UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Astronomia

Tesi di Laurea

Equazione di Schrödinger per lo studio di Strutture Cosmologiche su Grande Scala

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureanda

Matilde Biscaro

Anno Accademico 2023/2024

Indice

Capitolo 1

Abstract

In questa tesi ci si pone lo scopo di discutere un approccio alternativo per lo studio delle piccole fluttuazioni di densità della Cold Dark Matter. Previo un breve esame della Teoria delle Perturbazioni Euleriana e dell'Approssimazione di Zel'dovich, verrà analizzata la cosiddetta Trasformazione di Madelung che permetterà di modellizzare la Cold Dark Matter come un campo scalare complesso dinamicamente descritto dalla coppia di equazioni di Schrödinger-Poisson. Successivamente, verrà esaminata l'applicazione di questi risultati ai modelli universali CDM e ΛCDM. Nell'ultima parte, al fine di generalizzare il procedimento ottenuto, verrà riportata una sua possibile riscrittura mediante un set di variabili "supercomoventi", in alternativa alle variabili comoventi standard.

Capitolo 2

Introduzione

2.1 Introduzione

La comprensione del meccanismo di formazione delle Strutture su Grande Scala dell'Universo, vede le sue basi nello studio delle perturbazioni della materia, che hanno avuto luogo nell'Universo primordiale. La teoria dell'*instabilità gravitazionale*, prevede l'analisi di queste perturbazioni. Sarà evidente che, sia per un approccio lineare, utilizzando la Teoria Perturbativa Euleriana (Sez. 3.2), che per uno in regime debolmente non-lineare, tramite l'Approssimazione di Zel'dovich (Sez. 3.3), non è possibile ottenere un modello che abbia significato fisico per ogni punto dello spazio (Capitolo 3). Grazie al lavoro di E. Madelung, successivamente rielaborato da L.M. Widrow e N. Kaiser, sarà possibile sfruttare l'analogia tra formalismo della dinamica del fluido perfetto e delle onde meccaniche, per definire un metodo che superi le difficoltà dei modelli precedenti, grazie alla coppia di equazioni di Schrödinger-Poisson che modellizzeranno il fluido oggetto di studio (Sez. 4.1). Successivamente, questa teoria, elaborata per fluido classico, verrà estesa a situazioni che prevedano un fluido cosmologico nell'ambiente dei modelli CDM (Sez. 4.1.1) e ΛCDM (Sez. 4.1.2). La materia oscura contenuta nell'Universo, quindi, può essere descritta come un fluido non collisionale, per il quale sarà necessario assumere una dispersione di velocità trascurabile in quanto si tratta di materia debolmente interagente. Inoltre, la trattazione abiterà nell'ipotesi Newtoniana della gravità, trattandosi di particelle non-relativistiche, quindi verranno prese in considerazioni piccole perturbazioni della densità, in scale molto inferiori all'orizzonte di Hubble (Capitolo 4). Successivamente, grazie al lavoro di H. Martel e P. R. Shapiro, l'intero processo verrà generalizzato esprimendo le equazioni di fluido in un nuovo set di variabili dette *supercomoventi*, variabili che comprendono in sè l'espansione di Hubble, e che pertanto, a differenza delle variabili comoventi standard, permettono di generalizzare i risultati ottenuti per le equazioni di fluido non-cosmologico a situazioni cosmologiche, grazie alla quasi uguaglianza formale tra le relazioni di partenza. Infine, verranno analizzate le semplificazioni che queste variabili consentono di adottare nella classificazione di diversi modelli di Universo (Capitolo 5).

2.2 Strutture cosmologiche su Grande Scala

Le galassie, considerate come le unità costituenti il nostro Universo, tendono a raggrupparsi in strutture che risultano sempre più omogeneamente distribuite, man mano che la scala di distanza presa in considerazione aumenta. Iniziando dal Gruppo Locale, ovvero il gruppo di galassie contenute in un raggio di circa 0,8 Mpc dalla Via Lattea, notiamo che questo costituisce un'entità strutturalmente e dinamicamente definita, circondata da spazio vuoto. Allargando la scala di osservazione, però, è evidente che il Gruppo Locale stesso faccia parte di una struttura di dimensioni sull'ordine di 18 Mpc, un ammasso di galassie, l'Ammasso della Vergine. Questi ammassi, fondamentali componenti del cosmo, generalmente tendono a loro volta a creare un tessuto universale di strutture tipicamente filamentari su scala ancora maggiore, i super-ammassi. All'aumentare della scala di distanza, aumenta anche l'omogeneità di distribuzione di queste strutture, infatti, attorno ai 100 Mpc, possiamo osservare un Universo sostanzialmente omogeneo e isotropo. La Struttura su Grande Scala dell'universo è il risultato della cosiddetta *instabilità gravitazionale*, secondo la quale, piccole fluttuazioni di densità nell'universo primordiale sono all'origine della formazione delle galassie.

2.3 Metrica di Robertson-Walker

Il Principio Cosmologico afferma che:

> Ogni osservatore comovente osserva l'Universo attorno a sè, a tempo fissato, nel proprio sistema di riferimento, come omogeneo e isotropo. [9]

In questo enunciato, il termine *comovente*, si riferisce ad un osservatore solidale con la sorgente della geometria dell'Universo, quindi da un sistema di riferimento privilegiato. Questa prima rottura con i principi della Relatività Ristretta porterà alla necessità di riformulare una diversa teoria per descrivere la struttura dell'Universo, che troverà la necessaria completezza e auto-consistenza solo nella Relatività Generale. Lo spaziotempo in cui abitano gli studi cosmologici è uno spaziotempo quadridimensionale che ammette una varietà tridimensionale massimamente simmetrica. A differenza del Gruppo di Poincarè, che rappresenta le trasformazioni nello spaziotempo di Minkowski, non possiamo più avvalerci dell'invarianza per traslazioni temporali e per boost di Lorentz, poichè siamo costretti a riconoscere un sistema di riferimento preferenziale dato dalla materia e dall'energia cosmica. Procedendo, quindi, con l'indagine della metrica spaziotemporale, si arriva alla formulazione più generale possibile in cui valga il Principio Cosmologico:

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)\right]. \tag{2.3.1}$$

L'equazione (2.3.1) è detta *metrica di Robertson-Walker*, dove r è la coordinata radiale comovente, $a(t)$ è detto *fattore di scala* e rappresenta la possibile espansione o contrazione dell'Universo. La costante k, *parametro di curvatura*, può assumere i valori di -1 per universi iperbolici (a curvatura negativa), 0 per universi piatti (modelli *Einstein-de Sitter*) e +1 per universi sferici (a curvatura positiva). Si può notare che, nel caso piatto e statico, quindi per fattore di scala costante, la metrica di Robertson-Walker restituisce esattamente la metrica di Minkowski. Quindi, nelle ipotesi di omogeneità ed isotropia, il tensore metrico utilizzato in Relatività Generale, $g_{\mu\nu}$, rimane una matrice diagonale, quindi $g_{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$. Risulta necessario ricordare che la metrica esprime solo le proprietà di simmetria del Principio Cosmologico, non richiede una teoria della gravitazione specifica che, come vedremo in seguito, sarà espressa dalle equazioni di campo di Einstein (2.4.1).

2.4 Equazioni di Friedmann

La relazione completa tra sorgenti del campo gravitazionale, e quindi il contenuto di materia ed energia dell'Universo, è fornita dalle *Equazioni di campo della Relatività Generale* (2.4.1)(analizziamo per semplicità il caso senza costante cosmologica):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{2.4.1}$$

dove $R_{\mu\nu} = R^l_{\mu l\nu}$ tensore di Ricci dato dalla contrazione del tensore di Riemann $R^l_{\mu j\nu}$ e $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ lo scalare di curvatura. Il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ descrive il contenuto massa-energia del fluido cosmico e, assumendo condizioni di fluido perfetto, ha la forma riportata in equazione (2.4.2)

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho c^2)U_\mu U_\nu - Pg_{\mu\nu}, \tag{2.4.2}$$

dove sono presenti la densità e l'energia della materia, e la quadrivelocità del fluido. Ciò a ricordare che, alla gravità, non contribuisce solo la massa gravitante a riposo, ma anche tutti i termini di natura energetica. La soluzione delle equazioni della Relatività Generale di Einstein, imponendo il

Principio Cosmologico, è fornita dalle equazioni dinamiche di Friedmann. Queste, possono essere ricavate deducendo in primo luogo la metrica di Robertson-Walker e introducendo questa nelle equazioni di campo esplicitando il tensore $T_{\mu\nu}$, ossia le sorgenti del campo stesso. [4] Da questo procedimento possiamo ottenere un set di 2 equazioni che corrispondono alla prima e alla seconda equazione dinamica. Esisterebbe una terza equazione di Friedmann, costituente una regola di conservazione massa-energia, ricavabile dall'*Identità di Bianchi*, che al momento non tratteremo. Procediamo quindi esplicitando l'equazione di Einstein per un universo omogeneo, isotropo ed in espansione. Il tensore di Ricci dipende dalle derivate seconde della metrica di Robertson-Walker, quindi risulterà diagonale. Le sue componenti quindi verranno espresse da: $R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$ per la componente puramente temporale, $R_{0\alpha} = R_{\alpha 0} = 0$ per le componenti miste e $R_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\alpha\beta} = +(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2)\tilde{g}_{\alpha\beta} = (2k + a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\tilde{g}_{\alpha\beta}$ per le componenti puramente spaziali, dove k è il parametro di curvatura della metrica di Robertson-Walker. Contraendo il tensore di Ricci con la metrica possiamo ricavare lo scalare di Ricci come segue:

$$
\begin{aligned}
R \equiv g^{ab}R_{ab} &= g^{00}R_{00} + g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}, \\
&= -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{a^2}\tilde{g}^{\alpha\beta}\left[\tilde{R}_{\alpha\beta} + \left(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2\right)\tilde{g}_{\alpha\beta}\right],. \\
&= -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3}{a^2}\left(2k + \ddot{a}a + 2\dot{a}^2\right).
\end{aligned}
$$

Successivamente, possiamo procedere calcolando le componenti del tensore di Einstein. La componente puramente temporale sarà data da

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R, \\
&= -3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{2a^2}\left(2k + 2\ddot{a}a + 2\dot{a}^2\right), \\
&= \frac{3}{a^2}k + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Mentre quelle puramente spaziali saranno date da

$$
\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R, \\
&= \left(2k + 2a + 2\dot{a}^2\right)\tilde{\rho}_{\alpha\beta} - \frac{3}{2}\tilde{g}_{\alpha\beta}\left(2k + 2\ddot{a}a + 2\dot{a}^2\right), \\
&= \left(-k - 2\ddot{a}a - \dot{a}^2\right)\tilde{g}_{\alpha\beta}.
\end{aligned}
$$

Esplicitando il tensore energia-impulso per fluido perfetto, otteniamo l'equazione (2.4.3)

$$
T_{\alpha\beta} = \rho c^2 U_\alpha U_\beta - p h_{\alpha\beta}, \tag{2.4.3}
$$

dove $h_{\alpha\beta}$ è il tensore metrico proiettato sullo spazio ortogonale alla direzione del moto, e si può esprimere come equazione (2.4.4).

$$
h_{a\beta} \equiv g_{\alpha\beta} - U_\alpha U_\beta, \tag{2.4.4}
$$

$$
h_{\alpha\beta}U^\alpha = g_{\alpha\beta}U^\alpha - U^\alpha U_\alpha U_\beta = U_\beta - U_\beta = 0.
$$

Isolando ancora una volta le diverse componenti, considerando una quadrivelocità di $U_a = (1, 0, 0, 0)$ poichè la metrica di RW è quella di un osservatore comovente al fluido cosmico, otteniamo $T_{00} = \rho c^2$ come componente puramente temporale, e $T_{\alpha\beta} = -p h_{\alpha\beta}$ per quanto riguarda le componenti puramente spaziali. Eguagliando le componenti tempo-tempo del tensore di Einstein e del tensore energia-impulso, otteniamo l'equazione (2.4.5), che può essere riscritta nella forma (2.4.6), ottenendo così l'equazione di Friedmann che rappresenta una condizione di conservazione dell'energia.

$$
\frac{3k}{a^2} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G\rho, \tag{2.4.5}
$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \tag{2.4.6}$$

Passando ad eguagliare le componenti spazio-spazio, otteniamo l'equazione (2.4.7), che esplicitata si riporta nella forma (2.4.8), avendo posto a 0 i contributi dei moti macroscopici nel fluido ($U_\alpha U_\beta = 0$).

$$\left(-k - 2\ddot{a}a - \dot{a}^2\right)\tilde{g}_{\alpha\beta} = 8\pi G(-P)\left(g_{\alpha\beta} - U_\alpha U_\beta\right), \tag{2.4.7}$$

$$\left(-k - 2\ddot{a}a - \dot{a}^2\right)\tilde{g}_{\alpha\beta} = 8\pi G P \tilde{g}_{a\beta} a^2. \tag{2.4.8}$$

Quindi, dividendo per a^2 e utilizzando l'equazione ricavata sopra, otteniamo l'espressione della prima equazione della dinamica (2.4.9).

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right). \tag{2.4.9}$$

Come noto dalla ricerca di una soluzione per l'Universo nell'ipotesi di staticità di Einstein, un tale modello, avrebbe richiesto un fluido cosmico con densità di energia negativa per essere in accordo con le evidenze scientifiche. Einstein, quindi, introdusse la costante cosmologica Λ nelle equazioni di campo (2.4.10), da cui possiamo ottenere una seconda versione delle equazioni di Friedmann valide per il modello ΛCDM, riportate in equazione (2.4.11) e (2.4.12).[7]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{2.4.10}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \tag{2.4.11}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{2.4.12}$$

2.4.1 Soluzioni delle equazioni di Friedmann

Si procede determinando delle espressioni esplicite per il fattore di scala $a(t)$, per la densità $\rho(t)$ e per la pressione $P(t)$, quindi risolvendo le equazioni di Friedmann [9]. Il fluido cosmico è espresso dall'equazione di stato di fluido perfetto barotropico, ovvero caratterizzato da densità di energia e pressione isotropa. Supponendo che la relazione pressione-densità sia lineare, possiamo scrivere l'equazione di stato come in equazione (2.4.13), dove w è una costante adimensionale.

$$P = w\rho c^2. \tag{2.4.13}$$

Risulta ora necessario considerare la terza equazione di Friedmann (2.4.14), derivante dalla conservazione della massa.

$$\dot{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}\rho. \tag{2.4.14}$$

Da qui possiamo ottenere la relazione

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}, \tag{2.4.15}$$

riconoscendo quindi che l'equazione di stato racchiude l'informazione sulla variazione della densità d'energia al variare del fattore di scala. Poichè non è possibile sostituire questo risultato nella prima equazione di Friedmann e risolverla analiticamente per a, ci si limita a considerare alcuni casi di particolare interesse cosmologico per alcuni valori di w. Considerando il caso di Universo spazialmente piatto, quindi i modelli detti *Einstein-de Sitter*, si pone k=0 nell'equazione di Friedmann, e si possono ricavare due relazioni rispettivamente per la densità di energia e per la costante di Hubble al variare del tempo. Nel nostro caso, consideriamo il valore $w = 0$, ovvero quello per cui la pressione è trascurabile rispetto alla densità di energia, ottenendo quindi un Universo composto da particelle non relativistiche in cui $\rho \propto a^{-3}$ e la massa è conservata. Otteniamo così la classe di modelli di Universo *matter-dominated.* Le dipendenze dal tempo sono espresse dalle equazioni (2.4.16), (2.4.17) e (2.4.18).

$$a(t) = \propto t^{\frac{2}{3}}, \tag{2.4.16}$$

$$\rho = \frac{1}{6\pi G} t^{-2}, \tag{2.4.17}$$

$$H(t) = \frac{2}{3} t^{-1}. \tag{2.4.18}$$

Per quanto riguarda invece il caso $w = -1$, troviamo le caratteristiche di un Universo dominato da costante cosmologica, quindi con pressione negativa e densità di energia costante, quindi la componente di energia oscura dominerà asintoticamente la composizione dell'Universo.

2.5 Parametri cosmologici e Modello attuale

2.5.1 Parametri cosmologici

I *Parametri Cosmologici* servono a descrivere lo stato e l'evoluzione dinamica dell'Universo e le sue proprietà geometriche [4][7]. Per ottenere queste relazioni continueremo ad assumere un approccio relativistico alla teoria della gravitazione. Il primo parametro da tenere in considerazione è il parametro di Hubble (2.5.1)

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \tag{2.5.1}$$

che esprime una misura del tasso di espansione cosmica ad un dato tempo t. Il secondo parametro (2.5.2), invece, esprime l'accelerazione (o decelerazione) dell'espansione cosmica, ed è espresso da

$$q(t) = -\frac{R(t)\ddot{R}(t)}{\dot{R}^2(t)}. \tag{2.5.2}$$

Infine, il terzo parametro è denominato *parametro di densità* ed esprime la densità di materia presente nell'Universo (2.5.3)

$$\Omega(t) \equiv \frac{8\pi G\rho(t)}{3H^2(t)}. \tag{2.5.3}$$

Inserendo questi parametri nelle equazioni di Friedmann (2.4.6) (2.4.9), si può notare che la densità di materia è strettamente legata alla decelerazione dell'espansione dell'Universo, che infatti sarebbe causata dal contenuto di materia gravitante. Da queste definizioni si può ricavare la relazione (2.5.4), che lega la derivata del fattore di scala ai parametri cosmologici al tempo cosmico attuale: questa relazione verrà ampliata per le varie forme di densità, e utilizzata nel (Capitolo 5).

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}^2 = \Omega_0 H_2^2 \left(\frac{a_0(t)}{a(t)}\right)^3 - \left(\frac{a_0(t)}{a(t)}\right)^2 H_0^2(\Omega_0 - 1). \tag{2.5.4}$$

2.5.2 Da CDM a ΛCDM

Dai risultati ottenuti nel tentativo di stabilire una densità di materia gravitante nell'Universo, è stato possibile notare che la maggior parte di questa materia si presenta nella forma di materia oscura, e, nonostante sia un contributo estremamente più rilevante di quello dato dalla materia barionica, non sembra gravitazionalmente sufficiente a produrre un modello chiuso o di Einstein-de Sitter. La materia oscura (DM) non emette onde elettromagnetiche come la materia barionica, ma può essere rilevata studiando i suoi effetti gravitazionali. Il modello di materia oscura a cui fa riferimento questa tesi è il CDM, ovvero *Cold Dark Matter*, che prevede la presenza di particelle massive non-relativistiche che, in seguito a perturbazioni iniziali con conseguenti addensamenti, hanno formato le Strutture su Grande Scala del nostro Universo. Tuttavia, questo modello non risulta sufficiente a spiegare alcune evidenze del nostro Universo: intorno agli anni '90 del secolo scorso è stata formulata una correzione al modello, iniziando a considerare anche un nuovo contributo alla dinamica cosmica, ovvero l'*Energia Oscura*, che nel caso più semplice viene modellata con l'introduzione di Λ nelle Equazioni di Campo di Einstein (2.4.10). Λ, rappresenta il contributo di densità di energia del vuoto, che ha un effetto repulsivo, al contrario della densità di materia, portando quindi all'ottenimento di un modello in *espansione accelerata* che riesce a soddisfare le stime d'età e di distanze osservate. Si ottenne che, l'unica soluzione formale della dinamica cosmica non in conflitto con le osservazioni, corrisponde ai valori attuali dei parametri di densità di $\Omega_m \approx 0.3$ e $\Omega_\Lambda \approx 0.7$, che rappresentano rispettivamente la densità di materia e la densità di energia del vuoto. Poichè

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda \approx 1, \tag{2.5.5}$$

questo modello corrisponde ad un universo piatto ma con tasso di espansione attuale in accelerazione. Pertanto, l'Universo si trova al momento nell'era dominata dall'*Energia Oscura*. [7]

Capitolo 3

Derivazione equazioni di Fluido

Iniziamo quindi ad analizzare la Teoria Perturbativa Euleriana e l'Approssimazione di Zel'dovich per fluido perfetto. Inoltre, nel seguente capitolo procederemo ricavando le equazioni che descrivono la dinamica del fluido cosmico per la Cold Dark Matter, a cui successivamente applicheremo le Trasformazioni di Madelung arrivando così all'interpretazione idrodinamica dell'equazione di Schrödinger. [10]

3.1 Derivazione equazioni di fluido

Si inizia definendo il nostro set di coordinate comoventi e relative regole di derivazione:

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}, \tag{3.1.1}$$

$$\vec{w} = \dot{\vec{r}} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r} + a\frac{d\vec{x}}{dt} = H\vec{r} + \vec{v}, \tag{3.1.2}$$

$$\nabla_{\vec{r}} = \frac{1}{a}\nabla_{\vec{x}}, \tag{3.1.3}$$

dove $\vec{x}$ è la coordinata comovente e $\vec{v} = a\frac{dx}{dt}$ è la *velocità peculiare*. Data una generica funzione $f(\vec{r}, t)$, la derivata materiale di questa è

$$\frac{df}{dt}(\vec{r}, t) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\vec{r}} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \nabla_{\vec{r}}\right) f = \left.\frac{df}{dt}\right|_{\vec{r}} + (\vec{w} \cdot \nabla\vec{r})f = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\vec{r}} + H(\vec{r} \cdot \nabla\vec{r})f + (\vec{v} \cdot \nabla\vec{r})f, \tag{3.1.4}$$

e, se consideriamo $f(\vec{x}, t)$, otteniamo che

$$\frac{df}{dt}(\vec{x}, t) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\vec{x}} + \left(\dot{\vec{x}} \cdot \nabla_{\vec{x}}\right) f = \left.\frac{df}{dt}\right|_{\vec{x}} + \frac{1}{a}(\vec{x} \cdot \nabla\vec{x})f. \tag{3.1.5}$$

Poichè $\frac{df}{dt}(\vec{x}, t) = \frac{df}{dt}(\vec{r}, t)$, quindi

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\vec{x}} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\vec{r}} + H\left(\vec{r} \cdot \nabla_{\vec{r}}\right)_{\rho}. \tag{3.1.6}$$

Una volta introdotte le coordinate comoventi, scegliamo la coordinata $\vec{r}$ e supponiamo un sistema adiabatico. [3] Le equazioni che descrivono la dinamica del fluido sono le 3 equazioni di conservazione (3.1.7), (3.1.8), (3.1.9):

1.
$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\vec{r}} + \nabla_{\vec{r}}(\rho \vec{w}) = 0, \tag{3.1.7}$$

2.
$$\left.\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}\right|_{\vec{r}} + (\vec{w} \cdot \nabla_{\vec{r}})\, \vec{w} = -\frac{\nabla_{\vec{r}} P}{\rho} - \nabla_{\vec{r}} \Phi, \tag{3.1.8}$$

3.
$$\nabla^2_r \phi = 4\pi G \rho. \tag{3.1.9}$$

La prima è l'*Equazione di Continuità*, la seconda è l'*Equazione di Eulero* e la terza è l'*Equazione di Poisson*. (Si veda Appendice [A] per le rispettive derivazioni).

3.2 Teoria Perturbativa Lineare

Con lo scopo di descrivere le piccole perturbazioni, al primo ordine, della densità di materia che hanno dato origine alla formazione delle Strutture Cosmologiche su Grande Scala, ricordiamo le due classi di teorie perturbative principalmente impiegate:

1. EPT *Teoria Perturbativa Euleriana.* Considera le quantità di fluido macroscopiche come campi di densità e si basa sull' applicazione della teoria delle perturbazioni all'equazione del moto della pressione del fluido.
2. LPT *Teoria Perturbativa Lagrangiana.* Considera le perturbazioni lineari sulla traiettoria dei singoli elementi di fluido, chiamata Approssimazione di Zel'dovich.

Queste due approssimazioni presentano diversi limiti: se da un lato l'Approssimazione di Zel'dovich fallisce quando due particelle incrociano la loro traiettoria (fenomeno di *shell-crossing*), dall'altro lo studio delle fluttuazioni di densità diventa difficilmente gestibile per perturbazioni che escono dal regime lineare. In questa sezione analizzeremo la Teoria Perturbativa Euleriana al primo ordine.

Iniziamo separando i termini di background da quelli perturbativi e definiamo

$$\rho \equiv \rho_b + \delta\rho \equiv \rho_b(1+\delta), \tag{3.2.1}$$

dove $\delta \equiv \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b}$ è il *contrasto di densità*, ρ_b la *densità media di background* e $\delta\rho$ le *fluttuazioni di densità* del termine di omogeneità.

Il potenziale sarà espresso come $\Phi \equiv \Phi_b + \phi$ con ϕ *potenziale gravitazionale peculiare.*

A questo punto possiamo procedere eliminando i termini di background e riscrivendo in nuove coordinate comoventi le equazioni (3.1.7) (3.1.8) (3.1.9):

1) Equazione di Continuità: sostituendo l'equazione (3.1.6), dopo alcune semplificazioni otteniamo

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\vec{x}} + H\rho \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{r} + \rho \nabla_{\vec{r}} \vec{v} + \nabla_{\vec{r}} \rho \cdot \vec{v} = 0. \tag{3.2.2}$$

Poichè $H\rho\,(\nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{r}) = 3H\rho$, si può riscrivere l'equazione (3.2.2) come

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho + \frac{1}{a}\nabla_{\vec{x}}(\rho \vec{v}) = 0, \tag{3.2.3}$$

ottenendo così l'Equazione di Continuità in coordinate comoventi.

2) Equazione di Eulero: sostituendo l'equazione (3.1.5) otteniamo

$$\left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\vec{r}} + \left.\frac{\partial (H\vec{r})}{\partial t}\right|_{\vec{r}} + H^2(\vec{r}\cdot\vec{r})r + H(\vec{v}\nabla_{\vec{r}})\vec{r} + (H\vec{r}\cdot\nabla_{\vec{r}})\vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla_{\vec{r}})\vec{v} = -\frac{\nabla_{\vec{r}}P}{\rho} + \nabla_{\vec{r}}\Phi_b - \nabla_{\vec{r}}\phi. \quad (3.2.4)$$

Procediamo ponendo a 0 i termini di background

$$\left.\frac{\partial (H\vec{r})}{\partial t}\right|_{\vec{r}} + H^2\left(\vec{r}\cdot\nabla_{\vec{r}}\right)\vec{r} + \nabla_{\vec{r}}\Phi_b = 0, \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}\vec{r} + H\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + H^2\vec{r}\left(\vec{r}\cdot\nabla_{\vec{r}}\right) = -\nabla_{\vec{r}}\Phi_b, \quad (3.2.6)$$

e da qui possiamo ottenere

$$\left(\dot{H} + H^2\right)\vec{r} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_b\vec{r}. \quad (3.2.7)$$

L'equazione è soddisfatta per $\dot{\rho} = -3H\rho$ e $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_b$ che, sostituite nelle equazioni di Friedmann portano alla condizione $\dot{H} = -4\pi 6\rho$. Tornando all'Equazione di Eulero possiamo scrivere

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\vec{r}} - \left(\vec{v}\cdot\nabla_{\vec{r}}\right)(H\vec{r}) + (H\vec{r}\cdot\nabla_{\vec{r}})\vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla_{\vec{r}})\vec{v} = -\frac{\nabla_{\vec{r}}P}{\rho} - \nabla_{\vec{r}}\phi, \quad (3.2.8)$$

e, dall'Equazione di Continuità, otteniamo la forma

$$\left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\vec{x}} + (\vec{v}\cdot\nabla\vec{r})(H\vec{r}) + \left(\vec{v}\cdot\nabla_{\vec{r}}\right)\vec{v} = -\frac{\nabla\vec{r}P}{\rho} - \nabla_{\vec{r}}\phi. \quad (3.2.9)$$

Utilizzando le relazioni ricavate sopra, otteniamo che

$$\frac{1}{a}(\vec{v}\cdot\nabla_{\vec{x}})(H\vec{r}) = \frac{1}{a}(\vec{v}\cdot\nabla_{\vec{x}})Ha\vec{x} = \nabla_{\vec{x}}\vec{x}\vec{v}\cdot H = H\vec{v}, \quad (3.2.10)$$

quindi, l'Equazione di Eulero in coordinate comoventi sarà data da

$$\left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\vec{x}} + H\vec{v} + \frac{1}{a}\left(\vec{v}\cdot\nabla_{\vec{x}}\right)\vec{v} = -\frac{1}{a\rho}\nabla_{\vec{x}}P - \frac{1}{a}\nabla_{\vec{x}}\phi. \quad (3.2.11)$$

3) Equazione di Poisson: utilizzando la relazione (3.1.3) nell'Equazione di Poisson, otteniamo la versione in coordinate comoventi

$$\nabla^2_{\vec{x}}\phi = 4\pi G a^2\rho. \quad (3.2.12)$$

Procediamo linearizzando le nostre equazioni nello spazio di Fourier. In questo modo possiamo studiare la nostra perturbazione come una sovrapposizione di onde piane che evolvono linearmente:

$$\begin{cases} \delta(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})}\delta_{\vec{k}}(t)d^3k, \\ \vec{v}(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})}v_{\vec{k}}(t)d^3k, \\ \vec{\phi}(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})}\vec{\phi}_{\vec{k}}(t)d^3k. \end{cases} \quad (3.2.13)$$

Poichè si ha $\rho = \rho_b(1+\delta)$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho_b}{\partial t}\delta + (1+\delta)\left(\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + 3H\rho_b\right) + \frac{1}{a}\nabla_{\vec{x}}\left(\rho_b(1+\rho)\right)\cdot\vec{v} + \frac{1}{a}\left(\rho_b\left(1+\rho_b\right)\right)\nabla_{\vec{x}}\cdot\vec{v} = 0,\\
&\frac{\partial \rho_b}{\partial t}(1+\delta) + 3H\rho_b(1+\delta) + \frac{1}{a}\nabla_{\vec{x}}\left(\vec{v}\rho_b(1+\delta)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Prima di espandere in serie di Fourier le nostre equazioni apportiamo qualche piccola modifica. Poichè dalla terza equazione di Friedmann (2.4.14) per $P = 0$ si ottiene $\dot{\rho} = -3\mathrm{H}\rho$, sostituendo ed eliminando i termini di background si arriva all'Equazione di Continuità linearizzata.

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla_{\vec{x}}\cdot\vec{v} = 0. \tag{3.2.14}
$$

Per l'Equazione di Eulero procediamo rimuovendo il termine non lineare ottenendo l'equazione (3.2.15) dalla (3.2.11)

$$
\left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\vec{x}} + H\vec{v} = -\frac{1}{a\rho}\nabla_{\vec{x}}P - \frac{1}{a}\nabla_{\vec{x}}\phi. \tag{3.2.15}
$$

Per l'Equazione di Poisson, con $\rho = \rho_b\delta$, si ottiene

$$
\nabla^2_{\vec{x}}\phi = 4\pi G a^2\rho_b\delta. \tag{3.2.16}
$$

Procediamo espandendo in serie di Fourier, ottenendo per l'Equazione di Continuità

$$
\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})}\frac{\partial \rho_{\vec{k}}}{\partial t}d^3k = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \nabla\vec{x}e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})}\vec{v}_{\vec{k}}d^3k,
$$

$$
\left.\frac{\partial \delta}{\partial t}\right|_{\vec{k}} + \frac{ik\cdot\vec{v}_k}{a} = 0. \tag{3.2.17}
$$

Per l'Equazione di Eulero invece, si ha

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})}\left[\frac{\partial \vec{v}_{\vec{k}}(t)}{\partial t} + H\vec{v}_{\vec{k}}(t)\right]d^3k = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})}i\vec{k}\left[\frac{1}{a\rho_b}\frac{\partial P}{\partial \rho}\rho_b\delta_{\vec{k}}(t) + \right.\\
&\left. + \frac{1}{a}\vec{\Phi}_{\vec{k}}(t)\right]d^3k,
\end{aligned}
$$

con $\frac{\partial P}{\partial \rho} = c_s^2$ velocità del suono, quindi

$$
\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})}\left[\frac{\partial \vec{v}_{\vec{k}}(t)}{\partial t} + \mu\vec{v}_{\vec{k}}(t)\right]d^3k = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})}i\vec{k}\left[\frac{c_s^2}{a}\delta_{\vec{k}}(t) + \frac{1}{a}\vec{\Phi}_{\vec{k}}(t)\right]d^3k,
$$

$$
\frac{\partial \vec{v}_{\vec{k}}}{\partial t} + H\vec{v}_{\vec{k}} = -\frac{ik}{a}c_s^2\left(\delta_{\vec{k}} + \vec{\phi}_{\vec{k}}\right). \tag{3.2.18}
$$

Per l'Equazione di Poisson otteniamo

$$
\frac{1}{(2\pi)^3}\int \nabla^2_{\vec{x}}e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})}\phi_{\vec{k}}d^3k = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})}4\pi G a^2\rho_b\delta_{\vec{k}}d^3k,
$$

$$
k^2\phi_{\vec{k}} = -4\pi G a^2\rho_b\delta_{\vec{k}}. \tag{3.2.19}
$$

Una volta ottenuto questo set di equazioni linearizzate, procediamo impiegando il *Teorema di Kelvin-Stokes*, ottenendo che, per fluido ideale, la circuitazione lungo una curva chiusa che si muove con il fluido è costante nel tempo, quindi:

$$\frac{d\Gamma_{\gamma(t)}}{dt} = 0, \tag{3.2.20}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\oint_c \vec{w'} \cdot d\vec{l}, \tag{3.2.21}$$

dove w' è la *vorticità*. (Si veda Appendice [B] per la dimostrazione). Poichè dal teorema (3.2.21) deriva che la vorticità si conserva lungo le linee di fluido in assenza di forze dissipative, nel nostro caso otteniamo

$$\vec{\nabla} \times \vec{w} = \vec{\nabla} \times (H\vec{r} + \vec{v}), \tag{3.2.22}$$

$$\frac{d}{dt}[\nabla \times (H\vec{r} + \vec{v})] = \nabla \times (\dot{H}\vec{r} + H\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}) = \nabla \times (\dot{H}\vec{r} + H\vec{v} + \dot{\vec{v}}) = 0, \tag{3.2.23}$$

in seguito, per *linearità* del rotore si ha

$$\nabla \times \left(H\vec{v} + \dot{\vec{v}}\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad H\vec{v}_\perp + \dot{\vec{v}}_\perp = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \propto \frac{1}{a}.$$

A questo punto, siamo giustificati a considerare solo la componente delle equazioni relativa alla velocità peculiare parallela a $\vec{k}$. Quindi, procediamo differenziando:

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + \frac{ik}{a}\dot{\vec{v}}_{\vec{k}} - \frac{ik}{a}H\vec{v}_{\vec{k}} = 0, \tag{3.2.24}$$

sostituendo la (3.2.18) nell'equazione sopra otteniamo

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + \frac{ik}{a}\left[-H\vec{v}_{\vec{k}} - \frac{ik}{a}(c_s^2\delta_{\vec{k}} + \phi_{\vec{k}})\right] - \frac{ik}{a}H\vec{v} = 0, \tag{3.2.25}$$

dove, inserendo anche le equazioni (3.2.17) e (3.2.19) arriviamo a

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + 2H\dot{\delta}_{\vec{k}} + \left[\frac{c_s^2\vec{k}}{a^2} - 4\pi G\rho_b\right]\delta_{\vec{k}} = 0. \tag{3.2.26}$$

Successivamente, definiamo il *numero d'onda comovente di Jeans* come in equazione (3.2.27).

$$k_J \equiv \frac{a\sqrt{4\pi G\rho_b}}{c_s}. \tag{3.2.27}$$

Quindi, in approssimazione di $k \ll k_J$ otteniamo l'equazione (3.2.26) approssimata a

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + 2H\dot{\delta}_{\vec{k}} - 4\pi G\rho_b\delta_{\vec{k}} \approx 0. \tag{3.2.28}$$

Nel caso di un universo di Einstein-de Sitter, in cui valgono le relazioni:

$$a \propto t^{\frac{2}{3}},$$

$$H = \frac{2}{3t},$$

$$\rho_b = \frac{1}{6\pi G t^2},$$

la relazione (3.2.28) diventa:

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_{\vec{k}} - \frac{2}{3t^2}\delta_{\vec{k}} \approx 0. \tag{3.2.29}$$

Procediamo quindi cercando soluzioni del tipo $\delta_{\vec{k}} \propto t^{\alpha}$, e possiamo riscrivere la nostra equazione come

$$3\alpha^2 + \alpha - 2 = 0. \tag{3.2.30}$$

Otteniamo così due diverse soluzioni:

$$\begin{cases} \alpha = -1 & \text{DECAYING MODE,} \\ \alpha = \frac{2}{3} & \text{GROWING MODE.} \end{cases} \tag{3.2.31}$$

La soluzione *decaying mode* invalida la linearizzazione poichè la fluttuazione di densità diverge nel limite $t \to 0$, mentre la soluzione *growing mode* è compatibile con la linearizzazione poichè per $t \to 0$ la soluzione converge. Sostituendola otteniamo le relazioni per il *growing mode*: $\delta \propto t^{\frac{2}{3}}, v \propto t^{\frac{1}{3}}, \phi = cost.$

3.3 Regime debolmente non-lineare: Approssimazione di Zel'dovich

È possibile ora studiare l'evoluzione delle fluttuazioni di densità nel regime *debolmente non-lineare* tramite un approccio Lagrangiano, ovvero concentrandosi sulla dinamica di singole particelle non interagenti. In particolar modo verrà trattata l'Approssimazione di Zel'dovich, modello che dà una prima descrizione del processo di formazione delle strutture cosmiche.

Si parte riscrivendo le equazioni (3.1.7) (3.1.8) e (3.1.9), in una nuova variabile temporale $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$ e con i seguenti cambi di variabile:

$$\rho \to \eta \equiv \frac{\rho}{\rho_b} = 1 + \delta, \quad \vec{v} \to \vec{u} \equiv \frac{d\vec{x}}{da} = \frac{\vec{v}}{a\dot{a}}, \quad \phi \to \varphi \equiv \frac{3t_*^2}{2a_*^2}\phi, \quad a(t) = a_*\left(\frac{t}{t_*}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Si ottengono le seguenti equazioni:

$$\frac{D\vec{u}}{Da} + \frac{3}{2a}\vec{u} = -\frac{3}{2a}\nabla\varphi, \tag{3.3.1}$$

$$\frac{D\eta}{Da} + \eta\nabla \cdot \vec{u} = 0, \tag{3.3.2}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{\delta}{a}, \tag{3.3.3}$$

dove la derivata materiale rispetto al fattore di scala $a(t)$ è $\frac{D}{Da} \equiv \frac{\partial}{\partial a} + \vec{u} \cdot \nabla$. Zel'dovich, quindi, pone un *ansatz*: nonostante non si sia in presenza di regime lineare, date le soluzioni (3.2.31) per il *growing mode*, si può porre $\vec{u} \approx$ costante. Pertanto è possibile estrarre una soluzione lineare:

$$\frac{D\vec{u}}{Da} = 0 \quad (\text{ Soluzione lineare }), \tag{3.3.4}$$

e, per il *Teorema di Kelvin*, si ha che $\vec{u}$ è irrotazionale, ovvero può essere espresso come il gradiente di un potenziale scalare

$$\vec{u} = -\nabla\varphi. \tag{3.3.5}$$

L'ipotesi fatta da Zel'dovich è accettabile anche in regime non lineare, poiché, passando allo spazio di Fourier, si ha che

$$\varphi_{\vec{k}} \propto \frac{\delta_{\vec{k}}}{k^2}, \quad \vec{u}_{\vec{k}} \propto k\varphi_{\vec{k}} \propto \frac{\delta_{\vec{k}}}{k},$$

per cui, anche se $\delta_{\vec{k}}$ varia su scale più grandi di $\varphi_{\vec{k}}$ e $\vec{u}_{\vec{k}}$.

Inserendo l'ansatz di Zel'dovich nelle equazioni (3.2.31) si ottiene un set di tre equazioni "formalmente esatte":

$$\frac{D\vec{u}}{Da} = 0, \tag{3.3.6}$$

$$\frac{D\eta}{Da} + \eta\nabla \cdot \vec{u} = 0, \tag{3.3.7}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{\delta}{a}. \tag{3.3.8}$$

Analizziamo il set di equazioni al fine di derivare informazioni riguardanti la dinamica delle particelle e la densità.

Iniziamo dall'equazione di Eulero (3.3.6), una sua soluzione ha la forma

$$\vec{u}(\vec{x}, a) = \vec{u}_0(\vec{q}), \tag{3.3.9}$$

con $\vec{u}_0(\vec{q})$ velocità iniziale nella posizione Lagrangiana $\vec{q}$. Quindi, essendo l'accelerazione nulla, si ha una velocità costante pari alla velocità iniziale. Date le condizioni iniziali, compatibili con la trattazione lineare, si definisce la velocità iniziale come

$$\vec{u}_0(\vec{q}) = -\nabla_q\varphi_0(\vec{q}), \tag{3.3.10}$$

dove $\varphi_0(\vec{q})$ è il potenziale gravitazionale peculiare iniziale. Per trovare la traiettoria, procediamo integrando entrambi i membri della (3.3.10) e imponendo $a_0 = 0$ si ottiene:

$$\int_{a_0}^{a(t)} da'\vec{u}\left(\vec{x}, a'\right) = \int_{a_0}^{a(t)} da'\left(-\nabla_{\vec{q}}\varphi_0(\vec{q})\right),$$

$$\vec{x}(\vec{q}, a) = \vec{q} - a\nabla_{\vec{q}}\varphi(\vec{q}), \tag{3.3.11}$$

da cui

$$\vec{u}(\vec{x}(\vec{q}, a), a) = \frac{\vec{x} - \vec{q}}{a}. \tag{3.3.12}$$

Possiamo procedere nella descrizione della traiettoria di una particella non interagente: queste particelle percorrono una traiettoria rettilinea subendo uno spostamento corrispondente ad una perturbazione di densità. Per quanto riguarda l'equazione di continuità, possiamo ottenere una soluzione formale integrando l'equazione (3.3.7):

$$\eta(\vec{x}, a) = \eta_0(\vec{q})e^{-\int_{a_0}^{a} da'\nabla\cdot\vec{u}[\vec{x}(\vec{q},a),a]}. \tag{3.3.13}$$

Un approccio conveniente allo studio dell'evoluzione della densità è partire dalla conservazione della massa di un elemento infinitesimo di fluido, definita come

$$\eta(\vec{x}, a)d^3x = \eta_0(\vec{q})d^3q.$$

In questo modo, ricordando il cambio di variabili Lagrangiane-Euleriane, è possibile esprimere la densità come

$$\eta(\vec{x}(\vec{q}, a), a) = \left|\frac{\partial x}{\partial q}\right|^{-1}. \tag{3.3.14}$$

Si focalizzi ora l'attenzione sul significato fisico dell'equazione (3.3.14): ricordando la mappa del cambio di coordinate, le componenti della matrice Jacobiana saranno

$$\frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \delta^i_j - a\frac{\partial^2 \varphi_0(\vec{q})}{\partial q_i \partial q^j}. \tag{3.3.15}$$

Nelle componenti dello Jacobiano, riconosciamo il tensore $D_{0,ij}(\vec{q}) \equiv \frac{\partial^2 \varphi_0(\vec{q})}{\partial q_i \partial q^j}$, detto *tensore di deformazione*, chiaramente simmetrico, che esprime la variazione della distribuzione di materia oscura nello spazio tridimensionale. Procediamo con una sua diagonalizzazione locale, fissando i tre assi principali Q_1, Q_2 e Q_3 con autovalori $\lambda_1(\vec{q}), \lambda_2(\vec{q})$ e $\lambda_3(\vec{q})$. È possibile quindi riscrivere l'equazione (3.3.14) come

$$\eta(\vec{x}(\vec{q}, a), a) = \frac{1}{(1 - \lambda_1(\vec{q})a)\,(1 - \lambda_2(\vec{q})a)\,(1 - \lambda_3(\vec{q})a)}. \tag{3.3.16}$$

Se il potenziale gravitazionale iniziale $\varphi_0(\vec{q})$ è di tipo gaussiano, si ha il 92% di probabilità che solo uno dei tre autovalori sia positivo; detto $\lambda_i(\vec{q})$ tale autovalore, esisterà allora un valore del fattore di scala

$$a_{sc} = \frac{1}{\lambda_i(\vec{q})}, \tag{3.3.17}$$

tale per cui si generi una *singolarità*, ovvero la densità η diviene infinita generando una zona detta *caustica*. Accade così il fenomeno dello *shell-crossing*, ovvero particelle con diverse posizioni Lagrangiane $\vec{q}$ arrivano nella stessa posizione Euleriana $\vec{x}$ e la mappa del cambio di coordinate diventa non più invertibile. Poiché il collasso avviene generalmente lungo uno dei tre assi principali dell'ellissoide triassiale, all'istante (3.3.8) si crea una struttura bidimensionale chiamata *pancake*, dalla dimensione finita ma densità infinita. Quindi, in questa situazione, l'approssimazione di Zel'dovich perde validità perchè, oltre a presentare la possibilità di punti a densità di materia infinita, rende impossibile ottenere strutture stabili nel tempo, ovvero dei "pancakes permanenti", poichè le *particelle libere* non risentono di alcuna interazione durante le loro traiettorie rettilinee.

Capitolo 4

Trasformazione di Madelung

Per superare le difficoltà principali dovuti agli approcci sopra affrontati, Widrow e Kaiser proposero un modello basato sull'equivalenza tra le equazioni di fluido e il formalismo delle onde meccaniche, rappresentando la CDM come un campo scalare complesso. Alla base di questo nuovo approccio vediamo il lavoro di Erwin Madelung, che consiste nel ricavare un'equivalenza formale tra le equazioni di fluido e l'equazione di Schrödinger sviluppata nell'ambito della Meccanica Quantistica. (Si faccia riferimento agli articoli [14], [15], [2] e [5] per alcune interessanti applicazioni e test del modello che ora tratteremo).

4.1 Trasformazione di Madelung

Questo approccio alternativo per lo studio della CDM è basato sulla coppia di equazioni Schrödinger-Poisson. Il formalismo che ricaveremo, sviluppato da *E. Madelung* [16] nel tentativo di costruire un analogo alla teoria quantistica di Schrödinger partendo dall'analisi fluidodinamica, viene poi associato alla dinamica cosmica nel 1993 da *L.M. Widrow* e *N. Kaiser* [17].

Enunciamo le equazioni di Schrödinger e Poisson (4.1.1):

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + mV\psi, \\ \nabla^2\phi = 4\pi G\psi\psi^*, \end{cases} , \tag{4.1.1}$$

con $|\psi|^2 = \rho_m$.

Procediamo ricavando il formalismo di Schrödinger dalle equazioni fluidodinamiche attraverso la Trasformazione di Madelung. Assumiamo il fluido cosmico come incomprimibile, in Universo statico e campo di velocità irrotazionale $\vec{w} = \nabla\phi$. L'equazione di continuità e l'equazione di Eulero diventano

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\nabla\Phi) = 0, \tag{4.1.2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\nabla\phi\cdot\nabla)\nabla\phi = -\nabla V, \tag{4.1.3}$$

con $V \equiv \Phi$. Possiamo riscrivere l'equazione (4.1.3) come

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla^2\phi) = -V, \tag{4.1.4}$$

ricavando l'equazione di Hamilton-Jacobi. (Appendice [C]).

Applichiamo la trasformazione di Madelung, analizziamo la forma della funzione d'onda proposta (4.1.5): ψ e R sono i nuovi campi da considerare, invece di ρ e $\nabla\phi$, inoltre abbiamo che $R(\vec{x}, t)$ è l'ampiezza, mentre $\phi(\vec{x},t)$ l'azione (4.1.5). Inoltre $\rho(\vec{x},t)$ rappresenta la densità di probabilità associata alla funzione d'onda.

$$\begin{cases} \psi(\vec{x},t) = R(\vec{x},t)e^{\frac{i\phi(\vec{x},t)}{\nu}}, \\ \rho(\vec{x},t) = \psi\psi^* = R^2. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Dall'equazione (4.1.5) notiamo anche la presenza di un nuovo parametro $\nu\left[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}\right]$, che in seguito analizzeremo. Procediamo calcolando le derivate prime e seconde di ψ, che saranno necessarie in seguito:

$$\nabla\psi = \nabla R e^{\frac{i\phi}{\nu}} + i\frac{R}{\nu}\nabla\phi e^{\frac{i\phi}{\nu}}, \tag{4.1.6}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi &= \nabla^2 R e^{\frac{i\phi}{\nu}} + \frac{i}{\nu}\nabla R\nabla\phi e^{\frac{i\phi}{\nu}} + (i\frac{\nabla R}{\nu}\nabla\phi + i\frac{R}{\nu}\nabla^2\phi)e^{\frac{i\phi}{\nu}} + i^2\frac{R}{\nu^2}(\nabla\phi)^2 e^{\frac{i\phi}{\nu}}, \\ &= \nabla^2 e^{\frac{i\phi}{\nu}} + \frac{i}{\nu}\nabla R\nabla\phi e^{\frac{i\phi}{\nu}} + i\frac{\nabla R}{\nu}\nabla\phi e^{\frac{i\phi}{\nu}} + i\frac{R}{\nu}\nabla^2\phi e^{\frac{i\phi}{\nu}} - \frac{R}{\nu^2}(\nabla\phi)^2 e^{\frac{i\phi}{\nu}}, \\ &= (\nabla^2 R + \frac{i}{\nu}\nabla R\nabla\phi + \frac{i}{\nu}\nabla R\nabla\phi + i\frac{R}{\nu}\nabla^2\phi - \frac{R}{\nu^2}(\nabla\phi)^2)e^{\frac{i\phi}{\nu}}, \\ &= (\nabla^2 R + \frac{i}{\nu}(2\nabla R\nabla\phi + \frac{R}{\nu}\nabla^2\phi) - \frac{R}{\nu^2}(\nabla\phi)^2)e^{\frac{i\phi}{\nu}}. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Sostituendo il campo di densità $\rho = \psi\psi* = R^2$ nell'equazione di continuità otteniamo l'equazione (4.1.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla\left(R^2\nabla\phi\right) = 0, \\ -2\frac{\partial R}{\partial t} = 2\nabla R\nabla\phi + R\nabla^2\phi, \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

quindi, sostituiamo la relazione ottenuta in $\nabla^2\psi$ per arrivare a $(\nabla\phi)^2$ in equazione (4.1.9).

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi = \left[\frac{i}{\nu}\left(-2\frac{\partial R}{\partial t}\right) + \nabla^2 R - \frac{R}{\nu^2}(\nabla\phi)^2\right]e^{\frac{i\phi}{2}}, \\ e^{\frac{i\phi}{\nu}}\nabla^2\psi + \frac{2i}{\nu}\frac{\partial R}{\partial t} - \nabla^2 R = -\frac{R}{\nu^2}(\nabla\phi)^2, \\ (\nabla\phi)^2 = -\frac{\nu^2}{R}\nabla^2\psi e^{\frac{i\phi}{\nu}} - 2i\nu\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial t} + \nu^2\frac{\nabla^2 R}{R}. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

A questo punto, dalla ridefinizione $\psi = Re^{\frac{i\phi}{\nu}}$, otteniamo la derivata temporale

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = e^{\frac{i\phi}{\nu}}\left(\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{iR}{\nu}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right), \tag{4.1.10}$$

da cui possiamo ricavare

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{i\nu}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial t} - e^{-\frac{i\phi}{\nu}}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right). \tag{4.1.11}$$

Infine, sostituiamo le relazioni ottenute per $\nabla^2\phi$ e $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ nell'equazione di Hamilton-Jacobi $\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 = -V$, ottenendo l'equazione

$$i\nu\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial t}-\frac{i\nu}{R}e^{-\frac{i\phi}{\nu}}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\nu^2}{2}\frac{\nabla^2 R}{R}-i\nu\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial t}-\frac{\nu^2}{2R}\nabla^2\psi e^{-\frac{i\phi}{\nu}}=-V. \tag{4.1.12}$$

Risistemando i termini e considerando la forma della funzione d'onda, si ottiene la forma dell'Equazione di Schrödinger:

$$i\nu\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\nu^2}{2}\nabla^2\psi+\psi\left(V+\nu^2\frac{\nabla^2 R}{R}\right), \tag{4.1.13}$$

dove ν è parametro libero ($\rightarrow 0$ ma $\neq 0$) da modificare per arrivare al problema fluidodinamico corrispondente, quindi controllando la *pressione quantica*. La modifica del parametro permette di riscalare l'equazione al fine di evitare singolarità nel campo di densità quando le traiettorie delle particelle si incrociano. Inoltre è presente un termine aggiuntivo (*Potenziale Quantico di Bohm*), proporzionale ad un gradiente di pressione. Se sostituiamo la nostra funzione d'onda nell'equazione di Schrödinger e procediamo al contrario, arriveremo all'equazione di Bernoulli con lo stesso termine additivo. Inoltre, dalla definizione di ψ si può notare che ρ può assumere solo valori non negativi, andando a risolvere quindi il problema della possibilità di situazioni a densità negativa che non hanno significato fisico. Inoltre la presenza di ν, permette di aggirare il problema legato allo *shell-crossing*, ovvero la presenza di punti a densità infinita, infatti, in tali punti, sarà possibile riscalare l'equazione scegliendo il valore opportuno per ν al fine di eliminare le singolarità.

Per completezza, ricaveremo anche il procedimento inverso. Quindi, si parte dall'Equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{x})\right)\psi(\vec{x},t) \tag{4.1.14}$$

dove V = *potenziale plausibile*, e dall'equazione d'onda che è definita come prima (4.1.5) in cui, puntualizzando, l'ampiezza R e l'azione ϕ sono entrambe $\geqslant 0$ e reali. Come sopra, la densità di probabilità è definita da $\rho(\vec{x},t)=\psi^*\psi=R^2$. Sostituendo la nostra equazione d'onda nell'equazione di Schrödinger otteniamo

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 R-\frac{i\hbar}{2m}(\nabla^2\phi)R-i\frac{\hbar}{m}\nabla R\cdot\nabla\phi+\frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2R+VR\right]e^{i\frac{S}{\hbar}}=\left[i\hbar\frac{\partial R}{\partial t}-R\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]e^{i\frac{\phi}{\hbar}}. \tag{4.1.15}$$

Procediamo separando la parte immaginaria da quella reale:

1. Parte immaginaria:

$$-\frac{\hbar}{2m}(\nabla^2\phi)R-\frac{\hbar}{m}\nabla R\nabla\phi=\hbar\frac{\partial R}{\partial t}. \tag{4.1.16}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per R:

$$-\frac{\hbar}{2m}R(\nabla^2\phi)R-\frac{\hbar}{m}R(\nabla R\cdot\nabla\phi)=\hbar R\frac{\partial R}{\partial t},$$
$$-\frac{\hbar}{2m}R^2\nabla^2\phi-\frac{\hbar}{m}R(\nabla R\cdot\nabla\phi)=\hbar R\frac{\partial R}{\partial t}$$

Consideriamo ora il gradiente del prodotto $R^2\nabla\phi$:

$$\nabla(R^2\nabla\phi)=\nabla(R^2)\cdot\nabla\phi+R^2\nabla^2\phi.$$

Sappiamo che:$\nabla(R^2)=2R\nabla R$, quindi

$$\nabla(R^2\nabla\phi)=2R\nabla R\cdot\nabla\phi+R^2\nabla^2\phi.$$

Possiamo ora riscrivere l'equazione come:

$$-\frac{\hbar}{m}\left(\frac{1}{2}R^2\nabla^2\phi + R\nabla R\cdot\nabla S\right) = \hbar R\frac{\partial R}{\partial t},$$

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla(R^2\nabla\phi) = \hbar R\frac{\partial R}{\partial t}. \tag{4.1.17}$$

Dividendo entrambi i membri per $\hbar$ e moltiplicando per 2 otteniamo

$$-\nabla(\frac{R^2}{m}\nabla\phi) = \frac{\partial R^2}{\partial t}.$$

Procediamo definendo come *Flusso di Probabilità* la quantità

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right] = \frac{R^2}{m}\nabla\phi, \tag{4.1.18}$$

e come *velocità* la quantità

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \frac{1}{m}\nabla\phi. \tag{4.1.19}$$

Sostituendo nella relazione per la parte immaginaria otteniamo l'equazione di continuità.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0. \tag{4.1.20}$$

2. Parte reale:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 = -\left(V - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{R}\nabla^2 R\right). \tag{4.1.21}$$

Definiamo *Potenziale Quantico di Bohm* la quantità

$$Q(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{R}\nabla^2 R, \tag{4.1.22}$$

quindi, otteniamo l'equazione di Hamilton-Jacobi (4.1.23), molto simile all'equazione di Bernoulli

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 = -(V+Q). \tag{4.1.23}$$

4.1.1 Trasformazione di Madelung per CDM

Analizziamo ora la situazione dinamica della CDM, assumendo un universo del tipo Einstein-de Sitter e utilizzando il procedimento appena adottato per l'analisi dinamica del fluido[11]. Riscriviamo le 3 equazioni per il fluido in cosmologico nel modello CDM (4.1.24):

$$\begin{cases} \frac{\partial\eta}{\partial r} + \nabla(\eta\vec{u}) = 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 = -\frac{3}{2T}(\Phi+\varphi), \\ \nabla^2\varphi = \frac{\delta}{\tau}, \end{cases} \tag{4.1.24}$$

dove

$$\begin{cases} \eta = \frac{\delta}{\delta_b} = 1 + \delta, \\ \vec{u} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \tau} \text{ coordinata covariante } = \nabla\Phi \text{ campo di velocità }, \\ \tau = a(t), \end{cases}$$

quindi, $a(t)$ sarà la nuova scala temporale utilizzata. Applichiamo anche questa volta la procedura di Madelung ridefinendo la nostra funzione d'onda come

$$\psi = Re^{i\frac{\Phi}{\nu}} = \sqrt{(1+\delta)}e^{i\frac{\Phi}{\nu}}. \tag{4.1.25}$$

Come sopra, assumiamo campo di velocità irrotazionale $\vec{u} = \nabla\Phi$; sostituendo il campo di densità $\rho = \psi\psi^* = R^2 = \eta$, otteniamo

$$\frac{\partial R^2}{\partial \tau} + \nabla\left(R^2\vec{u}\right) = 0. \tag{4.1.26}$$

Ricordando le due regole di derivazione ricavate in equazione (4.1.6) e (4.1.7), e ricordando (4.1.25) arriviamo alle relazioni (4.1.27) e (4.1.28) rispettivamente per $(\vec{u})^2$ e per $\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}$.

$$(\vec{u})^2 = \frac{-\nu^2}{R}\nabla^2\psi e^{\frac{i\Phi}{\nu}} - 2i\nu\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \tau} + \nu^2\frac{\nabla^2 R}{R}, \tag{4.1.27}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = \frac{i\nu}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial\tau} - e^{-\frac{i\Phi}{\nu}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right). \tag{4.1.28}$$

Procedo sostituendo nell'Equazione di Bernoulli la relazione per $(\nabla\Phi)^2 \quad e \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}$.

$$\frac{i\nu}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial\tau} - e^{-\frac{i\Phi}{\nu}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right) + \frac{1}{2}\left[-\frac{\nu^2}{R}\nabla^2\psi e^{\frac{i\Phi}{\nu}} - 2i\nu\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial\tau} + \nu^2\frac{\nabla^2 R}{R}\right) = -\frac{3}{2\tau}(\Phi + \varphi). \tag{4.1.29}$$

Concludiamo con conti analoghi a quelli svolti in precedenza e otteniamo

$$\to i\nu\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = -\frac{\nu^2}{2}\nabla^2\psi + \left[V + \frac{\nu^2}{2}\frac{\nabla^2 R}{R}\right]\psi. \tag{4.1.30}$$

con $V = \frac{3}{2T}(\Phi + \varphi)$ termine di pressione quantica $(\theta\left(\nu^2\right))$. Otteniamo così l'eqauzione di Schrödinger per universo in espansione, nel modello CDM.

4.1.2 Trasformazione di Madelung per ΛCDM

Ampliamo ora il nostro modello alla presenza della *Dark Energy*, rappresentata da Λ nell'equazione di campo di Einstein, quindi nel modello ΛCDM. Come nel caso della CDM, sarà necessario utilizzare una diversa variabile temporale [1]. Innanzitutto, è utile definire il *fattore di crescita* $D(t)$, una quantità che descrive l'evoluzione delle perturbazioni della CDM in regime lineare e, se usato come variabile temporale, semplifica gli studi delle perturbazioni di materia in regime non lineare. Le soluzioni per dell'analisi perturbativa δ_+ e δ_- possono essere scritte a variabili separate in una funzione dipendente dal tempo e una dallo spazio, e il fattore di crescita sarà proprio definito da questa componente temporale (Esempio: $\delta_+(\vec{x}, t) = D_+(t)\Delta_+(\vec{x})$). L'evoluzione del fattore di crescita, quindi, indica che le fluttuazioni crescono con lo stesso andamento in ogni posizione spaziale, e che la topologia della distribuzione di materia non cambia. Ovviamente, la crescita di D(t) dipende dalle proprietà del fattore di scala $a(t)$, dal parametro di Hubble e dalla scelta del modello di universo. In questa sezione useremo il fattore di crescita sottointendendo la scelta della soluzione δ_+, ovvero quella per il *growing mode*.

Le nuove variabili sono date da:

$$\varphi = \frac{2D\Phi}{3e(\Omega_{DM})a^2\dot{D}^2}, \tag{4.1.31}$$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dD} = \frac{\vec{v}}{a\dot{D}}, \tag{4.1.32}$$

dove $e(\Omega_{DM}) = \frac{\Omega_{DM}}{f^2(\Omega_{DM})}$, e

$$f(\Omega_{DM}) = -1 - \frac{\Omega_{DM}}{2} + \Omega_\Lambda + 5a\frac{\Omega_{DM}}{2D}, \tag{4.1.33}$$

è definito come *fattore di crescita adimensionale*, in funzione del fattore di crescita, con riferimento all'articolo [6] per l'approssimazione nel caso di universo piatto. Quindi, utilizzando il fattore di crescita come scala temporale, le equazioni di fluido diventano rispettivamente:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial D} + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} + \frac{3e\,(\Omega_{DM})}{2D}\,(\vec{u}+\nabla\varphi) + \frac{e\,(\Omega_{DM})}{a^2D^2H^2\Omega_{DM}}\frac{\nabla P}{\rho} = 0, \tag{4.1.34}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial D} + \nabla\cdot\left[(1+\delta)\,\vec{u}\right] = 0, \tag{4.1.35}$$

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{D}\delta_{DM} = 0. \tag{4.1.36}$$

Analogamente ai casi per universo non in espansione (Sez.4.1) e universo CDM (Sez.4.1.1), assumiamo il campo di velocità irrotazionale $\vec{u} = -\nabla\phi$, e quindi si procede analogamente a sopra scrivendo l'equazione di Schrödinger per il modello ΛCDM come

$$i\nu\frac{\partial \psi_{DM}}{\partial D} = \left[-\frac{\nu^2}{2}\nabla^2 + V_{DM} + Q_{DM}\right]\psi_{DM}. \tag{4.1.37}$$

Capitolo 5

Variabili supercomoventi

5.1 Introduzione alle Variabili Supercomoventi

Nel seguente capitolo verrà analizzato un set di variabili adimensionali, chiamate *variabili supercomoventi*, impiegate per descrivere lo stato e l'evoluzione della materia in un Universo di Friedmann in approssimazione Newtoniana (quindi con particelle non relativistiche in scale inferiori all'orizzonte cosmologico) [8]. Questa operazione risulta particolarmente utile in cosmologia poichè permette di tenere conto dell'espansione dell'Universo, facilitando lo studio dell'evoluzione delle strutture cosmologiche. A differenza delle coordinate comoventi standard, che sono legate alle coordinate fisiche dal *fattore di scala* $a(t)$, quelle supercomoventi includono anche effetti dinamici dovuti a campi gravitazionali o perturbazioni di densità. Esprimere le nostre equazioni di fluido e di stato in queste nuove variabili, comporta diversi vantaggi:

1. le variabili termodinamiche, che generalmente dipendono dal tempo e dallo spazio assumono carattere stazionario in assenza di perturbazioni, così da considerare implicitamente, e non come esplicite dipendenze dal tempo, gli effetti dell'espansione cosmica adiabatica, a condizione che $\gamma = \frac{5}{3}$;

2. le velocità sono stazionarie in assenza di gravità peculiare o gradienti di pressione;

3. per un gas ideale, con $\gamma = \frac{5}{3}$ le equazioni di conservazione di fluido in variabili supercomoventi sono identiche alle equazioni di conservazione di fluido Newtoniano per gas non cosmologico; in variabili comoventi standard è presente un termine extra per descrivere gli effetti cosmologici.

L'obiettivo principale dello studio di Martel e Shapiro [8], prevede di ottenere un set di equazioni di fluido cosmologiche che assomiglino il più possibile alle equazioni di fluido in variabili non cosmologiche, e che non mostrino una dipendenza esplicita dai parametri cosmologici come H_0, Ω_0, Ω_{x0} e n. In questo modo, sarà possibile generalizzare risultati e tecniche non cosmologiche per affrontare problemi originati nell'uniforme e adiabatica espansione di Hubble. Generalizzando l'equazione di Schrödinger in queste coordinate, gli effetti dell'espansione cosmica verranno assorbiti dallo stesso formalismo utilizzato. In questa trattazione viene ripresa la procedura sviluppata da Shandarin nel 1980 [13] per i modelli di universo dominati dalla materia, e viene generalizzata includendo modelli con componente non aggregante modellizzata come costante cosmologica diversa da 0.

Assumiamo approssimazione Newtoniana e velocità peculiari non relativistiche. Scriviamo le equazioni di conservazione di fluido in variabili comoventi $x = \frac{r}{a(t)}$ e $\rho_{comov} = \rho a(t)^3$. Notiamo che le equazioni di fluido in variabili comoventi contengono dei termini che le distinguono dalle corrispettive non cosmologiche, infatti sono presenti dei termini additivi che fanno decadere nel tempo la velocità peculiare e l'energia, come conseguenza del fatto che l'espansione adiabatica stessa causa raffreddamento.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\vec{w})=0 && \rightarrow \tfrac{\partial\rho}{\partial t}+3H\rho+\tfrac{1}{a}\nabla(\rho\vec{v})=0,\\
&\tfrac{\partial\vec{w}}{\partial t}+(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{w}=-\tfrac{\nabla P}{\rho}-\nabla\Phi && \rightarrow \tfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}+H\vec{v}+\tfrac{1}{a}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\tfrac{1}{a\rho}\nabla P-\tfrac{1}{a}\nabla\phi,\\
&\nabla^2\phi=4\pi G\rho && \rightarrow \nabla^2\phi=4\pi Ga^2\rho.
\end{aligned}$$

5.1.1 Equazioni di fluido in Variabili non Cosmologiche e Supercomoventi

In questa sezione mostreremo che l'equazione di continuità, di conservazione del momento e l'equazione di stato hanno la stessa forma in variabili supercomoventi e non cosmologiche (infatti il termine di resistenza in variabili comoventi sparisce nel caso delle supercomoventi). L'equazione di conservazione dell'energia ha la stessa forma ad eccezione di un termine di resistenza, che però in questo caso sparisce per il modello che prevede $\gamma=\frac{5}{3}$. Solamente l'equazione di Poisson si mantiene molto diversa dalla sua forma non cosmologica, infatti la fonte di potenziale gravitazionale (sia in variabili comoventi che supercomoventi), è non tanto la densità, ma piuttosto il contrasto di densità.

Supponiamo universo omogeneo, isotropo, nella metrica Friedmann-Robertson-Walker. Consideriamo due componenti: la componente non relativistica in tutte le forme di materia $\rho=a(t)^{-3}$e la componente non aggregante (componente x) $\rho_x=a(t)^{-n}$. Scegliamo il caso $n=0$, ovvero quello in cui la costante cosmologica non è nulla (si veda (Sez. 5.1.3) per la classificazione con n). Equazione di Friedmann per evoluzione del fattore di scala è:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=H(t)^2=H_0^2\left[(1-\Omega_0-\Omega_{x0})\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2}+\Omega_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}+\Omega_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}\right], \tag{5.1.1}$$

dove valgono le definizioni

$$k=-H_0^2a_0^2\left(1-\Omega_0-\Omega_{x0}\right), \tag{5.1.2}$$

$$\Omega{=}\frac{\bar{\rho}}{\rho_c}, \tag{5.1.3}$$

$$\Omega_x=\frac{\varrho_x}{\rho_c}, \tag{5.1.4}$$

$$\rho_c=\frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{5.1.5}$$

con ρ_c *densità critica*. Aggiungiamo l'Equazione di Stato al set di equazioni utilizzato fino ad ora per la descrizione dinamica del fluido autogravitante.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\vec{u})=0, \tag{5.1.6}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\nabla)\,\vec{u}=-\nabla\Phi-\frac{\nabla p}{\rho}, \tag{5.1.7}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\vec{u}\nabla\varepsilon=-\frac{p}{\rho}\nabla\vec{u}, \tag{5.1.8}$$

$$p=(\gamma-1)\varepsilon\rho. \tag{5.1.9}$$

(L'equazione (5.1.8) è l'Equazione dell'Energia, viene riportata per completezza ma non sarà presa in analisi). Procediamo modificando l'equazione di Poisson al fine di comprendere anche la componente x. Consideriamo l'accelerazione g^α tra due particelle in caduta libera separate dalla distanza ξ^α, molto minore del raggio di curvatura, equazione per l'accelerazione [12] è

$$g^\alpha=R^\alpha_{00\beta}\xi^\beta. \tag{5.1.10}$$

Considerando la divergenza di g^{α}

$$\nabla^2\Phi \equiv -\nabla \cdot \vec{g} = 4\pi G T^{\alpha\alpha}, \tag{5.1.11}$$

dove, trascurando il termine di pressione non relativistica, il Tensore energia-impulso nel sistema di riferimento in quiete rispetto al fluido è

$$T \equiv \begin{bmatrix} \rho+\rho_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_x}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_x}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p_x}{c^2} \end{bmatrix}. \tag{5.1.12}$$

L'evoluzione di densità della componente x è data da

$$\frac{d}{da}\left(\rho_x a^3\right) = -\frac{3p_x a^2}{c^2}, \tag{5.1.13}$$

che, combinata con la regola di proporzionalità e con il fattore di scala ci permette di trovare l'Equazione di Poisson corretta per componente x

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\left[\rho + (n-2)\rho_x\right]. \tag{5.1.14}$$

Procediamo definendo le *variabili supercomoventi* generalizzate ai casi che comprendono una componente di fondo aggiuntiva non aggregante:

$$\tilde{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{ar_*}, \tag{5.1.15}$$

$$\tilde{\rho} = \frac{a^3\rho}{\rho_*}, \tag{5.1.16}$$

$$\tilde{\vec{v}} = \frac{a\vec{v}}{v_*}, \tag{5.1.17}$$

$$d\tilde{t} = \frac{dt}{a^2 t_*}, \tag{5.1.18}$$

$$\tilde{\phi} = \frac{a^2\phi}{\phi*}, \tag{5.1.19}$$

$$\tilde{p} = \frac{a^5 p}{p^*}, \tag{5.1.20}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{a^2\varepsilon}{\varepsilon_*}. \tag{5.1.21}$$

con velocitá peculiare $\vec{v} = \vec{u} - H\vec{r}$ dove $H \equiv a^{-1}\frac{da}{dt}$.

Il legame tra potenziale gravitazionale peculiare ϕ e potenziale gravitazionale euleriano Φ è dato da

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{2\pi G\bar{\rho}r^2}{3} + \frac{2(n-2)\pi G\bar{\rho}_x r^2}{3} + \phi, \\ &= \frac{\Omega_0 + H_0^2}{a}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 r^2 + \frac{\Omega_{x_0} + H_0^2(u-2)}{a}\left(\frac{a_0}{a}\right)^n r^2 + \phi; \end{aligned} \tag{5.1.22}$$

mentre, i termini con * sono detti *valori di riferimento* e sono dati dalle relazioni

$$\rho_* \equiv \bar{\rho}_0 = \frac{3H_0^2\Omega_0}{8\pi G}, \tag{5.1.23}$$

$$t_* \equiv \frac{2}{H_0}\left(\frac{f_n}{\Omega_0 a_0^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.1.24}$$

$$v_* \equiv \frac{r_*}{t_*}, \tag{5.1.25}$$

$$\phi \equiv \frac{r_*^2}{t_*^2} = v_*^2, \tag{5.1.26}$$

$$p_* \equiv \rho_* \frac{r_*^2}{t_*^2} = \rho_* v_*^2, \tag{5.1.27}$$

$$\varepsilon_* \equiv \frac{\rho_*}{\rho_*} = v_*^2, \tag{5.1.28}$$

$$\text{con } f_n = \begin{cases} 1 \quad n \neq 3, \\ \frac{\Omega_0}{\Omega_0 + \Omega_{x0}} \quad n = 3 \end{cases} . \tag{5.1.29}$$

Per ogni particolare modello cosmologico possiamo eliminare il fattore di scala tramite l'equazione di Friedmann e integrando l'equazione $d\tilde{t} = \frac{dt}{a^2 t_*}$ per ottenere una relazione esplicita tra t e $\tilde{t}$. Infatti, si possono ricavare le seguenti espressioni per H e per le derivate prima e seconda del fattore di scala.

$$H(t) = \frac{1}{a^3 t_*}\frac{da}{d\tilde{t}} \equiv \frac{1}{a^2 t_*}H, \tag{5.1.30}$$

$$\left(\frac{da}{d\tilde{t}}\right)^2 = t_*^2 H_0^2 a_0^6 \left[(1-\Omega_0-\Omega_{x0})\left(\frac{a}{a_0}\right)^4 + \Omega_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 + \Omega_{x0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{6-n}\right], \tag{5.1.31}$$

$$\frac{d^2a}{d\tilde{t}^2} = t_*^2 H_0^2 a_0^5 \left[2\left(1-\Omega_0-\Omega_{x0}\right)\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 + \frac{3\Omega_0}{2}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + \left(3-\frac{n}{2}\right)\Omega_{x0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{5-n}\right]. \tag{5.1.32}$$

Procediamo esprimendo le equazioni di conservazione di fluido in variabili supercomoventi. Iniziamo riportando le regole di derivazione nelle nuove variabili:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_r = \frac{1}{a^2 t_*}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{t}}\right)_r - H\tilde{\tilde{r}}(\tilde{\vec{\nabla}} f)\tilde{t}\right], \tag{5.1.33}$$

$$(\vec{\nabla} f)_t = \frac{1}{a r_*}(\tilde{\vec{\nabla}} f)\tilde{t}. \tag{5.1.34}$$

Ora procediamo con le equazioni di fluido:

1. Equazione di Continuità: inseriamo le equazioni (5.1.15), (5.1.16), (5.1.17), (5.1.23) e (5.1.25) nella (5.1.6), trasformando quindi le coordinate come

$$\rho(r,t) \to \tilde{\rho}(\tilde{r},\tilde{t}), \tag{5.1.35}$$

$$v(r,t) \to \tilde{v}(\tilde{r},\tilde{t}), \tag{5.1.36}$$

sostituendo le regole di derivazione (5.1.33) e (5.1.34), otteniamo

$$\frac{1}{a^2 t*}\left[\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{t}} - H\tilde{r}\cdot\tilde{\nabla}\tilde{\rho}\right] + \frac{1}{ar_*}(\tilde{\nabla}(\tilde{\rho}\tilde{v})) = 0, \tag{5.1.37}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} - H\tilde{r} \cdot \tilde{\nabla}\tilde{\rho} + a\frac{t_*}{r_*}\tilde{\nabla}(\tilde{\rho}\tilde{v}) = 0, \tag{5.1.38}$$

scegliendo $at_* = r_*$ come relazione tra i due parametri per semplicità. Il termine di Hubble appare come una correzione delle coordinare comoventi, tuttavia la struttura delle coordinate supercomoventi e tale da bilanciare la correzione, quindi viene semplificato poichè si sta cercando una forma che rimanga invariata dalla scala di espansione. H viene quindi "assorbito" dalla trasformazione nelle coordinate supercomoventi. Possiamo quindi ottenere un'equazione che corrisponde formalmente all'equazione in variabili non cosmologiche (5.1.6).

2. Equazione di Eulero: inseriamo le relazioni da (5.1.15) a (5.1.20), da (5.1.22) a (5.1.27) e (5.1.33) (5.1.34), nell'equazione (5.1.7) ed eliminiamo i termini di derivata prima e seconda del fattore di scala grazie alle relazioni (5.1.31) e (5.1.32), dopo qualche manipolazione otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial \tilde{\vec{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{v}\tilde{\nabla})\tilde{\vec{v}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} - \tilde{\nabla}\tilde{\phi}. \tag{5.1.39}$$

Anche qui, i termini di Hubble vengono compensati. Anche in questo caso abbiamo ottenuto un'equazione che si presenta nella stessa forma della corrispettiva non cosmologica: è importante notare che l'analoga equazione comovente (3.2.11), presenta un termine aggiuntivo che non è presente nel caso supercomovente.

3. Equazione di Poisson: sostituiamo le equazioni (5.1.16), (5.1.19), (5.1.22), (5.1.24), (5.1.26) e (5.1.34) nella (5.1.13) e, considerando che $\tilde{\rho} \equiv a^3 \frac{\bar{\rho}}{\rho_*} = a^3 \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} = a_0^3$, otteniamo

$$\tilde{\nabla}^2\phi^2 = 6af_n\left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\bar{\rho}}} - 1\right). \tag{5.1.40}$$

Possiamo riscrivere l'equazione appena ricavata per il caso $n = 3$, includendo quindi la componente x, come segue

$$\tilde{\nabla}^2\tilde{\phi} = 6a\left(\frac{\tilde{\rho}_{tot}}{\tilde{\bar{\rho}}_{tot}} - 1\right). \tag{5.1.41}$$

4. Equazione di Stato: inserendo le equazioni (5.1.16), (5.1.20), (5.1.21), (5.1.23), (5.1.27) e (5.1.28) in (5.1.9) otteniamo

$$\tilde{p} = (\gamma - 1)\tilde{\varepsilon}\tilde{\rho}, \tag{5.1.42}$$

che si presenta nella stessa forma dell'equazione (5.1.9).

5.1.2 Equazione di Schrödinger in Variabili Supercomoventi

Risulta molto utile applicare le coordinate supercomoventi alla trasformazione di Madelung, e ottenere un'equazione di Schrödinger in cui il termine cinematico non è più soggetto alla presenza del fattore di scala. Iniziamo definendo la funzione d'onda analogamente al caso delle variabili standard:

$$\tilde{\psi} = \tilde{R}e^{\frac{i\tilde{\phi}}{\nu}}. \tag{5.1.43}$$

Seguendo gli stessi passaggi del Capitolo 4 arriviamo all'equazione

$$i\nu\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\nu^2}{2}\nabla^2\tilde{\psi} = \tilde{\phi}\tilde{\psi} + \frac{\nu^2}{2}\frac{\nabla^2\tilde{R}}{\tilde{R}}\tilde{\psi}, \tag{5.1.44}$$

dove $\tilde{R} = \sqrt{\tilde{\rho}}$.

5.1.3 Soluzioni dell'equazione di Friedmann e Famiglie di Soluzioni

In questo capitolo analizzeremo l'equazione di Friedmann e le relative soluzioni in queste nuove variabili: potremo quindi introdurre il concetto di *famiglie*, semplificando notevolmente la ricerca di una relazione tra fattore di scala e parametri cosmologici per diversi modelli di Universo. Iniziamo riportando la prima Equazione di Friedmann in variabili supercomoventi:

$$\left(\frac{da}{d\tilde{t}}\right)^2 = t^2 * H_0^2 a_0^6 \left[(1-\Omega_0-\Omega_{x0})\left(\frac{a}{a_0}\right)^4 + \Omega_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 + \Omega_{x0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{6-n}\right]. \tag{5.1.45}$$

Dalla riscrittura

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \frac{4\,(1-\Omega_0-\Omega_{x0})}{\Omega_0}x^4 + 4x^3 + 4\frac{\Omega_{x0}}{\Omega_0}x^{6-n}, \tag{5.1.46}$$

con $x = a_0^{-1}a = \frac{a}{a_0}$ e $\tau = (a_0 f_n)^{\frac{1}{2}}\,\tilde{t}$, possiamo ottenere la soluzione

$$\tau = \frac{1}{2}\int dx \left(\frac{1-\Omega_0-\Omega_{x_0}}{\Omega_0}x^4 + x^3 + \frac{\Omega_{x_0}}{\Omega_0}x^{6-n}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.1.47}$$

Questo integrale, però, non ha soluzioni elementari per valori arbitrari di Ω_0, Ω_{x0}, n, ma ci sono casi fisicamente interessanti in cui esistono soluzioni elementari. Ad esempio, se n=2,3,4 otteniamo un polinomio di secondo grado, che ammette sempre soluzione elementare.

$$0 \le n \le 4 \to \tau = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}P(x)^{-\frac{1}{2}}, \tag{5.1.48}$$

$$P(x) = \frac{1-\Omega_0-\Omega x0}{\Omega_0}x^2 + x + \frac{\Omega x_0}{\Omega_0}x^{4-n}. \tag{5.1.49}$$

Possiamo distinguere i diversi modelli per i valori di n. Se n=0 siamo nel caso con costante cosmologica non nulla, quindi otteniamo un polinomio di grado 3 o 4 che non ammette soluzione elementare, tranne per casi speciali: supponiamo $P(x)$ abbia radice doppia per qualche $x = x_{st}$

$$P(x) = (x - x_{st})^2\, Q(x), \tag{5.1.50}$$

che, sostiuita nell'equazione (5.1.48), ci permette di ottenere

$$\tau = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\,|x-x_{st}|}Q(x)^{-\frac{1}{2}},$$

che ha sempre soluzione elementare. Scriviamo la condizione per avere radice doppia in $x = x_{st}$

$$\left(\frac{1-\Omega_0-\Omega_{x0}}{\Omega_0}\right)x_{st}^2 + x_{st} + \frac{\Omega_{x0}}{\Omega_0}x_{st}^{4-n} = 0,$$
$$2\left(\frac{1-\Omega_0-\Omega_{x0}}{\Omega 0}\right)x_{st} + 1 + (4-n)\frac{\Omega_{x0}}{\Omega_0}x_{st}^{3-n} = 0.$$

Eliminando x_{st} otteniamo una condizione su Ω_0 e Ω_{x0}.

$$1-\Omega_0-\Omega_{x0} = \begin{cases} -3\left(\frac{\Omega_{x0}\Omega_0^2}{a}\right)^{\frac{1}{3}} & n=0, \\ -2\left(\Omega_{x0}\Omega_0\right)^{\frac{1}{2}} & n=1, \end{cases} \tag{5.1.51}$$

$$x_{st} = \begin{cases} \left(\frac{\Omega_0}{2\Omega_{x0}}\right)^{\frac{1}{3}} & n=0, \\ \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_{x0}}\right)^{\frac{1}{2}} & n=1. \end{cases} \tag{5.1.52}$$

Quindi otteniamo un modello di universo statico per $a = a_0 x_{st}$, ma poichè l'universo si sta espandendo, avremo che $x < x_{st}$, quindi in realtà si tratta della descrizione di un universo che decelera e si avvicina asintoticamente ad un universo statico per $x \to x_{st}$.

Per analizzare il concetto di *famiglie di soluzioni*, iniziamo analizzando la soluzione all'equazione di Friedmann (5.1.45), notiamo che questa lega il fattore di scala alla variabile supercomovente $\tilde{t}$ in ogni modello particolare. I modelli, quindi, possono essere raggruppati in *famiglie*, definite dalla stessa dipendenza di a da $\tilde{t}$. Concentrando la nostra attenzione su casi con $\Omega_{x0} = 0$ (modello matter-dominated) o $1 - \Omega_0 - \Omega_{x0} = 0$ (modello piatto), notiamo che $P(x)$ (5.1.50) ha due termini, e la soluzione per $a(\tilde{t})$ come funzione di $\tilde{t}$ si riduce ad un numero finito di funzioni che descrivono l'infinito numero di combinazioni possibili per i due parametri cosmologici. I modelli matter-dominated sono descritti da 3 famiglie con la stessa dipendenza interna $a(\tilde{t})$ - $\tilde{t}$, indipendentemente dal valore di Ω_0, con

$$k \equiv \frac{(1 - \Omega_0 - \Omega_{x0})\, \Omega_0^{\frac{(n-2)}{3-n}}}{\Omega_{x0}^{\frac{1}{3-n}}} = cost. \tag{5.1.53}$$

Grazie a queste nuove variabili è possibile categorizzare i nostri modelli dominati dalla materia in tre $famiglie$, separando i casi $\Omega_0 < 1$, $\Omega_0 = 1$ e $\Omega_0 > 1$ [13]. In questo modo, all'interno di ogni famiglia, le equazioni di fluido e le loro soluzioni saranno indipendenti da Ω_0. L'esistenza di queste famiglie permette di considerare il fatto che qualsiasi soluzione delle equazioni differenziali in variabili supercomoventi ottenuta per una data condizione iniziale o al contorno, anch'essa in variabili supercomoventi, per un particolare valore di Ω_0 e H_0, fornisca direttamente la soluzione per qualsiasi altro valore di Ω_0 e H_0 all'interno della stessa famiglia. Di seguito riportiamo le soluzioni per l'equazione di Friedmann per i modelli dominati dalla materia:

$$a = \begin{cases} \left(\tilde{t}^2 - 1\right)^{-1} & \Omega_0 < 1, \\ \tilde{t}^{-2} & \Omega_0 = 1, \\ \left(\tilde{t}^2 + 1\right)^{-1} & \Omega_0 > 1. \end{cases} \tag{5.1.54}$$

$$a_0 = \begin{cases} \frac{1-\Omega_0}{\Omega_0} & \Omega_0 < 1, \\ \\ 1 & \Omega_0 = 1, \\ \\ \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} & \Omega_0 > 1. \end{cases} \tag{5.1.55}$$

Quindi, i valori di $a(0)$ sono scelti al fine di eliminare la dipendenza da Ω_0. In coordinate supercomoventi le soluzioni sono molto semplici. Inoltre, dalla definizione trovata per $a(t)$, si vede che $\tilde{t} < 0$ e cresce da $\tilde{t} = -\infty$ che corrisponde all'istante del Big Bang. (Si veda Appendice [D] per altri modelli che prevedono la presenza di costante cosmologica diversa da 0).

5.1.4 Teoria Perturbativa Lineare in Variabili Supercomoventi

In questa sezione vedremo come la descrizione delle equazioni fluidodinamiche in variabili supercomoventi faciliti lo studio di piccole perturbazioni al primo ordine nel fluido cosmico. Innanzitutto, sia la pressione che la densità vengono scomposte in un termine variabile e in uno di background:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 (1 + \delta), \tag{5.1.56}$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \delta\tilde{p}, \tag{5.1.57}$$

in queste variabili, $\tilde{\rho}_0$ è costante e $\tilde{p}_0$ è funzione soltanto del tempo. Quindi possiamo scrivere le nostre equazioni di fluido linearizzate al primo ordine come

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\vec{v}} = 0, \tag{5.1.58}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\tilde{\nabla}\tilde{\delta p}}{\tilde{\rho_0}} - \tilde{\nabla}\tilde{\phi}, \tag{5.1.59}$$

$$\tilde{\nabla}^2\tilde{\phi} = 6af_n\delta. \tag{5.1.60}$$

Combinando le 3 equazioni, analogamente a quanto svolto nel capitolo 3.2, otteniamo

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\tilde{\nabla}^2\tilde{\delta p}}{\tilde{\rho_0}} + 6af_n\delta. \tag{5.1.61}$$

Possiamo legare $\tilde{\delta p}$ e δ tramite la velocità media del suono per perturbazioni adiabatiche, grazie alla relazione

$$\tilde{\nabla}^2\tilde{\delta p} = \tilde{\bar{c}}_s^2\tilde{\rho_0}\tilde{\nabla}^2\delta, \tag{5.1.62}$$

ottenendo così l'equazione

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \tilde{t}^2} = \tilde{\bar{c}}_s^2\tilde{\nabla}^2\delta + 6af_n\delta. \tag{5.1.63}$$

Analogamente a sopra, possiamo esprimere il contrasto di densità come la somma di onde piane tramite l'espansione in serie di Fourier. Per ogni onda piana otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \tilde{t}^2} = 6af_n\left[1 - \left(\frac{\tilde{\lambda}_J}{\tilde{\lambda}}\right)^2\right]\delta, \tag{5.1.64}$$

dove $\tilde{\lambda}_J = 2\pi(6af_n)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\bar{c}}_s^2$ è la *lunghezza d'onda di Jeans*. Le perturbazioni possono crescere solo per $\tilde{\lambda} > \tilde{\lambda}_J$. L'unica dipendenza che la lunghezza d'onda di Jeans ha dal tempo è quella contenuta nel fattore di scala $a(\tilde{t})$, ciò vuol dire che per una data famiglia, questa è indipendente dai parametri cosmologici. Riportiamo, come esempio, i possibili valori di $\tilde{\lambda}_J$ ottenuti:

$$\tilde{\lambda}_J = \frac{2\pi\tilde{\bar{c}}_{s,0}a_0^{(3\gamma-5)/2}}{6^{1/2}} \times \begin{cases} (\tilde{t}^2-1)^{(3\gamma/2)-2}, & \Omega_0 < 1, \\ \tilde{t}^{3\gamma-4}, & \Omega_0 = 1, \\ (\tilde{t}^2+1)^{(3\gamma/2)-2}, & \Omega_0 > 1. \end{cases} \tag{5.1.65}$$

Anche qui, possiamo estendere la trattazione al limite non collisionale ($\tilde{p} = 0$), per cercare di risolvere il problema dei *pancake permanenti* citato nella (Sez. 3.3). (Per il procedimento completo si rimanda alla Sezione 9 dell'articolo [8]). Le equazioni di fluido si riducono a

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(\tilde{\rho}\tilde{v}) = 0, \tag{5.1.66}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = -\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}}, \tag{5.1.67}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} = 6af_n\left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho_0}} - 1\right). \tag{5.1.68}$$

Tramite procedimento analogo a quello proposto nelle altre situazioni riportate nella tesi, ma scegliendo delle condizioni iniziali periodiche, si ricava una soluzione che descrive la crescita di una perturbazione sinusoidale che va a formare il *pancake* quando l'ampiezza $b(\tilde{t})$ raggiunge l'unita (5.1.69), (5.1.70), (5.1.71). A questo punto, la soluzione s'interrompe e le forti onde d'urto che si creano ai lati dei pancake causano l'uscita dal regime $\tilde{p} = 0$.

$$\tilde{\xi}(\tilde{x},\tilde{t}) = \frac{b(\tilde{t})}{2\pi\tilde{k}}sin2\pi\tilde{k}\tilde{q}, \tag{5.1.69}$$

$$\tilde{v} = -\frac{\frac{db}{dt}}{2\pi\tilde{k}}sin2\pi\tilde{k}\tilde{p}, \tag{5.1.70}$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\rho_0}}{1 - bcos2\pi\tilde{k}\tilde{q}}, \tag{5.1.71}$$

dove $\tilde{\xi}(\tilde{x}, \tilde{t})$ indica la piccola deviazione dell'elemento di massa dalla sua posizione imperturbata, $\tilde{k}$ il numero d'onda della perturbazione, $\tilde{v}$ la velocità peculiare e $\tilde{\rho}$ il profilo di densità [8]. Pertanto, il problema del collasso del pancake, in assenza di processi non adiabatici, presenta una soluzione se espresso in variabili supercomoventi. Si può notare, inoltre, che le equazioni di fluido hanno la stessa forma delle analoghe in variabili non-cosmologiche, pertanto le condizioni di discontinuità saranno indipendenti dai parametri cosmologici. Quindi, poichè le soluzioni presenti prima dell'urto che causa l'uscita dal regime non collisionale sono indipendenti dai parametri cosmologici, tali dovranno essere quelle dopo l'urto all'interno delle varie famiglie.

5.1.5 Approssimazione di Zel'dovich in Variabili Supercomoventi

Infine, analizziamo l'approssimazione di Zel'dovich discussa alla (Sez. 3.3), adottando il set di variabili supercomoventi. Sia $\vec{r}(t)$ la posizione propria dell'elemento di massa al tempo proprio t. Al tempo iniziale:

$$\vec{r}_i = \vec{r}(t_i), \tag{5.1.72}$$

$$\vec{r}(t) = a(t)\left[\vec{q} + \delta_+(\tilde{t})\vec{p}(\vec{q})\right], \tag{5.1.73}$$

$$\text{con } \vec{q} \equiv \frac{\vec{r}_i}{a\left(t_i\right)},$$

l'approssimazione di Zel'dovich assume che la quantità $\vec{r}(t)$ sia valida non solo all'inizio, ma fino al momento in cui le traiettorie degli elementi di massa si incrociano e la densità diverge. In coordinate supercomoventi:

$$\tilde{\vec{r}}(\tilde{t}) = \tilde{\vec{q}} + \delta_+(\tilde{t})\tilde{\vec{p}}(\tilde{\vec{q}}). \tag{5.1.74}$$

Notiamo che $\vec{p}$ e $\vec{q}$ sono già espresse il coordinate comoventi, in variabili supercomoventi il tensore di deformazione resta invariato. Otteniamo quindi una soluzione la cui dipendenza dal modello cosmologico è interamente contenuta nel GROWING MODE δ_+. Le soluzioni sono identiche all'interno delle famiglie.

Capitolo 6

Conclusioni

In questa tesi, è stato presentato un modello alternativo per lo studio delle piccole perturbazioni di densità nella CDM, basato sull'equazione di Schrödinger. Un'analisi preliminare degli approcci fino ad ora utilizzati nell'ambito della teoria dell'*instabilità gravitazionale*, ha portato a considerare la *cold dark matter* tramite le equazioni che regolano la dinamica del fluido perfetto, trattandosi di particelle *collisionless* e in approssimazione Newtoniana. In seguito, si sono intraprese le strade della Teoria Perturbativa Euleriana, per un analisi lineare delle piccole perturbazioni, e dell'Approssimazione di Zel'dovich, per affrontare un regime debolmente non-lineare. Per quanto riguarda il regime lineare il problema è ben modellizzato, le soluzioni perturbative coerenti con la linearizzazione crescono con il tempo. Per quanto riguarda l'Approssimazione di Zel'dovich, invece, garantisce un'ottima comprensione della dinamica del fluido che però, è costretta ad arrestarsi in prossimità dello *shell-crossing*, dove l'approssimazione presenta una singolarità restituendo dei punti a densità infinita. L'approccio sviluppato da Widrow e Kaiser, basato sulla *Trasformazione di Madelung*, permetterà alle soluzioni di superare tali problematiche. Nella seconda parte, invece, abbiamo introdotto un utile set di variabili *supercomoventi*, proposte da Shandarin, e ritrattate in seguito da Martel e Shapiro, che hanno permesso di ottenere una forma delle equazioni di fluido cosmologico quasi identica alle corrispettive non-cosmologiche. L'analisi della teoria perturbativa lineare, in queste coordinate, permetterà di risolvere il problema dei *pancakes permanenti* derivante dall'approssimazione di Zel'dovich in regime comovente standard. Si può procedere riscrivendo in questo set di coordinate *supercomoventi* anche l'equazione di Schrödinger, l'Approssimazione di Zel'dovich e l'Equazione di Friedmann. Proprio dall'analisi delle soluzioni di quest'ultima, risulta che questo cambio di variabili permette di raggruppare le soluzioni per il tempo cosmico e per il fattore di scala in *famiglie*, ovvero gruppi all'interno dei quali le soluzioni sono indipendenti dai parametri cosmologici.

Appendice A

Dimostrazione Equazioni di Fluido Perfetto

[3] Ricaviamo l'equazione di continuità:

Sia $V(t)$ volumetto che segue la particella di fluido di massa $M_{V(t)}$ e assumiamo che la massa di un volumetto sia costante nel tempo, successivamente differenziamo entrambi i membri come segue

$$M_{V(t)} = \int_{V(t)} d^3 r \rho(r,t), \tag{A.0.1}$$

quindi

$$O = \frac{dM_V(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V(t)} d^3 r \rho(r,t) = \int_{V(t)} d^3 r \partial_t \rho(r,t) + \int_{S(t)} d^2 r \hat{n} v(r,t)\rho(r,t). \tag{A.0.2}$$

Per teorema della divergenza si ottiene che

$$0 = \int_{V(t)} d^3 r \partial_t \rho(r,t) + \int_{V(t)} d^3 r \nabla \cdot (\vec{v}\rho) = \int_{V(t)} d^3 r \left[\partial_t \rho(r,t) + \nabla \cdot (\vec{v}\rho)\right]. \tag{A.0.3}$$

Poichè l'equazione (A.0.3) deve valere per ogni volumetto, l'argomento dell'integrale deve essere nullo. Ricaviamo così l'equazione di continuità per la massa.

$$\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \nabla(\vec{v}\rho) = 0. \tag{A.0.4}$$

Ricaviamo l'equazione di Eulero:

In caso di forze inerziali dominanti (numero di Reynolds molto elevato) il termine di viscosità di un fluido può essere trascurato portando all'equazione di Eulero per fluido ideale non viscoso. Consideriamo le forze agenti su un volumetto infinitesimo di fluido dV:

$$\vec{F}_p = -\nabla_p dV, \tag{A.0.5}$$

$$\vec{F}_g = \rho g dV, \tag{A.0.6}$$

$$\vec{F}_{tot} = -\nabla_p dV + \rho g dV, \tag{A.0.7}$$

$$\vec{F}_{tot} = \frac{d}{dt}(\rho \vec{w} dV). \tag{A.0.8}$$

Si procede ricavando

$$-\nabla_p dV + \rho g dV = \frac{\partial(\rho\vec{w})}{\partial t} dV + \nabla(\rho\vec{w}\vec{w}) dV, \tag{A.0.9}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w}\cdot\nabla_{\vec{r}})\,\vec{w}\right) = -\nabla_{\vec{r}} P + \rho g, \tag{A.0.10}$$

quindi si ottiene

$$\left.\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}\right|_{\vec{r}} + (\vec{w} \cdot \nabla_{\vec{r}})\, \vec{w} = -\frac{\nabla_{\vec{r}} P}{\rho} - \nabla_{\vec{r}} \Phi. \tag{A.0.11}$$

Ricaviamo l'equazione di Poisson per potenziale gravitazionale. Si ha che

$$\vec{\nabla} \cdot g = -4\pi G\rho, \tag{A.0.12}$$

con

$$g = -\vec{\nabla}\Phi. \tag{A.0.13}$$

Quindi ne deriva che

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\Phi) &= -4\pi G\rho, \\ \vec{\nabla}^2\Phi &= 4\pi G\rho \\ \nabla^2_{\vec{r}}\Phi &= 4\pi G\rho. \end{aligned} \tag{A.0.14}$$

Appendice B

Dimostrazione Teorema di Kelvin-Stokes

[3] Dimostrazione: consideriamo variazione temporale della circuitazione del campo di velocità $\vec{v}$ lungo la curva chiusa

$$\frac{d}{dt}\oint_{\gamma(0)} \vec{v}\cdot\vec{l} = \oint_{\gamma(0)} \left[\frac{d}{dt}\vec{v}(r_0 t)\cdot\frac{\partial l(t)}{\partial r_{0,i}} + \vec{v}(r_{0,t})\cdot\frac{\partial \dot{l}(t)}{\partial r_{0,i}} d_{r_{0,i}}\right], \tag{B.0.1}$$

il secondo termine, dove $\dot{\vec{l}} = \vec{v}$

$$\vec{v}(r_{0,t})\cdot\frac{\partial \dot{l}(t)}{\partial r_{0,i}} d_{r_{0,i}} = \frac{1}{2} d_{r_{0,i}} \frac{\partial |\vec{v}|^2}{\partial r_{0,i}}, \tag{B.0.2}$$

si annulla integrando lungo un percorso chiuso.

Dalla definizione di derivata materiale si ottiene

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(r_0,t)\cdot\frac{\partial l(t)}{\partial r_{0,i}} = (\partial_t\vec{v} + \vec{v}\nabla_{\vec{v}})dl. \tag{B.0.3}$$

Applicando l'equazione di Navier-Stokes

$$\frac{d\Gamma_{\gamma(t)}}{dt} = \oint_{\gamma(t)} \left(-\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\phi + \eta\nabla^2\vec{v}\right)\cdot dl = \oint_{\gamma(t)} \eta\nabla^2\vec{v}\cdot d\vec{l} = 0 \tag{B.0.4}$$

$$\Leftrightarrow \eta = 0.$$

quindi il teoriema di Kelvin vale $\Leftrightarrow$ assenza di forze viscose $\Leftrightarrow$ si ha conservazione del momento.

Appendice C

Riscrittura Equazione di Hamilton-Jacobi con campo di velocità irrotazionale

Dimostriamo che

$$(\nabla\phi \cdot \nabla)\nabla\phi = \frac{1}{2}\partial_i \left(\partial_j\phi\partial^j\phi\right), \tag{C.0.1}$$

passando in notazione tensoriale si ha che

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_i \left(\partial_j\phi\partial^j\phi\right) &= \frac{1}{2}\left(\partial_i\partial_j\phi\partial^j\phi + \partial_j\phi\partial_i\partial^j\phi\right), \\ &= \partial_j\phi\partial_i\partial^j\phi = w_j\partial_i w^j = (\nabla\phi \cdot \nabla)\nabla\phi,\end{aligned}$$

poichè $\partial_i\partial_j\phi\partial^j\phi \to \partial_j\phi\partial_i\partial^j\phi$.

Sostituendo nell'equazione di Eulero otteniamo

$$\partial_i\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\partial_i \left(\partial_j\phi\partial^j\phi\right) = -\partial_i V, \tag{C.0.2}$$

quindi, per Teorema della divergenza arriviamo all'Equazione di Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla^2\phi) = -V. \tag{C.0.3}$$

Appendice D

Soluzione Equazione di Friedmann in Coordinate Supercomoventi per Universo con Costante Cosmologica non nulla

1. *Universo critico con $\Lambda \neq 0$ (n=0)*: modello di universo marginalmente legato se per n=0, Ω_0 e Ω_{x0} soddisfano

$$1 - \Omega_0 - \Omega_{x0} = -3 \left(\frac{\Omega_{x0}\Omega_0^2}{a} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{D.0.1}$$

Procediamo inserendo (D.0.1) nella soluzione dell'equazione di Friedmann, ottenendo un integrale che ha come soluzione elementare

$$\tilde{t} = -\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{a + 1 - [3a(a+1)]^{\frac{1}{2}}}{a + 1 + [3a(a+1)]^{\frac{1}{2}}}, \tag{D.0.2}$$

$$\text{con fattore di scala all'epoca attuale } a_0 = \left(\frac{\Omega_{x0}}{4\Omega_0} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Purtroppo questa relazione non può essere invertita analiticamente per esprimere a come funzione di $\tilde{t}$.

2. *Modello piatto con muri di dominio o costante cosmologica*: il modello standard piatto con CDM e costante cosmologica non nulla è di grande interesse come spiegazione di diverse evidenze osservative, ad esempio il problema dell'età dell'Universo. La soluzione dell'equazione di Friedmann è

$$\tau = \frac{1}{2} \int dx \left(x^3 + \frac{\Omega x_0}{\Omega_0} x^{6-n} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{D.0.3}$$

che, fissando la costante d'integrazione e ricordando le relazioni $x = a_0^{-1} a = \frac{a}{a_0}$ e $\tau = (a_0 f_n)^{\frac{1}{2}} \tilde{t}$, può essere riscritta come

$$\tilde{t} = \frac{1}{2} \int_1^a \frac{dy}{y^{\frac{3}{2}} \left(1 + y^{3-n}\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{D.0.4}$$

con fattore di scala al presente pari a

$$a_0 = \left(\frac{\Omega_{x0}}{\Omega_0} \right)^{\frac{1}{3-n}}. \tag{D.0.5}$$

Notiamo che la riscrittura non dipende da Ω_0 o Ω_{x0}, e non ha soluzione analitica per n=0 o n=1, ma numericamente possiamo trovare che $a = \tilde{t}^{-2}$.

Famiglie di soluzioni: la relazione $\Omega_0 - \Omega_{x0}$ definisce i membri della famiglia per ogni valore di n. Per n=0,1 le famiglie sono definite da

$$k \equiv \frac{(1 - \Omega_0 - \Omega_{x0})\, \Omega_0^{\frac{n-2}{3-n}}}{\Omega_{x0}^{\frac{1}{3-n}}} = cost. \tag{D.0.6}$$

Ogni k definisce una famiglia, che viene rappresentata da una curva a k costante nello spazio delle soluzioni.

Bibliografia

[1] Paolo Catelan et al. ≪Eulerian perturbation theory in non-flat universes: second-order approximation≫. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 276.1 (1995), pp. 39–56.

[2] P. Coles e K. Spencer. ≪A wave-mechanical approach to cosmic structure formation≫. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 342 (giu. 2003), pp. 176–184.

[3] G. Falasco. *Appunti del corso "Fluidodinamica"*. 2023/2024.

[4] A. Franceschin e G. Rodighiero. *Appunti del corso "Cosmologia"*. 2023/2024.

[5] R. Johnston, A. N. Lasenby e M. P. Hobson. ≪Cosmological fluid dynamics in the Schrödinger formalism≫. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 402 (mar. 2010), pp. 2491–2502.

[6] Ofer Lahav et al. ≪Dynamical effects of the cosmological constant≫. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 251 (lug. 1991), pp. 128–136.

[7] Andrew Liddle. *An introduction to modern cosmology*. 3rd. John Wiley & Sons, 2015.

[8] H. Martel e P. R. Shapiro. ≪A convenient set of comoving cosmological variables and their application≫. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 297.2 (1998), pp. 467–485.

[9] S. Matarrese. *Appunti del corso "Fundamentals of Astrophysics and Cosmology"*. 2023/2024.

[10] S. Matarrese. *Appunti sull'instabilità gravitazionale*. Appunti non pubblicati. 2002–2005.

[11] S. Matarrese e R. Mohayaee. ≪The growth of structure in the intergalactic medium≫. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 329.1 (2002), pp. 37–60.

[12] P. J. E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Vol. 27. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993.

[13] S. F. Shandarin. ≪Astrofizika≫. In: *Astrofizika* 16 (1980). S80, p. 769.

[14] C. J. Short e P. Coles. ≪Gravitational instability via the Schrödinger equation≫. In: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2006 (dic. 2006), pp. 012–012.

[15] C. J. Short e P. Coles. ≪Wave mechanics and the adhesion approximation≫. In: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2006 (dic. 2006), pp. 016–016.

[16] E. A. Spiegel. ≪Fluid dynamical form of the linear and nonlinear Schrödinger equations≫. In: *Proceedings of the Conference on Singularities in Fluids, Plasmas and Optics*. Vol. 1980. Ott. 1979, pp. 236–240.

[17] L. M. Widrow e N. Kaiser. ≪Using the Schrödinger equation to simulate collisionless matter≫. In: *The Astrophysical Journal* 416 (ott. 1993), pp. L71–L74.