

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di laurea

Potenziale di folding elettrostatico nel deutone

Electrostatic folding potential in the deuteron

Relatore

Prof. Lorenzo Fortunato

Laureando

Mario Giacobbo

Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione	1
1 Il deutone	3
1.1 Decrizione del sistema	3
1.2 Modello a buca quadra	5
2 Densità di carica	9
2.1 Struttura interna dei nucleoni	10
2.2 Fattori di forma non relativistici	13
2.3 Fattori di forma relativistici	14
2.4 Misura dei fattori di forma	15
2.5 Interpretazione fisica dei fattori di forma	18
2.6 Densità di carica dei quark	20
3 Modello a distribuzioni gaussiane	23
3.1 Distribuzioni di carica	23
3.2 Potenziale elettrostatico	28
3.3 Conclusione	32
Bibliografia	35

Introduzione

Il deutone corrisponde al nucleo dell'atomo di deuterio ${}^2\text{H}$ e costituisce il sistema nucleare più semplice che presenti uno stato legato: è composto da un protone ed un neutrone interagenti. Per questa sua proprietà viene sfruttato come palestra per lo studio dell'interazione nucleare: se ne costruiscono semplici modelli per il potenziale di interazione e se ne derivano le proprietà da confrontare con i dati sperimentali, come vedremo al capitolo 1. Questa possibilità è tuttavia limitata dal fatto che per il deutone non si presentano stati eccitati osservabili, ossia il sistema è debolmente legato. In questi modelli viene trascurata, spesso implicitamente, la presenza di un termine di *interazione elettromagnetica* nell'operatore hamiltoniano. Tale semplificazione è giustificata talvolta affermando ingenuamente che il neutrone è una particella complessivamente neutra e dunque non presenta interazioni elettromagnetiche, altre volte si afferma che il termine V_{em} sia trascurabile rispetto al potenziale nucleare. A priori la presenza di questo termine non può essere trascurata: al pari del protone infatti anche il neutrone, sebbene presenti una carica netta nulla, possiede una distribuzione di carica $\rho_n(\vec{r}_n)$ non banale. Evidenze di questo derivano dalla presenza di momenti magnetici anomali per i nucleoni e dallo studio dei processi di *scattering* di leptoni su atomi di idrogeno (${}^1\text{H}$) e deuterio (${}^2\text{H}$). I nucleoni non sono particelle elementari, ma sistemi composti di quark carichi (barioni) e ciò produce una struttura elettromagnetica non banale. Sfruttando i processi di *scattering* citati si possono avere informazioni sull'andamento delle distribuzioni di carica, è tuttavia necessario avere una risoluzione sperimentale dell'ordine delle dimensioni del nucleone, ossia inferiori a $10^{-15}m$, per poterne cogliere le peculiarità. Tali esperimenti si focalizzano sull'uso di elettroni, in modo da isolare l'interazione elettromagnetica, e necessitano di energie tanto più elevate quanto maggiore è la risoluzione cercata. Ciò è dovuto al fatto che nella valutazione della sezione d'urto per il processo

$$e^- + N \rightarrow e^- + N \quad N = p, n$$

entrano in gioco le trasformate di Fourier nello spazio dei momenti delle distribuzioni di carica, dette *fattori di forma*. Per avere un'idea delle scale di energia osserviamo che per avere una risoluzione delle distribuzioni dell'ordine di $d \approx 1 \text{ fm}$ sarà necessario un momento trasferito dell'ordine di $q \approx \hbar c/d \approx 200 \text{ MeV}$, dunque per cercare informazioni sulla struttura interna dei nucleoni dobbiamo sfruttare processi in cui il momento scambiato è dell'ordine dei GeV o superiore. Spostandosi

ad energie più elevate si assiste alla comparsa di correzioni dovute a fenomeni radiativi elettromagnetici nel processo di *scattering*. Questi non solo incidono sulla sensibilità dell'esperimento ma intaccano la definizione stessa di distribuzioni statiche di carica. Riprenderemo il discorso sulle distribuzioni di carica dei nucleoni al capitolo 2.

Lo scopo di questa tesi è di riprendere e approfondire i risultati ed i problemi esposti riguardo le densità di carica dei nucleoni e dunque di sviluppare un modello che ne permetta una descrizione semplice e sufficientemente consistente con i dati sperimentali. Tale modello è presentato al capitolo 3 ed è basato sulle ipotesi che i quark up e down presentino distribuzioni di carica a simmetria sferica, con dipendenza radiale gaussiana e che le distribuzioni dei nucleoni siano ottenute dalla somma di queste in termini dei tre quark di valenza. Da tali distribuzioni si vuole stimare l'andamento del potenziale di interazione elettrostatica tra protone e neutrone nel deutone in funzione della loro distanza, ciò è ottenuto attraverso un integrale di *folding* del tipo:

$$V(R) = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r_p \int d^3r_n \frac{\rho_n(r_n)\rho_p(r_p)}{|\vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}}_n, \vec{\mathbf{r}}_p, R)|} .$$

Sfruttando il modello sviluppato per le densità di carica si punta ad avere una stima dell'ordine di grandezza del potenziale di interazione e del suo andamento in funzione della distanza tra i nucleoni. Si vuole inoltre ottenere la correzione all'energia dello stato fondamentale del deutone dovuta alla presenza di questo potenziale:

$$\Delta E = \langle \psi_s | V_c | \psi_s \rangle$$

il cui confronto con l'energia di legame B del deutone permette di quantificare l'importanza del contributo elettrostatico.

Capitolo 1

Il deutone

1.1 Descrizione del sistema

Il deutone è un sistema composto da protone e neutrone disposti in uno stato legato e costituisce il più semplice sistema nucleare, nonché l'unico a due corpi osservabile. Il deutone rappresenta il nucleo del deuterio ed è un sistema essenziale alla produzione di nuclei pesanti nella catena protone-protone e nel processo di nucleosintesi nell'universo primordiale.

Sfruttando esperimenti di *scattering* elastico $e^- + d \rightarrow e^- + d$, del tutto analoghi a quelli che saranno descritti in dettaglio nel capitolo 2, possiamo ottenere informazioni sulla struttura elettromagnetica del sistema, in particolare si stima un raggio quadratico medio di carica¹

$$\sqrt{\langle r_d^2 \rangle} = 2.1413(25) \text{ fm} \quad .$$

La massa del deutone è facilmente derivabile dalla massa del deuterio, trascurando l'energia di legame dell'elettrone, come

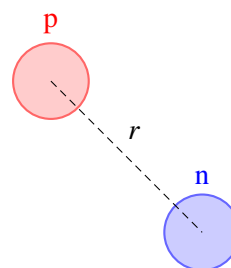
$$m(d) = m(^2\text{H}) - m_e = 1876.124 \text{ MeV} \quad .$$

Osserviamo che la massa è molto vicina alla somma delle masse dei suoi componenti e ciò suggerisce che il sistema sia debolmente legato rispetto ai nuclei più pesanti. L'energia di legame nello stato fondamentale è ottenuta sfruttando la definizione:

$$B = m(d) - m(p) - m(n) = 2.22463(4) \text{ MeV} \quad .$$

Sperimentalmente questa può essere misurata con ottima precisione attraverso esperimenti ([1], pag. 81) di fusione e fissione del nucleo:

¹Da 2014 CODATA Recommended Values.



- L'energia di legame corrisponde all'energia dei raggi γ che vengono emessi nella reazione di fusione: ${}^1\text{H} + n \rightarrow {}^2\text{H} + \gamma$ da cui risulta $B = 2.224589(2) \text{ MeV}$.
- L'energia di legame corrisponde all'energia dei raggi γ che permettono la reazione inversa, ossia ${}^2\text{H} + \gamma \rightarrow {}^1\text{H} + n$ da cui risulta $B = 2.224(2) \text{ MeV}$.

Si può notare come tali esperimenti forniscano valori di B in grande accordo con il risultato previsto dalla definizione. Possiamo affermare dunque che il sistema si dispone in uno stato legato molto debolmente, al limite del continuo. Affinché protone e neutrone siano mantenuti in uno stato legato entro distanze dell'ordine di pochi fm l'interazione in gioco non può essere puramente elettromagnetica, ma si deve introdurre un potenziale di interazione nucleare. La speranza di trovare in questo sistema una palestra per l'indagine delle interazioni nucleone-nucleone, parallela a quella trovata nell'atomo di idrogeno per lo studio della struttura atomica, deve essere accantonata in quanto non si osservano stati eccitati.

Fusione e fissione del deutone sono processi di natura elettromagnetica e permettono di determinare il momento angolare e la parità del deutone:

$$\mathbf{J}^P = \mathbf{1}^+ \quad .$$

- Per produrre uno stato di parità positiva dobbiamo avere momento angolare orbitale \mathbf{L} di modulo pari, in modo da ottenere funzioni d'onda pari per scambio di $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$.
- Protone e neutrone sono fermioni di spin $s = 1/2$ notiamo che $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ se protone e neutrone si dispongono con spin antiparallelo, oppure $\mathbf{S} = \mathbf{1}$ se si dispongono con spin parallelo.

Ne deduciamo che le due possibilità ammesse sono $(\mathbf{L}, \mathbf{S}) = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ e $(\mathbf{2}, \mathbf{1})^2$. Importanti informazioni sulla struttura del deutone sono ottenuti anche da considerazioni sui momenti di dipolo magnetico e quadrupolo elettrico. Sperimentalmente questi hanno valori ([1], pag. 84-85):

$$\begin{aligned} \mu_d &= 0.8574376(4) \mu_N \\ \mathcal{Q}_d &= 0.00288(2) e fm^2 \quad , \end{aligned}$$

dove μ_N è il magnetone nucleare. Siccome $\mathcal{Q}_d \neq 0$ lo stato fondamentale del sistema non può essere autostato di L^2 con $\ell = 0$. L'ipotesi $[\hat{H}, L^2] = 0$, che faremo nella costruzione del modello a buca quadra, risulta valida solo in prima approssimazione. Ciò comporta che la funzione d'onda dello stato fondamentale deve includere una componente con $\ell = 2$, ossia:

$$\psi = A_s \psi_s + A_d \psi_d \quad .$$

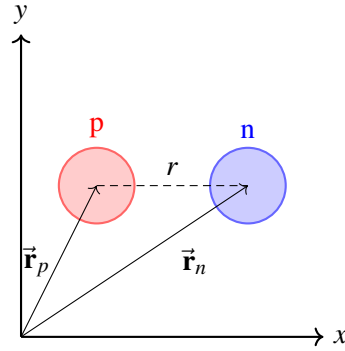
Sperimentalmente si individuano i valori $A_s = \sqrt{0.96}$ e $A_d = \sqrt{0.04}$, per semplicità in seguito trascureremo la componente ψ_d , ammettendo $\psi = \psi_s$.

²Ammettendo ora che l'interazione nucleare non distingua protone e neutrone possiamo capire perché non si osservano in natura sistemi di di-protone e di-neutrone: questi si dovrebbero disporre con spin paralleli, andando a violare il principio di esclusione di Pauli. Si veda Krane [1, p. 96-100]

1.2 Modello a buca quadra

Consideriamo protone e neutrone come particelle puntiformi³, allora il sistema presenta un totale di 6 gradi di libertà. Da questi dobbiamo sottrarne 3 per invarianza per traslazioni del centro di massa e 2 per invarianza per rotazioni. Il sistema ha solo un grado di libertà: chiamiamo \vec{r}_p e \vec{r}_n le coordinate dei due nucleoni in un generico sistema di riferimento, definiamo le coordinate del centro di massa come:

$$\vec{R} = \frac{m_p \vec{r}_p + m_n \vec{r}_n}{m_p + m_n} \quad \vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_n \quad ,$$



allora l'unica coordinata libera rimane $|\vec{r}| = r$ che descrive variazioni nella distanza relativa dei nucleoni. In questo sistema di riferimento l'operatore hamiltoniano \hat{H} è dato da

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V_{nuc}(r) + V_{em}(r) \quad ,$$

dove μ è la massa ridotta, $V_{nuc}(r)$ è il potenziale nucleare e $V_{em}(r)$ il potenziale elettromagnetico. Quest'ultimo è nullo nell'ipotesi che protone e neutrone siano particelle puntiformi, ossia non possiedano una struttura elettromagnetica. Per determinare gli autostati dell'operatore hamiltoniano \hat{H} dobbiamo risolvere l'equazione agli autovalori:

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad ,$$

dove $\psi(r)$ rappresenta la funzione d'onda dello stato fondamentale del deutone ed $E = -B$. Notiamo che la proprietà di commutazione:

$$[\hat{H}, L^2] = 0$$

segue naturalmente dall'ipotesi di simmetria sferica e dunque gli operatori $\{\hat{H}, L^2, L_3\}$ costituiscono un insieme completo di osservabili compatibili. Questo permette di fattorizzare gli autostati di \hat{H} come:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{\ell m}(\vartheta, \phi) \quad ,$$

dove le funzioni $Y_{\ell m}(\vartheta, \phi)$ sono le note armoniche sferiche che soddisfano:

$$L^2 Y_{\ell m}(\vartheta, \phi) = \ell(\ell + 1) Y_{\ell m}(\vartheta, \phi)$$

$$L_3 Y_{\ell m}(\vartheta, \phi) = m Y_{\ell m}(\vartheta, \phi) \quad ,$$

mentre $u(r)$ è detta funzione d'onda radiale ridotta e deve soddisfare:

$$\hat{H} \frac{u(r)}{r} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right] \frac{u(r)}{r} = E \frac{u(r)}{r} \quad .$$

³Questa condizione è forte, in realtà si può ammettere una condizione più debole richiedendo che siano sfere non deformabili

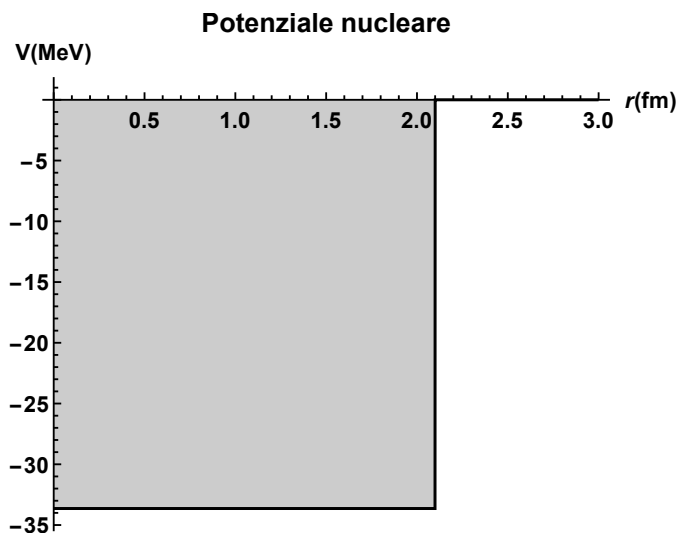


Figura 1.1: Potenziale radiale nel deutone, modellato come una buca quadra di profondità $V_0 = 33.6 \text{ MeV}$.

Sfruttiamo un potenziale a buca quadra analogo a quello in figura 1.1, ossia:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{se } r < r_0 \\ 0 & \text{se } r > r_0 \end{cases},$$

dove la profondità della buca V_0 e il raggio r_0 sono parametri liberi nel modello, che devono essere ottenuti dai risultati sperimentali. In particolare r_0 , che rappresenta la separazione tra protone e neutrone e dunque corrisponde al diametro del deutone, viene preso pari al raggio quadratico medio introdotto al paragrafo precedente. Questo modello è ovviamente molto rudimentale, la forma di V può essere scelta con maggiori attenzioni, ma permette di ottenere buoni risultati dal confronto con i dati sperimentali ed è sufficiente ai fini della nostra trattazione. Ci permette di conoscere grandezza dell'interazione nucleare e di ottenere in prima approssimazione la funzione d'onda dello stato fondamentale del deutone.

Assumiamo che lo stato fondamentale del deutone sia uno stato con momento angolare orbitale nullo ($\ell = 0$), i nucleoni si dispongono dunque con spin allineati ($S = 1$). L'equazione agli autovalori per l'hamiltoniano si riduce a:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u}{dr^2} + V(r)u(r) = EU(r)$$

che ha soluzione data dalla saldatura continua e derivabile in r_0 di una funzione oscillante e una funzione esponenziale decrescente:

$$u(r) = \begin{cases} A \sin(k_1 r) + B \cos(k_1 r) & \text{se } r < r_0 \\ C e^{-k_2 r} + D e^{+k_2 r} & \text{se } r > r_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

dove

$$k_1 = \sqrt{2\mu \frac{E + V_0}{\hbar^2}} \quad e \quad k_2 = \sqrt{-2\mu \frac{E}{\hbar^2}} .$$

Possiamo dunque determinare la funzione d'onda ψ_s :

- Imponendo che $u(r)$ si annulli per $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$, ciò comporta che B e D si annullino:

$$u(r) = \begin{cases} A \sin(k_1 r) & \text{se } r < r_0 \\ C e^{-k_2 r} & \text{se } r > r_0 \end{cases}$$

- Imponendo che in $r = r_0$ la saldatura sia continua e derivabile, ciò determina una relazione tra A e C , inoltre si ottiene l'equazione trascendentale:

$$k_1 \cot(k_1 r_0) = -k_2$$

che può essere risolta graficamente sfruttando il raggio quadratico medio del deutone $r_0 = 2.1 \text{ fm}$ e l'energia dello stato fondamentale $E = -2.22 \text{ MeV}$. Si ottiene una stima ragionevole della profondità della buca pari a $V_0 = 33.6 \text{ MeV}$.

La forma analitica della funzione d'onda è dunque

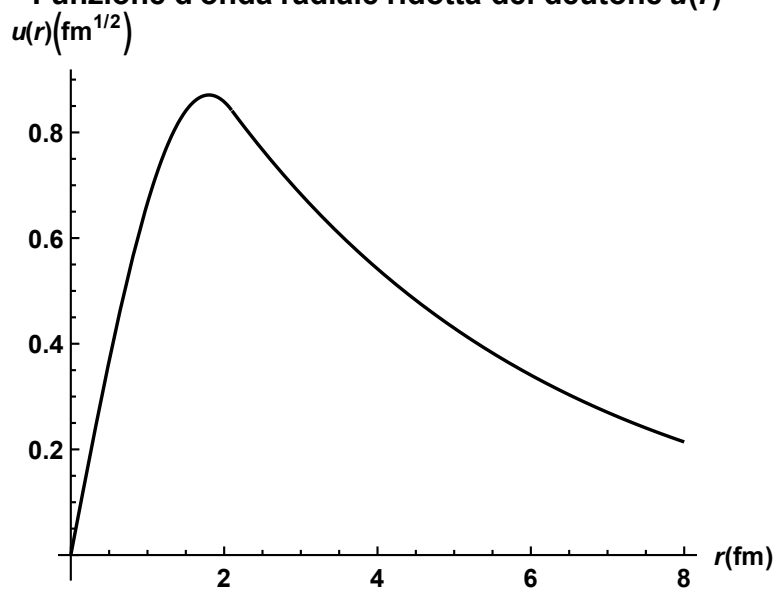
$$\psi_s(r) = \frac{u(r)}{r} Y_0^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{r} \begin{cases} A \sin(k_1 r) & \text{se } r < r_0 \\ C e^{-k_2 r} & \text{se } r > r_0 \end{cases} . \quad (1.2)$$

La condizione di normalizzazione $\int d^3 r |\psi(r)|^2 = 1$ permette di determinare i valori dei parametri riportati in tabella 1.1. L'andamento di $u(r)$ e $\psi_s(r)$ è mostrato nei grafici in figura 1.2. Questa funzione sarà sfruttata al capitolo 3 per determinare il contributo del potenziale elettrostatico all'energia dello stato fondamentale $\Delta E = \langle \psi_s | V_c | \psi_s \rangle$.

$A(\text{fm}^{-1/2})$	$C(\text{fm}^{-1/2})$	$k_1 (\text{fm}^{-1})$	$k_2(\text{fm}^{-1})$
0.87	1.37	0.87	0.23

Tabella 1.1: Valori numerici dei parametri usati per la funzione d'onda ψ_s .

Funzione d'onda radiale ridotta del deutone $u(r)$



Funzione d'onda del deutone $\psi_s(r)$

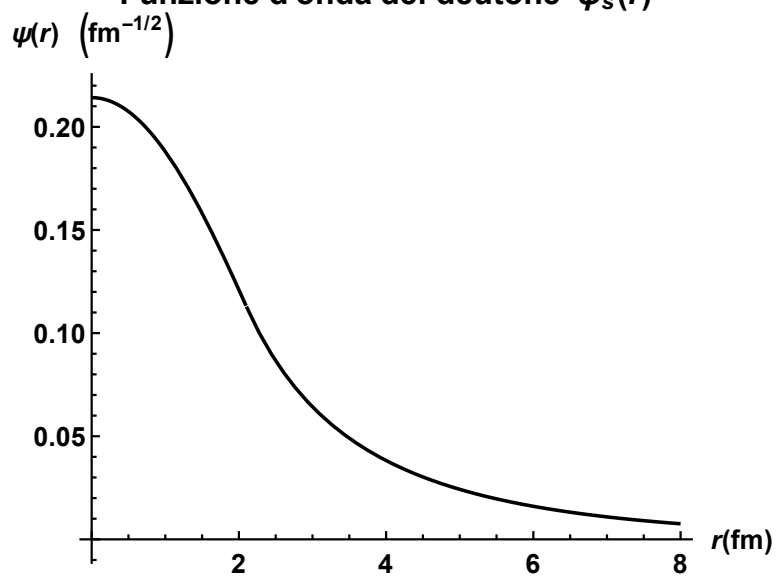


Figura 1.2: Funzione d'onda del deutone nello stato $\ell = 0$ ottenuta dal modello a buca quadra, notiamo che si presenta appena un'oscillazione entro la buca di potenziale. Funzione d'onda radiale ridotta (*Grafico superiore*) e funzione d'onda completa (*grafico inferiore*).

Capitolo 2

Densità di carica

Protoni e neutroni rendono conto di gran parte della massa della materia visibile nell'universo, basti pensare che più del 99.9% della massa del nostro sistema solare è dovuto alla presenza di nucleoni. Fino agli anni '60 protoni e neutroni erano descritti come particelle elementari e puntiformi ed evidenze di una struttura interna si avranno solo in seguito allo studio dei processi di *scattering* con elettroni su nucleoni, che valse a Robert Hofstadter il Premio Nobel nel 1961.

Nel Modello Standard i nucleoni rappresentano la specie più leggera di barioni, sistemi adronici composti di quark e gluoni che sono mantenuti legati attraverso l'interazione nucleare forte. I barioni vengono descritti come combinazioni di tre quark, detti di valenza, che costituiscono un sistema complessivamente neutro per la carica di colore. La composizione dei loro spin e le somme delle loro cariche e del loro numero barionico devono riprodurre i numeri quantici osservati per il barione.

Si osserva, tuttavia, che la massa dei nucleoni risulta essere di diversi ordini di grandezza superiore a quella dei quark, ciò suggerisce che la struttura interna di questi sistemi debba essere fortemente dinamica in modo che l'energia di legame possa spiegare l'enorme massa mancante. Un'analisi più approfondita della struttura interna dei sistemi adronici rivela infatti come gran parte della massa sia dovuta a coppie di quark-antiquark e gluoni virtuali continuamente prodotti e annichilati dall'interazione forte.

La caratterizzazione delle proprietà dei nucleoni e lo sviluppo di modelli teorici per la loro descrizione risulta ancora insufficiente, rendendo questo campo di ricerca ancora molto attivo. Consideriamo ad esempio il problema della determinazione del raggio del protone oppure il problema dell'asimmetria tra materia e antimateria barionica. In questa sezione riprenderemo i risultati che hanno portato alle attuali conoscenze sulla struttura elettromagnetica interna dei nucleoni, in particolare siamo interessati alle distribuzioni di carica sperimentali per protoni e neutroni.

2.1 Struttura interna dei nucleoni

Le prime evidenze di una struttura interna nei nucleoni si hanno negli anni '30 con la misurazione dei momenti magnetici da parte di Stern [2] per il protone e da parte di Rabi [3] per il deutone, da cui si inferisce il momento magnetico del neutrone. Partendo dall'ipotesi che i nucleoni siano fermioni puntiformi possiamo valutare il momento magnetico intrinseco in modo analogo all'elettrone, ossia come:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{g \mu_N}{\hbar} \mathbf{I} \quad ,$$

dove \mathbf{I} è il momento angolare e g è il fattore giromagnetico della particella. In particolare ci aspettiamo che per il protone $|\mu_p| = |\mu_e|$, mentre per il neutrone non si ha carica e dunque $\mu_n = 0$. I risultati sperimentali ottenuti da Stern e Rabi mostrarono per la prima volta un evidente disaccordo con una descrizione così semplicistica della struttura dei nucleoni. Riportiamo i valori odierni¹ per i momenti magnetici del nucleoni:

$$\mu_p = 2.793 \mu_N \quad \mu_n = -1.913 \mu_N \quad .$$

Per spiegare tali risultati è necessario introdurre una struttura interna complessa sia dal punto di vista elettromagnetico che dal punto di vista dei costituenti fondamentali.

Negli anni '50 grazie allo sviluppo degli acceleratori di particelle divenne possibile lo studio dei processi di *scattering* elastico di elettroni su nucleoni, in grado di fornire informazioni sulla struttura interna di quest'ultimi analogamente a come l'esperimento di Rutherford aveva fornito informazioni decisive per la comprensione della struttura atomica. Il processo fondamentale a cui sono sensibili questi esperimenti è un processo elettromagnetico al primo ordine, in cui viene scambiato un solo fotone, come illustrato in figura 2.1. Il lavoro che valse il Nobel ad Hofstadter ([7] e [8]) si focalizza sull'analisi dei processi di scattering elastico:

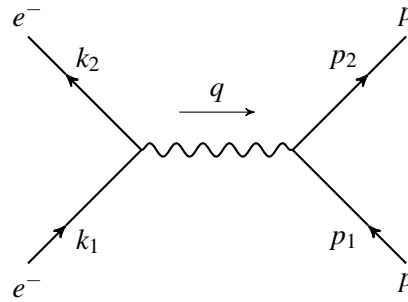


Figura 2.1: Diagramma di Feynman per i processi di scattering elastico $e^- + p \rightarrow e^- + p$.

$$e^- + p \rightarrow e^- + p \quad e^- + n \rightarrow e^- + n \quad .$$

¹Sono state riportate solo le prime cifre decimali, questi valori sono infatti conosciuti con un'incredibile accuratezza sperimentale. I valori ottenuti da Particle Data Group ([5] e [6]) sono:

$$\mu_p = 2.792847356(26) \mu_N \quad e \quad \mu_n = -1.91304273(45) \mu_N \quad .$$

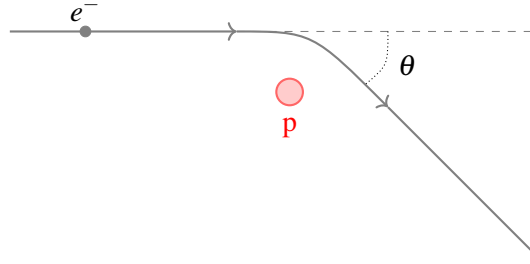


Figura 2.2: Scattering elastico protone-elettrone nel riferimento del laboratorio.

Questi processi permettono l'indagine della struttura interna dei nucleoni fino a lunghezze inferiori ad 1 fm e permettono di avere buona precisione nelle misure. L'approssimazione usata, ossia trascurare processi d'ordine superiore al primo tenendo solo lo scambio di un fotone, risulta valida entro un'accuratezza dell'1%, corrispondente al valore di $\alpha_{em} = 1/137$.

Assegniamo i momenti come riportato in figura 2.1:

- $k_1 \equiv k_1^\mu = (E, \vec{\mathbf{k}}_1)$ all'elettrone entrante, $k_2 \equiv k_2^\mu = (E', \vec{\mathbf{k}}_2)$ all'elettrone uscente.
- $p_1 \equiv p_1^\mu = (\varepsilon, \vec{\mathbf{p}}_1)$ al nucleone entrante, $p_1 \equiv p_1^\mu = (\varepsilon', \vec{\mathbf{p}}_1)$ al nucleone uscente.

L'urto elastico comporta che il nucleone rimanga nello stato fondamentale, assorbendo interamente il momento trasferito dal fotone. Il momento trasferito è un invariante del processo:

$$q^2 = (E - E')^2 - (\vec{\mathbf{k}}_1 - \vec{\mathbf{k}}_2)^2 = (\varepsilon' - \varepsilon)^2 - (\vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1)^2 = -Q^2 < 0 \quad .$$

Consideriamo un elettrone puntiforme in moto relativistico che incide su protone² a riposo nel riferimento del laboratorio. Trascuriamo la massa dell'elettrone rispetto alla sua energia. La situazione è rappresentata schematicamente in figura 2.2. In questo caso la sezione d'urto è descritta dalla formula di Mott per un elettrone relativistico di velocità β che incide su un protone di spin $1/2$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \quad ,$$

dove θ è l'angolo di *scattering*. Si tratta dunque di una correzione della nota sezione d'urto di Rutherford:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad .$$

²Consideriamo solo protoni per semplificare la trattazione, in realtà l'uso di neutroni risulta problematico a causa della breve vita media $\approx 15 \text{ min}$, perciò sperimentalmente si inferiscono i risultati dall'urto con deutoni.

Nel limite in cui $\beta \rightarrow 1$ possiamo scrivere:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \frac{\alpha^2 \cos^2(\theta/2)}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} ,$$

tenendo conto anche del rinculo del protone la sezione d'urto viene modificata inserendo un fattore $E'/E = (1 + (2E/m)\sin^2(\vartheta/2))^{-1}$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \frac{\alpha^2 E'}{4E^2 E} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} .$$

I risultati sperimentali si dispongono su tale curva se il protone presenta carica elettrica puntiforme.

Il protone presenta un momento magnetico non nullo, che interagisce con lo spin dell'elettrone, questo effetto non può essere trascurato nel calcolo della sezione d'urto che viene corretta come mostrato da Rosenbluth [9]. In riferimento al diagramma di Feynman in figura 2.1 notiamo in particolare che il vertice tra elettrone e fotone è semplicemente dato da $ie\gamma_\mu$, mentre il vertice tra fotone e protone assume una forma più articolata a causa della presenza del momento magnetico anomalo $e\kappa/2m$, data da:

$$ie\left(\gamma_\mu + \frac{\kappa}{4m}[\not{q}, \gamma_\mu]\right) .$$

dove è stato inserito il commutatore $[\not{q}, \gamma_\mu] = \not{q}\gamma_\mu - \gamma_\mu\not{q}$. Da questo diagramma otteniamo la sezione d'urto differenziale di Rosenbluth:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ros} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left\{ 1 + \frac{Q^2}{4m^2} [2(1 + \kappa)^2 \tan^2(\theta/2) + \kappa^2] \right\} .$$

Osserviamo subito che nel limite $Q^2 \ll m^2$ ritroviamo la formula di Mott. Infine se imponiamo che il protone non presenti momento magnetico anomalo ($\kappa = 0$) otteniamo la sezione d'urto:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Dirac} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left\{ 1 + \frac{Q^2}{4m^2} [2\tan^2(\theta/2)] \right\} .$$

Le misure di $\sigma_{ep}(\theta)$ vennero condotte allo SLAC, sfruttando elettroni ad energie tra i 100MeV e i 300MeV . La figura 2.3 presenta i risultati ottenuti da Hofstadter a diverse energie e le curve teoriche attese nei vari casi citati. Osserviamo come tali risultati escludono le ipotesi di protone puntiforme, infatti i dati sperimentali si dispongono tra la curva di Mott e la curva di Rosenbluth. La separazione tra le curve diventa evidente a grandi valori di θ e cresce al crescere dell'energia dell'elettrone incidente. Queste osservazioni indicando la necessità di introdurre una struttura elettromagnetica interna per il protone e per il neutrone, il cui effetto sulla sezione d'urto cresce al crescere dell'energia e dell'angolo di *scattering*.

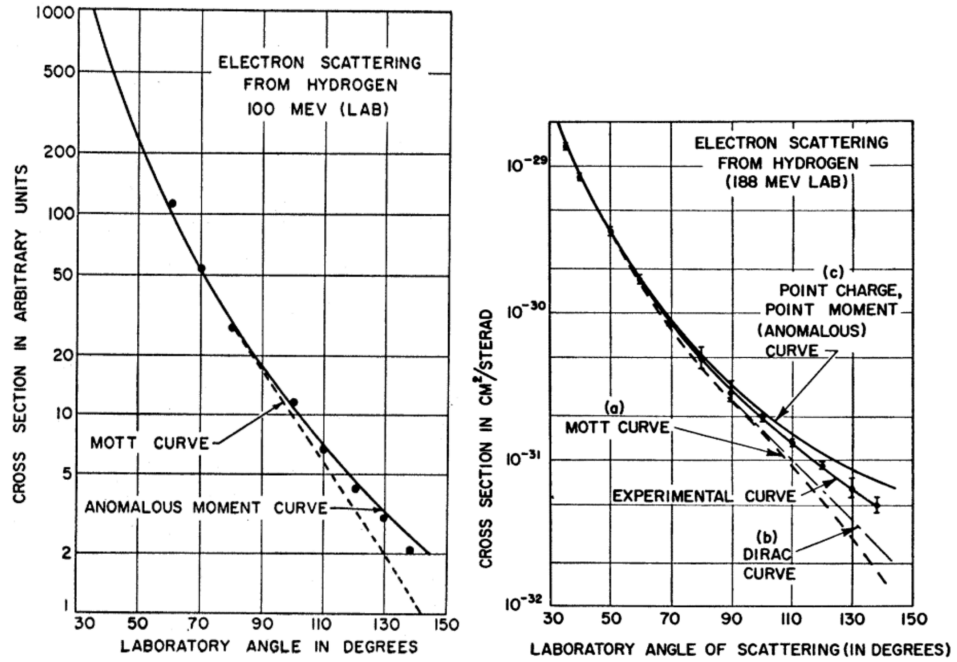


Figura 2.3: Sezione d'urto sperimentali dello scattering elettrone-protone a 100 MeV e a 188 MeV, con curve teoriche attese. [7]

2.2 Fattori di forma non relativistici

In questo paragrafo mostriamo come nasce il concetto intuitivo di *fattore di forma* e come questo può spiegare il comportamento osservato nei risultati presentati nel paragrafo precedente.

Ammettiamo che il protone abbia una struttura interna descritta da una distribuzione di carica $\rho(\vec{r})$ con simmetria sferica. Consideriamo un elettrone diffuso da un potenziale coulombiano statico generato da tale distribuzione di carica:

$$V(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad .$$

Adottiamo la convenzione per cui stati iniziale e finale dell'elettrone siano scritti come $|\psi(\vec{p}_i)\rangle$ e $|\psi(\vec{p}_f)\rangle$, dove ovviamente \vec{p}_i indica il momento dell'elettrone prima dell'interazione, quando infinitamente lontano dal protone, e \vec{p}_f indica il momento dopo l'interazione nelle medesime condizioni. L'elemento di matrice risulta:

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \langle \psi_f | V | \psi_i \rangle = \int e^{-i\vec{p}_f \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) e^{-i\vec{p}_i \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \\ &= \int \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \\ &= \int \int e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'} \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \quad , \end{aligned}$$

fissiamo \vec{r}' e sostituiamo $\vec{\mathbf{R}} = \vec{r} - \vec{r}'$. In questa nuova variabile l'elemento di matrice si fattorizza come

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \left(\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{\mathbf{R}}} \frac{1}{4\pi|\vec{\mathbf{R}}|} d^3\vec{\mathbf{R}} \right) \left(\int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}' \right) \\ &= \tilde{M}_{fi} F(q^2) \quad . \end{aligned}$$

\tilde{M}_{fi} è l'elemento di matrice nel caso in cui si abbia una carica puntiforme, mentre $F(q^2)$ è detto *fattore di forma* e corrisponde alla trasformata di Fourier della distribuzione di carica.

Valutando la sezione d'urto del processo di scattering avremo dunque:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} |F(q^2)|^2 \quad .$$

Risulta evidente che per $q^2 \rightarrow 0$ non si hanno informazioni sulla struttura interna del protone, infatti $F(0) = 1$, mentre al crescere di q^2 aumentano gli effetti della presenza del fattore di forma. Si spiega dunque come al crescere del momento trasferito i dati della figura 2.3 si allontanino dalle curve attese.

2.3 Fattori di forma relativistici

Riprendiamo il processo di *scattering* elastico $e^- p \rightarrow e^- p$ nell'approssimazione in cui viene scambiato un solo fotone, ciò si traduce nel considerare solo il diagramma ad albero in figura 2.1, dove i momenti sono stati assegnati come in precedenza. L'elemento di matrice del processo sarà proporzionale a:

$$M \propto J_\mu^{p,n}(p_1, p_2) \frac{1}{Q^2} J^{\mu e}(k_1, k_2) \quad ,$$

in cui abbiamo introdotto due correnti che descrivono l'interazione di elettrone e nucleone con il campo elettromagnetico. J_μ^e si riferisce all'elettrone, privo di struttura elettromagnetica interna, ed è data da:

$$J_\mu^e = ie\bar{v}(k_2)\gamma_\mu v(k_1) \quad ,$$

dove v e \bar{v} rappresentano operatori di creazione e distruzione per l'elettrone. $J_\mu^{p,n}$ si riferisce al nucleone che, dovendo tenere conto della struttura interna, assumerà una forma più articolata della precedente. Grazie al lavoro di Foldy [10] e di Salzman [11] si mostra come la corrente $J_\mu^{p,n}$ possa essere espressa come un elemento di matrice tra stati del nucleone che dipende da due funzioni del momento trasferito Q^2 , detti fattori di forma relativistici. Queste funzioni riprendono il concetto presentato al paragrafo precedente in ambito non relativistico. Consideriamo stati per un nucleone $|N_s(P)\rangle$, dove $N = p, n$, il quadrimomento è

dato da $P = (E, \vec{P})$ e $s = \pm 1/2$ indica la proiezione dello spin. La corrente J_μ^N deve essere un elemento di matrice tra stati di nucleoni:

$$J_\mu^N(Q^2) = \langle N(P') | J_\mu^N(0) | N(P) \rangle \quad (2.1)$$

che soddisfi l'invarianza di Lorentz, le simmetrie dell'interazione elettromagnetica (parità e coniugazione di carica) e l'equazione di continuità $\partial^\mu J_\mu^N = 0$. Si mostra come la forma più generale ammessa per tale elemento di matrice è:

$$J_\mu^{p,n}(p_1, p_2) = ie\bar{u}(p_2) \left[\gamma_\mu F_1^{p,n}(q^2) + \frac{\kappa^{p,n}}{2m_{p,n}} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2^{p,n}(q^2) \right] u(p_1) \quad . \quad (2.2)$$

Gli operatori $\bar{u}_s(P)$ e $u_s(P)$ sono operatori di creazione e distruzione di nucleoni liberi. Introduciamo i *fattori di forma* $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$, detti rispettivamente di Pauli e di Dirac che sono generalizzazione relativistica del concetto di fattore di forma che avevamo precedentemente introdotto a livello classico, in particolare ci aspettiamo che tali fattori di forma soddisfino nel limite di momento trasferito nullo le richieste:

$$F_1^p(0) = F_2^p(0) = F_2^n(0) = 1 \quad F_1^n(0) = 0$$

La sezione d'urto differenziale corretta in termini dei fattori di forma per lo *scattering* elastico elettrone-protone, ricavata da Levy, Yennie e Ravenhall [12] è:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M \left\{ (F_1)^2 + \frac{Q^2}{2m} \left[2(F_1 + \kappa F_2)^2 \tan^2(\vartheta/2) + (\kappa F_2)^2 \right] \right\} \quad ,$$

possiamo apprezzare come tale espressione rappresenti la generalizzazione di quella ottenuta da Rosenbluth per nucleoni puntiformi.

2.4 Misura dei fattori di forma

Possiamo chiederci ora quale sia l'interpretazione fisica dei fattori di forma di Dirac e Pauli che abbiamo introdotto, in particolare se questi possono essere interpretati come le trasformate di Fourier delle distribuzioni di carica e magnetizzazione dei nucleoni. Il concetto cardine è che i fattori di forma dipendono dal momento trasferito Q^2 , dunque per conoscere la struttura delle trasformate entro una distanza d dobbiamo conoscere $F(Q^2)$ a valori di $|\vec{q}| \approx 1/d$. Maggiore è la risoluzione spaziale cercata maggiori sono le scale d'energia necessarie, tuttavia i concetti di distribuzione di carica e magnetizzazione statiche non sono più validi ad energie elevate. L'ipotesi che l'interazione elettromagnetica nel processo di *scattering* considerato sia mediata da un solo fotone perde di validità al crescere del momento trasferito, rendendo più complessa la definizione dei fattori di forma. In questo paragrafo discutiamo il significato dei fattori di forma nel limite in cui il momento trasferito Q^2 sia sufficientemente piccolo, nel senso che i problemi descritti fin'ora

possono essere trascurati.

Consideriamo i fattori di forma di Dirac e Pauli nella normalizzazione:

$$\begin{aligned} F_1^p(0) &= 1 & F_1^n(0) &= 0 \\ F_2^p(0) &= 1.793 & F_2^n(0) &= -1.913 \end{aligned}$$

ossia abbiamo assorbito il momento magnetico anomalo dei nucleoni κ nella definizione dei fattori di forma di Pauli. Definiamo il parametro cinematico $\tau = Q^2/2m$, allora la sezione d'urto considerata assume forma:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left[F_1^2 + 2\tau(F_1 + F_2)^2 \tan^2(\vartheta/2) + \tau F_2^2 \right] .$$

Possiamo definire due nuovi fattori di forma detti di *fattori di forma di Sachs* [13], come combinazioni indipendenti di F_1 ed F_2 :

$$G_E(Q^2) = F_1 - \tau F_2 \quad G_M(Q^2) = F_1 + F_2 .$$

Tali fattori di forma vengono chiamati, con ovvio significato dei pedici usati, fattore elettrico (G_E) e magnetico (G_M), il loro significato fisico sarà discusso in seguito. La sezione d'urto in questo modo ha pendenza in $\tan^2(\vartheta/2)$ descritta solo da G_M :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2(\vartheta/2) \right] .$$

Sfruttiamo dunque il rapporto tra l'energia dell'elettrone uscente e quella dell'elettrone entrante $E'/E = \varepsilon = (1 + \tau \sin^2(\vartheta/2))^{-1}$. Definiamo la sezione d'urto ridotta:

$$\sigma_{Red} = \varepsilon(1 + \tau) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \varepsilon G_E^2 + \tau G_M^2 . \quad (2.3)$$

In base a queste osservazioni possiamo separare la misura dei due fattori di forma di Sachs, indagando la dipendenza della sezione ridotta dal parametro ε a Q^2 costante³. Determinati $G_E(Q^2)$ dalla pendenza e $G_M(Q^2)$ dall'intercetta possiamo ottenere i fattori di forma di Dirac e Pauli. I risultati⁴ sono mostrati nei grafici in figura 2.5 per i fattori di forma di Dirac e Pauli, e nei grafici in figura 2.4 per i fattori di forma di Sachs.

Questa tecnica presenta tuttavia delle difficoltà nella misura di G_E^n , possibile solo entro $Q^2 < 1 GeV^2$. Dall'equazione 2.3 osserviamo infatti che all'aumentare di Q^2 il fattore elettrico del neutrone, già sensibilmente minore del fattore magnetico, risulta soppresso di un ulteriore fattore $1/\tau$. Esistono altri esperimenti⁵ in grado di determinare i fattori di forma dei nucleoni con maggiore precisione sfruttando misure della polarizzazione di elettroni e nucleoni. Questi esperimenti permettono inoltre di estendere le misure per i fattori di forma fino ad un momento trasferito $Q^2 \approx 10 GeV^2$.

³Questa tecnica è nota come *separazione di Rosenbluth*.

⁴Gli andamenti dei fattori di forma dei nucleoni mostrati nelle figure 2.5 e 2.4 sintetizzano i risultati di diversi esperimenti, sono stati ottenuti da [14], pag. 11-17.

⁵Si rimanda a [14], pag. 15-17 per una trattazione in merito.

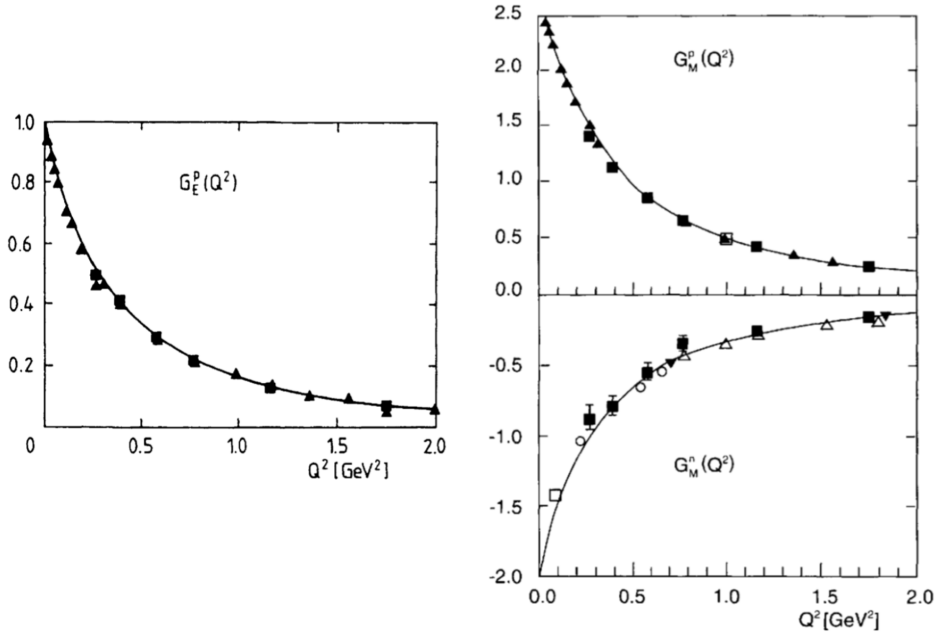


Figura 2.4: Andamento dei fattori di forma di Sachs G_E e G_M a bassi valori di Q^2 . [14]

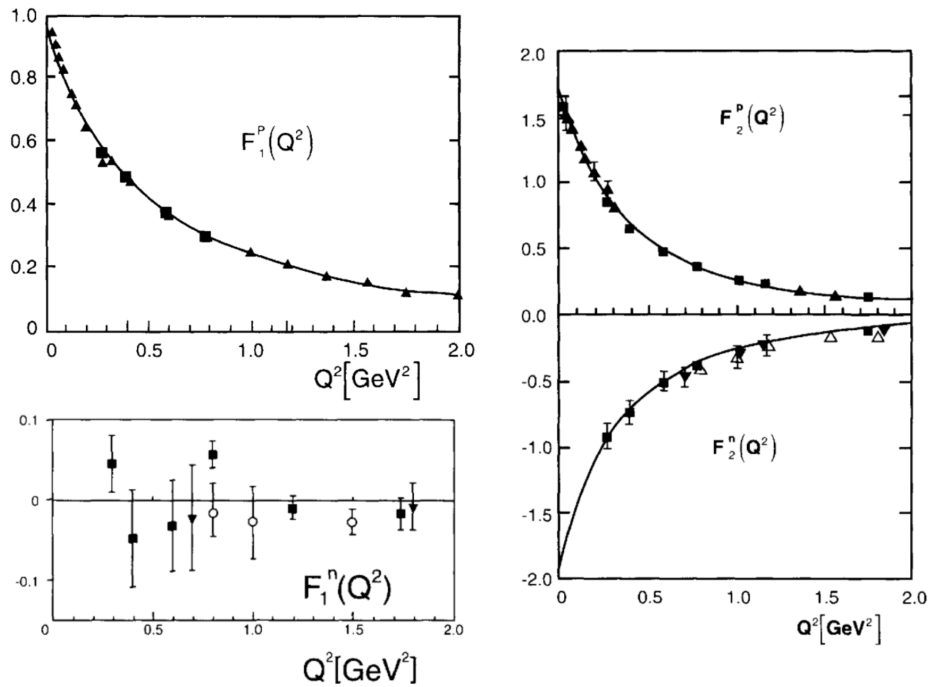


Figura 2.5: Andamento dei fattori di forma di Dirac $F_1^{p,n}$ e di Pauli $F_2^{p,n}$ a bassi valori di Q^2 . [14]

2.5 Interpretazione fisica dei fattori di forma

Sia $|N_s(P)\rangle$ lo stato che descrive un nucleone libero con momento $P^\mu = (E, \vec{P})$ e spin $s = \pm 1/2$, allora:

$$|N_s(P)\rangle = b_s^\dagger(P) |0\rangle \quad ,$$

possiamo scegliere un'opportuna normalizzazione degli stati per cui (seguendo [14], Appendice 4):

$$\langle N_{s'}(P') | N_s(P) \rangle = 2E(2\pi)^3 \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}) \delta_{ss'} \quad .$$

Ammettiamo che il nucleone sia una particella di Dirac, allora gli operatori per il nucleone nello spazio dei momenti soddisfano:

$$u_{s'}^\dagger(P) u_s(P) = 2E \delta_{s's} \quad ,$$

$$\bar{u}_{s'}(P) u_s(P) = 2M \delta_{s's} \quad .$$

Ci portiamo nel riferimento di Breit dello *scattering* elastico elettrone-nucleone⁶, il fotone scambiato non trasferisce componente temporale del momento ($q^0 = 0$) e dunque $Q^2 = q^2$. L'elettrone entrante ha momento $\vec{k}_1 = +\vec{q}/2$ e quello uscente ha momento $\vec{k}_2 = -\vec{q}/2$, analogamente per il nucleone abbiamo $\vec{p}_1 = -\vec{q}/2$ e $\vec{p}_2 = +\vec{q}/2$. Riprendiamo l'elemento di matrice trovato in equazioni 2.1 e 2.2 e valutiamolo in questo riferimento ([14], pag. 12-13), :

$$\langle N'_s(\vec{q}/2) | J^0(0) | N'_s(-\vec{q}/2) \rangle = 2m_{p,n} G_E(Q^2) \delta_{s's} \quad ,$$

$$\langle N'_s(\vec{q}/2) | \vec{J}(0) | N'_s(-\vec{q}/2) \rangle = G_M(Q^2) \chi_{s'}^\dagger (i\vec{\sigma} \wedge \vec{q}) \chi_s \quad .$$

ove χ_s rappresenta gli spinori di Pauli $\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per ogni Q^2 , nel limite in cui è possibile parlare di distribuzioni statiche, esiste un riferimento di Breit in cui $G_{E,M}(\vec{q})$ rappresentano le trasformate di Fourier delle distribuzioni di carica e magnetizzazione dei nucleoni:

$$\rho_{E,M}(\vec{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{M G_{E,M}}{E} \quad .$$

Sfruttando i risultati per le misure dei fattori di forma di Sachs a vari valori di Q^2 possiamo ricavare informazioni sulle distribuzioni di carica (e magnetizzazione). I risultati per tali distribuzioni spaziali sono rappresentati nella figura 2.6 (come compaiono in [15], pag. 26), notiamo in particolare che:

- l'indeterminazione su tali distribuzioni risulta piccola per $r \rightarrow \infty$, corrispondente al limite statico ($Q^2 \rightarrow 0$), e per $r \rightarrow 0$, corrispondente al limite in cui la QCD può essere trattata perturbativamente ($Q^2 \rightarrow \infty$).
- Nella regione intermedia, in cui si ha il contributo più importante alla distribuzione di carica, le incertezze sono ancora molto elevate.

⁶Poiché questo è un processo a due corpi il riferimento di Breit coincide con quello del centro di massa.

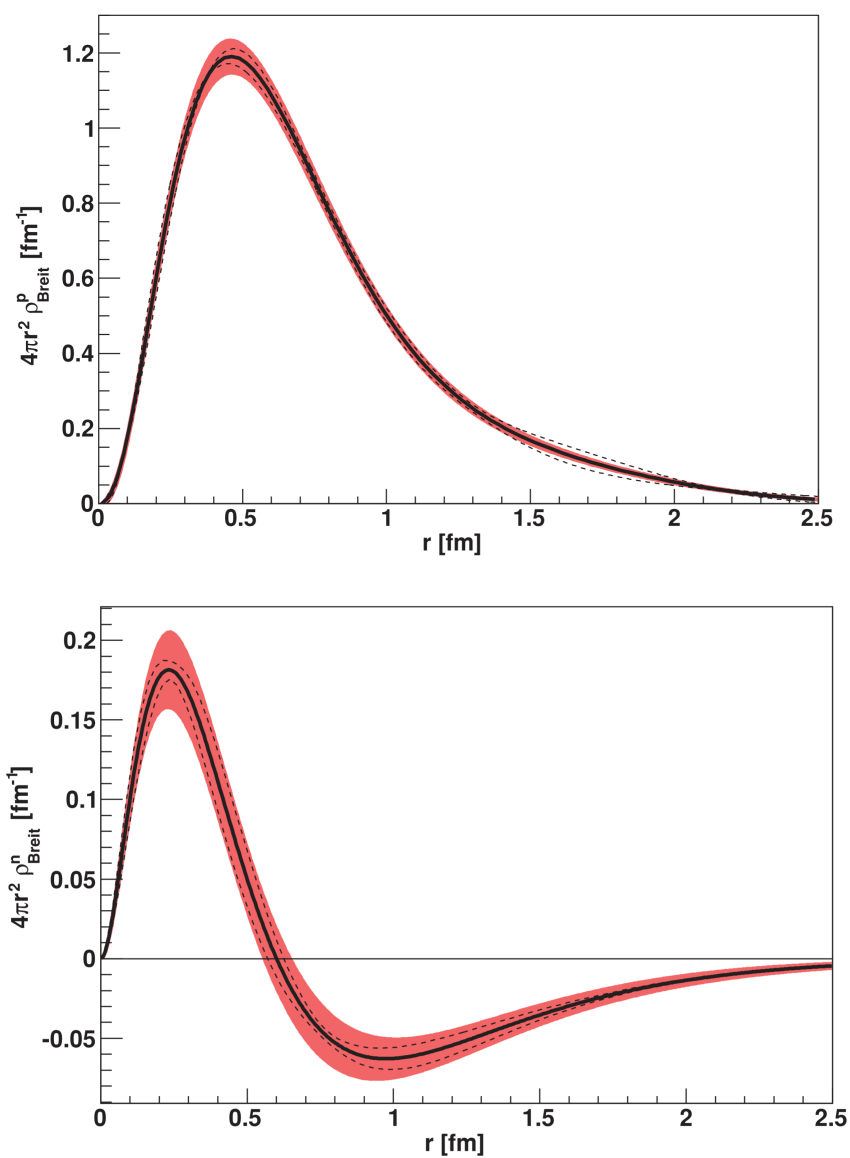


Figura 2.6: Distribuzioni di carica per il protone (grafico superiore) e del neutrone (grafico inferiore), entrambe le distribuzioni sono ottenute dalle trasformate dei fattori di forma di Sachs nel riferimento di Breit, scalate come $4\pi r^2 \rho_{p,n}$. Le curve nere riportano il valore medio dei dati ottenuti da varie misurazioni, la regione colorata mostra l'incertezza. [15]

2.6 Densità di carica dei quark

Dalle densità di carica per protone e neutrone ottenute possiamo cercare di estrarre le distribuzioni di carica dei quark *up* e *down* che compongono i nucleoni. Ammettiamo di poter trascurare il contributo a $\rho_p(r)$ e $\rho_n(r)$ di coppie quark anti-quark, in particolare dovute alla presenza di quark *strange*. In termini di quark di valenza abbiamo $p = (uud)$ e $n = (udd)$. Si mostra in [16] che sotto queste ipotesi la corrente elettromagnetica per il protone (neutrone) in equazione 2.2 può essere decomposta come:

$$J_\mu^{p(n)} = \langle p(n) | (2/3) \bar{u} \gamma_\mu u + (-1/3) \bar{d} \gamma_\mu d | p(n) \rangle \quad .$$

Dai fattori di forma per i nucleoni possiamo ricavare informazioni sui fattori di forma di Dirac e Pauli $F_{1(2)}^{u,d(p,n)}$ per i quark nel protone e nel neutrone. Sfruttando le simmetrie di carica e isospin dell'interazione forte possiamo con ottima approssimazione ammettere che $F_1^{u(p)} = F_1^{d(n)}$, $F_1^{d(p)} = F_1^{u(n)}$ e analoghe relazioni per F_2 . Seguendo [17] otteniamo le relazioni tra fattori di forma di Sachs dei nucleoni e dei quark:

$$\begin{aligned} G_E^p(Q^2) &= \frac{1}{3} \left[2G_E^u(Q^2) \right] - \frac{1}{3} \left[G_E^d(Q^2) \right] \\ G_E^n(Q^2) &= -\frac{1}{3} \left[G_E^u(Q^2) \right] + \frac{1}{3} \left[2G_E^d(Q^2) \right] \quad , \end{aligned}$$

dove $G_E^{u,d}$ indicano i fattori di forma di Sachs per i quark nel protone, che sono normalizzati come $G_E^u(0) = 2$ e $G_E^d(0) = 1$.

In termini delle distribuzioni di carica spaziali, normalizzate come $\int d^3r \rho_{u,d}(r) = 1$, le relazioni tra i fattori di forma si traducono in:

$$\rho_u^{(p)} = \rho_d^{(n)} \quad \rho_d^{(p)} = \rho_u^{(n)} \quad ,$$

ossia affermiamo che la distribuzione di carica del quark *up* (*down*) nel protone è uguale alla distribuzione di carica del quark *down* (*up*) nel neutrone. In base a queste ipotesi, comunemente assunte nella letteratura (si vedano ad esempio [18] e [19]), le distribuzioni di carica dei nucleoni in termini di quelle dei quark nel protone risultano:

$$\begin{aligned} \rho_p(r) &= 2 \left[\frac{2}{3} \rho_u^{(p)}(r) \right] + \left[-\frac{1}{3} \rho_d^{(p)}(r) \right] \quad , \\ \rho_n(r) &= 2 \left[-\frac{1}{3} \rho_u^{(p)}(r) \right] + \left[\frac{2}{3} \rho_d^{(p)}(r) \right] \quad . \end{aligned}$$

Invertendo le equazioni ottenute si possono ottenere i risultati mostrati in figura 2.7.

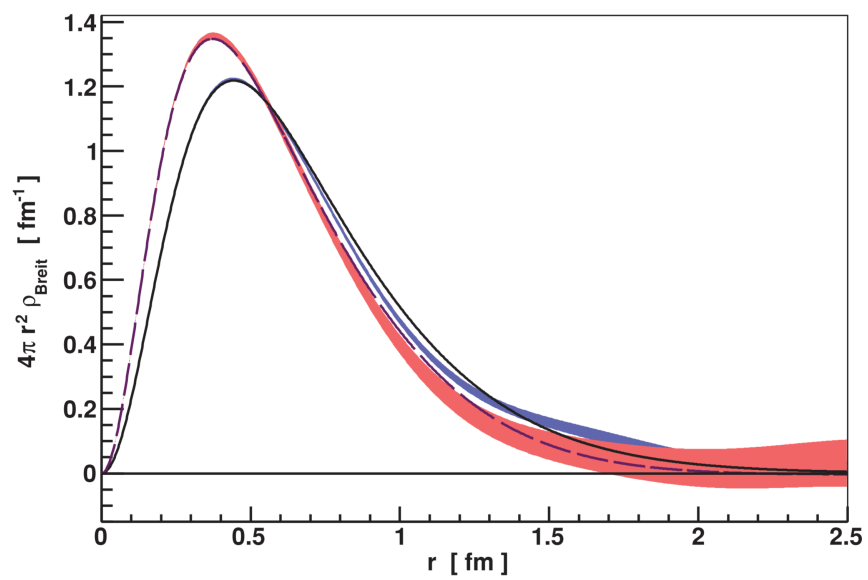


Figura 2.7: Distribuzioni di carica dei quark up e down nel protone, la linea tratteggiata si riferisce al quark down, quella continua al quark up. [19]

Capitolo 3

Modello a distribuzioni gaussiane

In questo capitolo cerchiamo di riprodurre le densità di carica di protone e neutrone attraverso un semplice modello che si basa su distribuzioni di carica gaussiane per i quark *up* e *down*. Queste distribuzioni saranno usate per determinare il potenziale di interazione coulombiana $V_c(r)$ tra protone e neutrone nel deutone in funzione della distanza tra i centri dei due nucleoni. Lo scopo di questo modello non è quello di descrivere con precisione la struttura elettromagnetica dei nucleoni, quanto invece di riprodurre l'andamento mantenendo la semplicità della dipendenza gaussiana. L'obiettivo è quello di ottenere una stima della dipendenza radiale e dell'ordine di grandezza del potenziale di interazione elettrostatica V_c del deutone, così da permettere il confronto con il potenziale di interazione nucleare V_{nuc} e la stima della correzione all'energia dello stato fondamentale $\Delta E = \langle \psi | V_c(r) | \psi \rangle$.

3.1 Distribuzioni di carica

Consideriamo nucleoni composti da soli quark di valenza $p = (uud)$ e $n = (udd)$, in modo da poter trascurare il contributo a $\rho_p(r)$ e $\rho_n(r)$ di coppie quark-antiquark, in particolare dovute alla presenza di quark *strange*. Le distribuzioni di carica dei nucleoni in termini delle distribuzioni di carica per i quark *up* e *down*, riprendendo le ipotesi di simmetria citate al paragrafo 2.6, sono

$$\rho_p(r) = 2 \left[\frac{2}{3} \rho_u^{(p)}(r) \right] + \left[-\frac{1}{3} \rho_d^{(p)}(r) \right] , \quad (3.1)$$

$$\rho_n(r) = 2 \left[-\frac{1}{3} \rho_u^{(p)}(r) \right] + \left[\frac{2}{3} \rho_d^{(p)}(r) \right] . \quad (3.2)$$

D'ora in poi useremo la convenzione:

$$\rho_u = \rho_u^{(p)} = \rho_d^{(n)} \quad \rho_d = \rho_d^{(p)} = \rho_u^{(n)} .$$

L'ipotesi fondamentale per la costruzione del modello è che queste distribuzioni abbiano simmetria radiale e una forma gaussiana:

$$\rho_u(r) = \mathcal{N}_u e^{-\alpha_u r^2} \quad \rho_d(r) = \mathcal{N}_d e^{-\alpha_d r^2} .$$

Imponiamo normalizzazione all'unità:

$$4\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho_{u,d}(r) = 4\pi \int_0^\infty \mathcal{N}_{u,d} r^2 e^{-\alpha_{u,d} r^2} = 1 \quad .$$

Ciò permette di determinare le distribuzioni di carica in termini di un solo parametro:

$$\rho_{u,d}(r) = \left(\frac{\alpha_{u,d}}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\alpha_{u,d} r^2} \quad .$$

Le equazioni 3.1 e 3.2 possono essere allora riscritte in modo da ottenere:

$$\rho_p(r) = \frac{4}{3} \left(\frac{\alpha_u}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\alpha_u r^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_d}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\alpha_d r^2} \quad , \quad (3.3)$$

$$\rho_n(r) = -\frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_u}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\alpha_u r^2} + \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_d}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\alpha_d r^2} \quad . \quad (3.4)$$

Imponendo che tali distribuzioni siano normalizzate in modo che l'integrale su una sfera di raggio infinito restituisca le cariche di protone e neutrone si ottengono due identità:

$$\begin{aligned} 1 &= \int \rho_p(r) d^3 r \\ &= \frac{16\pi}{3} \left(\frac{\alpha_u}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty r^2 e^{-\alpha_u r^2} dr - \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\alpha_d}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty r^2 e^{-\alpha_d r^2} dr \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int \rho_n(r) d^3 r \\ &= -\frac{8\pi}{3} \left(\frac{\alpha_u}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty r^2 e^{-\alpha_u r^2} dr + \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\alpha_d}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty r^2 e^{-\alpha_d r^2} dr \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Ossia $\alpha_{u,d}$ non possono essere determinati semplicemente imponendo la carica totale dei nucleoni. È necessario introdurre nel modello due dati sperimentali che permettano la determinazione dei parametri liberi. Scegliendo di sfruttare il raggio quadratico medio per protone e neutrone è immediato ricavare:

$$\begin{aligned} \langle r_p^2 \rangle &= \int r^2 \rho_p(r) d^3 r = \frac{2}{\alpha_u} - \frac{1}{2\alpha_d} \\ \langle r_n^2 \rangle &= \int r^2 \rho_n(r) d^3 r = -\frac{1}{\alpha_u} + \frac{1}{\alpha_d} \quad . \end{aligned}$$

Che costituisce un sistema di due equazioni nelle incognite $\alpha_{u,d}$ le cui soluzioni, nei casi in cui vengano usati i due valori noti per il raggio quadratico medio del

$\sqrt{\langle r_p^2 \rangle} (fm)$	$\langle r_n^2 \rangle (fm^2)$	$\alpha_u (fm^{-2})$	$\alpha_d (fm^{-2})$
0.841	-0.116	2.311	3.159
0.877	-0.116	2.107	2.789

Tabella 3.1: Valori del raggio quadratico medio per protone e neutrone usati e parametri $\alpha_{u,d}$ ricavati di conseguenza. Si veda nota 1 a piè pagina.

protone, sono riportati in tabella 3.1¹. Riportiamo in figura 3.1 i grafici per le densità di carica dei quark ottenute usando il primo raggio quadratico medio per il protone (0.841 fm). Sfruttando il raggio quadratico medio di 0.877 fm si ottengono densità qualitativamente analoghe per le quali saranno riportati solo i risultati per il potenziale di interazione. Si può apprezzare come l'andamento sperimentale (figura 2.7) venga riprodotto abbastanza accuratamente dal modello gaussiano che stiamo costruendo. Si fa notare comunque che le curve sperimentali risultano meno ampie di quelle ottenute dal modello, nel senso che:

- Il massimo di $4\pi r^2 \rho_u(r)$ si presenta verso 0.7 fm nel nostro modello, sperimentalmente si presenta verso 0.5 fm.
- Il massimo di $4\pi r^2 \rho_d(r)$ si presenta verso 0.5 fm nel nostro modello, sperimentalmente si presenta verso 0.4 fm.
- Entrambe le distribuzioni $r^2 \rho_{p,n}(r)$ mostrano una caduta più lenta al crescere di r nel nostro modello rispetto ai risultati sperimentali

Queste caratteristiche sono presenti anche per le distribuzioni ottenute per l'altro valore del raggio quadratico medio del protone.

¹I valori esatti per i raggi quadratici medi con indeterminazione sperimentale sono

$$\sqrt{\langle r_p^2 \rangle} = 0.84087(26) fm \quad \sqrt{\langle r_p^2 \rangle} = 0.8775(51) fm \quad \langle r_n^2 \rangle = -0.1161(22) fm^2$$

ottenuti dalle tavole fornite dal Particle Data Group in [5] e [6]. Abbiamo riportato entrambi i valori noti per il raggio quadratico medio del protone, in particolare il primo è ottenuto dal Lamb shift dei livelli energetici dell'idrogeno muonico, il secondo è ottenuto da esperimenti di scattering di leptoni, del tutto analoghi a quelli discussi nel capitolo precedente.

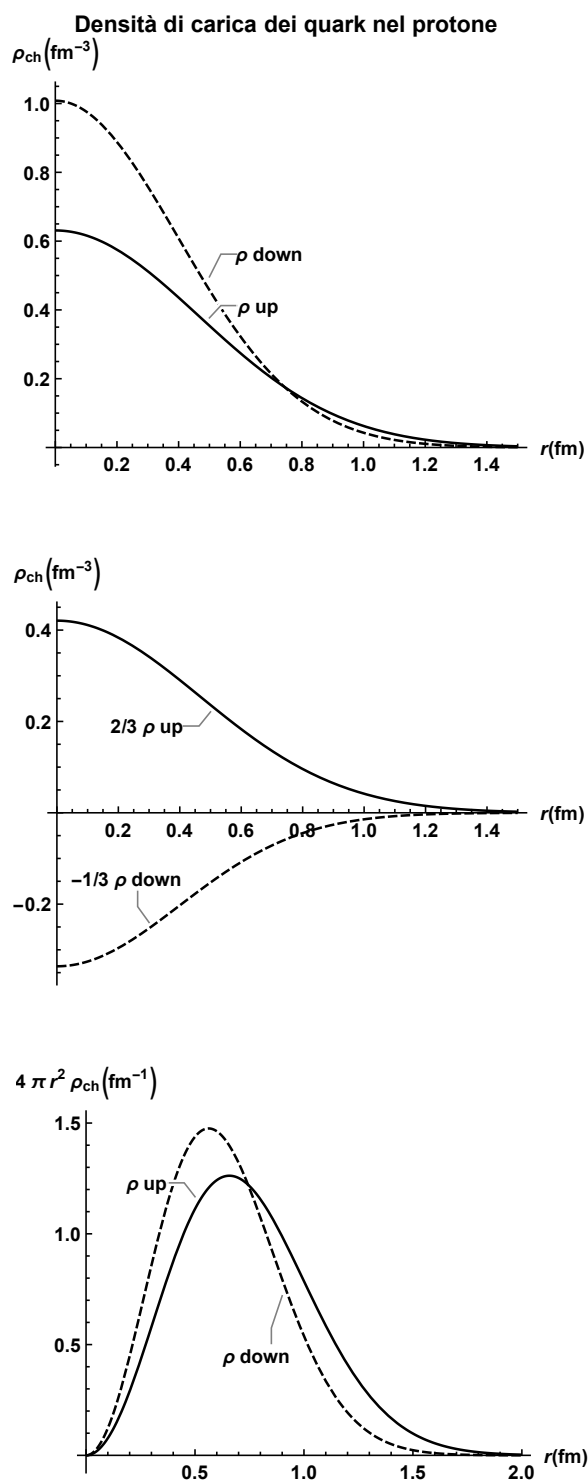


Figura 3.1: Grafico superiore: densità di carica dei quark normalizzata all'unità. Grafico in mezzo: densità di carica dei quark normalizzata alla carica effettiva. Grafico inferiore: Densità di carica $4\pi r^2 \rho_{u,d}$ per i quark up e down.

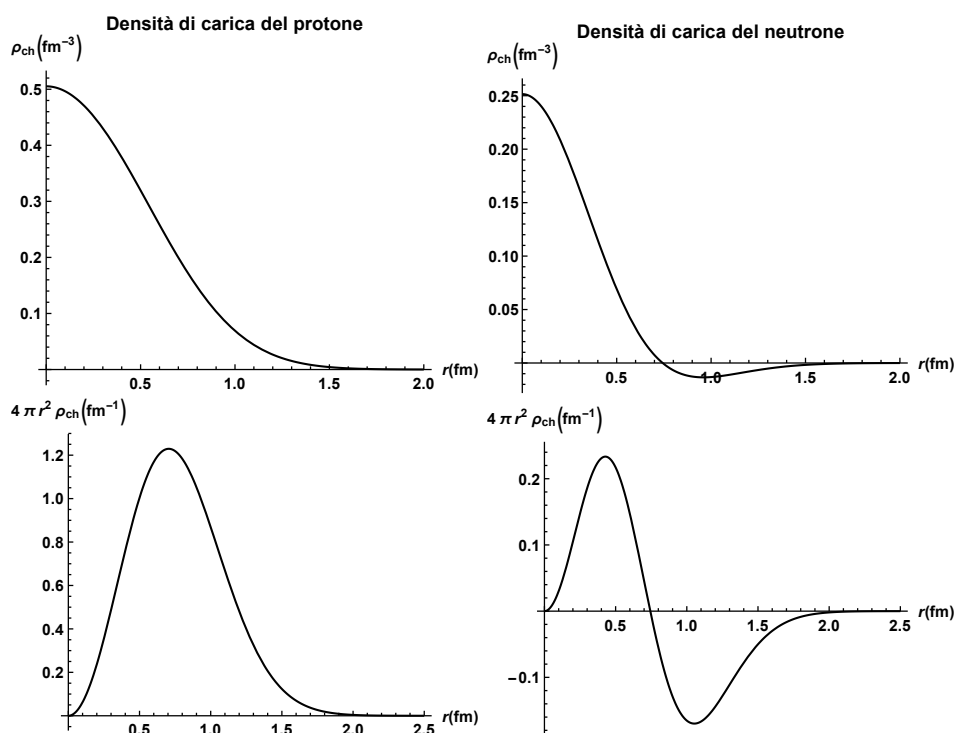


Figura 3.2: Grafici in alto: si riporta la densità di carica per protone e neutrone. Grafici in basso: si riportano le densità scalate come $4\pi r^2 \rho_{p,n}$.

In figura 3.2 si riportano le densità di carica per protone e neutrone. Questi grafici devono essere confrontati con quelli ottenuti dalle trasformate dei fattori di forma $G_E^{p,m}$ nel riferimento di Breit, riportati nelle figure 2.6. Notiamo che la dipendenza radiale e l'ordine di grandezza delle distribuzioni del modello riproducono bene i risultati sperimentali, con piccole differenze:

- Le distribuzioni trovate calano più lentamente a zero al crescere del raggio rispetto a quelle sperimentali.
- Il massimo di $4\pi r^2 \rho_p(r)$ si presenta circa 0.5 fm sperimentalmente e circa a 0.8 fm nel nostro modello.
- L'intersezione con l'asse delle ascisse di $4\pi r^2 \rho_n(r)$ si presenta verso 0.6 fm sperimentalmente e verso 0.75 fm nel nostro modello.

Si conclude che il modello gaussiano costruito sovrastima leggermente l'estensione delle distribuzioni di carica, non permette dunque una descrizione fine della struttura elettromagnetica dei nucleoni. Nonostante queste osservazioni le distribuzioni trovate forniscono una buona approssimazione al fine di ottenere una stima del potenziale di interazione elettrostatico nel deutone.

3.2 Potenziale elettrostatico

Sfruttando le distribuzioni di carica del protone e del neutrone trovate attraverso il modello costruito al paragrafo precedente, possiamo procedere con il calcolo del potenziale di interazione elettrostatica nel deutone. Con riferimento ai vettori in figura 3.3, sfruttando la simmetria sferica del sistema, possiamo scrivere il potenziale di interazione come:

$$\begin{aligned} V(R) &= \frac{1}{2} \int \rho_p(r_p) \phi_n(R, \vec{r}_p) dV_p = \frac{1}{2} \int \rho_p(r_p) \left[\int \frac{\rho_n(r_n)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{D}|} dV_n \right] dV_p \\ &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_p(r_p) \rho_n(r_n)}{|\vec{R} + \vec{r}_n - \vec{r}_p|} d^3 r_n d^3 r_p \quad , \end{aligned}$$

dove usiamo $\vec{D} = \vec{R} + \vec{r}_n - \vec{r}_p$, che rappresenta il vettore tra gli elementi infinitesimi di volume sul protone e sul neutrone in considerazione. Il potenziale dipende solo dalla distanza relativa $|\vec{R}|$ dei due centri delle distribuzioni, come richiesto dall'invarianza per rotazioni, e dunque per il calcolo possiamo scegliere un sistema di riferimento in cui $\vec{R} = (R, 0, 0)$, in modo da semplificare la forma del denominatore dell'integrando. L'integrale rimane in sei dimensioni, non può essere semplificato ulteriormente a causa della mancanza di simmetrie per \vec{r}_p ed \vec{r}_n .

Poiché la possibilità di integrazione analitica è da scartare, dobbiamo rivolgerci ad un metodo di integrazione numerica, rassicurati dal fatto che la presenza di termini gaussiani al numeratore elimina eventuali irregolarità nell'integrando. Usiamo sistemi di coordinate cartesiane (x_p, y_p, z_p) per il protone e (x_n, y_n, z_n) per il neutrone e per praticità restringiamo i domini di integrazione da tutto lo spazio a due sfere con un raggio limite λ . Per determinare un raggio limite sufficientemente contenuto per agevolare l'integrazione numerica, ma che al contempo non ne alteri i risultati, ci rivolgiamo ai grafici per le densità di carica in figure 3.2, osserviamo

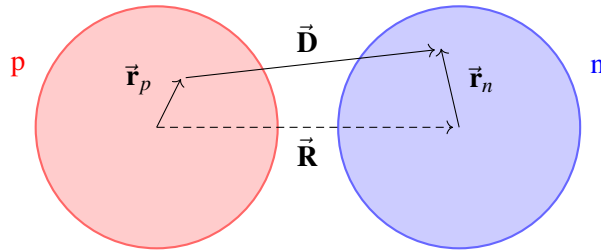


Figura 3.3: Coordinate usate nel calcolo del potenziale elettrostatico.

$\sqrt{\langle r_p^2 \rangle} (fm)$	$V_0 (keV)$	$b (fm)$
0.841	39.764	0.918
0.877	34.634	0.967

Tabella 3.2: Parametri ottenuti dal fit dei risultati dell'integrazione numerica per un'andamento gaussiano del potenziale, in relazione ai due possibili valori del raggio quadratico medio del protone.

che gran parte della carica dei nucleoni è contenuta entro $2 fm$, infatti:

$$1 - \int_0^2 4\pi r^2 \rho_p(r) dr \approx 10^{-4} \quad ,$$

$$\int_0^2 4\pi r^2 \rho_n(r) dr \approx 10^{-4} \quad .$$

Possiamo dunque porre con sicurezza il *cutoff* sul raggio dei domini di integrazione a $\lambda = 4 fm$, ossia si avranno condizioni

$$x_{p,n}^2 + y_{p,n}^2 + z_{p,n}^2 \leq \lambda^2 \quad .$$

Riportiamo i risultati dell'integrazione numerica in figura 3.4 e nella tabella 3.3, sono presenti i risultati per le distribuzioni ottenute usando entrambi i valori del raggio quadratico medio del protone ammessi. Osserviamo che:

- L'andamento può essere riprodotto in entrambi i casi con precisione da una curva gaussiana del tipo:

$$V_c(R) = V_0 e^{-(R/b)^2} \quad . \quad (3.5)$$

Il *fit* con i risultati dell'integrazione numerica permette di determinare le curve rappresentate nei grafici in figure 3.4 e i valori dei parametri V_0 e b sono riportati in tabella 3.2.

- In entrambi i casi il massimo si ha nell'origine. Questa condizione si ha per $R = 0$, ossia se protone e neutrone sono sovrapposti, che è una situazione non fisica. Il valore nel massimo è ottenuto dal *fit* della curva gaussiana e corrisponde al valore di V_0 .
- Oltre i $2.0 fm$ i valori del potenziale scendono stabilmente sotto l'1% del massimo. Oltre $R = 3.0 fm$ i risultati numerici scendono sotto la precisione limite del calcolo e oscillano intorno a 0, nelle tabelle 3.3 si riporta quindi valore nullo.
- Nella zona tra $1 fm$ e $2 fm$ in cui la funzione d'onda del deutone è massima (si veda figura 1.2), ossia dove si ha maggiore probabilità di trovare il sistema, il potenziale ha valori decrescenti da $10 keV$ fino a $1 keV$.

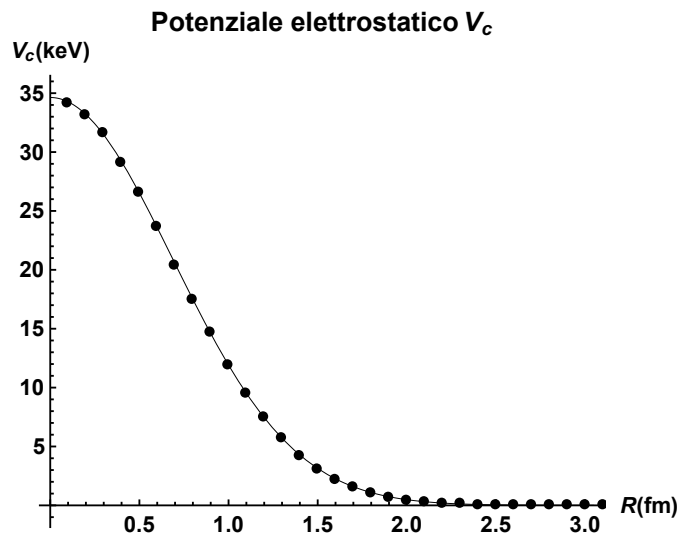
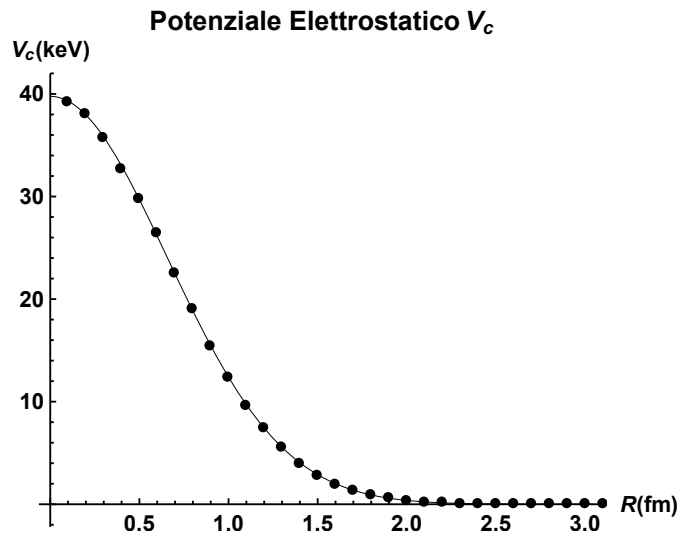


Figura 3.4: Risultati ottenuti per il calcolo del potenziale di interazione in $0 \div 3$ fm a salti di 0.1 fm, con curva gaussiana che fitta i risultati. *Grafico superiore:* risultati per $\sqrt{\langle r_p^2 \rangle} = 0.841$ fm, *grafico inferiore:* risultati per $\sqrt{\langle r_p^2 \rangle} = 0.877$ fm.

$R(fm)$	$V(R)(keV)$	$R(fm)$	$V(R)(keV)$
0.1	39.175	1.6	1.975
0.2	38.120	1.7	1.322
0.3	35.700	1.8	0.853
0.4	32.755	1.9	0.552
0.5	29.760	2.0	0.344
0.6	26.415	2.1	0.207
0.7	22.480	2.2	0.122
0.8	19.045	2.3	0.068
0.9	15.370	2.4	0.036
1.0	12.385	2.5	0.018
1.1	9.590	2.6	0.014
1.2	7.415	2.7	0.006
1.3	5.500	2.8	0.002
1.4	3.961	2.9	0.001
1.5	2.817	3.0	≈ 0

$R(fm)$	$V(R)(keV)$	$R(fm)$	$V(R)(keV)$
0.1	34.145	1.7	1.569
0.2	33.195	1.8	1.064
0.3	31.590	1.9	0.716
0.4	29.095	2.0	0.475
0.5	26.590	2.1	0.287
0.6	23.710	2.2	0.180
0.7	20.380	2.3	0.111
0.8	17.510	2.4	0.065
0.9	14.650	2.5	0.038
1.0	11.900	2.6	0.023
1.1	9.515	2.7	0.012
1.2	7.480	2.8	0.006
1.3	5.705	2.9	0.003
1.4	4.205	3.0	0.001
1.5	3.105	3.1	0.001
1.6	2.225	3.2	≈ 0

Tabella 3.3: *Tabella superiore:* risultati per $\sqrt{\langle r_p^2 \rangle} = 0.841 fm$. *Tabella inferiore:* risultati per $\sqrt{\langle r_p^2 \rangle} = 0.877 fm$.

3.3 Conclusione

Dal modello costruito per le distribuzioni di carica di quark e nucleoni abbiamo ottenuto una valutazione numerica del potenziale di interazione elettrostatica nel deutone. Questi risultati sono ben riprodotti da un potenziale di forma gaussiana $V(r) = V_0 e^{-(r/b)^2}$ per cui sono stati determinati i parametri b e V_0 . In luce di questi risultati possiamo affermare che il potenziale di interazione elettrostatica nel deutone è trascurabile rispetto ad un potenziale nucleare di $V_{nuc} = 35 \text{ MeV}$, con le seguenti attenzioni:

- Nella regione tra 0 e 1 fm il rapporto V_c/V_{nuc} assume valori dell'ordine di 10^{-3} fino a 10^{-4} , è il contributo più importante nel caso si volesse dare una descrizione di precisione del sistema.
- Nella regione tra 1 e 2 fm il rapporto V_c/V_{nuc} assume valori dell'ordine di 10^{-5} , sebbene la probabilità di trovare il deutone in questa regione sia elevata questo contributo è trascurabile.
- Oltre i 2 fm il rapporto V_c/V_{nuc} diventa inferiore a 10^{-5} , dunque questo contributo è decisamente trascurabile.

Una stima dell'importanza del contributo del potenziale elettrostatico allo stato fondamentale del deutone è data dall'elemento di matrice:

$$\Delta E = \langle \psi_s | V_c | \psi_s \rangle = \int d^3r \psi_s^*(\vec{r}) V_c(r) \psi_s(\vec{r}) \quad .$$

Sfruttando la funzione d'onda ψ_s trovata in equazione 1.2 e i potenziali gaussiani ottenuti dal *fit* in equazione 3.5 si ottengono i risultati riportati in tabella 3.4 attraverso:

$$\Delta E = 4\pi \int_0^\infty \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{u(r)}{r} \right)^2 r^2 V_0 e^{-(r/b)^2} dr \quad .$$

La correzione all'energia dello stato fondamentale è dell'ordine del percento, dunque se ne conclude che il contributo elettrostatico non è affatto trascurabile nel caso in cui si cerchi una precisione dell'ordine dell'1% o migliore.

Come già evidenziato le distribuzioni individuate presentano deviazioni dall'andamento sperimentale che conducono ad una probabile sovrastima del potenziale a piccole distanze e una sottostima a grandi distanze. Sono certamente possibili dei

$\sqrt{\langle r_p^2 \rangle} (fm)$	$\Delta E (keV)$	$\frac{\Delta E}{B}$
0.841	34.781	0.015
0.877	32.111	0.014

Tabella 3.4: Valori dell'elemento di matrice del potenziale valutato nello stato fondamentale ψ_s .

raffinamenti del modello che permettano una descrizione più fedele delle distribuzioni di carica di nucleoni e quark e dunque una stima più precisa del potenziale, anche se questi si ripercuoterebbero sulla semplicità dell'integrale di *foldng* che restituisce il potenziale. Il modello, nonostante la sua semplicità, ha permesso di raggiungere gli obiettivi prefissati.

Bibliografia

- [1] K. Krane (1987) *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley and Sons Ltd
- [2] R. Frisch, O. Stern, *Magnetic Deviation of Hydrogen Molecules and the Magnetic Moment of the Proton*, Z. Phys. **85** (1933) 4
- [3] I.I. Rabi, J.M.B. Kellogg, J.R. Zacharias, *The Magnetic Moment of the Proton*, Phys. Rev. **46** 163 (1934)
- [4] T.W. Donnelly, J.A. Formaggio, B.R. Holstein, R.G. Milner, B. Surrow (2017) *Foundations of nuclear and particle physics*, Cambridge University Press
- [5] M. Tanabashi *et al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D, **98**, 030001 (2018)
- [6] C. Patrignani *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. C, **40**, 100001 (2016)
- [7] R. Hofstadter, F. Bumiller, M.R. Yearian, *Electromagnetic Structure of the Proton and Neutron*, Rev. Mod. Phys. **30**, 482 (1958)
- [8] R.W. McAllister, R. Hofstadter, *Elastic Scattering of 188-Mev Electrons from the Proton and the Alpha Particle*, Phys. Rev. **102**, 851 (1956)
- [9] M.N. Rosenbluth, *High Energy Elastic Scattering of Electrons on Protons* , Phys. Rev. **79**, 615 (1950);
- [10] L.L. Foldy, *The Electromagnetic Properties of Dirac Particles*, Phys. Rev. **87**, 688 (1952)
- [11] G. Salzman, *Neutron-Electron Interaction*, Phys. Rev. **99**, 973 (1955) - Appendix
- [12] D.R. Yennie, M.M. Lévy, D.G. Ravenhall, *Electromagnetic Structure of Nucleons*, Rev. Mod. Phys. **29**, 144 (1957)
- [13] R.G. Sachs, *High-Energy Behavior of Nucleon Electromagnetic Form Factors*, Phys. Rev. **126**, 2256 (1962)
- [14] A.W. Thomas, W. Weise (2001) *The Structure of the Nucleon*, Wiley-VCH

- [15] The DOE/NSF Nuclear Science Advisory Committee, *The Frontiers of Nuclear Science, A Long Range Plan* (2007)
- [16] G.D. Cates, C.W. de Jager, S. Riordan, B. Wojtsekhowski, *Flavor decomposition of the elastic nucleon electromagnetic form factors*, Phys. Rev. Lett. **106**, 252003 (2011)
- [17] I.A. Qattan, J. Arrington, A. Alsaad, *Flavor decomposition of the nucleon electromagnetic form factors at low Q^2* , Phys. Rev. C **91**, 065203 (2015)
- [18] J.J. Kelly, *Nucleon charge and magnetization densities from Sachs form factors*, Phys. Rev. C **66**, 065203 (2002)
- [19] C. Crawford *et al.*, *Role of mesons in the electromagnetic form factors of the nucleon*, Phys. Rev. C **82**, 045211 (2010)