

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Tesi di Laurea

## Modelli di Inflazione e le loro Caratteristiche di Universalità

Relatore

Prof. Nicola Bartolo

Correlatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureando

Matteo De Leone

Anno Accademico 2019/2020



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Cosmologia Standard <math>\Lambda</math>CDM</b>	<b>9</b>
1.1 Universo FLRW . . . . .	11
1.2 Contenuto Energetico dell'Universo . . . . .	13
1.3 Radiazione Cosmica di Fondo . . . . .	16
1.4 Problemi del modello Hot Big Bang . . . . .	21
1.4.1 Il Problema dell'Orizzonte . . . . .	22
1.4.2 Il Problema della Piattezza . . . . .	23
1.4.3 Soluzione Inflazionaria . . . . .	24
1.5 Vincoli Osservativi del Modello $\Lambda$ CDM . . . . .	28
<b>2 Inflazione a campo singolo</b>	<b>31</b>
2.1 Le Origini dell'Inflazione . . . . .	31
2.2 Paradigma Slow-Roll . . . . .	32
2.3 Cosmic No Hair Theorem . . . . .	36
2.4 Parametri di Slow-Roll . . . . .	37
2.5 Numero e-folds e Spettro di Potenza . . . . .	41
2.6 Modelli Inflazione a Campo Grande e Piccolo . . . . .	45
2.6.1 Chaotic Inflation . . . . .	45
2.6.2 Hilltop Inflation . . . . .	46
2.6.3 Eternal Inflation . . . . .	48
2.7 Domande Aperte Riguardanti l'Inflazione . . . . .	50
<b>3 Classi Universali di Inflazione</b>	<b>51</b>
3.1 Slow-Roll a Singolo Campo - Espansione $1/N$ . . . . .	53
3.2 Formalismo Hamilton - Jacobi . . . . .	57
3.2.1 Motivazione all'approccio di Salopek e Bond . . . . .	57
3.2.2 Formalismo Hamilton- Jacobi per Inflazione Slow-Roll	58
3.2.3 Parametri di Slow-Roll in funzione di $\beta$ . . . . .	60
3.3 Classi Universali Slow-Roll Tramite $\beta$ . . . . .	61
3.3.1 Chaotic Inflation . . . . .	62
3.3.2 Hilltop Inflation . . . . .	64

3.4	Classi Universali K-Inflation Tramite $\beta$ . . . . .	68
3.4.1	Introduzione K-Inflation . . . . .	69
3.4.2	K-Inflation Tramite $\beta$ . . . . .	71
3.4.3	Classi di Universalità per K-Inflation . . . . .	74
3.4.4	Modello di Inflazione Tachionica . . . . .	76
3.5	Universo Olografico . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Inflazione Anisotropa</b>	<b>81</b>
4.1	Inflazione Vettoriale . . . . .	83
4.2	Inflazione Anisotropa in presenza di un campo di gauge . . . . .	85
4.3	Formalismo $\beta$ -function . . . . .	87
4.3.1	Inflazione Caotica Anisotropa . . . . .	89
	<b>Conclusioni</b>	<b>91</b>
	<b>Appendice</b>	<b>93</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>95</b>

Se comprendere è impossibile,  
conoscere è necessario.  
Primo Levi



# Introduzione

Il presente lavoro di tesi si focalizza sulla fisica dell'universo primordiale, in particolare sullo studio dell'inflazione. La scelta è frutto del fascino insito nella Cosmologia che consente l'applicazione di varie rami della fisica e offre un'attrattiva a riflessioni più speculative che comunque possono essere confrontate con i dati a nostra disposizione.

Il capitolo 1 tratterà il modello standard cosmologico  $\Lambda$ CDM: partendo dalla metrica di Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) e dal Principio Cosmologico si caratterizzeranno le componenti dell'Universo, a partire dai parametri di densità fino alla Radiazione Cosmica di Fondo (CMB). Nella parte finale verranno espone le problematiche legate alla teoria del Big Bang Caldo; problematiche da cui scaturisce la necessità di aggiungere un tassello (cioè l'inflazione) che risolva tale incogruenze. In particolare verranno analizzati il Problema dell'Orizzonte e della Piattezza, insolubili nella teoria del Big Bang Caldo ed elegantemente risolti dal paradigma inflazionario per mezzo di una fase di espansione accelerata dell'Universo a tempi primordiali.

Nel capitolo 2 ci si concentrerà sui dettagli dell'inflazione slow-roll a campo scalare singolo che rappresenta la descrizione standard dell' inflazione. Partendo dalla necessità di avere una fase di espansione accelerata si mostrerà l'utilizzo di un campo scalare per descrivere l'evoluzione cosmologica; verranno ricavati, a partire dall'equazione di Klein-Gordon per la dinamica di un campo scalare, i parametri di slow-roll e gli osservabili fondamentali (come lo spettro di potenza e l'indice spettrale per le perturbazioni di densità primordiali).

Il paradigma slow-roll pone l'accento sul ruolo centrale del potenziale scalare  $V(\phi)$  quale protagonista per l'instaurarsi della dinamica inflazionaria. L'espressione esatta del potenziale determina il corrispettivo modello inflazionario. Si vedranno quindi in dettaglio due modelli inflazionari: il modello di inflazione caotica e hilltop (con un rapido accenno all'inflazione eterna). Infine, verranno espone alcune questioni aperte inerenti l'inflazione che tuttavia non implicheranno un fallimento del paradigma inflazionario, quanto più la necessità di aggiungere una trattazione differente in grado di spiegare le prime fasi del processo inflazionario.

I capitoli 3 e 4 si concentreranno sull'argomento principale della Tesi. Il capitolo 3 sarà dedicato allo studio delle caratteristiche di universalità dei modelli inflazionari. Storicamente si è posta l'attenzione sulla costruzione dei modelli inflazionari a partire dalla forma del potenziale, arrivando così ad ottenere un ampio ventaglio di modelli accumulati dallo stesso meccanismo sottostante; questo sembra suggerire la possibilità di classificare i modelli raggruppandoli in un numero limitato di classi universali. Partendo da un esempio di classificazione mediante l'espansione  $1/N$  (dove  $N$  è il numero di e-folds) [17], il fulcro sarà il formalismo di Hamilton-Jacobi seguendo la trattazione di Binétruy et al. [1]. Tale formalismo, avvalendosi degli strumenti forniti nell'ambito del *Gruppo di Rinormalizzazione (RG)*, abbandonerà la caratterizzazione del potenziale scalare  $V(\phi)$  in favore della definizione di una  $\beta$ -function tramite un superpotenziale  $W(\phi)$ ; l'evoluzione cosmologica del campo scalare sarà ricavabile a partire dall'equazione del Gruppo di Rinormalizzazione, come un sistema che appropria o si discosta da un punto fisso critico, da cui la giustificazione all'universalità. Il siffatto formalismo pare tendere la mano alla descrizione Olografica dell'universo, di cui si farà un breve accenno. Una volta sviluppato in dettaglio tale formalismo per l'inflazione slow-roll, si procederà a definire i parametri di slow-roll in termini della  $\beta$ -function e a definire classi universali di inflazione; la metodologia qui introdotta verrà applicata ai modelli di inflazione caotica e hilltop (in modo tale da ricollegarsi al caso standard mostrato al capitolo precedente). Fino a questo punto si sarà trattata l'inflazione slow-roll, basata sull'assumere il contributo del potenziale dominante rispetto al termine cinetico del campo. Tuttavia è anche possibile instaurare una fase inflazionaria mediante un termine cinetico non standard (cioè non quadratico): in tal caso si parlerà di *K-Inflation*. Perciò, una volta introdotta la *K-Inflation*, si svilupperà il suddetto formalismo di Hamilton-Jacobi anche per questa trattazione.

Infine, il capitolo 4 estenderà la trattazione del precedente capitolo all'inflazione *anisotropa* ([62]). Verrà analizzata l'inflazione in presenza di un campo di gauge e di un secondo fattore di scala  $b(t)$  nella metrica così da tener conto dell'anisotropia. Per tale configurazione verrà sviluppato il formalismo della  $\beta$ -function caratterizzato, a differenza dei precedenti casi, dall'utilizzo di un secondo superpotenziale  $W_b$ ; le condizioni affinché vi sia una dinamica inflazionaria verranno espresse all'interno di tale formalismo.







# Capitolo 1

## Cosmologia Standard $\Lambda$ CDM

However, in the context of present-day cosmology, many of us hope that even the creation of the universe can be described in scientific terms. - Alan Guth -

In questo capitolo verrà presentato il Modello Cosmologico Standard noto anche come  $\Lambda$ CDM, acronimo di  $\Lambda$  Cold Dark Matter ad indicare un modello che tiene conto della materia oscura fredda congiuntamente alla presenza di una costante cosmologica  $\Lambda$ . Tale modello è il più semplice ricavabile dalla Teoria della Relatività Generale di Einstein e in grado di fornire delle spiegazioni alle principali proprietà dell'Universo osservato. Come si vedrà al capitolo 1.1 la descrizione è basata sulla metrica di Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) e sul Principio Cosmologico così da ottenere, nel contesto della Relatività Generale, le equazioni di Friedmann in grado di descrivere la dinamica dell'Universo. Da qui si sarà in grado di caratterizzare il contenuto energetico dell'Universo e collegare la teoria a degli osservabili cosmologici, in particolare ai dati forniti dal satellite Planck sulle osservazioni della Radiazione di Fondo Cosmico nelle Microonde (CMB).

La Cosmologia moderna deve i propri natali a due scoperte di inizio Novecento: la teoria della Relatività Generale (GR) formulata da Einstein nel 1915, le osservazioni di Hubble del 1929 sulla differenza delle velocità relative degli oggetti extra-galattici. Applicare le equazioni della GR alla descrizione dell'Universo ha permesso di mettere le basi su cui costruire la fisica dell'universo, mentre Hubble mostrò che gli oggetti più lontani, al di fuori della nostra galassia, recedono con una velocità superiore rispetto a quella di oggetti più prossimi. Tale osservazione portò alla conclusione che l'Universo si stesse espandendo. Risultato fondamentale che costituisce un tassello fondamentale della teoria del Big Bang Caldo: teoria che predice un Universo primordiale caldo e denso che, espandendosi, si raffredda e dirada.

Tra le principali scoperte che permisero di fare passi avanti nello sviluppo della cosmologia moderna, si annovera certamente la fortuita scoperta della

Radiazione di Fondo nelle Microonde da parte di Arno Penzias e Robert Wilson ([2]) che fornì delle importantissime quantità osservabili in grado di descrivere l'Universo e fornire dei vincoli alle teorie. In tale filone si colloca la missione COBE ([3]) che mostrò la presenza di piccole fluttuazioni nella temperatura della CMB (tale scoperta valse il premio Nobel per la fisica a G.F. Smoot e a J. Mather nel 2006), il cui successore, passando per WMAP, è stato il satellite Planck: lanciato nel 2009 è stato in grado di raggiungere misurazioni estremamente precise. In tal modo si sono avuti i dati necessari per poter costruire teorie cosmologiche in accordo con i dati osservativi, vincolando sempre più le predizioni di tali modelli. Infine un'ulteriore svolta nella storia della Cosmologia moderna si è avuta grazie agli studi, a fine anni Novanta, di tre gruppi di ricerca indipendenti guidati da Schmidt, Riess e Perlmutter (vincitori del Nobel per la fisica nel 2011) che, utilizzando la distanza di luminosità per supernovae di tipo Ia ad alto redshift, contribuirono sperimentalmente all'evidenza di una componente aggiuntiva nel contributo energetico dell'Universo: l'energia oscura, la quale domina il contributo energetico al tempo attuale e si pensa sia responsabile dell'attuale espansione accelerata dell'Universo.

Il modello Cosmologico Standard è un modello che si pone come obiettivo la descrizione dell'origine dell'Universo e la sua evoluzione. Per far ciò si affida sostanzialmente sia alla teoria delle Relatività Generale che ai risultati della fisica delle particelle per descrivere le interazioni di tipo non-gravitazionale. Tra i successi del modello standard è la possibilità di fornire predizioni quantitative; in particolare, il modello cosmologico  $\Lambda$ CDM è in grado di spiegare ragionevolmente:

- i diagrammi di Hubble che mostrano l'espansione dell'Universo (oggetti più lontani recedono a velocità maggiori di oggetti extragalattici più vicini);
- l'abbondanza di elementi leggeri (come l'elio) tramite la Nucleosintesi Primordiale;
- lo spettro di corpo nero della CMB.

Tuttavia le piccolissime perturbazioni nella CMB, così come vari problemi (relativi ai monopoli, alla piattezza e dell'orizzonte, di cui si parlerà nei capitoli 1.4.1 e 1.4.2), fecero nascere l'esigenza di aggiungere un tassello alla teoria standard in grado di risolvere tali questioni. A tal fine, nei primi anni Ottanta, nacque grazie ad Alan Guth la teoria dell'inflazione che risolse in maniera elegante tali discrepanze a cui la teoria standard del Big Bang Caldo non sapeva rispondere. Una volta incorporata l'inflazione, il modello  $\Lambda$ CDM è in grado di dar conto anche delle piccole perturbazioni della CMB.

In questo capitolo verrà introdotta la metrica FLRW e ricavate le equazioni che descrivono la dinamica di background dell'Universo; si passerà così ad

esporre il contenuto energetico dell'Universo, la Radiazione di Fondo Cosmica e i vincoli da essa ricavati tramite le misure del satellite Planck. Infine si esporranno i problemi a cui la teoria del Big Bang Caldo non sa dare risposta in modo tale da introdurre l'inflazione come soluzione agli stessi.

## 1.1 Universo FLRW

Il modello Cosmologico Standard è basato sul *Principio Cosmologico* il quale afferma che le proprietà dell'Universo sono le stesse per ogni osservatore (comovente) quando osservate su scale sufficientemente grandi. Un'altra formulazione equivalente dello stesso asserisce che l'Universo, su grandi scale, è omogeneo e isotropo. In origine il Principio Cosmologico fu introdotto come assunzione su cui basare lo studio dell'Universo; grazie alla tecnologia moderna è possibile testare tale asserzione: si scopre così che l'Universo è omogeneo e isotropo su scale dell'ordine dei  $100Mpc$ . Come si è detto in precedenza, per poter studiare la fisica dell'universo ci si basa sulla Relatività Generale; si introduce quindi, per poter risolvere l'equazione di Einstein, la metrica FLRW che rispetta le assunzioni di omogeneità e isotropia insite nel Principio Cosmologico:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j, \quad (1.1)$$

in cui  $\gamma_{ij}$  è la parte spaziale della metrica, esprimibile come:

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.2)$$

in cui  $k$  rappresenta la curvatura di scala di una superficie tridimensionale a  $t$  fissato, e può valere  $-1, 0$  oppure  $1$  (valori a cui corrispondono rispettivamente uno spazio aperto, piatto o chiuso). In Relatività Generale l'evoluzione di un sistema è fissato dall'equazioni di Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

in cui  $\Lambda$  rappresenta la costante cosmologica,  $T_{\mu\nu}$  è il tensore energia-momento e  $G_{\mu\nu}$  è il tensore di Einstein. Dati i simboli di Christoffel, il tensore di Einstein può essere espresso in termini del tensore di Ricci e dello scalare di Ricci. Per la metrica FRLW le uniche componenti non nulle dei simboli di Christoffel sono:

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \delta_j^i \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(\gamma), \quad (1.4)$$

in cui  $\Gamma_{jk}^i(\gamma)$  denota il simbolo di Christoffel calcolato per la metrica tridimensionale  $\gamma_{ij}$ .

Le uniche componenti non nulle del tensore di Ricci sono:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = a^2\gamma_{ij} \left[ \frac{2k}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right], \quad (1.5)$$

e quindi lo scalare di Ricci vale:

$$R = 6 \left[ \frac{k}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right]. \quad (1.6)$$

Avendo esplicitato il tensore di Ricci e lo scalare di Ricci si può ora calcolare il tensore di Einstein:

$$G_{00} = 3 \left[ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right], \quad G_{ij} = -\gamma_{ij}(k + 2a\ddot{a} + a^2). \quad (1.7)$$

A questo punto per poter scrivere le equazioni di Einstein complete è necessario esplicitare la forma del tensore energia-momento che appare nella 1.3; in base alle assunzioni di omogeneità e isotropia, presenti nel Principio Cosmologico, il contenuto energetico dell'Universo può essere espresso mediante il tensore energia-momento di un fluido perfetto a riposo e in equilibrio termodinamico:

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)U_\mu U_\nu, \quad (1.8)$$

in cui  $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$  è la quadrivelocità del fluido,  $p$  la pressione e  $\rho$  la densità di energia. Dalla omogeneità e isotropia segue che tali quantità possano dipendere esclusivamente dal tempo e inoltre:

$$T_{00} = \rho, \quad T_{ij} = pa^2\gamma_{ij}. \quad (1.9)$$

Espressioni differenti per l'energia corrispondono a differenti valori dei parametri dell'equazione di stato  $w \equiv \frac{p}{\rho}$  e, come conseguenza, inducono una diversa evoluzione del fattore di scala  $a(t)$  (come verrà mostrato al paragrafo 1.2).

Infine sostituendo le equazioni 1.7 e 1.9 all'interno dell'equazione di Einstein 1.3 si ottiene un sistema di equazioni differenziali:

$$3 \left[ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = \Lambda + 8\pi G_N \rho, \quad (1.10)$$

$$-\gamma_{ij}(k + 2a\ddot{a} + a^2) = -a^2\Lambda\gamma_{ij} + a^2\gamma_{ij}8\pi G_N p. \quad (1.11)$$

E' utile introdurre il parametro di Hubble  $H \equiv \dot{a}/a$  come misura del tasso di espansione dell'universo. In tal modo esprimendo il precedente sistema di equazioni in termini di  $H$  si ottengono le usuali equazioni di Friedmann:

$$3H^2 = \Lambda + 8\pi G_N \rho - 3\frac{k}{a^2}, \quad (1.12)$$

$$2\dot{H} = -8\pi G_N(p + \rho) + 2\frac{k}{a^2}. \quad (1.13)$$

Una volta specificato il contenuto energetico dell'Universo osservabile (fissando il valore dei parametri dell'equazione di stato  $w$  per la materia barionica, i fotoni ecc.) queste due equazioni possono essere usate per determinare l'evoluzione del fattore di scala  $a(t)$ . Stabilire l'evoluzione del fattore di scala corrisponde al determinare la storia dell'Universo.

## 1.2 Contenuto Energetico dell'Universo

Come spiegato nel precedente paragrafo, le equazioni di Friedmann 1.12 e 1.13 possono essere usate per determinare l'evolversi del fattore di scala  $a(t)$ . Per far ciò occorre specificare il tipo di materia presente nell'Universo. A tal fine trattiamo due specie energetiche che maggiormente incidono sul contenuto energetico dell'Universo:

- *Radiazione*: materia ultra-relativistica come i fotoni. Tali particelle sono senza massa con quadrimomento  $p^\mu = (|p|, p^i)$ . Il tensore energia-momento per una gas omogeneo di particelle ultra-relativistiche può essere espresso come:

$$T_{\mu\nu} = \text{diag} \left( \rho, \frac{\rho a^2(t)}{3}, \frac{\rho a^2(t)}{3}, \frac{\rho a^2(t)}{3} \right), \quad (1.14)$$

e l'equazione di stato è  $w = 1/3$ .

- *Materia Fredda*: con questo termine si intende generalmente materia non-relativistica come i barioni, quindi particelle massive con quadrimomento  $p^\mu = (m^2, 0)$ . In tal caso il tensore energia-momento, per un gas omogeneo, vale:

$$T_{\mu\nu} = \text{diag} (\rho, 0, 0, 0), \quad (1.15)$$

e l'equazione di stato vale qui  $w = 0$ .

Coerentemente con quanto appena visto è possibile trattare la costante cosmologica come una forma di energia con equazione di stato pari a  $w = -1$ , a significare perciò una pressione negativa di valore pari alla densità di energia e che quindi agisce quale forza repulsiva, all'opposto della gravità. Poiché le equazioni di Friedmann 1.12 includono anche un termine di curvatura  $k$  è

possibile definire una densità di energia  $\rho_k$  associata alla parte di curvatura spaziale, definita come:

$$\rho_k \equiv -\frac{3k}{8\pi G_N a^2}. \quad (1.16)$$

Si vuole adesso mostrare come l'evoluzione del fattore di scala  $a$  e della densità  $\rho$  dipendano dalla specie considerata (es. radiazione, barioni ecc) e perciò, di rimando, l'evoluzione dell'Universo: suddividendo l'arco temporale a intervalli in cui il contributo di una specie domina sulle altre è possibile studiarne l'evolversi. Si consideri perciò che il contributo di una data specie, con equazione di stato  $w$ , sia dominante sulle altre. In tale limite è possibile approssimare la pressione totale  $p_{tot}$  e la densità totale  $\rho_{tot}$  con  $p_w$  e  $\rho_w$  e perciò le 1.12 e 1.13 diventano:

$$3H^2 = 8\pi G_N \rho_w, \quad -2\dot{H} = 8\pi G_N(1+w)\rho_w, \quad (1.17)$$

la cui risoluzione porta, dopo vari calcoli, alla forma esplicita (valida per  $w \neq -1$ ):

$$a(t) \simeq a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad \rho \simeq \frac{1}{G_N t_0^2} \left[ \frac{a(t)}{a_0} \right]^{-3(1+w)}, \quad (1.18)$$

mentre per  $w = -1$ , che come si diceva approssima l'equazione di stato per la costante cosmologica, si ha:

$$a(t) \simeq a_0 e^{H_0 t}, \quad \rho \simeq \frac{H_0^2}{G_N}, \quad (1.19)$$

tali equazioni mostrano con chiarezza che, data l'equazione di stato, la soluzione su come scala la densità di energia può essere facilmente ottenuta. In particolare troviamo che la densità di energia per radiazione scala con  $a^{-4}$ , per la materia fredda con  $a^{-3}$  e per la costante cosmologica, come indica il nome, resta costante. Da notare che un dominio della costante cosmologica implica un Universo che si espande in maniera esponenziale, con uno spaziotempo di tipo deSitter.

Si osservi che per tutte le componenti considerate si ha  $H > 0$ , quindi un aumento del fattore di scala. Per comprendere meglio l'incidenza delle varie specie è utile introdurre il parametro di decelerazione  $q$  definito come:

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{a} H^{-2} = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (1.20)$$

che essendo proporzionale a  $\ddot{a}$  implica che una fase di espansione accelerata ( $\ddot{a} > 0$ ) corrisponde ad un valore negativo del parametro  $q < 0$ . Tramite l'espressione asintotica per  $a(t)$  si può mostrare che  $q$  può essere espresso anche come:

$$q = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} + w \right), \quad (1.21)$$



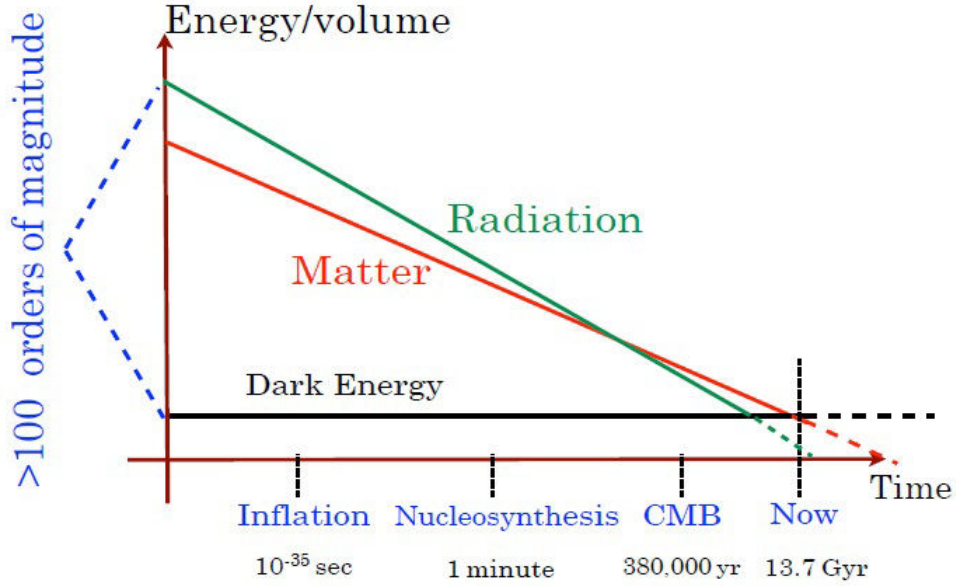


Figura 1.1: *Evoluzione nel tempo delle tre componenti considerate ([4]): radiazione, materia ed energia oscura (descritta tramite una costante cosmologica).*

quindi sia per i periodi in cui domina la radiazione che per quelli in cui domina la materia fredda si ha un'espansione decelerata. Dalla precedente equazione si nota che una componente con equazione di stato  $w < -1/3$  porta ad una fase di espansione accelerata, come avviene quindi per la costante cosmologica ( $w = -1$ ).

Per valutare l'incidenza delle varie specie considerate nel contributo energetico dell'Universo è utile normalizzare le densità di energia in termini della *densità critica* così definita:

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G_N}, \quad (1.22)$$

con tale definizione le densità di energia rinormalizzate vengono definite come:

$$\Omega_M \equiv \frac{\rho_M}{\rho_c}, \quad \Omega_R \equiv \frac{\rho_R}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}, \quad \Omega_k \equiv -\frac{3k}{8\pi G_N a^2 \rho_c} \equiv \frac{\rho_k}{\rho_c}, \quad (1.23)$$

in cui i pedici indicano rispettivamente materia, radiazione, costante cosmologica e curvatura. Indicando con  $t_0$  il valore di  $t$  attuale, la misura delle densità di energia rinormalizzate dà ([5] Planck Collaboration et al. 2018):

$$\Omega_M(t_0) = 0.3111 \pm 0.0056, \quad \Omega_\Lambda(t_0) = 0.6889 \pm 0.0056, \quad (1.24)$$

in cui il valore misurato di  $\Omega_M$  è inconsistente con la densità osservata di materia ordinaria, infatti il contributo dei barioni al tempo attuale è pari a  $\Omega_b(t_0) \simeq 0.04$ ; la soluzione proposta dal modello  $\Lambda$ CDM è appunto l'introduzione della materia oscura fredda (Cold Dark Matter): un tipo di materia che non emette elettromagneticamente (perciò oscura) ma interagisce solamente gravitazionalmente, la cui equazione di stato ha la stessa forma di quella per i barioni  $w = 0$ , e la cui evidenza osservativa è data, ad esempio, dalle curve di rotazione delle galassie. Come si nota dai precedenti valori il termine dominante, al tempo attuale, è la densità di energia relativa alla costante cosmologica, mentre il contributo della radiazione è trascurabile essendo dell'ordine di  $10^{-4}$ , stesso discorso per il termine di curvatura il cui peso è di  $10^{-3}$ .

### 1.3 Radiazione Cosmica di Fondo

Uno dei migliori osservabili che si ha a disposizione per studiare le fasi primordiali dell'universo è costituito dalla Radiazione di Fondo Cosmico nelle Microonde (CMB). La CMB è costituita dalla radiazione emessa all'epoca della Ricombinazione (che può esser considerata come *l'epoca di ultimo scattering*), ossia originata circa 380.000 anni dopo il Big Bang e che, in seguito al precedente raggiungimento dell'equilibrio tra materia e radiazione, risulta avere uno spettro di corpo nero con anisotropie in temperatura pari a  $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$ . In questo regime i fotoni sono ben descritti dallo spettro di corpo nero, quindi il numero di occupazione  $n_\nu$  dei fotoni ad una data frequenza è:

$$n_\nu = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (1.25)$$

A seconda dell'energia considerata avvengono differenti tipi di interazione tra fotoni e materia, perciò come l'Universo si espande e raffredda varia il tipo di interazione a cui sono soggetti i fotoni. Per esempio, la produzione di coppie di elettroni-positroni può avvenire finché l'energia dei fotoni è maggiore di  $1MeV$ ; l'interazione di bremsstrahlung e lo scattering Compton possono continuare finché la temperatura diminuisce sotto  $T < 0.5KeV$ . Dopo questo momento l'interazione principale tra fotoni ed elettroni è lo scattering tra fotoni ed elettroni (ad esempio, scattering Compton); se lo scattering avviene ad energie basse, la perdita di energia dei fotoni è trascurabile e il processo può essere approssimato dallo scattering Thomson. La differenza che si nota tra la distribuzione uniforme dei fotoni e la distribuzione inhomogenea della materia è dovuta alla pressione della radiazione: le inhomogeneità della materia crescono a causa dell'instabilità gravitazionale ed è proprio la pressione che impedisce l'instaurarsi dello stesso processo per i fotoni. Perciò nonostante la fonte delle disomogeneità nella materie e delle anisotropie nella CMB sia la medesima, le due distribuzioni appaiono molto

diverse oggi; inoltre, poiché la distribuzione dei fotoni è molto uniforme, le perturbazioni sono piccole ed è quindi possibile adoperare una teoria lineare che consente di fare predizioni precise una volta specificata la sorgente. I fotoni nell'universo primordiale si trovano in equilibrio termico finché non si disaccoppiano ( a  $T \simeq 0.2$  eV, o equivalentemente  $a \simeq 10^{-3}$  o  $t \simeq 4 \cdot 10^5$  yrs): in tale epoca la distribuzione dei momenti esce dalla condizione di equilibrio sviluppando anisotropie, differenti a seconda dei due stati di polarizzazione; dopo il disaccoppiamento  $z \sim 1000$  il redshift dei fotoni che attraversano un campo gravitazionale inhomogeneo genera ulteriori anisotropie nella CMB, senza però coinvolgere la polarizzazione (l'interazione tra barioni e fotoni è esclusivamente di tipo gravitazionale dopo il disaccoppiamento; i maggiori contributi sono una manifestazione dell'effetto Sach-Wolfe Integrato ISW). Le anisotropie perciò sono caratterizzate da una perturbazione nell'intensità dei fotoni a cui corrisponde una perturbazione in temperatura della distribuzione di corpo nero e da due parametri di polarizzazione. Le anisotropie della CMB sono osservabili solo su scale piuttosto grandi, corrispondenti a un numero d'onda comovente  $k \leq (10Mpc)^{-1}$ . In tale regime la teoria perturbativa al primo ordine (lineare) è quasi sempre un'ottima approssimazione fallendo solamente sulle scale più piccole e al tempo presente: questo perché in tal caso il fenomeno dominante è l'effetto Sunyaev - Zel'dovich termico che corrisponde ad un guadagno di energia da parte dei fotoni dovuta allo scattering col gas caldo e avviene quando un ammasso di galassie si trova sulla linea di vista. Il modello Cosmologico standard permette l'utilizzo del regime lineare per studiare le anisotropie della CMB. Tali anisotropie nella funzione di distribuzione dei fotoni vengono osservate e studiate analizzando lo spettro di potenza della CMB. L'osservabile base della Radiazione di Fondo è la sua intensità in funzione della frequenza e della direzione nel cielo  $\hat{n}$ ; poiché, come si è detto, la distribuzione dei fotoni è quasi perfettamente uguale alla distribuzione di corpo nero con una temperatura costante in qualunque direzione, si usa descrivere questo osservabile in termini delle fluttuazioni in temperatura  $\Theta(\hat{n}) = \Delta T/T$ . Considerando ora un campo random  $\delta$ , la sua espansione in Fourier è :

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ikx} \hat{\delta}(k) d^3k, \quad (1.26)$$

da cui possiamo definire lo spettro di potenza per mezzo della funzione di correlazione a due punti :

$$\langle \hat{\delta}(\mathbf{k})^* \hat{\delta}(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P(\mathbf{k}), \quad (1.27)$$

in cui  $P(k)$  è lo spettro di potenza, che dipende solo dal modulo di  $k$  (isotropia dello spazio, cioè invarianza per rotazioni) e la  $\delta$  a destra è la delta di Dirac che assicura l'omogeneità dello spazio (invarianza traslazioni); lo spettro di potenza perciò non è altro che la trasformata di Fourier della

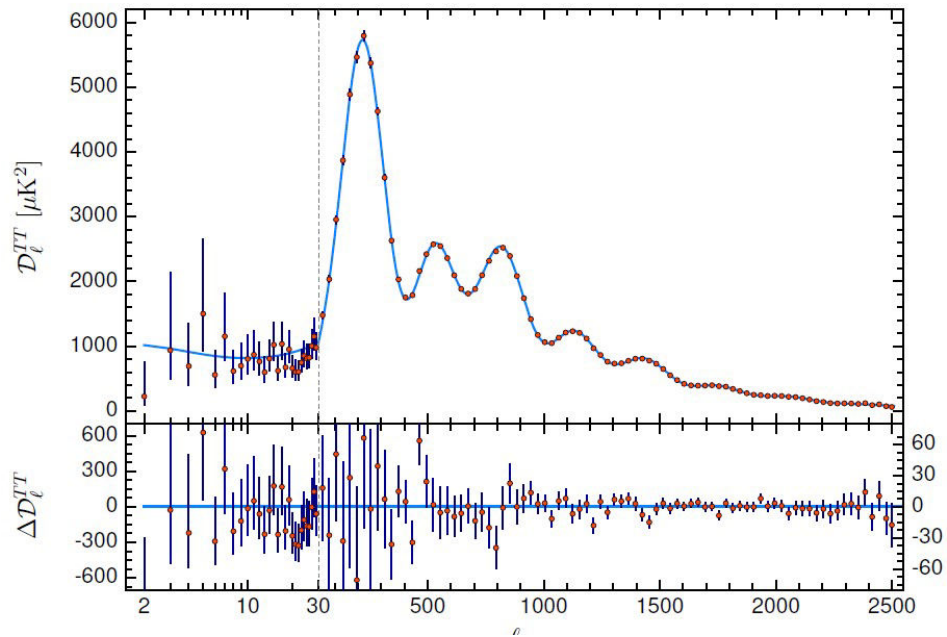


Figura 1.2: [5] Spettro di potenza della temperatura ottenuto da Planck 2018. La curva in blu è data dalla predizione teorica assumendo come modello il  $\Lambda$ CDM con i parametri che danno il best fit coi dati. Nel grafico in alto, a valori bassi di  $l$ , si può notare una barra d'errore più grande (dovuta alla varianza cosmica) e il Sachs Wolfe plateau; a  $l = 10^3$  si nota una soppressione causata dallo spessore non infinitesimo della Superficie di Ultimo Scattering che tende a smussare lo spettro. Il grafico in basso mostra i residui rispetto al modello. Da notare che per  $l = 30$  la scala sull'asse orizzontale passa da logaritmica a lineare.

funzione di correlazione a due punti. Ora, per funzioni che vivono su una sfera l'analogo dell'espansione di Fourier appena vista è l'espansione in armoniche sferiche tramite  $Y_{lm}$ ; se le fluttuazioni sono gaussiane, espandendo in multipoli per ogni punto dello spaziotempo :

$$\Theta_{lm} = \int d\hat{n} Y_{lm}^*(\hat{n}) \Theta(\hat{n}), \quad (1.28)$$

tali fluttuazioni sono totalmente caratterizzate dal loro *spettro di potenza*:

$$\langle \Theta_{lm}^* \Theta_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l, \quad (1.29)$$

i cui valori in funzione di  $l$  sono indipendenti da una data realizzazione e i coefficienti  $C_l$  costituiscono la versione sferica dello spettro di potenza  $P(k)$  e viene chiamato *spettro di potenza angolare*. In una piccola sezione di cielo in cui la curvatura può essere trascurata, l'analisi in armoniche sfere si riconduce ad una analisi di Fourier in due dimensioni; in tale limite  $l$  diventa il numero d'onda in Fourier e poiché la lunghezza d'onda angolare  $\theta = 2\pi/l$  grandi momenti di multipolo corrispondono a piccole scale angolari. Lo spettro di potenza viene solitamente mostrato per intervallo logaritmico per  $l \gg 1$  :

$$\Delta_T^2 \equiv \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l T^2. \quad (1.30)$$

Nella figura 2.1 lo spettro di potenza inizia per  $l = 2$  e mostra una barra di errore maggiore a bassi multipoli, questo perché lo spettro di potenza predetto è la media nel momento di multipolo  $l$  che l'osservatore vedrebbe in un ensemble di universi; ma poiché un osservatore reale ha a disposizione un solo universo (cioè la particolare realizzazione in cui viviamo) la media sugli ensemble è completamente inaccessibile per noi. Ci viene perciò in aiuto il teorema *ergodico* che asserisce che un campo random  $\delta$  è ergodico se è possibile usare la media sugli ensemble e la media spaziale in modo intercambiabile.

Tornando allo spettro di potenza si è detto che parte per  $l = 2$ ; il monopolio ( $l = 0$ ) e il dipolo ( $l = 1$ ) non sono misurabili. Per quanto riguarda il monopolio questo è legato alla densità di energia dei fotoni, infatti poiché la densità di energia dei fotoni dipende dalla temperatura come  $\rho_\gamma \propto T^4$  si ha che:

$$\Theta_{00}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta, \mathbf{x}), \quad (1.31)$$

con  $\delta_\gamma = \delta\rho_\gamma/\rho_\gamma$ , scalare ed  $\eta$  tempo conforme; quindi non è possibile determinare il monopolio in quanto non vi è modo di misurare la densità di energia di fotoni ad una posizione differente dalla nostra. Similmente per il dipolo non vi è modo di distinguere il dipolo cosmologico (cioè il Doppler shift causato dal moto del fluido di fotoni relativamente all'osservatore) dal nostro moto peculiare :

$$\sum_m \Theta_{1m} Y_{1m}(\hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{v}_\gamma \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.32)$$

in cui è stata usata la formula non relativistica, giustificata dal fatto che poiché è il moto della Terra quello che in pratica si misura, la media diurna del dipolo osservato restituisce la velocità del Sole relativamente al sistema di riferimento a riposo della CMB, velocità del Sole quindi pari a  $v_\odot = 371 \text{Kms}^{-1}$  che perciò rientra nel regime non-relativistico. Ad ogni modo il moto terrestre ha solo un piccolo effetto sui multipoli di ordine superiore contribuendo, per esempio, sul valore del quadrupolo ( $l = 2$ ) per una quantità dell'ordine di  $v_\gamma^2 \sim 10^{-6}$  quando il valore misurato dalla CMB è dell'ordine di  $10^{-5}$ . Quindi i multipoli con  $l = 2$  rappresentano le anisotropie *intrinseche* della CMB; esse sono generalmente denotate con  $a_{lm}$ :

$$a_{lm} \equiv \Theta_{lm}(\eta_0, \mathbf{x}_0), \quad (1.33)$$

in cui  $x_0$  rappresenta la nostra posizione (convenzionalmente presa come come origine per il sistema di coordinate). L'invarianza sotto rotazioni impone  $a_{lm} = 0$  e lo spettro di potenza per le anisotropie della CMB diventa:

$$\langle a_{lm} a_{lm}^* \rangle = \delta_l \nu \delta_{m m'} C_l. \quad (1.34)$$

L'accuratezza con cui si può misurare lo spettro è limitata dalla *varianza cosmica*; questa è la differenza tra il valore di aspettazione predetto dalla teoria e il valore medio osservato, differenza che può essere sostanziale se la porzione di cielo osservato non è sufficientemente piccola (la versione angolare della trattazione con un box per quanto riguarda la media spaziale in Fourier). Quindi l'effetto limitante della varianza cosmica è maggiore a valori bassi di  $l$  in quanto l'errore nello spettro va come:

$$\Delta C_l = \sqrt{\frac{2}{2l+1}} C_l, \quad (1.35)$$

perciò la precisione nella determinazione dello spettro di potenza scala come  $l^{-1}$ , quindi a  $l = 100$  sarà  $\sim 1\%$ .

## 1.4 Problemi del modello Hot Big Bang

La Cosmologia è sicuramente la miglior applicazione della teoria della Relatività Generale. Nell'ultimo secolo la teoria del Big Bang Caldo, la quale asserisce che l'Universo è nato in uno stato denso e caldo che, espandendosi, si è raffreddato fino allo stato attuale, è stata testata sotto vari aspetti. Tale teoria stima un'età dell'Universo dell'ordine dei 14 Gyrs, con la componente radiativa dominante nelle prime fasi per poi cedere il posto al dominio della materia a circa  $10^5$  yrs: tempo che corrisponde, come ordine, al momento in cui barioni e radiazione si disaccoppiano cosicché i fotoni siano liberi di viaggiare fino al tempo attuale, osservabili come Radiazione di Fondo Cosmico nelle Microonde (CMB). L'epoca in cui i fotoni hanno subito l'ultimo scattering, prima di arrivare fino a noi, forma una superficie tridimensionale chiamata Superficie di Ultimo Scattering (LSS acronimo di Last Scattering Surface). La Cosmologia Standard ha avuto il merito di raggiungere quattro importanti successi:

- la predizione dell'abbondanza di elementi leggeri prodotti durante la nucleosintesi, in accordo con le osservazioni;
- l'esistenza della CMB è spiegata con naturalezza come relitto di una fase termica iniziale calda;
- tener conto dell'espansione dell'Universo;
- fornire un impianto consistente su cui è possibile comprendere la formazione delle galassie ed altre strutture cosmiche.

Tuttavia, nonostante tali successi, rimangono diversi problemi insoluti all'interno della teoria standard del Big Bang Caldo quali:

1. l'evoluzione dell'Universo prima del tempo di Planck;
2. il problema dell'orizzonte cosmologico;
3. la questione relativa alla piattezza dell'Universo al tempo attuale, detto anche problema della piattezza;
4. l'origine dell'asimmetria barionica, ovvero come spiegare la quasi assenza di antimateria nell'Universo;
5. l'origine dello spettro primordiale di fluttuazioni di densità;
6. la natura dell'Energia Oscura e della Materia Oscura.

Risulta chiaro da questo quadro che la teoria cosmologica standard necessita quanto meno di un'integrazione in modo da risolvere, o almeno rendere conto, di tali aspetti. L'introduzione del paradigma inflazionario ([6] H. Guth,

1981) quale tassello precedente della teoria del Big Bang Caldo, ha permesso di risolvere con naturalezza la maggior parte delle precedenti questioni; in particolare la seconda e la terza verranno analizzate nei successivi paragrafi 1.4.1 e 1.4.2 per via della loro importanza storica (poiché affrontate nell'articolo originale di Guth [6]) e si vedrà come l'inflazione le risolva entrambe in maniera naturale.

### 1.4.1 Il Problema dell'Orizzonte

Una delle assunzioni fondamentali su cui è stato costruito il modello cosmologico standard (paragrafo 1.1) è il Principio Cosmologico, il quale è collegato all'esistenza di una singolarità iniziale. Tutti i modelli di Friedmann con equazione di stato  $w \geq 0$  possiedono un *particle horizon*: con tale termine ci si riferisce a tutti i punti in connessione causale situati all'interno di una sfera, centrata sull'osservatore, con raggio pari:

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}, \quad (1.36)$$

in cui  $c \cdot dt'$  è la distanza percorsa da un raggio di luce tra  $t'$  e  $t' + dt'$ , moltiplicata per un fattore che tiene conto dell'espansione dell'Universo; prendendo il limite inferiore dell'integrale pari a zero c'è la possibilità che l'integrale diverga in quanto  $a(t)$  al denominatore tenderebbe a zero per piccoli  $t$ : in tal caso il significato sarebbe che, in principio, l'osservatore potrebbe ricevere un segnale luminoso proveniente da qualsiasi parte dell'Universo. Se invece il precedente l'integrale converge ad un valore finito, allora la superficie sferica centrata sull'osservatore e di raggio  $R_H$  è chiamata *particle horizon* al tempo  $t$ : in tal caso l'osservatore non potrà ricevere segnali luminosi da sorgenti a distanza maggiore di  $R_H(t)$ . Questo fa sì che si possa dividere i segnali osservabili (cioè all'interno dell'orizzonte) da quelli non osservabili (al di fuori dell'orizzonte). Si può mostrare ([7]) che a tempi prossimi al Big Bang  $R_H$  è approssimabile a:

$$R_H(t) \simeq 3 \frac{1+w}{1+3w} ct, \quad (1.37)$$

quindi dipendente dall'equazione di stato: si ha un orizzonte quando  $w > -1/3$ .

L'esistenza di un orizzonte cosmologico rende difficile accettare il Principio Cosmologico poiché questi richiede l'esistenza di una forte correlazione delle condizioni fisiche tra regioni situate all'esterno dei rispettivi *particle horizon*: cioè regioni che non avrebbero mai avuto modo di comunicare tra loro si ritrovano ad avere condizioni simili, come se avessero avuto modo di interagire tra loro fino al raggiungimento di un equilibrio. Tale problematica risulta palese dalle osservazioni della CMB: l'elevato grado di isotropia e omogeneità



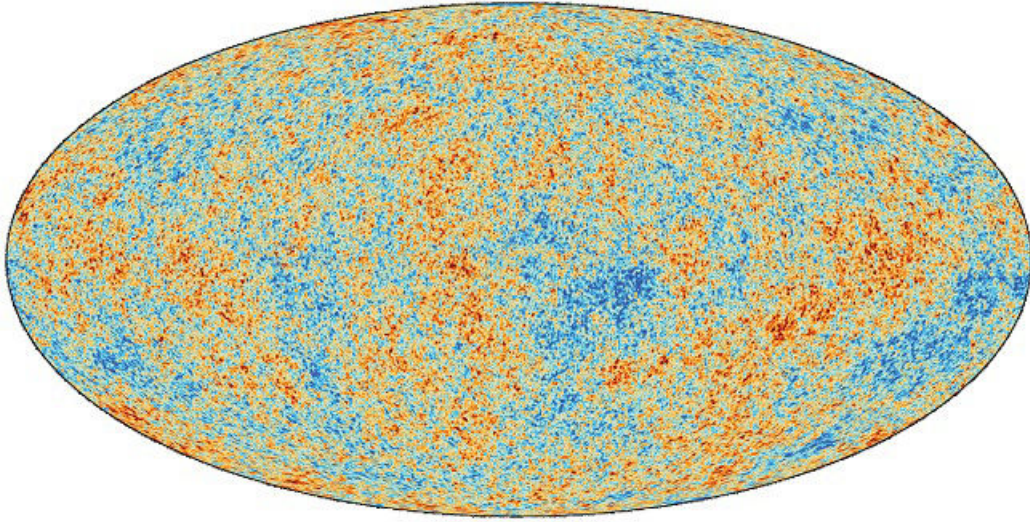


Figura 1.3: *Anisotropie della Radiazione di Fondo Cosmico osservate dalla missione Planck dell'ESA. Le differenze in temperatura da un punto all'altro sono pari ad una parte su  $10^5$ .*

tra punti dislocati agli estremi opposti del cielo, implica l'esistenza di un periodo in cui le due suddette regioni abbiano avuto modo di interagire tra loro. Ora, all'interno della classica espansione decelerata prevista dal modello cosmologico standard non vi è alcuna spiegazione sul perché la temperatura osservata in regioni differenti del cielo sia così accuratamente uguale (Figura 1.3): regioni opposte non avrebbero modo, in questa teoria, di entrare in connessione causale così da instaurare un equilibrio. Tale questione prende il nome di *Problema dell'Orizzonte*.

#### 1.4.2 Il Problema della Piattezza

Come si è visto al paragrafo 1.2, l'evoluzione della densità  $\Omega$  delle differenti specie varia, nel tempo, in modi diversi in quanto dipendente dall'equazione di stato  $w$ . Se l'Universo fosse piatto ( $\Omega = 1$ ) allora così rimarrebbe per tutto il tempo, altrimenti il parametro di densità evolverà nel tempo. Poiché la teoria del Big Bang Caldo descrive l'espansione decelerata dell'Universo,  $\Omega$  si discosta dal valore unitario. Per esempio, durante il periodo dominato dalla materia  $|1 - \Omega| \propto t^{2/3}$ , e durante l'epoca in cui domina la radiazione  $|1 - \Omega| \propto t$ . È noto che a tempi attuali i dati osservativi indicano un valore di  $\Omega_0$  che si discosta di poco dall'unità: i vincoli ricavati dalle oscillazioni barioniche acustiche BAO sulla curvatura spaziale sono consistenti con un Universo piatto,  $\Omega_K = 0.001 \pm 0.002$  [5]. Questo fatto implica che, a tempi primordiali,  $\Omega$  doveva essere estremamente vicino all'unità. Per ottenere l'Universo attuale, è richiesto che al periodo della nucleosintesi (quando l'U-

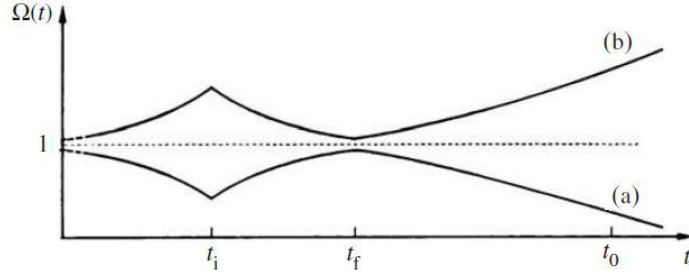


Figura 1.4: *Illustrazione dell'evoluzione del parametro di densità  $\Omega$  in funzione del tempo ([7]).*

niverso aveva circa 1 secondo) valga  $|\Omega(t_{nuc}) - 1| < 10^{-16}$  ([8]). Il problema è che tale condizione iniziale, ovvero  $\Omega$  estremamente vicino all'unità, risulta essere estremamente innaturale; tale problema prende il nome di *Problema della Piattezza*.<sup>1</sup>

### 1.4.3 Soluzione Inflazionaria

L'inflazione è definita come un periodo durante il quale il tasso di incremento del fattore di scala accelera, il che corrisponde ad avere una forza repulsiva (un trattazione rigorosa sarà sviluppata al capitolo 2):

$$\ddot{a} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{a} < 0, \quad (1.38)$$

la prima condizione corrisponde ad avere una fase di espansione accelerata, mentre con la seconda condizione si può caratterizzare l'inflazione quale periodo in cui la lunghezza comoviente di Hubble  $H^{-1}/a$  decresce. Usando il parametro di Hubble  $H$  si può riscrivere la condizione per instaurare un periodo inflazionario come:

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} < 1 \quad (1.39)$$

con l'usuale assunzione che  $H$  decresce col tempo. Quando  $H$  è costante si ha che il fattore di scala cresce in maniera esponenziale nel tempo,  $a = e^{Ht}$ ; un Universo in cui  $H$  è costante viene detto universo di deSitter. Da notare che l'inflazione non fa alcuna assunzione riguardante la sottostante teoria della gravità. Tuttavia, assumendo valida la Relatività Generale quale teoria per descrivere l'interazione gravitazionale, allora è possibile riarrangiare le equazioni di Friedmann 1.12 e 1.13 in modo da ottenere per tempi primordiali (quindi trascurando  $\Lambda$  e il termine di curvatura):

<sup>1</sup> Per esattezza va ricordato che l'Universo non è esattamente descritto dalla metrica FLRW in quanto non è perfettamente omogeneo e isotropo.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G_N(\rho + 3P), \quad (1.40)$$

quindi per avere una fase accelerata si richiede che:

$$\ddot{a} > 0 \quad \rightarrow \quad \rho + 3p < 0, \quad (1.41)$$

poiché si assume sempre che la densità  $\rho$  sia positiva, la precedente implica la necessità di avere una *pressione negativa* che guidi l'inflazione. Per avere un'espansione di tipo deSitter deve valere  $p = -\rho$ . Avendo ora introdotto le condizioni affinché si possa instaurare un periodo inflazionario, si vuole mostrare come l'inflazione sia in grado di risolvere con eleganza i precedenti due problemi relativi all'orizzonte e alla piattezza.

**Soluzione inflazionaria al problema dell'orizzonte** Il problema dell'orizzonte consiste sostanzialmente nel fatto che regioni di dimensioni proprie  $l$  posso entrare in connessione causale solo quando l'orizzonte  $R_H = l$ . Nei modelli di Friedmann l'orizzonte cresce con  $t$  mentre la dimensione propria di una regione con una dimensione comovente fissata scala con  $t^\beta$ , con  $\beta < 1$ . Per analizzare il problema è conveniente utilizzare, al posto del particle horizon, la seguente grandezza:

$$R_c = \frac{c}{H} = \frac{c\dot{a}}{a}, \quad (1.42)$$

che prende il nome di *orizzonte cosmologico*, la cui dimensione comovente è:  $r_c = R_c(a_0/a) = ca_0/\dot{a}$ . Si consideri ora la scala comovente  $l_0$  che entra nell'orizzonte cosmologico al tempo  $t_H(l_0) \neq 0$  in quanto  $r_c$  cresce nel tempo (Figura 1.5). Eventi occorsi al tempo  $t$  non possono connettere causalmente regioni delle dimensioni di  $l_0$  fino a che  $t \geq t_H(l_0)$ .

A tempi primordiali, sfruttando la 1.37, si ha che:

$$r_H = \frac{a_0}{a} R_H(t) \simeq c \frac{a_0}{\dot{a}}, \quad (1.43)$$

cosicché  $r_H \simeq r_c$  e si ottiene che:

$$r_H \dot{r}_H \propto -\ddot{a} \propto (1 + 3w) > 0. \quad (1.44)$$

Perciò, immaginando esista un periodo  $t_i < t < t_f$  durante l'espansione dell'universo in cui la scala comovente  $l_0$ , che è già stata in connessione causale, esca dall'orizzonte. Tale evento occorre per  $l_0 > r_c$ . Questa disuguaglianza è valida fintanto che l'orizzonte comovente  $ca_0/\dot{a}$  decresce nel tempo, il che richiede un'espansione accelerata  $\ddot{a}$ . Espansione accelerata che corrisponde alla definizione di *inflazione*. Con riferimento alla Figura 1.5, la scala  $l_0$  non è in connessione causale prima di  $t_1$ ; tra  $[t_1, t_2]$  entra in connessione causale e a  $t_2$  esce dall'orizzonte cosicché tra  $[t_2, t_3]$  le sue proprietà non posso essere

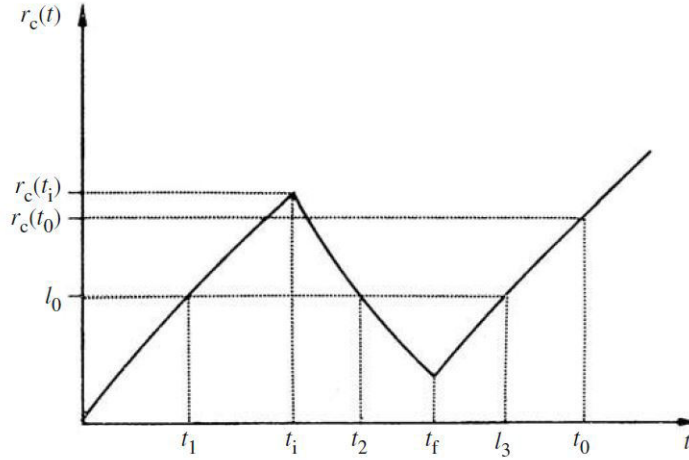


Figura 1.5: *Illustrazione dell'evoluzione dell'orizzonte cosmologico comovente. Il periodo inflazionario corrisponde all'intervallo compreso tra  $[t_i, t_f]$  ([7]).*

alterate da processi fisici causali. Perciò un osservatore a  $t_3$ , ignaro dell'esistenza di una fase di espansione accelerata quale quella tra  $[t_i, t_f]$ , penserebbe che la scala  $l_0$  stia entrando nell'orizzonte per la prima volta e non saprebbe spiegarne l'omogeneità. Tale situazione è l'analogo dell'osservazione della temperatura della Radiazione di Fondo a cui si è accennato in precedenza. Il problema quindi non sussiste se vi è una fase di espansione accelerata e se la scala massima in cui può esserci connessione causale è maggiore della scala presente dell'orizzonte:  $r_c(t_0) \leq r_c(t_i)$ . Riassumendo, il problema dell'orizzonte non sussiste se è presente una fase di espansione accelerata che, come abbiamo visto, corrisponde ad avere una pressione negativa e quindi un'equazione  $w < -1/3$ .

**Soluzione inflazionaria al problema della piattezza** Si assuma anche qui la presenza di un periodo di espansione accelerata (inflazione) tra  $[t_i, t_f]$  (con riferimento alla Figura 1.5). Partendo dalle equazioni di Friedmann si può arrivare ad ottenere ([7]):

$$\left(\frac{a_f}{a_i}\right)^{(1+3w)} = \left(\frac{1 - \Omega_i^{-1}}{1 - \Omega_0^{-1}}\right) 10^{60} z_{eq}^{-1} \left(\frac{T_f}{T_P}\right)^2, \quad (1.45)$$

il problema della piattezza è risolto fintato che la seguente disuguaglianza è valida:

$$\frac{1 - \Omega_i^{-1}}{1 - \Omega_0^{-1}} \geq 1, \quad (1.46)$$

in altri termini il parametro di densità al tempo attuale  $\Omega_0$  non è più vicino all'unità oggi di quanto non lo fosse a  $\Omega_i$ . In riferimento alla Figura

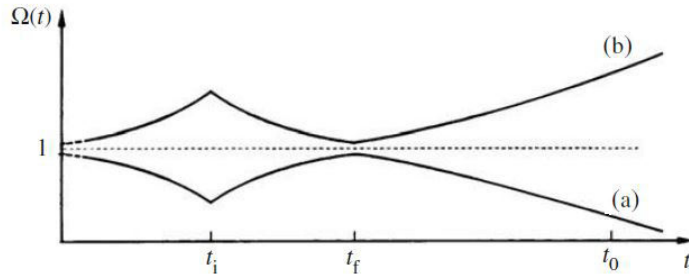


Figura 1.6: *Illustrazione dell'evoluzione del parametro di densità  $\Omega(t)$ . Come si vede l'inflazione, a prescindere dalle condizioni iniziali, tende a spingere il parametro  $\Omega$  verso l'unità ([7]).*

1.6, l'inflazione tende a portare il parametro di densità verso il valore unitario risolvendo così il problema della piattezza. Va precisato comunque che l'inflazione non predice un Universo esattamente piatto quanto invece una piccolissima deviazione dal valore unitario (tale discostamento come si vedrà al capitolo dipenderà dai parametri 2.5 di slow-roll del modello inflazionario).

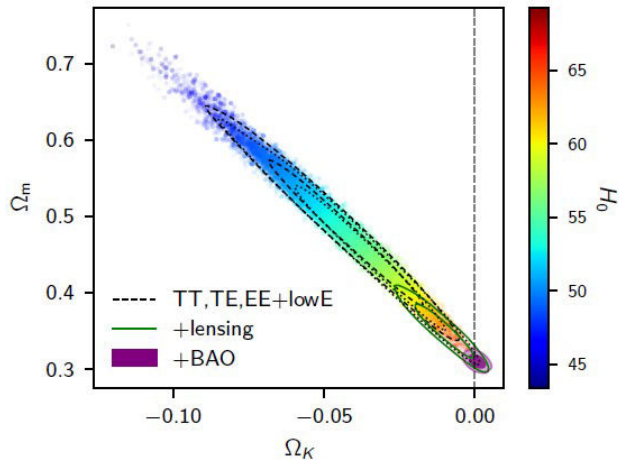


Figura 1.7: Grafico che raffronta il parametro di densità di materia con il parametri di curvatura, a seconda dei valori della costante di Hubble. Come si vede nella parte rossa, corrispondente al valore misura di  $H$ , il parametro di curvatura è prossimo allo zero, come predetto dall'inflazione. [5] Planck Collaboration et al. 2018 .

## 1.5 Vincoli Osservativi del Modello $\Lambda$ CDM

Nei precedenti paragrafi è stato introdotto il modello cosmologico standard  $\Lambda$ CDM, basato sulla metrica di  $FRLW$ , che permette la descrizione dell'universo osservabile. Si sono altresì mostrati i problemi da esso sottesi e motivata la necessità di introdurre il paradigma inflazionario quale tassello aggiuntivo atto ad armonizzare la descrizione dell'universo, risolvendo in maniera naturale tali incogruenze. Nel corso dei capitoli 1 e 2 sono state introdotte inoltre varie quantità per definire la teoria, tra le quali alcuni osservabili cosmologici (come nella sezione 2.5) di notevole importanza in quanto intrinsecamente legati alla stessa teoria inflazionaria, cosicché le predizioni su tali valori siano testabili. A tal fine si vuole fare una panoramica sui valori osservativi di tali grandezze, basandosi sui recenti dati forniti dal satellite Planck.

Le componenti energetiche dell'universo sono state descritte (sezione 1.2) tramite i parametri di densità che, tra l'altro, determinano l'evoluzione del fattore di scala  $a(t)$ . Nella tabella 1.1 vengono riportati i valori misurati di tali parametri. È importante sottolineare che il valore della densità di materia, pari a  $\Omega_M \simeq 0.3$ , non è consistente con il valore osservato di densità di materia ordinaria, cioè densità di barioni, il cui valore corrisponde a  $\Omega_b \simeq 0,004$ ; la soluzione a tale discrepanza è stata introdurre, nel modello  $\Lambda$ CDM, la materia oscura fredda CDM con equazione di stato  $w = 0$ , la cui unica interazione è di tipo gravitazionale (non elettromagnetica, da cui

Tabella 1.1: I principali osservabili cosmologici

<i>Parametro</i>	<i>Valore</i>
$H_0[\text{Km } s^{-1} \text{ Mpc}^{-1}]$	$67.66 \pm 0.42$
$\Omega_M$	$0.3111 \pm 0.0056$
$\Omega_\Lambda$	$0.6889 \pm 0.0056$
$\Omega_k$	$0.0007 \pm 0.0019$
$n_s$	$0.9665 \pm 0.0038$
$w_0$	$-1.028 \pm 0.031$

[5] Planck Collaboration et al. 2018

il termine oscura), in modo da spiegare il valore di  $\Omega_M$ . A tal proposito va detto che la prova osservativa dell'esistenza della materia oscura fredda risiede nello studio delle curve di rotazione delle galassie: zone più esterne risultano ruotare a velocità maggiore delle zone più interne nonostante una minore presenza di materia barionica; tale situazione indica la presenza di una grande quantità di materia non radiante nelle parti più esterne delle galassie.

Come si evince dalla tabella 1.1 il valore di  $\Omega_k$  prossimo allo zero, a significare una curvatura nulla e perciò uno spazio piatto, è in linea con quanto predetto dall'inflazione (come visto al paragrafo 1.4.3), così come il discostamento dal valore unitario dell'indice spettrale (a tal proposito si veda la Figura 1.8). La peculiarità del modello  $\Lambda$ CDM è anche l'aver introdotto la costante cosmologica  $\Lambda$  nell'equazione di Einstein che, come si è visto nella sezione 2.2, è ritenuta responsabile dell'espansione accelerata dell'Universo (al tempo attuale) in quanto componente dominante.

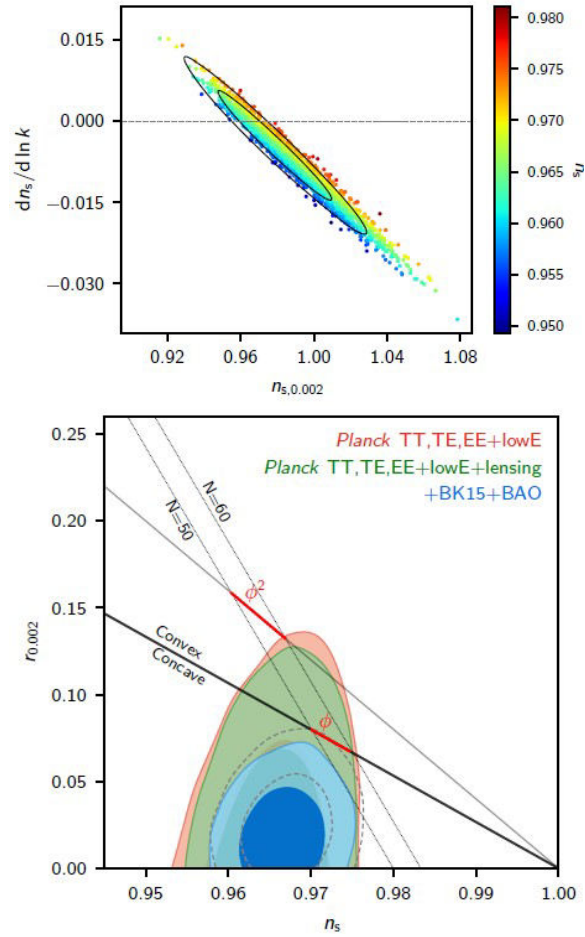


Figura 1.8: In alto: vincoli sul running dell'indice spettrale basandosi sul modello  $\Lambda$ CDM. I dati di Planck sono consistenti con il non avere running di  $n_s$ . In basso: vincoli sul rapporto tensoriale-scalare  $r$  usando i dati di Planck (in rosso e verde) e i vincoli dati dalle oscillazioni barioniche acustiche BAO insieme a BICEP2/Keck (in blu). La linea nera corrisponde all'assumere un potenziale lineare, in grigio l'intervallo consentito per il numero di e-folds  $N$ . [5] Planck Collaboration et al. 2018



## Capitolo 2

# Inflazione a campo singolo

### 2.1 Le Origini dell'Inflazione

Dal punto di vista della cosmologia moderna la funzione più importante della teoria inflazionaria è il riuscire a generare perturbazioni di curvatura primordiali. Al di là della dinamica di background dell'inflazione, è ritenuto fondamentale studiare e comprendere il problema dell'evoluzione delle fluttuazioni quantistiche associate alle fluttuazioni del vuoto del campo scalare  $\delta\phi(t, x)$ . Nel paradigma inflazionario, a tali fluttuazioni del vuoto sono associate perturbazioni primordiali nella densità di energia che sopravvivono anche dopo la fine dell'inflazione e che sono all'origine di tutte le strutture nell'universo. La conoscenza attuale sull'origine delle strutture asserisce che quando l'universo diventa dominato dalla materia (a  $z \sim 3200$ ) le disomogeneità nella densità ( $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$ ) vengono amplificate dalla gravità così da crescere nelle strutture che vediamo oggi; l'esistenza di tali disomogeneità è stata confermata per la prima volta dalla scoperta del satellite COBE ([3] Smoot et al., 1992) delle anisotropie presenti nella Radiazione di Fondo Cosmico nelle Microonde (CMB). In pratica è come se l'inflazione creasse dei semi che successivamente cresceranno fino a formare le strutture dell'universo.

La motivazione storica che ha portato alla teoria inflazionaria era invece molto differente basandosi su un aspetto che poteva sembrare quasi filosofico, ma che tale non era<sup>1</sup>, e cioè domandandosi se le condizioni iniziali richieste per ottenere la teoria cosmologica del Big Bang imperturbata fossero o meno plausibili; l'articolo originale di Guth ([6] H. Guth, 1981), che diede il nome al paradigma inflazionario, affrontava tre problemi (monopoli, piattezza 1.4.2 e orizzonte 1.4.1), presenti nella teoria del Big Bang, risolvendoli in un modo

---

<sup>1</sup> Tanto da fare ritenere necessario aggiungere un'appendice, nell'articolo originale di Guth, riguardante il problema della piattezza e che inizia con la seguente premessa ([6]): «*This appendix is added in the hope that some skeptics can be convinced that the flatness problem is real*».

naturale. Tuttavia l'articolo originale trattava l'inflazione dal punto di vista di una transizione di fase senza focalizzarsi espressamente sulla forma del potenziale, mentre in seguito la letteratura ha prestato una sempre maggior attenzione alla caratterizzazione del potenziale.

## 2.2 Paradigma Slow-Roll

Prima di potersi addentrare nel formalismo di Hamilton - Jacobi si rende necessario avere una panoramica sul paradigma classico della teoria inflazionaria slow-roll, così da avere le defizioni precise delle quantità che saranno coinvolte successivamente nella trattazione.

Dalle problematiche citate nel paragrafo 1.4 del precedente capitolo, emerge la necessità di avere ai tempi iniziali una fase di espansione accelerata (tale per cui si abbia una pressione negativa  $p < -\frac{1}{3}\rho$ ). E' possibile ottenere una fase de Sitter tramite la costante cosmologica  $\Lambda$ ; in particolare, l'equazione di Einstein della Relatività Generale tiene conto della costante cosmologica (si è soliti separare la parte geometrica data dai tensori di Ricci e Riemann da quella energetica e perciò scrivere  $\Lambda$  a destra dell'uguaglianza):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

in cui il tensore energia - momento per un fluido perfetto e per  $\Lambda$  assume le seguenti espressioni:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

$$T_{\mu\nu}^\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Dalla seconda equazione si ricavano le espressioni per la densità e la pressione:

$$\begin{cases} p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \\ p_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \end{cases}$$

e quindi  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$  (o equivalentemente l'equazione di stato  $\omega_\Lambda = -1$ ). Ora, per un generico tensore energia-momento si ha che il suo valore di aspettazione sullo stato di vuoto <sup>2</sup>, essendo Lorentz invariante, è:

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = -\langle 0|\rho|0\rangle g_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

ne consegue la seguente interpretazione della costante cosmologica:

$$\Lambda = \langle 0|\rho|0\rangle 8\pi G, \quad (2.5)$$

---

<sup>2</sup>Definito come lo stato che gode del massimo numero di simmetrie nell'ambiente in cui si trova; in Minkowski sarebbe lo stato massimamente simmetrico rispetto alle trasformazioni di Poincaré.

cioè equivalente all'aspettazione della densità di energia sul vuoto. A differenza di uno classico spaziotempo di Minkowski in cui era possibile ri-normalizzare tale quantità e impostarla a zero, in Relatività Generale tale procedura non è consentita in quanto la gravità qui descritta risente di tutto, massa ed energia, di modo che  $\Lambda$  entri come sorgente nell'equazione di Einstein 2.1.

Date tali premesse si è ora in grado di vedere come sia possibile ricondurle alla dinamica di un campo scalare. Innanzitutto il motivo per il quale si adopera proprio un campo scalare, anziché un campo vettoriale piuttosto che uno spinoriale, è conseguenza del fatto che vettori e spinori rompono l'isotropia dello spaziotempo Friedmann - Robertson - Walker in quanto le quantità ad essi associate possiedono una direzione privilegiata (come ad esempio lo spin).

Detto ciò, la lagrangiana per un campo scalare  $\phi$  è:

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - V(\phi), \quad (2.6)$$

in cui  $V(\phi)$  rappresenta il potenziale. Definiamo ora il tensore energia-momento come:

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\phi. \quad (2.7)$$

Essendo interessati al valore di aspettazione sul vuoto, consideriamo il valore di  $\phi$  in corrispondenza del minimo (cioè del vuoto) tale per cui:  $\langle \phi \rangle = \text{costante}$ ; in tale situazione si ha:

$$T_{\mu\nu}^\phi = -V(\langle\phi\rangle)g_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Poiché il campo  $\phi$  è costante ed omogeneo significa che non ha energia cinetica e l'energia del campo scalare sul vuoto è pari ad una costante, come la costante cosmologica vista in precedenza in grado di fornire una pressione negativa. E' quindi possibile usare un campo scalare per descrivere  $\Lambda$  cosicché il potenziale  $V(\phi)$  possa mimare una costante cosmologica effettiva. A questo punto si è interessati a capire chi può fornire la pressione negativa necessaria affinché si abbia una fase di espansione accelerata e quindi si possa instaurare un processo inflazionario. Assumendo per il campo che la varianza sia minore del valore medio classico di background,  $\langle\delta\phi^2\rangle \ll \phi_0^2(t)$  è possibile esprimere il campo come la somma di due contributi:

$$\phi(\bar{x}, t) = \phi_0(t) + \delta\phi(\bar{x}, t), \quad (2.9)$$

in cui il primo termine corrisponde al valore medio classico di background del campo, in funzione solamente del tempo in modo da rispettare l'isotropia e l'omogeneità dello spaziotempo, ed un secondo termine  $\delta\phi(t, x)$  che

rappresenta le fluttuazioni quantistiche del campo intorno a  $\phi_0$  (che generalmente saranno piccole perturbazioni lineari responsabili delle anisotropie in temperatura della Radiazione di Fondo Cosmico nelle Microonde).

Il tensore energia-momento per un campo scalare ha la seguente espressione:

$$T_{\nu}^{\mu} = \partial^{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - \delta_{\nu}^{\mu}\left[\frac{1}{2}\partial^{\alpha}\phi\partial_{\alpha}\phi + V(\phi)\right], \quad (2.10)$$

con densità del momento pari a  $T_i^0 = \dot{\phi}\partial_i\phi$ . Un campo omogeneo ha densità di momento nulla e stress isotropo. Quindi un campo scalare è un fluido perfetto nella terminologia della relatività in quanto lo stress è isotropo nel sistema di riferimento locale ([8] Lyth e Liddle, 2009).

Calcolando le componenti del tensore energia - momento (che corrisponderanno alle quantità densità e pressione isotropa) per la dinamica di background ( $\phi_0(t)$ ) si otterrà l'espressione per  $T_{\mu\nu}$  corrispondente a quella di un fluido perfetto:

$$\begin{cases} T_0^0 = -\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2 + V(\phi_0)\right) \\ T_i^j = \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2 - V(\phi_0)\right)\delta_i^j \end{cases}$$

e perciò:

$$\begin{aligned} \rho_{\phi} &= \frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2 + V(\phi_0) \\ p_{\phi} &= \frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2 - V(\phi_0). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Si hanno ora tutti gli elementi per ricavare la condizione affinché si possa realizzare un processo inflazionario tramite un campo scalare  $\phi$ . Affinché si instauri un processo inflazionario si richiede una fase accelerata  $\ddot{a} > 0$  la quale comporta una condizione sul potenziale ottenibile a partire dall'equazione di Friedmann (ottenibile dall'equazione di Einstein 2.1 in una metrica di Robertson-Walker):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(3p + \rho), \quad (2.12)$$

in cui imponendo la condizione per avere accelerazione  $\ddot{a} > 0$  e usando le espressioni trovate in 2.11 se ricava la condizione sul potenziale:

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2 \ll V(\phi_0), \quad (2.13)$$

a significare che il potenziale  $V(\phi_0)$  deve dominare sul termine cinetico affinché si abbia accelerazione. E' possibile mostrare che un valore costante del potenziale  $V(\phi)$  conduca ad una fase de Sitter, infatti dalla seconda equazione di Friedmann (in cui si omette il termine di curvatura  $kc^2$  in quanto a tempi primordiali il suo contributo è trascurabile):

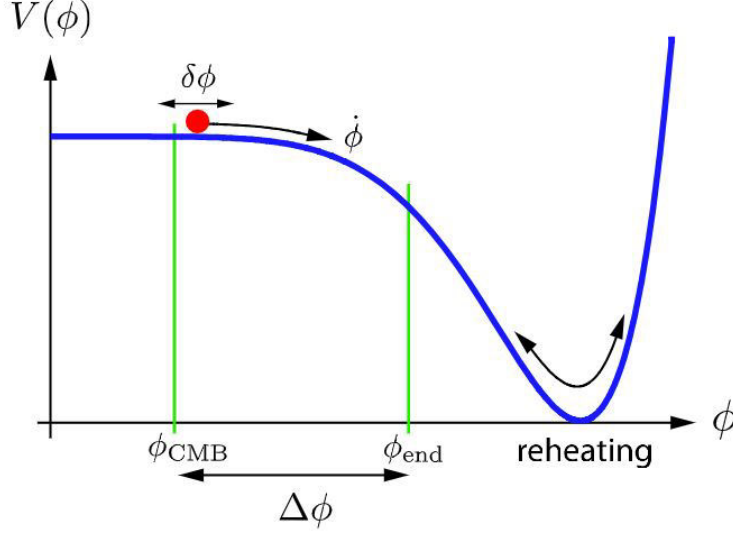


Figura 2.1: Modello per la dinamica di un campo scalare durante l'inflazione ([9] Yadav e Wandelt, 2010): durante la parte piatta del potenziale  $V(\phi)$  l'universo si espande in maniera esponenziale; il campo scalare passa da uno stato metastabile di falso vuoto verso il punto stabile di minimo del potenziale, minimo corrispondente allo stato di vero vuoto.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \equiv H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho = \frac{8}{3}\pi G\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right), \quad (2.14)$$

a cui applicando la condizione 2.13 e assumendo la costanza del potenziale,  $V(\phi) \sim \text{cost.}$ , si ottiene:

$$H^2 \simeq \frac{8}{3}\pi G V(\phi) \sim \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad \text{fase quasi de Sitter}(a \propto e^{Ht}). \quad (2.15)$$

Il potenziale  $V(\phi)$  si suppone abbia un minimo in cui  $V = 0$ . Quando il campo  $\phi$  è sul minimo la densità di energia e la pressione valgono zero. Il valore di  $\phi$  al minimo corrisponde quindi al vuoto ed è chiamato valore di aspettazione sullo stato di vuoto, in cui il termine aspettazione si deve al fatto che il campo ha fluttuazioni quantistiche sul valore classico. Si è mostrato che per avere inflazione, nel paradigma classico, è necessario avere un potenziale che domina rispetto al termine cinetico e, inoltre, tale potenziale deve essere piatto cosicché il campo scalare si muova lentamente; da qui il termine slow-roll inflation. In tale fase l'energia dell'universo è dominata dalla densità di energia del vuoto associata al potenziale del campo scalare  $V(\phi)$ ; poiché la densità di energia del campo varia, rispetto al fattore

di scala, come  $\rho_\phi \propto a^{-6}$  mentre la densità per i barioni e la radiazione va come  $\rho_b \propto a^{-3}$  e  $\rho_r \propto a^{-4}$  si evince che il sistema si rilassa entrando in una fase piatta indipendentemente dalle condizioni iniziali: l'inflazione agisce come un attrattore livellando possibili disomogeneità presenti in precedenza (si veda il capitolo 4.3.1). Tale peculiarità è conosciuta con il nome *cosmic no hair theorem* ([10], Hoyle et al., 1962).

## 2.3 Cosmic No Hair Theorem

Il Cosmic no-hair theorem deriva, nel nome, dal corrispettivo teorema riguardante i buchi neri; in particolare, il teorema relativo ai buchi neri afferma che qualsiasi perturbazione riguardante un buco nero viene rapidamente smorzata e le uniche caratteristiche visibili restano la massa, la carica elettrica e il momento angolare; inoltre nessuna informazione concernente i processi fisici interni al buco nero può lasciare la superficie dello stesso. In letteratura ci si riferisce a tale insieme di caratteristiche tramite il teorema che «a black hole has no hair» ([11] Linde).

La "no-hair conjecture" fu introdotta da Hoyle e Narlikar nel 1962 ([10] Hoyle et al., 1962); asseriva che se una costante cosmologica esiste, ed è positiva, allora l'universo si espanderà tendendo ad una situazione di tipo de Sitter. Perciò se è presente una costante cosmologica positiva, indipendentemente dalle condizioni iniziali, l'universo diventerà omogeneo e isotropo ([12]). Tale congettura, nella formulazione originale, presentava delle ambiguità su cosa si intendesse per universo in espansione e comportamento di tipo de Sitter; tuttavia Wald ([13] Wald, 1983) diede una dimostrazione di una versione semplificata di tale congettura provando che: *tutti i modelli cosmologici di Bianchi*<sup>3</sup> (ad eccezione del IX), in presenza di una costante cosmologica positiva, tendono asintoticamente ad un comportamento di tipo de Sitter.

Generalizzando tale teorema si ha che ogni perturbazione sarà "dimenticata" dal sistema ad un tasso esponenziale ([11] Linde, 2005): dopo un tempo  $t \gg H^{-1}$ , l'universo diventerà localmente *indistinguibile* da uno spazio di de Sitter omogeneo e isotropo. D'altro canto a causa dell'esistenza di un orizzonte degli eventi, tutti i processi fisici in una data regione dello spazio di de Sitter sono indipendenti da tutti gli eventi che accadono a distanza maggiore di  $H^{-1}$ . Significa che le perturbazioni che escono dall'orizzonte, in uno spazio di de Sitter, vengono "stirate" in modo esponenziale a causa dell'espansione cosmologica. Inoltre, se la dimensione iniziale della regione

---

<sup>3</sup>Si stanno considerando modelli omogenei e isotropi in quanto motivati dalle osservazioni, tuttavia possono esserci anche modelli omogenei e non isotropi (o modelli disomogenei ed anisotropi) non escludibili a priori. In termini matematici deve esistere una simmetria che relazioni come l'universo appare ad un osservatore A con quello che si vede in un sistema di coordinate centrate su un osservatore B. Le possibili simmetrie possono essere classificate in classi chiamate *Bianchi type*; la costruzione dei modelli di Bianchi è basata sulla definizioni di vettori che soddisfano l'equazione di Killing ([7] Coles e Lucchin).

sottoposta ad inflazione supera la distanza dall'orizzonte ( $r > H^{-1}$ ) allora nessun evento al di fuori di tale regione può ostacolare il processo inflazionario in quanto nessuna informazione su tali eventi può raggiungere la regione iniziale. In quest'ottica si nota come il processo inflazionario dipenda dalle sue caratteristiche intrinseche piuttosto che dagli eventi nelle regioni vicine, facendo sì che quanto avviene al di fuori della regione sottoposta ad inflazione non abbia alcuna influenza.

## 2.4 Parametri di Slow-Roll

Si vogliono ora introdurre due parametri per caratterizzare il verificarsi o meno di una fase inflazionaria. Per fare ciò si ricaverà l'equazione generale che descrive la dinamica di un campo scalare in uno spaziotempo curvo, avvelendosi dell'equazione di Klein-Gordon. L'approssimazione usata nella trattazione che segue consiste nel trascurare le perturbazioni della metrica. L'equazione di Klein-Gordon è ottenibile dalla variazione dell'azione:

$$\frac{dS}{d\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \square\phi = \frac{\partial V}{\partial\phi}. \quad (2.16)$$

Prendendo la precedente equazione quale punto di partenza si procede calcolando l'operatore di D'Alambert in uno spaziotempo curvo, la cui espressione è la seguente :

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\right). \quad (2.17)$$

Serve ora l'espressione della metrica che descrive lo spaziotempo, nel nostro caso la metrica è quella di Friedmann-Robertson-Walker:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right], \quad (2.18)$$

riscrivibile in maniera compatta come  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ , in cui il valore del tensore metrico è pari a:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ar^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

A questo punto è possibile ricavare il valore di  $\sqrt{-g}$  calcolando il determinante della metrica:

$$\det|g_{\mu\nu}| = g = (-1)\left(\frac{a^6}{1-kr^2}r^4\sin^2\theta\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-g} = a^3\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad (2.19)$$

La precedente equazione si semplifica considerando che, a tempi primordiali, per una metrica di FRW  $k = 0$ ; inoltre, è possibile mettersi in un sistema di riferimento in cui  $\theta = \pi/2$  cosicché  $\frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}} \approx 1$  e quindi  $\sqrt{-g} \simeq a^3$ . A questo punto si hanno tutti gli elementi per calcolare il valore dell'operatore di D'Alambert del campo:

$$\begin{aligned} \square\phi &= \frac{1}{a^3} \partial_0 (a^3 g_{00} \partial_0 \phi) + \frac{1}{a^3} \partial_i (a^3 g^{ij} \partial_i \phi) \\ &= \frac{1}{a^3} \partial_0 (a^3 (-1) \partial_0 \phi) + \frac{1}{a^3} \left[ a^3 (\partial_i g^{ij}) \partial_i \phi + a^3 g^{ij} (\partial_i \partial_j \phi) \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

semplificabile considerando che:  $a = a(t)$  e quindi  $\partial_i a^3 = 0$  e che, nel cosiddetto *locally inertial frame*,  $\partial_i g^{\mu\nu} = 0$ . Tale sistema di riferimento garantisce la validità della seconda legge di Newton (la tri-accellerazione di una particella è nulla) ed è riferita ad uno specifico punto dello spaziotempo, utilizzabile tuttavia anche in un intorno del punto considerato sufficientemente piccolo da garantire una variazione trascurabile di  $g_{\mu\nu}$  e  $\partial_i g_{\mu\nu}$  [8]. Tramite le suddette semplificazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} \square\phi &= \frac{1}{a^3} (-3a^2 \dot{a} \partial_0 \phi - a^3 \partial_0^2 \phi) + \frac{1}{a^3} (a \nabla^2 \phi) \\ &= -3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} - \ddot{\phi} + \frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Perciò la forma generale dell'equazione che descrive l'evoluzione di un campo scalare in uno spaziotempo curvo è:

$$\square\phi = \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\phi}(\bar{x}, t) + 3H \dot{\phi}(\bar{x}, t) - \frac{\nabla^2 \phi(\bar{x}, t)}{a^2} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (2.22)$$

approssimazione che non tiene conto delle perturbazioni rispetto alla metrica. Per via dell'omogeneità e dell'isotropia dello spaziotempo di FRW supponiamo  $\phi(\bar{x}, t) = \phi(t)$  e dalla precedente 2.22 si ricava l'equazione di evoluzione per un campo scalare:

$$\ddot{\phi}(t) + 3H \dot{\phi}(t) = -\frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (2.23)$$

in cui il secondo termine corrisponde ad un fattore di frizione legato all'espandersi dell'universo (in uno spaziotempo di Minkowski tale termine è nullo) mentre a destra dell'uguale si trova una forza.

A partire dalla condizione 2.13 ci si aspetta che  $\ddot{\phi}$  sia trascurabile ossia che valga la condizione:

$$\ddot{\phi} \ll 3H \dot{\phi}, \quad (2.24)$$



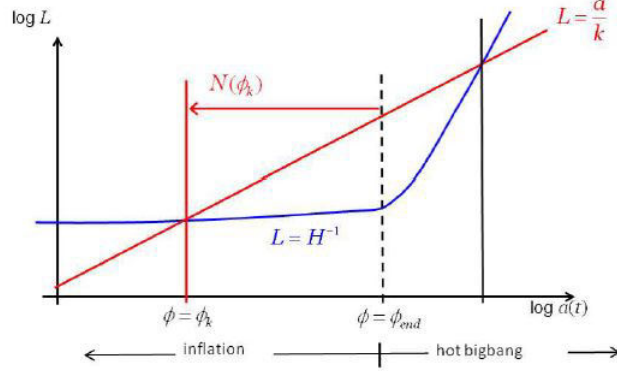


Figura 2.2: Definizione del numero di e-folds  $N(\phi)$ . Il raggio di Hubble  $L = H^{-1}$  e la lunghezza di scala  $L = a/k$  della lunghezza d'onda comovente  $k$  durante la fase inflazionaria ([15] Sasaki, 2012).

che inserita nell'equazione di Klein-Gordon 2.23 implica che:

$$\dot{\phi} = -\frac{V'(\phi)}{3H}. \quad (2.25)$$

Con tali approssimazioni è possibile combinare l'equazione di Klein-Gordon con la condizione 2.13 e ricavare il primo parametro di slow-roll  $\epsilon$  sia in funzione del parametro di Hubble che del potenziale ([14] Mishra, Sahni e Toporensky, 2018) :

$$\epsilon_H = 2m_p^2 \left( \frac{H'(\phi)}{H(\phi)} \right)^2 \quad (2.26)$$

$$\epsilon = \frac{m_p^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \quad (2.27)$$

Il secondo parametro di slow-roll  $\eta$  è ottenibile, combinando le precedenti equazioni, a partire dalla condizione 2.24 cosicché si abbia:

$$\eta_H = 2m_p^2 \frac{H''(\phi)}{H(\phi)} \quad (2.28)$$

$$\eta = \frac{m_p^2}{2} \frac{V''}{V} \quad (2.29)$$

Per valori piccoli dei parametri  $\epsilon_H \ll 1$ ,  $\eta_H \ll 1$  si trova che  $\epsilon_H \simeq \epsilon$  e  $\eta_H \simeq \eta - \epsilon$ . L'espressione per  $\eta_H$  vista in 2.26 può essere riscritta come  $\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2}$  in modo da quantificare la variazione del parametro di Hubble  $H$  durante l'inflazione ([16] Bartolo et al., 2004); in particolare:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\dot{H}}{H^2} = (1 - \epsilon)H^2, \quad (2.30)$$

che implica un'accelerazione dell'universo ( $\ddot{a} > 0$ ) quando  $\epsilon_H < 1$ . Dai parametri di slow-roll appena introdotti si evince lo stretto legame tra la dinamica dell'universo e il potenziale del campo scalare  $V(\phi)$  e quindi l'importanza di tali parametri che caratterizzano la fase primordiale dell'universo.

A conclusione del paragrafo si vuole introdurre un'altra quantità fondamentale per caratterizzare la dinamica inflazionaria e la comprensione della generazione delle perturbazioni primordiali durante l'inflazione: il raggio di Hubble  $R_H = H^{-1}$ . Il raggio di Hubble, chiamato anche orizzonte di Hubble, rappresenta la lunghezza caratteristica della scala oltre cui non è più possibile avere processi causali. L'importanza risiede nel fatto ([16] Bartolo et al., 2004) che durante l'inflazione l'orizzonte comovente di Hubble  $(aH)^{-1}$  decresce nel tempo (come conseguenza dell'incremento di  $a$  durante l'espansione quasi esponenziale), e il raggio di Hubble rimane quasi costante. Perciò una data lunghezza comovente  $L$  diventerà maggiore del raggio di Hubble e lascerà quindi l'orizzonte di Hubble (si veda figura 2.2) .

## 2.5 Numero e-folds e Spettro di Potenza

Si è detto in precedenza che l'inflazione è definita come un periodo in cui l'universo è sottoposto ad una fase di espansione accelerata. Tuttavia tale definizione non è esaustiva; un processo inflazionario che sia valido dovrà avere una durata sufficientemente lunga affinché i problemi dell'orizzonte e della piatezza vengano risolti. Per sufficientemente lunga si intende un periodo di espansione accelerata dell'universo abbastanza lungo da far sì che una piccola porzione regolare, di dimensioni minori del raggio di Hubble, possa crescere incorporando almeno tutto l'universo osservabile. Per tale motivo si vuole introdurre ora una quantità  $N$ , numero di e-folds, che caratterizza tale aspetto della dinamica inflazionaria. Un'importante proprietà dell'inflazione slow-roll è che l'equazione (2.25) è completamente integrabile in quanto  $H$  è in funzione di  $\phi$ ; in particolare c'è una corrispondenza uno a uno tra il campo  $\phi$  e il tempo  $t$ . Perciò anziché usare il tempo cosmico  $t$  è possibile misurare il tempo in termini del valore del campo scalare  $\phi$ . Detto ciò definiamo il numero di e-folds, guardando indietro nel tempo, come parametro che dà una misura di quanta inflazione c'è stata (cioè di quanto è variato il fattore di scala  $a$ ) a partire dalla fine dell'inflazione fino ad un'epoca durante l'inflazione ([14] Mishra, Sahni e Toporensky, 2018):

$$\frac{a(t_{end})}{a(t)} = \exp[N(t \rightarrow t_{end})] \implies N = \int_{t(i)}^{t_{end}} H dt = - \int_{\phi_e}^{\phi} \left( \frac{H}{\dot{\phi}} \right) d\phi. \quad (2.31)$$

Espresso tramite l'energia potenziale del campo, il numero di e-folds è ([17] Roest, 2014):

$$N = \int_{\phi_{end}}^{\phi_*} \frac{V}{V'} d\phi, \quad (2.32)$$

in cui l'intervallo è compreso da quando attraversa l'orizzonte  $\phi_*$  fino a che le condizioni di slow-roll sono violate,  $\phi_{end}$ . Un'importante proprietà che discende dalla definizione è che  $N$  non dipende da *come* e *quando* l'inflazione è cominciata:  $N$  è univocamente determinato in termini del valore del campo scalare (a meno di una costante che dipende dalla scelta dell'epoca da cui partire per calcolare  $N$ ); si può associare  $N$  col tempo in cui una data lunghezza d'onda comovente  $k$  attraversa il raggio di Hubble,  $k = aH$ , e in cui il campo scalare valeva  $\phi_k$  e  $N = N(\phi_k)$ . Dalle anisotropie della CMB si ha che la scala di interesse per la cosmologia corrisponde a  $N \approx 40 - 60$ .

Consideriamo ora le perturbazioni prodotte dall'inflazione che emergono dalle fluttuazioni quantistiche del campo inflazionario  $\phi$  sullo stato di vuoto. Il procedimento rigoroso prevede la quantizzazione del campo scalare; tuttavia sorge un'ambiguità sulla definizione dello stato di vuoto del sistema in quanto si ha un campo gravitazionale di fondo che varia col tempo (per via

dell'espansione dell'universo) andando così ad alterare lo stato di vuoto. Per scale piccole e tempi minori del tasso di espansione  $t \approx H^{-1}$  è come essere in un universo che non si espande (scelta di vuoto di Bunch - Davies) così da avere una metrica piatta che in una teoria di campo quantistica corrisponde ad operare con onde piane. Il processo di seconda quantizzazione consente di scrivere, una volta definito lo stato di vuoto, le fluttuazioni del campo scalare in termini degli operatori di distruzione e creazione:

$$\delta\hat{\phi}(\tau, x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} [u_k(\tau)a_k e^{ik \cdot x} + u_k^*(\tau)a_k^\dagger e^{-ik \cdot x}]. \quad (2.33)$$

I modi  $u_k(\tau)$  a corte distanze devono riprodurre la forma normale che si ottiene in una teoria di campo quantistica in uno spazio-tempo piatto. Perciò all'interno dell'orizzonte, nel limite  $\frac{k}{aH} \rightarrow \infty$ , i modi devono tendere ad onde piane:

$$u_k(\tau) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}. \quad (2.34)$$

Il risultato importante che emerge dalla seconda quantizzazione del campo scalare (per un'analisi dettagliata si veda [16]) è che le fluttuazioni del campo scalare  $\delta\phi_k \equiv u_k/a$ , nel caso in cui non sia massivo, dipendono dal parametro di slow-roll introdotto in precedenza (si veda sezione 2.4):

$$|\delta\phi_k| = \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left( \frac{k}{aH} \right)^{\frac{3}{2}-\nu} \quad (2.35)$$

$$\frac{3}{2} - \nu = -\epsilon \quad (2.36)$$

cioè le fluttuazioni quantistiche del campo si portano una traccia, una segnatura, dell'inflazione tramite il parametro di slow-roll  $\epsilon$ . Nel caso in cui il campo scalare  $\phi$  sia massivo l'esponente dipende da entrambi i parametri di slow-roll:

$$\nu \simeq \frac{3}{2} + 3\epsilon - \eta. \quad (2.37)$$

Perciò le sue fluttuazioni quantistiche del campo scalare  $\phi$ , originariamente generate su scale subhorizon, vengono gravitazionalmente amplificate e stirate su scale superhorizon a causa dell'espansione dell'universo durante l'inflazione. Notiamo che le fluttuazioni del campo scalare possono essere generate su scale superhorizon solamente se il campo è leggero; si può dimostrare infatti che per campi scalari massivi  $m_x > 3/2H$  le fluttuazioni del campo restano sullo stato di vuoto e non producono perturbazioni su scale cosmologiche significative.

Si introduce ora una quantità, chiamata *spettro di potenza*  $\mathcal{P}(k)$ , utile per caratterizzare le proprietà delle perturbazioni del campo così da avere un

osservabile che tenga conto dell'ampiezza delle perturbazioni al variare della scala  $k$ . Considerando ora un campo random  $\delta$ , la sua espansione in Fourier è:

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ikx} \hat{\delta}(k) d^3k, \quad (2.38)$$

da cui possiamo definire lo spettro di potenza per mezzo della funzione di correlazione a due punti :

$$\langle \hat{\delta}(\mathbf{k})^* \hat{\delta}(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathcal{P}(k), \quad (2.39)$$

in cui  $\mathcal{P}(k)$  è lo spettro di potenza, che dipende solo dal modulo di  $k$  (isotropia dello spazio, cioè invarianza per rotazioni) e la  $\delta$  a destra è la delta di Dirac che assicura l'omogeneità dello spazio (invarianza traslazioni); lo spettro di potenza perciò non è altro che la trasformata di Fourier della funzione di correlazione a due punti. Tale definizione dello spettro di potenza è quella classica usata in letteratura. Tuttavia si è soliti usare un'altra definizione per lo spettro di potenza, data da  $P(k)$ , legata alla precedente  $\mathcal{P}(k)$  tramite la relazione:

$$P(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \mathcal{P}(k), \quad (2.40)$$

in tal caso  $P(k)$  rappresenta il contributo alla varianza per unità di intervallo logaritmico nella lunghezza d'onda  $k$ . Nel caso in considerazione, per una campo scalare si può valutare lo spettro di potenza ottenendo la relazione:

$$P(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \mathcal{P}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta\phi_k|^2 = \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu}, \quad (2.41)$$

in cui l'esponente, in base alla 2.35, dipende dai parametri di slow-roll. Si può ora definire l'*indice spettrale*,  $n_s$ , dello spettro di potenza delle perturbazioni scalari in modo da descrivere la dipendenza dello spettro dalle scale cosmologiche:

$$n_s - 1 = \frac{d \ln P(k)}{d \ln k}, \quad (2.42)$$

da cui è chiaro che  $n_s = n_s(k)$  dipende dalla scala  $k$ . Nel caso in cui  $n_s \equiv 1$  si ha il cosiddetto spettro di Harrison - Zel'dovich a significare che l'ampiezza delle perturbazioni resta costante indipendentemente dalla scala considerata. Storicamente l'ampiezza delle fluttuazioni veniva considerata indipendente dalla scala considerata (Harrison - Zel'dovich), Matarrese e Lucchin mostrarono ([18]) che l'invarianza dalla scala era solo approssimata.

Considerando le perturbazioni della metrica, la teoria inflazionaria prevede una deviazione dallo spettro di Harrison - Zel'dovich in quanto:

$$n_s - 1 = 3 - 2\nu = 2\eta - 6\epsilon, \quad (2.43)$$

deviazione dal valore unitario che sarà minima in quanto dipendente dai parametri di slow-roll. Il satellite Planck ha misurato le fluttuazioni in temperatura della CMB con una sorprendente precisione, ottenendo il seguente valore dell'indice spettrale per le fluttuazioni primordiali ([5], Planck Collaboration et al., 2018):

$$n_s = 0.9603 \pm 0.0073, \quad (2.44)$$

stabilendo quindi la presenza di una deviazione dallo spettro scale-invariant dato da Harrison - Zel'dovich, con una sicurezza di  $5\sigma$ . Le oscillazioni quantistiche di  $\phi$  generano anche un fondo stocastico di onde gravitazionali il cui spettro e ampiezza dipendono da una combinazione dei parametri di slow-roll. L'ampiezza relativa delle onde gravitazionali e delle perturbazioni scalari dipende inoltre dalla forma del potenziale. Quindi una trattazione analoga per le onde gravitazionali primordiali da inflazione consente di definire *l'indice spettrale tensoriale* come:

$$n_T = \frac{d \ln P_T(k)}{d \ln k} = -2\epsilon, \quad (2.45)$$

in cui:

$$P_T(k) = \frac{8H^2}{\pi M_{PL}^2} \left( \frac{k}{aH} \right)^{-2\epsilon}, \quad (2.46)$$

per quanto visto in precedenza ne consegue che  $P_T(k) \approx V(\phi)/m_{PL}^4$  dipende dalla sola dinamica di background: l'ampiezza delle onde gravitazionali da inflazione dipende dal potenziale  $V(\phi)$  cioè dalla scala di energia a cui si verifica l'inflazione,  $E_{inf} = V^{1/4}$ . La somma delle ampiezze scalari e tensoriali determina gli osservabili misurabili, pertanto è conveniente definire la quantità  $r$  come rapporto tra ampiezza tensoriale su scalare:

$$r = \frac{P_T(k)}{\mathcal{P}(k)} = 16\epsilon, \quad (2.47)$$

di nuovo si è presente la dipendenza di un osservabile da un parametro di slow-roll e quindi dal modello inflazionario considerato. Ricapitolando, i due osservabili cosmologici fondamentali legati ai parametri di slow-roll e perciò alla teoria inflazionaria sono:

$$n_s = 1 + 2\nu - 6\epsilon, \quad r = 16\epsilon. \quad (2.48)$$

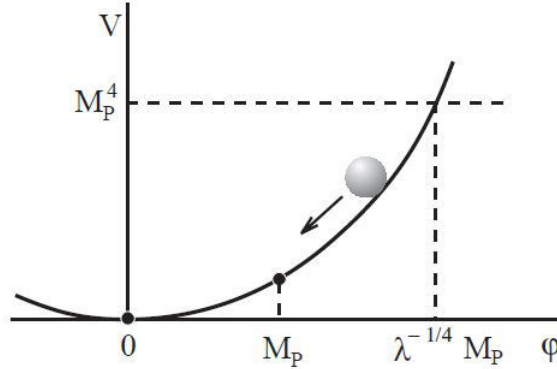


Figura 2.3: Esempio di potenziale per il modello di inflazione caotica ([11]).

## 2.6 Modelli Inflazione a Campo Grande e Piccolo

Vengono ora introdotti brevemente due importanti modelli nel formalismo classico del paradigma slow-roll così da poterli confrontare con la trattazione del prossimo capitolo.

### 2.6.1 Chaotic Inflation

Uno dei modelli più famosi è il *chaotic inflation* ([19] Linde, 1983)) che appartiene alla categoria dei modelli a campo grande. Si è detto che un potenziale sufficientemente piatto permette di instaurare una situazione di tipo inflazionaria; l'idea alla base di questo modello è che, al di là della forma effettiva del potenziale, una regione dell'Universo in cui il campo  $\phi$  è grande, uniforme e statico condurrà automaticamente ad una dinamica inflazionaria. In particolare, quando  $\phi > M_P$  il potenziale è abbastanza piatto da soddisfare le condizioni per avere inflazione. Tale richiesta è soddisfatta per tutti i potenziali con le seguente legge di potenza ([11] Linde):

$$V(\phi) = \frac{\lambda \phi^n}{n M_P^{n-4}}, \quad (2.49)$$

con  $n > 0$  e  $0 < \lambda < 1$  (si veda ad esempio la figura 2.3). La peculiarità di tale modello è che, rispetto al modello originale di Guth ([6]), non è richiesta alcuna transizione di fase per instaurare un processo inflazionario: ci sono tante diversi domini, con valori differenti di  $\phi$ , in cui si realizza l'inflazione senza la necessità di dover assumere uno stato di equilibrio termodinamico tra il campo e la radiazione (evitando anche il problema di un valore innaturalmente piccolo della costante di accoppiamento).

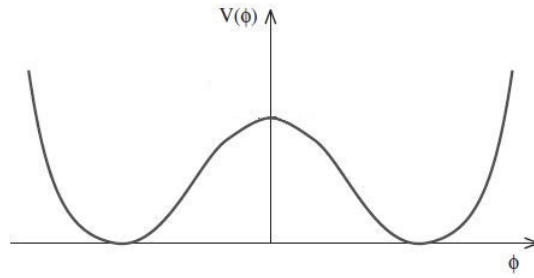


Figura 2.4: Esempio di potenziale per il modello Hilltop ([8]).

Nella prospettiva dell'inflazione caotica si assume che a qualche tempo iniziale, appena dopo il tempo di Planck, il campo  $\phi$  vari da zona a zona in maniera arbitraria: se una regione soddisfa le condizioni menzionate in precedenza allora si innescherà l'inflazione, andando in tal caso a contenere l'intero universo osservabile. Alla fine del processo di inflazione caotica si avrà una zona, cioè l'universo osservabile, omogenea e localmente piatta, mentre su scale superiori, oltre l'orizzonte, l'universo sarà fortemente curvo e inhomogeneo ([7]). È importante notare che tale modello non menziona né teorie di GUT né supersimmetria: il campo  $\phi$  che descrive l'inflazione caotica è scollegato dal resto della fisica.

### 2.6.2 Hilltop Inflation

Una dinamica differente è data dal modello a campo piccolo denominato, per la forma del potenziale, *Hilltop Inflation* ([20] Linde, 1982), che si incentra sul comportamento del campo in un intorno del massimo del potenziale. Impostando il valore del campo nel massimo del potenziale come  $\phi = 0$ , il potenziale assume la seguente forma generale:

$$V = V_0 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \dots \equiv V_0\left[1 + \frac{1}{2}\eta_0\frac{\phi^2}{M_P^2} + \dots\right], \quad (2.50)$$

in cui  $\eta_0 \equiv -m^2M_P^2/V_0$  è il valore di  $\eta$  nel massimo. I puntini indicano contributi addizionali rilevanti nel minimo, nel valore di aspettazione sul vuoto del campo. Nel minimo  $V = 0$ . Tale potenziale realizza un'inflazione di tipo slow-roll vicino al massimo se  $|\eta| \ll 1$  e l'inflazione prosegue finché il potenziale è sufficientemente piatto, nonostante altri termini possono esser diventati rilevanti. L'inflazione termina quando le condizioni di slow-roll non sono più soddisfatte, dopodiché il campo  $\phi$  oscilla intorno al suo valore di aspettazione su vuoto (Figura 2.4).

Il massimo  $\phi = 0$  non è necessariamente un punto fisso della simmetria interna ed è stato scelto per convenienza come origine; se  $\phi = 0$  è un punto



fisso della simmetria allora la massa del tachione  $m^4$ , caratterizzata da  $\eta_0 < 0$  (cioè il valore di  $\eta$  nel massimo), conduce ad una rottura spontanea di simmetria. Modelli di questo genere vengono chiamati di nuova inflazione. I vantaggi dello scenario Hilltop consistono nell'aver condizioni di slow-roll realizzabili con più semplicità: la prima condizione segue direttamente dal fatto che l'inflazione inizia al di fuori del massimo locale del potenziale, mentre la seconda condizione diventa meno restrittiva  $|\eta| < 6$  portando al cosiddetto fast-roll inflation ([22]). Questo permette di avere inflazione con valori più naturali di  $\eta$ . Soprattutto il modello Hilltop viene incorporato con naturalezza all'interno dello scenario denominato *eternal inflation*, rendendo la questione sulle condizioni iniziali, che rappresenta un problema per molti modelli, irrilevante ([23] Boubekur e Lyth, 2005).

---

<sup>4</sup> La possibilità di avere particelle superluminali è stata discussa per la prima volta da Sudarshan nel 1962 ([21] Bilaniuk, Deshpande e Sudarshan 1962) nell'ambito della Relatività Speciale; considerando l'equazione della Relatività che lega momento, energia e massa di una particella  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ , se la massa  $m^2$  fosse negativa allora  $E^2 < p^2c^2$  e quindi  $\beta = pc/E > 1$ , cioè una particella avente massa a riposo immaginaria possiede una velocità maggiore della velocità della luce.

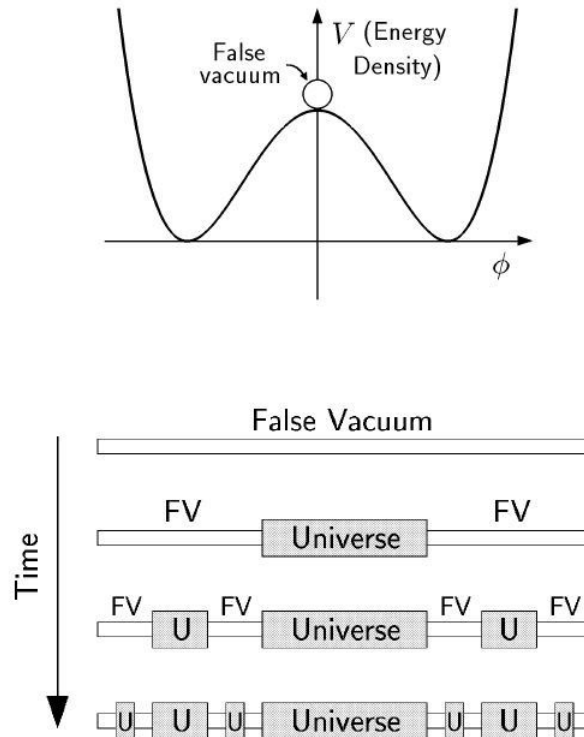


Figura 2.5: In alto esempio di potenziale per il modello *Eternal Inflation*; in basso la rappresentazione intuitiva del processo di inflazione eterna ([25]).

### 2.6.3 Eternal Inflation

Nella trattazione classica dell'inflazione, come nei modelli precedentemente analizzati, si è implicitamente assunto che la dinamica slow-roll dominasse sulle fluttuazioni quantistiche. Se invece si assume che siano le fluttuazioni quantistiche ad essere dominanti allora si ha la cosiddetta *eternal inflation*. Uno studio approfondito, per esempio [24], mostra che le fluttuazioni del vuoto dominano in un intervallo in cui  $\Delta\phi \gg H/2\pi$  cosicché:

$$\frac{V^3}{2\pi^2 M_P^6 (V')^2} > 1, \quad (2.51)$$

in una regione di questo tipo le fluttuazioni del vuoto superano il moto classico per un tempo indefinitamente lungo portando alla cosiddetta eternal inflation: una volta innescata l'inflazione all'interno di una regione, essa crea un volume indefinibilmente grande. Si ritiene che l'inflazione osservabile sia preceduta da un'inflazione eterna ([8]).

In pratica il campo starebbe in uno stato di falso vuoto (Figura 2.5), stato metastabile, il cui decadimento è un processo di tipo esponenziale, analoga-

mente al decadimento radioattivo, ma con la differenza che lo stato di falso vuoto si espande in maniera esponenziale durante il decadimento. In tal modo lo stato di falso vuoto, nonostante decada, non sparisce mai: una volta che l'inflazione comincia continua a crescere in maniera esponenziale nel tempo, all'infinito. Tale evoluzione è rappresentata idealmente nel figura 2.5 in basso: partendo da uno stato di falso vuoto la dinamica di slow-roll del campo  $\phi$  conduce ad un big bang locale (sezione grigia della figura con la scritta Universe), nel frattempo, a causa dell'espansione esponenziale durante il decadimento, si generano altre due zone con uno stato metastabile di falso vuoto cosicché il processo si ripeta. Da notare che nella rappresentazione grafica per forza di cose si è dovuto omettere l'incremento delle dimensioni tra un livello e l'altro. Tale dinamica si ripeterà all'infinito, generando una struttura simil frattale dell'universo di modo che, come risultato, si avrebbe un numero infinito di universi locali (in grigio nella figura). Il modello eternal inflation rientra con naturalezza all'interno della fisica delle stringhe, in quanto processo che genera infiniti universi, ognuno con un valore arbitrario delle costanti di accoppiamento, rendendo di fatto superfluo il problema del valore innaturalmente piccolo della costante cosmologica, così come la visione antropica<sup>5</sup>. Tuttavia il termine eterno si riferisce più al futuro che non al passato ([25]): una volta instaurata l'inflazione il processo si ripete all'infinito. Resterebbe quindi la questione riguardo le condizioni iniziali da cui scaturirebbe l'inflazione.

Nel 1993 Borde e Vilenkin ([26]) dimostrarono un teorema per cui, sotto assunzioni plausibili, qualsiasi modello di inflazione eterna sarebbe cominciato con una singolarità iniziale. Tuttavia, nel 1997, gli stessi autori notarono che una delle loro precedenti assunzioni, benché valida a livello classico, veniva violata a livello quantistico concludendo quindi che la loro precedente dimostrazione non si poteva applicare in questi casi. In tal modo aprirono alla possibilità di creare modelli che non necessitano di un inizio. Purtroppo la questione riguardo le condizioni iniziali restò di interesse, tanto che gli autori del precedente teorema, insieme al padre dell'inflazione Guth, mostrano, con argomentazioni cinematiche, che i modelli cosmologici inflazionari hanno geodetiche di tipo null e time-like incomplete nel passato ([27], Borde, Guth e Vilenkin, 2003). Gli autori concludono l'articolo dichiarando che l'inflazione, da sola, *non è sufficiente a fornire una descrizione completa dell'Universo*. E' necessario perciò trovare una nuova fisica per poter ricavare le corrette condizioni al contorno ([28]).

---

<sup>5</sup> Il Principio Antropico afferma che le cose che vediamo sono così in quanto se fossero diverse la vita come la conosciamo non esisterebbe. In particolare nella forma debole afferma che la misura di specifici parametri cosmologici può essere solo quella compatibile con l'esistenza di osservatori. E' interessante in quanto, dopo secoli dalla Rivoluzione Copernicana, ritorna il tema dell'uomo al centro dell'Universo; rimane tuttavia di interesse la citazione di Kolb e Turner "It is unclear to one of the authors how a concept so lame [as the anthropic principle] could have been elevated to a status of the principle."

## 2.7 Domande Aperte Riguardanti l'Inflazione

L'inflazione, attualmente, è il principale paradigma della cosmologia dell'Universo primordiale. L'esistenza di un periodo inflazionario comporta una riduzione della curvatura spaziale ed un aumento del particle horizon, il che risolve i problemi dell'orizzonte e della piatezza (come affrontato al paragrafo 1.4.3). Inoltre, cosa più importante, il paradigma inflazionario fornisce una teoria predittiva per le perturbazioni cosmologiche primordiali ([29]), generando uno spettro di potenza quasi scale-invariant che si è potuto osservare tramite esperimenti cosmologici (come il satellite COBE e Planck).

Nonostante questi successi restano varie questioni aperte, se non problemi, relative alla cosmologia inflazionaria. Per esempio il già accennato (paragrafo 2.6.3) problema dello spazio-tempo incompleto nel passato ([27]), la possibilità di avere una singolarità iniziale ([26]), come anche il problema delle fluttuazioni cosmologiche trans-Planckiane ([30]): le fluttuazioni da inflazione potrebbero essere generate in una regione super-Planckiana in cui la fisica fin qui applicata non è più valida. Un'altra problematica riguarda le condizioni affinché si insaturi un processo inflazionario: un universo pre-inflazione è vincolato ad avere caratteristiche ben specifiche introducendo così delle condizioni iniziali da rispettare (per un review esaustiva sul tema delle condizioni iniziali si veda [31]).

Tuttavia le questioni insolte fin qui riportate non implicano un fallimento del paradigma inflazionario, infatti per ognuna delle sopracitate problematiche sono state proposte varie soluzioni all'interno dello stesso paradigma. Tali questioni aperte suggeriscono che l'inflazione non sia una teoria completa di per sè ma che vada aggiunto un pezzo, come riportato dallo stesso Guth in un articolo sulle implicazioni dell'inflazione eterna ([32]): «*concluding that under mild assumptions the inflating region must have a past boundary, and that new physics (other than inflation) is needed to describe what happens at this boundary.*». Ciò che si può attualmente inferire dai dati osservativi di Planck si riferisce alla parte finale della dinamica inflazionaria mentre sulla fase iniziale non si è in grado di dire molto; approcciandosi alle primissime fasi dell'universo sembra inevitabile il dover includere una teoria quantistica della gravità in grado di fornire una descrizione completa dell'universo primordiale. Per tale motivo la cosmologia moderna consta di un sempre maggior arricchimento di teorie inerenti l'ambito della cosmologia quantistica: a partire dall'analogo del fenomeno quantistico del tunneling, in fisica delle particelle, in cui l'universo emerge letteralmente dal *nulla* per poi seguire lo scenario inflazionario ([33]), fino ad arrivare a toy-model che ricreano l'origine dell'universo senza l'inflazione ([34]).

## Capitolo 3

# Classi Universali di Inflazione

L'inflazione rappresenta un punto di svolta nella Cosmologia dell'universo primordiale; con lo sviluppo tecnologico si ha avuto a disposizione, negli ultimi anni, un numero crescente di dati così da consentire una comprensione migliore di questo periodo. La sempre maggiore accuratezza nei dati permette infatti di discernere tra un modello piuttosto che un altro. Nel tempo ci si è focalizzati sul costruire modelli inflazionari a partire dalla forma del potenziale in base a motivazioni di carattere fenomenologico o in base a principi teorici (teoria di stringhe, supersimmetria). Così facendo ci si è ritrovati ad avere un ventaglio di differenti classi di modelli inflazionari accumulati dallo stesso meccanismo fisico sottostante (slow-roll, k-inflation ecc.), con potenziali diversi tra loro ma che tuttavia conducevano a scenari simili. Il motivo è che le principali caratteristiche dell'inflazione, come l'essere quasi scale-invariant e lo spettro di potenza, dipendono da pochi dettagli del potenziale inflazionario. Dal momento che l'inflazione prevede una deviazione dell'indice spettrale dall'unità, congiuntamente al valore misurato dello stesso (si veda 2.44), è stato possibile escludere vari modelli le cui predizioni di tali valori non erano coerenti con quanto misurato. Il fatto che differenti modelli inflazionari portino alla medesima descrizione sembra suggerire che sia possibile, sotto certe assunzioni, classificare tali modelli in classi universali, raggruppandoli quindi in un numero limitato di classi aventi specifiche caratteristiche. Ad esempio, Mukhanov ([35]) ha provato a catalogare i modelli inflazionari assumendo che l'energia durante l'inflazione sia dominata dal potenziale e discriminandoli in base ai due parametri,  $\alpha$  e  $\beta$ , definiti parametrizzando l'equazione di stato:

$$\frac{(p + \rho)}{\rho} \sim \frac{\beta}{(N + 1)^\alpha}. \quad (3.1)$$

In tal modo ha mostrato che la maggior parte degli scenari inflazionari possono essere parametrizzati tramite due parametri,  $\alpha$  e  $\beta$ , da cui poi è riuscito a ricavare i vincoli sulla deviazione dell'indice spettrale dall'unità così come un limite inferiore sulla quantità di onde gravitazionali prodotte.

Si intraprenderà perciò la strada della classificazione degli scenari inflazionari in classi universali, cominciando da un approccio classico al paradigma slow-roll (sezione 3.1) per poi arrivare alla trattazione di Salopek - Bond ([36] Salopek e Bond, 1990) tramite il formalismo di Hamilton-Jacobi. Prima di addentrarsi nella trattazione delle classi universali verrà fatto un breve excursus (sezione 1.5) sugli attuali vincoli osservati dei parametri cosmologici introdotti e trattati fino ad ora.

### 3.1 Slow-Roll a Singolo Campo - Espansione 1/N

Si vuole mostrare come sia possibile classificare tutti i modelli inflazionari slow-roll a campo scalare singolo, in modo tale da racchiuderli in due classi universali caratterizzate da un unico parametro. Queste due classi comprenderanno i modelli a campo grande grande e piccolo. Per far ciò si considereranno i modelli in cui i parametri di slow-roll scalano come  $1/N$  nel limite di un numero grande di e-folds  $N$ . Gli osservabili cosmologici riflettono la proprietà dei modelli di inflazione in corrispondenza a quando le perturbazioni attraversano l'orizzonte a 50-60 e-folds prima della fine dell'inflazione. Considerando i modelli standard di inflazione a singolo campo slow-roll, la lagrangiana del campo scalare è:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (3.2)$$

mentre per i due parametri di slow-roll si veda la definizione nell'equazione 2.28. Vengono qui considerati tutti i modelli slow-roll a campo singolo che portano ad una deviazione dell'indice spettrale dall'unità (cioè dall'essere scale-invariant) che scala con  $1/N$ . L'assunzione centrale qui è che entrambi i parametri di slow-roll  $\epsilon$  e  $\eta$  abbiano una dipendenza asintotica, di tipo legge di potenza, dal numero di e-folds ([17], Roest): in particolare entrambi scalano come  $1/N^p$  per  $p$  all'ordine dominante nel limite di  $N$  grande. In base ai risultati ottenuti da Planck ([5]) si assuma  $p = 1$  per almeno uno dei due parametri di slow-roll. Tale dipendenza corrisponde, trascurando i termini di ordine superiore in  $N$ , a:

$$\epsilon \simeq \frac{\epsilon_1}{N}, \quad \eta \simeq \frac{\eta_1}{N}, \quad (3.3)$$

dove  $\epsilon_1$  e  $\eta_1$  si assumono non nulli. Prendendo l'espansione del parametro di slow-roll  $\eta$  si ha l'identità approssimata:

$$\left. \frac{V''}{V} \right|_{\phi_*} \simeq \frac{\eta_1}{\int_{\phi_{end}}^{\phi_*} \frac{V'}{V}}, \quad (3.4)$$

valutata all'uscita dall'orizzonte  $\phi_*(N)$ . Entrambi i membri della precedente identità hanno la stessa dipendenza al primo ordine da  $\phi_*$  valida per valori di  $\phi_*(N)$  corrispondenti ad un valore grande di  $N$ . Considerando solamente il contributo dei termini al primo ordine, la precedente diventa la seguente identità funzionale:

$$\frac{V''}{V} \simeq \frac{\eta_1}{\int \frac{V'}{V}}, \quad (3.5)$$

che può essere riscritta come:

$$\int \frac{V}{V'} \simeq \frac{\eta_1 V}{V''}, \quad (3.6)$$

differenziandola si arriva ad ottenere:

$$\frac{(V^{-\eta_1} V')'}{V^{\eta_1} V'} \simeq \frac{(V''^{-\eta_1})'}{(V'')^{-\eta_1}}, \quad (3.7)$$

ambidue il lati della precedente equazione possono essere integrati:

$$\log(V^{-\eta_1} V') \simeq \log(V''^{-\eta_1}) + c, \quad (3.8)$$

in cui  $c$  è una costante di integrazione. Facendo l'esponenziale della precedente si arriva ad ottenere:

$$V' \simeq \lambda \left( \frac{V''}{V} \right)^{-\eta_1}, \quad (3.9)$$

in cui  $\lambda$  deriva dalla precedente costante di integrazione. Sostituendo nella precedente equazione (3.9) la definizione di  $\eta$  data da (2.28) e scrivendo la derivata del potenziale in funzione di  $\epsilon$  (invertendo la 2.28), si ricava la relazione asintotica (valida per grandi valori di  $N$ ):

$$\epsilon^{1/2} \eta^{\eta_1} \simeq \frac{\lambda}{V}, \quad (\eta_1 \neq 0), \quad (3.10)$$

e analogamente per il primo parametro di slow-roll:

$$\epsilon^{2\epsilon_1} \simeq \frac{\lambda}{V}, \quad (\epsilon \neq 0). \quad (3.11)$$

Le due relazioni asintotiche appena ricavate descrivono il comportamento asintotico dei parametri di slow-roll.

**Classificazione** In base ai risultati di Planck ([5]) si assume che almeno uno dei due coefficienti tra  $\eta_1$  e  $\epsilon_1$  delle precedenti equazioni (3.10) e (3.11) sia non nullo, cosicché si abbiano tre casi possibili. Primo caso: assumiamo  $\epsilon_1$  nullo mentre  $\eta_1$  no. In tal caso il potenziale scalare tende asintoticamente ad una costante; si trovano così le relazioni per la deviazione dell'indice spettrale e il rapporto tra perturbazioni scalari e tensoriali appartenenti alla *prima* classe universale:

$$n_s \simeq 1 + \frac{2\eta_1}{N}, \quad r \sim \frac{1}{N^{-2\eta_1}}. \quad (3.12)$$

Dato che l'indice spettrale  $n_s$  sappiamo valere poco meno di uno, congiuntamente alla relazione lineare  $\eta_1 = 2\epsilon_1 - 1/2$ , l'assunzione  $\epsilon_1 = 0$  comporta il restringere i possibili valori di  $\eta_1$  come  $\eta_1 < -1/2$ . In questo caso  $r$  scala più velocemente dell'assunzione iniziale  $1/N$ . Alla prima classe di universalità



appartiene il modello a campo piccolo, visto al paragrafo 2.6, denominato hilltop inflation ([23]): data la seguente forma del suo potenziale scalare:

$$V = V_0(1 - (\phi/\mu)^n), \quad (3.13)$$

soddisfa la 3.12 con  $\eta_1 = -(n-1)/(n-2)$  per  $n > 2$ .

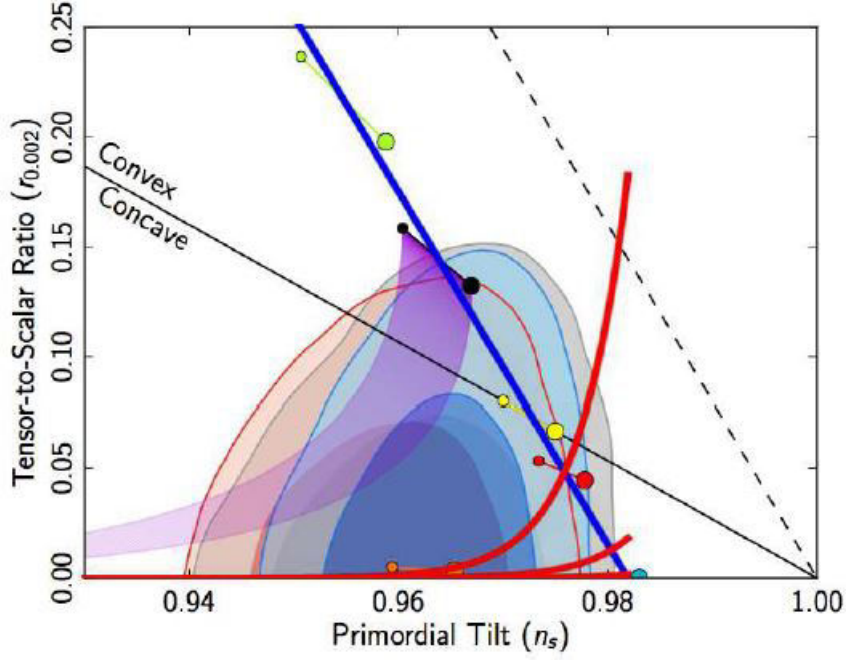


Figura 3.1: *Predizioni inflazionarie per la prima classe universale (le tre linee in rosso, una per ciascun valore della costante di proporzionalità di  $r$  pari a 0.1, 1, 10) e per la seconda (linea blu) imponendo  $N = 55$  ai dati di Planck ([17]).*

Secondo caso: si considerano entrambi i parametri non nulli. Applicando entrambe le relazioni asintotiche viste in precedenza si ricava l'espressione lineare che collega entrambi i parametri:

$$\eta_1 = 2\epsilon_1 - \frac{1}{2}, \quad (3.14)$$

in questo secondo caso si trovano le seguenti relazioni per gli osservabili cosmologici che appartengono alla *seconda* classe universale:

$$n_s \simeq 1 - \frac{2\epsilon_1 + 1}{N} \quad r \simeq \frac{16\epsilon_1}{N}, \quad (3.15)$$

in cui  $\epsilon_1$  deve essere positivo e diverso da  $1/4$ . A differenza della prima classe universale, qui il rapporto tra scalari e tensori  $r$  scala proprio come  $1/N$ . Appartiene a questa seconda classe di universalità il modello a campo grande di inflazione caotica ([37] Linde) visto al paragrafo 2.6, la cui predizione dei parametri porta a  $\epsilon_1 = n/2$ .

Terzo caso:  $\eta_1$  nullo mentre  $\epsilon_1$  non nullo. In questo caso la relazione lineare tra i parametri (equazione (3.14)) implica che se  $\eta_1 = 0$  allora  $\epsilon_1 = 1/4$  ma per quanto visto nel secondo caso  $\epsilon_1$  non può assumere tale valore.

Assumendo valida l'espansione (3.3) allora tutti i modelli di inflazione slow-roll a campo singolo rientrano nelle due classi universali appena ricavate ([17]), ivi compresi tutti i modelli con espansione  $1/N$  riportati nell'enciclopedia survey dei modelli infalzionari ([38] Martin, Ringeval e Vennin). In particolare, il contributo dominante sarà sempre in una delle forme data da 3.12 oppure 3.15 e l'indice spettrale non potrà essere costante ma avrà almeno una deviazione dall'unità dell'ordine di  $-1/N$ .

Per la prima classe universale si ha che il rapporto scalari su tensori  $r$  ha un limite di valori troppo stringente,  $r < 0.01$ , non osservabile mentre per la seconda classe  $r \approx 0.07$  ([17]) che è abbastanza vicino al limite osservativo di  $r < 0.11$  (si veda Figura 3.1). Futuri miglioramenti sui dati di Planck potrebbero permettere di ridurre la barra d'errore su  $r$  così da arrivare a distinguere tra le due classi.

## 3.2 Formalismo Hamilton - Jacobi

### 3.2.1 Motivazione all'approccio di Salopek e Bond

Si vuole ora mostrare come sia possibile, tramite il formalismo di Hamilton - Jacobi sviluppato da Salopek e Bond ([36]), costruire classi di universalità per i modelli inflazionari a campo singolo sfruttando una proprietà fondamentale dell'inflazione che, sebbene approssimata, è sempre presente: l'essere scale-invariant. In particolare, tramite l'approccio di Salopek e Bond ([36]) definendo un superpotenziale  $W(\phi)$  si arriverà ad ottenere un'equazione del tutto analoga, in forma, all'equazione del Gruppo di Rinormalizzazione RG; in tal modo sarà possibile definire la  $\beta$ -function in termini del superpotenziale  $W(\phi)$  e mostrare quindi che l'evoluzione cosmologica del campo scalare in un potenziale è ottenibile a partire dall'equazione del Gruppo di Rinormalizzazione<sup>1</sup>. Ciò permette di discutere lo scenario standard di inflazione in termini di un'evoluzione lenta di un sistema che si avvicina, o si discosta, da un punto fisso critico. In questo contesto l'universalità dei modelli inflazionari trova giustificazione, o è dovuta, alla trattazione che sfrutta il metodo del RG (per una motivazione dettagliata sui pregi dell'uso del Gruppo di Rinormalizzazione si veda [40] Weinberg<sup>2</sup>). Il metodo del Gruppo di Rinormalizzazione RG sposta il problema dello studio di un sistema in un ampio intervallo temporale allo studio delle iterazioni a tempo fisso, il tutto seguito da una trasformazione della scala; le soluzioni scale-invariant emergono come punti fissi della mappa RG e l'analisi sulla stabilità del sistema diventa un'analisi sulla stabilità al punto fisso ([41]).

Si noti che all'interno di tale perimetro si inserisce con naturalezza la descrizione Olografica dell'universo ([42], McFadden e Skenderis), come si descriverà brevemente nella sezione 3.5. La teoria olografica asserisce che qualsiasi teoria di gravità quantistica in  $(d+1)$  dimensioni debba avere una descrizione duale in termini di una teoria di campo quantistica (QFT) senza la gravità in  $d$  dimensioni ([43] 't Hooft, 1993). Secondo tale visione, una delle macroscopiche dimensioni dello spaziotempo e una delle forze dell'universo, come la gravità, sarebbero fenomeni emergenti da una sottostante teoria di campo quantistica ([44]). L'approccio olografico permette di descrivere un universo inflazionario quadridimensionale a campo scalare singolo, riproducendo i

---

<sup>1</sup>Storicamente l'importanza del Gruppo di Rinormalizzazione si evidenziò a partire dall'articolo di Gell-Mann e Low ([39] Gell-Mann e Low 1954) riguardante l'elettrodinamica quantistica (QED) su scale piccole e il fatto che su tali scale la massa e la carica dell'elettrone vadano riscalate, rinormalizzate, così da poter evitare singolarità.

<sup>2</sup>« You are arranging the theory in such a way that only the right degrees of freedom, the ones that are really relevant to you, are appearing in your equations. I think that this is in the end what the renormalization group is all about. It's a way of satisfying the Third Law of Progress in Theoretical Physics, which is that you may use any degrees of freedom you like to describe a physical system, but if you use the wrong ones, you'll be sorry. [40] »

risultati inflazionari, e mostrare come gli osservabili cosmologici siano incorporati nella funzione di correlazione di una teoria di campo tridimensionale (un accenno storico verrà fatto al paragrafo 3.5).

### 3.2.2 Formalismo Hamilton- Jacobi per Inflazione Slow-Roll

Ci si appresta ora a sviluppare il formalismo di Hamilton-Jacobi tramite l'approccio di Salopek e Bond ([36]) seguendo la trattazione sviluppata da Binétruy et al. ([1]). Nonostante tale articolo si focalizzasse sulla dinamica delle perturbazioni generate dalle fluttuazioni quantistiche del campo inflazionario, provando a rispondere alla domanda se le fluttuazioni gaussiane di densità scale-invariant da inflazione fossero sufficienti a spiegare la struttura su larga scala, si è qui concentrati sull'aspetto dell'universalità dei modelli inflazionari. Assumendo che l'evoluzione del campo scalare  $\phi$  sia monotona è possibile invertire la dipendenza  $\phi(t)$  in  $t(\phi)$ , cioè far dipendere il tempo dal campo scalare; in tal modo  $\phi$  detta lo scorrere del tempo, comportandosi da orologio. Si può perciò scrivere il parametro di Hubble  $H$  in funzione del campo  $\phi$ :

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \equiv -\frac{1}{2}W(\phi), \quad (3.16)$$

in cui  $W$  è il *superpotenziale*, di cui daremo a breve una migliore definizione. La quantità fondamentale, usando il formalismo di Hamilton - Jacobi, diventa il parametro di Hubble in funzione del campo  $H(\phi)$  anziché il potenziale  $V(\phi)$ ; poiché  $H$ , a differenza del potenziale  $V$ , è una quantità geometrica, l'inflazione descritta in termini di  $H(\phi)$  trova un linguaggio più naturale ([8]). Ora, differenziando l'Eq. (3.16) si trova:

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{1}{2}W_{,\phi}\dot{\phi}. \quad (3.17)$$

Come si è visto in precedenza ogni modello è caratterizzato da uno specifico potenziale. Si vuole quindi esprimere il potenziale  $V$  in termini del superpotenziale  $W$ ; per tal fine consideriamo le due equazioni di Friedmann:

$$H^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\kappa^2}{3}\rho_\phi \quad (3.18)$$

$$\dot{a}^2 + 2a\ddot{a} = -\kappa^2 a^2 p_\phi, \quad (3.19)$$

in cui si è definita per comodità  $\kappa = 8\pi G$ . Combinando le due precedenti si ottiene:

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \kappa^2 \frac{p_\phi + \rho_\phi}{2} = \kappa^2 \frac{\dot{\phi}^2}{2}. \quad (3.20)$$

Confrontando la (3.17) ottenuta in precedenza con la precedente equazione (3.20) si può scrivere la relazione:

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\kappa^2} W_{,\phi}. \quad (3.21)$$

Possiamo ora, usando l'Eq. (3.18) con la (2.11) per la densità del campo vista al paragrafo 2.2, finalmente scrivere il potenziale  $V$  in funzione del superpotenziale  $W$  come:

$$2\kappa^2 V = \frac{3}{2} W^2 - \frac{1}{\kappa^2} W_{,\phi}^2, \quad (3.22)$$

l'equazione del moto 2.23 per il campo  $\phi$  (paragrafo 2.4) è automaticamente verificata. Rispetto al sistema originale di equazioni che richiedeva 3 costanti di integrazione, per mezzo della parametrizzazione col superpotenziale  $W(\phi)$  si ha bisogno di 2 costanti di integrazione: una per ciascuna delle equazioni al primo ordine (3.16) e (3.21), la terza costante di integrazione è invece nascosta nella definizione dell'equazione differenziale (3.22). Dalla definizione 3.27 del potenziale tramite il superpotenziale  $W(\phi)$  si evince che, per un singolo potenziale, c'è una famiglia infinita di superpotenziali che soddisfano la (3.27); tuttavia solo una famiglia discreta di soluzioni conduce a soluzioni regolari dell'Eq. (3.16), le altre soluzioni portano a singolarità di curvatura (con cui ci si riferisce a singolarità presenti nelle componenti del tensore di Ricci  $R_{ij}$  introdotto al paragrafo 1.1).

Avendo definito il potenziale  $V$  in funzione del superpotenziale  $W(\phi)$  si vuole ora ricavare l'espressione per le altre quantità in gioco in termini dello stesso. Si inizierà dell'espressione per la pressione e la densità di energia in quanto ci permetteranno di proseguire la trattazione sul superpotenziale e ricavare la  $\beta$ -function; una volta ottenuta l'espressione della  $\beta$ -function sarà possibile esprimere le rimanenti quantità cosmologiche, come il numero di e-folds, in termini della stessa. La pressione e la densità di energia sono esprimibili in termini del superpotenziale come:

$$\rho_\phi = \frac{3}{4\kappa^2} W^2, \quad (3.23)$$

$$p_\phi + \rho_\phi = \frac{1}{\kappa^4} W_{,\phi}^2. \quad (3.24)$$

Usando la (3.16) e la (3.21) si ricava ([1] Binétruy et al.):

$$\kappa \frac{d\phi}{d \ln a} = \frac{\kappa \dot{\phi}}{H} = -\frac{2}{\kappa} \frac{W_{,\phi}}{W}(\phi), \quad (3.25)$$

equazione che ha *esattamente* la forma dell'equazione del Gruppo di Rinormalizzazione che descrive l'evoluzione della costante di accoppiamento rinormalizzata  $g$  in termini della scala di rinormalizzazione  $\mu$  ([45] Mathiot):

$$\frac{dg}{d \ln \mu} = \beta(g), \quad (3.26)$$

in cui il ruolo della costante di accoppiamento rinormalizzata è interpretato dal campo  $\phi$ , quello della scala rinormalizzata  $\mu$  dal fattore di scala  $a$ . Grazie alle definizioni della pressione e densità di energia in termini di  $W$  (equazioni (3.23) e (3.24)), si può ora definire la  $\beta$ -function in funzione del superpotenziale, e quindi della pressione e densità di energia, come segue:

$$\beta(\phi) = -\frac{2}{\kappa} \frac{W_{,\phi}}{W} = \pm \sqrt{3 \frac{p_\phi + \rho_\phi}{\rho_\phi}}, \quad (3.27)$$

i punti fissi corrispondono agli zeri della  $W_{,\phi}$  (estremi del potenziale  $V(\phi)$  (3.22)): un'inflazione di tipo de Sitter si realizza agli zeri della  $\beta$ -function. In questa visione un periodo inflazionario corrisponde allo *slow-motion* del campo  $\phi$  verso ( $V_{,\phi\phi} > 0$ ) o lontano ( $V_{,\phi\phi} < 0$ ) il punto fisso.

### 3.2.3 Parametri di Slow-Roll in funzione di $\beta$

Prima di proseguire con la classificazione dei modelli inflazionari in classi di universalità tramite la  $\beta$ -function è utile definire le grandezze fondamentali del paradigma inflazionario in funzione della  $\beta$ -function. Il numero di e-folds  $N$  (discusso al paragrafo 2.5) può essere riscritto come:

$$N = -\kappa \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{d\phi'}{\beta(\phi')}. \quad (3.28)$$

E' importante notare che il valore del campo al termine dell'inflazione,  $\phi_f$ , può essere fissato dalla condizione:

$$|\beta(\phi_f)| \sim 1, \quad (3.29)$$

condizione che non sorprende considerando che il periodo inflazionario si può realizzare quando  $|\beta| \ll 1$  ed è perciò naturale fissare il termine dell'inflazione al momento in cui  $\beta$  è dell'ordine dell'unità<sup>3</sup>. I parametri di slow-roll, introdotti al paragrafo 2.4, assumono ora la seguente forma in funzione di  $\beta$ :

$$\epsilon_H \equiv \frac{2}{\kappa^2} \left( \frac{H'}{H} \right)^2 = \frac{1}{2} \beta^2, \quad (3.30)$$

$$\eta_H \equiv \frac{2}{\kappa^2} \frac{H''}{H} = \frac{1}{2} \beta^2 - \frac{\beta'}{\kappa}. \quad (3.31)$$

<sup>3</sup>Infatti, come visto in precedenza nell'equazione (2.30) del paragrafo 2.4, affinché si abbia un'espansione accelerata ( $\ddot{a} > 0$ ) deve valere la seguente condizione  $\epsilon < 1$ . Perciò, la condizione precedente sul parametro di slow-roll  $\epsilon$ , data la definizione dell'equazione (3.30), si riflette in automatico sulla condizione su  $\beta \sim 1$

Tramite tali definizioni si ricava che il rapporto tra perturbazioni scalari-tensoriali e l'indice spettrale sono esprimibili come:

$$r = 16\epsilon_H = 8\beta^2, \quad (3.32)$$

$$n_s - 1 \simeq - \left[ \beta^2 + \frac{2\beta'}{\kappa} \right]. \quad (3.33)$$

### 3.3 Classi Universali Slow-Roll Tramite $\beta$

Si vuole ora mostrare come sia possibile classificare i differenti modelli inflazionari in base al comportamento della  $\beta$ -function in prossimità di un punto fisso. Si noti che fissando il valore di  $(p_\phi + \rho_\phi)/\rho_\phi$  come funzione del  $\ln a$  è possibile risolvere l'equazione (3.25). Per chiarire il differente approccio dato dal definire la  $\beta$ -function si consideri prima il seguente esempio ([35] Mukhanov): si scelga la  $\beta$ -function della seguente forma:

$$\beta(\phi) = \pm \sqrt{3\beta} \frac{1}{(N+1)^{\alpha/2}} \quad (\alpha \neq 2), \quad (3.34)$$

dalla 3.25 si ricava il campo scalare  $\phi$ :

$$\phi = \phi_0 \mp \frac{2}{\kappa} \frac{\sqrt{3\beta}}{2-\alpha} (N+1)^{(2-\alpha)/2}, \quad (3.35)$$

da cui è possibile ricavare il superpotenziale  $W$  risolvendo la 3.27:

$$\frac{W_{,\phi}}{W} = -\frac{\kappa^2}{2} \beta(\phi), \quad (3.36)$$

$$W = W_0 \exp \left[ -\frac{3\beta}{2(\alpha-1)} X^{\frac{\alpha-1}{\alpha-2}} \right], \quad X \equiv \frac{\kappa^2 (2-\alpha)^2}{12\beta} (\phi - \phi_0)^2, \quad (3.37)$$

$$V = \frac{3}{4\kappa^2} \left[ 1 - \frac{\beta}{2} X^{\alpha/(\alpha-2)} \right] \exp \left[ -\frac{3\beta}{\alpha-1} X^{\frac{\alpha-1}{\alpha-2}} \right], \quad (3.38)$$

in cui è stato assunto  $\alpha \neq 1, 2$  e  $W_0$  costante. Ricapitolando, anziché scegliere una particolare forma del potenziale  $V$  su cui poi costruire il modello inflazionario si è proceduto assumendo una particolare forma della  $\beta$ -function da cui poi, risolvendo l'Eq. (3.25), estrarre l'espressione per il campo scalare  $\phi$  e, tramite l'equazione del Gruppo di Rinormalizzazione (3.27), ricavare la forma specifica del superpotenziale  $W$ . A questo punto si hanno tutti gli elementi per trovare l'espressione del potenziale scalare  $V$  ed eventualmente le grandezze cosmologiche associate (es. indice spettrale). Il precedente esempio ([35]) si riconduce, per  $\alpha = 2$  al modello inflazionario denominato Higgs inflation ([46] Bezrukov e Shaposhnikov).

Tabella 3.1: Sommario delle classi universali

Classe	Nome	$\beta(\phi)$
$Ia(q)$	Monomiale	$\beta_q(\kappa\phi)^q, q > 1$
$Ia(1)$	Lineare	$\beta_1(\kappa\phi)$
$Ib(p)$	Monomiale Inversa	$-\beta_p/(\kappa\phi)^p, p > 1$
$Ib(1)$	Caotica	$\hat{\beta}_1/(\kappa\phi)$
$Ib(p)$	Frazionaria	$-\hat{\beta}_p/(\kappa\phi)^p, 0 < p < 1$
$Ib(0)$	Legge di Potenza	$-\hat{\beta}_0$
$II(\gamma)$	Esponenziale	$-\beta \exp[-\kappa\phi]$

[1] Binétruy et al. 2015

Come si diceva ad inizio paragrafo si vuole ora mostrare esplicitamente la forma delle classi universali definibili a partire dall'espressione di  $\beta$ ; in particolare ci si focalizzerà su due classi, la classe caotica e monomiale della tabella sottostante, che racchiudono i modelli inflazionari discussi al paragrafo 2.6 (per un'analisi completa delle classi di universalità si veda [1]).

### 3.3.1 Chaotic Inflation

Secondo la classificazione data da [1], nella classe  $Ib(1)$  per l'inflazione a campo grande ricade il modello denominato chaotic inflation analizzato in precedenza secondo il paradigma standard (sezione 2.6). In questa classe il *punto fisso* si ha per  $\phi \rightarrow +\infty$  e il termine dominante della  $\beta$ -function è dato da:

$$\beta(\phi) \simeq -\frac{\hat{\beta}_p}{(\kappa\phi)^p}. \quad (3.39)$$

Un caso particolare è dato per  $p = 1$ . In superpotenziale  $W$  è:

$$W(\phi) = W_0(\kappa\phi)^{\hat{\beta}_1/2}, \quad (3.40)$$

da cui si ricava il potenziale  $V$  per l'inflazione caotica ([19]):

$$V(\phi) = \frac{2W_0^2}{4\kappa^2} \left( 1 - \frac{\hat{\beta}_1^2}{6(\kappa\phi)^2} \right) (\kappa\phi)^{\hat{\beta}_1} \sim \frac{3W_0^2}{4\kappa^2} (\kappa\phi)^{\hat{\beta}_1}, \quad (3.41)$$

in cui l'esponente è quello che compare nella  $\beta$ -function in (3.39). Il numero di e-folds è:

$$N = \frac{(\kappa\phi)^2}{2\hat{\beta}_1} - \lambda, \quad \lambda \equiv \frac{(\kappa\phi_f)^2}{2\hat{\beta}_1}. \quad (3.42)$$

Quindi si ha che:



$$\beta(N) \sim - \left( \frac{\beta_1}{2(N + \lambda)} \right)^{1/2}, \quad (3.43)$$

espressione che corrisponde al caso  $\alpha = 2$  nella classificazione di Mukhanov ([35]) vista in precedenza (equazione 3.34). L'indice spettrale e il rapporto delle perturbazioni scalari-tensoriali hanno le seguenti forme:

$$n_s - 1 \sim \frac{\hat{\beta}_1}{(\kappa\phi)^2} (2 + \hat{\beta}_1) \sim - \frac{1 + \hat{\beta}_1/2}{N}, \quad (3.44)$$

$$r = 8\beta^2 \sim \frac{4\hat{\beta}_1}{N}. \quad (3.45)$$

In tale sottoclasse, che racchiude il modello di inflazione caotica, gli osservabili cosmologici  $n_s, r$  dipendono da due parametri del modello:  $\beta_1$  e  $N$  (si veda Figura 3.3 per quanto riguarda la regione coperta dalla sottoclasse nel piano  $r, n_s$ ).

Un caso particolare afferente alla stessa classe è costituito dal limite  $p \rightarrow 0$  dell'equazione 3.39; tale sottoclasse viene classificata come  $Ib(0)$  (si veda Tabella 3.1) e la sua peculiarità risiede nel fatto che la  $\beta$ -function tende ad una costante:  $\beta(\phi) = -\hat{\beta}_0$ . Appartiene a questa sottoclasse il modello *power-law inflation* ([18]) e in questo caso si ha che il superpotenziale  $W$  e il potenziale scalare  $V$  valgono:

$$W(\phi) = W_0 e^{\frac{\hat{\beta}_0}{2}\kappa\phi}, \quad (3.46)$$

$$V(\phi) = \frac{W_0^2}{8\kappa^2} (6 - \hat{\beta}_0^2) e^{\hat{\beta}_0\kappa\phi}. \quad (3.47)$$

Il problema del modello power-law è che non vi è fine al periodo inflazionario e perciò richiede l'instaurarsi di un altro regime ad un certo momento. Il numero di e-folds, l'indice spettrale e il rapporto tra perturbazioni scalari-tensoriali valgono:

$$N = \frac{1}{\hat{\beta}_0} (\kappa\phi - \kappa\phi_0), \quad (3.48)$$

$$n_s - 1 = - \frac{\hat{\beta}_0^2}{1 - \hat{\beta}_0^2/2}, \quad r = 8\hat{\beta}_0^2. \quad (3.49)$$

Questa classe ha un'ulteriore peculiarità e cioè ha un singolo parametro,  $\hat{\beta}_0$ , che controlla tutti gli esponenti critici e quindi risulta essere la più predittiva.

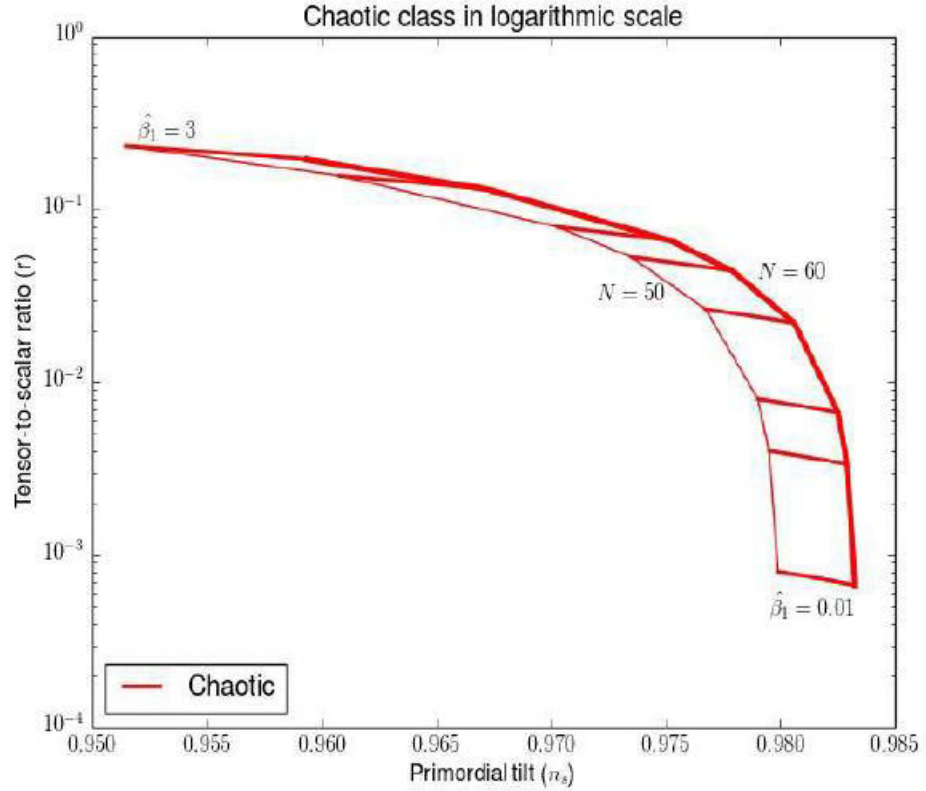


Figura 3.2: Piano  $r$  vs  $n_s$  per la sottoclasse  $Ib(1)$  di cui fa parte il modello di inflazione caotica. Le due righe rosse orizzontali corrispondono a valori di  $N$  che vanno da 50 a 60 ([1]).

### 3.3.2 Hilltop Inflation

Introducendo una nuova scala  $f$ , il formalismo introdotto tramite la  $\beta$ -function permette di costruire modelli interpolando due classi differenti: è questo il caso del modello hilltop. Quando tale parametro di scala  $f$  è piccolo,  $(\kappa f)^2 \ll 1$ , ci si riconduce ai modelli a campo piccolo, quando la scala è grande  $(\kappa f)^2 \gg 1$  si ritrova il regime a campo grande; tuttavia anche un valore intermedio del parametro di scala può condurre a condizione atte all'ottenere inflazione slow-roll ([1]). Questo poiché ogni  $\beta$ -function può assumere un valore piccolo a sufficienza per instaurare inflazione se moltiplicata per un parametro di scala sufficientemente piccolo, per esempio: la  $\beta$ -function  $\beta(\phi) = f(\phi)$  descrivere l'inflazione in un intorno degli zero di  $f(\phi)$ ; tuttavia prendendo un parametro  $x$  piccolo,  $x \ll 1$ , la seguente  $\beta$ -function  $\beta(\phi) = x f(\phi)$  descriverà ugualmente un processo inflazionario per tutti i

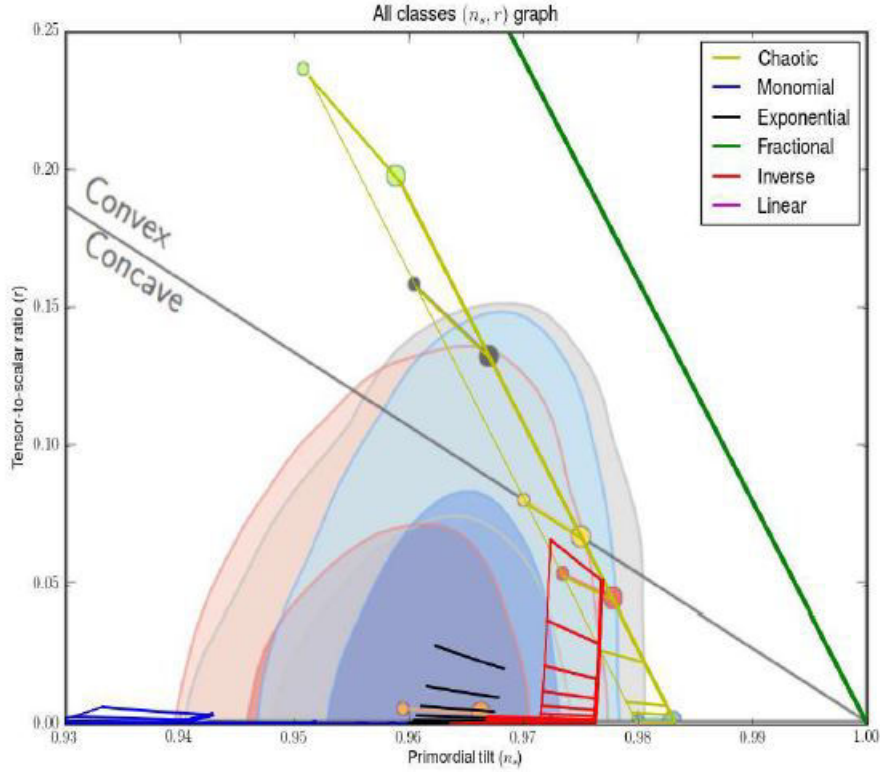


Figura 3.3: Piano  $r$  vs  $n_s$  riassuntivo delle classi, e sottoclassi, univesali ([1]). Sono indicati i valori preferibili in base alle misure di Planck [5].

valori  $\phi$  tali per cui la quantità  $xf(\phi)$  risulti piccola.

Viene ora considerato il potenziale generalizzato per il modello *hilltop inflation* ([20] Linde) analizzato al paragrafo 2.6.2, il quale interpola la classe caotica, vista in precedenza, e la classe monomiale (tabella 3.1). Si consideri la seguente  $\beta$ -function:

$$\beta(\phi) = \frac{\beta_p p (\phi/f)^{p-1}}{\kappa f (1 - (\phi/f)^p)} \quad (p > 2). \quad (3.50)$$

L'inflazione avrà luogo nell'intervallo  $0 < \phi < f$ , il punto fisso inizia a  $\phi = 0$ . Il superpotenziale è:

$$W(\phi) = W_0 \left( 1 - \left( \frac{\phi}{f} \right)^p \right)^{\frac{\beta p}{2}}, \quad (3.51)$$

con  $W_0$  costante. Il potenziale scalare  $V$  diventa:

$$V = V_0 \left( 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{\beta_p p}{\kappa f} \right)^2 \frac{(\phi/f)^{2(p-1)}}{(1 - (\phi/f)^p)^2} \right) (1 - (\phi/f)^p)^{\beta_p}, \quad (3.52)$$

in cui  $V_0 = \frac{3W_0^2}{4}$ .

**Limite Campo Piccolo** Nel limite  $(\phi/f) \ll 1$  è possibile scrivere la  $\beta$ -function come:

$$\beta(\phi) = \frac{p\beta_p}{\kappa f} \left( \frac{\phi}{f} \right)^{p-1} = \frac{p\beta_p}{(\kappa f)^p} (\kappa\phi)^{p-1}. \quad (3.53)$$

Quando  $p > 2$  si ha il modello di inflazione hilltop. In questo limite il potenziale assume la forma:

$$V \simeq V_0(1 - \beta_p(\phi/f)^p), \quad (3.54)$$

e il numero di e-folds vale:

$$N(\phi) \simeq \frac{(\kappa f)^2}{p\beta_p} \frac{1}{(p-2)} ((\phi/f)^{2-p} - (\phi_f/f)^{2-p}), \quad (3.55)$$

in cui  $\phi_f$  è il valore del campo alla fine del periodo inflazionario dato dalla condizione  $\beta(\phi_f) = 1$ .

**Limite Campo Grande** Nel limite  $(\phi/f) \rightarrow 1$  si ridefinisce il campo come  $\phi' \equiv f - \phi$ , in tal modo il regime diviene  $(\phi'/f) \rightarrow 0$ . La  $\beta$ -function diventa:

$$\beta(\phi') = \frac{\beta_p}{\kappa f} \frac{p(1 - (\phi'/f))^{p-1}}{1 - (\phi'/f)^p} \simeq \frac{\beta_p}{\kappa f} \frac{p(1 - (p-1)(\phi'/f))}{1 - (1 - p(\phi'/f))} \simeq \frac{\beta_p}{\kappa\phi'}, \quad (3.56)$$

tale  $\beta$ -function corrisponde alla classe caotica vista al paragrafo 3.3.1, a cui si arriva quando  $f \gg 1$ . Avendo ridefinito il campo tramite  $\phi'$  notiamo che il punto fisso rimane a  $\phi = 0$  e corrisponde al valore  $\phi' = f$ . Il potenziale può essere approssimato come:

$$V \simeq V_0(p(\phi'/f))^{\beta_p}, \quad (3.57)$$

mentre il numero di e-folds, assumendo che l'inflazione termini quando  $\beta(\phi'_f = 1)$ , diventa:

$$N(\phi) \simeq \frac{1}{2\beta_p} [(\kappa\phi')^2 - (\kappa\phi'_f)^2]. \quad (3.58)$$

Si è quindi visto come sia possibile, usando un'unica  $\beta$ -function, interpolare i modelli hiltop e chaotic: il parametro  $p$  nella  $\beta$ -function determina il limite del modello hilltop, mentre per il modello caotico ci si basa sul parametro

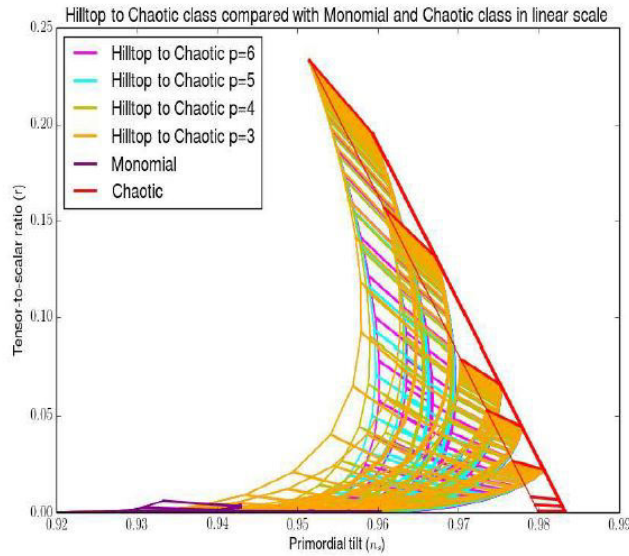


Figura 3.4: *Modello Hilltop generalizzato interpolando la classe monomiale e quella caotica ([1]).*

$\beta_p$ . Una data parametrizzazione della  $\beta$ -function non specifica quindi un determinato modello quanto piuttosto un intero set di teorie che condividono lo stesso limite scale-invariant.

In figura 3.5 vengono riportate le predizioni per  $n_s$  ed  $r$  per le differenti classi di universalità, in cui, per avere una migliore visione della regione  $r \ll 1$ , i valori di  $r$  sono riportati in scala logaritmica. Dal grafico si può notare come i modelli a campo piccolo predicano valori estremamente piccoli di  $r$ .

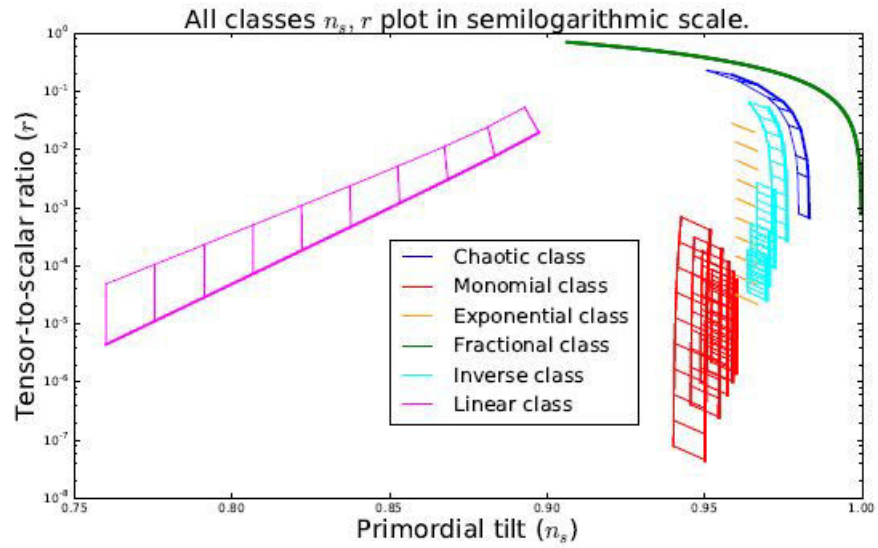


Figura 3.5: *Predizioni per  $n_s$  ed  $r$  in scala semilogaritmica. ([47]).*

### 3.4 Classi Universali K-Inflation Tramite $\beta$

Si vuole ora discutere il formalismo di Hamilton-Jacobi per modelli di inflazione in cui l'espansione accelerata dell'universo si realizzi per mezzo di un termine cinetico non standard (*K-Inflation*) senza quindi l'aiuto di un termine potenziale, a differenza di quanto visto nel paradigma slow-roll ([48]). E' possibile ottenere lo stesso tipo di inflazione vista nel paradigma slow-roll tramite un termine cinetico scalare di ordine superiore (non quadratico); tale termine guida l'evoluzione inflazionaria, senza la necessità di un contributo da parte del potenziale, partendo da condizioni iniziali generiche ([49]). In questo capitolo si introdurrà prima la dinamica data dal paradigma *K-inflation* così da poter poi applicare il formalismo di Hamilton-Jacobi tramite l'approccio di Salopek-Bond ([36]).

### 3.4.1 Introduzione K-Inflation

Si consideri la forma generale dell'azione  $S$  che descrive un classico campo scalare minimamente accoppiato con la gravità:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{2\kappa^2} + p(\phi, X) \right), \quad (3.59)$$

in cui:

$$X \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = -\frac{\dot{\phi}^2}{2}, \quad (3.60)$$

mentre la pressione  $p(\phi, X)$  è una funzione generale dipendente da  $X$  e il campo  $\phi$ . Verrà trattato il caso dell'evoluzione di background. Il caso più semplice, in cui il termine  $p$  dell'equazione (3.59) dipende solo da  $\dot{\phi}$  e non da  $\phi$ , pur conducendo ad un'espansione accelerata di tipo de Sitter, presenta vari problemi come l'assenza di una cosiddetta natural graceful exit, la mancanza di una transizione regolare verso un universo di Friedman e, infine, le perturbazioni cosmologiche sono mal definite ([49]). Il caso standard, cioè con il termine cinetico canonico, è ottenibile scegliendo  $p = -X - V(\phi)$ . Dall'espressione standard del tensore energia-momento:

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (3.61)$$

è possibile ricavare le espressioni per la pressione e la densità di energia associate al campo scalare  $\phi$ :

$$p = p(\phi, X), \quad (3.62)$$

$$\rho(\phi, X) = 2Xp_{,X} - p = -\dot{\phi}^2 p_{,X} - p. \quad (3.63)$$

L'evoluzione del sistema è descritta dall'equazione di Einstein 2.1 da cui è possibile derivare le equazioni di Friedman di nostro interesse:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \rho, \quad -2\dot{H} = \kappa^2(p + \rho) = 2\kappa^2 X p_{,X}. \quad (3.64)$$

Una fase inflazionaria (quindi di espansione accelerata) corrisponde ad un parametro di Hubble  $H$  che varia poco nel tempo (come visto al paragrafo 2.4). Ciò corrisponde a soddisfare la condizione:

$$\epsilon_H \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2} \frac{\rho + p}{\rho} = \frac{2Xp_{,X}\kappa^2}{2H^2} \ll 1, \quad (3.65)$$

l'inflazione si realizza quando  $\rho \simeq -p$ . Tale condizione può essere soddisfatta in due modi:

- tramite un termine cinetico trascurabile  $\dot{\phi} \simeq 0$ ; nel caso di un termine cinetico standard, ottenibile come si è detto tramite  $p(\phi, X) = -X - V(\phi)$ , la precedente condizione implica che la derivata della pressione rispetto ad  $X$  valga  $p_{,X} = -1$  e la densità  $\rho(\phi, X) = -X + V(\phi)$ , perciò una fase inflazionaria si otterrebbe tramite la classica condizione del paradigma slow-roll  $\dot{\phi} \ll V(\phi)$ ;
- nel limite in cui  $p_{,X} \rightarrow 0$ .

L'assunzione di un termine cinetico non standard comporta delle differenze rispetto all'approccio classico (slow-roll) visto in precedenza. In particolare, la prima differenza sorge nell'espressione della velocità del suono  $c_s$  definita come:  $c_s \equiv \frac{p_{,X}}{\rho_{,X}}$ . Tramite l'equazione 3.63 la velocità del suono può essere espressa come:

$$c_s^2 = \frac{p_{,X}}{p_{,X} + 2Xp_{,XX}} = \frac{1}{1 + 2X\partial \ln |p_{,X}| / \partial X}, \quad (3.66)$$

che per il termine cinetico standard porta al classico  $c_s = 1$  mentre non è più vero per termini cinetici non standard come quelli del K-inflation. Notiamo che Planck fornisce dei vincoli ben precisi per quanto riguarda i valori che può assumere la velocità del suono ([5] Planck Collaboration et al. 2018 ):

$$0.086 \leq c_s \leq 1 \quad (95\%CL). \quad (3.67)$$

Il termine  $c_s$  gioca un ruolo importante per quanto riguarda la stabilità dei modelli soggetti a perturbazioni scalari. L'equazione per la canonical "quantization variable"  $v$ , chiamata anche variabile di Mukhanov-Sasaki, che descrive collettivamente le perturbazioni della metrica e del campo scalare, nel caso in cui l'azione abbia la forma espressa in Eq.(3.59), assume la forma ([49]):

$$v'' - c_s^2 \nabla^2 v - \frac{z''}{z} v = 0, \quad (3.68)$$

da cui si nota che se la velocità del suono  $c_s$ , posta innanzi il laplaciano, fosse negativa allora il rispettivo modello sarebbe instabile e quindi tutti i modelli con siffatta caratteristica non avrebbero rilevanza fisica. Quindi, affinché si abbia stabilità, deve valere la condizione:  $c_s^2 = p_{,X}/\rho_{,X} > 0$ ; tale condizione non è detto venga sempre rispettata, ad esempio nel caso dei modelli denominati slow-roll K-inflation nell'approssimazione di ordine zero si ha  $p_{,X} = 0$  e conseguentemente  $c_s^2 = 0$ .



### 3.4.2 K-Inflation Tramite $\beta$

Si vuole ora descrivere i modelli di *K-inflation* tramite il formalismo di Hamilton-Jacobi trattato al capitolo 3.2 per il paradigma classico di slow-roll. Seguendo l'approccio di Salopek e Bond ([36]) il campo scalare  $\phi$  viene considerato come fosse un orologio per descrivere il sistema: invertendo  $\phi(t)$  è possibile esprimere il tempo in funzione dei valori del campo scalare. In quest'ottica anche il parametro di Hubble sarà una funzione del campo  $\phi$  e, introducendo il superpotenziale  $W$ , possiamo scrivere la relazione ([48]):

$$W(\phi) \equiv -2H(\phi), \quad (3.69)$$

con tale definizione l'equazione di Friedman in termini del superpotenziale diviene:

$$\frac{3}{4\kappa^2}W^2 = \rho. \quad (3.70)$$

Differenziando  $W(\phi)$  e usando la 3.64 si ottiene:

$$-p_{,X}\dot{\phi} = \frac{W_{,\phi}}{\kappa^2}. \quad (3.71)$$

Notiamo che la precedente equazione è simile all'equazione (3.21) trovata per l'inflazione slow-roll ma in realtà sono molto differenti: nel caso in cui si abbia un termine cinetico canonico ( $p_{,X} = -1$ ) l'equazione fornisce una corrispondenza diretta uno a uno tra  $\dot{\phi}$  e  $W_{,\phi}$ ; invece, se  $p_{,X}$  è funzione generale di  $X$  e  $\phi$ , per poter esprimere la dinamica in termini solo di  $\phi$  bisogna prima risolvere tale equazione per  $\dot{\phi}$  (in generale le soluzioni esisteranno solo localmente *i.e.* in intervalli temporali in cui  $\phi$  evolve in maniera monotona). Per quanto visto al capitolo 3.2 definiamo la  $\beta$ -function nel seguente modo (che, come è stato detto in precedenza, richiama in forma l'equazione del Gruppo di Rinormalizzazione):

$$\beta(\phi) \equiv \kappa(-p_{,X})^{1/2} \frac{d\phi}{d \ln a} = -\frac{2}{\kappa}(-p_{,X})^{-1/2} \frac{W_{,\phi}}{W}. \quad (3.72)$$

In letteratura esistono altre definizioni per la  $\beta$ -function, tuttavia la seguente scelta è dettata ([48]) dalla richiesta di invarianza della  $\beta$ -function per riparametrizzazione del campo. Infatti, se  $p_{,X}$  è funzione solo del campo  $\phi$ , per esempio  $-F(\phi)$ , è possibile allora definire un nuovo campo  $\rho$  come:

$$\left( \frac{d\rho}{d\phi} \right) \equiv (-p_{,X})^{1/2} = F^{1/2}(\phi), \quad (3.73)$$

avente un termine cinetico canonico. Di conseguenza la  $\beta$ -function che descrive l'evoluzione cosmologica del campo  $\rho$  sarà:

$$\hat{\beta}(\rho) \equiv \beta(\phi(\rho)) = \kappa \frac{d\rho}{d \ln a}, \quad (3.74)$$

equazione che ha la stessa forma dell'equazione del Gruppo di Rinormalizzazione. Nel caso considerato avremmo:

$$\beta(\phi) = \hat{\beta}(\rho(\phi)) = \kappa \frac{d\rho}{d\phi} \frac{d\phi}{d \ln a} = \kappa F^{1/2}(\phi) \frac{d\phi}{d \ln a}, \quad (3.75)$$

perciò diventa equivalente lavorare con  $\beta(\phi)$  piuttosto che con  $\beta(\rho)$ . Nonostante in genere  $p, X$  sia funzione di  $\phi$  e  $X$ , risolvendo l'Eq. (3.71) localmente per  $\dot{\phi}$  è possibile esprimere  $\dot{\phi}$  in termini di  $\phi$  dopodiché anche  $p, X$  potrà essere espressa solo come funzione del campo. Da qui la giustificazione alla forma espressa in Eq. (3.72).

A differenza di quanto visto nella formulazione tramite la  $\beta$ -function per l'inflazione slow-roll, nel caso della  $K$ -inflation non è sufficiente fissare  $\beta(\phi)$  per ottenere classi universali ma occorre anche specificare la parametrizzazione di  $p, X(X, \phi)$ . Per procedere con la formulazione in termini della  $\beta$ -function occorre prima risolvere l'Eq. (3.71) per  $\dot{\phi}$  (la cui soluzione esisterà solo localmente), in modo da esprimere  $\dot{\phi}$  come funzione di  $\phi$ ; una volta trovata tale soluzione si esprime  $p, X(X, \phi)$  solo come funzione di  $\phi$ .

Di conseguenza è possibile esprimere le varie grandezze in gioco come funzioni esplicite di  $\phi$ ; per cui si ha che la pressione e la densità di energia diventino:

$$p = -\frac{3}{4\kappa^2} \left(1 - \frac{\beta^2(\phi)}{3}\right) W^2, \quad (3.76)$$

$$\rho = \frac{3}{4\kappa^2} W^2. \quad (3.77)$$

Tramite l'espressione trovata di  $\beta$  l'equazione di stato può essere espressa come:

$$\frac{p + \rho}{\rho} = \frac{\beta^2(\phi)}{3}, \quad (3.78)$$

che mostra come sia la  $\beta$ -function a controllare l'inflazione, in particolare l'inflazione si realizza in prossimità dello zero di questa funzione.

E' possibile ora esprimere il numero di e-folds  $N$  come:

$$N = -\kappa \int_{\phi_f}^{\phi} (-p, X)^{1/2} \frac{d\phi'}{\beta(\phi')}. \quad (3.79)$$

Lo spettro di potenza scalare  $P_s$ , al momento dell'uscita dall'orizzonte, è definito come:

$$P_s = \frac{\kappa^2 H^2}{8\pi^2 \epsilon_H c_s}. \quad (3.80)$$

Per esprimere lo spettro di potenza in funzione del superpotenziale  $W$  e di  $\beta$  è possibile sostituire ad  $H^2$  al numeratore l'espressione data dall' Eq. (3.64); a questo punto, dall'Eq. (3.77), si ha che  $W^2 = \frac{4}{3} \kappa^2 \rho$  così da avere al

numeratore  $W^2$  al posto di  $H$ . Poi, sostituendo al termine del denominatore  $\epsilon_H$  l'equazione di stato che compare nella definizione data dall'Eq. (3.65) si può esprimere  $\epsilon_H$  in termini della  $\beta$ -function (Eq.(3.78):

$$\epsilon_H = \frac{3p + \rho}{2\rho} = \frac{\beta^2(\phi)}{2}, \quad (3.81)$$

quindi, unendo i precedenti passaggi, si trova l'espressione dello spettro di potenza in funzione di  $W$  e  $\beta$ :

$$P_s = \frac{\kappa^2}{16\pi^2} W^2 \frac{1}{c_s \beta^2(\phi)}. \quad (3.82)$$

Perciò la forma degli osservabili cosmologici più importanti assume le seguenti espressioni:

- Spettro di potenza scalare:  $P_s = \frac{\kappa^2}{16\pi^2} W^2 \frac{1}{c_s \beta^2(\phi)}$ ;
- rapporto scalare-tensoriale:  $r = 8c_s \beta^2(\phi)$ .

Si noti come nelle due ultime grandezze, che sono osservabili cosmologici, ci sia una dipendenza esplicita dalla velocità del suono la cui espressione dipende dalla parametrizzazione scelta per  $p_X$  ed è quindi una possibile chiave per poter discriminare classi di universalità valide o meno.

### 3.4.3 Classi di Universalità per K-Inflation

Si vuole ora applicare il formalismo appena esposto della  $\beta$ -function su alcuni esempi concreti. Come si è detto, a differenza del paradigma slow-roll, per l'inflazione con termini cinetici non standard non è sufficiente fissare  $\beta(\phi)$  (che definisce un set di classi universali) ma occorre anche specificare la parametrizzazione di  $p_{,X}(X, \phi)$ . In questo caso l'universalità è valida tra vari modelli che condividono un'espressione simile del termine cinetico non standard. Si consideri dunque la seguente parametrizzazione generale per  $p_{,X}$  ([48]):

$$p_{,X} = g(\phi)[1 + 2f(\phi)X]^\alpha, \quad (3.83)$$

tale parametrizzazione permette di ottenere due modelli famosi di  $K$ -inflation scegliendo opportunamente i parametri:

- Modello Dirac-Born-Infeld (DBI) ([50]): fissando i seguenti valori,  $\alpha = -1/2$ ,  $f = \lambda/\phi^4$  e  $g(\phi) = -1$ ; tale modello tuttavia non è in accordo con i dati ottenuti dal satellite Planck in quanto, tra le altre cose, produce perturbazioni non-gaussiane molto grandi e non verrà quindi trattato;
- Modello Tachionico ([51]): in cui  $\alpha = -1/2$ ,  $f(\phi) = 1$  e  $g(\phi) = -V(\phi)$ .

Ora scriviamo l'Eq. (3.71) per la parametrizzazione appena scelta (da qui in poi si assume  $\kappa^2 = 1$ ):

$$-2X(1 + 2f(\phi)X)^{2\alpha} = \frac{W_{,\phi}^2}{g^2(\phi)}, \quad (3.84)$$

di conseguenza è possibile risolvere la precedente equazione una volta fissato il valore di  $\alpha$  ed esprimere  $X$  in funzione di  $\phi$ . Il modello inflazionario è completamente caratterizzato una volta che l'esplicita parametrizzazione delle  $\beta$ -function è nota. Una volta stabilita la  $\beta$ -function il superpotenziale può essere calcolato risolvendo:

$$-\frac{\kappa}{2}\beta(\phi)[-g(\phi)]^{1/2} = [1 + 2f(\phi)X]^{-\alpha/2} \frac{W_{,\phi}}{W}, \quad (3.85)$$

la velocità del suono, la cui importanza è stata precedentemente discussa, è data da:

$$c_s^2 = \frac{1 + 2fX}{1 + 2fX(1 + 2\alpha)}. \quad (3.86)$$

Per trovare una classe di modelli in accordo con i vincoli dati da Planck scegliamo il seguente valore di  $g$ :  $g(\phi) = \gamma/\phi$ , e si assuma che in un intorno del punto fisso valga  $2fX \simeq -C^2$ , in cui  $C$  è una costante. Dall'equazione (3.84) si ricava:

$$-2X = \frac{W_{,\phi}^2}{g^2(\phi)}(1 + 2fX)^{-2\alpha} \simeq \phi^2 \frac{W_{,\phi}^2}{\gamma^2}(1 - C^2)^{-2\alpha}, \quad (3.87)$$

dall'equazione (3.85) si ricava la relazione tra la  $\beta$ -function e il superpotenziale:

$$\beta(\phi) = -2(-p_{,X})^{1/2} \frac{W_{,\phi}}{W} \simeq -2\sqrt{\frac{\gamma}{\phi}}(1-C^2)^{\alpha/2} \frac{W_{\phi}}{W}, \quad (3.88)$$

a questo punto è possibile ricavare la velocità del suono definita dall' Eq. (3.86) ottenendo:

$$c_s^2 \simeq \frac{1-C^2}{1-(2\alpha+1)C^2}. \quad (3.89)$$

Questo modello predice quindi una velocità del suono differente dal valore unitario  $c_s^2 \neq 1$ . Fin qui si è richiesto solamente che durante l'evoluzione  $X(\phi)$  tendesse al valore  $-C^2/2f$ , senza aver scelta alcuna parametrizzazione né per  $f(\phi)$ , né per  $\alpha$ ; le parametrizzazioni di  $X(\phi)$  e  $f(\phi)$  verranno fissate una volta impostata l'espressione per  $\beta(\phi)$  che consentirà inoltre di calcolare le predizioni sugli osservabili cosmologici come  $r$ . Scegliendo il caso in cui  $\beta = -\gamma/\phi$  il numero di e-folds è ottenibile a partire dall'Eq. (3.79):

$$N = (1-C^2)^{\alpha/2}(\phi - \phi_f), \quad (3.90)$$

avendo fissato  $\beta$  è possibile calcolare l'espressione del superpotenziale tramite la 3.88:

$$W = W_f \exp \left[ -\frac{\gamma^2(1-C^2)^{\alpha/2}}{2} \left( \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi_f} \right) \right], \quad (3.91)$$

$$W_{,\phi} \simeq -\frac{\gamma^2(1-C^2)^{\alpha/2}}{2\phi^2}, \quad (3.92)$$

infine dalla Eq. (3.87) si ricava  $X$  (all'ordine più basso) ed  $f$  dall'assunzione  $2fX \simeq -C^2$ :

$$-2X \simeq \frac{\gamma^2}{\phi^2(1-C^2)^\alpha}, \quad (3.93)$$

$$f(\phi) \simeq \frac{\phi^2(1-C^2)^\alpha}{\gamma^2} C^2. \quad (3.94)$$

A questo punto tramite le espressioni precedenti è possibile trovare la predizione per gli osservabili cosmologici come  $r$ :

$$r \simeq 8c_s\beta^2 \simeq \frac{O(1)}{N^2}. \quad (3.95)$$

Per valori del numero di e-folds usuali ( $N \simeq 60$ ) è possibile trovare una regione, nello spazio dei parametri, che dà valori degli osservabili cosmologici  $r$  e  $n_s$  consistenti con i vincoli dati da Planck.

### 3.4.4 Modello di Inflazione Tachionica

Il modello tachionico appartiene alla categoria di modelli inflazionari aventi termine cinetico non standard che deriva dalla teoria delle stringhe ([52], Gibbons). Questa classe di modelli può essere descritta tramite la precedente parametrizzazione (Eq. (3.83)) fissando i seguenti valori:

- $\alpha = -\frac{1}{2}$ ;
- $f(\phi) = 1$ ;
- $g(\phi) = -V(\phi)$ .

In questo modello la pressione è data da:

$$p(\phi, X) = -V(\phi)\sqrt{1+2X}, \quad (3.96)$$

in cui  $X \equiv -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ , mentre la densità di energia, in questo modello, è uguale a  $-p_{,X}$ :

$$\rho \equiv 2Xp_{,X} - p = \frac{V(\phi)}{\sqrt{1+2X}} = -p_{,X}. \quad (3.97)$$

L'equazione di stato assume la forma:

$$\frac{\rho + p}{\rho} = \dot{\phi}^2, \quad (3.98)$$

e la velocità di propagazione del campo scalare:

$$c_s^2 = 1 - \dot{\phi}^2. \quad (3.99)$$

La dinamica è regolata come sempre dalle equazioni di Friedmann; una fase accelerata comporta che i valori di  $\dot{\phi}^2$  siano ristretti nell'intervallo  $[0, 2/3]$ . Il valore della velocità del suono, durante l'inflazione, si discosta dal suo valore standard così come sono permesse perturbazioni di tipo non-gaussiano ([48]). L'equazione 3.84, che mette in relazione il superpotenziale  $W$  con il potenziale scalare  $V$ , in questo caso si riduce a:

$$-2X = \frac{W_{,\phi}^2}{V^2(\phi)}(1+2X). \quad (3.100)$$

E' possibile esprimere  $X$  in funzione solamente del campo  $\phi$  così da ottenere:

$$-2X = \frac{W_{,\phi}^2/V^2(\phi)}{1 + W_{,\phi}^2/V^2(\phi)}, \quad (3.101)$$

che sostituita nella 3.97 fornisce la seguente espressione per la densità di energia in termini del superpotenziale  $W$  e del potenziale scalare  $V$ :

$$\rho = -p_{,X} = \sqrt{V^2(\phi) + W_{,\phi}^2}. \quad (3.102)$$

E' possibile usare ora l'equazione (3.77) in modo da poter finalmente esprimere il potenziale  $V$  in funzione del superpotenziale  $W$ :

$$V^2(\phi) = \frac{9}{16}W^4 - W_{,\phi}^2. \quad (3.103)$$

Anche la quantità  $X$ , espressione della variazione del campo, può essere espressa in funzione solamente del superpotenziale:

$$-2X = \frac{W_{,\phi}^2}{\frac{9}{16}W^4}. \quad (3.104)$$

Sostituendo nell'espressione per la  $\beta$ -function (Eq. (3.72)) si ottiene:

$$\beta(\phi) = -\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{W_{,\phi}}{W^2}, \quad (3.105)$$

la cui soluzione è data da:

$$W(\phi) = W_f \left( 1 + W_f \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{\sqrt{3}}{4} \beta(\hat{\phi}) d\hat{\phi} \right)^{-1}. \quad (3.106)$$

Si può ora ricavare l'espressione per la velocità del suono tramite la 3.86 la cui importanza, come si è detto in precedenza, è principalmente dovuta alla capacità di collegare le predizioni teoriche con quantità misurabili; in questa classe di modelli si ottiene:

$$c_s^2 = \frac{1}{1 + W_{,\phi}^2/V^2}. \quad (3.107)$$

Torna utile adoperare i risultati appena visti, in particolare la soluzione per l'equazione della  $\beta$ -function, per riscrivere il potenziale dell'Eq. (3.103) come:

$$V^2 = \frac{9}{16}W^4 \left( 1 - \frac{\beta^2}{3} \right). \quad (3.108)$$

Poiché si è interessanti alla descrizione di una fase inflazionaria, che si realizza quando  $\beta(\phi) \ll 1$ , è possibile trascurare dalla precedente equazione il termine  $\beta^2/3$  in modo che il potenziale diventi:

$$V^2 \simeq \frac{9}{16}W^4, \quad (3.109)$$

sotto tali assunzioni è possibile riscrivere la velocità del suono come:

$$c_s^2 \simeq \frac{1}{1 + \beta^2/3}, \quad (3.110)$$

di conseguenza per  $\beta^2 \rightarrow 0$  si ha che  $c_s^2 \rightarrow 1$ .

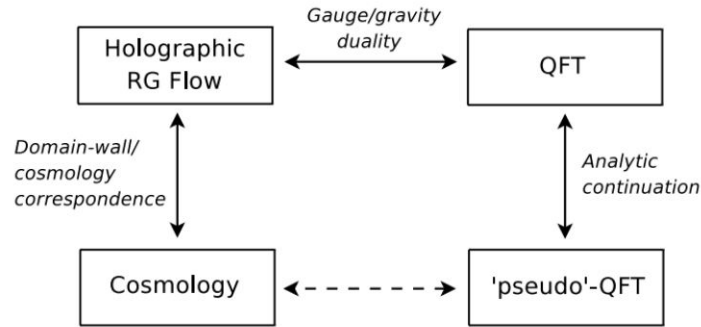


Figura 3.6: *Rappresentazione schematica della realizzazione della corrispondenza tra la Cosmologia/"quasi" QFT. ([47]).*

### 3.5 Universo Olografico

In questo paragrafo si vuole brevemente riprendere quanto già accennato ad inizio del Capitolo 3.2 a proposito del principio olografico. La motivazione risiede nelle potenzialità intrinseche di tale approccio che, di fatto, costituiscono parte della giustificazione per applicare il metodo della  $\beta$ -function in ambito cosmologico in quanto le equazioni per l'evoluzione cosmologica richiamano le equazioni ottenibili tramite il duale nella descrizione olografica. In origine il principio olografico venne formulato da Susskind ([53]) a seguito del lavoro di 't Hooft ([43]) e Thorn([54]); tale principio affermava che le informazioni riguardanti la dinamica di un sistema possono essere contenute sul contorno. L'origine di tale formulazione deriva dagli studi sull'entropia dei buchi neri da parte di Hawking ([55]) e Bekenstein ([56]). Gli autori infatti mostrarono che l'entropia di un buco nero non scala col suo volume, quanto con la superficie. In questo contesto si inserisce la corrispondenza AdS/CFT (Anti deSitter/Conformal Field Theory) proposta da Maldacena ([57]): la dualità proposta fa sì che l'accoppiamento sia forte/debole, nel senso che nel regime in cui una descrizione è debolmente accoppiata la descrizione per mezzo del duale risulta fortemente accoppiata. La congiunzione tra tali teorie e la cosmologia si deve ai lavori di Mc Fadden e Skenderis ([42]). In particolare proposero l'applicazione della descrizione olografica all'universo inflazionario. Questo consente di costruire modelli in cui, a tempi primordiali, vi è un accoppiamento forte con la gravità che quindi ha solamente un accoppiamento debole nella descrizione quantistica di campo in tre dimensioni. Ogni proposta olografica deve specificare perciò quale sia il duale nella teoria quantistica di campo (QFT) e come usarla per calcolare gli osservabili cosmologici. Affinché si possa implementare una descrizione olografica del periodo inflazionario occorre quindi specificare il duale "pseudo"-QFT.

Per riassumere: la teoria olografica asserisce che qualsiasi teoria di gravi-



tà quantistica in  $(d + 1)$  dimensioni debba avere una descrizione duale in termini di una teoria di campo quantistica (QFT) senza la gravità in  $d$  dimensioni ([43] 't Hooft, 1993). Secondo tale visione, una delle macroscopiche dimensioni dello spaziotempo e una delle forze dell'universo, come la gravità, sarebbero fenomeni emergenti da una sottostante teoria di campo quantistica ([44]). L'approccio olografico consente di studiare modelli fortemente accoppiati con la gravità; nel contesto standard dell'inflazione si assume che la gravità sia debolmente accoppiata, in tal modo è lecito trascurare i termini di ordine superiore. Tuttavia, nel regime in cui tale assunzione non è più valida, la descrizione standard non è idonea perciò tramite il principio olografico tale regime può essere studiato in termini del duale QFT.



## Capitolo 4

# Inflazione Anisotropa

Fino a questo momento sono stati considerati modelli di inflazione dipendenti solo da campi scalari, applicando il formalismo di Hamilton-Jacobi sia al paradigma slow-roll che a quello di K-Inflation, così da descrivere l'inflazione in termini del discostamento della  $\beta$ -function in corrispondenza del punto fisso. Le due principali motivazioni all'uso di campi scalari risiedono nella naturale isotropia e omogeneità di tali campi (così da rispecchiare l'omogeneità e l'isotropia della descrizione FLRW), e all'abilità degli stessi di mimare il decadimento della costante cosmologica.

Tuttavia è possibile descrivere uno scenario inflazionario anche in presenza di un campo vettoriale. Lo stimolo a studiare questo tipo di inflazione si deve ai recenti progressi osservativi: se infatti all'ordine zero le predizioni dell'inflazione standard si accordavano bene con le osservazioni (conducendo a predizioni quali isotropia, gaussianità, l'essere scale-invariant), con l'aumentare della precisione osservativa si guarda sempre più alla struttura fine come lo studio della non-gaussianità, la violazione di isotropia statistica (si veda ad esempio [58] e [59]). Dallo studio dell'inflazione con anisotropie tramite campi vettoriali emerge che: il grado di anisotropia è determinato dai parametri di slow-roll ([60]), essendo questi dell'ordine del per cento significa che potrebbero esserci fenomenologie non trascurabili derivanti dall'anisotropia; per esempio, poiché in questo caso l'invarianza per rotazioni è violata ci si aspetta un'anisotropia statistica nelle fluttuazioni in temperatura della CMB ([61]), come anche il fatto che le perturbazioni tensoriali potrebbero essere indotte già a livello lineare dalle perturbazioni di curvatura attraverso le anisotropie dello spazio-tempo. Quando l'accoppiamento bilancia la diluizione dovuta all'espansione il risultato può consistere in un'impronta nelle fluttuazioni primordiali, come per esempio un'amplificazione delle fluttuazioni scalari o tensoriali ([62], [59], [63]).

In questo capitolo verrà esposta l'inflazione tramite campi vettoriali. Si vedrà come sarà possibile ottenere la dinamica di slow-roll per un campo vettoriale massivo tramite un accoppiamento non minimale tra tale campo e la gravità;

in tal modo si otterrà un'equazione avente la medesima forma dell'equazione per un campo massivo scalare. Successivamente verrà trattata l'inflazione anisotropa in presenza di un campo di gauge e applicato il formalismo di Hamilton-Jacobi: la presenza di un fattore di scala anisotropo nella metrica comporterà la definizione di un secondo superpotenziale  $W_b(\phi)$  e di una funzione  $\gamma$  per collegare l'evoluzione dei due superpotenziali.

## 4.1 Inflazione Vettoriale

Si vuole descrivere il processo inflazionario tramite un campo vettoriale. Si consideri perciò un campo massivo vettoriale, con accoppiamento non minimale con la gravità, avente la seguente azione ([64]):

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left( -\frac{R}{16\pi} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( m^2 + \frac{R}{6} \right) A_\mu A^\mu \right), \quad (4.1)$$

in cui  $F \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  (in cui si è assunto  $G = 1$ ). La variazione dell'azione rispetto ad  $A^\mu$  porta alla seguente equazione del moto:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) + \left( m^2 + \frac{R}{6} \right) A^\mu = 0. \quad (4.2)$$

Una delle grandezze che caratterizza la forza del campo vettoriale, in modo indipendente dalle coordinate, è la seguente quantità scalare:

$$I = A^\alpha A_\alpha = A_0^2 - \frac{1}{a^2} A_i A_i, \quad (4.3)$$

tale grandezza porta a definire una nuova variabile riscalata  $B_i \equiv A_i/a$  da usare al posto di  $A_i$ . In una metrica di Friedmann spazialmente piatta ( $ds^2 = dt^2 - a^2(t) \delta_{ik} dx^i dx^k$ ), si ricava dall'Eq. (4.2) un'equazione del moto così fatta:

$$-\frac{1}{a^2} \nabla^2 A_0 + \left( m^2 + \frac{R}{6} \right) A_0 + \frac{1}{a^2} \partial_i \dot{A}_i = 0. \quad (4.4)$$

Considerando il campo vettoriale quasi omogeneo, cioè  $\partial_i A_\alpha = 0$ , la precedente equazione porta direttamente alla condizione:

$$A_0 = 0. \quad (4.5)$$

Ricavando l'altra equazione del moto dall'Eq. (4.2) e riscrivendola in termini di  $B_i$  si ottiene:

$$\ddot{B}_i + 3H\dot{B}_i + m^2 B_i = 0. \quad (4.6)$$

Questa equazione è molto simile all'equazione che descrive la dinamica di un campo scalare (2.23). Quando la costante di Hubble  $H$  è maggiore della massa del campo  $m$  il campo  $B_i$  è "congelato"; pertanto ci si può attendere ([64]) che il potenziale  $-m^2 A_\mu A^\mu = m^2 B_i B_i \approx const$  possa condurre ad un'espansione quasi de Sitter in modo analogo a quanto avviene nel caso di un campo scalare. La parte spaziale del tensore energia-momento contiene componenti fuori dalla diagonale dello stesso ordine delle componenti sulla diagonale; per tale motivo un campo vettoriale omogeneo non soddisfa l'equazione di

Einstein (come ci si attendeva dal fatto che un campo vettoriale abbia una direzione preferenziale). Quindi, affinché si abbia un tensore energia-momento diagonale è necessario considerare più campi contemporaneamente.

Si consideri perciò una tripletta, mutuamente ortogonale, di campi vettoriali  $B_i^{(a)}$  ([65]) ciascuno di pari valore  $|B|$ ; si ha che:

$$\sum_i B_i^{(a)} B_i^{(b)} = |B|^2 \delta_b^a, \quad (4.7)$$

da cui segue che le componenti della tripletta sono da considerarsi elementi di una matrice:

$$\sum_a B_i^{(a)} B_j^{(a)} = |B|^2 \delta_j^i. \quad (4.8)$$

In questo caso le componenti del tensore energia-momento sono:

$$T_0^0 = \rho = \frac{3}{2} (\dot{B}_k^2 + m^2 B_k^2), \quad (4.9)$$

$$T_j^i = -p \delta_j^i = -\frac{3}{2} (\dot{B}_k^2 - m^2 B_k^2) \delta_j^i, \quad (4.10)$$

in cui  $B_k$  sono le componenti di qualsiasi campo della tripletta che soddisfa:

$$\ddot{B}_i + 3H \dot{B}_i + m^2 B_i = 0, \quad (4.11)$$

in cui  $H^2 = 4\pi(\dot{B}_k^2 + m^2 B_k^2)$ . Queste equazioni hanno la stessa forma di quelle per un campo massivo scalare e quindi si può utilizzare lo stesso approccio. Per  $|B| > 1$  si ha il regime di slow-roll quando:

$$\dot{B}_k^2 \ll m^2 B_k^2, \quad (4.12)$$

durante il quale  $p \approx -\rho$  e l'universo è sottoposto ad una fase di inflazione. In questo contesto l'inflazione termina quando  $|B|$  raggiunge il valore di Planck.

## 4.2 Inflazione Anisotropa in presenza di un campo di gauge

Si vuole ora analizzare l'inflazione in presenza di un campo di gauge. Consideriamo dunque un campo scalare  $\phi$ , accoppiato con un certo numero  $N$  di campi di gauge  $A_\mu^a$  abeliani ( $U(1)$ ), descritto dall'azione ([62]):

$$S = \int \sqrt{|g|} d^4x \left[ \frac{m_p^2 R}{2} - P(\phi, X) - \frac{f(\phi, X)}{4} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\beta}^a \right], \quad (4.13)$$

in cui  $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$  è il tensore abeliano per i campi di gauge,  $P(\phi, X)$  e  $f(\phi, X)$  sono due generiche funzioni di  $\phi$  e  $X \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ . Nella seguente trattazione sia  $A_\mu$  che il campo  $\phi$  dipendono solamente dal tempo  $t$ . Con questa definizione abbiamo che  $P = -p$ , in cui  $p$  è la pressione associata al campo scalare; per l'inflazione standard, intesa come inflazione a campo singolo scalare con termine cinetico standard, si ha che  $p = -X - V$ . In caso di accoppiamento minimale ( $f = 1$ ) i campi di gauge decadono rapidamente durante l'espansione di Hubble ([66]). Per la trattazione anisotropa è possibile imporre una condizione di gauge temporale ( $A_0 = 0$ ) in modo da esprimere il campo di gauge omogeneo come ([60]):

$$A_\mu(t) = (0, v_A(t), 0, 0), \quad (4.14)$$

in cui si è scelto, per il campo di gauge, un allineamento lungo l'asse  $x$  (scelta che non fa perdere di generalità la trattazione). Per la presente trattazione anisotropa si considerino i fattori di scala:  $a(t)$  fattore isotropo,  $b(t)$  anisotropo; in tal modo la metrica assume la forma tipica di un universo di Bianchi I:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) [b(t)^{-4} dx^2 + b(t)^2 (dy^2 + dz^2)]. \quad (4.15)$$

A questo punto unendo le precedenti equazioni (4.14) e (4.15) con  $P = X + V$  e  $f(X, \phi) = f(\phi)$ , l'equazione del moto per il campo scalare e per il campo di gauge diventa:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left[ \sqrt{|g|} \left( P_{,X} + \frac{1}{4} f_{,X} F^2 \right) \partial^\mu \phi \right] - P_{,\phi} - \frac{1}{4} f_{,\phi} F^2 = 0, \quad (4.16)$$

$$\partial_\mu \left[ \sqrt{|g|} f F^{a,\mu\nu} \right] = 0, \quad (4.17)$$

in cui  $F^2 \equiv g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\beta}^a$ . L'equazione del moto per l'inflatone  $\phi$  si semplifica assumendo l'omogeneità sia della metrica che del campo stesso:

$$\frac{d}{dt} \left[ \sqrt{|g|} P_{,X} \dot{\phi} + \frac{1}{4} f_{,X} \dot{\phi} F^2 \right] + \sqrt{|g|} P_{,\phi} + \sqrt{|g|} \frac{1}{4} f_{,\phi} F^2 = 0. \quad (4.18)$$

Per l'inflazione anisotropa le componenti del tensore  $F$  sono:

$$F_{01} = -F_{10} = \dot{v}_A. \quad (4.19)$$

Inoltre si ha che:

$$F^2 = -2 \frac{b^4 \dot{v}_A^2}{a^2}, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F^2 = F^2 \left( 4H_b - 2H_a + 2 \frac{\ddot{v}_A}{\dot{v}_A} \right), \quad (4.21)$$

in cui sono state introdotte le quantità  $H_a \equiv \dot{a}/a$  e  $H_b \equiv \dot{b}/b$ , cioè il tasso di espansione di Hubble per il fattore di scala isotropo della metrica  $a$  e per quello anisotropo  $b$ . L'equazione del moto per il campo di gauge diventa ([60]):

$$\partial_0(ab^4 f \dot{v}_A) = 0, \quad (4.22)$$

la cui soluzione immediata è:

$$\dot{v}_A = p_A a^{-1} b^{-4} f^{-1}, \quad (4.23)$$

in cui  $p_A$  è una costante. Si definisce ora la funzione  $\hat{f} = a^4 b^4 f$ , le uniche componenti non nulle dell'equazione di Einstein sono:

$$3(H_a^2 - H_b^2) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{p_A^2}{2\hat{f}}, \quad (4.24)$$

$$3H_a H_b + \dot{H}_b = \frac{p_A^2}{3\hat{f}}, \quad (4.25)$$

$$3H_a^2 + \dot{H}_a = V(\phi) + \frac{p_A^2}{6\hat{f}}. \quad (4.26)$$

Nel caso in cui  $p_A = 0$ , corrispondente a  $\dot{v}_A = 0$ , le precedenti equazioni tornano a descrivere l'inflazione classica. Combinando le precedenti equazioni è possibile ricavare il parametro  $\epsilon_H$ :

$$\epsilon_H \equiv -\frac{\dot{H}_a}{H_a^2} = 3 \left( \frac{H_b}{H_a} \right)^2 + \frac{p_A^2}{3\hat{f}H_a^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{2H_a^2}. \quad (4.27)$$

Fintanto che  $\hat{f} > 0$  la somma dei termini è positiva e quindi affinché ci sia inflazione occorre che il membro di destra della precedente equazione sia molto minore di uno.



### 4.3 Formalismo $\beta$ -function

In questo paragrafo si applicherà il formalismo della  $\beta$ -function, introdotto al capitolo 3.2, per l'inflazione anisotropa [62]. La principale differenza rispetto ai casi trattati in precedenza risiede nella presenza, per descrivere l'anisotropia della metrica, del secondo fattore di scala  $b(t)$  che comporta la definizione di un secondo superpotenziale. Per tale motivo verrà introdotta la funzione  $\gamma$  per collegare l'evoluzione dei due superpotenziali: in tal modo si avrà una misura della deviazione tra le componenti isotrope e anisotrope. Si consideri perciò la metrica anisotropa di Eq. (4.15); essendoci due differenti fattori di scala si introducono due superpotenziali:

$$W_a(\phi) \equiv -2H_a(\phi), \quad W_b(\phi) \equiv -2H_b(\phi), \quad (4.28)$$

in cui, rispettivamente,  $W_a$  è il classico superpotenziale trattato in precedenza (3.16), mentre  $W_b$  è il superpotenziale anisotropo. A questo punto, seguendo la trattazione di Hamilton-Jacobi, si vuole esprimere la variazione del campo  $\dot{\phi}$  in funzione solo di  $\phi$ . Partendo quindi dalle equazioni (4.24), (4.25) e (4.26) tramite le definizioni (4.28) si arriva ad ottenere:

$$\dot{\phi}^2 - (W_{a,\phi} + W_{b,\phi})\dot{\phi} + \frac{3}{2}W_aW_b + \frac{3}{2}W_b^2 = 0, \quad (4.29)$$

che è un'equazione polinomiale la cui soluzione (prendendo quella positiva per consistenza con il caso standard a singolo campo):

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2}(W_{a,\phi} + W_{b,\phi}) \left[ 1 + \sqrt{\Delta} \right], \quad (4.30)$$

con

$$\Delta \equiv 1 - 6\gamma(1 + \gamma) \left[ -\frac{\beta_0}{2}(1 + \gamma) + \gamma_{,\phi} \right]^{-2}, \quad (4.31)$$

permette per l'appunto di esprimere  $\dot{\phi}$  in funzione solo di  $\phi$ , cosicché il formalismo di Hamilton-Jacobi possa venir applicato anche al caso anisotropo (le quantità che compaiono nella Eq. (4.31) verranno definite a seguire). Introduciamo ora due quantità che consentiranno di fissare i modelli una volta specificato il loro valore; la prima è la funzione  $\gamma$  così definita:

$$\gamma(\phi) \equiv \frac{d \ln b}{d \ln a} = \frac{W_b}{W_a}, \quad (4.32)$$

cioè come rapporto tra il superpotenziale per la componente anisotropa e quella isotropa, in modo da studiare l'evoluzione delle anisotropie durante l'inflazione. La seconda grandezza usata nella precedente equazione (4.31) è invece  $\beta_0$  già vista nel caso standard del capitolo precedente:

$$\beta_0 \equiv -2 \frac{W_{a,\phi}}{W_a}. \quad (4.33)$$

Mostriamo ora come sia possibile ottenere un modello una volta fissati i valori di  $\beta_0$  e  $\gamma$ . Innanzitutto usando l'Eq. (4.30) si può esprimere la funzione  $\beta$  come:

$$\beta(\phi) \equiv -2 \frac{\dot{\phi}}{W_a} = \left[ \frac{\beta_0}{2}(1 + \gamma) - \gamma_{,\phi} \right] \left[ 1 + \sqrt{\Delta} \right], \quad (4.34)$$

in cui si è usato:

$$\gamma_{,\phi} = \gamma \left( \frac{W_{b,\phi}}{W_b} - \frac{W_{a,\phi}}{W_a} \right) = \gamma \left( \frac{W_{b,\phi}}{W_b} + \frac{\beta_0}{2} \right), \quad (4.35)$$

quindi, in definitiva, la funzione  $\beta$  dipende unicamente da  $\gamma$  e  $\beta_0$ . E' possibile ora esprimere la condizione affinché ci sia una fase inflazionaria in termini di  $\beta$  e  $\beta_0$ :

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}_a}{H_a^2} = \frac{1}{2} \beta_0 \beta \ll 1. \quad (4.36)$$

La precedente condizione mostra quindi l'esplicita dipendenza dalla parametrizzazione di  $\beta_0$  e perciò, di riflesso, dalla corrispettiva classe universale da essa descritta. Un sistema anisotropo può realizzare una fase inflazionaria soddisfacendo ([62]) le seguenti condizioni che discendono direttamente dall'Eq. (4.27):

$$\gamma \ll 1, \quad \gamma \left[ 1 - \frac{\beta}{3} \left( \frac{\beta_0}{2} - \frac{d \ln \gamma}{d\phi} \right) \right] \ll 1, \quad \beta \ll 1. \quad (4.37)$$

In aggiunta alle precedenti, affinché il modello sia consistente, bisogna aggiungere la condizione su  $\Delta$  che deve essere positivo in quanto radice quadrata nella soluzione per  $\dot{\phi}$  (equazione (4.30)):

$$\Delta = 1 - \frac{6\gamma}{1 + \gamma} \left[ \frac{\beta_0}{2} - \frac{d \ln(1 + \gamma)}{d\phi} \right]^{-2} > 0. \quad (4.38)$$

Poiché  $W_a$  e  $W_b$  hanno lo stesso segno allora  $\gamma$  è positivo e quindi il secondo termine della precedente equazione è negativo; di conseguenza  $\Delta$  è sempre minore di uno. Dalle precedenti condizioni si possono dedurre i casi:  $\beta_0 \ll \gamma_{,\phi}$  corrisponde al caso in cui  $\gamma$  cresce velocemente lungo la traiettoria, e quindi le anisotropie crescono, ma poiché  $\gamma$  deve essere minore di uno la quantità di anisotropie iniziali vengono fortemente soppresse (il caso  $\beta_0 \approx \gamma_{,\phi}$  è un sottocaso del precedente); il caso  $\beta_0 \gg \gamma_{,\phi}$  implica piccole anisotropie durante la fase inflazionaria, che nella visione della  $\beta$ -function significa vicino al punto fisso (anisotropie che tuttavia potrebbero crescere nella fase finale dell'evoluzione).

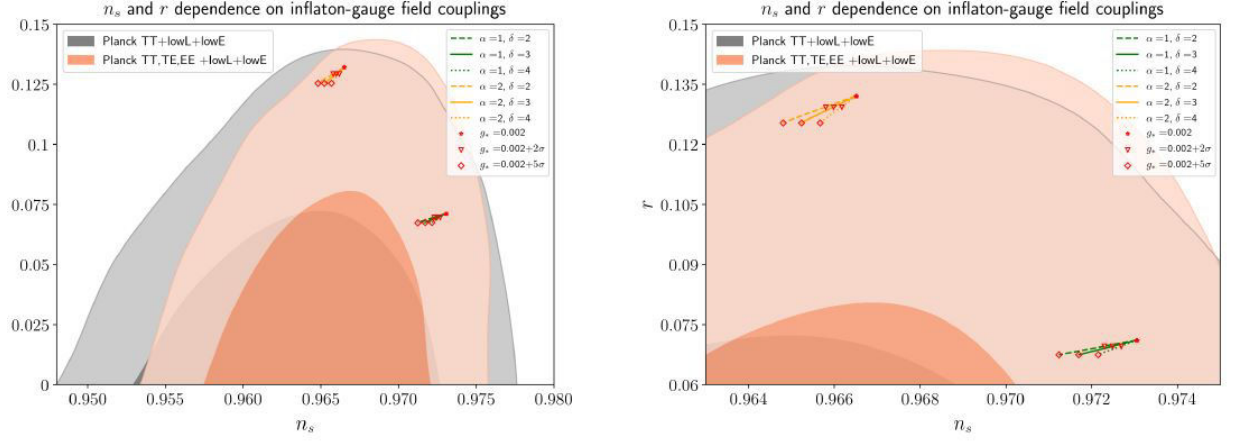


Figura 4.1: *Predizioni dell'indice spettrale  $n_s$  e del rapporto tensoriale - scalare  $r$  in scala lineare per la classe di modelli caotici con  $\beta_0$  definito in 4.39,  $\alpha = [1, 2]$ ,  $\delta = [2, 3, 4]$ . I dati sperimentali sullo sfondo sono presi dal satellite Planck [5]*

#### 4.3.1 Inflazione Caotica Anisotropa

Avendo analizzato il modello caotico nel paradigma classico (capitolo 2.6), col formalismo della  $\beta$ -function in una metrica di FLRW nella sezione 3.3.1, si vuole qui applicare quanto visto nella precedente sezione per i sistemi anisotropi al modello caotico (cioé con potenziali scalari del tipo  $V(\phi) \simeq V_0\phi^\alpha$ ). In tale contesto si è visto come fissando i valori di  $\beta_0$  e  $\gamma$  si determini il modello; in generale è possibile scegliere la seguente forma per  $\beta_0$ :

$$\beta_0(\phi) = -\frac{\alpha}{\phi}. \quad (4.39)$$

Va ora scelta una forma per  $\gamma$  vincolata alle condizioni viste nel precedente paragrafo 4.37 e 4.38; una possibile parametrizzazione che rispetta tali vincoli è la seguente:

$$\gamma(\phi) = C|\beta_0(\phi)|^\delta, \quad (4.40)$$

in cui  $C > 0$  e  $\delta > 2$  sono due costanti positive. Tale scelta assicura  $\Delta > 0$  durante l'inflazione. In Figura 4.1 sono mostrate le variazioni delle predizioni dell'indice spettrale scalare  $n_s$  e del rapporto tensoriale-scalare  $r$  in corrispondenza della variazione di  $C$  a seconda della scelta di parametri. I valori di  $n_s$  e  $r$  sono rapportati ai risultati ottenuti dal satellite Planck.

Si è quindi vista l'inflazione anisotropa in presenza di un campo di gauge e la relativa trattazione secondo il formalismo di Hamilton-Jacobi. La presenza di una direzione preferenziale, dovuta alla natura non scalare del campo, ha richiesto l'introduzione di un secondo superpotenziale  $W_b$  (oltre alla presenza

di un secondo fattore di scala  $b(t)$ ): l'evoluzione dei due superpotenziali è così legata alla nuova funzione  $\gamma$  che dà una misura della crescita delle anisotropie. Una volta impostato il formalismo di Hamilton-Jacobi, sono state ricavate le condizioni per descrivere un universo inflazionario e tradotte in termini del formalismo della  $\beta$ -function. Infine si è considerato il modello di inflazione caotica anisotropa: le predizioni del modello mostrate nel grafico  $r - n_s$  (figura 4.1) rientrano all'interno dei valori ottenuti dal satellite Planck.

# Conclusioni

Essendo questo un periodo storico in cui la fisica dell'universo può avvalersi del sempre maggior numero di dati a disposizione, sembra sensato discostarsi, per quanto concerne l'inflazione, dall'analisi del modello specifico e cercare invece di interpretare i dati in termini di classi generali. L'ambizione di raggruppare l'inflazione in classi universali è altresì motivata dalla difficoltà di discernere tra modelli differenti.

In questo lavoro di tesi è stata esposta nel dettaglio l'inflazione standard, cioè di tipo slow-roll a campo scalare singolo, passando poi a paradigmi differenti quali l'inflazione dovuta ad un termine cinetico non standard (K-Inflation) e l'inflazione anisotropa. Una volta esposta la trattazione standard, il fulcro è stato lo studio del formalismo di Hamilton-Jacobi seguendo la trattazione di Binétruy et al. ([1]); esso è espressione della suddetta ambizione ad una catalogazione per classi universali, traendo forza dal metodo del *Gruppo di Rinormalizzazione*. Questo spiega l'aspetto di universalità: l'evoluzione del campo scalare in un potenziale può essere ricavata dall'equazione del gruppo di rinormalizzazione (si veda l'equazione (3.26) in cui il ruolo della costante di accoppiamento rinormalizzata è interpretato dal campo  $\phi$  e della scala rinormalizzata  $\mu$  dal fattore di scala  $a$ ). Nel contesto del Gruppo di Rinormalizzazione è possibile discutere il classico scenario inflazionario come una lenta evoluzione di un sistema che si approccia o si discosta da un punto critico. La parametrizzazione della  $\beta$ -function associata fornisce un metodo per poter definire classi universali. Per l'inflazione slow-roll il formalismo di Hamilton-Jacobi è stato applicato a due modelli, il caotico e hilltop, così da avere un confronto diretto con la trattazione standard degli stessi due modelli affrontata al capitolo due. Per i modelli sono state esposte le dipendenze dai parametri e mostrate le predizioni per l'indice spettrale  $n_s$  e il rapporto tensoriale - scalare  $r$ , entrambe conformi ai valori ottenuti dalle misure del satellite Planck. Passando al paradigma di K-inflation si è visto come i modelli di questo tipo predicano una deviazione della velocità del suono  $c_s^2 = 1$ . In questo contesto ogni modello è totalmente definito dalla forma del termine cinetico non standard (parametrizzato da  $p,x$ ) e dalla  $\beta$ -function. E' possibile costruire modelli aventi  $c_s^2 \neq 1$  e perturbazioni non gaussiane abbastanza ridotte così da poter essere in accordo con i dati. Infine, lo

stesso formalismo è stato applicato relativamente all'inflazione anisotropa, grazie all'utilizzo di un secondo superpotenziale.

Si evince dunque la duttilità del formalismo di Hamilton-Jacobi, adattabile senza particolari avvertenze ai vari paradigmi inflazionari (per quanto trattati sempre con un solo campo inflazionario), così come le potenzialità dovute all'appoggiarsi al Gruppo di Rinormalizzazione. Inoltre, tale trattazione dà il la alla descrizione olografica dell'universo, di cui si è brevemente parlato al capitolo 3.5, fornendo anche un contesto entro cui discutere lo studio di una teoria gravitazionale quantistica (sebbene questo sia argomento che esula gli scopi del presente lavoro).

# Appendice

## Ruolo Attrattore

Tramite l'approccio di Hamilton - Jacobi è possibile mostrare come tutte le possibili traiettorie inflazionarie, soluzioni dell'equazione di Friedman, convergano rapidamente verso una stessa soluzione se inizialmente erano sufficientemente vicine tra loro ([8]). La dimostrazione ha validità generale non facendo assunzioni sul tipo di inflazione considerata (slow-roll, K-inflation ecc). Si assuma  $\dot{\phi}$  positiva e  $H_0(\phi)$  sia una qualsiasi soluzione dell'equazione di Friedman riscritta in questo modo ([8]):

$$[H'(\phi)]^2 - \frac{3}{2M_P^2}H^2(\phi) = -\frac{1}{2M_P^4}V(\phi). \quad (4.41)$$

Si aggiunga ora ad  $H(\phi)$  un termine di perturbazione lineare  $\delta H(\phi)$  in modo da avere:  $H(\phi) = H_0(\phi) + \delta H(\phi)$ . La condizione di soluzione attrattiva sarà soddisfatta quando  $\delta H/H_0$  andrà rapidamente a zero quando  $\phi$  cresce. Sostituendo l'espressione di  $H(\phi)$  perturbata linearmente all'interno della (4.41) e linearizzando si ricava che la perturbazione obbedisce a:

$$H'_0\delta H' \simeq \frac{3}{2M_P^2}H_0\delta H, \quad (4.42)$$

tale equazione ha la seguente soluzione:

$$\delta H(\phi) = \delta H(\phi_i) \exp[-3N(\phi)], \quad (4.43)$$

in cui  $H(\phi_i)$  è il valore in qualche punto iniziale e  $N$  è il numero di e-folds. Durante l'inflazione la quantità  $\delta H/H_0$  diminuisce più rapidamente di  $e^{-2N}$ . La soluzione attrattrice è quindi raggiunta velocemente per una vasta gamma di condizioni iniziali. Le assunzioni iniziali sul segno di  $\dot{\phi}$  e sulla linearità delle perturbazioni non modificherebbero di molto l'argomentazione riportata.





# Bibliografia

- [1] P. Binétruy et al. «Universality classes for models of inflation». In: *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics* 2015.4, 033 (apr. 2015), p. 033.
- [2] A. A. Penzias e R. W. Wilson. «A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s.» In: *ApJ* 142 (lug. 1965), pp. 419–421.
- [3] G. F. Smoot et al. «Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps». In: *ApJ* 396 (set. 1992), pp. L1–L5.
- [4] J. A. Frieman, M. S. Turner e D. Huterer. «Dark Energy and the Accelerating Universe». In: *ARA&A* 46 (set. 2008), pp. 385–432.
- [5] Planck Collaboration et al. «Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters». In: *arXiv e-prints*, arXiv:1807.06209 (lug. 2018), arXiv:1807.06209.
- [6] Alan H. Guth. «Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems». In: *Phys. Rev. D* 23 (gen. 1981), pp. 347–356.
- [7] Peter Coles e Francesco Lucchin. *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure, Second Edition, Wiley*. John Wiley & sons, LTD, 2002.
- [8] David H. Lyth e Andrew R. Liddle. *The primordial density perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure, Cambridge University Press, 2009*. Cambridge University Press, 2009.
- [9] Amit P. S. Yadav e Benjamin D. Wandelt. «Primordial Non-Gaussianity in the Cosmic Microwave Background». In: *Advances in Astronomy* 2010, 565248 (gen. 2010), p. 565248.
- [10] F. Hoyle et al. «Mach’s Principle and the Creation of Matter [and Discussion]». In: 270.1342 (nov. 1962), pp. 334–341. ISSN: 0080-4630. URL: <http://www.jstor.org/stable/2414534>.
- [11] Andrei Linde. «Particle Physics and Inflationary Cosmology». In: *arXiv e-prints*, hep-th/0503203 (mar. 2005), hep-th/0503203.
- [12] Salvatore Capozziello e Ruggiero de Ritis. «A time-dependent Cosmological Constant». In: *arXiv e-prints*, astro-ph/9605070 (mag. 1996), astro-ph/9605070.

- [13] Robert M. Wald. «Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant». In: *Phys. Rev. D* 28 (8 ott. 1983), pp. 2118–2120. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.28.2118>.
- [14] Swagat S. Mishra, Varun Sahni e Alexey V. Toporensky. «Initial conditions for inflation in an FRW universe». In: *Phys. Rev. D* 98, 083538 (ott. 2018), p. 083538.
- [15] Misao Sasaki. «Inflation and Birth of Cosmological Perturbations». In: *arXiv e-prints*, arXiv:1210.7880 (ott. 2012), arXiv:1210.7880.
- [16] N. Bartolo et al. «Non-Gaussianity from inflation: theory and observations». In: *Phys. Rep.* 402 (nov. 2004), pp. 103–266.
- [17] Diederik Roest. «Universality classes of inflation». In: *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics* 2014, 007 (gen. 2014), p. 007.
- [18] F. Lucchin e S. Matarrese. «Power-law inflation». In: *Phys. Rev. D* 32 (6 set. 1985), pp. 1316–1322. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.32.1316>.
- [19] A.D. Linde. «Chaotic inflation». In: *Physics Letters B* 129.3 (1983), pp. 177–181. ISSN: 0370-2693. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269383908377>.
- [20] A.D. Linde. «A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems». In: *Physics Letters B* 108.6 (1982), pp. 389–393. ISSN: 0370-2693. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382912199>.
- [21] O. M. P. Bilaniuk, V. K. Deshpande e E. C. G. Sudarshan. «“Meta” Relativity». In: *American Journal of Physics* 30.10 (1962), pp. 718–723. URL: <https://doi.org/10.1119/1.1941773>.
- [22] K Kadota e E D Stewart. «Successful Modular Cosmology». In: *JHEP* 07.hep-ph/0304127. KAIST-TH-2003-03. UCB-PTH-2003-08 (apr. 2003), 013. 17 p. URL: <https://cds.cern.ch/record/612989>.
- [23] Lotfi Boubekeur e David H. Lyth. «Hilltop inflation». In: *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics* 2005, 010 (lug. 2005), p. 010.
- [24] Paolo Creminelli et al. «The phase transition to eternal inflation». In: *Journal of High Energy Physics* 2008, 036 (set. 2008), p. 036.
- [25] Alan H. Guth. «Eternal Inflation». In: *Annals of the New York Academy of Sciences* 950 (gen. 2001), pp. 66–82.
- [26] Arvind Borde e Alexander Vilenkin. «Eternal inflation and the initial singularity». In: *Phys. Rev. Lett.* 72 (mag. 1994), pp. 3305–3308.

- [27] Arvind Borde, Alan H. Guth e Alexander Vilenkin. «Inflationary Spacetimes Are Incomplete in Past Directions». In: *Phys. Rev. Lett.* 90.15, 151301 (apr. 2003), p. 151301.
- [28] Anthony Aguirre e Steven Gratton. «Steady-state eternal inflation». In: *Phys. Rev. D* 65.8, 083507 (apr. 2002), p. 083507.
- [29] Viatcheslav F. Mukhanov e G. V. Chibisov. «Quantum Fluctuations and a Nonsingular Universe». In: *JETP Lett.* 33 (1981). [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 33,549(1981)], pp. 532–535.
- [30] Jérôme Martin e Robert H. Brandenberger. «Trans-Planckian problem of inflationary cosmology». In: *Phys. Rev. D* 63.12, 123501 (giu. 2001), p. 123501.
- [31] Andrei Linde. «On the Problem of Initial Conditions for Inflation». In: *Foundations of Physics* 48.10 (ott. 2018), pp. 1246–1260.
- [32] Alan H. Guth. «Eternal inflation and its implications». In: *Journal of Physics A Mathematical General* 40.25 (giu. 2007), pp. 6811–6826.
- [33] Alexander Vilenkin. «Creation of Universes from Nothing». In: *Phys. Lett.* 117B (1982), pp. 25–28.
- [34] Yi Wang e Mian Zhu. «Quantum Creation of a Toy Universe without Inflation». In: *arXiv e-prints*, arXiv:1908.10517 (ago. 2019), arXiv:1908.10517.
- [35] Viatcheslav Mukhanov. «Quantum cosmological perturbations: predictions and observations». In: *European Physical Journal C* 73, 2486 (lug. 2013), p. 2486.
- [36] D. S. Salopek e J. R. Bond. «Nonlinear evolution of long-wavelength metric fluctuations in inflationary models». In: *Phys. Rev. D* 42 (dic. 1990), pp. 3936–3962.
- [37] A.D. Linde. «Eternally existing self-reproducing chaotic inflationary universe». In: *Physics Letters B* 175 (ago. 1986), pp. 395–400.
- [38] Jérôme Martin, Christophe Ringeval e Vincent Vennin. «Encyclopædia Inflationaris». In: *Physics of the Dark Universe* 5 (dic. 2014), pp. 75–235.
- [39] M. Gell-Mann e F. E. Low. «Quantum Electrodynamics at Small Distances». In: *Phys. Rev.* 95 (5 set. 1954), pp. 1300–1312. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.95.1300>.
- [40] Steven Weinberg. *Why The Renormalization Group Is A Good Thing*. 1981.
- [41] J. Bricmont, A. Kupiainen e G. Lin. «Renormalization Group and Asymptotics of Solutions of Nonlinear Parabolic Equations». In: *arXiv e-prints*, *chao-dyn/9306008* (giu. 1993), *chao-dyn/9306008*.

- [42] Paul McFadden e Kostas Skenderis. «Holography for cosmology». In: *Phys. Rev. D* 81, 021301 (gen. 2010), p. 021301.
- [43] G. 't Hooft. «Dimensional Reduction in Quantum Gravity». In: *arXiv e-prints*, gr-qc/9310026 (ott. 1993), gr-qc/9310026.
- [44] P. L. McFadden e K. Skenderis. «The holographic universe». In: *Journal of Physics Conference Series*. Vol. 222. Journal of Physics Conference Series. Apr. 2010, p. 012007.
- [45] Jean-François Mathiot. «The renormalization group equations revisited». In: *International Journal of Modern Physics A* 33.26, 1830024 (set. 2018), p. 1830024.
- [46] Fedor Bezrukov e Mikhail Shaposhnikov. «The Standard Model Higgs boson as the inflaton». In: *Physics Letters B* 659.3 (gen. 2008), pp. 703–706.
- [47] Mauro Pieroni. «Classification of inflationary models and constraints on fundamental physics». In: *arXiv e-prints*, arXiv:1611.03732 (nov. 2016), arXiv:1611.03732.
- [48] P. Binétruy, J. Mabillard e M. Pieroni. «Universality in generalized models of inflation». In: *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics* 2017.3, 060 (mar. 2017), p. 060.
- [49] C. Armendáriz-Picón, T. Damour e V. Mukhanov. «k-Inflation». In: *Physics Letters B* 458.2-3 (lug. 1999), pp. 209–218.
- [50] Sayantani Lahiri. «Dirac Born-Infeld inflation under constant roll conditions». In: (2018).
- [51] G W Gibbons. «Cosmological evolution of the rolling tachyon». In: *Phys. Lett.* B537 (2002), pp. 1–4.
- [52] G. W. Gibbons. «Cosmological evolution of the rolling tachyon». In: *Physics Letters B* 537.1-2 (giu. 2002), pp. 1–4.
- [53] Leonard Susskind. «The world as a hologram». In: *Journal of Mathematical Physics* 36.11 (nov. 1995), pp. 6377–6396.
- [54] Charles B. Thorn. «Reformulating String Theory with the  $1/N$  Expansion». In: *arXiv e-prints*, hep-th/9405069 (mag. 1994), hep-th/9405069.
- [55] James M. Bardeen, B. Carter e S. W. Hawking. «The Four laws of black hole mechanics». In: *Commun. Math. Phys.* 31 (1973), pp. 161–170.
- [56] J. D. Bekenstein. «Black holes and the second law». In: *Lett. Nuovo Cim.* 4 (1972), pp. 737–740.
- [57] Juan Maldacena. «The Large- $N$  Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity». In: *International Journal of Theoretical Physics* 38 (gen. 1999), pp. 1113–1133.

- [58] Nicola Bartolo et al. «Parity-violating and anisotropic correlations in pseudoscalar inflation». In: *J. Cosmology Astropart. Phys.* 2015.1, 027 (gen. 2015), p. 027.
- [59] Nicola Bartolo et al. «Parity-violating CMB correlators with non-decaying statistical anisotropy». In: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2015.07 (lug. 2015), pp. 039–039. ISSN: 1475-7516. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2015/07/039>.
- [60] Masa-Aki Watanabe, Sugumi Kanno e Jiro Soda. «Inflationary Universe with Anisotropic Hair». In: *Phys. Rev. Lett.* 102.19, 191302 (mag. 2009), p. 191302.
- [61] Lotty Ackerman, Sean M. Carroll e Mark B. Wise. «Imprints of a primordial preferred direction on the microwave background». In: *Phys. Rev. D* 75.8, 083502 (apr. 2007), p. 083502.
- [62] Francesco Cicciarella et al. «An Hamilton-Jacobi formulation of anisotropic inflation». In: *arXiv e-prints*, arXiv:1903.11154 (mar. 2019), arXiv:1903.11154.
- [63] Nicola Bartolo et al. «Parity-violating and anisotropic correlations in pseudoscalar inflation». In: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2015.01 (gen. 2015), pp. 027–027. ISSN: 1475-7516. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2015/01/027>.
- [64] Alexey Golovnev, Viatcheslav Mukhanov e Vitaly Vanchurin. «Vector inflation». In: *J. Cosmology Astropart. Phys.* 2008.6, 009 (giu. 2008), p. 009.
- [65] C. Armendáriz-Picón. «Could dark energy be vector-like?» In: *J. Cosmology Astropart. Phys.* 2004.7, 007 (lug. 2004), p. 007.
- [66] A. Maleknejad, M. M. Sheikh-Jabbari e Jiro Soda. «Gauge-flation and cosmic no-hair conjecture». In: *J. Cosmology Astropart. Phys.* 2012.1, 016 (gen. 2012), p. 016.
- [67] Planck Collaboration et al. «Planck 2015 results. XVII. Constraints on primordial non-Gaussianity». In: *A&A* 594, A17 (set. 2016), A17.
- [68] M. C. Bento et al. «On the cosmology of massive vector fields with SO(3) global symmetry». In: *Classical and Quantum Gravity* 10.2 (feb. 1993), pp. 285–298.