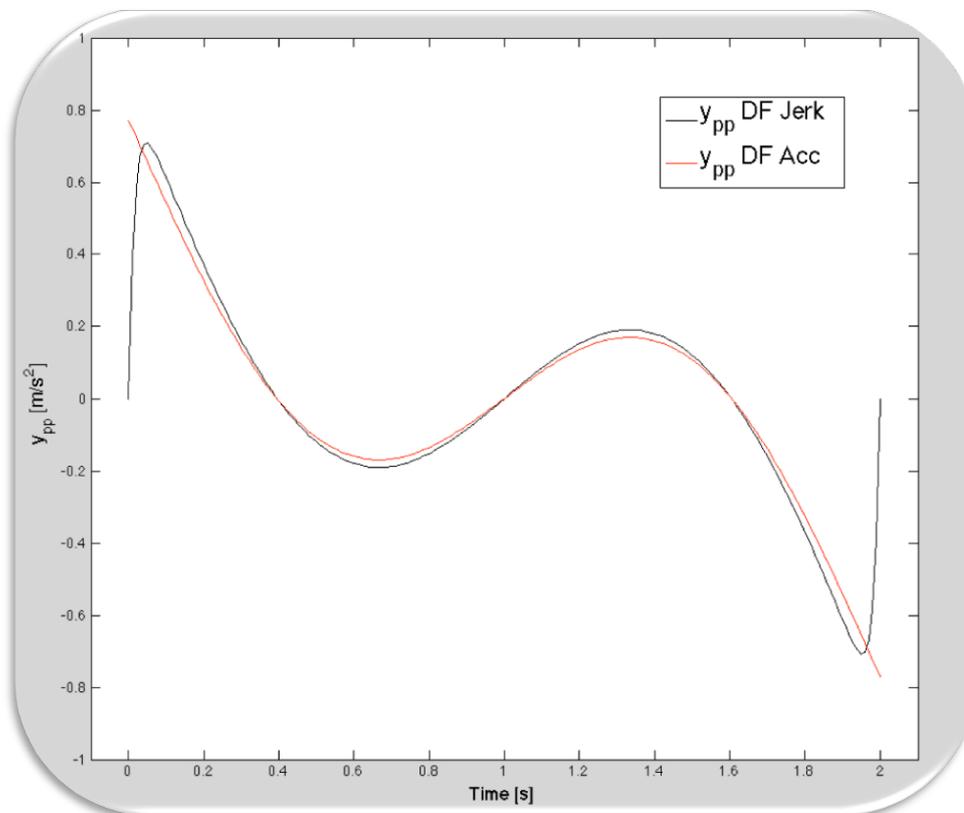


Fig. 3.17: Accelerazione del carrello relativamente al modello con jerk e a quello in accelerazione.

Tab. 3.8: Confronto tecniche con tempo di azionamento 2 [s].

Tecnica	T_{az} [s]	θ Max [rad]	θ Residuo Max [rad]	Tempo di calcolo [s]
DF	2	0.040911	3.1938e-05	2.0064
DF Jerk	2	0.042083	1.9377e-05	2.6277
DF Rob	2	0.077737	0.00014084	11.7771
DF Rob Jerk	2	0.082201	3.7046e-09	37.2591
DF	1.5	0.070654	3.2122e-05	2.544
DF Jerk	1.5	0.073396	1.3719e-05	3.3311
DF Rob	1.5	0.30876	0.00034794	214.9263
DF Rob Jerk	1.5	0.32704	1.3765e-09	950.6056
Tecnica	T_{az} [s]	Δy Max [m]	\dot{y} Max [m/s]	\dot{y} RMS [m/s]
DF	2	0.20001	0.13821	0.074173
DF Jerk	2	0.2	0.14284	0.07497
DF Rob	2	0.20014	0.46536	0.1982
DF Rob Jerk	2	0.2	0.49236	0.20811
DF	1.5	0.20003	0.28137	0.12385
DF Jerk	1.5	0.2	0.29694	0.12864
DF Rob	1.5	0.547	2.0999	0.9743
DF Rob Jerk	1.5	0.57862	2.2552	1.0346
Tecnica	T_{az} [s]	\ddot{y} Max [m/s ²]	\ddot{y} RMS [m/s ²]	\ddot{y} Continua
DF	2	0.77165	0.28332	No
DF Jerk	2	0.7082	0.28723	Si
DF Rob	2	8.4477	2.4106	No
DF Rob Jerk	2	6.8871	2.4159	Si
DF	1.5	2.8198	1.0214	No
DF Jerk	1.5	2.3982	1.045	Si
DF Rob	1.5	52.8617	15.6176	No
DF Rob Jerk	1.5	39.4534	15.7657	Si

Nelle Fig. 3.18 e 3.19, viene mostrata, a titolo di esempio, la risposta del sistema modellato col jerk, simulata tramite Simulink, ad una traiettoria pianificata con il metodo delle differenze finite in un tempo di azionamento $T_{az} = 2s$. Occorre osservare che l'accelerazione (curva in blu nella figura) presenta al termine della movimentazione una leggera sovraelongazione (i.e. invece di arrivare con accelerazione nulla al tempo $t = 2$, ha un valore positivo e poi decade lentamente a zero), che viene riportata ingrandita in Fig. 3.20.

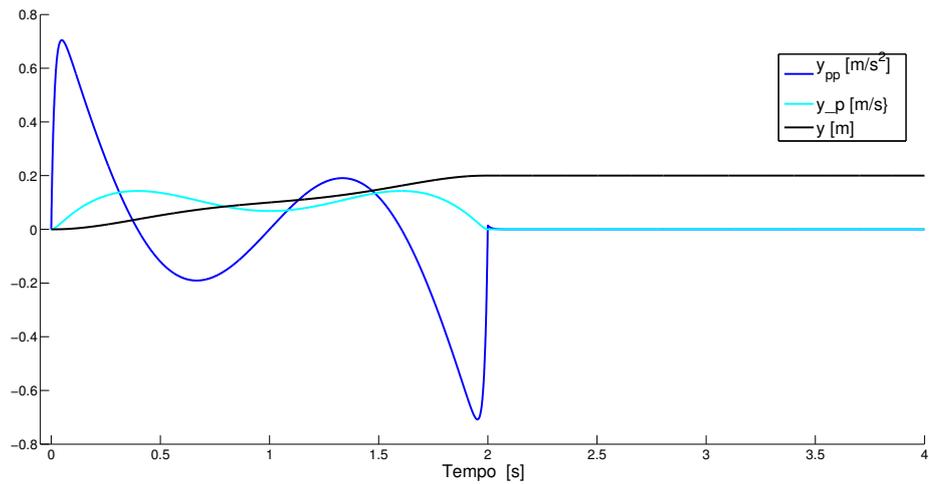


Fig. 3.18: Simulazione di una pianificazione del moto in $T_{az} = 2s$, ottenuta con il modello con jerk e la tecnica delle differenze finite: \ddot{y} , \dot{y} e y .

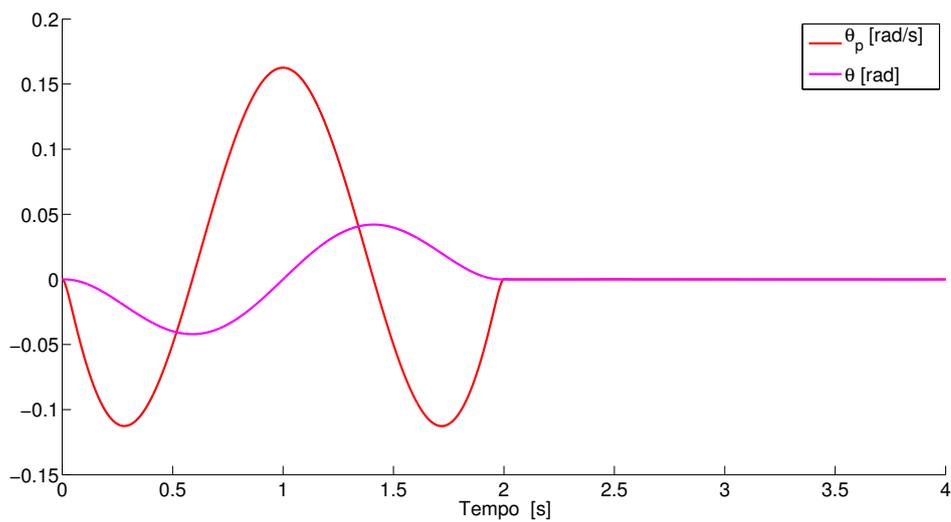


Fig. 3.19: Simulazione di una pianificazione del moto in $T_{az} = 2s$, ottenuta con il modello con jerk e la tecnica delle differenze finite: $\dot{\theta}$ e θ .

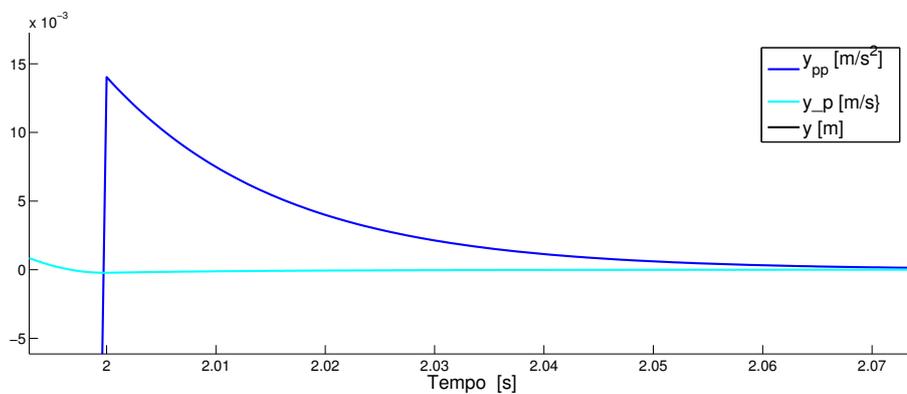


Fig. 3.20: Particolare della sovraelongazione dell'accelerazione finale.

3.2.6 Considerazioni

In questa sezione andremo a riassumere brevemente i principali risultati delle simulazioni e le considerazioni che se ne possono trarre.

- Convieni considerare un ingresso in accelerazione, rispetto ad un ingresso in forza, perché permette di semplificare il modello dinamico del sistema, riducendo il tempo di calcolo richiesto per trovare la soluzione del TPBVP. Inoltre, l'approccio in accelerazione risulta leggermente più robusto alle variazioni parametriche e più efficace dal punto di vista dell'utilizzo in sistemi di controllo reali.
- I diversi metodi TPBVP presentano prestazioni molto simili tra loro e migliori rispetto allo ZV, in termini di vibrazioni, guardando l'angolo massimo di oscillazione e quello residuo al termine della movimentazione, e di sensitività.
- Le traiettorie ottenute tramite TPBVP permettono di scendere a tempi di azionamento inferiori a metà del periodo di vibrazione del sistema, cosa che, invece, costituisce un forte vincolo alle prestazioni dello ZV. Tale vantaggio diventa ancor più significativo se si considerano soluzioni robuste alle variazioni parametriche. Nel caso dell'input shaping infatti, l'aumento di robustezza viene ottenuto a discapito di un crescente ritardo temporale, mentre nel TPBVP si sfruttano le inversioni del moto, che determinano una maggiore accelerazione richiesta all'azionamento.
- Il vantaggio di aumentare il modello del sistema, usando delle equazioni di sensitività per far fronte a possibili variazioni parametriche, è stato verificato in simulazione, ottenendo delle traiettorie TPBVP robuste rispetto alla lunghezza del pendolo. La pianificazione robusta può, dunque, essere molto utile in presenza di un sistema perturbato o di fronte all'impossibilità di ricavare un modello esatto. Tuttavia, è necessario sottolineare che, nonostante il picco massimo di oscillazione residuo resti molto piccolo, si ha un peggioramento delle prestazioni, soprattutto in termini di accelerazioni richieste.
- Sia nella pianificazione semplice, che in quella robusta, la traiettoria ricavata con la tecnica `bvp5c` risulta, in generale, la più efficace per prestazioni ottenute, mentre le differenze finite permettono di arrivare alla soluzione più robusta.
- Utilizzando il modello con il jerk si riesce a pianificare un'accelerazione continua, a vantaggio della dolcezza del moto e del corretto inseguimento del riferimento della traiettoria. Tuttavia, la maggiore complessità del modello crea diversi problemi di calcolo e di convergenza, ai quali risponde bene ed in modo affidabile solo la tecnica delle differenze finite.

3.3 Setup sperimentale

Per validare le soluzioni di pianificazione studiate, è necessario disporre di un sistema fisico su cui testarle sperimentalmente. Il setup utilizzato in laboratorio è costituito da quattro elementi principali:

- Un robot Adept QuattroTM s650H, il cui schema viene mostrato in Fig. 3.21. Si tratta di un robot industriale parallelo (o “delta robot”), progettato per applicazioni ad elevata velocità in impacchettamento, assemblaggio, produzione e spostamento di materiale. Il robot presenta quattro assi e quattro motori identici, che permettono di effettuare movimenti nelle direzioni X, Y e Z, nonché la rotazione Θ^2 . La comunicazione con l'esterno del robot è gestita mediante il proprio controller real-time Adept SmartControllerTM CX³, mostrato sempre in Fig. 3.21;

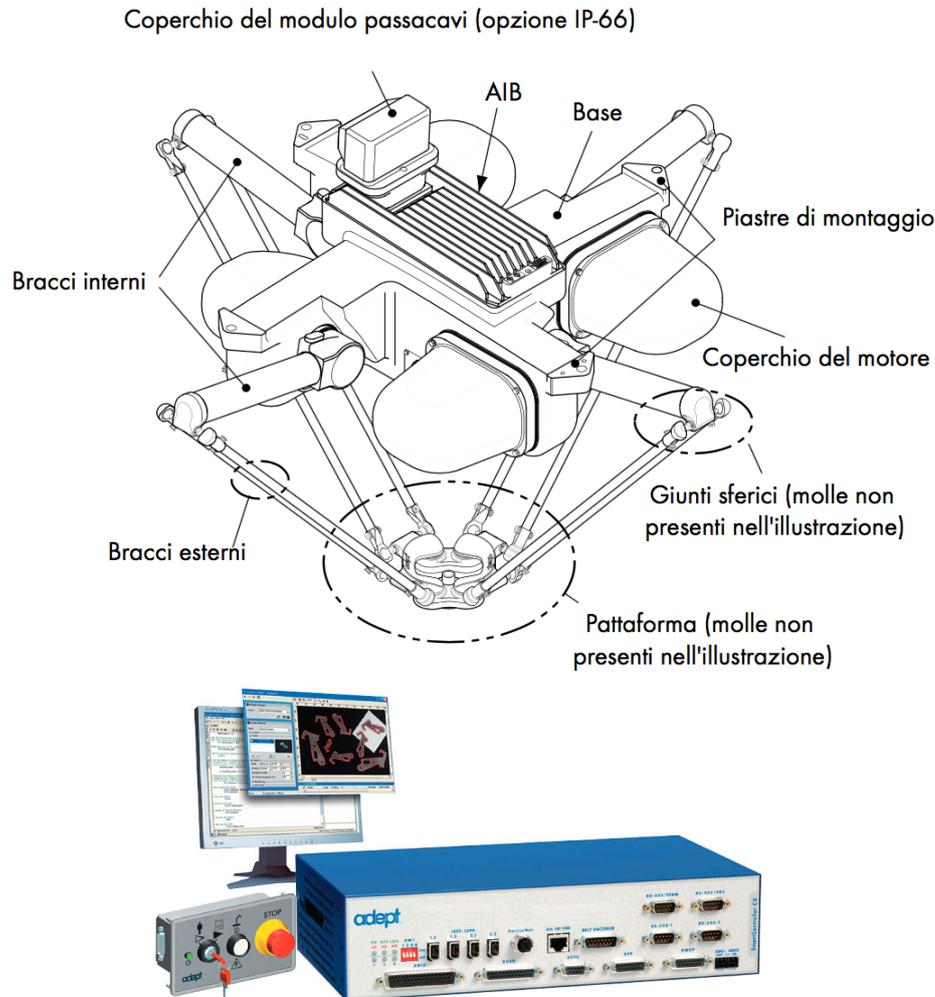


Fig. 3.21: Schema del robot Adept QuattroTM s650H e in basso dettaglio del controller real-time Adept SmartControllerTM CX.

- Un target PC con un sistema operativo real-time xPC Target, che ha il compito di garantire le comunicazioni tra tutti i componenti della configurazione sperimentale;

²Per la movimentazione nello spazio di lavoro sarebbero sufficienti tre catene cinematiche, il quarto braccio viene aggiunto per permettere la rotazione, ottenuta andando a deformare un polso a forma di quadrilatero. Questo espediente, a differenza di quanto fanno altri costruttori che per l'orientazione aggiungono un tubicino telescopico, consente di avere quattro motori in spinta durante gli spostamenti con prestazioni molto elevate. Ai fini della validazione sperimentale delle tecniche studiate nella tesi, tuttavia, saranno sufficienti spostamenti nella sola direzione X.

³Si osservi come questo controller, costituito da un controllore PID e un feedforward, non è modificabile per introdurre azioni di controllo delle oscillazioni.

- Un sistema di visione (Vision System), composto da due telecamere FireWire⁴ con sensore CCDBaslerTM, come quella in Fig. 3.22, ed un software dedicato per la visualizzazione ed il calcolo degli angoli di deviazione del filo. Questo sistema si basa sulla libreria open source di computer vision chiamata OpenCV;



Fig. 3.22: Videocamera utilizzata nel setup sperimentale.

- Un PC host, nel quale viene eseguito il programma Matlab per la pianificazione della traiettoria che dovrà essere riprodotta dal robot. Inoltre, in questo terminale è installato il software di controllo dell'Adept Quattro.

Le interconnessioni dei diversi dispositivi sono illustrate in Fig. 3.23.

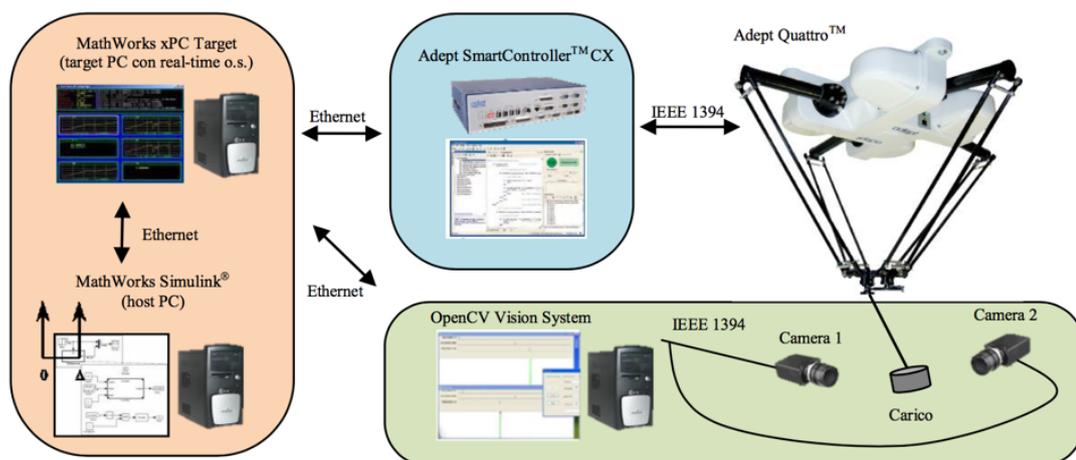


Fig. 3.23: Schema del setup sperimentale.

⁴Osserviamo che nel caso considerato del carrello a 2 gdl, visto che l'oscillazione della massa sospesa avviene solo nel piano XZ, per misurare l'angolo di oscillazione θ sarà sufficiente utilizzare una sola videocamera.

Per ottenere una configurazione analoga al modello studiato, presentato in Fig. 3.1, alla piattaforma del manipolatore viene collegato, mediante un cavo in nylon di lunghezza prestabilita, un carico di massa nota⁵. L'angolo di oscillazione del carico è ottenuto attraverso un sistema di visione, che va ad osservare il filo e non direttamente la massa sospesa. Per effettuare tale misura, la telecamera viene fissata al telaio del robot, ortogonalmente rispetto all'asse X del moto; si vedrà, dunque, la proiezione del filo sul piano XZ. Inoltre, per minimizzare gli errori di lettura del sistema di visione, si è cercato di aumentare il più possibile il contrasto tra il filo e lo sfondo. A tal fine, dietro al cavo, colorato di nero, è stato posto un monitor, per proiettare un'immagine di colore rosso uniforme e luminoso, come mostrato in Fig. 3.22. I problemi derivanti da errori di elaborazione dell'immagine risultano, così, sensibilmente ridotti.



Fig. 3.24: Vista dalla telecamera, con particolare del pendolo e del monitor.

Le immagini acquisite sono trasmesse via cavo FireWire (standard IEEE 1394) al PC nel quale è installato il software di gestione ed elaborazione immagine. Il collo di bottiglia del sistema di visione è insito nella velocità di acquisizione delle immagini (circa $50Hz$). I valori di angoli calcolati sono poi trasmessi mediante protocollo UDP in tempo reale al target PC.

La comunicazione tra tutti i diversi componenti è gestita tramite una connessione Ethernet. La creazione del programma di moto del robot avviene interamente nel PC host, in cui viene eseguito un programma Matlab per la creazione dei dati, che andranno poi ad interagire con il simulatore in Simulink, in cui sono implementati gli algoritmi per la comunicazione e gestione dei flussi di dati in ingresso ed in uscita.

⁵Il carico massimo che può movimentare l'Adept è di $6[kg]$. Tuttavia, questo non costituisce un vincolo alle prove sperimentali, perché considerando un modello in accelerazione si perde la dipendenza dalle masse nel modello stesso, dove compare, invece, come parametro, la sola lunghezza della fune.

Per gestire contemporaneamente il moto del robot, la visione della telecamera e il controllo del riferimento da applicare al manipolatore, vi sono tre task real-time, le cui interazioni vengono presentate in Fig. 3.25 e che vengono eseguiti contemporaneamente nello SmartControllerTM CX:

1. communication task,
2. control task,
3. vision task.

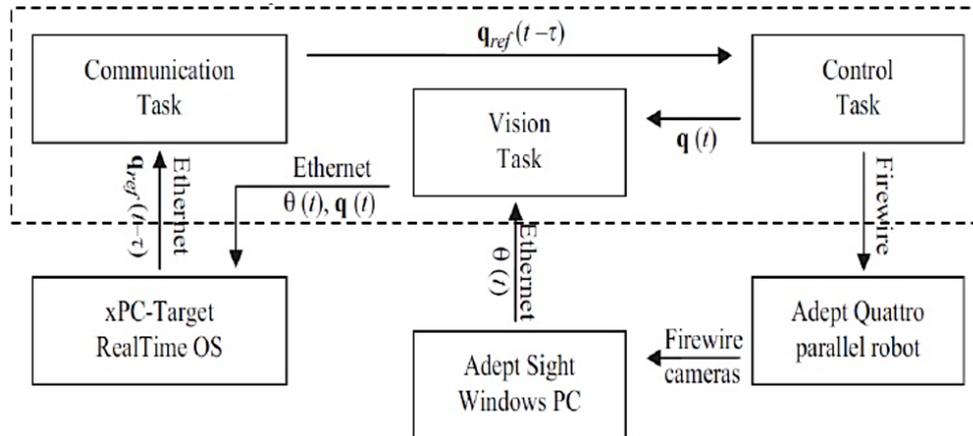


Fig. 3.25: Schema delle interazioni tra i tre task real-time.

Il task a priorità maggiore è quello relativo alla comunicazione, che ha il compito di gestire le comunicazioni del target PC, basate su un protocollo UDP. Mentre è attivo tale task, il robot è pronto ad accettare l'ultimo riferimento di posizione generato.

Con priorità leggermente inferiore, troviamo il task relativo al controllo, che ha la funzione di interpolare i riferimenti di posizione provenienti dal communication task e comandare i vari attuatori del robot. In tale processo si introduce un ritardo pari a circa 30 ms. L'ultima informazione fornita al task di controllo è la posizione corrente; possono, dunque, insorgere problematiche sull'interpolazione della traiettoria, che portano ad un moto discontinuo, nel caso in cui venga raggiunta la posizione desiderata prima che la posizione successiva da inseguire sia stata ricevuta.

Infine, il task relativo alla visione fornisce i valori degli angoli acquisiti dalla telecamera. Tali dati vengono elaborati dal software di gestione ed elaborazione immagine (testDLL) e sono trasmessi al target PC per mezzo di pacchetti UDP. Osserviamo che occorre prestare attenzione a due problemi che presenta il sistema di visione:

- Presenza di un offset nella misura della telecamera per posizioni diverse da quella di home. Per un corretto funzionamento della telecamera, ogni volta che viene accesa bisogna effettuare una calibrazione con il carico fermo nella posizione di home, in modo da definire nulle le eventuali componenti angolari misurate nel caso in cui il cavo sia perfettamente verticale. In teoria, in qualsiasi altra posizione dello spazio di lavoro, ogni misura con cavo perfettamente verticale dovrebbe essere nulla. Tuttavia, si evince la presenza di un offset crescente all'aumentare della distanza dal punto di home.

Si può, allora, ricorrere ad una lookup table, che richiede in ingresso dei punti⁶, ovvero valori dell'offset in diverse posizioni, e genera un'interpolazione che consente di ottenere automaticamente il valore dell'offset in ogni punto del piano di lavoro. Gli offset calcolati, però, non rimangono costanti, ma variano al mutare delle condizioni ambientali, in particolare, della luce. Risulta necessario, pertanto, per ottenere buoni risultati, rimisurare di volta in volta tali offset, quando si hanno delle variazioni significative della luce.

- Presenza di rumori nella misura, generati essenzialmente dalle vibrazioni del cavo. Si può intervenire filtrando il segnale proveniente dalla telecamera, in modo da ottenere la sola misura dell'angolo priva dei principali disturbi. Nel nostro caso, per eliminare significativamente il rumore presente nella misura, è stato sufficiente adottare un filtro a media mobile. Invece, se si conosce la frequenza esatta del disturbo, che si vuole eliminare, si può sfruttare, ad esempio, un filtro notch opportunamente tarato per ottenere un effetto più incisivo.

L'intero processo, includendo anche l'acquisizione, l'elaborazione e la trasmissione dei dati, introduce un ritardo complessivo di circa 35ms.

Terminata la simulazione, tutti i pacchetti di dati ricevuti dal sistema di visione e dal controller del robot sono scaricati sul PC host, in cui potranno poi essere elaborati.

3.4 Risultati sperimentali

In questa sezione vengono riportati ed analizzati i risultati ottenuti sperimentalmente, riproponendo alcune prove e confronti visti in simulazione.

Si è scelto, dunque, di impostare per il riferimento uno spostamento lungo l'asse X pari a $0.2m$, da percorrere in diversi tempi di azionamento e con le varie traiettorie ottenute dalla soluzione del TPBVP.

Per tutte le prove, inoltre, si fa partire l'azionamento dopo un tempo di $3.5s$; ciò permette di verificare le condizioni iniziali di oscillazione del carico, che, data la notevole lunghezza del cavo, non risultano mai perfettamente nulle a causa di una difficoltà pratica ad arrestare completamente la vibrazione all'inizio di ogni prova.

3.4.1 Determinazione dei parametri del sistema

Un primo test è stato volto a determinare i valori delle principali grandezze che caratterizzano il sistema: frequenza naturale di oscillazione della massa sospesa e coefficiente di smorzamento. In particolare, volevamo verificare che lo smorzamento fosse molto piccolo e che la lunghezza del cavo del pendolo fosse effettivamente quella nominale, ottenendone una stima a partire dalla conoscenza della pulsazione naturale, sapendo che vale la relazione:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3.4.1)$$

Il sistema viene, dunque, lasciato oscillare in evoluzione libera per un tempo $t = 24s$, come mostrato in Fig. 3.26, per ricavare il valore di due massimi relativi consecutivi.

⁶Nel nostro caso, visto che lo spazio di lavoro considerato era molto limitato, sono stati sufficienti tre punti per costruire una lookup table soddisfacente, che permettesse di eliminare gli offset dalla misura degli angoli di oscillazione.

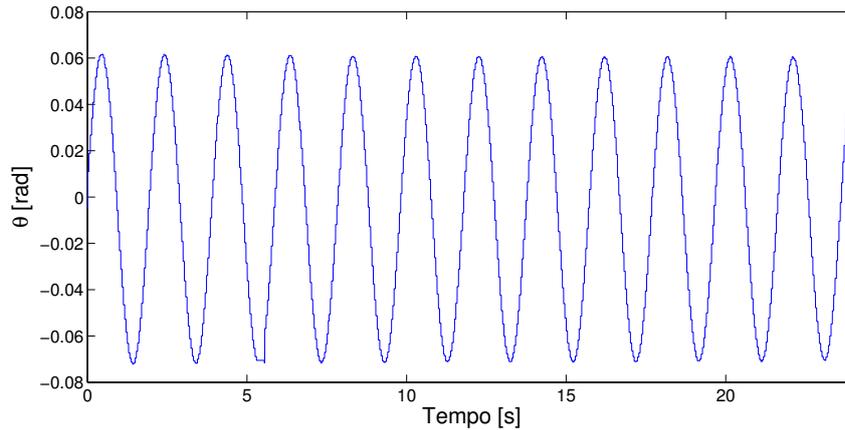


Fig. 3.26: Angolo di oscillazione osservato in evoluzione libera.

Supponendo di avere il primo massimo relativo all'istante t_1 , allora il secondo si avrà al tempo:

$$t_2 = t_1 + \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.4.2)$$

Il logaritmo del rapporto dei valori assunti agli istanti t_1 e t_2 , detto decremento logaritmico, è esprimibile come:

$$\ln \left(\frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} \right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.4.3)$$

dove $\theta(t)$ è la funzione che descrive la vibrazione. Tuttavia, per smorzamenti ridotti, il termine $\sqrt{1 - \xi^2}$ può essere confuso con l'unità. In questo modo il calcolo del fattore di smorzamento viscoso si riduce alla semplice relazione:

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} \right) \quad (3.4.4)$$

La misura del valore del decremento logaritmico semplice (i.e. del rapporto delle ampiezze delle vibrazioni in corrispondenza di due massimi successivi) spesso è affetta, nei sistemi con poco smorzamento, da una notevole imprecisione. Infatti, se il sistema è poco smorzato, le ampiezze delle vibrazioni in corrispondenza di due massimi successivi sono molto simili tra loro e gli errori che si commettono, inevitabilmente, quando si vanno ad effettuare le misure, possono influenzare pesantemente il risultato. In questo caso, però, è sufficiente considerare un massimo ad un istante t_1 ed il secondo in corrispondenza dell'istante t_n , distanziato dal primo di n periodi. Maggiore sarà n , minore sarà l'errore commesso sulla valutazione dello smorzamento.

Otteniamo, pertanto, la relazione:

$$\xi = \frac{1}{2\pi n} \ln \left(\frac{\theta(t_1)}{\theta(t_n)} \right) \quad (3.4.5)$$

Mentre la pulsazione naturale è data da:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi n}{(t_n - t_1)} \quad (3.4.6)$$

In base ai dati raccolti, applicando le Eq. 3.4.5 e 3.4.6, otteniamo:

$$\xi = 0.000237$$

$$\omega_n = 3.192[\text{rad/s}]$$

Invertendo l'Eq. 3.4.1, risulta una lunghezza:

$$l = \frac{g}{\omega_n^2} = 0.9624[\text{m}]$$

Trovata, dunque, la lunghezza del pendolo, possiamo procedere testando le diverse traiettorie pianificate.

3.4.2 Test pianificazione TPBVP

Testando le diverse traiettorie ottenute con i metodi di soluzione del TPBVP, esposti precedentemente, osserviamo un andamento perfettamente analogo delle oscillazioni residue, che, come visto in simulazione, risultano molto piccole. Per verificare la validità delle traiettorie ottime trovate nel minimizzare le vibrazioni, le movimentazioni TPBVP sono state confrontate anche con le risposte ottenute usando la tecnica dell'input shaping. In Fig. 3.27 viene riportato un confronto delle risposte del sistema ad una traiettoria pianificata in un tempo $T_{az} = 1.5s$. Nella figura sono state sovrapposte le risposte ottenute con soluzioni del TPBVP tramite differenze finite e con la collocazione polinomiale e con input shaping, sfruttando una legge armonica e una polinomiale di terzo grado. Possiamo notare come, effettivamente, l'oscillazione residua sia molto ridotta e i risultati siano molto vicini. Comunque, dal particolare in Fig. 3.28, possiamo vedere come sia il picco massimo di oscillazione, sia la vibrazione residua al termine della movimentazione siano inferiori per le soluzioni TPBVP.

La Fig. 3.29 mostra, invece, un confronto tra soluzione bvp5c e ZV con legge armonica per un tempo di azionamento di 1.1s. In questo caso, come avevamo visto anche in simulazione, la soluzione TPBVP porta ad un picco di oscillazione maggiore, rispetto allo ZV, durante la movimentazione, dovuto proprio alle inversioni del moto nella traiettoria del carrello (i.e. della piattaforma del robot y_{robot}). Questa, tuttavia, è già una condizione limite per l'input shaping, essendo vicini al vincolo temporale inferiore, costituito da metà del periodo di oscillazione del sistema, e vediamo come al robot vengano richieste delle accelerazioni molto elevate dallo ZV, mentre il bvp5c presenta ancora accelerazioni contenute.

L'oscillazione residua, inoltre, è leggermente inferiore nel caso del bvp5c, anche se non nulla. La presenza di una vibrazione residua, però, è in gran parte imputabile ai problemi di comunicazione ed inseguimento. In Fig. 3.30 si ha un confronto tra posizione comandata, riferimento e posizione effettiva del robot. Nonostante il riferimento di posizione sia molto vicino a quello comandato, si ha già un primo ritardo e, soprattutto, si hanno dei buchi di comunicazione, in cui viene tenuto costante il riferimento di posizione con una inevitabile distorsione della traiettoria. Pertanto, la posizione effettivamente controllata del robot presenta un forte ritardo e una pendenza, dunque velocità, diversa rispetto alla traiettoria ottima pianificata.

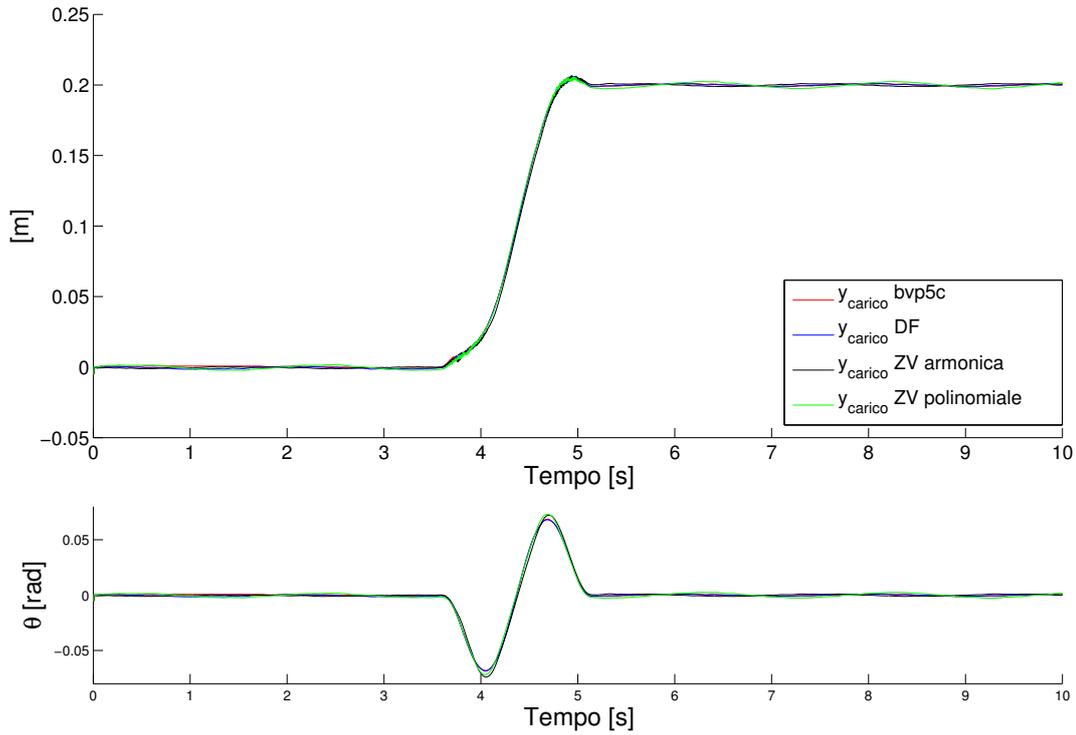


Fig. 3.27: Confronto delle risposte del sistema ad una traiettoria pianificata in un tempo $T_{az} = 1.5s$ con soluzioni TPBVP e ZV.

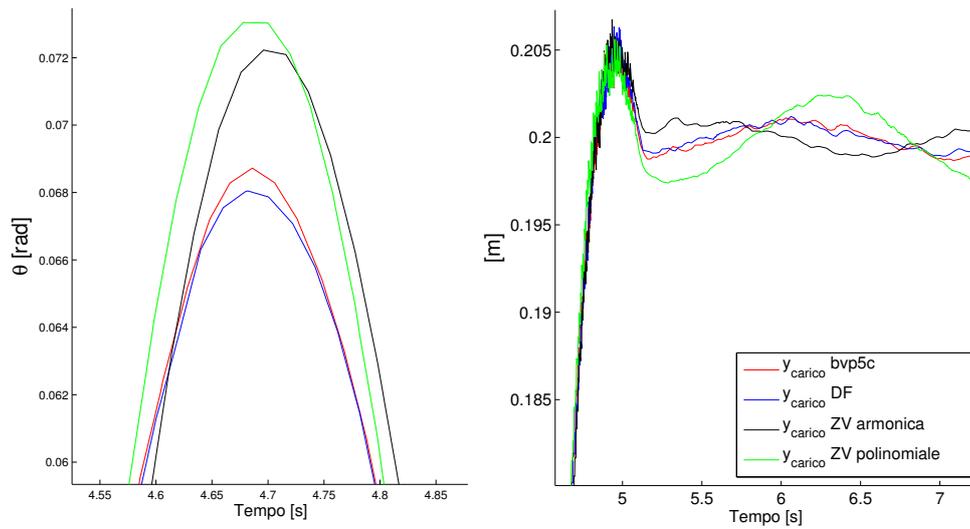


Fig. 3.28: Particolare del picco di oscillazione durante la movimentazione (a sinistra) e dell'oscillazione residua (a destra) per una traiettoria pianificata in un $T_{az} = 1.5s$.

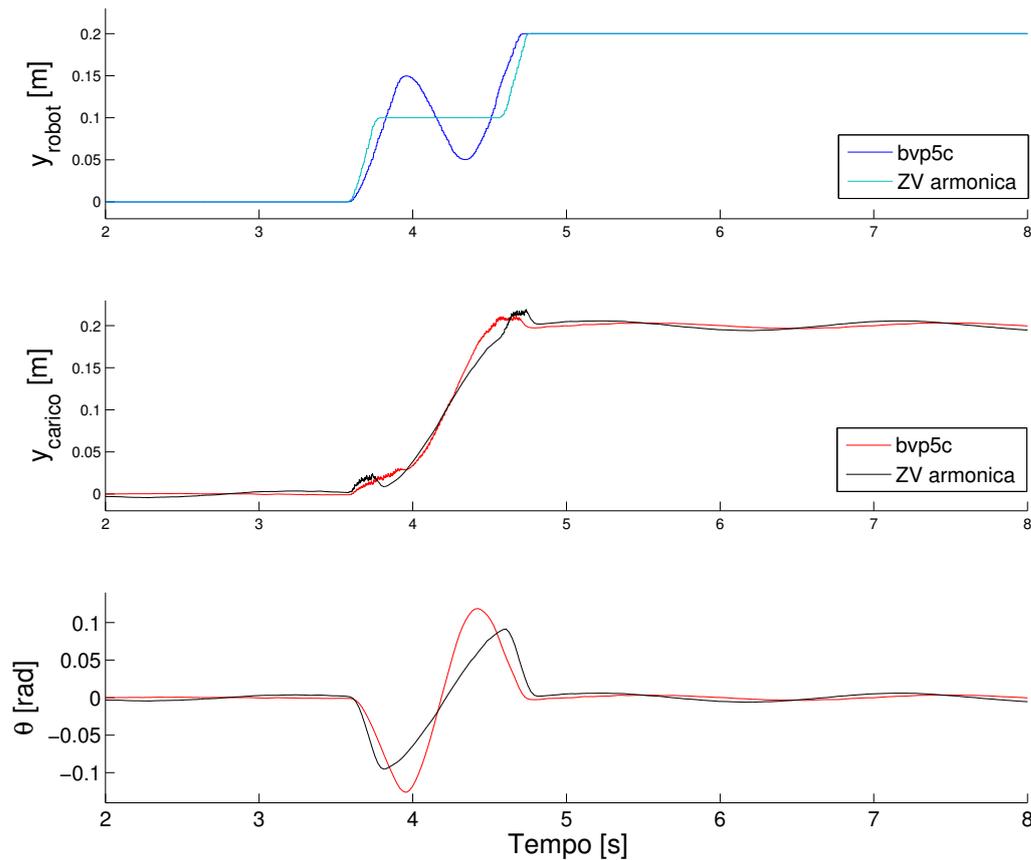


Fig. 3.29: Confronto delle risposte del sistema ad una traiettoria pianificata in un tempo $T_{az} = 1.1s$ con tecnica bvp5c e con ZV con legge armonica.

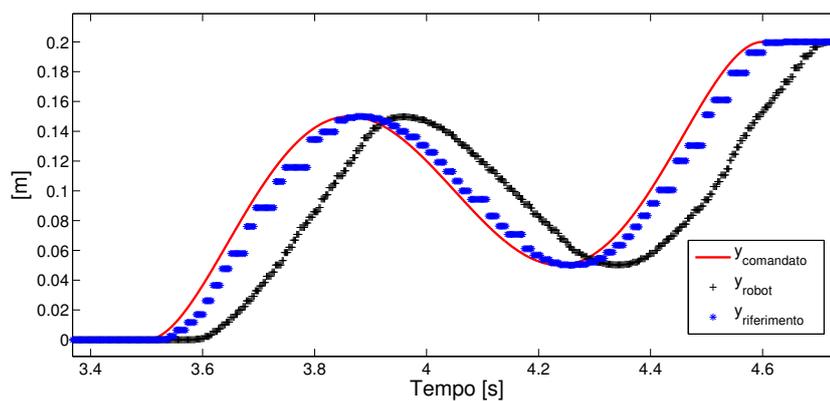


Fig. 3.30: Traiettoria pianificata con la tecnica bvp5c in un $T_{az} = 1.1s$. Confronto tra posizione comandata, riferimento e posizione effettiva del robot.

Questa differenza, tra la traiettoria comandata e quella effettuata dal robot, è da imputarsi anche alla pianificazione con il modello con ingresso in accelerazione, che va ad imporre delle accelerazioni discontinue, che non possono essere seguite dal robot. Per attenuare tale problema, possiamo adottare, allora, il modello con il jerk, che prende in considerazione la banda passante del sistema ed avendo accelerazioni continue migliora l'inseguimento della posizione.

Sperimentalmente abbiamo visto che il robot presenta un tempo di salita di circa $0.031s$. La banda passante del sistema si può calcolare come:

$$B_p = \frac{0.35}{T_s} \simeq 11[Hz]$$

Tale valore viene considerato per impostare il filtro in ingresso al sistema, come nello schema in Fig. 3.2.

In Fig. 3.31 possiamo vedere un esempio di risposta del sistema ad una traiettoria pianificata utilizzando il modello con il jerk nello stato.

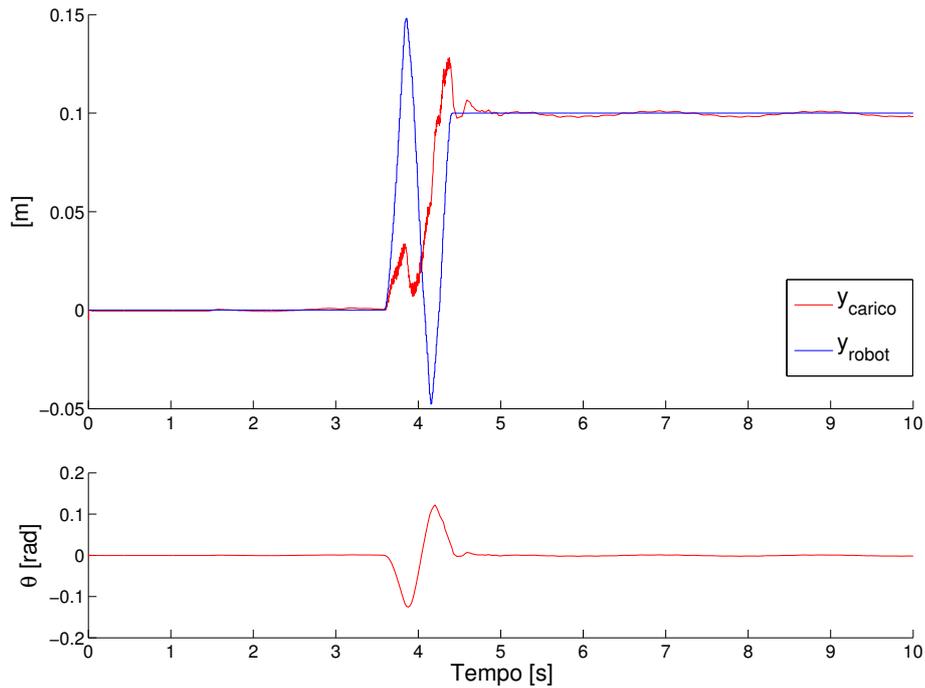


Fig. 3.31: Traiettoria pianificata con le differenze finite in un $T_{az} = 0.75s$ utilizzando il modello con jerk.

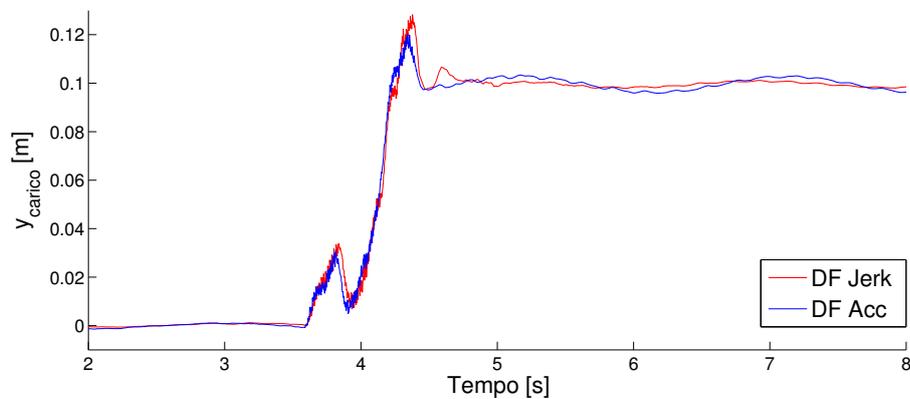


Fig. 3.32: Confronto tra traiettoria pianificata con il modello con ingresso in accelerazione e quello con il jerk nello stato in un $T_{az} = 0.75s$.

In particolare, dal confronto con la movimentazione ottenuta, a parità di tempo di azionamento, con il modello con ingresso in accelerazione, possiamo verificare quanto già osservato in simulazione, cioè che il modello con jerk porti ad un leggero incremento del picco massimo di oscillazione, ma la vibrazione residua risulta ridotta, come mostrato in Fig. 3.32.

Grazie alle figure appena mostrate, risulta, inoltre, verificato il forte vantaggio dei metodi variazionali di poter scendere a tempi di azionamento inferiori a quelli concessi ad una pianificazione con input shaping, minimizzando le vibrazioni sfruttando le inversioni del moto. Si può vedere, infatti, sempre in Fig. 3.31, come la traiettoria percorsa dal carrello (i.e. y_{robot}) effettui delle forti inversioni del moto, andando oltre la posizione finale e tornando, successivamente, più indietro della posizione iniziale. Del resto questo è perfettamente analogo e quanto accadeva in simulazione. Volendo ridurre, dunque, i tempi di azionamento ai limiti delle prestazioni del sistema, oltre a verificare di disporre dell'accelerazione richiesta, bisognerà sempre prestare attenzione ai vincoli che potrebbero presentarsi nello spazio di lavoro.

Osserviamo che lo spostamento pianificato è stato ridotto a $0.1m$, rispetto ai casi precedenti nei quali si consideravano $0.2m$, per problemi dovuti alla strumentazione di visione. Proprio per le inversioni del moto, infatti, il pendolo usciva dal campo visivo della telecamera, si è scelto, pertanto, di scalare la traiettoria riducendo così lo spazio percorso e rientrando nello spazio di lavoro del setup utilizzato.

3.4.3 Test pianificazione TPBVP robusta

Il vantaggio di aumentare il modello del sistema, usando delle equazioni di sensitività rispetto alla lunghezza del pendolo, è stato indagato sperimentalmente. Dai risultati ottenuti in laboratorio, risulta verificato come, in presenza di un sistema perturbato o di fronte all'impossibilità di ricavare un modello esatto, la pianificazione robusta può risultare indispensabile per minimizzare le vibrazioni al termine della movimentazione.

Innanzitutto, in Fig. 3.33, vediamo un confronto, in condizioni di lunghezza nominale, tra i risultati sperimentali ottenuti con una traiettoria semplice e quelli risultanti applicando una traiettoria robusta. La pianificazione robusta permette di arrivare ad una oscillazione residua molto piccola e paragonabile a quella della traiettoria non robusta, dimostrando, così, la sua efficacia nel minimizzare le vibrazioni. Come già osservato in simulazione, però, la traiettoria robusta, sfruttando diverse inversioni del moto, porta a picchi di oscillazione maggiori durante la movimentazione e, soprattutto, a valori maggiori di accelerazione.

Per verificare l'effettiva robustezza delle traiettorie ottenute, sono stati svolti dei test accorciando il pendolo ed valutando, così, la vibrazione residua con diverse lunghezze. In Fig. 3.34 viene mostrato, ad esempio, il confronto tra pianificazione semplice e robusta, ricavata utilizzando le differenze finite per un $T_{az} = 2s$, con lunghezza ridotta di $18cm$ rispetto al valore nominale. Possiamo osservare come l'oscillazione residua sia significativamente più piccola e contenuta nel caso di traiettoria robusta. Tali test di robustezza sono stati effettuati valutando anche il modello con il jerk nello stato, verificando, anche in questo caso, l'efficacia di un approccio robusto. A titolo di esempio, in Fig. 3.35 vengono riportate e confrontate le risposte del sistema sperimentale, con la lunghezza del pendolo ridotta di $6cm$, ad una pianificazione semplice e ad una robusta. Notiamo come la soluzione robusta minimizzi efficacemente le vibrazioni residue.

Le tecniche robuste ottenute con soluzioni TPBVP sono state, successivamente, confrontate con l'input shaping robusto. Nei test effettuati con il pendolo alla lunghezza nominale, riportati in Fig. 3.36, possiamo osservare una risposta analoga delle due tecni-

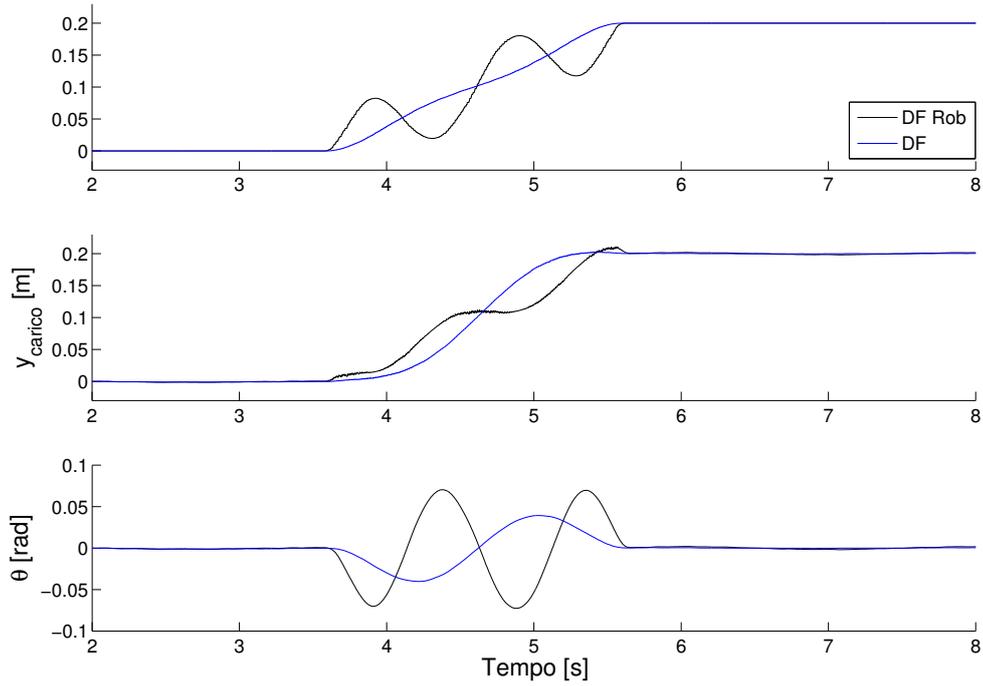


Fig. 3.33: Confronto tra pianificazione semplice e robusta ottenuta con le differenze finite per un $T_{az} = 2s$.

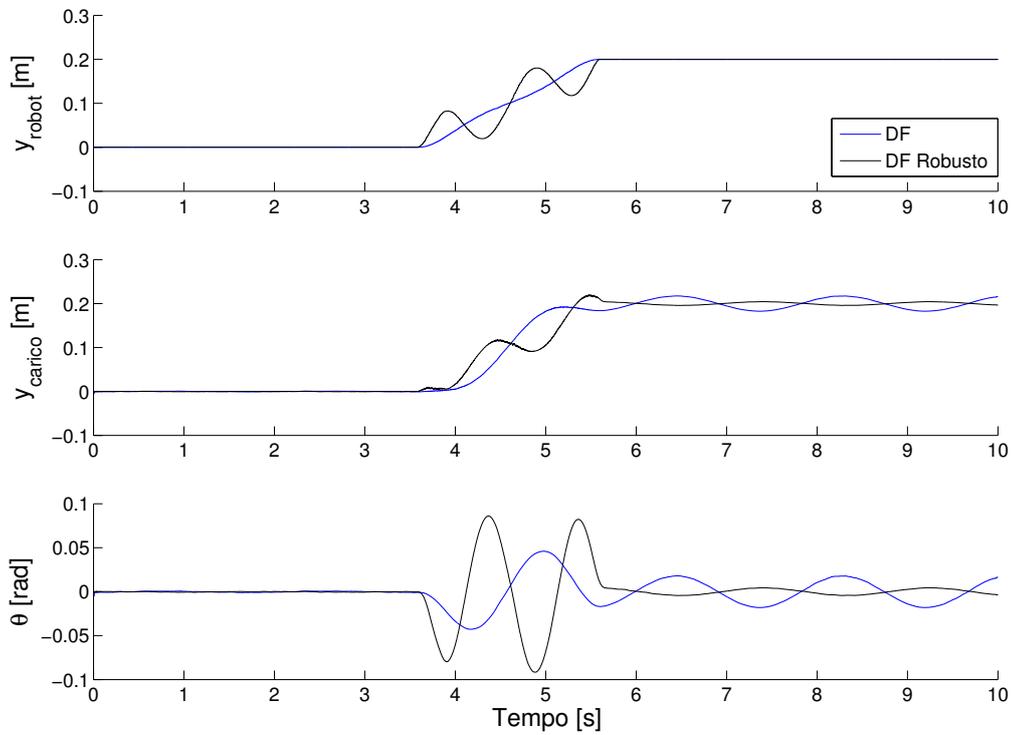


Fig. 3.34: Test di robustezza con lunghezza ridotta di $18cm$ rispetto al valore nominale. Confronto tra pianificazione semplice e robusta ottenuta con le differenze finite per un $T_{az} = 2s$.

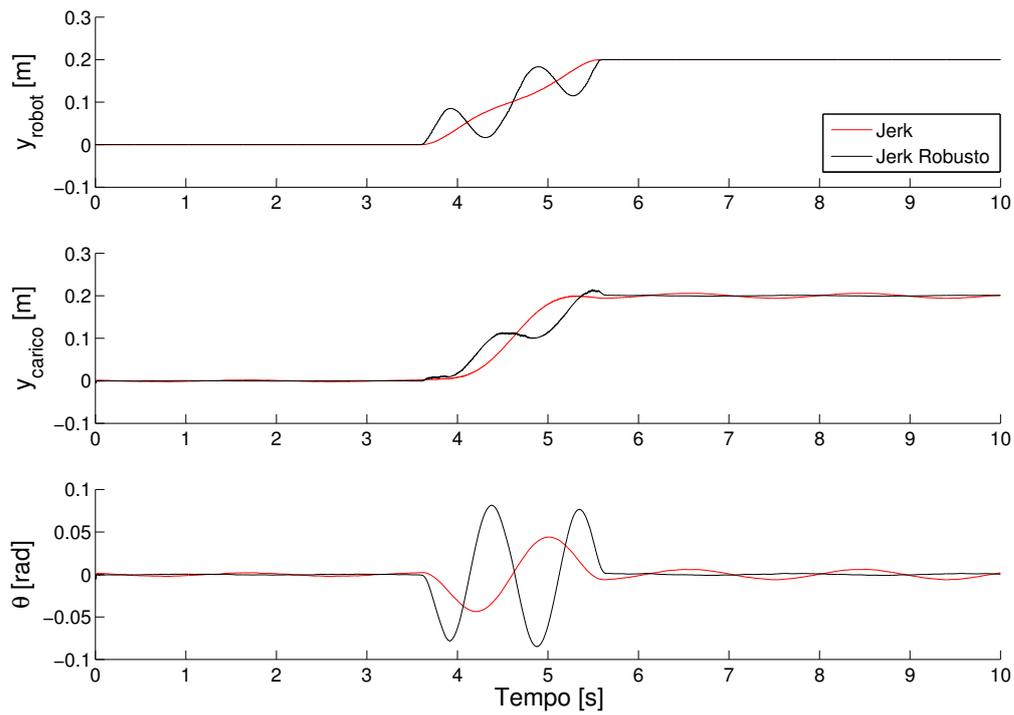


Fig. 3.35: Test di robustezza con lunghezza ridotta di 6cm rispetto al valore nominale. Confronto tra pianificazione semplice e robusta ottenuta con le differenze finite per un $T_{az} = 2\text{s}$, utilizzando il modello con il jerk nello stato.

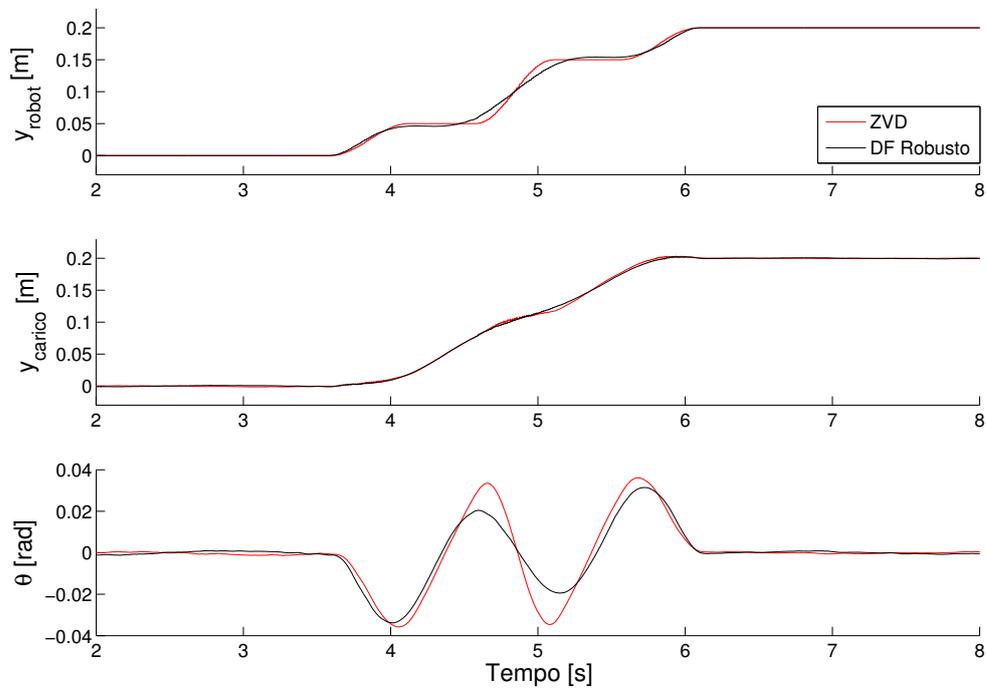


Fig. 3.36: Confronto tra pianificazioni robuste ottenute con l'input shaping e con le differenze finite per un $T_{az} = 2.5\text{s}$.

che in termini di vibrazioni residue, anche si l'approccio TPBVP determina picchi massimi di oscillazioni minori durante la movimentazione. Considerando, invece, i test di robustezza con lunghezza del cavo ridotta, pur avendo una misura affetta da rumore e nonostante la difficoltà di fermare perfettamente l'oscillazione prima dell'inizio della prova, le soluzioni robuste ottenute con metodi variazionali si dimostrano leggermente più efficaci nel minimizzare la vibrazione. In Fig. 3.37 viene mostrato un confronto tra pianificazioni robuste ottenute con l'input shaping e con le differenze finite per un $T_{az} = 2.5s$, con lunghezza ridotta di $6cm$ rispetto al valore nominale.

Notiamo, inoltre, come nei casi precedenti i test di robustezza fossero stati svolti con un $T_{az} = 2s$, mentre per valutare lo ZVD tale tempo è stato esteso a $2.5s$. Infatti, come già detto più volte, l'approccio dell'input shaping di utilizzare impulsi sfasati temporalmente comporta dei vincoli temporali, mentre le soluzioni TPBVP risultano efficaci anche per tempi inferiori.

I risultati ottenuti in simulazione, in termini di oscillazioni residue al termine della movimentazione, sono perfettamente analoghi a quelli esposti e discussi in simulazione, dimostrando, pertanto, la validità dell'approccio robusto trattato.

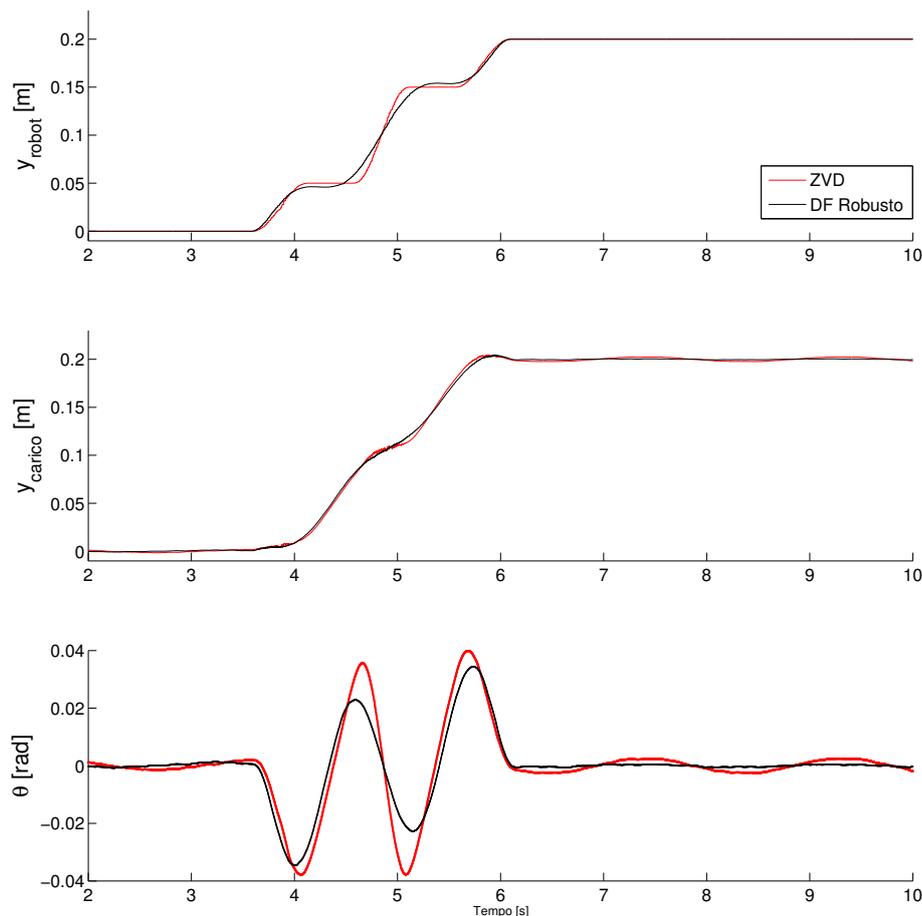


Fig. 3.37: Test di robustezza con lunghezza ridotta di $6cm$ rispetto al valore nominale. Confronto tra pianificazioni robuste ottenute con l'input shaping e con le differenze finite per un $T_{az} = 2.5s$.

Test Case: Carrello a 3 gdl

In questo capitolo verrà considerata un'estensione del test case precedente, andando ad aggiungere un nuovo grado di libertà al pendolo, che avrà così due distinti angoli di rotazione possibile, però sempre giacenti sul piano determinato dalla traslazione del carrello e dalla verticale.

Il capitolo inizierà, dunque, introducendo la modellistica del sistema, i.e. il modello matematico che ne descriva la dinamica, mostrandone una validazione dal confronto con Working Model. Saranno, poi, considerate le diverse soluzioni del TPBVP, avvalendosi delle simulazioni eseguite in ambiente Matlab e Simulink e confrontandone i diversi pregi e difetti.

Infine, verranno mostrati i risultati sperimentali ottenuti dai test in laboratorio.

4.1 Modello

In modo analogo al capitolo precedente, consideriamo un pendolo, che possa traslare unicamente in una direzione y e oscillare secondo un angolo θ_1 e un angolo θ_2 , come schematizzato in Fig. 4.1. Assumiamo di avere due membri di lunghezza l_1 e l_2 , con massa distribuita rispettivamente m_1 e m_2 , un'inerzia della vite equivalente J_{eq} (che riassume il contributo di tutte le inerzie a monte del pendolo), un coefficiente di smorzamento c e un coefficiente di elasticità k , in corrispondenza del giunto rotoidale tra i due membri. Il sistema, inoltre, giacendo su un piano verticale, sarà soggetto ad una forza di gravità g .

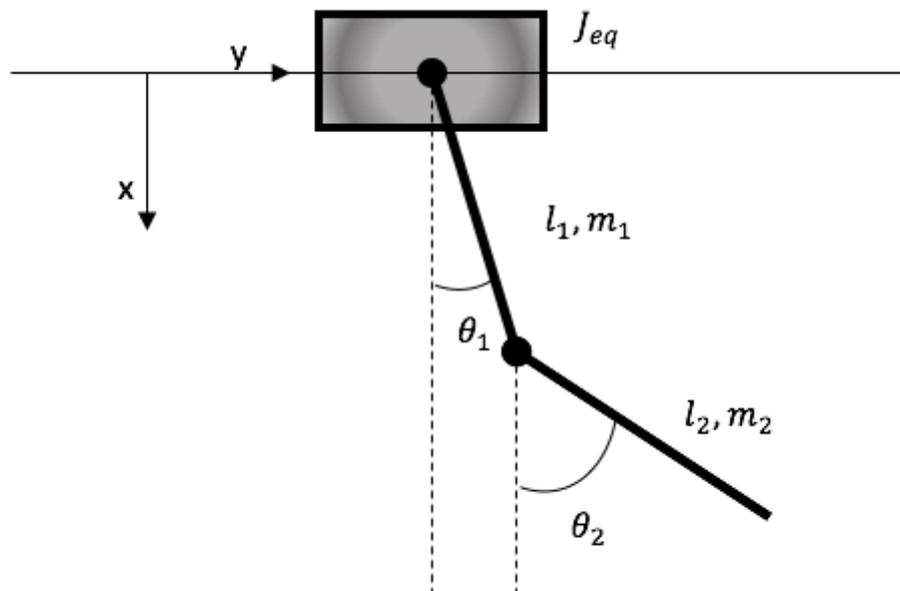


Fig. 4.1: Schema del pendolo a 3 gdl.

Per ricavare il modello possiamo sfruttare l'approccio di Lagrange, come è stato fatto per il carrello a 2 gdl. Considerando, dunque, l'Eq. (3.1.1), dovremo calcolare l'energia cinetica e l'energia potenziale dei diversi membri.

Troviamo allora:

$$T_y = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{y}^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \underbrace{(\dot{x}_{G1}^2 + \dot{y}_{G1}^2)}_{v_{G1}^2} \quad (4.1.1)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \underbrace{(\dot{x}_{G2}^2 + \dot{y}_{G2}^2)}_{v_{G2}^2}$$

dove

$$\begin{aligned} x_{G1} &= \frac{l_1}{2} \cos(\theta_1) & \rightarrow \dot{x}_{G1} &= -\frac{l_1}{2} \sin(\theta_1) \cdot \dot{\theta}_1 \\ y_{G1} &= \frac{l_1}{2} \sin(\theta_1) + y & \rightarrow \dot{y}_{G1} &= \frac{l_1}{2} \cos(\theta_1) \cdot \dot{\theta}_1 + \dot{y} \\ x_{G2} &= l_1 \cos(\theta_1) + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_2) & \rightarrow \dot{x}_{G2} &= -l_1 \sin(\theta_1) \cdot \dot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \sin(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 \\ y_{G2} &= l_1 \sin(\theta_1) + \frac{l_2}{2} \sin(\theta_2) + y & \rightarrow \dot{y}_{G2} &= l_1 \cos(\theta_1) \cdot \dot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 + \dot{y} \end{aligned}$$

Pertanto, calcolando v_{G1}^2 e v_{G2}^2 vale:

$$v_{G1}^2 = \dot{x}_{G1}^2 + \dot{y}_{G1}^2 = \dot{y}^2 + \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \dot{y}$$

$$v_{G2}^2 = \dot{x}_{G2}^2 + \dot{y}_{G2}^2 = \dot{y}^2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \dot{y} + l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{y} + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Quindi

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 \dot{\theta}_1^2 + m_1 l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \dot{y}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{y}^2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \dot{y} + l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{y} + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right)$$

Per effetto dell'elasticità tra i due membri abbiamo:

$$U_k = \frac{1}{2} k (\theta_1 - \theta_2)^2 \quad (4.1.2)$$

L'energia potenziale gravitazionale è:

$$U_g = -\frac{1}{2} g l_1 m_1 \cos(\theta_1) - g m_2 l \left(l_1 \cos(\theta_1) + \frac{1}{2} l_2 \cos(\theta_2) \right) \quad (4.1.3)$$

Andiamo, allora, a sostituire tutto nelle Eq. (3.1.1) e calcoliamo le derivate parziali:

$$L = T_v + T_1 + T_2 - U_k - U_g \quad (4.1.4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(l_1 m_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + 2l_1 m_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1) - l_1 (m_1 + 2m_2) \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1) + \right. \\ \left. + l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - l_2 m_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) + 2(J_{eq} + m_1 + m_2) \ddot{y} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \frac{1}{4} \left(4k(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_1 (4J_1 + l_1^2 (m_1 + 4m_2)) + 2l_1 (l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right. \\ \left. + (m_1 + 2m_2)(g \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) \ddot{y})) + 2l_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{1}{4} \left(l_2 m_2 (2l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 \ddot{\theta}_2 + 2 \cos(\theta_2) \ddot{y}) + \right. \\ \left. - 4k\theta_1 + 4J_2 \ddot{\theta}_2 + 2gl_2 m_2 \sin(\theta_2) + 4k\theta_2 \right)$$

Possiamo fare una prima linearizzazione ponendo:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) \longrightarrow 1 \quad \text{e} \quad \sin(\theta_1 - \theta_2) \longrightarrow \theta_1 - \theta_2$$

Raccogliamo ora i diversi termini, per riportarci nella canonica forma matriciale:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + G = F \quad (4.1.5)$$

dove

$$M = \begin{bmatrix} J_{eq} + m_1 + m_2 & \frac{1}{2}l_1(m_1 + 2m_2) \cos(\theta_1) & \frac{1}{2}l_2 m_2 \cos(\theta_2) \\ \frac{1}{2}l_1(m_1 + 2m_2) \cos(\theta_1) & J_1 + \frac{l_1^2}{4}(m_1 + 4m_2) & \frac{1}{2}l_1 l_2 m_2 \\ \frac{1}{2}l_2 m_2 \cos(\theta_2) & \frac{1}{2}l_1 l_2 m_2 & J_2 + \frac{l_2^2}{4}m_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}l_1(m_1 + 2m_2) \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 & -\frac{1}{2}l_2 m_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & c & -c + \frac{1}{2}l_1 l_2 m_2 (\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -c + \frac{1}{2}l_1 l_2 m_2 (\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 & c \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}l_1(m_1 + 2m_2)g \sin(\theta_1) \\ \frac{1}{2}l_2 m_2 g \sin(\theta_2) \end{bmatrix}$$

Infine, linearizzando le matrici appena presentate, otteniamo¹:

$$M = \begin{bmatrix} J_{eq} + m_1 + m_2 & \frac{1}{2}l_1(m_1 + 2m_2) & \frac{1}{2}l_2 m_2 \\ \frac{1}{2}l_1(m_1 + 2m_2) & J_1 + \frac{l_1^2}{4}(m_1 + 4m_2) & \frac{1}{2}l_1 l_2 m_2 \\ \frac{1}{2}l_2 m_2 & \frac{1}{2}l_1 l_2 m_2 & J_2 + \frac{l_2^2}{4}m_2 \end{bmatrix}$$

¹Con leggero abuso di notazione, andiamo ad indicare le nuove matrici linearizzate con le stesse lettere usate per il precedente modello non lineare.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -c \\ 0 & -c & c \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k + \frac{1}{2}l_1(m_1 + 2m_2)g & -k \\ 0 & -k & k + \frac{1}{2}l_2m_2g \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per svolgere le simulazioni, il modello risulta più semplice da trattare in spazio di stato. Allora, come per il pendolo semplice, ci si può ricondurre alla forma generale in Eq. (3.1.7), grazie all'Eq. (3.1.8), che per comodità viene riportata di seguito.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -M^{-1}C & M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} M^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}}_B F \quad (4.1.7)$$

Questa relazione viene, pertanto, implementata direttamente nel codice Matlab, per ottenere le matrici A, B, C e D^2 , che vengono usate per la risoluzione del TPBVP e per la simulazione del sistema in ambiente Simulink.

Osserviamo che, in questo caso, lo stato si presenta come:

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Anche questa volta, otteniamo un modello in forza; tuttavia, possiamo ricondurci ad un modello in accelerazione (i.e. con ingresso $u = \ddot{y}$) considerando:

$$A_{pp} = \begin{bmatrix} 1 & M_{23}/M_{22} \\ M_{32}/M_{33} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{pp} = \begin{bmatrix} -1/M_{22} \cdot (M_{21}u + C_{21}\dot{y} + C_{22}\dot{\theta}_1 + C_{23}\dot{\theta}_2 + K_{21}y + K_{22}\theta_1 + K_{23}\theta_2) \\ -1/M_{33} \cdot (M_{31}u + C_{31}\dot{y} + C_{32}\dot{\theta}_1 + C_{33}\dot{\theta}_2 + K_{31}y + K_{32}\theta_1 + K_{33}\theta_2) \end{bmatrix} \quad (4.1.8)$$

$$\implies \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = A_{pp}^{-1} \cdot B_{pp}$$

dove le matrici M, C e K si riferiscono a quelle del modello in Eq. (4.1.6) e i pedici si riferiscono chiaramente alla riga ed alla colonna dell'elemento da considerare (e.g. M_{23} indica l'elemento della matrice M individuato dalla riga 2 e dalla colonna 3).

In modo analogo viene ricavato il modello con il jerk, facendo sempre riferimento allo schema in Fig. 3.2.

²Le matrici C e D sono definite in base alle uscite che consideriamo. Nel nostro caso, dunque, considerando in uscita tutte le variabili di stato, per monitorarne l'andamento in simulazione, le matrici in esame restano definite semplicemente ponendo: $C = I(n \times n)$, dove I rappresenta l'identità ed n è la dimensione dello stato; $D = B \cdot 0$, ad indicare che le uscite non dipendono dagli ingressi ma solo dallo stato.

4.2 Working Model

Working Model è un software di simulazione, che permette di modellare sistemi meccanici in uno spazio di lavoro 2D, andando a combinare insieme diversi elementi geometrici e componenti meccanici (e.g. molle, giunti, motori). Quando il programma viene lanciato, va, quindi, a simulare le interazioni tra le diverse parti del modello, evidenziandone il movimento e le forze in gioco. Si presenta, dunque, come uno strumento utile e rapido, anche se non molto preciso ed accurato, per avere un'idea di quella che può essere la dinamica di un sistema.

Andiamo allora ad implementare il modello di un pendolo a 3 gdl, presentato in Fig. 4.1, in ambiente Working Model, come si può vedere in Fig. 4.2. Per verificare la validità del modello ricavato, confrontiamo la risposta del sistema simulato in Matlab con quella fornita da Working Model.

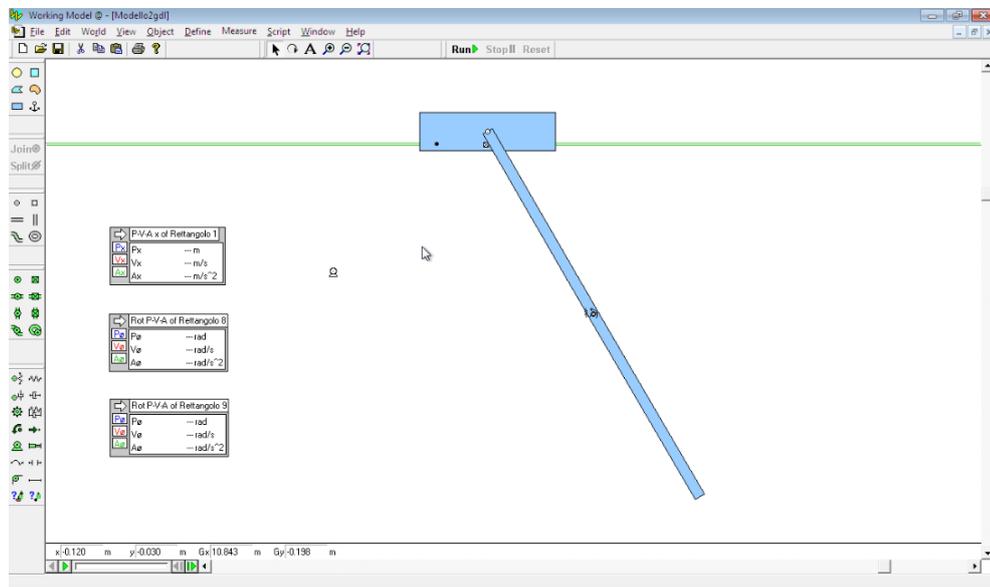


Fig. 4.2: Schema del pendolo a 3 gdl implementato in Working model.

Per questo confronto è stato considerato un test case arbitrario, con un pendolo composto da due sbarrette di alluminio (densità: $\rho_{al} = 2700[kg/m^3]$) di sezione $S = 0.05^2[m^2]$ e di lunghezza, rispettivamente, $l_1 = 0.2[m]$ e $l_2 = 0.15[m]$.

Pertanto, le masse e le inerzie risultanti sono:

$$m_1 = l_1 S \rho_{al} = 1.35[kg]$$

$$m_2 = l_2 S \rho_{al} = 1.0125[kg]$$

$$J_1 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2 = 0.0045[kgm^2]$$

$$J_2 = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 = 0.0019[kgm^2]$$

Assumiamo, inoltre, un valore di elasticità $k = 10[N/m]$ e un coefficiente di smorzamento $c = 2.214 \cdot 10^{-4}[Ns/m]$.

Per la movimentazione, si considerano un motore con inerzia $J_m = 2.16 \cdot 10^{-5}[kgm^2]$ e una vite a ricircolo di sfere con i seguenti parametri:

- Lunghezza della vite: $L_v = 0.8[m]$;
- Densità: $\rho_v = 7800[kg/m^3]$;
- Raggio della vite: $R_v = 0.016/2[m]$;
- Passo della vite: $p_v = 0.016[m]$;
- Massa della chiocciola: $M_{nut} = 10[kg]$;
- Rapporto di trasmissione: $\tau_v = \frac{p_v}{2\pi}$.

Quindi le massa e l'inerzia della vite valgono:

$$M_v = \pi R_v^2 L_v \rho_v = 1.2546[kg]$$

$$J_v = \frac{1}{2} M_v R_v^2 = 4.0148 \cdot 10^5[kgm^2]$$

L'inerzia totale che ne risulta è

$$J_{eq} = \frac{J_m}{\tau_v^2} + \frac{J_v}{\tau_v^2} + M_{nut} = 10.5223[kgm^2]$$

La simulazione viene eseguita partendo da condizioni iniziali:

$$y_0 = 1;$$

$$\theta_{10} = \pi/6;$$

$$\theta_{20} = \pi/6;$$

$$\dot{y}_0 = 0;$$

$$\dot{\theta}_{10} = 0;$$

$$\dot{\theta}_{20} = 0;$$

Scegliamo cioè una condizione iniziale in cui il pendolo si trovi fermo, ma ruotato, rispetto alla verticale, di un angolo di 30° .

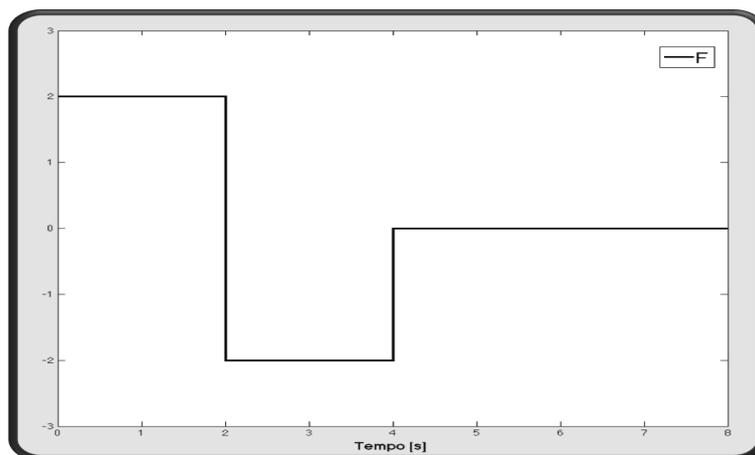


Fig. 4.3: Forza F in ingresso al sistema.

In ingresso, invece, viene fatta agire una forza F a gradino, riportata in Fig. 4.3, agente sul carrello e definita come segue:

$$F = 0 + 2 * (t < 2) - 2 * (t \geq 2) * (t \leq 4);$$

La simulazione del sistema, ottenuta con tale sollecitazione, viene riportata in Fig. 4.4, sovrapponendo le due differenti risposte determinate da Matlab e da Working Model. Dal confronto possiamo notare come entrambi i modelli abbiano un andamento molto simile per tutte e tre le componenti dello stato (i.e. y , θ_1 e θ_2). In particolare, le ampiezze coincidono perfettamente, mentre si ha una leggera differenza nelle frequenze di oscillazione.

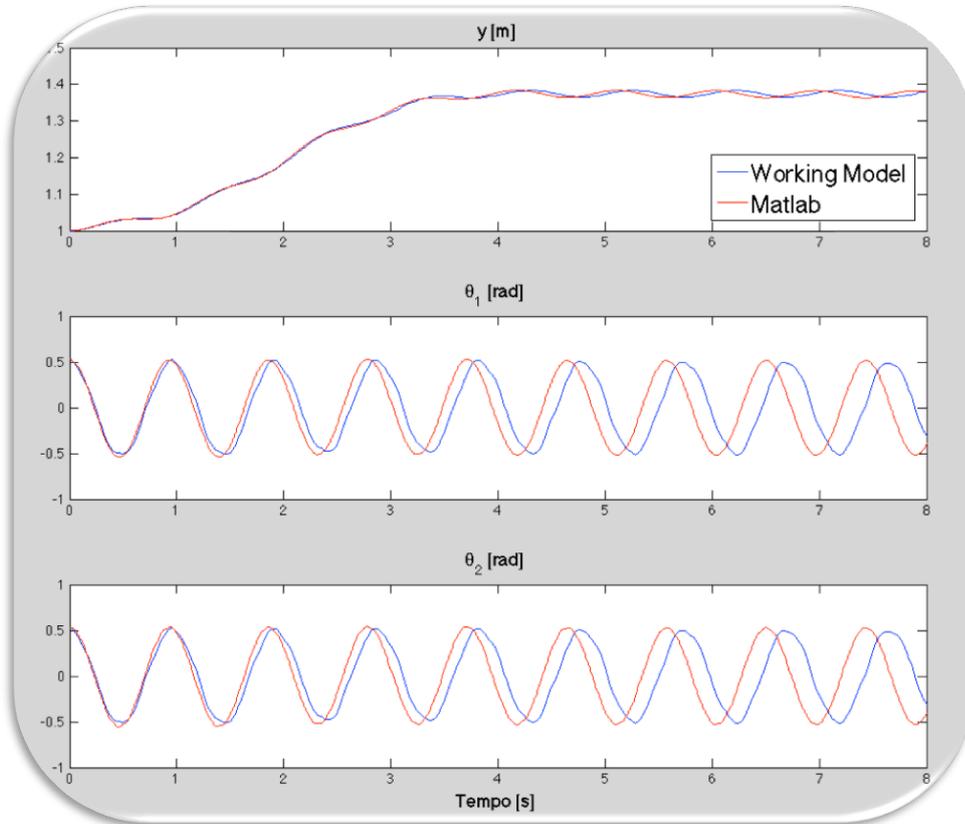


Fig. 4.4: Confronto simulazione Matlab e Working Model.

4.3 Simulazioni

Sfruttando i modelli matematici ottenuti, andremo ad eseguire delle simulazioni in ambiente Matlab e Simulink, utilizzando ancora lo schema presentato in Fig. 3.3. In particolare, considereremo i modelli in forza, in accelerazione e con jerk e confronteremo i pregi e i difetti di ricercare una soluzione robusta rispetto ai parametri.

Come nel caso del pendolo semplice, presteremo attenzione ad una serie di valori di interesse quali: picco di oscillazione massimo nel tempo di azionamento e quello residuo al termine della movimentazione, per entrambi gli angoli di rotazione (i.e. θ_1 e θ_2); spostamento massimo, velocità e accelerazione, massime e RMS, valutandone anche la continuità; sensitività alle variazioni parametriche; tempo computazionale.

Per svolgere le simulazioni, assumeremo per il sistema gli stessi parametri definiti nella sezione precedente nel confronto con Working Model. Considereremo, tuttavia, delle lunghezze $l_1 = l_2 = 0.5m$ e uno spostamento di $0.2m$ in un tempo di azionamento T_{az} variabile, per una sorta di similitudine e confronto con le simulazioni del carrello a 2 gdl del capitolo precedente.

Pertanto, le due frequenze di oscillazione risultano:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 0.6748 \text{ Hz}, \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 2.6420 \text{ Hz};$$

e i periodi:

$$T_1 = \frac{1}{f_1} \simeq 1.482 \text{ s}, \quad T_2 = \frac{1}{f_2} \simeq 0.3785 \text{ s}.$$

4.3.1 Confronto tra ingresso in forza e in accelerazione

Nelle Tab. 4.1 e 4.2 viene mostrato un confronto tra pianificazioni che utilizzino il modello in forza e quello in accelerazione. In termini di prestazioni, possiamo osservare dei risultati molto simili, la differenza sostanziale, che si può notare, è legata al tempo di calcolo (i.e. “T calc”, con riferimento alla notazione utilizzata nelle tabelle). Infatti, a causa della maggiore complessità del modello, si vede uno svantaggioso e forte incremento del tempo richiesto per ottenere la soluzione, non tanto nel caso del bvp5c, quanto in quello delle differenze finite, che peggiora al diminuire del T_{az} .

Tab. 4.1: Confronto ingresso in forza e in accelerazione con $T_{az} = 2[s]$.

Tecnica	θ_1 Max[rad]	θ_1 Res[rad]	θ_2 Max[rad]	θ_2 Res[rad]	T calc[s]
DF Acc	0.041923	0.00014173	0.045636	0.00026909	3.0318
DF Forza	0.042289	0.00017793	0.046669	0.00031347	16.5384
bvp5c Acc	0.041851	1.03e-07	0.045746	1.8052e-07	8.0244
bvp5c Forza	0.04222	5.7766e-08	0.046798	1.1102e-07	8.8469
Tecnica	Pos Max[m]	Vel Max[m/s]	Vel RMS [m/s]	Acc Max [m/s ²]	
DF Acc	0.20001	0.1252	0.074666	0.48939	
DF Forza	0.20002	0.12497	0.074737	0.46946	
bvp5c Acc	0.2	0.12512	0.074658	0.48866	
bvp5c Forza	0.2	0.1249	0.074729	0.46769	

Tab. 4.2: Confronto ingresso in forza e in accelerazione con $T_{az} = 1.5[s]$.

Tecnica	θ_1 Max[rad]	θ_1 Res[rad]	θ_2 Max[rad]	θ_2 Res[rad]	T calc[s]
DF Acc	0.068726	6.3917e-05	0.094348	8.9833e-05	3.0181
DF Forza	0.070082	0.00011413	0.092168	0.00020458	104.1024
bvp5c Acc	0.068714	5.8071e-07	0.094168	8.3522e-07	7.8912
bvp5c Forza	0.070065	4.378e-07	0.091925	6.5124e-07	9.2532
Tecnica	Pos Max[m]	Vel Max[m/s]	Vel RMS [m/s]	Acc Max [m/s ²]	
DF Acc	0.20002	0.22298	0.10378	1.8343	
DF Forza	0.20002	0.22153	0.10385	1.8408	
bvp5c Acc	0.2	0.22274	0.10374	1.8381	
bvp5c Forza	0.2	0.22121	0.1038	1.8436	

Guardando le curve di sensitività, riportate in Fig. 4.5 al variare della lunghezza l_2 e per un $T_{az} = 2s$, l'andamento è simile per entrambi i modelli, tuttavia, l'approccio in accelerazione risulta più robusto (i.e. la curva di sensitività è più bassa).

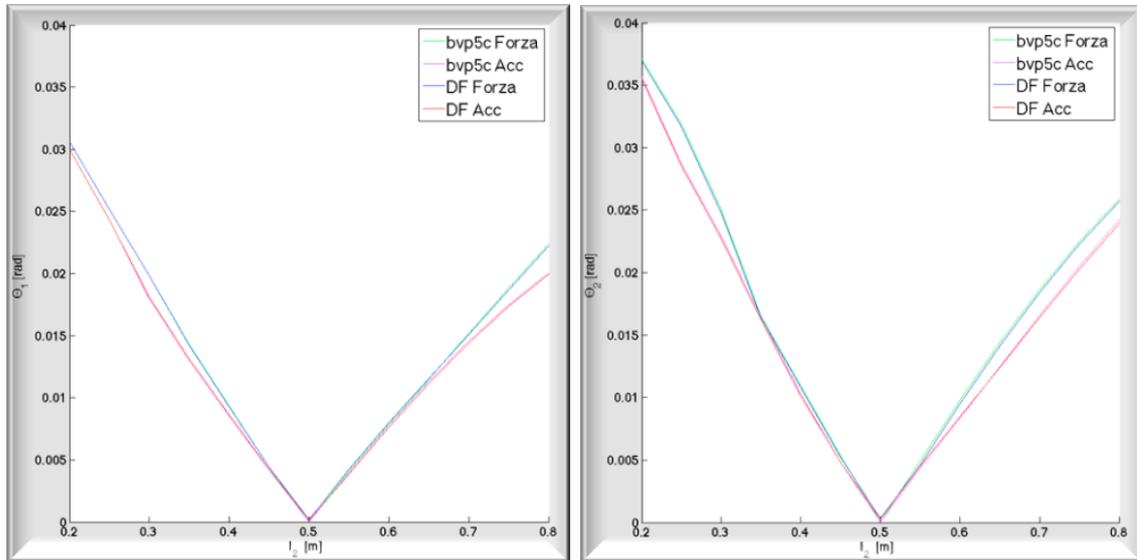


Fig. 4.5: Curva di sensitività al variare della lunghezza di l_2 . A sinistra effetto su θ_1 , a destra rispetto a θ_2 .

4.3.2 Pianificazione semplice e robusta

Come già fatto per il pendolo semplice, possiamo pensare di irrobustire la pianificazione, rispetto alle variazioni ed alle incertezze parametriche, andando a considerare delle equazioni di sensitività. Nel caso precedente, tuttavia, l'unico parametro in gioco era la lunghezza della fune, mentre ora sono molteplici i possibili parametri affetti da incertezza, data la maggiore complessità del sistema.

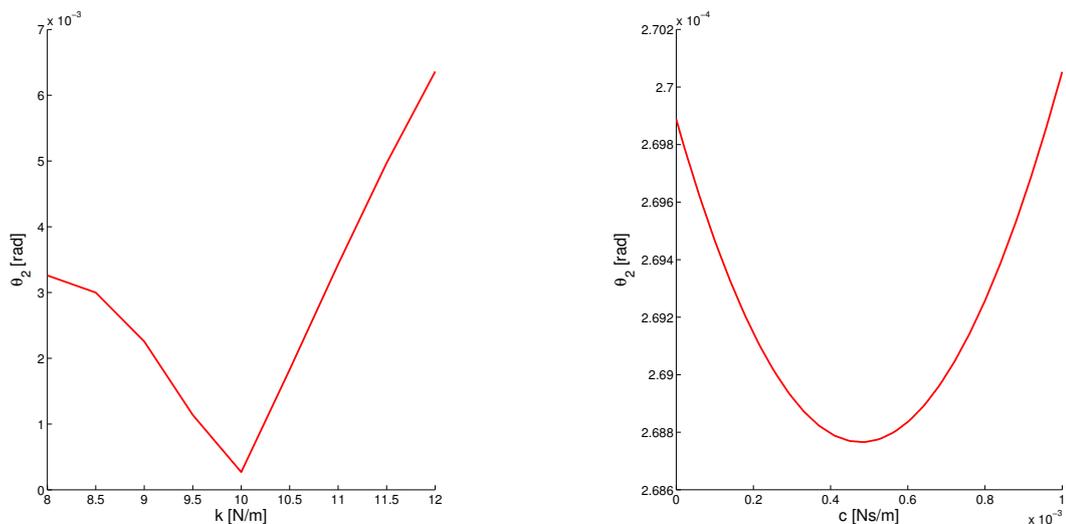


Fig. 4.6: Curva di sensitività al variare del coefficiente di elasticità k (a sinistra) e del coefficiente di smorzamento c (a destra).

Andiamo, allora, a valutare di quali parametri siano più critiche le variazioni dal punto di vista dell'oscillazione residua del pendolo. In Fig. 4.6 possiamo osservare l'effetto di una variazione del coefficiente di elasticità k (a sinistra) e del coefficiente di smorzamento c (a destra), rispetto al loro valore nominale. Le figure si riferiscono all'andamento del picco residuo su θ_2 , ma il risultato è analogo a quello che si ottiene su θ_1 .

Confrontando, però, la variazione dell'oscillazione residua ottenuta dovuta ai parametri k e c , vediamo come tale valore sia trascurabile, rispetto all'effetto dato da variazioni sulle lunghezze l_1 e l_2 , come mostrato in Fig. 4.7.

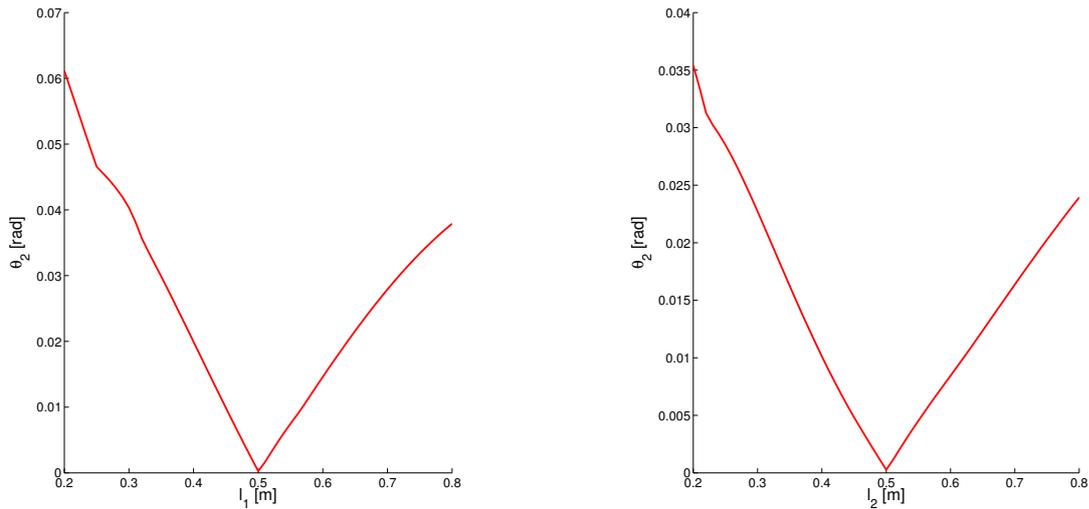


Fig. 4.7: Curva di sensitività al variare della lunghezza l_1 (a sinistra) e di l_2 (a destra).

Andremo, allora, ad irrobustire la pianificazione rispetto a variazioni delle lunghezze. Consideriamo la notazione generica l_i , dove $i = 1, 2$, per indicare rispettivamente l_1 e l_2 .

Vale:

$$S(t) = \frac{\partial x}{\partial l_i}$$

Tuttavia, come per il pendolo semplice, invece di considerare la sensitività rispetto all'intero vettore dello stato, complicando notevolmente la risoluzione, valutiamo solo le derivate parziali della posizione e della velocità angolari, poiché lo scopo è appunto quello di minimizzare la vibrazione residua del pendolo (i.e. portare a zero gli angoli θ_1 e θ_2).

$$S_1(t) = \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial l_i}$$

$$S_2(t) = \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial l_i}$$

$$S_3(t) = \frac{\partial \theta_1}{\partial l_i}$$

$$S_4(t) = \frac{\partial \theta_2}{\partial l_i}$$

Lo stato aumentato risulta allora:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \\ y(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \\ S_3(t) \\ S_4(t) \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

Il vettore dello stato ha dimensione 10 (i.e. è un vettore composto da 10 componenti); servirà, dunque, un vettore λ dei Lagrangiani della stessa dimensione, per impostare e risolvere il TPBVP.

Le simulazioni delle traiettorie, ottenute dalla soluzione del TPBVP con diversi tempi di azionamento e considerando il modello con ingresso in accelerazione, vengono confrontate con un tradizionale multi-mode shaper (presentato in Appendice A), che indicheremo anche in questo caso con la notazione ZV e ZVD, a denotare la versione semplice e quella robusta. Dal confronto tra caso semplice e robusto³, riportato nelle Tab. 4.3, 4.4 e 4.5 per un T_{az} rispettivamente di 2.5s, 2s e 1.5s, osserviamo che, come prevedibile, irrobustendo la pianificazione abbiamo un peggioramento delle prestazioni. Si hanno, infatti, un incremento delle vibrazioni massime e residue, un aumento delle velocità massime ed RMS e una crescita del tempo di calcolo richiesto per il raggiungimento della soluzione, tanto maggiori quanto maggiore è la riduzione del tempo di azionamento desiderato.

Tab. 4.3: Confronto tecniche con tempo di azionamento 2.5 [s].

Tecnica	θ_1 Max [rad]	θ_1 Res [rad]	θ_2 Max [rad]	θ_2 Res [rad]
ZV	0.029502	0.00055712	0.033108	0.00081459
ZVD	0.033528	3.2674e-05	0.044653	6.6842e-05
DF	0.025962	0.00013385	0.03036	0.00025778
DF Rob	0.026627	7.1498e-06	0.032261	1.2858e-05
bvp5c	0.025914	2.0255e-08	0.030393	2.2666e-08
bvp5c Rob	0.027519	9.1899e-07	0.033407	1.1278e-06

Tecnica	Spostamento Max [m]	Vel Max [m/s]	Vel RMS [m/s]
ZV	0.19998	0.13415	0.063615
ZVD	0.19989	0.2171	0.069538
DF	0.2	0.12777	0.062874
DF Rob	0.20003	0.13651	0.060725
bvp5c	0.2	0.12772	0.062878
bvp5c Rob	0.2	0.14651	0.061369

³Nelle simulazione si considera la pianificazione robusta rispetto alla variazioni della sola lunghezza l_2 , tuttavia, i risultati che si otterrebbero irrobustendo rispetto a l_1 sono del tutto analoghi.

Tecnica	Acc Max [m/s^2]	Acc RMS [m/s^2]	Acc Continua	T calcolo [s]
ZV	0.2133	0.12066	No	0.0038948
ZVD	1.2388	0.41699	No	0.0032884
DF	0.17488	0.11233	No	3.0711
DF Rob	1.1724	0.24374	No	8.9782
bvp5c	0.17362	0.11197	No	8.206
bvp5c Rob	0.79988	0.21754	No	12.4457

Tab. 4.4: Confronto tecniche con tempo di azionamento 2 [s].

Tecnica	θ_1 Max [rad]	θ_1 Res [rad]	θ_2 Max [rad]	θ_2 Res [rad]
ZV	0.048146	0.00093568	0.056394	0.0010115
ZVD	-	-	-	-
DF	0.041923	0.00014173	0.045636	0.00026909
DF Rob	0.046786	0.00016293	0.08422	0.00026755
bvp5c	0.041851	1.03e-07	0.045746	1.8052e-07
bvp5c Rob	0.047406	1.713e-06	0.090399	2.1145e-06

Tecnica	Spostamento Max [m]	Vel Max [m/s]	Vel RMS [m/s]
ZV	0.19997	0.15144	0.077556
ZVD	-	-	-
DF	0.20001	0.1252	0.074666
DF Rob	0.20008	0.24908	0.10181
bvp5c	0.2	0.12512	0.074658
bvp5c Rob	0.20001	0.25683	0.10602

Tecnica	Acc Max [m/s^2]	Acc RMS [m/s^2]	Acc Continua	T calcolo [s]
ZV	0.45874	0.24461	No	0.0030014
ZVD	-	-	-	-
DF	0.48939	0.19641	No	3.0318
DF Rob	4.919	1.138	No	28.7934
bvp5c	0.48866	0.19384	No	8.0244
bvp5c Rob	3.5642	1.0587	No	12.9821

Possiamo notare, inoltre, un forte aumento dell'accelerazione nel caso robusto, sia massima che RMS, dovuta alle inversioni del moto che vengono richieste dalla traiettoria pianificata durante la movimentazione, così come avveniva per il carrello a 2 gdl e come si può vedere in Fig. 4.8.

La pianificazione ottima ottenuta dal TPBVP, confrontata con quella calcolata con il multi-mode shaper, presenta prestazioni migliori in tutti gli aspetti, in particolare, rispetto

Tab. 4.5: Confronto tecniche con tempo di azionamento 1.5 [s].

Tecnica	θ_1 Max [rad]	θ_1 Res [rad]	θ_2 Max [rad]	θ_2 Res [rad]
ZV	0.074438	0.0017825	0.10665	0.0029822
ZVD	-	-	-	-
DF	0.068726	6.3917e-05	0.094348	8.9833e-05
DF Rob	0.15963	0.00065888	0.47957	0.0010533
bvp5c	0.068714	5.8071e-07	0.094168	8.3522e-07
bvp5c Rob	0.15547	1.1367e-05	0.5041	1.5503e-05

Tecnica	Spostamento Max [m]	Vel Max [m/s]	Vel RMS [m/s]
ZV	0.19992	0.26318	0.11262
ZVD	-	-	-
DF	0.20002	0.22298	0.10378
DF Rob	0.31285	1.3869	0.49498
bvp5c	0.2	0.22274	0.10374
bvp5c Rob	0.32322	1.4984	0.51491

Tecnica	Acc Max [m/s^2]	Acc RMS [m/s^2]	Acc Continua	T calcolo [s]
ZV	1.3858	0.79431	No	0.0015951
ZVD	-	-	-	-
DF	1.8343	0.66256	No	3.0181
DF Rob	29.2786	8.1127	No	332.7857
bvp5c	1.8381	0.65197	No	8.0791
bvp5c Rob	22.8586	7.7608	No	12.7092

all'obiettivo di minimizzazione delle vibrazioni massime e residue. Bisogna anche precisare che il multi-mode shaper, avendo più ZV shaper in cascata, può presentare degli errori di sintonizzazione e richiedere una taratura manuale per la correzione degli errori e per il settaggio dei tempi esatti degli impulsi.

Si vede chiaramente, inoltre, il vantaggio di un approccio TPBVP nei tempi di azionamento. Il multi-mode shaper, infatti, ha un vincolo temporale dettato dalla somma dei singoli semiperiodi di oscillazione, problema particolarmente sentito nel caso robusto. Dalla Tab. 4.4 osserviamo, infatti, che l'approccio robusto dell'input shaping diventa inattuabile già per $T_{az} = 2s$. In Fig. 4.9 viene riportato un esempio di traiettoria ottenuta con un multi-mode shaper robusto e quella calcolata, invece, risolvendo il TPBVP con la funzione bvp5c.

La pianificazione con le DF e quella con la funzione bvp5c presentano prestazioni molto simili tra loro. Notiamo, comunque, che la soluzione bvp5c determina delle oscillazioni residue minori e ha un tempo di calcolo che si mantiene più o meno costante, mentre per le DF tale tempo di calcolo è ridotto per tempi di azionamento elevati, ma cresce molto velocemente, nel caso robusto, al ridursi del T_{az} concesso alla movimentazione, come mostrato in Tab. 4.5.

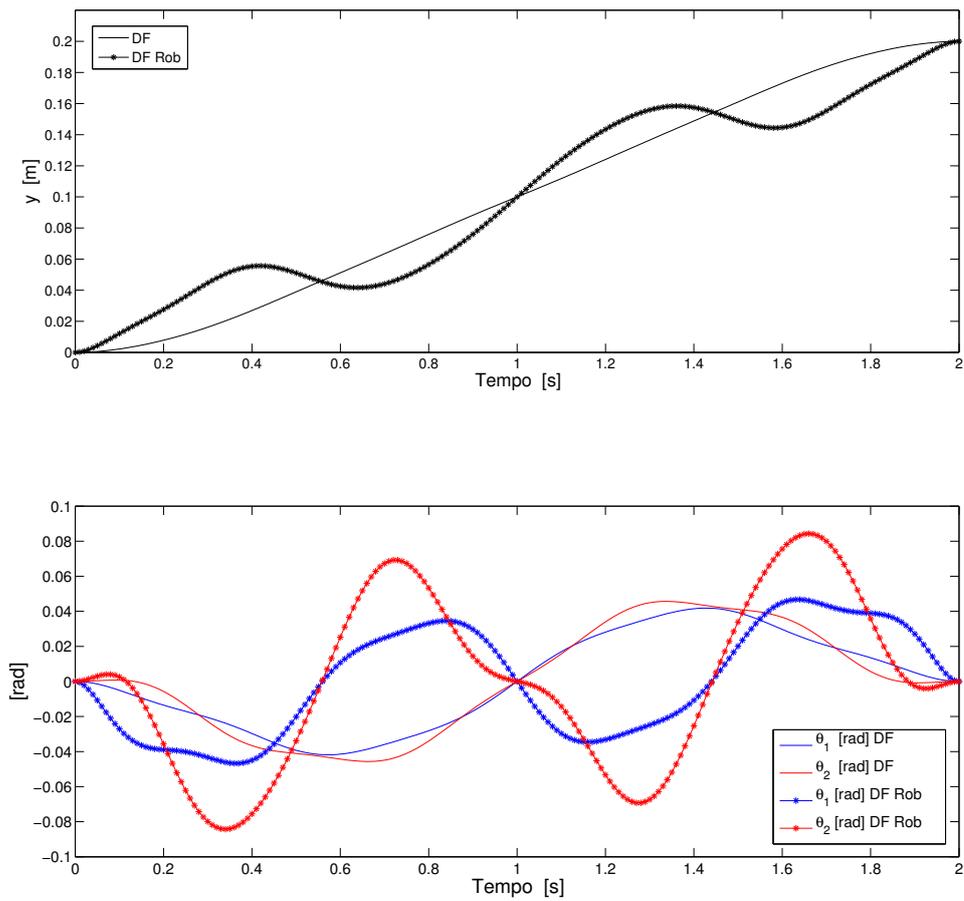


Fig. 4.8: Traiettoria pianificata nel caso semplice e robusto con le DF in un $T_{az} = 2s$.

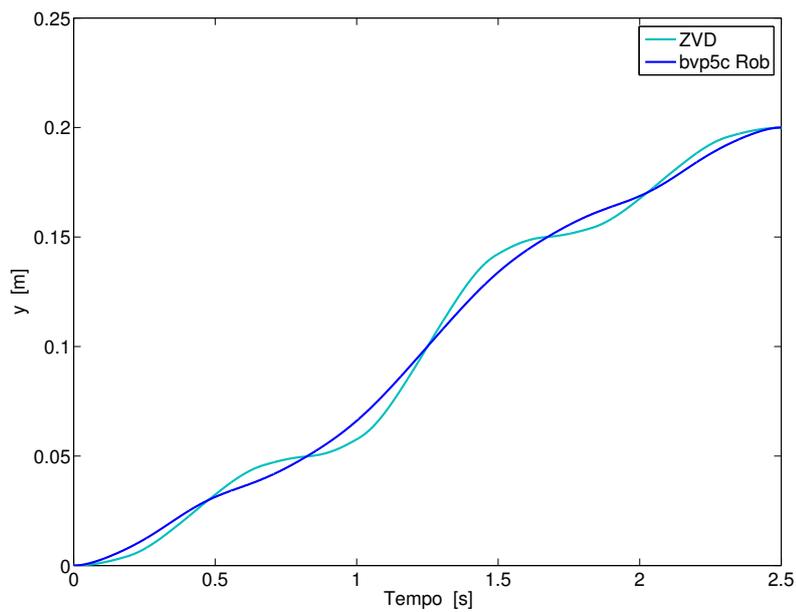


Fig. 4.9: Traiettoria pianificata con ZVD e bvp5c robusto in un $T_{az} = 2.5s$.

Concentrandoci sulla sensitività, nelle Fig. 4.10 e 4.11 possiamo vedere il valore del picco di oscillazione residua degli angoli θ_1 e θ_2 , al variare di l_2 per un $T_{az} = 2.5s$, con pianificazione semplice e robusta con multi-mode shaper e tecniche DF e bvp5c.

Notiamo come effettivamente la soluzione robusta, rispetto ad una pianificazione non robusta, porti ad una curva di sensibilità molto più bassa e schiacciata, ottenendo, pertanto, a fronte di variazioni dalla lunghezza nominale, un'oscillazione residua molto inferiore. Focalizzandoci sulle due soluzioni di TPBVP utilizzate (i.e. DF e bvp5c), il risultato è molto simile (nello specifico le DF portano ad una soluzione leggermente più robusta) e più robusto rispetto ad un approccio input shaping.

Inoltre, nelle Fig. 4.12 e 4.13, possiamo vedere come, irrobustendo il sistema per far fronte a variazioni sulla lunghezza l_2 , otteniamo, al contempo, una maggiore robustezza anche rispetto all'incertezza su l_1 .

Conviene, comunque, irrobustire rispetto a l_2 , perchè nelle applicazioni pratiche sarà il parametro maggiormente soggetto ad incertezze e variabilità. Pensiamo, ad esempio, ad un carro ponte o ad un robot o in generale a delle operazioni di pick & place, che debbano spostare un carico variabile, andando ad alterare la dinamica del modello.

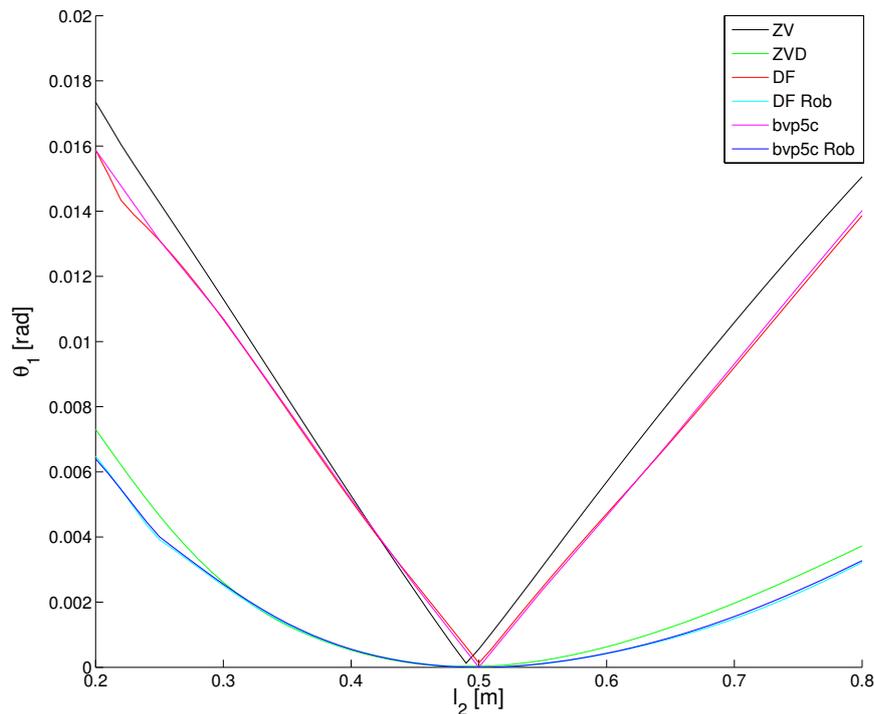


Fig. 4.10: Curve di sensitività rispetto a θ_1 al variare della lunghezza di l_2 .

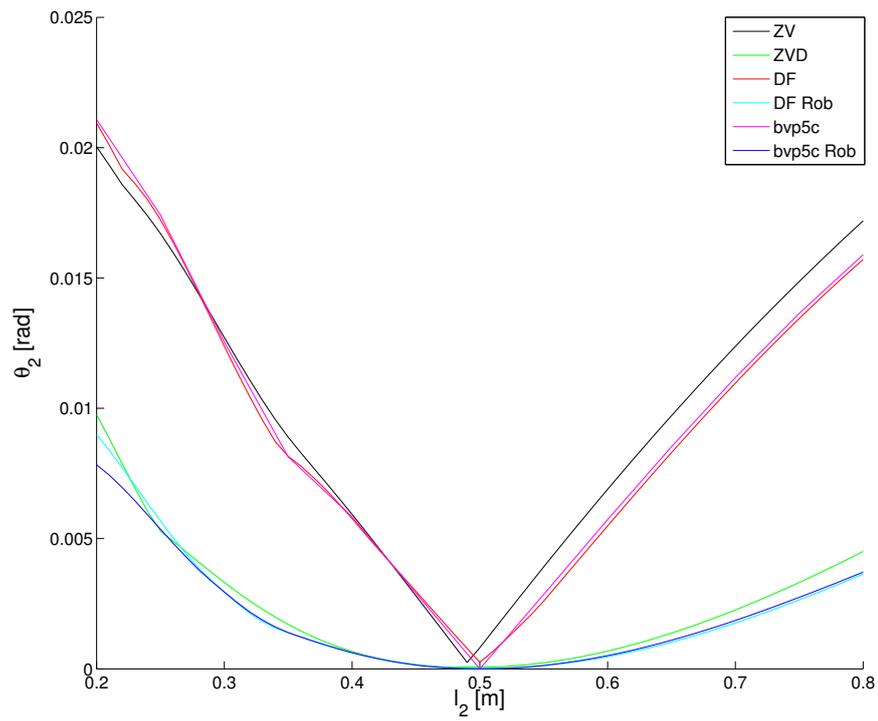


Fig. 4.11: Curve di sensitività rispetto a θ_2 al variare della lunghezza di l_2 .

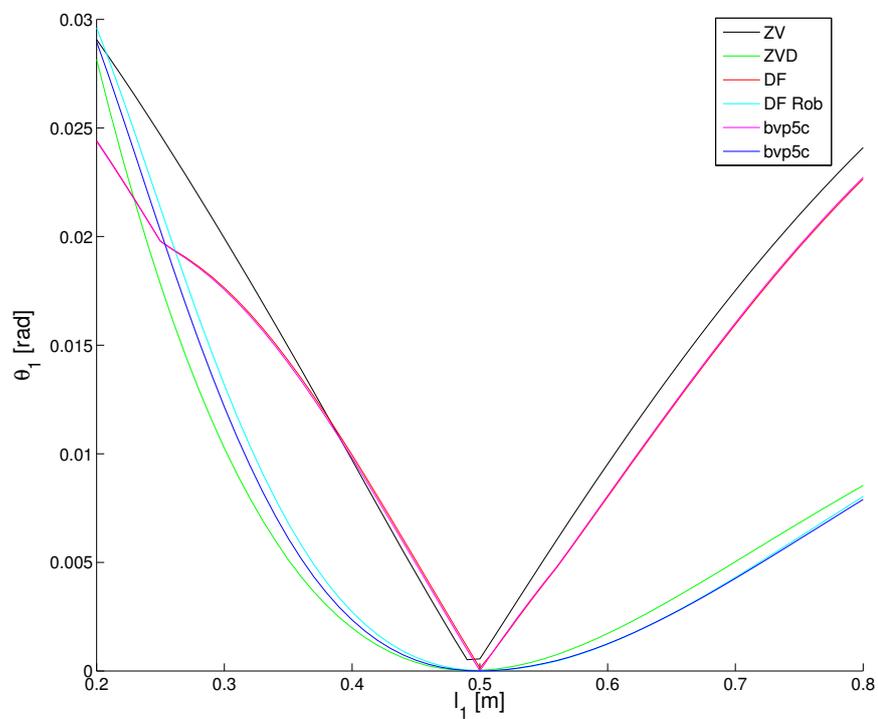


Fig. 4.12: Curve di sensitività rispetto a θ_1 al variare della lunghezza di l_1 .

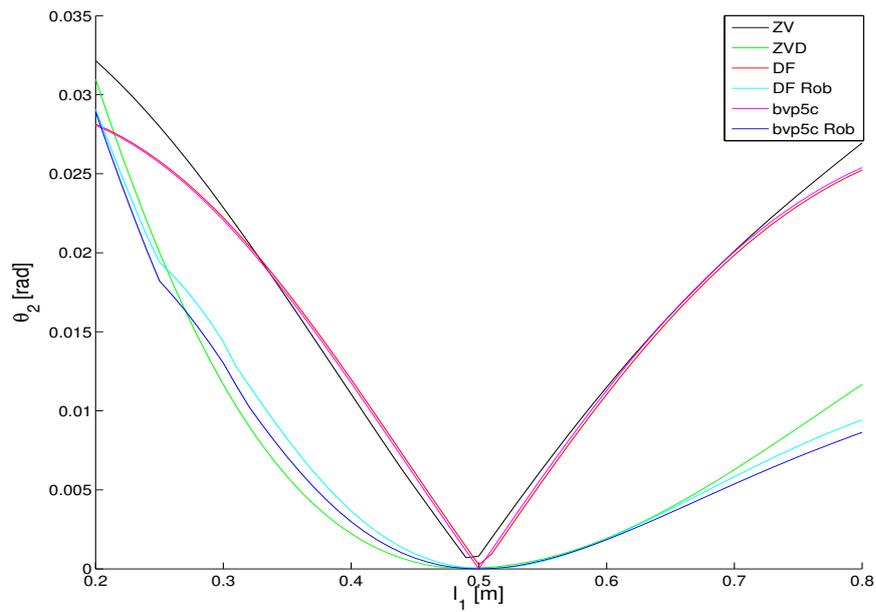


Fig. 4.13: Curve di sensitività rispetto a θ_2 al variare della lunghezza di l_1 .

4.3.3 Simulazioni modello con jerk

Consideriamo il modello con il jerk; in questo modo avremo \ddot{y} nello stato e potremo imporvi, come già visto nel caso del pendolo semplice, delle condizioni iniziali e finali nulle, per evitare la presenza di discontinuità in accelerazione. La traiettoria pianificata avrà, dunque, un'accelerazione continua, come mostrato in Fig. 4.14.

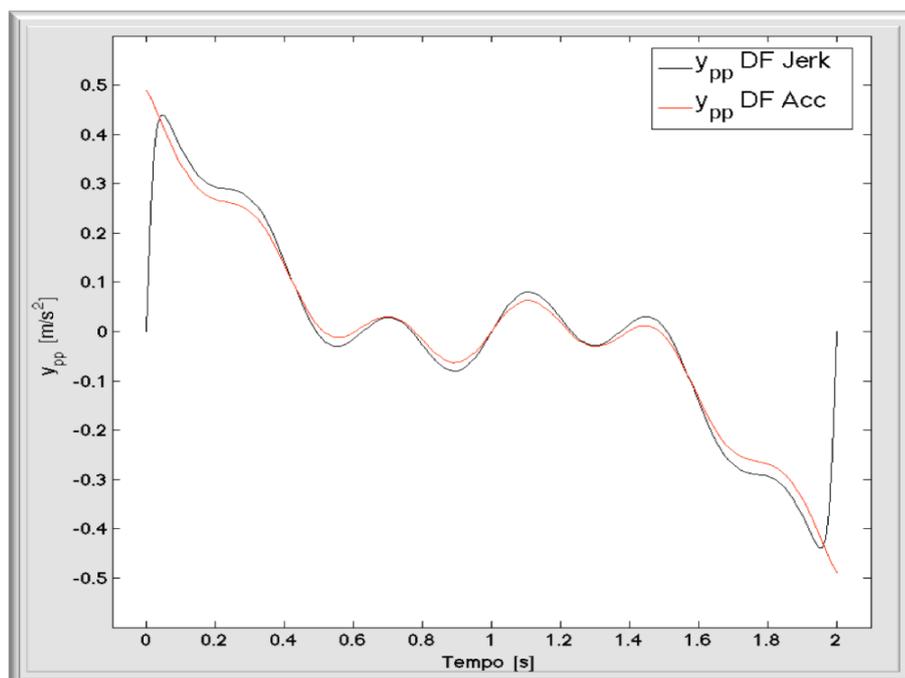


Fig. 4.14: Accelerazione \ddot{y} relativa al modello con jerk e a quello in accelerazione.

Nelle Tab. 4.6 e 4.7, viene presentato un confronto delle prestazioni tra il modello in accelerazione e quello con il jerk, andando a pianificare la traiettoria con le differenze finite e considerando sia il caso semplice, sia quello robusto. Osserviamo un miglioramento nella diminuzione dell'accelerazione richiesta, che nel modello con jerk possiamo imporre anche continua, ottenendo, così, una maggiore dolcezza. Si vede, inoltre, un leggero incremento del picco massimo di oscillazione, mentre il picco della vibrazione residua risulta minore. I tempi di calcolo, infine, rimangono comparabili, anzi addirittura diminuiscono nel caso di pianificazione robusta.

Tab. 4.6: Confronto tecniche con tempo di azionamento 2 [s].

Tecnica	θ_1 Max [rad]	θ_1 Res [rad]	θ_2 Max [rad]	θ_2 Res [rad]
DF	0.041923	0.00014173	0.045636	0.00026909
DF Jerk	0.043031	0.0001032	0.046584	0.00018419
DF Rob	0.046786	0.00016293	0.08422	0.00026755
DF Rob Jerk	0.048977	9.0329e-05	0.099464	0.00015004

Tecnica	Spostamento Max [m]	Vel Max [m/s]	Vel RMS [m/s]
DF	0.20001	0.1252	0.074666
DF Jerk	0.2	0.12557	0.075084
DF Rob	0.20008	0.24908	0.10181
DF Rob Jerk	0.20002	0.26322	0.11149

Tecnica	Acc Max[m/s ²]	Acc RMS[m/s ²]	Acc Con	T calc[s]
DF	0.48939	0.19641	No	3.0318
DF Jerk	0.43693	0.14061	Sì	3.812
DF Rob	4.919	1.138	No	28.7934
DF Rob Jerk	2.3013	0.78001	Sì	24.2802

Nelle Fig. 4.15 e 4.16, viene mostrata la risposta del sistema, simulata tramite Simulink, ad una traiettoria pianificata in un tempo di azionamento $T_{az} = 2s$ con il metodo delle differenze finite ed utilizzando il modello con jerk. Si osservi che l'accelerazione (curva in blu nella figura) presenta, al termine della movimentazione, una leggera sovraelongazione (i.e. invece di arrivare con accelerazione nulla al tempo $t = 2$, ha un valore positivo e poi decade lentamente a zero), che viene riportata ingrandita in Fig. 4.17.

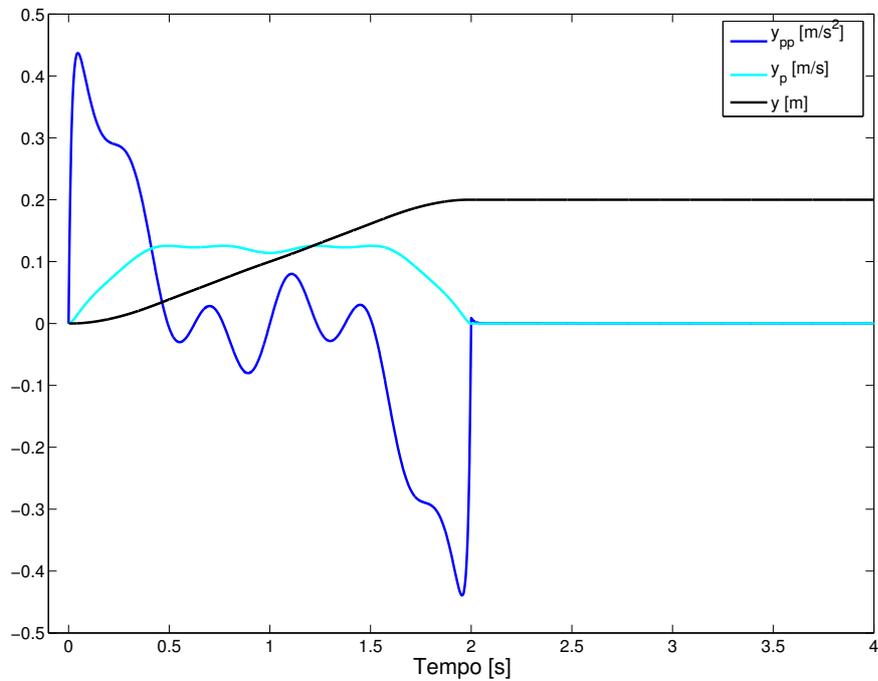
Considerando le curve di sensitività delle oscillazioni residue θ_1 e θ_2 al termine della movimentazione al variare della lunghezza l_2 , riportate in Fig. 4.18, vediamo come la robustezza della soluzione che considera il jerk nel modello sia molto vicina a quella del caso con ingresso in accelerazione. La curva di sensitività nel caso robusto mostra, come desideravamo, il tipico andamento schiacciato, anche se risulta più sensibile per forti variazioni parametriche, rispetto alla versione robusta ottenuta con il modello con ingresso in accelerazione.

Tab. 4.7: Confronto tecniche con tempo di azionamento 1.5 [s].

Tecnica	θ_1 Max [rad]	θ_1 Res [rad]	θ_2 Max [rad]	θ_2 Res [rad]
DF	0.068726	6.3917e-05	0.094348	8.9833e-05
DF Jerk	0.069461	8.1233e-05	0.10177	0.00016163
DF Rob	0.15963	0.00065888	0.47957	0.0010533
DF Rob Jerk	0.16278	0.00016475	0.53725	0.00029159

Tecnica	Spostamento Max [m]	Vel Max [m/s]	Vel RMS [m/s]
DF	0.20002	0.22298	0.10378
DF Jerk	0.20001	0.23466	0.10629
DF Rob	0.31285	1.3869	0.49498
DF Rob Jerk	0.33963	1.6384	0.54815

Tecnica	Acc Max[m/s ²]	Acc RMS[m/s ²]	Acc Con	T calc[s]
DF	1.8343	0.66256	No	3.0181
DF Jerk	1.4324	0.47969	Sì	3.7839
DF Rob	29.2786	8.1127	No	332.7857
DF Rob Jerk	14.4726	5.7166	Sì	265.4746

Fig. 4.15: Simulazione per uno spostamento di 0.2m in un $T_{az} = 2s$, ottenuta con il modello con il jerk e la tecnica delle differenze finite: \ddot{y} , \dot{y} e y .

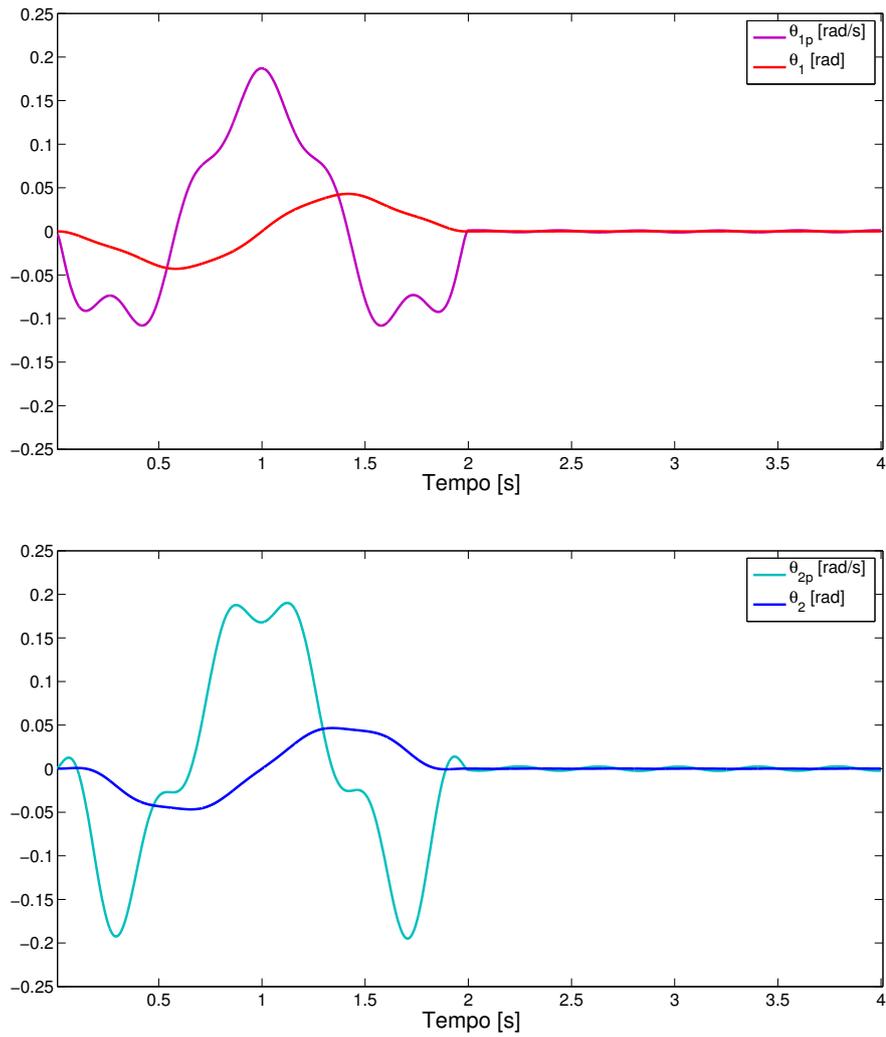


Fig. 4.16: Simulazione per uno spostamento di $0.2m$ in un $T_{az} = 2s$, ottenuta con il modello con il jerk e la tecnica delle differenze finite: $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, θ_1 e θ_2 .

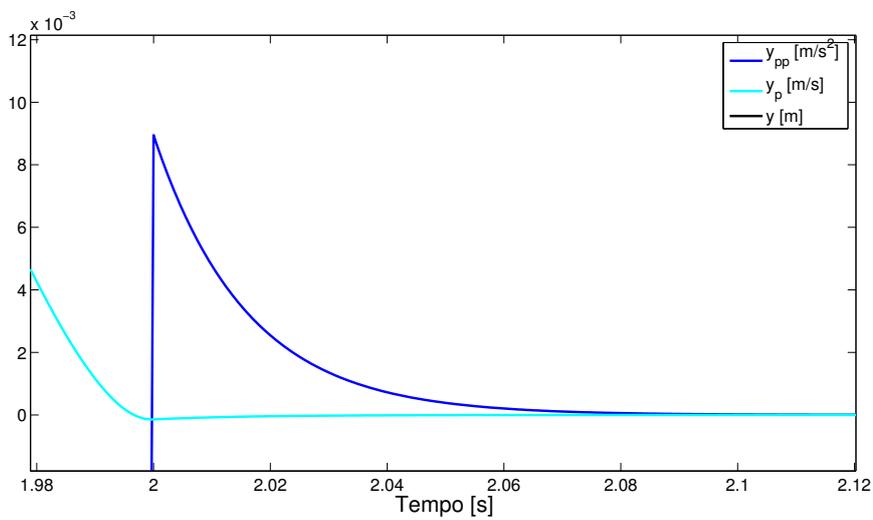


Fig. 4.17: Particolare della sovraelongazione dell'accelerazione finale.

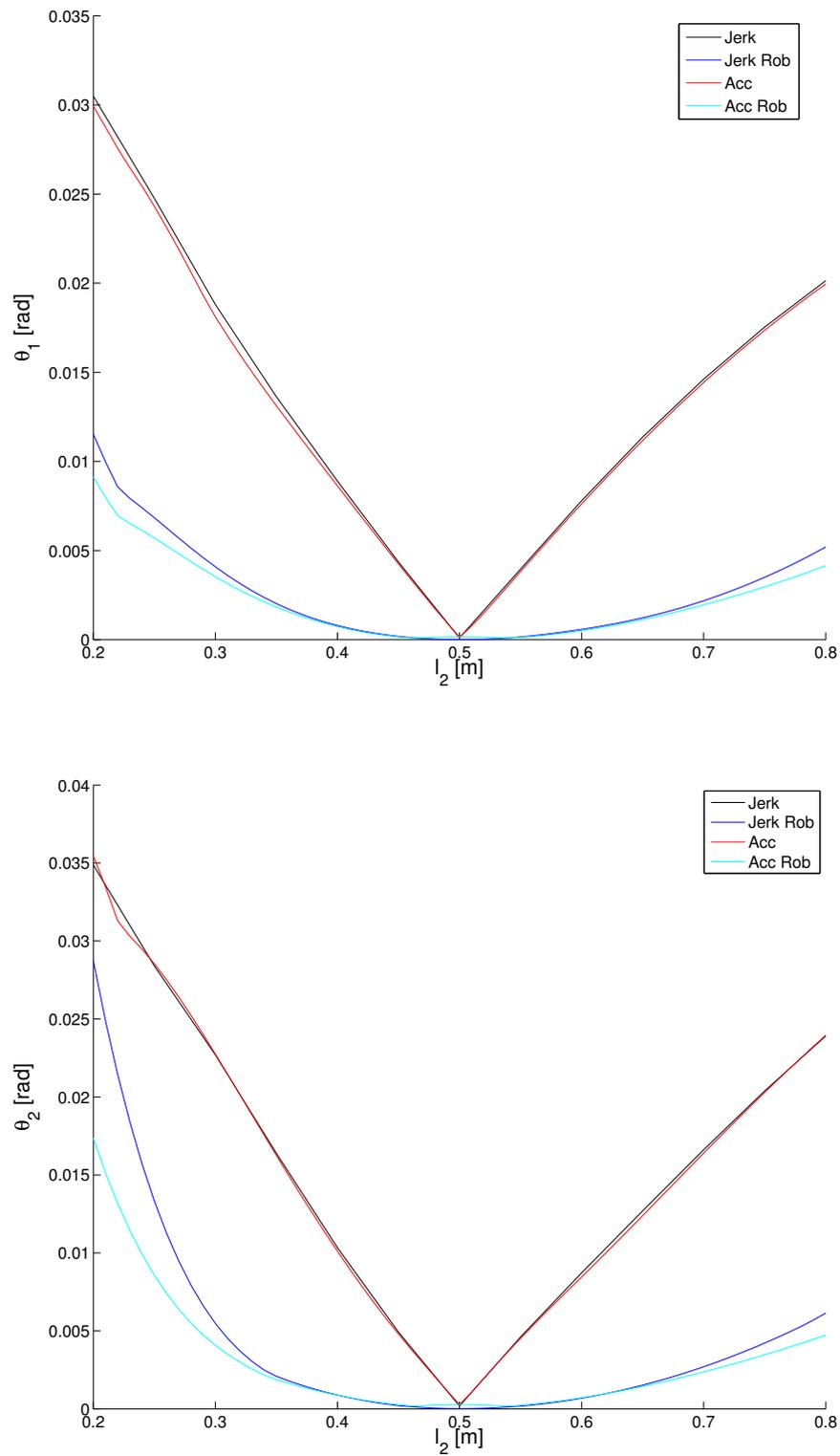


Fig. 4.18: Curva di sensitività al variare della lunghezza l_2 . A sinistra effetto su θ_1 , a destra effetto su θ_2 .

4.3.4 Considerazioni

In questa sezione, come fatto precedentemente per il carrello a 2 gdl, andremo a riassumere brevemente i principali risultati e confronti delle simulazioni.

- Confrontando traiettorie ottime pianificate con il modello con ingresso in accelerazione e con quello con ingresso in forza, otteniamo risultati analoghi in termini di prestazioni. Un'altra volta, però, si dimostra preferibile valutare un ingresso in accelerazione, perché permette di semplificare il modello dinamico del sistema, riducendo il tempo richiesto al calcolo della soluzione del TPBVP, presenta una minore sensibilità alle variazioni parametriche e risulta più efficace e più semplice dal punto di vista dell'utilizzo in sistemi di controllo reali.
- In presenza di un sistema perturbato o di fronte all'impossibilità di ricavare un modello esatto, la pianificazione robusta può risultare indispensabile per minimizzare le vibrazioni al termine della movimentazione. Nel caso del carrello a 3 gdl, però, sono molteplici i parametri che rientrano nel modello del sistema; conviene, allora, irrobustire il sistema rispetto ai parametri più critici, che si sono rivelati essere l_1 e l_2 . Tuttavia, le due lunghezze sono strettamente interconnesse tra loro e legate alle frequenze modali; si è visto, pertanto, che è sufficiente considerare le equazioni di sensibilità rispetto ad uno solo dei due parametri per ottenere un aumento della robustezza alle variazioni di entrambe le grandezze. Come accadeva nel caso del carrello a 2 gdl, si hanno un peggioramento delle prestazioni e traiettorie con frequenti inversioni del moto e, conseguentemente, con un forte aumento delle accelerazioni richieste.
- Nel caso a 3 gdl, data la maggiore complessità del sistema, risultano affidabili e efficaci le soluzioni del TPBVP ottenute con le differenze finite e con la collocazione polinomiale. Osserviamo che presentano prestazioni molto simili tra loro e migliori rispetto al multi-mode shaper, in termini di sensibilità e di vibrazioni, guardando l'angolo massimo di oscillazione e quello residuo al termine della movimentazione. Inoltre, risultano più affidabili e precise, perché il multi-mode shaper, avendo più ZV shaper in cascata, può presentare degli errori di sintonizzazione e richiedere una taratura manuale per la correzione degli errori e per il settaggio dei tempi esatti degli impulsi.
- Vantaggio significativo delle traiettorie ottenute tramite TPBVP è che permettono di ridurre il tempo di azionamento. Il multi-mode shaper, infatti, ha un vincolo temporale dettato dalla somma dei singoli semiperiodi di oscillazione o da multipli di essi andando a considerare il caso robusto. La pianificazione tramite TPBVP, invece, sia semplice che robusta, non ha vincoli temporali, ma sfrutta le inversioni del moto, raggiungendo criticità in termini di accelerazione richiesta e di eventuali vincoli spaziali.
- Sia nella pianificazione semplice, che in quella robusta, la traiettoria ricavata con la tecnica `bvp5c` mostra prestazioni migliori rispetto alle differenze finite, che permettono, però, di ottenere una soluzione più robusta.
- Il modello aumentato con il jerk permette di pianificare la movimentazione imponendo un'accelerazione continua, a vantaggio della dolcezza del moto e del corretto inseguimento del riferimento della traiettoria. Tuttavia, la maggiore complessità del modello, crea diversi problemi di calcolo e di convergenza, ai quali risponde bene ed in modo affidabile solo la tecnica delle differenze finite.

4.4 Setup sperimentale

Il setup, utilizzato per testare sperimentalmente le traiettorie pianificate per questo test case a 3 gdl, è perfettamente analogo a quello già presentato nel caso del carrello a 2 gdl e le interconnessioni dei diversi dispositivi sono sempre quelle illustrate in Fig. 3.23.

A differenza del caso precedente, però, per considerare l'ulteriore grado di libertà del sistema e riprodurre, dunque, la configurazione presentate nello schema in Fig. 4.1, viene aggiunta un altro carico di massa nota a metà del cavo. Pertanto, il sistema ottenuto, anche se presenta masse concentrate e non distribuite, ha il medesimo comportamento modale del modello ricavato ed utilizzato per le simulazioni.

4.5 Risultati sperimentali

In questa sezione vengono ripotati ed analizzati i risultati ottenuti sperimentalmente, riproponendo alcune prove e confronti visti in simulazione.

Si è scelto, dunque, di procedere analogamente al caso a 2 gdl, impostando per il riferimento uno spostamento lungo l'asse X pari a $0.2m$, da percorrere in diversi tempi di azionamento e con le varie traiettorie ottenute dalla soluzione del TPBVP.

Per tutte le prove, inoltre, si fa partire l'azionamento dopo un tempo di $3.5s$. Questo per verificare le condizioni iniziali di oscillazione del carico, data la notevole difficoltà pratica di arrestare completamente la vibrazione all'inizio di ogni prova, essendo presenti due distinti modi oscillatori.

4.5.1 Determinazione dei parametri del sistema

Un primo test è stato volto a determinare i valori esatti delle due frequenze di oscillazione del sistema. Per minimizzare le vibrazioni è, infatti, necessario conoscere bene le frequenze in gioco. Il sistema viene, dunque, lasciato oscillare in evoluzione libera per un tempo $t = 24s$ e viene calcolata la Fast Fourier Transform (FFT), come mostrato in Fig. 4.19.

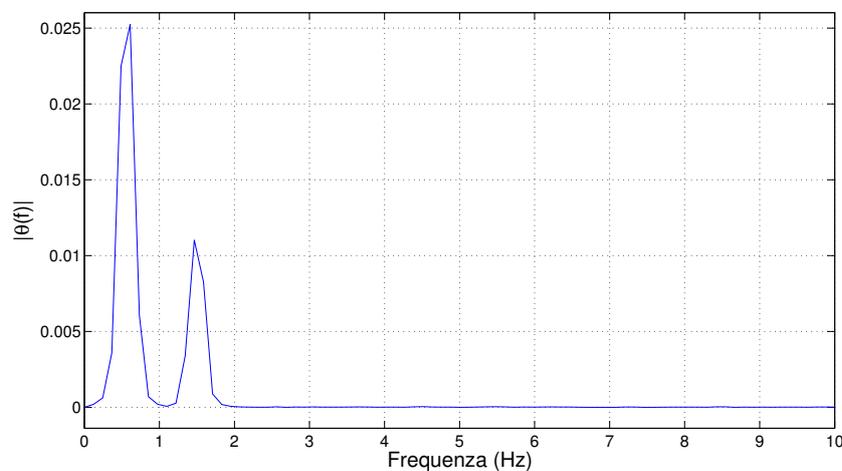


Fig. 4.19: Risposta in frequenza del sistema a 3 gdl.

Per la finestatura è stata considerata una finestra di tipo Hanning⁴.

Le due frequenze risultanti sono:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \simeq 0.61 \text{ Hz}, \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \simeq 1.47 \text{ Hz};$$

e i rispettivi periodi:

$$T_1 = \frac{1}{f_1} \simeq 1.6393 \text{ s}, \quad T_2 = \frac{1}{f_2} \simeq 0.6803 \text{ s}.$$

Determinate, dunque, le frequenze del sistema, possiamo procedere testando le diverse traiettorie pianificate.

4.5.2 Test pianificazione TPBVP a 3 gdl

I risultati sperimentali ottenuti sono analoghi a quanto già visto in simulazione e nel caso del sistema precedente a 2 gdl. In Fig. 4.20 viene riportata, ad esempio, la risposta del sistema ad una traiettoria pianificata in un tempo di azionamento di 2s con differenze finte e ZV con legge armonica. Osserviamo, ancora una volta, un andamento molto simile delle due leggi e oscillazioni residue molto contenute.

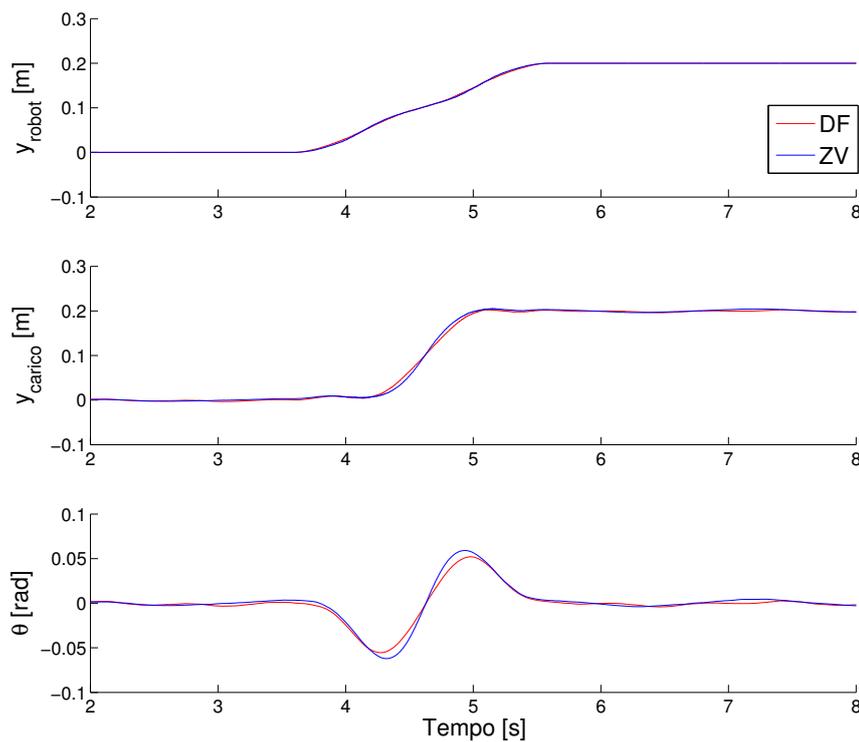


Fig. 4.20: Risposta del sistema a 3 gdl ad una traiettoria pianificata in un $T_{az} = 2s$ con differenze finte e ZV con legge armonica.

⁴Finestra di Hamming considera un coseno rialzato con la seguente formulazione:

$$\omega(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

dove N rappresenta l'ampiezza, in numero di campioni (tipicamente è un numero intero in potenza di 2), di una finestra a tempo discreto, mentre n è un numero intero che assume i valori $0 \leq n \leq N-1$.

A titolo di esempio vengono riportate anche le risposte con il jerk nello stato, in Fig. 4.21, e con una pianificazione robusta rispetto alla lunghezza, in Fig. 4.22.

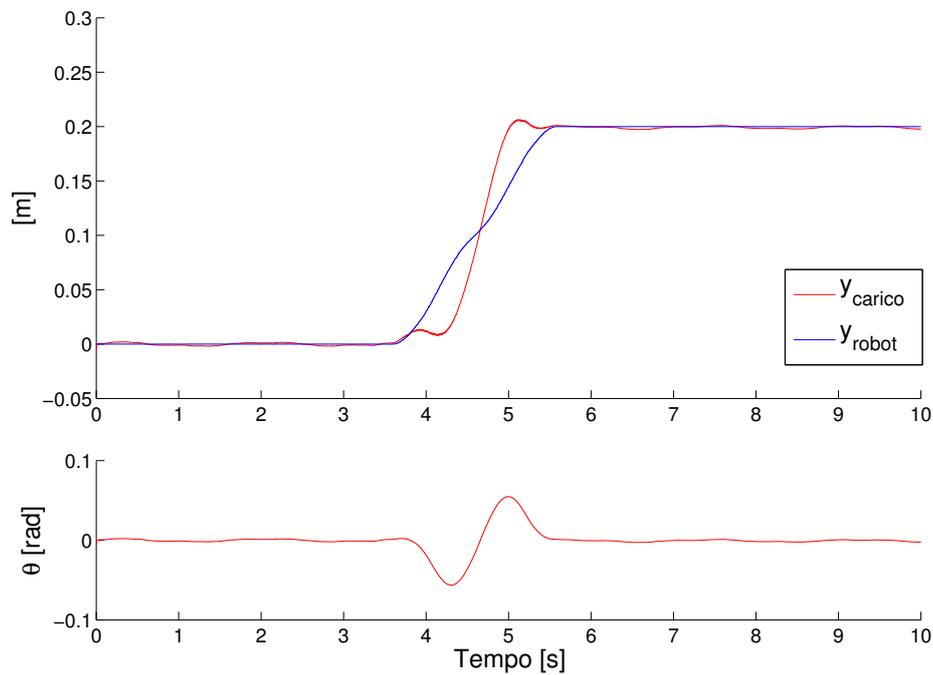


Fig. 4.21: Risposta del sistema a 3 gdl ad una traiettoria pianificata in un $T_{az} = 2s$ con il jerk nello stato.

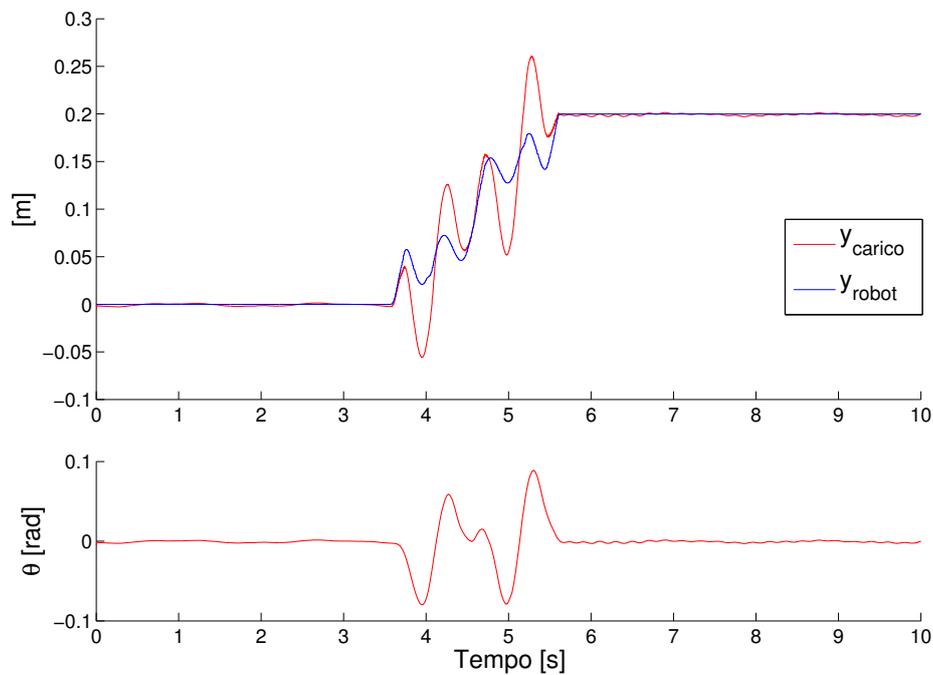


Fig. 4.22: Risposta del sistema a 3 gdl ad una traiettoria robusta pianificata in un $T_{az} = 2s$.

Test Case: Carrello a 4 gdl

In questo capitolo verrà brevemente considerata un'ulteriore estensione del sistema in esame, andando ad aggiungere un nuovo grado di libertà al pendolo, che avrà così tre distinti angoli di rotazione possibile, però sempre giacenti sul piano determinato dalla traslazione del carrello e dalla verticale.

Il capitolo inizierà, dunque, introducendo rapidamente la modellistica del sistema, validata dal confronto con Working Model. Saranno, poi, considerate le diverse soluzioni del TPBVP, avvalendosi delle simulazioni eseguite in ambiente Matlab e Simulink e confrontandone i diversi pregi e difetti.

5.1 Modello

In modo analogo al capitolo precedente, consideriamo un pendolo, che possa traslare unicamente in una direzione y e oscillare secondo tre angoli: θ_1 , θ_2 e θ_3 , come schematizzato in Fig. 5.1. Assumiamo di avere tre membri di lunghezza l_1 , l_2 e l_3 , con massa distribuita rispettivamente m_1 , m_2 e m_3 , un'inerzia della vite equivalente J_{eq} (che riassume il contributo di tutte le inerzie a monte del pendolo), due coefficienti di smorzamento c_1 e c_2 e due coefficienti di elasticità k_1 e k_2 , in corrispondenza dei giunti rotoidali tra i membri. Il sistema, inoltre, giacendo su un piano verticale, sarà soggetto ad una forza di gravità g . Viene presa in considerazione, inoltre, l'aggiunta di un'ulteriore massa m_x , che rappresenti un ipotetico carico da movimentare.

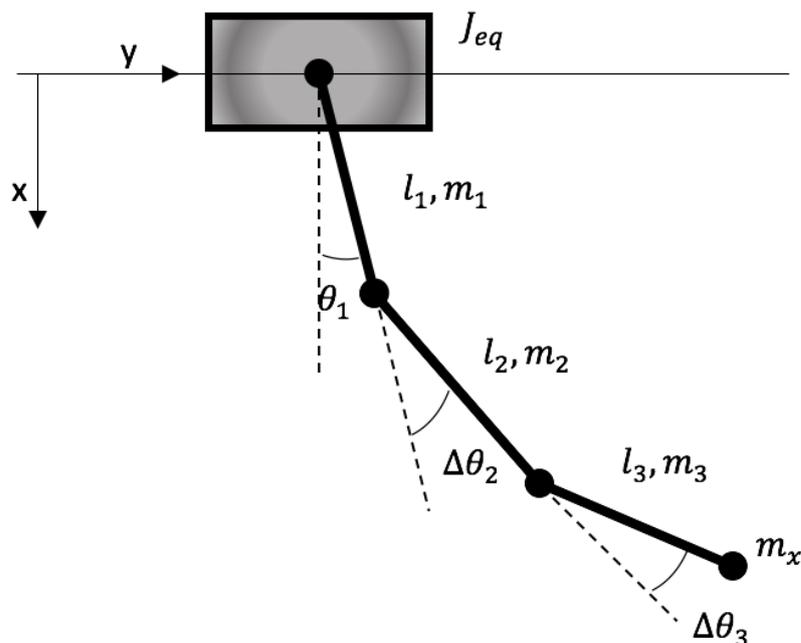


Fig. 5.1: Schema del carrello a 4 gdl.

Il modello è stato ricavato in modo perfettamente analogo al caso del carrello a 3 gdl, sfruttando l'approccio di Lagrange. Vista la maggiore complessità delle derivazioni, l'unica differenza considerata, per cercare di snellire il modello, è stata quella di considerare non gli angoli assoluti, ma i valori relativi rispetto alla rotazione precedente. Vengono considerati, pertanto, gli angoli θ_1 , $\Delta\theta_2$ e $\Delta\theta_3$. Per riportarci ai valori assoluti sarà sufficiente sommare le grandezze, considerando:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta_1 \\ \theta_2 &= \theta_1 + \Delta\theta_2 \\ \theta_3 &= \theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

Come nel caso precedente, la validità del modello è stata verificata con un confronto con Working Model.

5.2 Simulazioni

Nonostante questo test case a 4 gdl non sia stato testato sperimentalmente, è stata verificata sperimentalmente la sua affidabilità nella minimizzazione delle oscillazioni, in un'ottica futura di estendere lo studio a membri rigidi, sfruttando un sistema di movimentazione con vite a ricircolo di sfere e motore brushless (per ulteriori approfondimenti vedere Appendice C).

A titolo di esempio, viene riportata, nelle Fig. 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6, una simulazione della risposta del sistema, utilizzando, ancora una volta, lo schema presentato in Fig. 3.3, ad una traiettoria pianificata con le differenze finite in un $T_{az} = 2s$ e per uno spostamento di $0.2m$. Viene utilizzato il modello in accelerazione, con ingresso \ddot{y} , mostrato in Fig. 5.2.

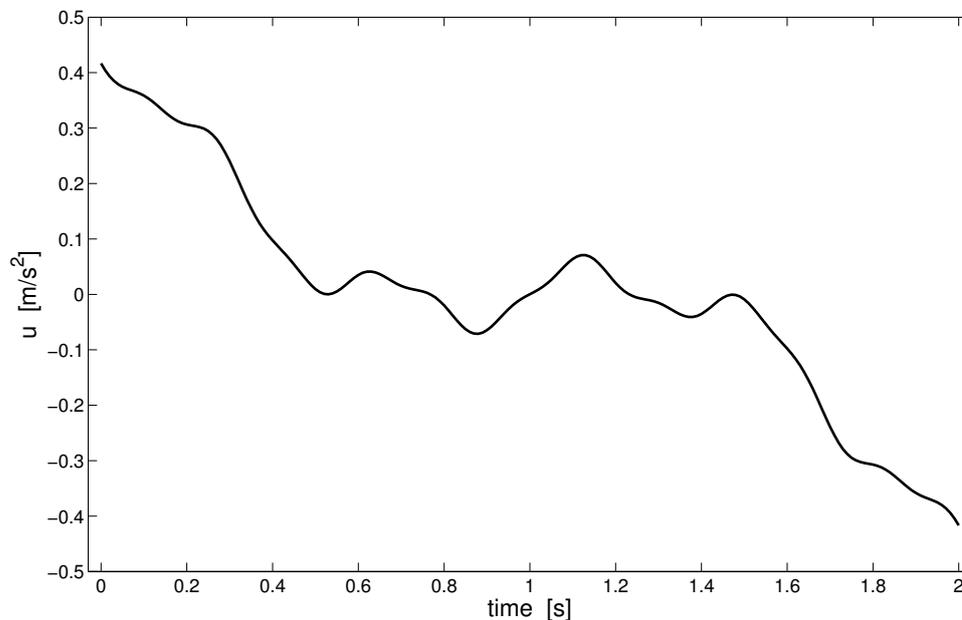
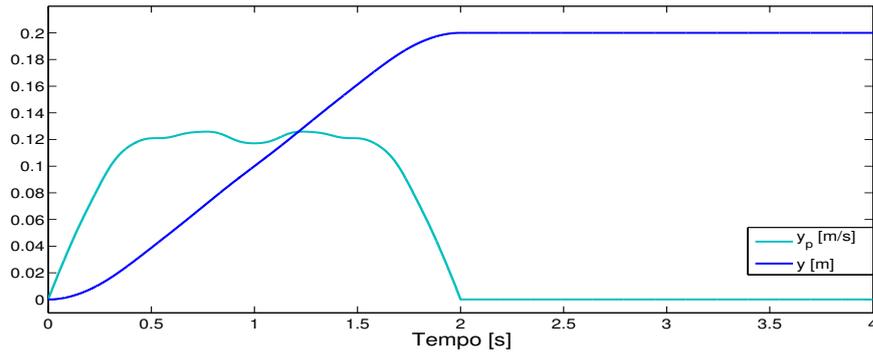
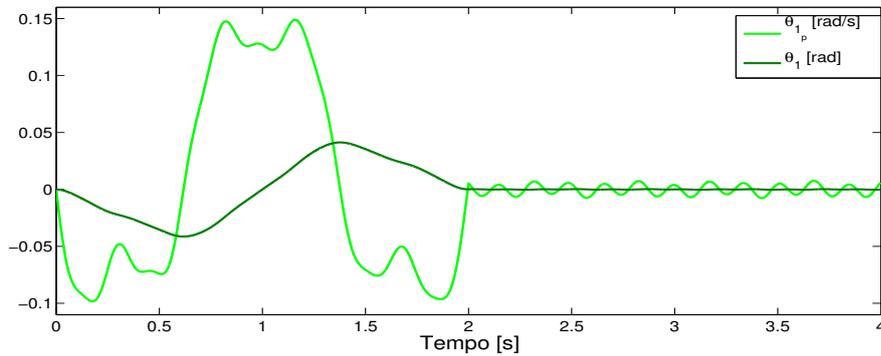
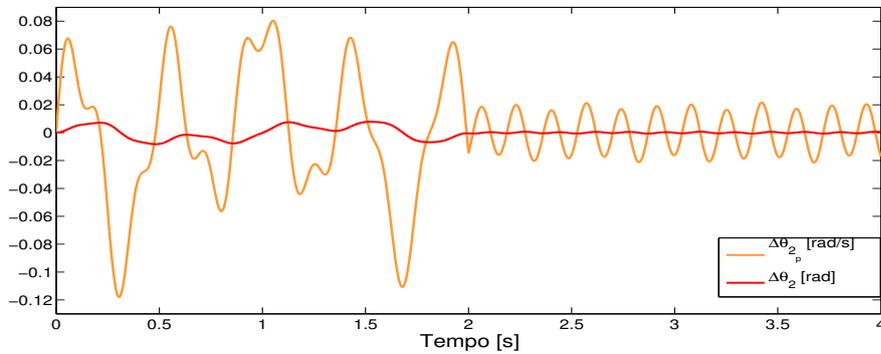
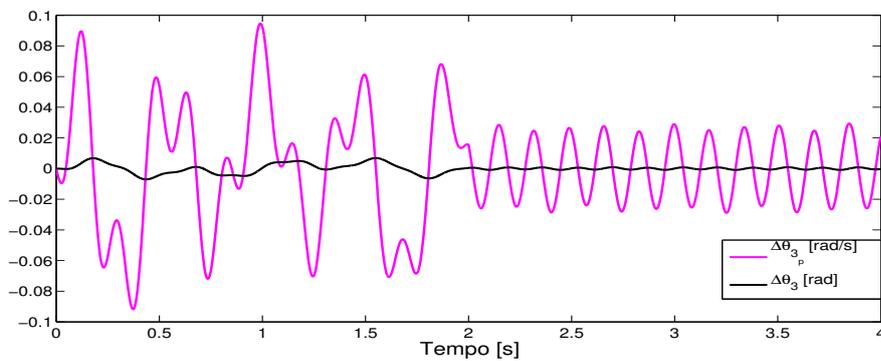


Fig. 5.2: Accelerazione \ddot{y} in ingresso al sistema.

Fig. 5.3: Simulazione test case a 4 gdl: \dot{y} e y .Fig. 5.4: Simulazione test case a 4 gdl: $\dot{\theta}_1$ e θ_1 .Fig. 5.5: Simulazione test case a 4 gdl: $\Delta\dot{\theta}_2$ e $\Delta\theta_2$.Fig. 5.6: Simulazione test case a 4 gdl: $\Delta\dot{\theta}_3$ e $\Delta\theta_3$.

Conclusioni

Cercando di esasperare le prestazioni e ridurre il più possibile i tempi di movimentazione, tutti i macchinari e i robot industriali possono presentare delle dinamiche oscillatorie indesiderate, che determinano delle sollecitazioni strutturali, una perdita di efficienza e un maggiore dispendio energetico, e possono essere anche pericolose perché incontrollate. Attraverso l'analisi e la risoluzione di Two-Point Boundary Value Problems, il presente lavoro di tesi si è proposto di studiare una pianificazione ottima del moto, in catena aperta, in grado di minimizzare le vibrazioni di un sistema dinamico.

In letteratura il problema è largamente trattato e sono state studiate diverse tecniche in feedforward, tra le quali l'input shaping è sicuramente la più diffusa ed utilizzata. Come è noto, tuttavia, questa tecnica richiede una perfetta conoscenza della frequenza naturale e del coefficiente di smorzamento del sistema, e, soprattutto, presenta dei rigidi vincoli per i tempi di azionamento, al di sotto dei quali risulta inutilizzabile, in netto contrasto con i costanti desideri delle aziende di velocizzare la produzione e ridurre i tempi di ciclo. Spesso, inoltre, i sistemi industriali sono soggetti a disturbi esterni e a variazioni dei parametri che li descrivono. Si cerca, dunque, di ottenere una pianificazione robusta, aumentando il numero di impulsi utilizzati per la convoluzione con la legge di moto, incrementando ulteriormente il tempo minimo necessario alla movimentazione.

Le traiettorie ottenute tramite TPBVP, invece, presentano il grande vantaggio di non avere vincoli temporali, ma minimizzano le vibrazioni sfruttando le inversioni del moto, che determinano una maggiore accelerazione richiesta all'azionamento. Tali tecniche TPBVP, per evincerne tutti i pregi e difetti, sono state analizzate in simulazione e poi testate sperimentalmente in laboratorio con il setup illustrato precedentemente.

Innanzitutto, per i due test case analizzati, sono stati ricavati, utilizzando l'approccio di Lagrange, i modelli dinamici con ingresso in forza e con ingresso in accelerazione. Si è subito visto, in simulazione, come convenga considerare un ingresso in accelerazione, rispetto ad uno in forza, perché permette di semplificare il modello dinamico del sistema, riducendo il tempo di calcolo richiesto per trovare la soluzione del TPBVP. Inoltre, l'approccio in posizione (o in accelerazione) risulta leggermente più robusto alle variazioni parametriche, più efficace dal punto di vista dell'utilizzo in sistemi di controllo reali e più affidabile, perché si sfrutta un anello interno, che compensa eventuali dinamiche non modellate, secondo la tipica struttura dei controllori ad anelli annidati. Per i successivi confronti è stato, pertanto, adottato il modello con ingresso in accelerazione e si è visto, sia in simulazione che sperimentalmente, come le soluzioni TPBVP portino, effettivamente, a minimizzare le vibrazioni residue al termine della movimentazione.

I diversi metodi di soluzione di TPBVP presentano prestazioni molto simili tra loro, anche se si è osservato che le soluzioni ottenute con le differenze finite e con la collocazione polinomiale sono le più efficaci, risultando le migliori, rispettivamente, per robustezza e per picco di oscillazione massimo e residuo, ed affidabili, soprattutto nel caso del carrello a 3 gdl, data la maggiore complessità del sistema. Si è visto, inoltre, come un approccio TPBVP sia migliore rispetto all'input shaping, in termini di vibrazioni, guardando l'angolo massimo di oscillazione e quello residuo al termine della movimentazione, e di sensitività. Tale vantaggio risulta più evidente all'aumentare della complessità del sistema, perché, per minimizzare le vibrazioni con l'input shaping in presenza di più frequenze modali, bisogna adottare un approccio multi-mode shaper. Avendo, allora, più ZV shaper in cascata, si possono presentare degli errori di sintonizzazione e può essere necessaria una taratura manuale per la correzione degli errori e per il settaggio dei tempi esatti degli impulsi.

Successivamente, è stato verificato, oltre che in simulazione anche sperimentalmente, il vantaggio dell'approccio TPBVP di non avere vincoli temporali, pianificando delle traiettorie in tempi di azionamento inferiori alle limitazioni imposte all'input shaping dal periodo di oscillazione.

Tale vantaggio è apparso ancor più evidente nel caso di traiettorie robuste alle variazioni parametriche. In presenza di un sistema perturbato o di fronte all'impossibilità di ricavare un modello esatto, infatti, la pianificazione robusta risulta fondamentale ed indispensabile per minimizzare le vibrazioni al termine della movimentazione. Abbiamo visto, dunque, in simulazione e verificato anche sperimentalmente, variando la lunghezza del cavo, che l'introduzione delle funzioni di sensitività permettesse effettivamente di ridurre l'angolo di oscillazione residuo, dovuto a valori dei parametri del modello diversi da quelli nominali. Si ottiene, cioè, nel caso robusto, una curva di sensitività molto più bassa e schiacciata, rispetto alla tipica forma a "V" della pianificazione semplice.

Nel caso del carrello a 3 gdl, avendo molteplici parametri che rientrano nel modello, il sistema è stato irrobustito rispetto ai parametri più critici, che si sono rivelati essere le due lunghezze l_1 e l_2 . Tuttavia, tali lunghezze sono strettamente interconnesse tra loro e legate alle frequenze modali; si è visto, pertanto, che è sufficiente considerare le equazioni di sensitività rispetto ad uno solo dei due parametri per ottenere un aumento della robustezza alle variazioni di entrambe le grandezze. Rispetto ad una pianificazione semplice, con le traiettorie robuste si hanno, però, un peggioramento delle prestazioni e frequenti inversioni del moto e, conseguentemente, un forte aumento delle accelerazioni richieste. Bisognerà, dunque, valutare sempre un trade off tra le prestazioni desiderate per il sistema e la robustezza ricercata, considerando il livello di affidabilità del modello utilizzato.

Risolvendo un TPBVP con il modello con ingresso in accelerazione, però, si ottiene una traiettoria ottima con un profilo di accelerazione del carrello discontinuo. In questo modo, la movimentazione pianificata non può essere seguita perfettamente da attuatori reali e l'accelerazione effettiva è diversa dal riferimento $\ddot{y} \neq \ddot{y}_{ref}$. Per risolvere tale problema, si è pensato di aumentare lo stato, andando a ricavare un modello che considerasse anche il jerk del carrello, così da poter imporre delle condizioni iniziali e finali anche sull'accelerazione. Considerando, pertanto, un filtro in ingresso opportunamente tarato, tenendo conto della dinamica (della banda passante) del sistema da comandare, abbiamo verificato che, senza perdite di prestazioni, si riesce ad ottenere un'accelerazione continua, a vantaggio della dolcezza del moto e del corretto inseguimento del riferimento della traiettoria. Si dimostra, dunque, un approccio semplice ed efficace. Tuttavia, per risolvere il TPBVP così definito, è affidabile solo la tecnica delle differenze finite, mentre gli altri metodi, per la maggiore complessità del modello, presentano diversi problemi di calcolo e di convergenza.

Per future applicazioni, l'idea è quella di estendere il lavoro a membri rigidi e, successivamente, anche a membri flessibili. Andando ad investigare, quindi, un sistema ad aste flessibili, per la cui movimentazione è già stata dimensionata una unità lineare, composta da una vite a ricircolo di sfere e un motore brushless.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare calorosamente il Professore Dario Richiedi e l'Ingegnere Paolo Boscariol per il loro aiuto, per i loro insegnamenti e per le loro immancabili idee geniali nell'affrontare ogni sorta di problema. Un sentito ringraziamento ad Aldo, per la sua tenacia nel cercare risolvere i continui problemi del sistema sperimentale.

Ringrazio di cuore i miei insostituibili ed impareggiabili genitori Antonio e Fiorella, mia nonna Zaira per il suo sostegno e l'incontenibile profusione di critiche costruttive, i miei cugini Alessio ed Abramo, miei modelli di riferimento, mio zio Giovanni per il suo utilissimo poliglottismo, mia zia Bibi, regina del punto e virgola; tutti sempre collaborativi e propositivi.

Un pensiero è rivolto, infine, a tutti i miei amici, compagni di gioie e sofferenze, a tutte le persone, a cui possa stare a cuore la mia felicità, al mitico Ugo e a te mio caro lettore, sperando di non averti tediato troppo nella lettura, sempre che tu sia arrivato a leggere questo sudato, ma anche piacevole, commiato.

Bibliografia

- [1] D. E. Kirk, “Optimal Control Theory: An Introduction”, *Dover Publications, Libro, 2004*.
- [2] A. E. Bryson and Y. C. Ho, “Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control”, *Dover Publications, Libro, 2004*.
- [3] A. Ata, “Optimal trajectory planning of manipulators: a review”, *Journal of Engineering Science and Technology 2 (1), 32-54, 2007*.
- [4] A. Gasparetto, P. Boscariol, A. Lanzutti and R. Vidoni, “Trajectory planning in robotics”, *IMathematics in Computer Science, 1-11, 2012*.
- [5] M. Korayem, A. Nikoobin and V. Azimirad, “Trajectory optimization of flexible link manipulators in point-to-point motion”, *IRobotica 27 (06), 825-840, 2009*.
- [6] P. Boscariol, A. Gasparetto, R. Vidoni and A. Romano, “A model-based trajectory planning approach for flexible-link mechanisms”, *Mechatronics (ICM), 2013 IEEE International Conference on. IEEE, pp. 219-224, 1-11, 2013*.
- [7] P. Boscariol, “Robust trajectory planning with MATLAB”, *tutorial-v0.1, March 29, 2016*.
- [8] L. Pontryagin and R. Gamkrelidze, “The mathematical theory of optimal processes”, *CRC Press, Vol. 4, 1986*.
- [9] T. Singh, “Optimal Reference Shaping for Dynamical Systems: Theory and Applications”, *CRC Press, Libro, 2010*.
- [10] S. K. Agrawal and T. Veeraklaew, “A Higher-Order Method for Dynamic Optimization of a Class of Linear Systems”, *ASME digital collection, Vol.118, pp. 786-791, December 1996*.
- [11] Z. Li, “Finite difference methods for two-point boundary value problems”, *Computational Mathematics, Chapter 3*.
- [12] Gabriella Sebestyen, “Numerical Solution of Two-Point Boundary Value Problems”, *Tesi, 2011*.
- [13] A. Hindmarsh and K. Radhakrishnan, “Description and Use of LSODE, the Livermore Solver for Ordinary Differential Equations”, *NASA Reference Publication 1327, 1993*.
- [14] S. Gonzalez Pinto, S. Perez Rodriguez and J.I. Montijano Torcal, “On the numerical solution of stiff IVPs by Lobatto IIIA Runge-Kutta methods.”, *Dispensa, October 2002*.
- [15] L. O. Jay, “Lobatto Methods”, *Departments of Mathematics, dispensa*.
- [16] T. A. Hindle and T. Singh, “Desensitized Minimum Power/Jerk Control Profiles for Rest-to-Rest Maneuvers”, *American Control Conference, pp. 3064-3068, June 2000*.
- [17] P. Boscariol and A. Gasparetto “Robust model-based trajectory planning for non-linear systems”, *Journal of Vibration and Control, published online before print February 3, 2015*.
- [18] A. De Luca, “Modello dinamico dei robot: approccio Lagrangiano”, *Dispensa, 2009*.

- [19] P. Rocco, “Dinamica del robot”, *Dispensa*.
- [20] T. Singh and W. Singhose, “Tutorial on Input Shaping/Time Delay Control of Maneuvering Flexible Structures”, *American Control Conference, 2002*.
- [21] S. S. Gurleyuk, O. Bahadir, Y. Turkkan and H. Usenti, “Improved Three-Step Input Shaping Control of Crane System”, *ISSN: 1109-2777, pp. 652-661, June 2008*.

Input Shaping

L'input shaping è una tecnica di pianificazione tipicamente utilizzata per sistemi oscillanti in bassa frequenza. Si presenta come un controllo in feedforward, che permette di ottenere una determinata movimentazione in un tempo di azionamento prestabilito, eliminando o riducendo le oscillazioni residue indesiderate. L'idea è quella di generare un'appropriata sequenza di impulsi che, una volta convoluta con la legge di moto di riferimento, permetta al sistema di ottenere idealmente un andamento del carico con vibrazione residua nulla.

Per capire come funziona tale meccanismo, consideriamo il comando più semplice: l'impulso. Applicando un impulso A_1 al tempo $t_1 = 0$, ad esempio ad un robot flessibile, si avrà una vibrazione. Tuttavia, immaginiamo un ulteriore impulso A_2 , sfasato rispetto al primo di metà del periodo dell'oscillazione (i.e. $t_2 = T/2$) e di ampiezza opportuna; si va, dunque, ad instaurare una seconda risposta, che si somma alla prima in controfase e che può compensarla ottenendo un'oscillazione residua nulla, come si può vedere in Fig. A.1.

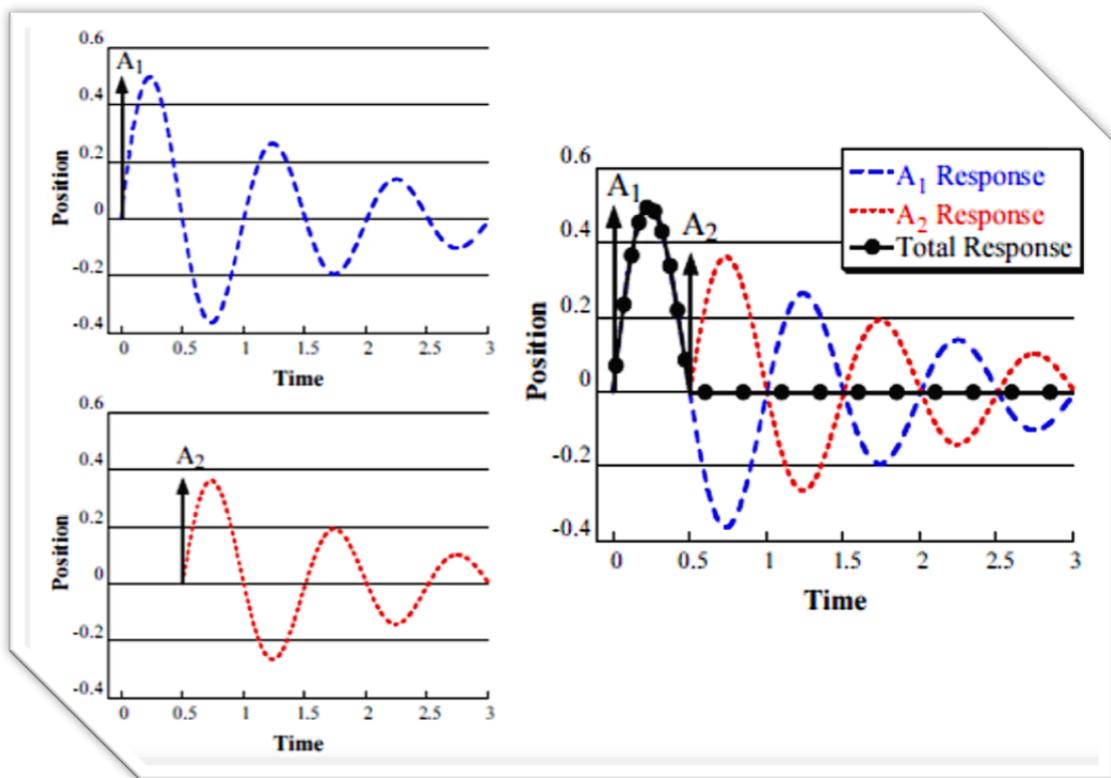


Fig. A.1: Risposta con input shaping.

Tale metodo, in modo analogo, può essere applicato a qualunque legge di moto, scalandola nelle ampiezze ed applicandola nell'istante temporale giusto, ottenendo, dunque, uno Zero Vibration (ZV) shaper [20]. Risulta necessaria, pertanto, una perfetta conoscenza dei parametri, che, cioè, siano noti e costanti: ω_n e ξ .

In generale, il modello di un sistema dinamico oscillante si può pensare come:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = Fu(t)$$

La cui funzione di trasferimento è nella forma

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

dove ω_n è la frequenza naturale, mentre ξ il coefficiente di smorzamento e valgono le seguenti relazioni

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

La vibrazione residua si ottiene dal tempo dell'ultimo impulso t_n come

$$V_{(\xi,\omega)} = e^{-\xi\omega_n t_n} \sqrt{C_{(\xi,\omega)}^2 + S_{(\xi,\omega)}^2}$$

con

$$C_{(\xi,\omega)} = \sum_{j=1}^n A_j e^{\xi\omega_n t_j} \cos(\omega_d t_j)$$

$$S_{(\xi,\omega)} = \sum_{j=1}^n A_j e^{\xi\omega_n t_j} \sin(\omega_d t_j)$$
(A.0.1)

Dove $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ è la frequenza smorzata. Allora per ottenere una risposta con oscillazione nulla, dopo l'ultimo impulso, le Eq. (A.0.1) devono essere zero. L'ampiezza degli impulsi, inoltre, dovrà essere unitaria, in modo tale da ottenere lo stesso spostamento determinato dalla legge di moto senza input shaping, quindi vale: $\sum_{j=1}^n A_j = 1$.

Considerando due impulsi per uno ZV shaper, si ottengono le rispettive ampiezze e tempi mostrati nell'Eq. (A.0.2).

$$ZV = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+K} & \frac{K}{1+K} \\ 0 & \frac{\pi}{\omega_d} \end{bmatrix}$$
(A.0.2)

Dove

$$K = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

La legge complessiva risulta dalla somma:

$$x(t) = A_1 x_{ref}(t) + A_2 x_{ref}(t - t_2)$$
(A.0.3)

Tuttavia, funziona se il motore si muove esattamente come pianificato; si ipotizza, cioè, che $x_m = x_m^{Des}$. Nel seguito verrà preso in considerazione anche questo aspetto, considerando un modello del sistema aumentato, nel quale si aggiunge un filtro in ingresso. Inoltre, si può avere un errore considerevole, se si hanno un'elevata variabilità nella frequenza o una notevole incertezza sui parametri. Pertanto, si può pensare ad uno shaper robusto, Zero Vibration and Derivative (ZVD), che vada ad aumentare il numero di impulsi [21], come in Fig. A.2.

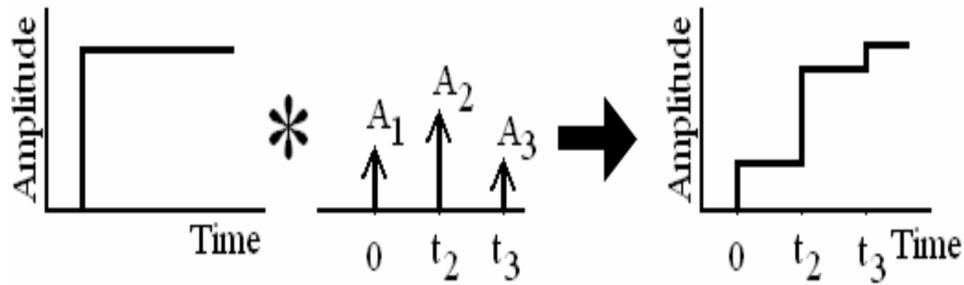


Fig. A.2: ZVD shaper.

Per trovare: A_1 , A_2 , A_3 , t_2 e t_3 , una soluzione si può ottenere ponendo uguali a zero le derivate delle Eq. (A.0.1) rispetto alla frequenza naturale del sistema.

$$\frac{dC(\xi, \omega)}{d\omega_n} = \sum_{j=1}^n -A_j t_j e^{\xi \omega_n t_j} \sin(\omega_d t_j) = 0$$

$$\frac{dS(\xi, \omega)}{d\omega_n} = \sum_{j=1}^n A_j t_j e^{\xi \omega_n t_j} \cos(\omega_d t_j) = 0$$

Otteniamo, quindi, la seguenti relazioni:

$$ZVD = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+2K+K^2} & \frac{2K}{1+2K+K^2} & \frac{K^2}{1+2K+K^2} \\ 0 & \frac{\pi}{\omega_d} & \frac{2\pi}{\omega_d} \end{bmatrix} \quad (\text{A.0.4})$$

In modo analogo, è possibile costruire controllori più robusti (e.g. ZVDD, ZVDDD), con un numero crescente di impulsi. Occorre osservare che, maggiore è la robustezza, maggiore è il tempo che viene richiesto per la movimentazione, in quanto ogni impulso deve essere sfasato rispetto al precedente di metà del periodo di oscillazione.

Fin qui abbiamo considerato sistemi oscillanti ad un'unica frequenza; in generale, tuttavia, potremo avere molteplici modi di vibrare. Si può adottare, dunque, un multi-mode shaping, con il quale andare a sintonizzarsi a diverse frequenze modali, usando più input shaper in cascata. Il ritardo totale del tempo della pianificazione sarà dato dalla somma dei singoli semiperiodi. Nel test case del carrello a 3gdl considerato, si hanno due frequenze di oscillazione del pendolo. In Fig. A.3 viene mostrato lo schema Simulink utilizzato, dove in ingresso viene fornita un'opportuna legge di moto, calcolata per il tempo di azionamento desiderato, e si hanno quindi i due ZV shaper in cascata, con i delay che rappresentano metà dei periodi di oscillazione.

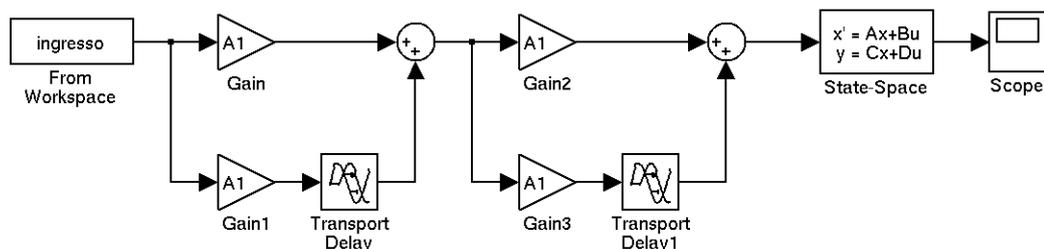


Fig. A.3: Schema Simulink per un multi-mode shaping.

Legge di Moto Armonica

Una legge di moto è una funzione matematica, che va a rappresentare una traiettoria in posizione, velocità ed accelerazione, rispetto al tempo. In generale, possiamo considerare un tempo T di azionamento e una alzata h , che portano, dunque, il sistema dalla condizione iniziale $q(t_0) = q_0$ a $q(t_0 + T) = q_0 + h$.

Spesso, tuttavia, conviene adottare una rappresentazione normalizzata della legge di moto (i.e. scalandola nel tempo e nelle ampiezze in modo da avere valori unitari). Pertanto, chiamiamo s lo spostamento normalizzato, mentre $\tau = \frac{t-t_0}{T}$ è il tempo normalizzato, come si può vedere in Fig. B.1. Ci possiamo poi riportare alla rappresentazione non normalizzata, sfruttando le seguenti relazioni:

$$q(t) = q_0 + h \cdot s(\tau)$$

$$\dot{q}(t) = \frac{h}{T} \cdot s'(\tau) \tag{B.0.1}$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{h}{T^2} \cdot s''(\tau)$$

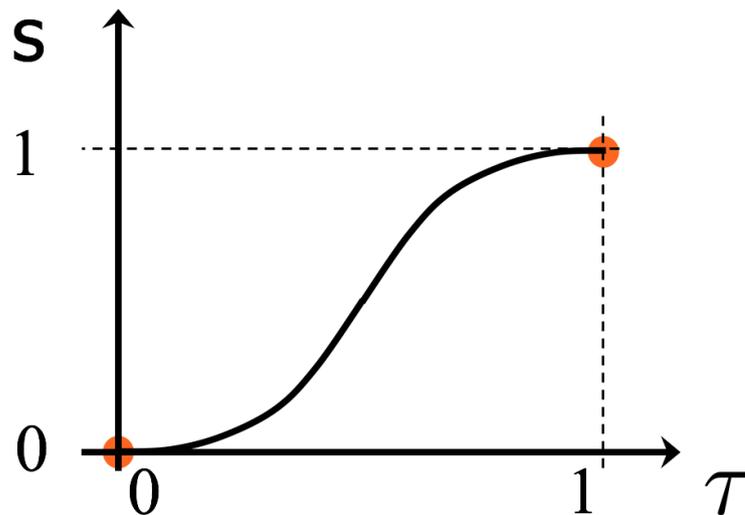


Fig. B.1: Legge di moto normalizzata.

La legge Armonica nasce per il rest to rest (i.e. per il moto di un oggetto che parta da fermo e arrivi alla posizione finale fermandosi) e sfrutta l'idea di utilizzare una funzione coseno in posizione, che verrà considerata come differenza rispetto all'unità e divisa per

due, per ottenerne la versione normalizzata. Avremo allora:

$$s(\tau) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi\tau))$$

$$s'(\tau) = \frac{\pi}{2} \sin(\pi\tau)$$

$$s''(\tau) = \frac{\pi^2}{2} \cos(\pi\tau) \tag{B.0.2}$$

$$s'''(\tau) = \begin{cases} \infty & \tau = 0 \\ -\frac{\pi^3}{2} \sin(\pi\tau) & \tau \neq 0, 1 \\ \infty & \tau = 1 \end{cases}$$

Globalmente risulta una legge molto semplice, dal punto di vista della formulazione e dei calcoli, e molto buona, per valori di velocità e accelerazione massime e per accelerazione RMS; notiamo, comunque, che presenta delle discontinuità in accelerazione, che portano ad un jerk infinito.

Dimensionamento del sistema per una futura realizzazione

Per future applicazioni, l'idea è quella di estendere il lavoro alla flessibilità dei membri. Come già accennato nel resto della trattazione, si è pensato ad una vite a ricircolo di sfere, azionata da un motore brushless, che vada a movimentare un sistema di aste di alluminio, collegate tra loro e con la chiocciola con degli accoppiamenti rotoidali¹. Scelti, dunque, dei valori plausibili per le velocità in gioco, il materiale, le lunghezze e lo spessore dei membri mobili, si procede dimensionando opportunamente la vite a ricircolo di sfere e il motore, in modo da poter valutare, tra le diverse soluzioni in commercio, quella che possa soddisfare maggiormente le prestazioni desiderate. Si consideri, tuttavia, preferibile una soluzione sovradimensionata, rispetto alle specifiche, nell'ottica di poter spingere maggiormente le prestazioni, sempre in uno sviluppo successivo.

Introduciamo, pertanto, i principi teorici delle viti a ricircolo di sfere e i passi da seguire per un corretto dimensionamento. Successivamente, la metodologia esposta sarà applicata al caso in esame, mostrando lo sviluppo dei passaggi che permettano di portare ad un'opportuna scelta da catalogo. Determinata, dunque, la vite, sarà possibile scegliere propriamente un motore elettrico.

C.0.1 Viti a ricircolo di sfere

Spesso, nelle applicazioni industriali, il moto che viene richiesto è di traslazione di utensili o assi; risulta necessario, dunque, generare un moto lineare da un moto rotativo, essendo i motori elettrici adottati tipicamente rotativi.

In passato erano diffusi sistemi a vite-madrevite, quali viti trapezoidali, in cui la trasformazione del moto è ottenuta attraverso lo strisciamento tra i filetti della vite e quelli della chiocciola. Tuttavia, per questioni geometriche, si ha un attrito di strisciamento elevato, che permette di raggiungere un rendimento minore del 50%, determinando, pertanto, l'irreversibilità del moto per l'elevata dissipazione di potenza. In automazione vengono, dunque, utilizzate viti a ricircolo di sfere (VRS), che sono costituite da un albero filettato, da un sistema a chiocciola e da un certo numero di sfere. La trasformazione del moto è realizzata grazie al rotolamento delle sfere interposte tra il filetto della chiocciola e quello della vite. In questo modo il rendimento sale fino al 97% (come mostrato in Fig. C.1), poichè l'attrito radente dovuto agli strisciamenti fra le superfici a contatto è sostituito dall'attrito volvente tra le sfere e le piste di rotolamento, rendendole particolarmente adatte per l'automazione. Infatti, un rendimento elevato determina una minore usura delle parti in movimento, ma soprattutto una ridotta dissipazione di potenza, dunque un minore innalzamento di temperatura con una conseguente dilatazione molto piccola, permettendo così di ottenere un'elevata precisione.

Tipologie

Alcune tra le tipologie più diffuse in commercio sono le seguenti:

- Viti standard / miniaturizzate
- Viti a passo corto / a passo lungo

¹Accoppiamenti che permettano la sola rotazione dei membri.

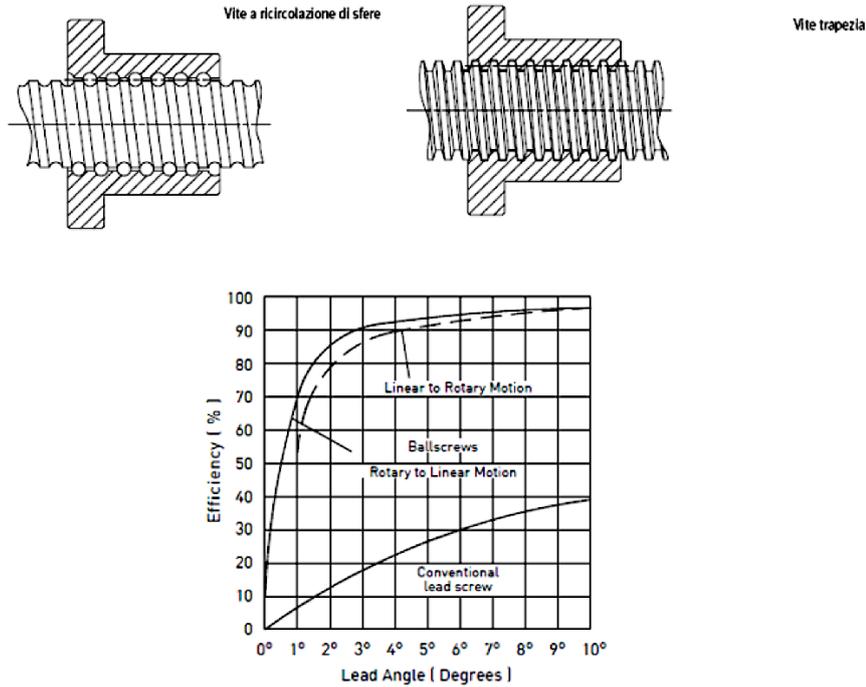


Fig. C.1: Rendimento di VRS e viti trapezie.

- Viti a passo lungo a uno /più principi
- Viti per carichi ordinari / elevati
- Viti con sfere in acciaio / ceramica
- Viti smorzate / non smorzate
- Viti con chiocciola precaricata / non precaricata / precarico regolabile
- Viti con chiocciola traslante / rotante
- Viti monodirezionali / bidirezionali

Profilo della filettatura

Si utilizza generalmente un profilo della filettatura di tipo ogivale, chiamato anche gotico, ottimizzato per:

- garantire un'elevata durata di funzionamento
- ottenere un attrito minimo per ogni tipo di carico applicato
- prevenire l'insorgere di fenomeni di strisciamento ed incuneamento delle sfere
- permettere, nel caso di sistemi non precaricati, un funzionamento con giochi minimi.

Forme della chiocciola

Usualmente sono fornite diverse forme di chiocciola, per gestire diverse modalità di accoppiamento con il carico traslante, in relazione alle caratteristiche del carico. Le più frequenti sono di seguito riportate in Fig. C.2.

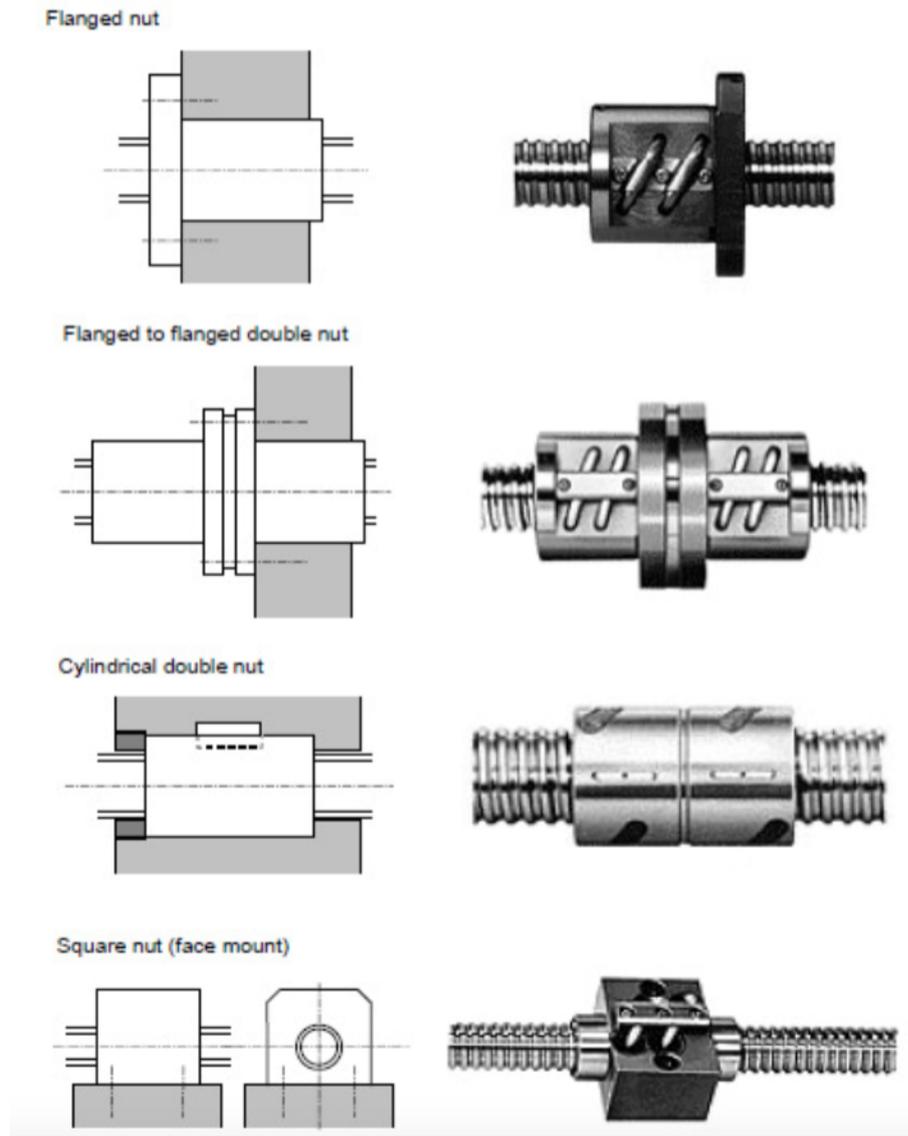


Fig. C.2: Diverse tipologie di chiocciola.

Precarico

In molte applicazioni per l'automazione, per ottenere una buona precisione di posizionamento delle parti in moto, è necessaria l'assenza di qualsiasi forma di gioco assiale. A causa del gioco si hanno degli spostamenti relativi, che non sono controllabili, ma determinati da forze esterne, con una conseguente imprecisione di posizionamento; si ha, inoltre, un'inversione del moto che porta ad avere degli urti, in modo concettualmente analogo al backlash dei riduttori.

Per ovviare a tale problema, nelle VRS si ha la possibilità di adottare un precarico, che permette di ottenere alta rigidezza del sistema e precisione di posizionamento mantenendo al contempo un funzionamento dolce e regolare. Bisogna, comunque, prestare attenzione al valore del precarico, in quanto bassi valori, rispetto alle forze esterne, potrebbero essere annullati dal carico di lavoro, ritrovando un gioco assiale indesiderato; viceversa valori troppo elevati aumentano la resistenza al moto e possono danneggiare le sfere e comprometterne la durata.

Tipicamente si considera: $Precarico \leq 5 - 10\%C_D$, dove C_D rappresenta la capacità di carico dinamico espressa in [kN].

Esistono diverse tipologie di precarico:

1. Precarico con sfere maggiorate: si agisce sulla dimensione delle sfere, che, imponendo un diametro prossimo alla gola, vanno ad appoggiarsi su quattro punti di contatto (Fig. C.3). Tuttavia, si hanno un attrito elevato e una notevole usura; tale sistema, pertanto, viene adottato solo per viti lente e con durate limitate.



Fig. C.3: Precarico con sfere maggiorate.

2. Precarico a trazione o a compressione: adotta uno shift di passo o un distanziale rigido; si interviene, dunque, solamente sulla chiocciola per ottenere $\pm\Delta$ di sfasamento con le piste della vite. In questo modo si annulla il gioco, ma i punti di contatto continuano ad essere solamente due (Fig. C.4), dimezzando, quindi, l'attrito rispetto al caso delle sfere maggiorate.

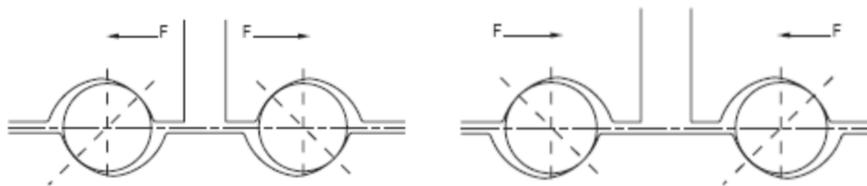


Fig. C.4: Precarico a trazione (a sinistra) e a compressione (a destra).

Ricircolo

La rotazione e la traslazione relative tra vite e chiocciola determinano un moto di avanzamento delle sfere lungo il percorso elicoidale formato dalle gole. Risulta, pertanto, necessario provvedere ad un sistema di ricircolo delle sfere, garantendo una continuità del moto. La soluzione adottata per il ricircolo, in generale, influenza: la capacità di carico dinamico, la massima velocità ammissibile, la rigidità ed il gioco della chiocciola.

Possiamo adottare:

- Ricircolo interno alla madrevite, che può essere a singolo giro o multi-giro, al fine di aumentare il numero di sfere in contatto e, quindi, la capacità di carico.
- Ricircolo esterno alla madrevite mediante tubetto deviatore.

Sfere in ceramica

Le VRS sono tendenzialmente rumorose e hanno limiti di velocità dovuti agli urti delle sfere nel loro ricircolo. Per diminuire l'entità degli urti si potrebbe pensare di ridurre la massa delle sfere; in questo modo, però, si abbassa anche il carico sostenibile; si può sfruttare, invece, una soluzione alternata di sfere d'acciaio e di ceramica. Vantaggi:

- riduzione della massa, ma carico comunque elevato, sostenuto dalle sfere in acciaio.

- eliminazione dello strisciamento che c'è tra le sfere; interponendo sfere di ceramica si instaura un moto di rotolamento tra le sfere per la diversa massa e il diverso materiale. La sfera di ceramica si comporta come un elemento volvente tra le sfere di acciaio, che trascinano in controrotazione quelle ceramiche.

C.0.2 Teoria del dimensionamento di una VRS

Analizziamo le principali verifiche e scelte progettuali, atte al raggiungimento di un corretto dimensionamento di una vite a ricircolo di sfere.

Durata della chiocciola

La durata (o vita) di una VRS è il numero massimo di rivoluzioni che l'albero compie rispetto alla chiocciola, senza presentare evidenza di usura e fatica nei materiali della vite, della chiocciola o dei corpi volventi, ed è il valore che una VRS può raggiungere con il 90% di probabilità.

In modo analogo ai cuscinetti e ai riduttori, viene considerato il prodotto costante dato dalla forza equivalente applicata alla chiocciola F_{eq} , elevata al cubo, e il numero di rotazioni effettuate L_{rot} , comparandolo con le condizioni nominali di test in laboratorio (i.e. carico C_D e 10^6 rotazioni).

$$F_{eq}^3 \cdot L_{rot} = \text{cost} = C_D^3 \cdot 10^6 \quad (\text{C.0.1})$$

C_D rappresenta la forza assiale applicata alla chiocciola, tale che garantisca una vita utile di 10^6 rotazioni con una probabilità di sopravvivenza del 90%.

Tipicamente, invece di considerare il numero di rotazioni, ci riportiamo al numero di ore (L_h o L_{10}), grazie alla velocità media di rotazione n_v [giri/min], quindi:

$$L_h = \frac{L_{rot}}{60 \cdot n_v}$$

Allora, in fase di verifica, vale:

$$L_h = \frac{10^6}{60 \cdot n_v} \cdot \left(\frac{C_D}{F_{eq}} \right)^3 \quad (\text{C.0.2})$$

Mentre, in fase di progetto, dovremo andare a determinare il carico dinamico minimo richiesto come:

$$C_D \geq F_{eq} \sqrt[3]{\frac{L_h \cdot 60 \cdot n_v}{10^6}}$$

Generalmente, però, non conosceremo la velocità media rotazionale, ma le specifiche saranno sul carico traslante.

Allora avremo la velocità media di traslazione:

$$v_m = \frac{p}{2\pi} \omega_v = \frac{p}{60} n_v$$

$$\implies C_D \geq f_s F_{eq} \sqrt[3]{\frac{L_h \cdot 3600 \cdot v_m}{10^6 \cdot p}} \quad (\text{C.0.3})$$

dove viene aggiunto anche il fattore di servizio f_s , che vale:

- 1 – 1.2 per moto regolare,

- 1.2 – 1.5 per urti occasionali e lievi,
- 1.5 – 3 per urti frequenti.

La forza equivalente viene calcolata ponderando le diverse forze assiali agenti (i.e. $F_a = F + M \cdot a$) come:

$$F_{eq} = \sqrt[3]{\frac{\sum |F_{a_i}^3 \cdot \Delta t_i \cdot v_i|}{\sum |\Delta t_i \cdot v_i|}} \quad (C.0.4)$$

Mentre per la velocità media vale:

$$v_m = \frac{\sum |\Delta t_i \cdot v_i|}{\sum |\Delta t_i|} \quad (C.0.5)$$

Velocità critica flessionale

La velocità di rotazione della vite non deve superare un valore critico pari ad una percentuale (e.g. coefficiente di sicurezza $\alpha = 0.65 - 0.85$) della prima frequenza flessionale della vite ω_f , la quale rappresenta il comportamento vibrazionale più critico e più facilmente eccitabile. Infatti, l'inevitabile presenza di carichi eccentrici, associati nel caso più semplice alla freccia elastica dovuta al peso stesso della vite, determina eccitazioni armoniche alla frequenza di rotazione della vite.

La frequenza flessionale della vite varia in base alla posizione della chiocciola, che produce un irrigidimento locale; si può considerare, allora, la condizione più critica, in vantaggio di sicurezza, con la chiocciola ad un estremità.

$$v_{max} \frac{2\pi}{p} = \omega_{v_{max}} < \alpha \cdot \omega_f = \alpha K_v \sqrt{\frac{EI_f}{M_v L^3}} \quad (C.0.6)$$

Dove

- $E = 190 - 210 \cdot 10^9 [Pa]$ è il modulo di elasticità longitudinale,
- $I_f = \pi/64 \cdot d^4 [m^4]$ è il momento d'inerzia flessionale della sezione,
- $M_v [kg]$ è la massa della vite,
- $L [m]$ è la lunghezza della vite,
- K_v è il coefficiente di vincolo:

incastro - libero $K_v = 3.52$

appoggio - appoggio $K_v = 9.87$

incastro - appoggio $K_v = 15.4$

incastro - incastro $K_v = 22.4$

Otteniamo, pertanto, in fase di progetto, un vincolo sul passo minimo:

$$p > \frac{v_{max} 2\pi}{\alpha \omega_f} = \frac{v_{max} 60}{n_c} \quad (C.0.7)$$

Velocità limite delle sfere

Il prodotto $d \times n$, diametro di centro sfera [m] per la velocità di rotazione della vite [rpm], stabilisce un limite superiore alla velocità di rotazione della VRS, per motivi di urto e strisciamento delle sfere.

$$d \times n < S \quad (\text{C.0.8})$$

Dove S è dato da un coefficiente di sicurezza per il valore limite, che dipende dal tipo di sfere:

- acciaio: 70-120 [$m \times rpm$]
- ceramica: 190-220 [$m \times rpm$]

Le VRS con sfere in ceramica in configurazione alternata, a parità di diametro di centro sfera, possono raggiungere velocità di rotazione molto più elevate rispetto a sfere in acciaio, poiché le forze centrifughe in gioco sono ridotte grazie alla minore densità della ceramica rispetto all'acciaio.

Allora otteniamo un vincolo sul passo minimo:

$$p > \frac{v_{max}60}{S} \cdot d \quad (\text{C.0.9})$$

Unendo, dunque, la relazione appena ottenuta in Eq. (C.0.9) e quella ricavata precedentemente in Eq. (C.0.7), possiamo determinare il passo minimo ammissibile come:

$$p > p_{min} := \max \left\{ \frac{v_{max}60}{n_c}, \frac{v_{max}60}{S} \cdot d \right\} \quad (\text{C.0.10})$$

Il passo minimo, così definito, viene mostrato in Fig. C.5, evidenziandone la dipendenza dal diametro.

Se abbiamo un diametro piccolo, allora il passo minimo è regolato dalla velocità critica flessionale e, per ottimizzare, posso pensare di cambiare il tipo di vincolo; viceversa, se siamo a d grande, il passo minimo è dominato dalla velocità limite delle sfere; pertanto, si può ragionare sul fatto di utilizzare sfere di acciaio oppure di ceramica. Inoltre, in entrambe le situazioni, si può agire riducendo la velocità, per abbassare il valore del passo minimo ammissibile.

Indipendentemente dal diametro, avremo un passo minimo assoluto, che si ottiene dall'intersezione delle due curve:

$$p_{min.ass.} = 2Lv_{max} \sqrt{\frac{2\pi 60 \sqrt{\rho}}{\alpha K_v S \sqrt{E}}} \quad (\text{C.0.11})$$

A tale passo minimo assoluto corrisponde un diametro ammissibile pari a:

$$d^* = \frac{S}{v_{max}60} p_{min.ass.} = 2L \sqrt{\frac{2\pi S \sqrt{\rho}}{\alpha K_v 60 \sqrt{E}}} \quad (\text{C.0.12})$$

In fase di dimensionamento di un attuatore a VRS, tale valore d^* può costituire una prima indicazione di massima del diametro, ovvero un sensato valore di primo tentativo nel processo iterativo di dimensionamento.

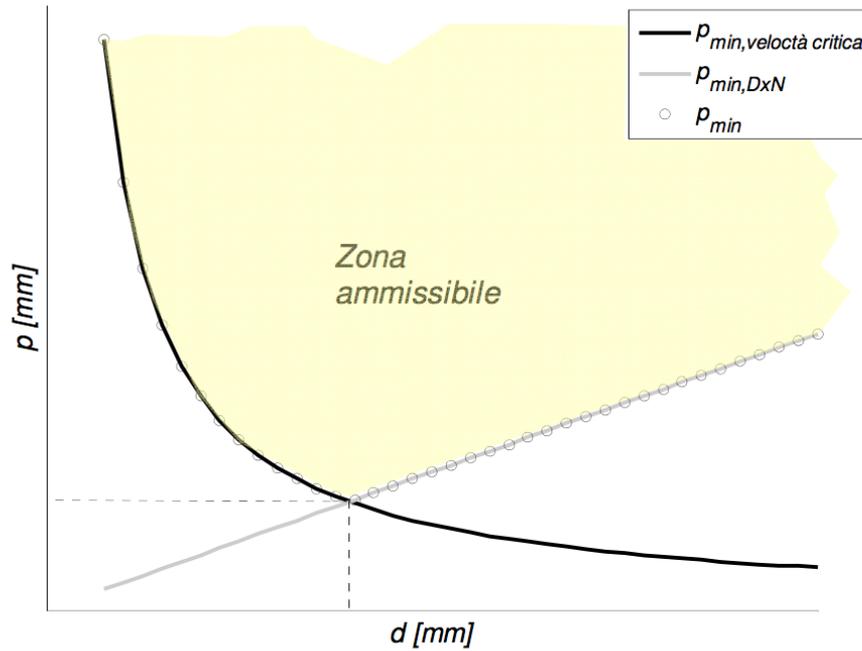


Fig. C.5: Curve passo-diametro ammissibili.

Inoltre, la conoscenza del passo minimo assoluto consente di avere una sovrastima del carico dinamico richiesto:

$$C_D \leq F_{eq} f_s \sqrt[3]{\frac{3600}{10^6} \frac{v_m L_h}{p_{min.ass.}}} \quad (C.0.13)$$

Verifica del carico di punta

La verifica del carico critico di punta, secondo l'approccio di Eulero, va a monitorare la presenza di elevati carichi assiali di compressione (carichi di punta), che può causare un improvviso collasso di aste snelle (i.e. $d \ll L$), qualora si superi un valore critico.

Il massimo carico di compressione dovrà, pertanto, essere inferiore al valore critico P_{cr} :

$$F_{assiale} < P_{cr} = \alpha_{eu} f_{eu} \frac{EI_f \pi^2}{L_c^2} \quad (C.0.14)$$

dove E ed I_f sono già stati definiti nella verifica della velocità critica flessionale, L_c rappresenta la lunghezza libera a compressione, $\alpha_{eu} = 0.5 - 0.7$ è un coefficiente di sicurezza, tipicamente molto conservativo, perché superando la soglia critica il collasso può essere immediato, f_{eu} è un coefficiente caratteristico del tipo di vincolo:

incastro - libero $f_{eu} = 0.25$

appoggio - appoggio $f_{eu} = 1$

incastro - appoggio $f_{eu} = 2.025$

incastro - incastro $f_{eu} = 4$

Data una stima della forza assiale massima, posso ricondurre la relazione in Eq. (C.0.14) ad un vincolo sul diametro (ricavato dalla definizione del momento d'inerzia I_f della sezione rispetto all'asse di flessione):

$$d > d_{cr} = \sqrt[4]{\frac{F_{max.assiale} L_c 64}{\alpha_{eu} f_{eu} E \pi^3}} \quad (C.0.15)$$

Flessione statica della vite

Nelle viti installate orizzontalmente si ha una flessione f_{max} , dovuta al peso stesso della vite. In realtà va considerato anche il peso del carico trasportato, ma tipicamente si trascurerà, se sorretto da opportune guide. Inoltre, ci sarebbe l'irrigidimento dovuto alla chiodatura, però, considerando il caso peggiore, la assumiamo posizionata ad un estremo.

Vale:

$$f_{max} = \frac{1}{K_{vite}} \frac{M_v g L^3}{EI_f} + \frac{1}{K_{carico}} \frac{M_{carico} g L^3}{EI_f} \quad (C.0.16)$$

dove $g = 9.81[m/s^2]$ è l'accelerazione di gravità, mentre K_{vite} e K_{carico} sono dei coefficienti che dipendono dal tipo di vincolo, come mostrato in Fig. C.6. Anche questo si configurerà come un vincolo sul diametro minimo.

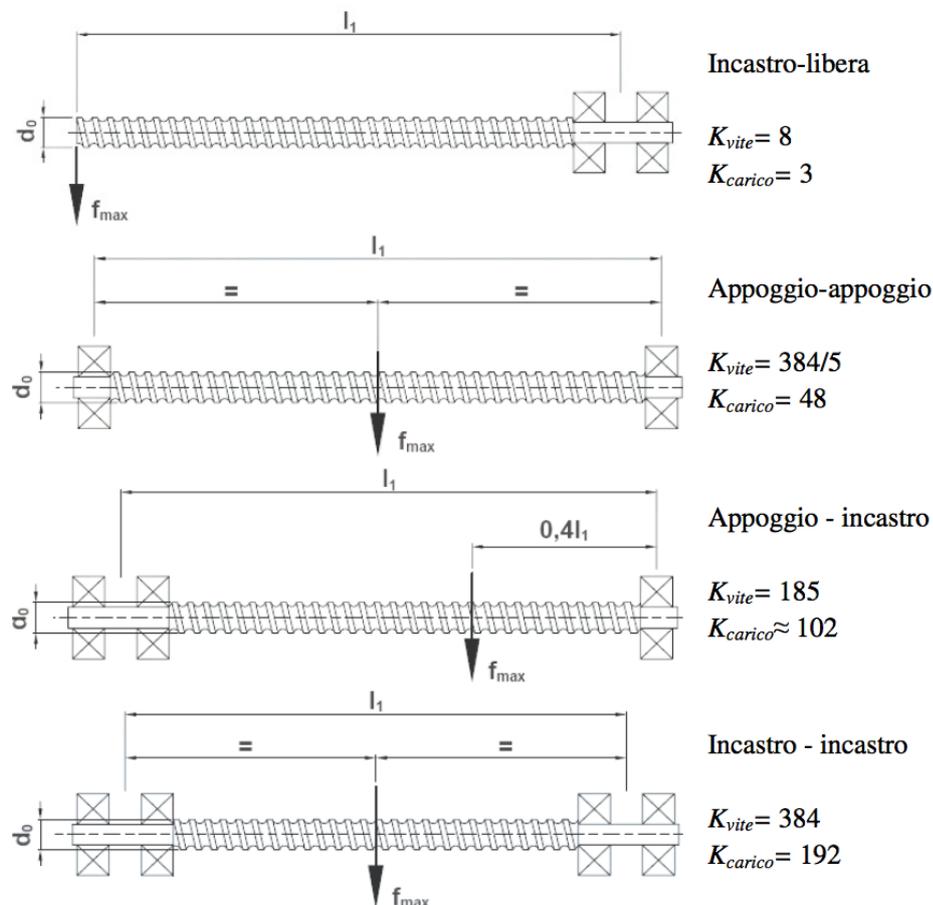


Fig. C.6: Valore dei coefficienti K_{vite} e K_{carico} in relazione ai differenti vincoli.

Rigidezza

Una VRS è rappresentabile, nel caso reale, come un sistema a due gradi di libertà, per effetto dell'elasticità lineare tra vite rotante e carico traslante, come schematizzato in Fig. C.7.

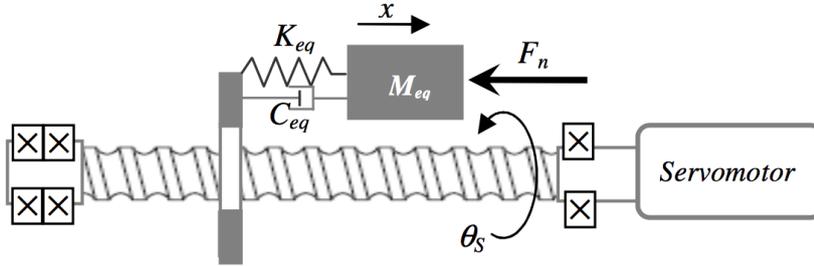


Fig. C.7: Rappresentazione schematica di un modello a 2 gdl di una VRS.

Il valore di k_{eq} può essere stimato come il risultato di una serie di diverse elasticità:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_{cu}} + \frac{1}{k_{sp}} + \frac{1}{k_{ass}} + \frac{1}{k_{tors}} \cdot \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \quad (C.0.17)$$

dove

- k_{cu} è la rigidezza dei cuscinetti, dato in genere fornito a catalogo e spesso elevato, quindi trascurabile;
- k_{sp} è la rigidezza dell'accoppiamento sfere-piste, fornita da costruttori seri e tipicamente trascurabile;
- k_{tors} è la rigidezza torsionale: $k_{tors} = \frac{G\pi d^4}{32L}$, nella quale G è il modulo di elasticità tangenziale;
- k_{ass} è la rigidezza assiale della vite: $k_{tors} = \frac{EA}{L_{eq}(x)}$,

dove E è, al solito, il modulo di Young, A è l'area della sezione, L_{eq} è la lunghezza libera rispetto all'estremo vincolato assialmente e varia al variare della posizione x della chiocciola; allora considereremo il caso più critico, che vale:

$$L_{eq} = L_v \text{ per incastro - libero, appoggio - appoggio, incastro - appoggio,}$$

$$L_{eq} = \frac{L_v}{4} \text{ per incastro - incastro.}$$

Osserviamo che, all'aumentare del diametro d della vite, aumenta la rigidezza equivalente k_{eq} , pertanto, anche questa verifica si traduce in un vincolo sul diametro minimo. Bisogna prestare attenzione, però, anche al passo, al crescere del quale si hanno problemi di rigidezza torsionale, perché viene riportata all'assiale grazie al rapporto di velocità, e si dovrà compensare con un aumento del diametro.

Consideriamo una massa equivalente traslante $M_{eq} \simeq M + \frac{1}{3}M_v$, dove M rappresenta la massa della chiocciola più quella del carico e M_v la massa della vite². Allora possiamo calcolare la prima frequenza di antirisonanza³ del sistema come:

$$\omega_z = \sqrt{\frac{k_{eq}}{M_{eq}}} \quad (\text{C.0.18})$$

Tale frequenza non dovrà essere troppo bassa, altrimenti obbliga ad una movimentazione lenta. Si configura come una limitazione, ponendo un vincolo alla massima banda passante⁴ del sistema, secondo la tipica regola:

$$\omega_B \simeq (0.5 \div 0.7)\omega_z \quad (\text{C.0.19})$$

Esclusione dei passi grandi

Consideriamo un errore di posizionamento del motore, ovvero della vite $\delta\theta_v$, allora si ha un errore di posizionamento lineare:

$$\delta x = \frac{p}{2\pi} \delta\theta_v \quad (\text{C.0.20})$$

L'aumento del passo determina una minore precisione del posizionamento e una riduzione della risoluzione. Il passo scelto, dunque, dovrà essere sufficientemente piccolo da garantire la precisione desiderata.

$$p \leq p_{max} = \frac{2\pi\delta x_{des}}{\delta\theta_v} \quad (\text{C.0.21})$$

Valutazione del gioco e della classe di precisione

La presenza di gioco (backlash) sull'accoppiamento vite-chiocciola ha effetti sia statici che dinamici e determina irregolarità nel movimento, problematiche di controllo⁵ ed errori di posizionamento.

La classe di precisione, invece, si riferisce alla precisione del passo misurata su una lunghezza utile specificata l_u . I valori sono riferiti a rilievi effettuati ad una temperatura ambiente di 20°C e si considerano, come mostrato in Fig. C.7, i seguenti parametri:

V_{300p} è la massima deviazione ammissibile del passo in un tratto di 300mm,

V_{up} è la massima deviazione ammissibile del passo in un tratto utile definito,

e_p è la deviazione totale sulla lunghezza.

²Viene considerata la massa della vite M_v , perché anche questa ha una sua elasticità e per uguaglianze energetiche si vede che contribuisce circa per un terzo del suo valore.

³Frequenza di antirisonanza della funzione di trasferimento con ingresso coppia motrice e uscita traslazione del carico:

$$\frac{x(j\omega)}{C_m(j\omega)}$$

Antirisonanza vuol dire che servirebbe una coppia infinita per fare una movimentazione a tale frequenza.

⁴Si ricerca una banda passante elevata, perché si riduce il tempo di salita e si aumenta la prontezza del sistema.

⁵A causa del gioco, vite e chiocciola possono risultare disaccoppiate, in questo modo si hanno problemi di controllo, perché per breve tempo non percepisce più la presenza del carico.

	CLASSE ISO - ISO CLASSE					
	1		3		5	
V_{300p} (mm)	0,006		0,012		0,023	
l_u (mm)	e_p	V_{up}	e_p	V_{up}	e_p	V_{up}
0 ÷ 315	0,006	0,006	0,012	0,012	0,023	0,023
315 ÷ 400	0,007	0,006	0,013	0,012	0,025	0,025
400 ÷ 500	0,008	0,007	0,015	0,013	0,027	0,026

Fig. C.8: Classe di precisione del passo di una VRS.

C.0.3 Dimensionamento e scelta

Applichiamo ora la metodologia teorica sopra esposta, per arrivare a scegliere da catalogo una VRS adatta a svolgere i test sperimentali nel caso del pendolo a 3 gdl.

Le formule presentate per determinare i vincoli da imporre ai diversi parametri sono state implementate in ambiente Excel, in modo tale da semplificare e velocizzare la scelta di una opportuna VRS, potendo provare diverse soluzioni progettuali.

Assumiamo, analogamente a quanto fatto nella sezione di validazione del modello tramite confronto con Working Model, come dati progettuali:

- Lunghezza della vite: $L_v = 0.8[m]$;
- Densità: $\rho_v = 7800[kg/m^3]$;
- Massa del carro: $M_{nut} = 10[kg]$;
- Coefficiente di attrito guide: $\mu = 0.1$;
- Durata desiderata⁶: $L_h = 300000[h]$;
- Fattore di servizio: $f_s = 1.2$;
- Valore limite delle sfere⁷: $d \times n = 120[m \times rpm]$;
- Coefficienti di sicurezza:

$$\alpha = 0.7;$$

$$\alpha_{eu} = 0.6;$$

- Vincolo incastro-appoggio:

$$K_v = 15.4;$$

$$f_{eu} = 2.025;$$

- Rendimento diretto: $\eta = 0.95$.

⁶In questo caso, per la durata della chiocciola andiamo ad imporre un valore assolutamente indicativo. L'applicazione, infatti, non è critica dal punto di vista del carico dinamico e del numero di rotazioni richieste alla vite nel tempo, mentre si cercheranno di spingere le prestazioni in termini di velocità.

⁷Assumiamo, almeno inizialmente, di utilizzare sfere di acciaio. Se poi ci dovessimo trovare a lavorare con diametro elevato, allora, per ottimizzare il passo, valuteremo se convenga passare ad una più costosa configurazione con sfere in ceramica.

Dobbiamo considerare anche una movimentazione caratteristica, per definire quali siano le velocità e le accelerazioni richieste. Assumendo di avere un pendolo composto da due sbarrette di alluminio di lunghezza, rispettivamente, $l_1 = 0.2[m]$ e $l_2 = 0.15[m]$, la prima frequenza modale risulta:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1.0759 \text{ Hz}$$

Quindi il periodo di oscillazione vale:

$$T = \frac{1}{f_1} \simeq 0.9295 \text{ s}$$

Considereremo, dunque, delle leggi trapezoidali in accelerazione, che permettano di percorrere una corsa utile di 0.6 metri in un tempo di azionamento inferiore al periodo di vibrazione proprio del modello (e.g. assumiamo circa due terzi del tempo T), per poter testare effettivamente le prestazioni della pianificazione ottima ottenuta dalla soluzione del TPBVP. In realtà, invece di dover percorrere tutta la corsa utile in un tempo di azionamento così ridotto, si potrebbe considerare una movimentazione più breve. In questo modo potremmo abbassare i vincoli dovuti a velocità critica flessionale e limite delle sfere e scegliere una VRS più piccola, in termini di diametro e passo. Tuttavia, essendo destinato all'utilizzo in laboratorio, si preferisce sovradimensionare il sistema, nell'ottica di applicazioni e test sperimentali futuri, che cercheranno di volta in volta di spingere le prestazioni oltre i limiti precedentemente raggiunti.

In Fig. C.9 e C.10 vengono mostrate le leggi di moto che sono state implementate in Excel.

LEGGI DI MOTO	RMS	Media	MAX	AVANZAMENTO 1			$\lambda_{+=}$ 0,33
							$\lambda_{-}=$ 0,33
				Corsa=[m] 0,3		T az= [s] 0,33	
				T1	T2	T3	Triposo
Intervallo Tempo [s]				0,1089	0,1122	0,1089	0
Velocità media [m/s]	0,75	0,66	1,36	0,678	1,357	0,678	0
Accelerazione [m/s ²]	6,26		13,12	12,460	0,000	-12,460	0
<i>vincoli cinematici</i>				VERO	VERO	VERO	
Forze costanti varie [N]				0,000	0,000	0,000	0
Forza peso [N]				17,035	17,035	17,035	17,035
Forza Inerzia [N]	62,56		131,18	124,596	0,000	-124,596	0
Forza Attrito [N]	9,13		9,66	9,661	9,661	9,661	0
Forza Totale [N]	64,68		157,88	151,292	26,696	-97,900	17,035
Coppia Motore [Nm]	0,50		1,15	1,09	0,09	-0,88	0,06
Velocità Motore [rpm]	2235,16	1966,7	4070,56	2035,28	4070,56	2035,28	0,00

Fig. C.9: Leggi di moto e valori di velocità, accelerazioni e forze richieste: primo avanzamento.

AVANZAMENTO 2				RITORNO			
		$\lambda_{+} = 0,3$				$\lambda_{+} = 0,2$	
		$\lambda_{-} = 0,3$				$\lambda_{-} = 0,25$	
Corsa=[m] 0,3		T az= [s] 0,33		Corsa=[m] -0,6		T az= [s] 1	
T1	T2	T3	Triposo	T1	T2	T3	Triposo
0,099	0,132	0,099	0,1	0,2	0,6	0,2	0,1
0,649	1,299	0,649	0	-0,387	-0,774	-0,387	0
13,118	0,000	-13,118	0	-3,871	0,000	3,097	0
VERO	VERO	VERO		VERO	VERO	VERO	
0,000	0,000	0,000	0	0,000	0,000	0,000	0
17,035	17,035	17,035	17,035	17,035	17,035	17,035	17,035
131,182	0,000	-131,182	0	-38,710	0,000	30,968	0
9,661	9,661	9,661	0	-9,661	-9,661	-9,661	0,000
157,878	26,696	-104,486	17,035	-31,336	7,374	38,342	17,035
1,15	0,09	-0,93	0,06	-0,29	0,02	0,26	0,06
1948,05	3896,10	1948,05	0,00	-1161,29	-2322,58	-1161,29	0,00

Fig. C.10: Leggi di moto e valori di velocità, accelerazioni e forze richieste: secondo avanzamento e ritorno.

Indipendentemente dal diametro, avremo un passo minimo assoluto, che si ottiene dall'Eq. (C.0.11). Sostituendo i valori opportuni Troviamo:

$$p_{min.ass.} = 2 \cdot 0,8 \cdot 1,36 \sqrt{\frac{2\pi \cdot 60 \cdot \sqrt{7800}}{0,7 \cdot 15,4 \cdot 120 \cdot \sqrt{200 \cdot 10^9}}} \simeq 0,0165[m] \quad (C.0.22)$$

A tale passo minimo assoluto, corrisponde un diametro ammissibile pari a:

$$d^* = \frac{S}{v_{max}60} \cdot p_{min.ass.} = \frac{0,8 \cdot 120}{1,36 \cdot 60} \cdot 0,0165 \simeq 0,0194[m] \quad (C.0.23)$$

Dall'Eq. (C.0.24) otteniamo il diametro minimo di Eulero:

$$d_{min} = \sqrt[4]{\frac{F_{max.assiale} L_c 64}{\alpha_{eu} f_{eu} E \pi^3}} = \sqrt[4]{\frac{157,88 \cdot 0,8 \cdot 64}{0,6 \cdot 2,025 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \pi^3}} \simeq 0,0057[m] \quad (C.0.24)$$

Scelgo dunque il diametro:

$$d = 0,02[m]$$

Allora, applicando l'Eq. (C.0.7), troviamo il passo minimo per la velocità critica flessionale:

$$p_{min} = \frac{v_{max}60}{n_c} = \frac{1,36 \cdot 60}{4073} = 0,02[m]$$

Mentre, applicando l'Eq. (C.0.9), il passo minimo per la velocità limite delle sfere risulta:

$$p_{min} = \frac{v_{max}60}{S} \cdot d = \frac{1,36 \cdot 60}{0,8 \cdot 120} \cdot 0,02 = 0,017[m]$$

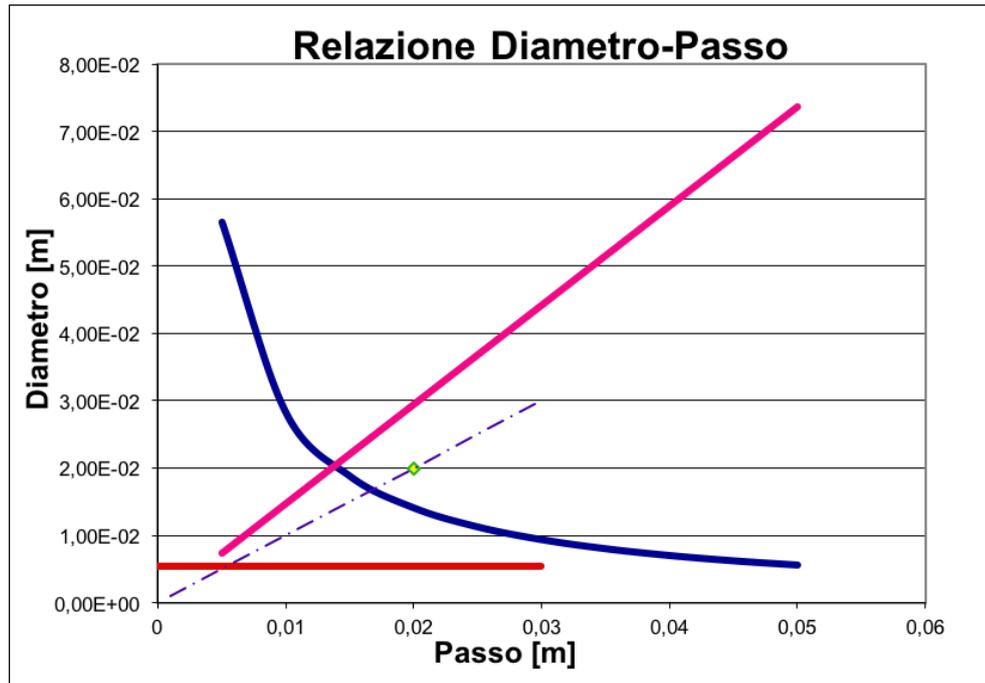


Fig. C.11: Curve dei vincoli in un diagramma $d - p$.

Pertanto, dall'Eq. (C.0.10), il passo minimo ammissibile sarà il più grande dei due, cioè quello dovuto alla velocità critica flessionale e vado a prendere proprio:

$$p = p_{min} = 0.02[m]$$

La coppia diametro-passo scelta, insieme alle varie curve limite, si può vedere in Fig. C.11.

Per quanto riguarda il carico dinamico richiesto, la conoscenza del passo minimo assoluto consente di averne una sovrastima con l'Eq. (C.0.13):

$$C_D \leq 84.841 \cdot 1.2 \sqrt[3]{\frac{3600}{10^6} \cdot \frac{0.66 \cdot 300000}{0.0165}} \simeq 3.6[kN] \quad (C.0.25)$$

Il carico dinamico minimo lo possiamo ricavare dall'Eq. (C.0.3) come:

$$C_{D_{min}} = f_s F_{eq} \sqrt[3]{\frac{L_h \cdot 3600 \cdot v_m}{10^6 \cdot p}} = 1.2 \cdot 84.84 \sqrt[3]{\frac{300000 \cdot 3600 \cdot 0.66}{10^6 \cdot 0.02}} \simeq 3.35[kN] \quad (C.0.26)$$

Osservando i cataloghi, una vite 0.02×0.02 presenta un C_D di circa $11[kN]$; la vite risulta, quindi, verificata dal punto di vista del carico dinamico richiesto.

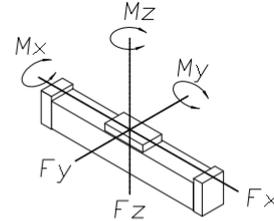
Definiti i parametri fondamentali, si può procedere ricercando tra i vari cataloghi una soluzione ottimale. Tra le diverse ditte che producano viti a ricircolo di sfere ed attuatori, si è presentata, però, la possibilità di una collaborazione universitaria con l'azienda *AutomationWare*⁸. La ricerca, pertanto, è stata focalizzata su tale azienda, trovando una soluzione ideale nell'*EasyLIN package*. Si configura, infatti, come un pacchetto integrato per applicazioni di posizionamento e movimentazione lineare, composto da:

- Unità lineare,

⁸www.automationware.it

- Motore brushless,
- Driver posizionario con I/O di comando,
- Software di configurazione in ambiente Windows.

Dati Tecnici	Mod. 80V hp	
• Trasmissione del moto	vite a ricircolo	
• Guida a ricircolo di sfere	size 20	
• Numero pattini	2	
• Lunghezza carrello	[mm]	260
Momento inerzia profilo		
• Momento di inerzia I_y	[cm ⁴]	124
• Momento di inerzia I_z	[cm ⁴]	158
Pesi		
• Base con corsa 0	[kg]	7,2
• 100mm di corsa	[kg]	0,8
• Carro completo	[kg]	2,9
Carichi e momenti		
• Carico max F_y (*)	[N]	3.431
• Carico max $\pm F_z$ (*)	[N]	6.862
• Momento dinamico M_x (*)	[Nm]	67
• Momento dinamico M_y (*)	[Nm]	549
• Momento dinamico M_z (*)	[Nm]	339



Caratteristiche vite	Mod. 80V hp	
• Precisione vite	[mm]	ISO 7
• Vite a sfere d _{xp}	[mmxmm]	20x5 20x20
• Carico statico vite C_0	[N]	15.000 18.400
• Carico dinamico C_{din}	[N]	7.400 11.600
• Velocità max. di avanzamento	[mm/s]	250 1.000
• Corsa massima (**)	[mm]	2.000 2.000

Fig. C.12: Dati tecnici unità lineare protetta a vite ML80 HPV.

In particolare, si considera una configurazione con unità lineare di tipo *Motionline hp*, che presenta le caratteristiche richieste con $d \times p = 0.02 \times 0.02$; le specifiche sono riportate in Fig. C.12.