

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione Corso di laurea in Ingegneria Elettronica

Modellazione e controllo di una sospensione automobilistica

Relatrice: Laureando:

Prof.ssa Maria Elena Valcher Giovanni Colella

14 Novembre 2022 A.A. 2021-2022

Sommario

Introduzione	. 5
Cap.1 – Sospensione passiva	7
 Modello della sospensione passiva Scelta dei parametri associati al sistema 	
Cap.2 – Sospensione attiva	. 11
 Modello della sospensione attiva Rappresentazione in spazio di stato Analisi della stabilità Funzioni di trasferimento 	
Cap.3 – Analisi delle prestazioni del sistema	21
 Risposta al gradino Risposta del sistema ad un segnale u(t) a gradino Parametri della risposta a gradino Risposta del sistema ad un segnale n(t) a gradino 	
 Risposta in frequenza Risposta in frequenza di W_u Risposta in frequenza di W_n 	
Cap.4 – Sintesi per tentativi	29
SpecifichePrimo passoSecondo passo	
Cap.5 – Attuatore e trasduttore	39
AttuatoreTrasduttoreParametri	
Cap.6 - Controllo PID a tempo continuo	47
Cap.7 – Controllo PI digitale o Discretizzazione o Codice	51
Conclusioni	61
Pibliografia	62

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di studiare un sistema di sospensioni attive per un autoveicolo.

La maggior parte delle soluzioni per realizzare un sistema di sospensioni di tipo passivo, prevedono la presenza di una componente elastica ed una smorzante.

Questo tipo di sospensioni sono installate nella maggior parte dei veicoli in circolazione e risultano di buona efficacia e semplice realizzazione.

Al fine di migliorare il comfort dei passeggeri dell'autoveicolo, è tuttavia necessario introdurre dei miglioramenti. Per fare ciò, risulta conveniente intervenire con un sistema di controllo sulla sospensione meccanica, realizzando così un sistema di tipo attivo.

Questo tipo di soluzione può essere inoltre impiegato per regolare la rigidità della sospensione e l'assetto della vettura, in funzione del tipo di terreno o dello stile di guida desiderato, senza intervenire sulla taratura della sospensione meccanica.

Possiamo dividere le sospensioni attive in due tipologie: le sospensioni adattative (o semi-attive) e le sospensioni attive vere e proprie.

Le prime consistono in un sistema di controllo che in funzione del fondo stradale varia il coefficiente di smorzamento dell'ammortizzatore, che reagirà di volta in volta in maniera diversa ad eventuali irregolarità della strada. Questo metodo ha l'indubbia qualità di risultare meno costoso rispetto ad un sistema pienamente attivo, ma offre un miglioramento limitato.

Le seconde consistono in un controllo che, sempre in funzione del fondo stradale, agirà sulla sospensione imprimendo una forza parallela ad essa; questo tipo di soluzione offre, come si può intuire, migliori performance a fronte di un costo più elevato e di una maggiore complessità costruttiva.

In questa trattazione, prenderemo in considerazione la seconda tipologia.

Una volta analizzato il sistema passivo, ci proponiamo di realizzare un controllore tramite sintesi per tentativi che permetterà di conseguire le specifiche volute per il sistema attivo. In un secondo momento, valuteremo l'effetto della presenza di trasduttore e attuatore che agiscono sul sistema e cercheremo di sintetizzare un controllore PID discreto ed una sua possibile realizzazione su un dispositivo digitale.

Sospensione passiva

Modello della sospensione passiva

Il nostro obiettivo è quello di ottenere un opportuno modello per descrivere il sistema di sospensioni di un'automobile. Uno dei più comuni è il cosiddetto "quarter car" (figura 1.1), dove si considerano due masse:

 m_2 pari a $\frac{1}{4}$ della massa sospesa e rappresentativa di un quarto della massa del veicolo esclusa la massa della corrispondente ruota.

 m_1 pari a ¼ della massa non sospesa e rappresentativa della massa della ruota.

La sospensione dell'automobile, che risiede tra il veicolo e la ruota, avrà una componente elastica k_2 e una smorzante b. Poiché nella realtà queste due componenti possono essere date da una grande quantità di elementi, nella nostra trattazione verranno esemplificate da una molla e uno smorzatore viscoso.

La costante elastica k_1 , posta tra la massa m_1 e il livello del suolo, rappresenta la capacità di deformazione dello pneumatico pieno d'aria, mentre consideriamo trascurabile la sua componente smorzante.

La variazione del livello del suolo in funzione del tempo, rispetto al riferimento inerziale, sarà detta n(t); essa costituirà l'ingresso "di disturbo" per il nostro sistema, poiché perturba di volta in volta l'evoluzione autonoma del sistema.

Per semplicità consideriamo le masse puntiformi, mentre le molle, relative alle costanti elastiche k_1 e k_2 , avranno lunghezza a riposo nulla.

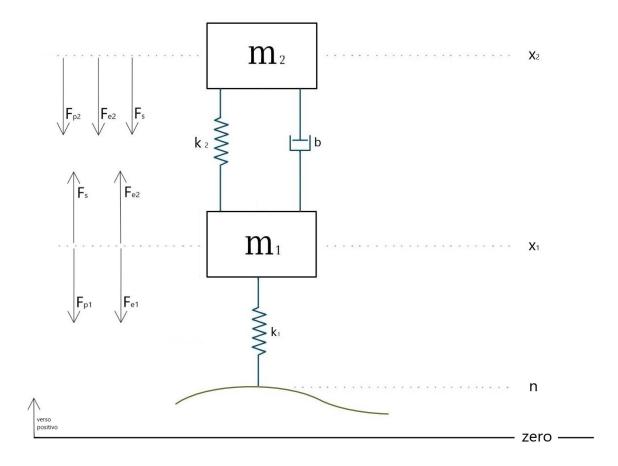


Figura 1.1 – Modello passivo

Dove:

- $[x_2(t) x_1(t)]$ rappresenta la compressione della sospensione
- $[x_1(t) n(t)]$ rappresenta la compressione dello pneumatico
- $[\dot{x}_2(t) \dot{x}_1(t)]$ rappresenta la velocità di compressione dell'ammortizzatore

Le forze che agiscono sul sistema sono:

- $F_{p1} = m_1 \cdot g$ è la forza peso della massa m_1
- $F_{p2} = m_2 \cdot g$ è la forza peso della massa m_2
- $F_{e1} = k_1 \cdot [x_1(t) n(t)]$ è la forza dovuta alla molla di costante elastica k_1
- $F_{e2} = k_2 \cdot [x_2(t) x_1(t)]$ è la forza dovuta alla molla di costante elastica k_2
- $F_S = b \cdot [\dot{x}_2(t) \dot{x}_1(t)]$ è la forza dovuta allo smorzatore viscoso di coefficiente di smorzamento b

Date le precedenti definizioni, possiamo ottenere il modello matematico che descrive il sistema fisico in figura, tramite l'applicazione della legge di Newton a ciascuna delle due masse:

$$\begin{cases}
-F_{p1} - F_{e1} + F_{e2} + F_s = m_1 \cdot \ddot{x}_1(t) \\
-F_{p2} - F_{e2} - F_s = m_2 \cdot \ddot{x}_2(t)
\end{cases}$$

Ossia:

$$\begin{cases} -m_1 \cdot g - k_1 \cdot [x_1(t) - n(t)] + k_2 \cdot [x_2(t) - x_1(t)] + b \cdot [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] = m_1 \cdot \ddot{x}_1(t) \\ \\ -m_2 \cdot g - k_2 \cdot [x_2(t) - x_1(t)] - b \cdot [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] = m_2 \cdot \ddot{x}_2(t) \end{cases}$$

Si noti che le forze peso $m_1 \cdot g$ e $m_2 \cdot g$ sono delle costanti. Poiché la loro presenza determina solo uno spostamento del punto di equilibrio e non modifica la dinamica del sistema, possono essere escluse dalla nostra trattazione ottenendo:

$$\begin{cases} -k_1 \cdot [x_1(t) - n(t)] + k_2 \cdot [x_2(t) - x_1(t)] + b \cdot [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] = m_1 \cdot \ddot{x}_1(t) \\ \\ -k_2 \cdot [x_2(t) - x_1(t)] - b \cdot [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] = m_2 \cdot \ddot{x}_2(t) \end{cases}$$

Scelta dei parametri descrittivi del sistema

Attribuiamo ora dei valori numerici a ciascuno dei parametri del sistema.

La massa non sospesa, che comprende cerchi, pneumatici, mozzi e freni, varia molto da caso a caso, ma possiamo prendere in considerazione un peso di circa $360 \, kg$.

La massa
$$m_1$$
 sarà allora: $m_1 = \frac{360}{4} = 90 \ kg$.

Consideriamo trascurabile il peso della sospensione stessa e, se la ruota è motrice, degli altri elementi relativi alla trazione ad essa collegati, consideriamo inoltre trascurabili le differenze di peso tra la parte anteriore e posteriore dell'automobile.

La massa di una berlina di grandi dimensioni può arrivare a circa $2000 \, kg$, dalla quale, sottraendo il peso delle ruote, avremo una massa sospesa pari a:

$$m_s = 2000 - 360 = 1640 \, kg.$$

La massa m_2 sarà pari a un quarto della massa sospesa: $m_2 = \frac{1640}{4} = 410 \; kg$.

Considerando che una massa di 410 kg genera una forza peso di circa 4021 N, possiamo pensare che comprima la molla di 13 cm rispetto alla posizione di riposo, ciò vuol dire che la sua costante elastica è pari a: $k_2 = \frac{4021}{0.05} \cong 30000 \; \frac{N}{m}$.

L'ammortizzatore avrà un coefficiente di smorzamento pari a: $b=25000 \ \frac{Ns}{m}$.

Lo pneumatico avrà una costante elastica di: $k_1 = 500000 \frac{N}{m}$

Ricapitolando:

parametro	descrizione	valore	unità di misura
m_2	¼ Massa sospesa	410	kg
m_1	¼ Massa non sospesa	90	kg
k_2	Costante elastica della sospensione	30000	$\frac{N}{m}$
b	Coefficiente di smorzamento della sospensione	25000	$\frac{Ns}{m}$
k_1	Costante elastica dello pneumatico	500000	$\frac{N}{m}$

Sospensione attiva

Il sistema passivo di sospensioni che abbiamo analizzato è in uso su un gran numero di autovetture; tuttavia, è possibile migliorare le prestazioni dell'ammortizzatore meccanico, introducendo un maggiore livello di comfort per il passeggero nonostante i disturbi n(t) dovuti alla conformazione del fondo stradale.

Per fare ciò, vogliamo sopprimere in un tempo ridotto le oscillazioni del veicolo e assicurare che queste abbiano un'ampiezza limitata.

Queste prestazioni potranno essere raggiunte introducendo un'azione di controllo sul sistema, che sarà data da una forza u(t) che viene impressa parallelamente alla molla e allo smorzatore, ovvero tra m_2 e m_1 .

Vogliamo inoltre che l'azione di controllo non introduca ulteriori oscillazioni e porti il sistema al riferimento desiderato entro un tempo ragionevole.

Per offrire un opportuno controllo su u(t) sarà necessario conoscere in modo continuo la posizione relativa delle due masse, ovvero la compressione dell'ammortizzatore: questa informazione ci verrà data dalla differenza tra $x_2(t)$ e $x_1(t)$ che costituiscono rispettivamente la posizione di m_2 e m_1 (centro di massa) rispetto al riferimento inerziale indicato in figura 2.1.

Modello della sospensione attiva

Lo schema del sistema su cui agisce l'ingresso di controllo u(t) sarà il seguente:

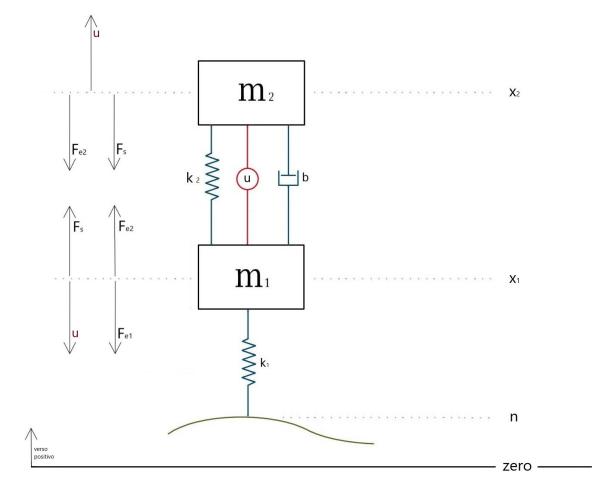


Figura 2.1 – Modello attivo

E sarà descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases}
-k_1 \cdot [x_1(t) - n(t)] + k_2 \cdot [x_2(t) - x_1(t)] + b \cdot [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] - u(t) = m_1 \cdot \ddot{x}_1(t) \\
-k_2 \cdot [x_2(t) - x_1(t)] - b \cdot [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] + u(t) = m_2 \cdot \ddot{x}_2(t)
\end{cases}$$
(2.1)

Rappresentazione in spazio di stato

Vogliamo ottenere ora una rappresentazione del sistema in spazio di stato.

Per fare ciò, dovremo partire dalle equazioni del sistema (2.1) che descrivono la dinamica del sistema e arrivare alla forma che vedremo descritta dalle equazioni (2.2) e (2.3).

Partiamo con la definizione del vettore di stato x, una possibile scelta risulta essere:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

Dove x_1 e x_2 sono rispettivamente la posizione di m_1 e m_2 rispetto al riferimento inerziale; \dot{x}_1 e \dot{x}_2 le loro derivate prime, ovvero le velocità delle due masse lungo l'asse verticale.

Poniamo $x_3=\dot{x}_1$ e $x_4=\dot{x}_2$ e lasciamo inalterati x_1 e x_2 ; otterremo allora il seguente vettore di stato:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Introduciamo ora il vettore di uscita y. Poiché in uscita dal sistema vogliamo ottenere la distanza relativa tra le due masse $x_2(t)-x_1(t)$, il vettore sarà costituito da un solo elemento:

$$\mathbf{y} = [x_2 - x_1]$$

Per completare la rappresentazione in spazio di stato sarà necessario considerare anche il vettore di ingresso $m{u}$:

$$u = \begin{bmatrix} u \\ n \end{bmatrix}$$

Da questa descrizione, si deduce che abbiamo ottenuto un sistema di tipo MISO (Multiple Input Single Output), in particolare con due ingressi ed un'uscita.

A questo punto vogliamo ottenere le equazioni di stato e di uscita; poiché il sistema è lineare, potranno essere descritte nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A \cdot \boldsymbol{x} + B \cdot \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C \cdot \boldsymbol{x} + D \cdot \boldsymbol{u} \end{cases}$$
 (2.2)

La definizione stessa delle variabili di stato assicura che:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t) \end{cases}$$

Possiamo quindi ottenere le espressioni di tutte le componenti del vettore \dot{x} , ricavando $\ddot{x}_1(t)$ e $\ddot{x}_2(t)$ dal sistema (2.1):

$$\dot{x}_{1}(t) = x_{3}(t)
\dot{x}_{2}(t) = x_{4}(t)
\dot{x}_{3}(t) = -\frac{k_{1} + k_{2}}{m_{1}} \cdot x_{1}(t) + \frac{k_{2}}{m_{1}} \cdot x_{2}(t) - \frac{b}{m_{1}} \cdot x_{3}(t) + \frac{b}{m_{1}} \cdot x_{4}(t) - \frac{1}{m_{1}} \cdot u(t) + \frac{k_{1}}{m_{1}} \cdot n(t)
\dot{x}_{4}(t) = \frac{k_{2}}{m_{2}} \cdot x_{1}(t) - \frac{k_{2}}{m_{2}} \cdot x_{2}(t) + \frac{b}{m_{2}} \cdot x_{3}(t) - \frac{b}{m_{2}} \cdot x_{4}(t) + \frac{1}{m_{2}} \cdot u(t)$$

Osservando le dipendenze tra $\dot{x}_{1,}$ $\dot{x}_{2,}$ $\dot{x}_{3,}$ \dot{x}_{4} e $x_{1,}$ $x_{2,}$ $x_{3,}$ x_{4} si deduce la matrice di transizione di stato A descritta nella (2.2):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix}$$

Osservando le dipendenze tra $\dot{x}_{1,} \dot{x}_{2,} \dot{x}_{3,} \dot{x}_{4}$ e u, n si deduce la matrice degli ingressi B descritta nella (2.2):

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} \\ \frac{1}{m_2} & 0 \end{bmatrix}$$

L'equazione (2.3) corrisponde a:

$$y = -x_1(t) + x_2(t)$$

Osserviamo che, per come è stata descritta l'uscita y, essa non dipende da nessuno dei due ingressi u e n, di conseguenza si deduce subito che la matrice D deve essere nulla:

$$D = [0]$$

Nota la dipendenza di y da x_1, x_2 ricaviamo la rimanente matrice $\mathcal C$:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Analisi della stabilità

Sostituiamo i valori dei parametri fisici nella matrice di transizione stato *A*:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5888.89 & 333.33 & -277.78 & 277.78 \\ 73.17 & -73.17 & 60.98 & -60.98 \end{bmatrix}$$

Se la matrice A è diagonalizzabile, allora i modi delle soluzioni del sistema (2.2) saranno tutti del tipo $e^{\lambda_i t}$, dove λ_i sono gli autovalori della matrice.

Per verificare che una matrice sia diagonalizzabile, è necessario per prima cosa trovare i suoi autovalori risolvendo l'equazione caratteristica $\det(\lambda I_4 - A) = 0$, ovvero:

$$det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 5888.89 & -333.33 & \lambda + 277.78 & -277.78 \\ -73.17 & 73.17 & -60.98 & \lambda + 60.98 \end{bmatrix} = 0$$

La quale porge due soluzioni reali e due complesse coniugate:

$$\lambda_1 = -323.55$$

$$\lambda_2 = -1.22$$

$$\lambda_3 = -6.99 + 31.26i$$

$$\lambda_4 = -6.99 - 31.26i$$

Si può notare che le soluzioni (autovalori) sono tutte distinte, il che ci consente di dire che la matrice è diagonalizzabile; se ne deduce immediatamente che la matrice A sarà simile alla matrice diagonale A_D :

$$A_D = \begin{bmatrix} -323.55 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.99 + 31.26i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6.99 - 31.26i \end{bmatrix}$$

Gli autovalori λ_i che si trovano sulla diagonale principale della matrice A_D hanno tutti parte reale strettamente negativa ($\Re e(\lambda_i) < 0$), ne consegue quindi che i modi del sistema sono tutti convergenti e si ha stabilità asintotica.

Funzioni di trasferimento

Vogliamo ora ottenere la funzione di trasferimento W(s) del sistema meccanico che abbiamo descritto.

Poiché abbiamo considerato due diversi ingressi per il sistema (u(t) e n(t)), avremo due distinte funzioni di trasferimento $W_u(s) e W_n(s)$ relative ciascuna ad uno dei due ingressi, che corrisponderanno alla seguente configurazione:

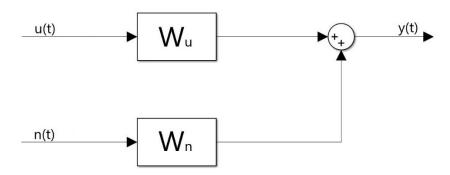


Figura 2.2 – Schema a blocchi del sistema W(s)

Trasformando secondo Laplace le equazioni (2.2) e (2.3), avremo:

$$\begin{cases} s \cdot \mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = A \cdot \mathbf{X}(s) + B \cdot \mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = C \cdot \mathbf{X}(s) + D \cdot \mathbf{U}(s) \end{cases}$$
(2.4)

Dalla definizione di funzione di trasferimento, poniamo $W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$, e dalle equazioni del sistema (2.4) otterremo:

$$\boldsymbol{W}(s) = C \cdot (s \cdot I_4 - A)^{-1} \cdot B + D$$

Si deduce che W(s) sarà allora un vettore riga costituito da due elementi, ovvero:

$$W(s) = [W_u(s) \ W_n(s)] = \left[\frac{(m_1 + m_2) \cdot s^2 + k_1}{d(s)} \quad \frac{-m_2 \cdot k_1 \cdot s^2}{d(s)}\right]$$

Dove:

$$d(s) = m_1 \cdot m_2 \cdot s^4 + b \cdot (m_1 + m_2) \cdot s^3 + (k_1 \cdot m_2 + k_2 \cdot (m_1 + m_2)) \cdot s^2 + b \cdot k_1 \cdot s + k_1 \cdot k_2$$

Sostituendo i valori numerici che abbiamo preso in considerazione precedentemente, avremo:

$$W_u(s) = \frac{500 \cdot s^2 + 500000}{36900 \cdot s^4 + 12500000 \cdot s^3 + 220000000 \cdot s^2 + 12500000000 \cdot s + 15000000000}$$

$$W_n(s) = \frac{-205000000 \cdot s^2}{36900 \cdot s^4 + 12500000 \cdot s^3 + 2200000000 \cdot s^2 + 125000000000 \cdot s + 150000000000}$$

Scomponendo, si ottiene:

$$W_u(s) = \frac{500 \cdot (s^2 + 1000)}{36900 \cdot (s + 323.55) \cdot (s + 1.22) \cdot (s^2 + 13.98 \cdot s + 1025.99)}$$

$$W_n(s) = \frac{-205000000 \cdot s^2}{36900 \cdot (s + 323.55) \cdot (s + 1.22) \cdot (s^2 + 13.98 \cdot s + 1025.99)}$$

Dalle funzioni di trasferimento scomposte si deduce immediatamente la BIBO stabilità del sistema rispetto ai due ingressi, poiché esse hanno solo poli a parte reale strettamente negativa. Tale risultato era ovvio dal momento che il sistema è asintoticamente stabile.

Si noti che la presenza di uno zero (di molteplicità 2) nell'origine per la funzione di trasferimento $W_n(s)$ garantisce la reiezione a regime dei disturbi costanti dati dall'ingresso n(t).

Analisi delle prestazioni del sistema

Vogliamo analizzare il comportamento del sistema nel dominio del tempo per ciascuno dei due ingressi u(t) e n(t), e nel dominio della frequenza tramite le due funzioni di trasferimento $W_u(s)$ e $W_n(s)$.

Per quanto riguarda lo studio del sistema nel dominio del tempo, ricorreremo all'analisi della risposta al gradino, mentre per quanto riguarda lo studio della risposta in frequenza, ricorreremo all'analisi di Bode.

Risposta al gradino

Per tracciare la risposta al gradino di una funzione di trasferimento, possiamo operare da riga di comando di *Matlab*, oppure dal tool *Simulink*.

In questo caso ci avvarremo del primo metodo.

Per prima cosa occorre definire le funzioni di trasferimento W_u e W_n nel workspace.

Per fare ciò, assegniamo gli opportuni valori alle variabili num_u , num_n e den che corrisponderanno ai polinomi rispettivamente del numeratore di W_u , del numeratore di W_n , e del denominatore, che è comune alle due funzioni di trasferimento:

```
num_u = [(m1 + m2) \ 0 \ k1];

num_n = [-m2 * k1 \ 0 \ 0];

den = [m1 * m2 \ b * (m1 + m2) \ k1 * m2 + k2 * (m1 + m2) \ b * k1 k1 * k2];
```

Tramite i comandi $W_u = tf(num_u, den) e W_n = tf(num_n, den)$ otterremo le funzioni di trasferimento desiderate.

A questo punto sarà sufficiente utilizzare il comando $step(W_u)$ per ottenere il grafico della risposta al gradino unitario applicato a u(t), e $step(0.1 * W_n)$ per ottenere il tracciamento del grafico della risposta al gradino di ampiezza 0,1 applicato a n(t).

Risposta del sistema a un segnale u(t) a gradino

In questo caso valutiamo come risponde l'uscita $y(t) = x_2(t) - x_1(t)$ del sistema quando applichiamo un gradino unitario (corrispondente a 1N) come ingresso di controllo u(t), e con l'ingresso di disturbo n(t) nullo:

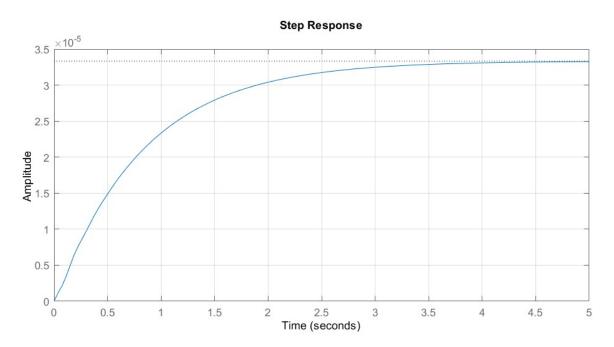


Figura 3.1 – Risposta a $u(t) = \delta_{-1}(t)$

Si nota subito l'assenza di oscillazioni e di sovraelongazione nella risposta, notiamo inoltre che l'applicazione di una forza di 1N determina lo spostamento di soli $3,3\cdot 10^{-5}m$ della posizione relativa delle due masse m_1 e m_2 .

Procediamo con l'analisi di alcuni parametri che risulteranno utili per valutare la qualità di questa risposta.

Parametri della risposta a gradino

Dalla la risposta al gradino di W_u , possiamo ottenere dei parametri che caratterizzeranno il sistema nel dominio del tempo:

- Sovraelongazione percentuale, ovvero di quanto il valore massimo della risposta al gradino si discosta dal valore della risposta a regime $W(0) = w_{-1}(+\infty)$:

$$s = \max_{t \ge 0} \left\{ \frac{w_{-1}(t) - W(0)}{W(0)} \right\} \cdot 100 \%$$

Una eccessiva sovraelongazione può causare il danneggiamento del sistema stesso, inoltre porta ad una notevole riduzione del comfort del passeggero e per questo si vuole ridurla il più possibile. Essa rappresenta una misura di *precisione* del sistema.

- *Tempo di assestamento* al 2%, rappresenta il valore di tempo a partire dal quale la risposta al gradino del sistema si troverà sempre compresa nell'intervallo $W(0) \pm 0.02 W(0)$:

$$t_s = min\{ \check{t} \ge 0: \forall t \ge \check{t}, |w_{-1}(t) - W(0)| \le 0.02 \cdot |W(0)| \}$$

Si vuole ridurre il più possibile questo tempo, nel nostro caso, affinché le oscillazioni del sistema vengano smorzate il più presto possibile. Questo parametro rappresenta una misura di *precisione* del sistema.

- *Tempo di salita al 10%*, rappresenta il tempo necessario affinché la risposta al gradino si porti entro il 10% del valore finale W(0):

$$t_r = \min\{t \ge 0: |w_{-1}(t) - W(0)| \le 0.1 \cdot |W(0)|\}$$

Fornisce un'indicazione di quanto rapidamente il sistema risponda all'ingresso e rappresenta perciò una misura di *prontezza* del sistema.

I parametri appena citati possono essere facilmente ricavati tramite Matlab: sarà sufficiente usare il comando $stepinfo(W_u)$, che come risultato ci fornirà i parametri richiesti.

Otterremo quindi:

parametro	descrizione	valore	unità di misura
t_r	Tempo di salita 10-90%	1.7873	S
t_s	Tempo di assestamento al 2%	3.2117	S
S	Sovraelongazione percentuale	0	%

Il tempo di salita raggiunge quasi i due secondi e potrebbe essere migliorato, vorremo infatti una risposta più rapida all'ingresso di controllo.

Il tempo di assestamento supera i 3s e risulta non ottimale. Nel nostro caso questo parametro assume un significato equivalente a quello del tempo di salita, poiché la risposta risulta essere monotona crescente e quindi sempre minore o uguale al valore di regime $W_u(0)$.

L'assenza di sovraelongazione risulta una condizione idonea alle nostre richieste e cercheremo di preservarla con l'introduzione del controllore.

Risposta del sistema a un segnale n(t) a gradino

Vogliamo valutare come risponde l'uscita y(t) del sistema in corrispondenza ad un gradino applicato all'ingresso di disturbo n(t) mentre l'ingresso u(t) risulta nullo. Possiamo immaginare questo gradino come una perturbazione dell'ingresso corrispondente ad una ipotetica difformità a gradino del fondo stradale di 10cm.

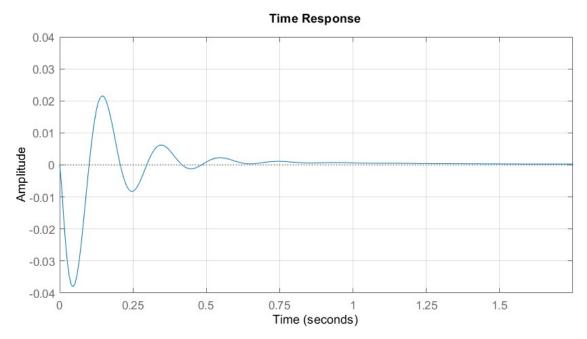


Figura 3.2 – Risposta a $n(t) = 0.1 \cdot \delta_{-1}(t)$

Poiché la risposta al gradino che abbiamo ottenuto si annulla per $t \to \infty$, (si ha, come già detto nel precedente capitolo, reiezione dei disturbi costanti a regime e quindi $W_n(0) = 0$) non ha senso definire i consueti parametri come nel caso precedente.

Possiamo tuttavia considerare dei parametri percentuali rispetto al valore del gradino in ingresso.

In assenza di controllo, dato un disturbo in ingresso di 10*cm*, l'uscita del sistema (ovvero la posizione relativa delle due masse) si spinge fino ad un'ampiezza massima in valore assoluto di circa 3,8*cm*. Questa risposta corrisponde ad un'estensione raggiunta rispetto all'ingresso del 38%. Il tempo di assestamento al 2% del gradino in ingresso è di circa 0,6*s*.

Risposta in frequenza

Proseguiamo con l'analisi in frequenza del modello ottenuto. Per tracciare i diagrammi di Bode delle due funzioni di trasferimento $W_u(s)$ e $W_n(s)$, ricorriamo come prima alla riga di comando di Matlab.

Le funzioni W_u e W_n risultano già definite, sarà sufficiente quindi usare il comando $bode(W_u)$ e $bode(W_n)$ per ottenere il tracciamento dei diagrammi desiderati.

Risposta in frequenza di W_u

Tracciamo ora il diagramma di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione di trasferimento $W_u(s)$ che mette in relazione l'ingresso di controllo u(t) all'uscita y(t):

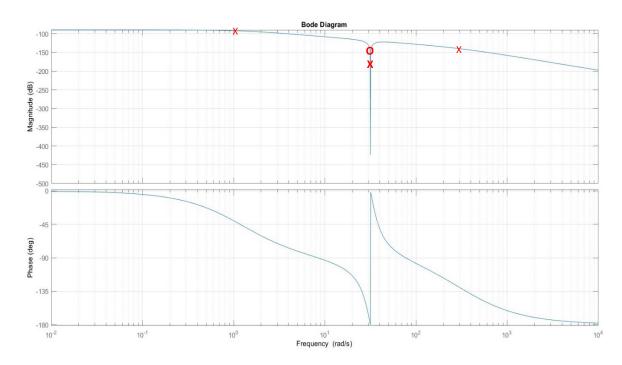


Figura 3.3 - Risposta in frequenza di W_u

Per frequenze inferiori a 1 rad/s la risposta presenta un'attenuazione costante di circa -100 dB, successivamente prosegue con una pendenza di -20dB/dec mentre vi è una forte reiezione della banda intorno ai $32 \, rad/s$.

Per frequenze superiori a 324 rad/s, abbiamo invece un'attenuazione di circa 40 dB/dec.

Risposta in frequenza di W_n

A questo punto vogliamo analizzare i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $W_n(s)$ che mette in relazione l'ingresso di disturbo n(t) all'uscita y(t):

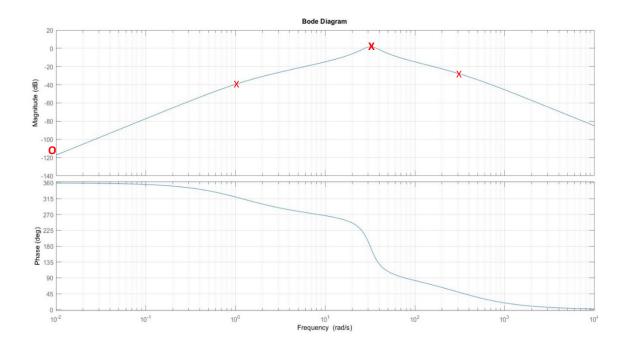


Figura 3.4 - Risposta in frequenza di W_n

Dal diagramma delle ampiezze si nota che le asperità del fondo stradale con frequenza inferiore a circa $32\ rad/s$ vengono attenuate e si ha una pendenza del diagramma di $+40\ dB/dec$ fino alla frequenza di $1\ rad/s$ circa, a partire dalla quale la pendenza cala a $+20\ dB/dec$ fino al raggiungimento degli $0\ dB$ alla frequenza di $32\ rad/s$. A partire da questa frequenza il diagramma prosegue con un'attenuazione di pendenza $-20\ dB/dec$, che cala ulteriormente a $-40\ dB/dec$ circa a partire dai $324\ rad/s$.

Le irregolarità intorno alla frequenza di $32 \ rad/s$ non vengono attenuate, il sistema si comporta quindi come un filtro passa banda per l'ingresso n(t).

Sintesi per tentativi

Una volta analizzate le prestazioni del sistema non controllato, vogliamo imporre delle specifiche di prontezza e di precisione più stringenti in modo che il sistema risponda agli ingressi con migliori prestazioni.

Per ottenere le specifiche richieste ricorriamo ad un controllore $\mathcal{C}(s)$ in retroazione che verrà applicato al sistema W(s) in questione. In particolare, vogliamo ricondurci al caso di uno schema di controllo in retroazione unitaria negativa, come indicato dalla seguente figura:

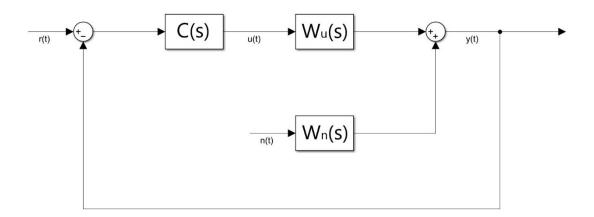


Figura 4.1 – Sistema in retroazione

Per n(t) = 0, lo schema di figura 4.1 è descritto dalla seguente relazione tra l'ingresso r(t) e l'uscita y(t):

$$Y(s) = \frac{C(s) \cdot W_u(s)}{1 + C(s) \cdot W_u(s)} \cdot R(s)$$

L'introduzione dell'anello di retroazione ci consentirà di portare l'uscita $y(t) = x_2(t) - x_1(t)$ al livello di regime desiderato indicato da r(t), ovvero l'ingresso di riferimento del sistema, con le specifiche richieste.

In questo caso, poiché vogliamo che il sistema si porti al suo punto di naturale equilibrio, porremo r(t)=0.

Specifiche

L'introduzione del controllore andrà a influenzare la risposta del sistema ai due ingressi r(t) e n(t) dello schema in figura 4.1.

Per procedere alla sintesi per tentativi, andiamo ad imporre delle specifiche minime che vorremo raggiungere per quanto riguarda la risposta al gradino del sistema retroazionato all'ingresso di riferimento r(t).

Successivamente sintetizzeremo, tramite Matlab, un controllore che realizzi queste specifiche e che, entro i limiti possibili, sia in grado di migliorare anche la risposta all'ingresso di disturbo n(t).

Procederemo in due fasi, ciascuna delle quali porterà a determinati vincoli sul guadagno e sulla posizione di poli e zeri della funzione di trasferimento C(s) del controllore.

Con il primo passo vogliamo stabilire il *tipo* e l'errore di regime permanente del sistema in retroazione. In particolare, vorremo che:

- il sistema retroazionato sia di tipo~0, ovvero che risponda con errore di regime permanente e_{rp}^* costante e non nullo all'ingresso $r(t)=\delta_{-1}(t)$.
- l'errore di regime permanente al gradino unitario soddisfi $e_{rp}^* < 0.03$. Ciò significa esigere che la risposta a regime del sistema a $r(t) = \delta_{-1}(t)$ si discosti dal gradino di ingresso al più del 3%.

Con il secondo passo vogliamo stabilire una massima sovraelongazione e un massimo tempo di salita per la risposta all'ingresso r(t) a gradino del sistema in retroazione. In particolare, vorremo:

- una sovraelongazione S inferiore allo 0,5%
- un tempo di salita t_r inferiore a 1s

Queste specifiche corrisponderanno a richiedere che il sistema si porti entro un certo tempo (tempo di salita), senza superare una certa soglia (sovraelongazione), e con un certo margine di errore (errore di regime permanente), al valore di regime richiesto.

Andiamo ora ad analizzare nel dettaglio come si procederà allo svolgimento di ciascuno dei due passi.

Primo passo

Procediamo con il primo passo, ovvero quello di trovare un controllore $C_1(s)$ con struttura:

$$C_1(s) = \frac{k_b(C_1)}{s^{\alpha}}$$

Questo controllore deve essere tale da soddisfare le richieste sul *tipo* del sistema e sull'errore di regime permanente e_{rp}^* .

Affinché il sistema retroazionato sia di *tipo k* , è necessario che la funzione in catena aperta $\breve{G}(s) = C_1(s) \cdot W_{\nu}(s)$ abbia un polo di molteplicità k nell'origine.

Nel nostro caso la funzione $W_u(s)$ non possiede alcun polo in zero, sarà quindi sufficiente avere un controllore $C_1(s)$ privo di poli in zero (ovvero $\alpha=0$) per garantire che il sistema in retroazione sia di *tipo* 0.

La seconda richiesta prevede un limite sull'errore di regime permanente del 3%, questo si traduce in una specifica sul guadagno della funzione di trasferimento in catena aperta $\breve{G}(s)$.

Al fine di ottenere il guadagno desiderato, interverremo sul guadagno $k_b(C_1)$ del controllore $C_1(s)$. Per un sistema di tipo 0 al fine di limitare l'errore a regime al gradino possiamo imporre la seguente relazione:

$$|k_b(C_1)| = \frac{1}{|k_b(W_u)|} \cdot \left(\frac{1}{e_{rp}^*} - 1\right)$$

 $k_b(W_u)$ vale 3,33 · 10^{-5} , e poiché è una quantità positiva, deve valere $k_b(\breve{G}) > 0$, avremo allora un controllore puramente proporzionale, pari a:

$$C_1(s) = k_b(C_1) = 970970$$

Il guadagno $k_b(\breve{G})$ sarà la base di partenza per il successivo passo, nel corso del quale potrà essere aumentato se risulterà necessario.

Secondo passo

Partiamo dall'analisi della risposta in frequenza del sistema in catena aperta $\check{G}(s) = C_1(s) \cdot W_u(s)$ tramite i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi. Da questi diagrammi otterremo una certa *pulsazione di attraversamento* ω_A , ed un certo *margine di fase* m_{ψ} .

La pulsazione di attraversamento consiste nel valore di pulsazione angolare (se esiste ed è unico) per cui il diagramma di Bode delle ampiezze attraversa il livello di 0dB in un unico punto e con pendenza negativa.

Il margine di fase consiste nella distanza angolare dal valore di -180° che la fase assume in corrispondenza della pulsazione di attraversamento.

Una ragionevole approssimazione del sistema in catena chiusa al secondo ordine ci permetterà di stabilire una relazione tra i parametri di sovraelongazione S e di tempo di salita t_r voluti per la risposta al gradino del sistema retroazionato, e margine di fase e pulsazione di attraversamento della funzione in catena aperta $\breve{G}(s)$.

Per quanto riguarda il margine di fase, partiamo dalla seguente relazione tra sovraelongazione desiderata e fattore di smorzamento ζ dei poli dominanti del sistema:

$$\zeta = \sqrt{\frac{log^2(S)}{\pi^2 + log^2(S)}}$$

La successiva relazione ci permette di ottenere un'indicazione del margine di fase di $\check{G}(s)$ a partire dal fattore di smorzamento ζ :

$$m_{\psi}^* = arctg\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}}\right)$$

Per il nostro sistema vogliamo garantire una sovraelongazione quasi nulla, considereremo quindi accettabili sovraelongazioni inferiori a S=0.005 (0,5%).

Questa specifica ci porterà ad una richiesta sul margine di fase di almeno $m_{\psi}^*=72^{\circ}$.

Per quanto riguarda la pulsazione di attraversamento, varrà la seguente relazione:

$$\omega_A^* \approx \frac{2,31}{t_r}$$

Nel nostro caso vogliamo garantire un tempo di salita inferiore al secondo, ovvero un margine di fase per $\check{G}(s)$ maggiore o uguale a $\omega_A^*=2.31\ rad/s$.

A questo punto, in base a quanto si discostano i valori richiesti ω_A^* e m_ψ^* dai valori ω_A e m_ψ che otteniamo dal diagramma di Bode riportato in figura 4.2 del sistema $\mathcal{C}_1(s)\cdot W_u(s)$ dopo il primo passo, costruiremo una opportuna rete correttrice $\mathcal{C}_2(s)$ da aggiungere al sistema.

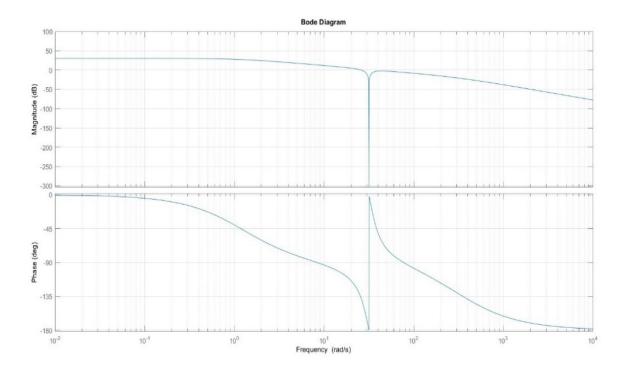


Figura 4.2 – Diagramma di bode di $C_1(s) \cdot W_u(s)$

Dalla figura 4.2 ricaviamo $\omega_A=30~rad/s$ e $m_\psi=45^\circ$, risulta quindi che $\omega_A>\omega_A^*$ e $m_\psi< m_\psi^*$.

Vorremo quindi abbassare la pulsazione di attraversamento e alzare il margine di fase.

Per fare ciò, il controllore $C_2(s)$ voluto dovrà corrispondere ad una rete a sella, costituita dalla combinazione di una rete anticipatrice e di una ritardatrice:

$$C_2(s) = k_b(C_2) \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{Z_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{Z_2}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{p_2}\right)}$$

Dove z_1 e z_2 sono gli zeri e p_1 e p_2 i poli del controllore $C_2(s)$, per cui vale la relazione $p_1 < z_1 < z_2 < p_2$.

Per trovare una posizione opportuna di zeri e poli, useremo il tool di Matlab chiamato ControlSystemDesigner, che permetterà di modificare il diagramma di Bode di $\breve{G}(s)$, visualizzando immediatamente l'effetto che avrà sul sistema in retroazione. In particolare, ci interesserà osservare quali saranno le risposte al gradino relative a r(t) ed a n(t). Per fare ciò cominciamo innanzitutto ad indicare un'opportuna architettura del sistema:

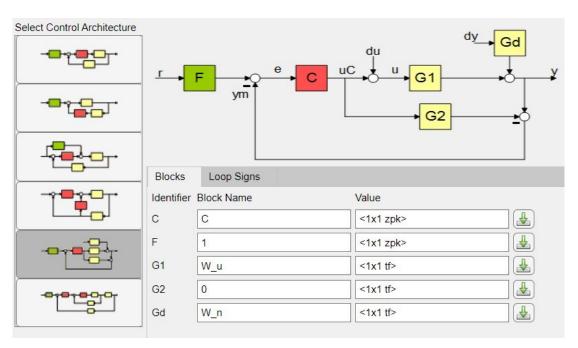


Figura 4.3 – Architettura del sistema

Per rispettare lo schema a blocchi della figura 4.1 dovremo porre:

$$F = 1$$
 $C = C(s)$ $G1 = W_u(s)$ $G2 = 0$ $Gd = W_n(s)$

A questo punto si presenterà una finestra che metterà a disposizione diversi strumenti. In particolare, per la sintesi per tentativi faremo uso del *Bode Editor*, che ci permetterà di aggiungere zeri e poli dove desideriamo all'interno del diagramma di Bode, oltre che traslare il diagramma delle ampiezze a piacimento.

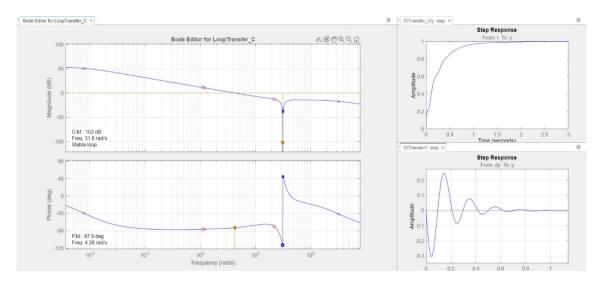
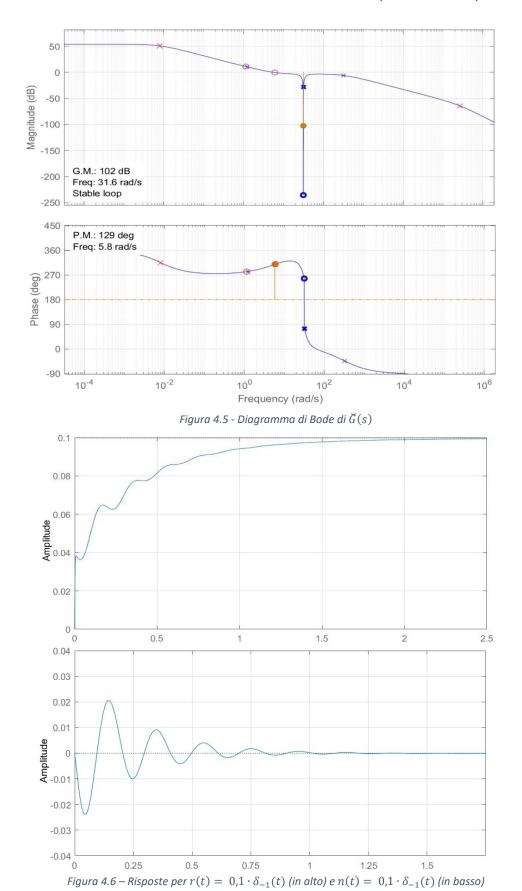


Figura 4.4 – Finestra ControlSystemDesigner

In riferimento alla figura 4.4, si noti sulla sinistra il diagramma di Bode delle ampiezze e delle fasi del sistema in catena aperta $\check{G}(s)$, dove vengono indicati gli zeri (0) e i poli (X) che vengono aggiunti dal controllore C(s).

Sulla destra vi sono le due risposte al gradino del sistema retroazionato: in alto a destra si ha la risposta all'ingresso di riferimento r(t) e in basso a destra la risposta all'ingresso di disturbo n(t).

Il diagramma di Bode e le due risposte al gradino del sistema in retroazione, ottenute tramite Simulink, verranno riportati nelle figure 4.5 e 4.6 della pagina successiva.



Come si può vedere dal diagramma di Bode nella figura 4.5, abbiamo ottenuto una pulsazione di attraversamento di 5.8rad/s e un margine di fase di 129° , che ci garantiranno un tempo di salita t_r di circa 0.8s, oscillazioni minime e una sostanziale assenza di sovraelongazione per la risposta ad un segnale r(t) a gradino (figura 4.6 in alto).

Risulta quindi che le specifiche che abbiamo imposto sono state pienamente rispettate.

Notiamo che anche la risposta al segnale n(t) (figura 4.6 in basso) a gradino ha beneficiato dell'introduzione del controllore: in particolare si nota che la sottoelongazione è stata ridotta e si attesta al 25% dell'ampiezza del gradino in ingresso, mentre il tempo di assestamento al 2% del gradino, risulta essere di 0.58s.

Le scelte fatte per quanto riguarda la posizione di zeri e poli per $C_2(s)$ e il vincolo di guadagno imposto su $C_1(s)$, ci daranno la struttura complessiva del controllore:

$$C(s) = C_1(s) \cdot C_2(s)$$

La funzione di trasferimento complessiva C(s) del controllore ci verrà fornita direttamente dal tool ControlSystemDesigner, nella sezione compensator editor, come indicato dalla figura 4.7:

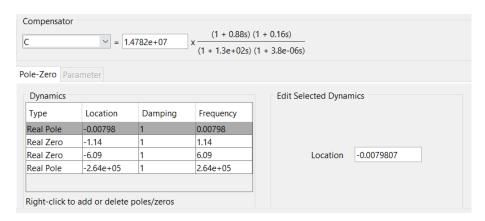


Figura 4.7 – Compensator Editor di ControlSystemDesigner

E corrisponderà a:

$$C(s) = 14782000 \cdot \frac{(1+0.88s) \cdot (1+0.16s)}{(1+130s) \cdot (1+0.0000038s)}$$

Si noti che il guadagno fornito dal primo controllore $C_1(s)$ è stato incrementato tramite l'introduzione del secondo controllore.

Attuatore e trasduttore

Sino a questo punto abbiamo supposto di inserire un controllore che agisce direttamente sul nostro sistema avendo come ingresso il segnale di errore, corrispondente a una posizione e(t) = r(t) - y(t) e come uscita la forza di controllo u(t).

Questa situazione risulta poco realistica, poiché i sistemi di controllo di tipo elettronico con uscita ed entrata analogiche che siamo in grado di realizzare fisicamente, solitamente hanno come ingresso e come uscita una tensione. Vorremo per questo introdurre dei dispositivi atti a trasformare le grandezze prelevate e agenti sul sistema in grandezze che siano idonee ad interfacciarsi con il controllore.

Per la trasformazione della grandezza in uscita dal controllore verrà usato un attuatore, mentre per la trasformazione della grandezza in ingresso, un trasduttore. Si noti che in commercio esistono numerosi attuatori e sensori che si interfacciano con il controllore direttamente tramite una comunicazione di tipo digitale. Per quanto riguarda la nostra trattazione non prenderemo in considerazione questo tipo di dispositivi.

Andiamo ora ad analizzare il funzionamento di attuatore e trasduttore nel caso specifico del sistema in analisi.

Attuatore

Nel nostro caso, un attuatore è un dispositivo che ci consente di trasformare la tensione variabile in uscita dal controllore in una forza che agisce sulla sospensione meccanica.

In un sistema reale questa azione è svolta da una pompa idraulica ad alta pressione, che pilota un pistone, il cui compito è quello di imprimere la forza necessaria come ingresso di controllo sul sistema.

Nel nostro caso, vista la notevole complessità progettuale di tale soluzione e il gran numero di variabili da tenere in considerazione, opteremo per una semplificazione valida da un punto di vista puramente didattico. Sarà necessario inoltre trascurare qualsiasi ritardo introdotto dalla presenza dell'attuatore nel sistema.

Questa semplificazione, a grandi linee, consisterà nell'uso di un motore elettrico in corrente continua accoppiato ad un meccanismo a cremagliera, il quale permetterà di trasformare la coppia generata dal motore nella forza di controllo necessaria.

Procediamo ora con i passaggi che ci porteranno alla modellazione di un tale dispositivo.

Come primo passo sarà necessario adattare la dinamica dell'uscita del controllore al range di tensione necessario a pilotare il motore. Questo adattamento può essere effettuato introducendo un fattore di amplificazione k_{amp} :

$$V(t) = k_{amp} \cdot V_{out}(t)$$

Dove V(t) sarà la tensione necessaria a pilotare il motore e $V_{out}(t)$ è la tensione fornita in uscita dal controllore.

Immaginiamo ora di ottenere la corrente I(t) fornita al motore, a partire dalla tensione V(t) tramite un opportuno rapporto di conversione tensione-corrente.

Questa azione può essere realizzata tramite un generatore di corrente pilotato in tensione.

Nel nostro caso supporremo la relazione ingresso-uscita di questo blocco come lineare, data da un fattore di proporzionalità k_p , ovvero:

$$I(t) = k_p \cdot V(t)$$

Procediamo quindi con la descrizione della caratteristica corrente-coppia di un motore in corrente continua.

Da un punto di vista circuitale il motore può essere visto come una serie di una resistenza R, e un'induttanza L (dette di armatura, e dovute alla resistenza e all'induttanza proprie delle spire del rotore) e un generatore E_{fcem} (forza contro elettromotrice):

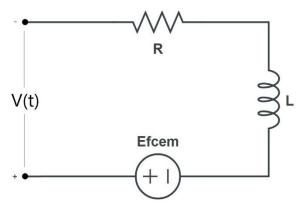


Figura 5.1 – Circuito equivalente d'armatura del motore

Al variare del tempo *t*, l'equazione associata a questo circuito sarà:

$$V(t) = R \cdot I(t) + L \cdot \frac{d}{dt}I(t) + E_{fcem}(t)$$

Consideriamo trascurabili gli attriti, per cui la coppia elettromagnetica sarà uguale alla coppia motrice meccanica; assumiamo inoltre che la coppia fornita dal motore sia uniforme su tutta la corsa del rotore.

L'ampiezza della forza controelettromotrice dipenderà dalla velocità angolare di rotazione, mentre la coppia motrice dipenderà dalla corrente che circola nel circuito di armatura descritto in figura.

Possiamo quindi concludere che, nel dominio del tempo, le equazioni che descriveranno il sistema saranno:

$$\begin{cases} V(t) = R \cdot I(t) + L \cdot \frac{d}{dt}I(t) + E_{fcem}(t) \\ E_{fcem}(t) = k_e \cdot \omega(t) \\ I(t) = \tau_1(t) / k_t \end{cases}$$
 (5.1)

Dove k_t sarà la costante di coppia e k_e la costante di forza controelettromotrice.

Come si nota dalle equazioni del sistema (5.1), abbiamo una dipendenza lineare e diretta della coppia dalla corrente di armatura:

$$\tau_1(t) = k_t \cdot I(t)$$

Si renderà necessario a questo punto convertire la coppia generata dal motore, per fare ciò useremo una coppia di ruote dentate (figura 5.2), per cui varrà la relazione:

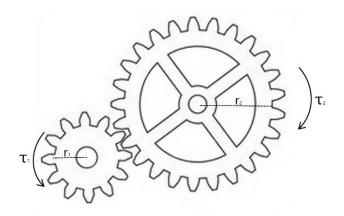
$$\tau_2 = -\frac{r_1}{r_2} \cdot \tau_1$$

Nel nostro caso non siamo interessati al verso della coppia; quindi, ci limiteremo a considerare entrambe con il segno positivo.

Trascuriamo inoltre tutti gli attriti e le non linearità date dall'interazione tra i denti.

Analizziamo ora il meccanismo a cremagliera (figura 5.3), che trasformerà la coppia τ_2 in una forza, che consisterà nell'ingresso di controllo u(t). Dato D_p il diametro del pignone, la dipendenza tra coppia $\tau_2(t)$ e la forza u(t) in un tale dispositivo sarà data da:

$$u(t) = \frac{2}{D_p} \cdot \tau_2(t)$$





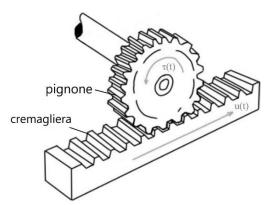


Figura 5.3 – Sistema pignone – cremagliera

Complessivamente, avremo una relazione ingresso-uscita:

$$u(t) = \frac{2}{D_p} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot k_t \cdot k_p \cdot k_{amp} \cdot V_{out}(t)$$

Nel regime delle trasformate:

$$U(s) = \frac{2}{D_p} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot k_t \cdot k_p \cdot k_{amp} \cdot V_{out}(s)$$

Quindi la funzione di trasferimento dell'attuatore sarà:

$$A(s) = \frac{U(s)}{V_{out}(s)} = \frac{2 \cdot k_t \cdot k_p \cdot k_{amp} \cdot \frac{r_1}{r_2}}{D_p}$$

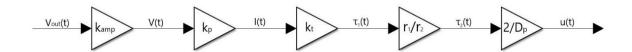


Figura 5.4 – Schema dell'attuatore

Il range di tensioni che il controllore sarà in grado di produrre in uscita andrà da -2.5V a +2.5V, consideriamo quindi un fattore di amplificazione k_{amp} per la tensione in uscita dal controllore pari a 30 e un fattore di conversione k_p tra tensione e corrente pari a 1,5.

Un valore plausibile per la costante di coppia k_t è di 0,25 Nm/A, questo significa che in uscita dal motore otterremo una coppia massima pari a 28,125Nm, se collegassimo direttamente il motore al sistema a cremagliera con pignone di diametro D_p pari a 7,5cm, otterremo una forza massima di soli 750N, completamente insufficiente a controllare il sistema.

Per questa ragione ci siamo proposti di introdurre le due ruote dentate, dove assumiamo r_1 pari a 0,2m e r_2 pari a 0,025m.

L'introduzione di questo fattore di conversione della coppia ci porterà a poter imprimere una forza di modulo massimo pari a 6000N, che risulterà adatta a controllare il sistema.

Trasduttore

Un trasduttore, nel nostro caso, è un dispositivo in grado di trasformare la posizione relativa delle due masse $y(t) = x_2(t) - x_1(t)$ in una opportuna tensione da fornire in ingresso al controllore.

In una reale applicazione automobilistica, la misurazione della posizione relativa può essere svolta da un sensore di posizione angolare posto al livello del pianale dell'auto e connesso all'asse della ruota tramite un braccio a leva. La posizione sarà proporzionale alla posizione angolare misurata.

Come per il caso precedente, operiamo una semplificazione.

Consideriamo il trasduttore semplificato dato da un potenziometro lineare, dove lo spostamento del suo cursore (che quindi misura una posizione) determina una variazione della sua resistenza. Tramite un semplice circuito, sarà possibile trasformare questa variazione di resistenza in una variazione di tensione, adatta all'ingresso del controllore.

La relazione tra posizione y(t) e la resistenza $R_{curs}(t)$ che varia in base alla posizione del cursore del potenziometro sarà lineare, ed è data da un fattore di proporzionalità k_{pot} . Poiché vogliamo essere in grado di misurare valori negativi di posizione y(t) rispetto al riferimento inerziale, faremo corrispondere il valore y(t) = 0 alla posizione centrale del potenziometro, che ha una resistenza complessiva pari a R_{tot} :

$$R_{curs}(t) = k_{pot} \cdot y(t) + \frac{R_{tot}}{2}$$

La conversione della resistenza in una tensione adatta al range di tensioni desiderato sarà effettuata dal seguente circuito:

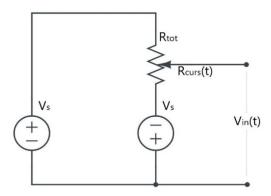


Figura 5.5 – Schema circuitale del trasduttore

Dove V_s è un valore di tensione noto, come pure il valore R_{tot} :

$$V_{in}(t) = V_s \cdot \left(2 \cdot \frac{R_{curs}(t)}{R_{tot}} - 1\right)$$

La relazione tra posizione e tensione sarà data quindi da:

$$V_{in}(t) = 2 \cdot V_s \cdot \frac{k_{pot}}{R_{tot}} \cdot y(t)$$

Nel regime delle trasformate di Laplace avremo la seguente relazione ingresso-uscita:

$$V_{in}(s) = 2 \cdot V_s \cdot \frac{k_{pot}}{R_{tot}} \cdot Y(s)$$

Che corrisponde a una funzione di trasferimento pari a:

$$T(s) = 2 \cdot V_s \cdot \frac{k_{pot}}{R_{tot}}$$

Poniamoci come proposito di misurare delle possibili variazioni di posizione y(t) che vanno da -25cm a +25cm rispetto al riferimento inerziale, quindi faremo corrispondere il valore minimo di posizione al valore più basso della dinamica dell'ingresso del controllore (-2,5V). Il valore di posizione pari a 25cm corrisponderà invece al valore più alto (+2,5V).

Una scelta opportuna che può essere fatta è quella di considerare la tensione V_s pari a 2,5V, La resistenza totale R_{tot} del potenziometro pari a 1000Ω , e il fattore di proporzionalità tra posizione e resistenza k_{pot} pari a 2000, che corrisponde a un incremento di $20\Omega/cm$.

Parametri

Ricapitolando le scelte fatte per i parametri relativi a trasduttore e attuatore, avremo:

parametro	descrizione	valore	unità di misura
k_{amp}	Fattore di amplificazione	30	Adimens.
k_p	Fattore di conversione tensione/corrente	1.5	$\frac{1}{\Omega}$
k_t	Costante di coppia del motore	0.25	$\frac{N \cdot m}{A}$
r_1/r_2	Rapporto di conversione di coppia	8	Adimens.
D_p	Diametro del pignone	0.075	m
k_{pot}	Fattore di conversione <u>posizione</u> /resistenza	2000	$\frac{\Omega}{m}$
R_{tot}	Resistenza totale del potenziometro	1000	Ω
V_s	Generatore di tensione	2.5	V

Che ci porteranno alle due funzioni di trasferimento:

$$A(s) = \frac{2 \cdot k_t \cdot k_p \cdot k_{amp} \cdot \frac{r_1}{r_2}}{D_p} = \frac{2 \cdot 0.25 \cdot 1.5 \cdot 30 \cdot 8}{0.075} = 2400$$

$$T(s) = 2 \cdot V_s \cdot \frac{k_{pot}}{R_{tot}} = 2 \cdot 2.5 \cdot \frac{2000}{1000} = 10$$

Controllo PID a tempo continuo

Vogliamo realizzare ora un sistema di controllo in retroazione che tenga in considerazione anche la presenza di attuatore e trasduttore all'interno del sistema.

Lo schema a blocchi di una simile realizzazione sarà il seguente:

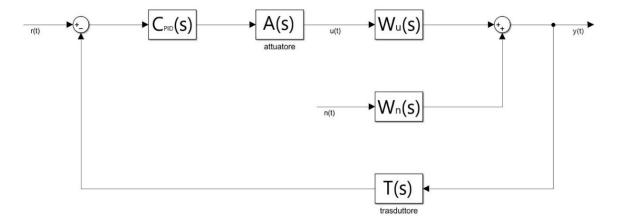


Figura 6.1 – Schema del sistema in retroazione con attuatore e trasduttore

Il tipo di controllore che ci proponiamo di sintetizzare sarà di tipo PID, ovvero costituito dall'azione di tre contributi: proporzionale, integrativo e derivativo. Questo tipo di controllore è tra i più utilizzati nel campo dei controlli automatici per la sua semplice realizzazione e per la sua facile taratura.

Analizziamo in breve la struttura in parallelo di questo tipo di controllore:

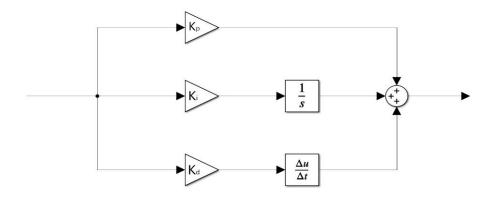


Figura 6.2 – Schema a blocchi di un controllore PID

La funzione di trasferimento associata alla figura 6.2 sarà:

$$C_{PID}(s) = K_p + K_i \cdot \frac{1}{s} + K_d \cdot s$$

Dove K_p sarà il guadagno proporzionale, K_i il guadagno integrale e K_d il guadagno derivativo. Si noti che il prodotto per un termine $\frac{1}{s}$ nel dominio della trasformata di Laplace corrisponde all'operazione di integrazione, il termine s invece corrisponde alla derivazione.

Come nel caso precedente, descritto nel capitolo 4, per la sintesi del controllore facciamo ricorso al tool *ControlSystemDesigner*, riportandoci all'architettura descritta in figura 4.3. Come primo passo, per regola di riduzione dei blocchi, dallo schema di figura 6.1 possiamo ricondurci ad un caso di retroazione unitaria:

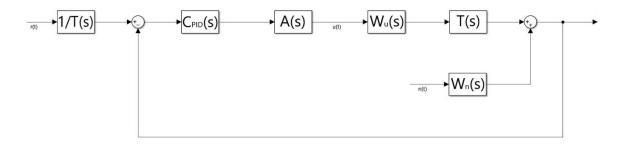


Figura 6.3 – Schema del sistema in retroazione unitaria

In questo caso, i blocchi dell'architettura indicata in figura 4.3 verranno ottenuti dallo schema di figura 6.3 nel seguente modo:

$$F = 1/T(s)$$
 $C = C_{PID}(s)$ $G1 = A(s) \cdot W_u(s) \cdot T(s)$ $G2 = 0$ $Gd = W_n(s)$

Le specifiche che ci proporremo di raggiungere per la risposta al gradino saranno le stesse del capitolo 4, ovvero di avere una sovraelongazione inferiore allo 0,5% e un tempo di salita inferiore a 1s ; vorremo inoltre avere un errore di regime permanente e^1_{rp} per la risposta al gradino pari al massimo al 3%. Il sistema potrà essere di tipo 0 (se il guadagno integrale è zero) oppure di tipo 1, nel secondo caso, sarà garantito un errore $e^1_{rp} = 0$.

Una volta decisa l'architettura e le specifiche, procederemo con la sintesi del controllore PID tramite lo strumento PID tuning. Sarà possibile effettuare la scelta dei parametri proporzionale, integrale e derivativo del blocco C, in base alla regolazione nel dominio del tempo della velocità di risposta e della robustezza del controllore; oppure nel dominio della frequenza, tramite la regolazione di banda passante e margine di fase. È possibile di volta in volta visualizzare l'effetto della regolazione sulle risposte al gradino ai due ingressi u(t), r(t) e sul diagramma di Bode del sistema in catena aperta come abbiamo visto in figura 4.4.

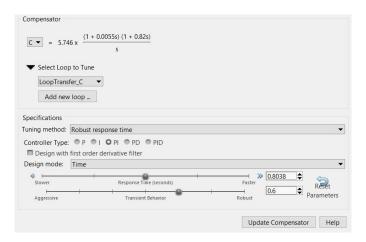


Figura 6.4 – PID Tuning

Ricaviamo facilmente le informazioni relative ai tre parametri dalla funzione di trasferimento del controllore che ci viene fornita dal tool, se la poniamo nella seguente forma:

$$C_{PID}(s) = \frac{K_d \cdot s^2 + K_p \cdot s + K_i}{s} = \frac{0.026 \cdot s^2 + 4.769 \cdot s + 5.746}{s}$$

Da cui:

$$K_p = 4,769$$
 $K_i = 5,746$ $K_d = 0,026$

Il termine derivativo in un controllore PID introduce una grande sensibilità del sistema ai disturbi in alta frequenza (il termine $K_d \cdot s$ corrisponde infatti ad una retta di pendenza +20dB/dec nel diagramma di Bode). Questo problema può essere risolto introducendo un filtro passa basso $\binom{1}{1+s\Omega}$ in serie alla componente derivativa, che renderà anche *propria* la funzione di trasferimento del controllore. Nel nostro caso il contributo del termine derivativo risulta essere molto piccolo e può essere trascurato, portando in questo modo alla realizzazione di un controllore di tipo PI:

$$C_{PI}(s) = \frac{4.769 \cdot s + 5.746}{s}$$

Si riportano di seguito le due risposte al gradino del sistema, ottenute questa volta tramite Simulink, la prima corrispondente a $r(t) = \delta_{-1}(t)$ e n(t) = 0, mentre la seconda a r(t) = 0 e $n(t) = 0,1 \cdot \delta_{-1}(t)$:

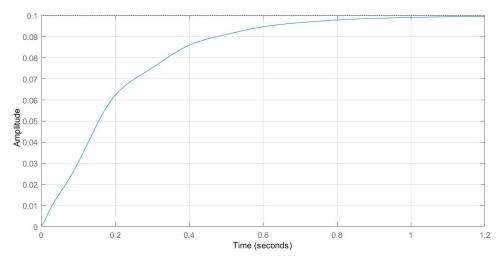


Figura 6.5 – Risposta del sistema a $r(t) = \delta_{-1}(t)$ con PI continuo

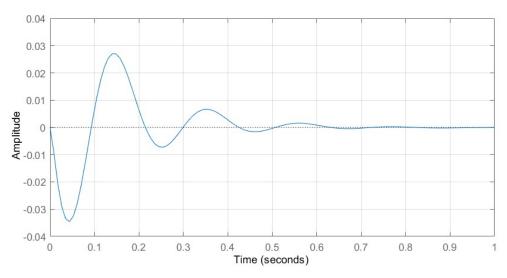


Figura 6.6 – Risposta del sistema a $n(t)=0.1\cdot\delta_{-1}(t)$ con PI continuo

Come si nota dalla figura 6.5 abbiamo ottenuto una risposta con una sovraelongazione nulla e con un tempo di salita al 90% di circa 0.5s, ci riteniamo quindi soddisfatti delle prestazioni raggiunte. In particolare, si noti che la risposta raggiunge il valore a regime di 0.1m dato un riferimento unitario in ingresso. Ciò è dovuto alla presenza del trasduttore nel percorso di retroazione.

Per quanto riguarda la risposta di figura 6.6, si nota che siamo riusciti ad ottenere un lieve margine di miglioramento della risposta del sistema non controllato in figura 3.2, riducendo il tempo di assestamento (che è pari a circa 0,4s) e la sottoelongazione (pari al 34% del gradino).

Controllo PI digitale

Supponiamo che il controllore $C_{PI}(s)$ risieda su un dispositivo digitale programmabile, quale un microcontrollore.

Esso avrà a disposizione un convertitore analogico/digitale (ADC) per convertire una tensione variabile in ingresso entro la dinamica dello stesso in un valore numerico quantizzato adatto all'elaborazione.

Allo stesso modo in uscita avrà un convertitore digitale/analogico (DAC) con la medesima dinamica dell'ADC, per convertire un valore numerico digitale in un segnale analogico in tensione.

Come scelta per la dinamica useremo gli stessi intervalli che ci siamo imposti nella realizzazione di attuatore e trasduttore, ovvero da -2,5V a 2,5V, realizzando così una dinamica complessiva di 5V, compatibile con i dispositivi di conversione tipicamente usati.

Poiché il range di tensioni dell'ingresso di un ADC è positivo [0V; 5V] bisognerà applicare un offset di +2,5V al segnale proveniente dal trasduttore, per riportarci nell'intervallo desiderato, e poi, a livello software, traslare il dato convertito nella scala voluta. Sarà necessario effettuare l'operazione inversa per il dispositivo DAC.

Si noti che data la scelta della dinamica dell'uscita del DAC e visto il ridotto fattore di guadagno introdotto dalla funzione di trasferimento dell'attuatore, sarà possibile applicare soltanto un certo range di forze per l'ingresso u(t). Si avrà infatti una saturazione dell'ingresso per valori superiori a 6000N in valore assoluto. In particolare, avremo una scelta piuttosto limitata per l'ingresso di riferimento r(t): già con r(t)=1, avremo una saturazione di u(t) in alcuni istanti; infatti, la risposta del sistema a $r(t)=\delta_{-1}(t)$ presenterà un'anomala sovraelongazione, data dalla ridotta azione di controllo dovuta alla saturazione.

Fatta questa dovuta premessa, nella trattazione successiva trascureremo gli effetti introdotti dalla saturazione dell'ingresso e dell'uscita del controllore; inoltre, ometteremo le considerazioni relative alla quantizzazione delle ampiezze dei segnali, mentre ci concentreremo sulla discretizzazione dell'asse dei tempi.

Discretizzazione

Ci siamo già preoccupati dell'adattamento di ingresso e uscita del controllore tramite opportuni fattori di amplificazione su trasduttore ed attuatore, ci vogliamo ora concentrare sulla discretizzazione del controllore PID che abbiamo ottenuto nel caso precedente.

Per procedere con la discretizzazione ricorriamo al metodo di *Tustin* (o trasformazione bilineare): vogliamo ottenere una opportuna sostituzione della variabile s del dominio delle trasformate di Laplace, con una variabile discreta z.

Questo metodo preserva la stabilità: a partire da una funzione di trasferimento W(s) stabile, ci fornirà sempre una funzione W(z) in tempo discreto anch'essa stabile.

Per ottenere questa sostituzione, ipotizziamo di voler approssimare l'operazione di integrazione nel tempo, partiamo quindi definendo una generica funzione $u(\cdot)$, il cui integrale sarà:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$$

Dividiamo l'asse delle ascisse t in una serie di intervalli di dimensione T, come indicato in figura 7.1:

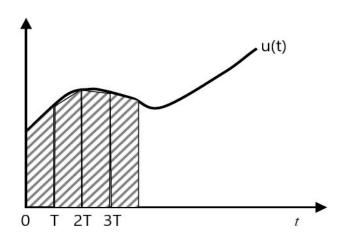


Figura 7.1 - Metodo di Tustin

L'approssimazione dell'area sottesa alla curva, quindi dell'integrale, verrà effettuata sommando l'area di ciascuno dei trapezi con base T indicati in figura.

L'integrale di u(t) nel punto T sarà approssimato dall'area del primo trapezio, mentre nel punto 2T sarà approssimato dall'area del primo trapezio più quella del secondo:

$$y(T) \cong \left[u(0) + u(T) \right] \cdot \frac{T}{2} \qquad \qquad y(2T) \cong y(T) + \left[u(T) + u(2T) \right] \cdot \frac{T}{2}$$

Proseguendo, si nota che vi è di volta in volta una dipendenza dalle aree precedenti. Nel generico punto $t = n \cdot T$, dove $n \in \mathbb{N}$, avremo:

$$y(n \cdot T) \cong y((n-1) \cdot T) + [u((n-1) \cdot T) + u(n \cdot T)] \cdot \frac{T}{2}$$

Poiché $n \in \mathbb{N}$ e T è una costante, l'espressione che abbiamo ottenuto ha un dominio discreto. Possiamo quindi applicare la trasformata Z, ottenendo:

$$Y(z) \cong z^{-1} \cdot Y(z) + [z^{-1} \cdot U(z) + U(z)] \cdot \frac{T}{2}$$

Da cui ricaviamo:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} \cong \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{T}{2}$$

Ricordiamo che l'operazione da cui siamo partiti è l'integrazione, per cui nel dominio della trasformata di Laplace vale:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot U(s)$$

Possiamo concludere che la sostituzione di variabile che stiamo cercando è la seguente:

$$S \cong \frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{2}{T} \tag{7.1}$$

Il controllore PI che abbiamo ottenuto precedentemente, espresso nel dominio della trasformata Z, tramite la sostituzione di variabile (7.1), corrisponderà alla seguente funzione di trasferimento:

$$C_{PI}(z) = \frac{Y_{PI}(z)}{E(z)} = K_p + K_i \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$$
 (7.2)

Dove $Y_{PI}(z)$ sarà l'uscita del controllore, E(z) il segnale di errore in ingresso e T il suo passo di campionamento.

Verifichiamo che il controllore PI discretizzato realizzi le stesse specifiche del controllore a tempo continuo.

Per fare ciò, andiamo a costruire in ambiente Simulink lo schema a blocchi del sistema con l'introduzione del controllore discreto:

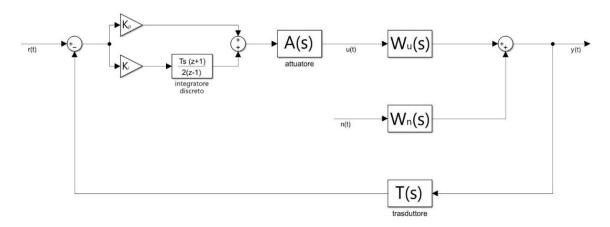


Figura 7.2 – Sistema con Controllore PI discreto

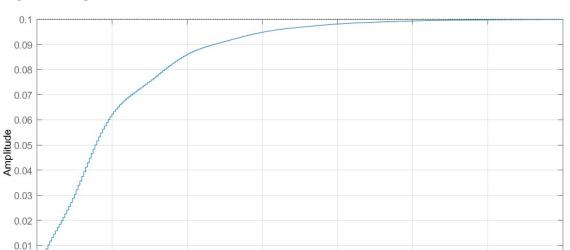
Il controllore PI è rappresentato in figura 7.2 mediante il suo schema a blocchi, derivante dalla (7.2), che sarà costituito dal parallelo tra il guadagno proporzionale K_p e la serie costituita dal guadagno integrale K_i e l'integratore discreto.

Scegliamo una ipotetica frequenza di campionamento di 200Hz, che corrisponde ad un periodo T=0,005s (nello schema Simulink indicato come T_s). Questo valore, nonostante sia relativamente basso, sarà sufficiente considerate le frequenze in gioco nel sistema (anche in virtù della forte attenuazione delle frequenze superiori ai 30 rad/s, pari a circa 4,77Hz) e non causerà eccessivi rallentamenti nella simulazione.

Si noti comunque che le frequenze di campionamento, in un'applicazione reale, possono arrivare all'ordine dei MHz.

1.2

1.4



Ponendo un ingresso a gradino $r(t) = \delta_{-1}(t)$ e l'ingresso n(t) = 0, otterremo la seguente risposta:

Figura 7.3 – Risposta a $r(t)=\delta_{-1}(t)$ con PI discreto

0.6 Time (seconds)

0

0.2

0.4

Dal grafico ottenuto si può notare la discretizzazione dell'asse dei tempi operata dal controllore, inoltre si rileva che la risposta risulta essere soddisfacente e segue in maniera precisa la risposta del sistema con il controllore PI in tempo continuo riportata in figura 6.5.

Riportiamo per completezza anche la risposta a $n(t) = 0.1 \cdot \delta_{-1}(t)$ con r(t) = 0:

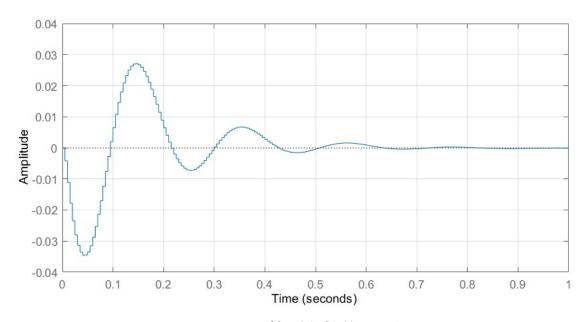


Figura 7.4 – Risposta a n(t)=0, $1\cdot\delta_{-1}(t)$ con PI discreto

La nostra trattazione sin ora è stata fatta nel dominio delle trasformate, vogliamo ora passare ad una relazione ingresso-uscita del controllore nel dominio del tempo discreto.

Per fare ciò partiamo dalla (7.2), considerandola come somma delle sue componenti proporzionale e integrale:

$$Y_{PI}(z) = Y_P(z) + Y_I(z)$$

Dove le due componenti saranno:

$$Y_P(z) = K_p \cdot E(z)$$
 e $Y_I(z) = K_i \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{z}\right)}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)} \cdot E(z)$

Procediamo antitrasformando ciascuna delle due componenti, applicando la proprietà $e(n-1)=Z^{-1}\left\{\frac{1}{z}\cdot E(z)\right\}$.

Otterremo la seguente espressione dell'uscita del controllore PI in tempo discreto:

$$y_{PI}(n) = y_P(n) + y_I(n)$$
 (7.3)

Dove:

$$y_P(n) = K_p \cdot e(n)$$
 e $y_I(n) = K_i \cdot \frac{T}{2} \cdot [e(n) + e(n-1)] + y_I(n-1)$

Si noti la dipendenza del termine integrale $y_I(n)$ dall'errore valutato nel medesimo istante e(n) e nell'istante appena precedente e(n-1), nonché dal valore all'istante precedente del termine integrale stesso $y_I(n-1)$.

Il termine proporzionale $y_P(n)$, invece, dipenderà soltanto dal valore dell'errore al medesimo istante e(n).

Questo tipo di espressione risulta particolarmente idonea alla stesura del codice necessario all'implementazione del controllore PI su un sistema digitale programmabile; in quanto, come si può immaginare, sarà possibile utilizzare una memoria per contenere i valori e(n-1) e $y_I(n-1)$ che sarà necessario conoscere per calcolare $y_{PI}(n)$ all'istante successivo.

Codice

Analizziamo ora una possibile implementazione del controllore PI discreto tramite un microcontrollore, in particolare facciamo riferimento ad un nuovo schema:

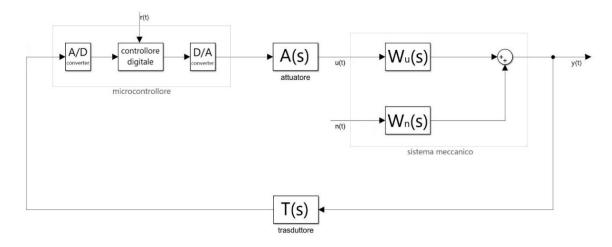


Figura 7.5 – Sistema con controllore digitale

I dispositivi ADC e DAC saranno delle periferiche incluse nell'architettura del microcontrollore, che quindi riceverà in ingresso un segnale analogico e genererà in uscita un segnale analogico.

Si noti che il segnale di errore e verrà generato internamente dal microcontrollore a partire da un set point r che potrà essere interno al controllore stesso, oppure potrà essere fornito dall'esterno (per esempio, può corrispondere ad un selettore del livello delle sospensioni a disposizione dell'utente).

Questa scelta ci consente tra l'altro di evitare l'introduzione di rumore dovuta alla presenza del sommatore analogico.

A questo punto descriviamo in breve l'algoritmo necessario all'implementazione del firmware del microcontrollore affinché realizzi sul sistema l'azione di controllo che ci siamo proposti.

La porzione di codice che prenderemo in considerazione sarà espressa in linguaggio C, di comune uso per questo tipo di applicazioni.

Analizziamo la funzione che realizza il controllore PI, la cui struttura deriverà direttamente dalla relazione ingresso-uscita (7.3):

```
float PI_controller(float ref, float meas, const float Kp, const float Ki, const float T,
const float C_I_MAX, const float C_I_MIN)
{
       float err;
                                                    //errore
                                                    //termine proporzionale
       float c_p;
       float c_i;
                                                    //termine integrale
       float c_out;
                                                    //uscita del controllore
       static float err_prev=0;
                                                   //errore al punto prec.
       static float c_i_prev=0;
                                                   //azione integrale al punto prec.
       err=ref-meas;
                                                    //calcolo dell'errore
                                                    //calcolo del termine proporz.
       c_p=Kp*err;
       c_i=Ki*0.5*T*(err+err_prev)+c_i_prev;
                                                   //calcolo del termine integrale
                                                   //calcolo l'uscita del controllore
       c_out=c_p+c_i;
       if(c_i>C_I_MAX)
                                                  //anti wind-up
               c_i = C_I MAX;
       else if(c_i<C_I_MIN)
              c_i=C_I_MIN;
       err_prev=err;
                                                   //aggiorn. errore prec.
                                                   //aggiorn. azione integrale prec.
       c_i_prev=c_i;
       return c_out;
                                                  //restituisco uscita del contr.
}
```

Le variabili di ingresso alla funzione consisteranno in:

ref il valore del set point

meas il valore attuale della misura fornita dal trasduttore
 Kp e Ki i valori dei due guadagni proporzionale e integrale

- T il periodo di campionamento del segnale fornito dal trasduttore

C_I_MAX il valore massimo che può assumere il termine integrale
 C_I_MIN il valore minimo che può assumere il termine integrale

La variabile **meas** conterrà il valore di misurazione corrispondente ad un determinato campione generato dall'ADC, a partire dal segnale proveniente dal trasduttore.

La variabile **ref** può essere una costante prestabilita, oppure può essere di volta in volta modificata, in modo che il sistema si porti ad un riferimento diverso al variare del tempo.

La variabile **err** viene calcolata a partire dagli ingressi **ref** e **meas** e sarà l'ingresso del controllore vero e proprio.

Le variabili **c_p** e **c_i** sono le componenti proporzionale e integrale che vengono calcolate a partire da **err** dati i parametri **Kp** e **Ki**.

La definizione delle variabili **err_prev** e **c_i_prev** di tipo *static* farà sì che il loro valore venga mantenuto all'uscita della funzione. Esse saranno necessarie a mantenere la memorizzazione dei valori **err** e **c_i** alla chiamata precedente della funzione, rispetto alla chiamata corrente.

La funzione ritornerà la variabile \mathbf{c} _out, che consiste nella somma dei due contributi \mathbf{c} _ \mathbf{p} e \mathbf{c} _ \mathbf{i} , e sarà il valore di controllo in uscita.

Sarà richiesta un'azione di limitazione dell'uscita del termine integrale **c_i** del controllore, per ovviare al fenomeno di *wind-up* dovuto alla presenza dell'integratore, che può portare ad una saturazione dell'uscita.

La funzione appena descritta dovrà essere richiamata ogni volta che si desidera aggiornare il valore dell'uscita, in particolare, risulta conveniente che venga richiamata periodicamente da una routine di interrupt generata da un timer, in modo che venga generato un nuovo valore dell'uscita ad intervalli regolari (trascuriamo la differenza di tempo di esecuzione della funzione dovuto alla presenza delle condizioni *if* necessarie all'*anti wind-up*).

Il valore di volta in volta calcolato per l'uscita sarà caricato nel registro del DAC, che genererà un nuovo livello di tensione necessario a pilotare l'attuatore.

Conclusioni

Dall'analisi che abbiamo fatto possiamo concludere che, nel particolare caso preso in considerazione, l'introduzione del sistema di controllo offre un miglioramento limitato sulle prestazioni della sospensione in termini di risposta ai disturbi del fondo stradale. Ciò è dovuto innanzitutto alle già buone prestazioni della sospensione passiva, per cui le oscillazioni vengono smorzate in un tempo piuttosto breve. In secondo luogo si è cercato un compromesso tra raggiungimento di buone prestazioni in termini di risposta al riferimento r(t) e al disturbo n(t).

Le soluzioni proposte risultano in ogni caso di interesse, poiché abbiamo introdotto la possibilità di portare l'altezza della massa sospesa dell'automobile al livello desiderato, rispettando le specifiche richieste. Vi è stato inoltre un effettivo miglioramento della durata e dell'ampiezza massima delle oscillazioni dovute ai disturbi del fondo stradale, che potrebbe essere ulteriormente approfondito tramite l'analisi della risposta ad altre famiglie di segnali.

Nel nostro caso, abbiamo prima affrontato un metodo di controllo di applicazione più teorica mediante lo studio della risposta in frequenza, senza considerare la presenza di attuatori e trasduttori; poi, abbiamo introdotto i due elementi utilizzando una modellizzazione semplificata, dalla quale abbiamo ottenuto funzioni di trasferimento puramente proporzionali. Queste funzioni andranno quindi a modificare unicamente il guadagno che avrà la funzione di trasferimento del controllore e il rapporto tra il segnale di riferimento r(t) e la risposta y(t) a regime del sistema.

La successiva sintesi di un controllore PID realizzato su un supporto digitale, rappresenta un caso più vicino alla realtà, infatti la sua implementazione su un microcontrollore, rappresenta uno dei metodi più utilizzati per la realizzazione di sistemi di controllo. I vantaggi offerti da questo tipo di scelta sono numerosi: l'economicità di questo tipo di dispositivi, la facilità di realizzazione, la possibilità di modificare in modo semplice i parametri del sistema e la ridotta sensibilità ai disturbi rispetto ad un sistema di tipo analogico.

Si segnala inoltre la possibilità di ottenere i parametri proporzionale, integrativo, derivativo direttamente sul processo, applicando determinate regole quali quella di Ziegler-Nichols.

La stesura del codice della routine che realizza il controllore PI, rappresenta l'ultimo passo da effettuare per completare la realizzazione del sistema di controllo che avevamo sintetizzato matematicamente.

Bibliografia

- 1. J. J. Di Stefano, A. R. Stubberud, I. J. Williams, *Regolazione Automatica*, Etas Libri, Milano, 1974
- 2. L. Donelli, F. Sgorbani, *Sistemi Automazione e Laboratorio*, Jackson, Milano, 1990
- 3. M. Bisiacco, M. E. Valcher, *Controlli Automatici*, Libreria Progetto, Padova, 2015
- 4. G. Ortolani, E. Venturi, *Manuale di Elettrotecnica e Automazione*, Hoepli, Milano, 2003
- 5. D. Tilbury, B. Messner, R. Hill, J.D. Taylor, *Control tutorials for Matlab & Simulink*,

https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Suspension§ion=SystemModeling

- 6. A. Pisano, *Lezioni di Controllo Digitale Sintesi per discretizzazione*, https://www.unica.it/static/resources/cms/documents/CD_04_SintesiPerDi scretizzazione.pdf
- 7. G. De Tommasi, *Regolatori PID digitali Corsi AnsaldoBreda*, http://wpage.unina.it/detommas/AnsaldoBreda/PID_digitali.pdf
- 8. F. Previdi, *Lezioni di Controlli Automatici Servomeccanismi per il controllo del moto (Modellistica)*,

https://cal.unibg.it/wp-content/uploads/controlli_automatici/Lez16.pdf

9. Wikipedia, l'enciclopedia libera,

https://it.wikipedia.org/wiki/Ingranaggio

https://it.wikipedia.org/wiki/Sospensione_attiva

https://it.wikipedia.org/wiki/Massa_sospesa

https://it.wikipedia.org/wiki/Dissipatore_viscoso

https://it.wikipedia.org/wiki/Rappresentazione in spazio di stato

10. MathWorks.

https://www.mathworks.com/