

UNIVERSITÀ DI PADOVA



FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Applicazione del campionamento compresso all'analisi di segnali a radiofrequenza

Laureando: Guglielmo Frigo

Relatore: Prof. Claudio Narduzzi

**Corso di laurea Magistrale in
BIOINGEGNERIA**

ANNO ACCADEMICO 2010/2011

a mia nonna

Indice

INTRODUZIONE

CAPITOLO I: Il campionamento compresso

1

1.1	Introduzione	1
1.2	Il protocollo tradizionale	2
1.3	Compressione e sparsità	3
1.3.1	Sparsità nel dominio della trasformata di Fourier	3
1.3.2	Sparsità nel dominio della trasformata Wavelet	4
1.4	Schema del protocollo tradizionale	7
1.5	Valutazione del protocollo tradizionale	7
1.6	Soluzioni alternative	8
1.7	Da Shannon alla teoria CS	9
1.8	Brevi cenni storici	9
1.9	Il protocollo CS	10
1.10	Schema del protocollo CS	11
1.11	Norme: formulazioni ed interpretazioni	12
1.12	Impianto teorico	12
1.12.1	Sparsità e comprimibilità	13
1.12.2	Modello delle misure	13
1.12.3	Incoerenza	14
1.12.4	Esempi di basi incoerenti	15
1.13	Un sistema sotto – determinato	16
1.14	Proprietà di isometria ristretta	16
1.14.1	Errore di ricostruzione	17
1.14.2	Numero di misure	17
1.15	Altri criteri	18
1.15.1	Mutua coerenza	18
1.15.2	Spazio nullo	18
1.16	Algoritmi di ricostruzione	19

CAPITOLO II: Algoritmi di ottimizzazione

20

2.1	Introduzione	20
2.2	Classificazioni	20
2.2.1	Linearità	20
2.2.2	Convessità	20
2.3	Applicazioni ingegneristiche	21
2.3.1	Alcuni esempi concreti	21
2.4	Il ruolo dell'utente	21
2.5	I metodi risolutivi	22
2.6	Valutazioni computazionali	22
2.6.1	Alcune fortunate eccezioni	22
2.7	Problema ai minimi quadrati	23
2.7.1	Soluzione in forma analitica	23
2.7.2	Casi particolari	23
2.7.3	Tecnologia, non arte	24
2.7.4	Ambiti di applicazione	24

2.8	Programmazione lineare	25
2.8.1	Metodi risolutivi	25
2.8.2	Algoritmo del simplesso	25
2.8.3	<i>Interior point methods</i>	26
2.8.4	Complessità computazionale	26
2.9	Un ponte ideale	26
2.9.1	Il problema di Chebyshev	26
2.9.2	Impropriamente, una tecnologia	27
2.10	Ottimizzazione convessa	27
2.10.1	Non ancora una tecnologia	27
2.10.2	Risvolti pratici	28
2.11	Ottimizzazione non lineare	28
2.11.1	Approccio locale	28
2.11.2	Un'arte a tutti gli effetti	29
2.11.3	Approccio globale	29
2.12	Metodi di linearizzazione	30
2.13	Metodi euristici	30
2.13.1	<i>Norm approximation</i>	30
2.13.2	Approssimazione pesata	30
2.13.3	Approssimazione ai minimi quadrati	31
2.13.4	Approssimazione <i>minimax</i>	31
2.13.5	Legge generale	31
2.14	Funzione penalità	31
2.14.1	Possibili realizzazioni	32
2.14.2	Un banco di prova	32
2.15	<i>Outlier</i>	34
2.16	Approssimazione vincolata	35
2.16.1	Non negatività	36
2.16.2	Vincoli parametrici	36
2.16.3	<i>Norm ball</i>	36
2.17	Problemi a norma minima	36
2.17.1	Soluzione <i>least squares</i>	37
2.17.2	Soluzione <i>least penalty</i>	37
2.17.3	Soluzioni sparse	37
2.18	<i>Bi – criterion formulation</i>	38
2.18.1	Regolarizzazione	38
2.18.2	Ambiti di applicazione	39
2.18.3	Regolarizzazione di Tikhonov	39
2.19	Procedure di <i>smoothing</i>	40
2.20	Regolarizzazione e sparsità	41
2.20.1	Esempio concreto	41
CAPITOLO III: Algoritmi <i>greedy</i>		43
3.1	Introduzione	43
3.2	Un approccio non convenzionale	43
3.3	Pro e contro	44
3.4	Banchi di prova	44
3.4.1	Problema del resto	44
3.4.2	Problema del commesso viaggiatore	45
3.5	Il concetto di matroide	46
3.5.1	Estensioni di una soluzione parziale	47
3.5.2	Le matroidi pesate	47
3.6	Una breve cronistoria	48
3.7	Una metafora linguistica	49
3.7.1	L'importanza della flessibilità	49
3.8	L'algoritmo Matching Pursuit	50
3.8.1	La definizione del dizionario	51
3.8.2	La procedura di espansione lineare	52

3.8.3	Due esempi concreti	52
3.8.4	Una decomposizione adattativa	53
3.9	L'impianto teorico dell'algoritmo MP	53
3.9.1	Proiezioni ortogonali	54
3.9.2	Selezione degli atomi	54
3.9.3	La funzione di scelta	55
3.9.4	Progressiva decomposizione del residuo	55
3.9.5	Approssimazioni intermedie	56
3.10	Problemi di ottimalità	56
3.10.1	Approssimazione ottimale	57
3.10.2	Approssimazione sub – ottimale	57
3.11	L'algoritmo Orthogonal Matching Pursuit	58
3.12	Un analogo impianto teorico	59
3.12.1	Schema operativo	59
3.12.2	Aggiornamento del dizionario	59
3.12.3	Aggiornamento dei coefficienti	60
3.12.4	Conservazione dell'energia	60
3.13	Possibili applicazioni alla teoria CS	60
3.13.1	Un confronto con il <i>basis pursuit</i>	62
CAPITOLO IV: Il convertitore MWC		63
4.1	Introduzione	63
4.2	Un esempio concreto	63
4.3	L'importanza delle informazioni a priori	64
4.3.1	Demodulazione sequenziale	64
4.3.2	Campionamento periodico non uniforme	64
4.4	Approccio <i>spectrum – blind</i>	65
4.4.1	<i>Multi – coset sampling</i>	65
4.4.2	Pregi del <i>multi – coset sampling</i>	66
4.4.3	Campionamento periodico non uniforme	66
4.4.4	Demodulatore casuale	67
4.5	Genesi del progetto MWC	68
4.5.1	L'architettura analogica	68
4.5.2	L'architettura digitale	68
4.6	Modello di segnale multi – banda	68
4.6.1	Limiti di campionamento	69
4.7	Un primo infruttuoso tentativo	69
4.7.1	Aspetti realizzativi	70
4.7.2	Limiti della strategia <i>multi – coset</i>	71
4.7.3	Valutazioni conclusive	71
4.8	La svolta: il convertitore MWC	72
4.8.1	Schema di campionamento	72
4.8.2	Aspetti realizzativi	73
4.9	Analisi nel dominio della frequenza	74
4.9.1	Acquisizione dei campioni	74
4.9.2	Legame con il segnale originario	75
4.9.3	Ruolo dei parametri	76
4.10	Funzioni di <i>mixing</i>	77
4.10.1	Vincoli da soddisfare	77
4.10.2	La scelta degli autori	78
4.11	Impianto teorico del convertitore MWC	79
4.11.1	Primo teorema di unicità	80
4.11.2	Secondo teorema di unicità	80
4.11.3	Il numero dei canali	81
4.11.4	I coefficienti delle funzioni di <i>mixing</i>	82
4.12	Modelli per le sequenze campionate	82
4.12.1	Dupliche conversione	83
4.12.2	Modello SMV	84
4.12.3	Modello MMV	84

4.12.4	Analogie SMV – MMV	85
4.13	Riduzione del modello IMV	85
4.13.1	Discretizzazione	85
4.13.2	Riduzione “esatta”	85
4.13.3	Primo stadio: conversione IMV – MMV	86
4.13.4	Secondo stadio: conversione MMV – SMV	87
4.14	Primi tentativi di implementazione	88
4.14.1	Difficoltà e complicazioni	88
4.15	Algoritmo ReMBo	88
4.15.1	Parametri operativi	89
4.15.2	Il blocco CTF	89
4.15.3	Prima opzione	90
4.15.4	Seconda opzione	91
4.16	Architettura del convertitore MWC	91
CAPITOLO V: Software di simulazione		94
5.1	Introduzione	94
5.2	Il segnale di interesse	94
5.3	Organizzazione del codice	95
5.4	Modello del segnale	95
5.4.1	Parametri di campionamento	95
5.4.2	Rappresentazione del segnale	95
5.4.3	Generazione del rumore	98
5.5	Fase di misura	98
5.5.1	Filtraggio passa – basso ed effettivo campionamento	98
5.6	Fase di ricostruzione	99
5.6.1	Ricostruzione del segnale	100
5.6.2	Grafici finali	101
5.7	Valutazione dell’algoritmo di simulazione	102
5.7.1	Segnale originale	102
5.7.2	Componente rumorosa	104
5.8	Prove di simulazione	104
5.8.1	Nuovo modello del segnale	104
5.8.2	Condizioni generiche	105
5.8.3	Sovrapposizioni in frequenza	106
5.8.4	Sovrapposizioni nel tempo	108
5.8.5	Conclusioni	108
CAPITOLO VI: Modulazione digitale		109
6.1	Introduzione	109
6.2	Complessità e prestazioni spettrali	109
6.3	Scomposizione I / Q	110
6.3.1	Diagramma polare	110
6.3.2	Formato I / Q	111
6.3.3	Modulatore I / Q	112
6.3.4	Indici di efficienza	112
6.3.5	<i>Symbol clock</i>	113
6.4	Phase Shift Keying	113
6.5	Frequency Shift Keying	114
6.5.1	Minimum Shift Keying	114
6.5.2	Ottimizzazione delle prestazioni	115
6.6	Quadrature Amplitude Modulation	115
6.6.1	Possibili varianti	116
6.7	Attraversamento dell’origine	117
6.8	Evoluzione degli schemi classici	117
6.8.1	I / Q <i>offset modulation</i>	117
6.8.2	<i>Differential modulation</i>	118
6.8.3	<i>Constant envelope modulation</i>	119

6.9	Filtraggio	119
6.9.1	Filtri a coseno rialzato	120
6.9.2	Filtri Gaussiani	121
6.9.3	Parametro di selettività	122
6.9.4	Incidenza sulle tempistiche e sui consumi	122
6.9.5	Valutazioni conclusive	123
6.10	Metodi di rappresentazione	124
6.10.1	Analisi di potenza	125
6.10.2	Costellazione	125
6.11	<i>Multiplexing</i>	126
6.11.1	<i>Multiplexing</i> in frequenza	126
6.11.2	<i>Multiplexing</i> nel tempo	127
6.11.3	<i>Multiplexing</i> dei segnali codificati	127
6.11.4	<i>Multiplexing</i> geografico	128
6.12	Penetrazione ed efficienza	128
6.13	Misure su sistemi RF digitali	129
6.13.1	Misure di potenza	129
6.13.2	Misure di frequenza	129
6.13.3	Misure di accuratezza della modulazione	129
6.13.4	Interpretazione dei dati raccolti	131
CAPITOLO VII: Risultati sperimentali		134
7.1	Introduzione	134
7.2	<i>Spectrum sensing</i>	134
7.2.1	<i>Energy detection</i>	135
7.2.2	<i>Cyclostationarity detection</i>	135
7.2.3	<i>Matched filter detection</i>	135
7.2.4	Approccio cooperativo	136
7.2.5	Selezione e coordinamento dei sensori	136
7.3	Ruolo del convertitore MWC	138
7.4	Codice di simulazione	138
7.4.1	Generazione del segnale	138
7.4.2	Ricostruzione del segnale	141
7.5	Valutazione dei risultati	142
7.6	Errore di ricostruzione nel tempo	142
7.6.1	Rapporto SNR 25 dB	143
7.6.2	Rapporto SNR 10 dB	144
7.6.3	Rapporto SNR 0 dB	145
7.6.4	Rapporto SNR -10 dB	147
7.6.5	Rapporto SNR -20 dB	148
7.7	Diagramma di costellazione del segnale ricostruito	150
CONCLUSIONE		153
BIBLIOGRAFIA		

Introduzione

Tra le fila della comunità scientifica va progressivamente affermandosi un nuovo protocollo di acquisizione, noto anche come campionamento compresso, in grado di eludere il vincolo rappresentato dalla frequenza di Nyquist. Questo studio intende verificarne pregi e difetti, sottolineando analogie e differenze con il protocollo tradizionale, basato sul teorema di Shannon.

Particolare attenzione verrà riservata ad un recente progetto di convertitore, il *modulated wideband converter*, destinato all'analisi dei segnali a radiofrequenza, la cui procedura di acquisizione si presta ad essere realizzata abbastanza agevolmente anche come algoritmo di elaborazione. Un'attenta disamina del disegno circuitale potrà, infatti, rivelarne gli aspetti procedurali più interessanti e le soluzioni tecnologiche più significative. Inoltre, un apposito *software* di simulazione consentirà di caratterizzarne le prestazioni, anche in condizioni difficilmente riproducibili in laboratorio.

Nel più ampio contesto delle misure riferite a segnali sparsi, un plausibile ambito di applicazione verrà individuato nelle procedure di *spectrum sensing*. A tal proposito, in questo studio, sarà approntato un insieme numeroso e articolato di simulazioni, volte a quantificare l'affidabilità e la precisione garantite da un simile approccio.

CAPITOLO I

Il campionamento compresso

1.1 Introduzione

Il settore dell'ingegneria dell'informazione è estremamente vitale e dinamico. L'incessante sviluppo tecnologico fornisce sempre nuovi spunti e potenziali sbocchi applicativi. Basti considerare la rapidità con cui i più comuni strumenti di comunicazione, dai telefoni ai computer, diventano obsoleti e superati.

In un simile contesto, è sorprendente che ancora oggi il teorema di Shannon, formulato oltre sessant'anni fa, si dimostri attuale e desti l'interesse di numerosi scienziati ed esperti del settore. Questa affermazione è suffragata da un dato in particolare. Nella letteratura scientifica, sono pochi i risultati che vantano un maggior numero di citazioni o riferimenti.

In occasione del cinquantesimo anniversario dalla sua pubblicazione, Michael Unser gli ha tributato un articolo commemorativo [1]. Il pretesto è fornito dalla descrizione dello stato dell'arte in tema di campionamento. In realtà, da ogni proposta alternativa traspare il ruolo centrale e irrinunciabile della formulazione di Shannon.

La versione originale del teorema compare in un articolo, datato 1949, dal titolo "*Communication in the presence of noise*". Accingendosi alla lettura, si rimane stupiti non solo dai contenuti, che spaziano dai teoremi alle simulazioni sperimentali, ma anche dal linguaggio adottato dall'autore. A tal proposito, lo stile di Shannon è diretto e conciso. Questo agevola la comprensione del testo, accessibile così anche ai lettori meno esperti o informati.

Al di là degli aspetti formali, l'articolo affronta la questione del rumore e delle sue ripercussioni. In presenza di componenti spurie o comunque indesiderate, le trasmissioni manifestano distorsioni, a volte tali da inficiarne la corretta interpretazione. Concentrando la propria attenzione sul processo di acquisizione, Shannon intende determinare la relazione che intercorre tra la frequenza di campionamento e il tasso di distorsione nel segnale ricostruito.

Questa ricerca viene coronata dal teorema, enunciato già nelle primissime righe dell'articolo.

T.1.1 Se non contiene frequenze maggiori di ω_{max} , espressa in radianti per secondi, la funzione $f(x)$ è completamente determinata dalle sue ordinate in una serie di punti spazati tra loro di $T = \pi/\omega_{max}$ secondi [2].

In realtà, la paternità di questo risultato non è molto chiara: formulazioni equivalenti sono già apparse in ambito matematico, grazie all'opera di Whittaker [3] nel 1929, e Kotel'nikov [4] nel 1933. Lo stesso Shannon non vi riconosce una propria scoperta, quanto piuttosto un criterio di comune impiego nella pratica sperimentale. Basti considerare che già Nyquist, prima di lui, lo ha applicato allo studio delle

trasmissioni telegrafiche. Shannon, che nutre grande stima e ammirazione per il suo predecessore, intende rendergli omaggio, attribuendo al valore limite ω_{max} il nome simbolico di frequenza di Nyquist.

Questa verità storica non deve, però, oscurare gli indiscutibili meriti che gli spettano. Con un approccio prettamente ingegneristico, l'enunciato T.1.1 pone l'accento sui risvolti concreti e applicativi, lasciando intravedere innumerevoli potenziali sviluppi.

Evidentemente, qualsiasi proposta affronti l'argomento del campionamento non può prescindere da un'apposita formula di ricostruzione. Al riguardo, Shannon ricorre ad una sommatoria pesata [2]:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) \text{sinc} \left(\frac{x}{T} - k \right)$$

I campioni acquisiti pesano il contributo di alcune funzioni base, ottenute mediante opportune operazioni di traslazione e scala della funzione *sinc*.

Anche in questo caso, resta irrisolto il nodo della paternità. Nel 1915 Whittaker presenta un'espressione del tutto equivalente, cui attribuisce il nome di espansione della serie cardinale [5]. D'altro canto, esistono testimonianze ancora precedenti di formulazioni analoghe [6].

1.2 Il protocollo tradizionale

I riflessi e le implicazioni del teorema di Shannon sono ancora oggi ben visibili in molteplici aspetti delle telecomunicazioni. Il suo enunciato, infatti, ha ispirato la formulazione di un vero e proprio protocollo per l'acquisizione dei segnali: il campionamento è condotto con un passo uniforme T e una frequenza non inferiore a ω_{max} .

Storicamente, questo approccio si è affermato a tal punto da guadagnarsi il titolo di protocollo tradizionale. D'altro canto, sarebbe improprio considerarlo immune da difetti. In alcuni elementi, il modello adottato da Shannon risulta eccessivamente idealizzato ed evidenzia pesanti discrepanze rispetto all'effettiva realtà sperimentale e applicativa.

A tal proposito, una versione preliminare dell'enunciato T.1.1, poi rivisitata e corretta, si applica ai soli segnali limitati sia nel dominio della frequenza, sia nel dominio del tempo. Tuttavia, una simile condizione è troppo stringente e riduttiva. Lo stesso Shannon osserva che non esiste un segnale non nullo che esibisca tali caratteristiche [7]. Di conseguenza, propone una nuova formulazione, quella effettivamente pubblicata, dove elimina il vincolo inerente il dominio del tempo.

In realtà, questa decisione non risolve pienamente il problema di discrepanza. Dato un generico segnale naturale, la sua estensione spettrale può essere definita limitata solo in prima approssimazione. Inoltre, potrebbe comprendere componenti a frequenze così elevate da risultare incompatibili con gli odierni strumenti di acquisizione.

All'atto pratico, la soluzione più diffusa prevede di sottoporre il segnale ad una fase preliminare di filtraggio passa – basso. Non si tratta, però, di una scelta indolore: tutte le componenti esterne alla banda passante sono irrimediabilmente perdute e non vengono ricostruite.

Un altro punto debole si cela nella formula di ricostruzione. La funzione *sinc* è caratterizzata da un decadimento molto lento, che ne sconsiglia l'impiego. Per questo motivo, in genere si preferisce ricorrere ad algoritmi più semplici, come l'interpolazione lineare dei campioni.

Apparentemente, queste critiche di discrepanza minano l'affidabilità del protocollo tradizionale, che sembra disattendere le esigenze applicative. In realtà, una riconciliazione è possibile e auspicabile. Apportando le opportune modifiche, il teorema di Shannon si dimostra perfettamente in grado di fronteggiare simili problematiche [1].

1.3 Compressione e sparsità

Alla luce delle osservazioni precedenti, la frequenza di taglio del filtro passa – basso influenza in modo cruciale le prestazioni del protocollo tradizionale. Pertanto, nella sua scelta si cerca di bilanciare due esigenze contrastanti.

Da un lato, non si vogliono sacrificare eccessivamente le componenti ad alta frequenza. Dall'altro, estendere la banda passante significa necessariamente ridurre il passo di campionamento T , con tutte le difficoltà strumentali che ne conseguono.

Un ottimo compromesso è offerto dai cosiddetti algoritmi di compressione, mediante i quali, effettuata un'acquisizione ad alta frequenza, è possibile ridurre la mole dei dati da trattare. Questa soluzione consente di salvaguardare sia il contenuto informativo del segnale di interesse, sia l'efficienza di operazioni molto frequenti, quali memorizzazione e trasmissione.

La letteratura informatica contempla molteplici algoritmi, ognuno dei quali sfrutta una particolare caratteristica del segnale. Di conseguenza, le prestazioni dipendono fortemente dalle condizioni di utilizzo e non è possibile individuare un *gold standard* valido universalmente.

Da un punto di vista matematico, esistono diversi formalismi per rappresentare un segnale. Quello di più immediata comprensione e di più diffuso impiego ricorre ad un'istanza tipica dell'algebra lineare: i vettori.

Nell'ambito della pratica sperimentale, non è raro imbattersi in segnali che, una volta espressi in un opportuno dominio, ammettono un'espressione in forma vettoriale molto semplificata, con pochi elementi non nulli o comunque significativi. Il fenomeno è così frequente che ha spinto gli studiosi a darne una dimensione quantitativa, tramite l'introduzione delle definizioni di vettore sparso e vettore comprimibile.

Analogamente agli algoritmi di compressione, le condizioni ottimali non sono univoche, ma variano da caso a caso. Alcuni semplici esempi, tratti direttamente dalla pratica sperimentale, aiutano a comprendere meglio questa affermazione.

1.3.1 Sparsità nel dominio della trasformata di Fourier

Nell'intervallo temporale $[0 \ 1]$ secondi, si consideri un segnale discreto, a valori reali, formato da $n = 512$ campioni, derivante dalla sovrapposizione di tre onde sinusoidali di frequenza pari rispettivamente a 50, 100 e 200 hertz.

La trasformata di Fourier ne restituisce l'equivalente rappresentazione nel dominio della frequenza. Nel caso specifico, ad ogni senoide corrisponde un impulso ideale centrato nella rispettiva frequenza. Inoltre, trattandosi di un segnale discreto reale, la sua trasformata gode della simmetria hermitiana, ossia ha parte reale e modulo pari, parte immaginaria e argomento dispari.

Dunque, sono solo $k = 6$ i coefficienti non nulli, ossia significativi, ed è sufficiente memorizzarne ampiezza e localizzazione per descrivere in modo esauriente il segnale. Paradossalmente, conoscendo a priori le frequenze di interesse, lo si potrebbe ricostruire fedelmente, disponendo di un numero di campioni pari al valore minimo ottimale, $k = 6$.

Ecco che, in termini, per il momento, solo qualitativi, si può indubbiamente affermare che il segnale ammette rappresentazione sparsa nel dominio della trasformata di Fourier.

Peraltro, l'esempio mette in evidenza un altro aspetto. La sparsità di un segnale si rivela utile non solo in sede di acquisizione, ma anche per evincere caratteristiche peculiari del segnale, altrimenti celate o di difficile deduzione. A tal proposito, l'andamento del segnale in esame nel tempo appare frastagliato e di complicata interpretazione, di contro, in frequenza è semplice e di immediata comprensione.

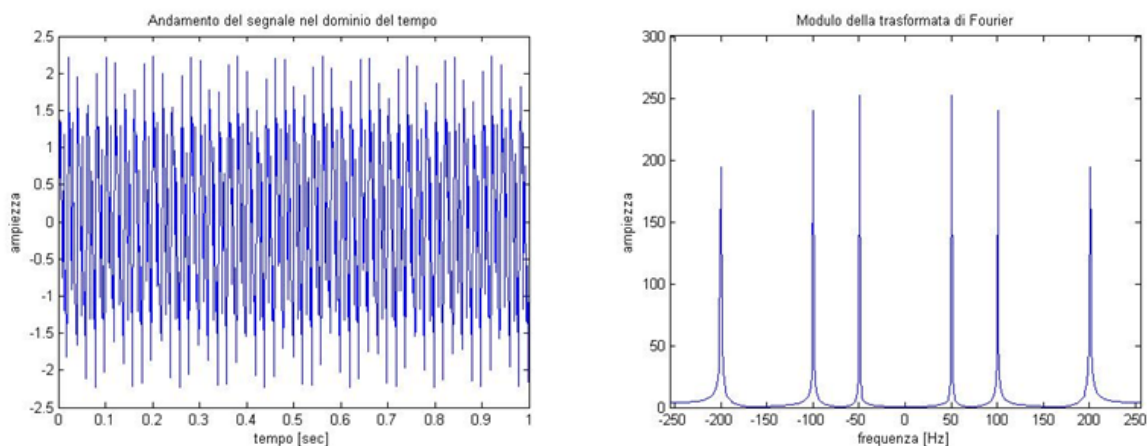


Figura 1.1 Rappresentazione del segnale nel dominio del tempo a destra, nel dominio della trasformata di Fourier a sinistra

1.3.2 Sparsità nel dominio della trasformata Wavelet

Il secondo esempio proviene dall'ambito dell'elaborazione di immagine. Vista la varietà e la versatilità delle possibili applicazioni pratiche, l'argomento è stato ed è tuttora oggetto di numerosi ed approfonditi studi. L'obiettivo principale è quello di approntare algoritmi sempre più efficienti, in grado di acquisire solo le componenti più informative e di scartare tutto ciò che risulta superfluo o comunque non necessario per il successivo impiego dei dati.

Si consideri il caso di un'immagine a livelli di grigio, o *grayscale*, anche se il ragionamento si estende senza problemi anche alle immagini in formato RGB. Da un punto di vista matematico, nel caso *grayscale*, l'immagine viene interpretata come una matrice, in cui ogni elemento rappresenta un pixel ed il suo valore numerico ne determina l'intensità luminosa, o più propriamente il livello di grigio.

Nel caso RGB, invece, il segnale di ogni pixel è il risultato della somma, nelle opportune proporzioni, dei tre colori fondamentali: rosso, verde e blu e proprio le loro iniziali in lingua inglese costituiscono l'acronimo che identifica il formato. A questo punto, è sufficiente scomporre l'immagine in tre matrici, una per ogni colore fondamentale, in perfetta analogia con il caso precedente.



Figura 1.2 Nella fotografia nell'angolo in alto a sinistra si vede l'immagine con i colori originali, alla sua destra la versione in bianco e nero, sotto le tre versioni monocromatiche generate da ogni singolo canale R, G e B

L'adozione di un simile formalismo matriciale comporta diversi vantaggi all'atto pratico. Innanzitutto, si possono effettuare operazioni aritmetiche e logiche, come le sottrazioni o le sogliature, altrimenti difficilmente praticabili. Inoltre, conoscendo i valori puntuali di intensità, se ne può tracciare l'istogramma. A quel punto, una delle più consuete tecniche di miglioramento dell'immagine prevede proprio l'equalizzazione dell'istogramma.

Tuttavia, nell'ambito della sparsità del segnale, un aspetto da non tralasciare è la possibilità di applicare ai singoli pixel opportune trasformazioni. Il presente esempio si concentra, in particolare, sulla trasformata Wavelet.

Tra le sue peculiari caratteristiche, emerge il fatto che è localizzata sia nel tempo che nella frequenza, a differenza della trasformata di Fourier, che lo è solo in frequenza. In verità, un'eccezione in tal senso è offerta dalla cosiddetta trasformata di Fourier a tempo breve, o *short time Fourier transform* (STFT), localizzata sia in frequenza che nel tempo, che, però, manifesta problemi di risoluzione.

Sempre a vantaggio della trasformata Wavelet, gioca la minore complessità computazionale. In particolare, indicando con N la mole di dati trattati, l'esecuzione richiede $O(N)$ operazioni contro le $O(N \log N)$ necessarie alla trasformata di Fourier veloce, o *fast Fourier transform* (FFT).

Tornando al segnale in esame, si riscontrano numerose analogie con l'esempio precedente.

Nel dominio dello spazio, la risoluzione è proporzionale al numero di pixel per unità di lunghezza. Di conseguenza, maggiore è il dettaglio desiderato, maggiore è la mole dei dati da trattare.

In tal senso, memorizzare i valori dei singoli pixel o di una loro versione comunque campionata è una soluzione praticabile ed efficiente solo in rare e particolari situazioni.

La trasformata Wavelet, invece, costituisce una valida e comoda alternativa, anche se il risultato che porge non consente un'interpretazione altrettanto semplice ed immediata. Anzi, ad una prima e superficiale osservazione, la rappresentazione appare più complessa di quella originale e non sembra neppure sparsa.

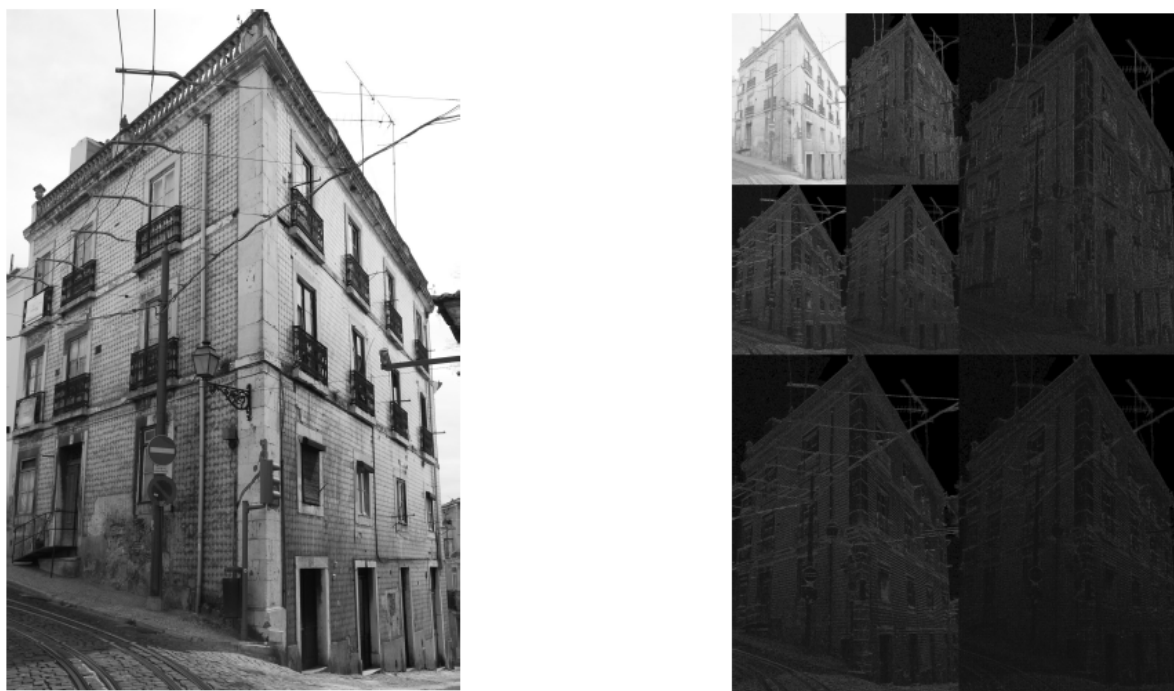


Figura 1.3 A sinistra un'immagine *grayscale*, a destra la sua trasformata Wavelet [18]

In realtà, una più attenta analisi rivela che i coefficienti della trasformata sono veramente per la maggior parte non nulli, ma solo una loro minima frazione supera una pur minima soglia. Se ne può dedurre che in questi ultimi sia contenuta la quasi totalità dell'informazione.

A riprova di ciò, fissata una soglia e considerati solo i coefficienti che la superino, la ricostruzione che se ne ricava è pressoché indistinguibile dall'immagine originale.

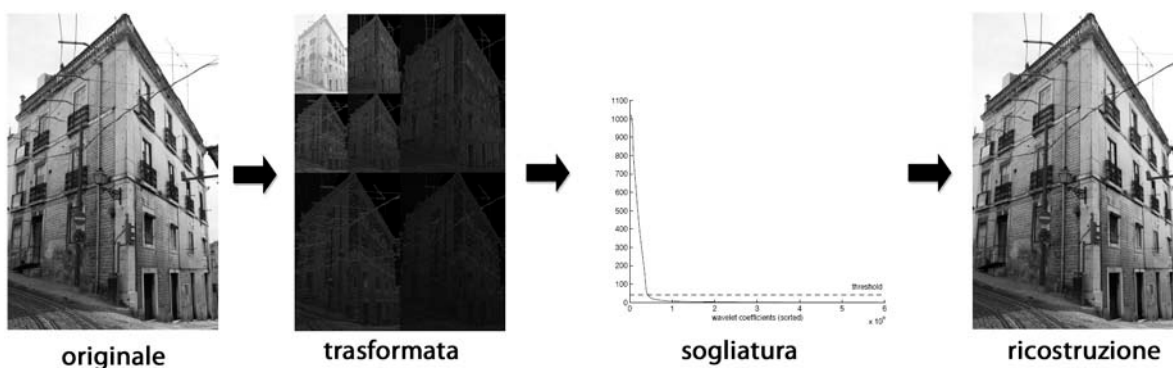


Figura 1.4 Procedura di ricostruzione di un'immagine, sfruttando solo i coefficienti più significativi della sua trasformata Wavelet

In taluni ambiti la perdita di dettagli, per quanto minimali, può inficiare la correttezza dell'interpretazione dell'immagine e delle successive elaborazioni. Per questo motivo, la selettività della soglia costituisce un aspetto critico nell'intera procedura.

Al di là di questa doverosa precisazione, nell'opportuno dominio il segnale ammette una rappresentazione sparsa e il tasso di semplificazione è ragguardevole, se si considera che l'immagine originale ha una dimensione di circa 1.5 Mb , la sua trasformata Wavelet consta di $n = 6.016 \times 10^6$ coefficienti non nulli, ma di questi quelli che superano la soglia imposta sono solo il 7% del totale [8].

1.4 Schema del protocollo tradizionale

Da entrambi gli esempi proposti è facile constatare come le proprietà di sparsità possano suggerire algoritmi alternativi e soluzioni più vantaggiose per il problema di acquisizione.

Evidentemente, un approccio di questo genere dipende in modo cruciale dalle peculiarità del segnale in esame e conduce a realizzazioni specifiche, caso per caso. La tradizionale teoria del campionamento, invece, applica indistintamente ad ogni segnale lo stesso protocollo.

Un semplice schema a blocchi evidenzia i successivi stadi di elaborazione e distingue due livelli operativi: quello del sensore e quello del ricevitore.

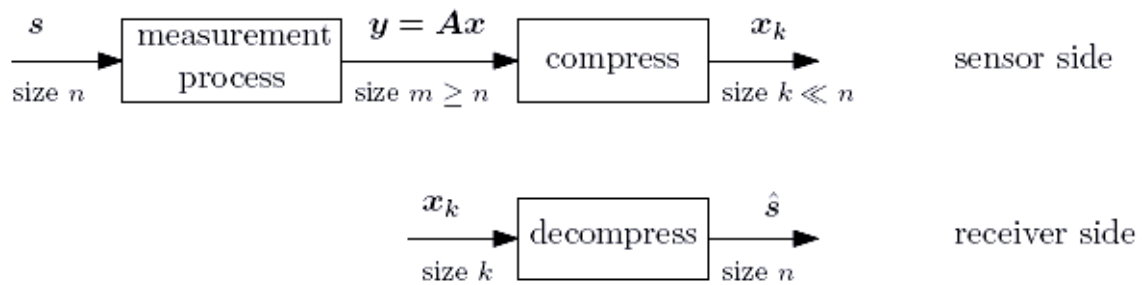


Figura 1.5 Schema a blocchi del protocollo tradizionale [8]

A livello del sensore, il segnale originale viene campionato a passo costante, ottenendo un vettore di n misure. Le elevate prestazioni degli odierni sistemi di acquisizione consentono una griglia di campionamento molto fitta, in grado di percepire anche minime variazioni del segnale. La controindicazione in tal senso è rappresentata dal notevole incremento di campioni acquisiti. Perciò, questi ultimi vengono inviati allo stadio di compressione, ove la dimensione del vettore si riduce a $k \ll n$.

A livello del ricevitore, si attua semplicemente la decompressione, che all'occorrenza restituisce il vettore degli n campioni acquisiti.

1.5 Valutazione del protocollo tradizionale

L'intero protocollo tradizionale si fonda essenzialmente sul teorema di Shannon. Quindi, qualora le condizioni operative siano tali da soddisfare le ipotesi dell'enunciato T.1.1, è assicurata la perfetta ricostruzione del segnale campionato.

Un altro elemento a favore del protocollo tradizionale è rappresentato dalla procedura di ricostruzione, che si esaurisce in un'unica fase di decompressione.

D'altronde, è bene precisare che la bontà di questi due aspetti non ha necessariamente una ricaduta sulle prestazioni all'atto pratico. Ogni valutazione di ordine computazionale deve considerare gli specifici algoritmi adottati e la mole di dati trattati.

A fronte dei vantaggi evidenziati, restano innegabili le carenze e debolezze del protocollo, tali a volte da sconsigliarne l'utilizzo. A tal proposito, basti considerare gli esempi esposti in precedenza, nei paragrafi 1.3.1 e 1.3.2. In entrambi i casi, nel dominio originario del segnale bisogna acquisire un numero n molto elevato di campioni per ottenere un'adeguata risoluzione. Invece, nel dominio di un'opportuna trasformata, lo stesso contenuto informativo è racchiuso in appena $k \ll n$ campioni.

Pertanto, alla luce di questi risultati, conviene acquisire i campioni direttamente nel dominio in cui il segnale ammette una rappresentazione sparsa. Sfortunatamente, questa scelta non basta da sola a risolvere tutte le possibili cause di inefficienza. Due, in particolare, emergono in tutta la loro gravità.

Da un lato, bisogna calcolare la trasformata di tutti gli n campioni, per poter poi scegliere i k più significativi. Dall'altro, al momento di salvare i dati, bisogna memorizzare non solo l'ampiezza, ma anche la localizzazione dei campioni. Ad esempio, richiamandosi al caso esposto nel paragrafo 1.3.1, si pensi all'inutilità di disporre dell'ampiezza di 6 campioni nel dominio della trasformata di Fourier, senza conoscerne la localizzazione.

1.6 Soluzioni alternative

In genere, il protocollo tradizionale comporta l'acquisizione di un ingente numero di campioni. Tuttavia, di questa considerevole mole di dati, una buona parte risulta superflua e viene successivamente scartata.

Inoltre, il protocollo tradizionale si presta all'acquisizione dei soli segnali limitati in banda. Vista la discrepanza con i segnali naturali, si rende necessario uno stadio preliminare di filtraggio passa – basso. Questa soluzione, però, non mette al riparo da qualsiasi evenienza. A tal proposito, può sorgere un problema qualora la frequenza di Nyquist sia molto elevata, addirittura al di fuori della portata degli odierni dispositivi elettronici. In una simile configurazione, non è possibile approntare alcun circuito in grado di campionare al tasso desiderato.

In realtà, una corretta valutazione non può tralasciare il vertiginoso ritmo di sviluppo che caratterizza questo settore. Le potenzialità degli strumenti di acquisizione incrementano, senza sosta, di anno in anno. Tuttavia, ciò non basta a dissipare i dubbi sulla reale efficienza del protocollo tradizionale. Non sempre un campionamento uniforme ad alta frequenza rappresenta la soluzione ottimale.

Queste constatazioni hanno aperto la strada ad un nuovo filone di ricerca. L'obiettivo non è tanto affinare il teorema di Shannon, quanto piuttosto elaborare un approccio alternativo al problema dell'acquisizione. In quest'ottica vanno lette le numerose proposte algoritmiche per un cosiddetto *sub – Nyquist sampling*. Tale denominazione indica la capacità di risalire al segnale originario, pur disponendo di misure che non soddisfano il teorema del campionamento.

In fini dei conti, la condizione sulla frequenza di Nyquist è sufficiente, non necessaria. Pertanto, nulla vieta di trovare delle soluzioni alternative, che sfruttino al meglio le peculiarità del segnale in esame.

1.7 Da Shannon alla teoria CS

Al di là degli algoritmi *ad hoc* validi solo per una ristretta casistica, la pratica sperimentale permette di individuare alcune caratteristiche molto frequenti nei segnali di interesse. Tra queste spicca senz'altro la sparsità: nell'opportuno dominio, quasi ogni segnale può essere rappresentato da un vettore con soli pochi elementi non nulli, o comunque significativi.

Una simile configurazione merita di essere sfruttata al meglio. In quest'ottica, si sconsiglia il ricorso al protocollo tradizionale, il cui unico risultato sarebbe l'acquisizione di un'ingente mole di campioni, per lo più trascurabili.

Il motivo di tale inefficienza va ricercato proprio nella generica formulazione del teorema di Shannon. Nel rappresentare il segnale di interesse si tiene conto di un'unica informazione a priori: la sua estensione spettrale. In realtà, un segnale sparso ha un numero di gradi di libertà nettamente inferiore a quanto suggerito dal suo contenuto in frequenza. Quindi, in linea di principio, si riduce drasticamente il numero dei campioni necessari a descriverlo in modo esauriente.

Su questa assunzione si fonda la teoria del cosiddetto campionamento compresso, in inglese *compressed sampling*, da cui il diffuso acronimo CS. L'idea attorno a cui si sviluppa questo innovativo approccio è molto semplice: sfruttando opportunamente le proprietà di sparsità del segnale di interesse, si può condensarlo in una ridotta mole di dati, senza bisogno di ulteriori scremature o compressioni.

1.8 Brevi cenni storici

Non è facile collocare con precisione nel tempo la nascita del campionamento compresso. Le prime indagini riconducibili ad un simile approccio risalgono a circa quarant'anni fa'. In maniera piuttosto sorprendente, non si tratta di pubblicazioni di carattere ingegneristico o matematico, bensì geofisico.

Nel 1973 i sismologi Claerbout e Muir intendono ricostruire il profilo degli strati riflessivi della crosta terrestre [9]. Simili studi vengono condotti con un approccio spiccatamente empirico e sperimentale. Facendo detonare apposite cariche esplosive, è possibile simulare un evento sismico e acquisire la corrispondente traccia al sismografo. La deconvoluzione di questo segnale fornisce informazioni sulla composizione del terreno interessato dal sisma.

Tuttavia, in fase di implementazione emergono alcuni problemi. Primo fra tutti, il segnale deconvoluto non manifesta una chiara corrispondenza con il profilo geologico. All'interno di un andamento molto frastagliato e rumoroso, molti picchi appaiono privi di significato.

L'obiettivo degli autori è ripulire il segnale da queste componenti spurie indesiderate, in modo tale che ogni picco corrisponda effettivamente ad una discontinuità geologica. In quest'ottica, Claerbout e Muir suggeriscono di valutare qualche indice tratto dal segnale deconvoluto, per esempio una sua norma.

La stessa proposta viene ripresa a distanza di una decina d'anni da Santosa e Symes, che conducono un analogo studio sulle tracce sismografiche. Nel 1986, i due studiosi elaborano un'opportuna funzione costo, la cui minimizzazione fornisce il desiderato treno di impulsi [10]. Si tratta, in particolare, della somma pesata di due norme del segnale deconvoluto.

Al di là del contenuto, questi articoli condividono un'idea di fondo. Per la prima volta, il campionamento di un segnale sparso come il profilo geologico viene affrontato con un approccio non convenzionale. Per esempio, il ricorso alle norme dimostra l'intenzione di raccogliere quante più informazioni possibili sull'effettiva struttura del segnale.

Progressivamente, la cosiddetta teoria CS si è diffusa ad altri ambiti, assumendo di volta in volta la formulazione più consona. A causa di questo sviluppo spontaneo ma disomogeneo, la letteratura presenta molteplici formulazioni, talvolta molto dissimili tra loro.

L'effettiva consacrazione risale soltanto al 2004, grazie, in special modo, al contributo di quattro scienziati: Donoho, Candès, Romberg e Tao. Obiettivo comune delle loro indagini è la definizione del minimo numero di campioni necessari a ricostruire un segnale sparso, nel caso specifico un'immagine.

L'impatto mediatico di queste ricerche è sorprendente: di lì a poco, il campionamento compresso diventa uno degli argomenti più frequentati in letteratura.

Il confronto e lo scambio di idee raggiunge in breve tempo la rete telematica. Qui, la comparsa di numerosi siti e blog dedicati consente anche ai semplici appassionati di informarsi sulle ultime novità in materia. Questa forma di contribuzione corale è uno dei punti di forza della teoria CS, che ne ricava un dinamismo e una vitalità senza precedenti.

D'altro canto, una così rapida divulgazione nasconde anche delle insidie. A tal proposito, si può affermare che il campionamento compresso è diventato, in un certo senso, la moda del momento. In alcune pubblicazioni si cerca un mero pretesto che consenta di applicare la teoria CS, a discapito della reale consistenza dei risultati proposti.

Peraltro, la mancanza di un impianto teorico univoco ha prodotto un certo disordine nelle varie formulazioni. Nel 2008, un gruppo di studiosi ha raccolto una serie di pubblicazioni sull'argomento, di natura sia teorica che applicativa. In sede di prefazione [11], si dichiara un duplice intento: da un lato, evidenziare le idee chiave del campionamento compresso, dall'altro presentare alcune aree di applicazione, su cui la stessa teoria promette di avere un impatto significativo.

Il testo si conclude con l'augurio che il lettore, dopo aver appreso le basi teoriche, le potenzialità e i limiti, ne tragga ispirazione per avanzare una propria proposta innovativa e originale.

1.9 Il protocollo CS

Un protocollo di acquisizione non può prescindere da un rigoroso modello del segnale di interesse e delle sue misure. Nel caso tradizionale, il segnale viene generalmente rappresentato come una funzione del tempo, limitata in frequenza, mentre le misure sono il risultato del suo campionamento a passo uniforme.

Tuttavia, un simile approccio evidenzia palesi limiti all'atto pratico, soprattutto in presenza di componenti ad alta frequenza.

Per questo motivo, nel formulare la teoria CS, si è deciso di rivoluzionare l'intera prospettiva da cui si guarda al problema. In particolare, il modello concettuale presenta due cambiamenti sostanziali: il segnale viene rappresentato come un vettore sparso in un opportuno dominio, mentre le misure sono una sua funzione lineare.

1.10 Schema del protocollo CS

Avvalendosi nuovamente di uno schema a blocchi, è facile illustrare i successivi stadi di elaborazione, mantenendo la consueta distinzione tra i livelli del sensore e del ricevitore.

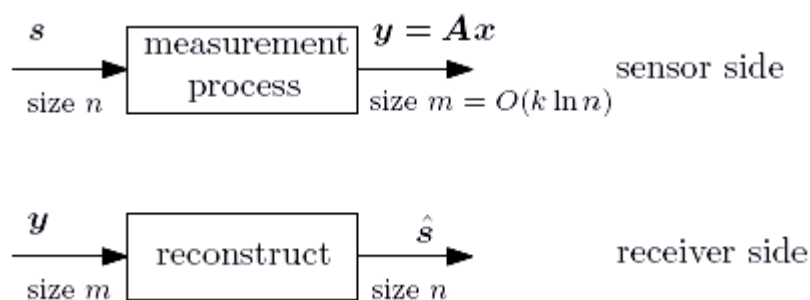


Figura 1.6 Schema a blocchi del protocollo CS [8]

A livello del sensore, la tradizionale successione di campionamento e compressione è sostituita da un unico stadio, noto anche come stadio di acquisizione compressa. Indipendentemente dalla sua estensione spettrale, il segnale viene campionato ad una frequenza ridotta. Questo valore non necessariamente rispetta il vincolo imposto dal teorema di Shannon, ma si mantiene nel *range* supportato dagli odierni strumenti di acquisizione.

Descritto il segnale mediante un vettore, l'indice k ne determina il livello di sparsità, ossia il numero di elementi non nulli o, comunque, significativi. Questo parametro influisce direttamente sul campionamento. Indicativamente, il protocollo CS richiede di acquisire solo $m = O(k \ln n)$ misure e non prevede alcuno stadio ulteriore di compressione.

Ad una prima analisi, il vettore y costituisce un insieme di dati incompleto e insufficiente. In effetti, il sistema risolutivo, $y = Ax$, che ne deriva è sotto-determinato, ossia presenta più incognite che equazioni. Quindi, senza ulteriori informazioni è impossibile risalire al segnale di interesse dalle sole misure.

In realtà, il protocollo CS non si trova ad operare in una simile configurazione. Infatti, dispone di una fondamentale conoscenza a priori sulla struttura del vettore x , ossia può contare sul fatto che x è sparso. Sfruttando opportunamente questa proprietà, è possibile pervenire ad una soluzione univoca.

Dal punto di vista computazionale, l'algoritmo risolutivo si complica notevolmente, rispetto alla più semplice decompressione attuata dal protocollo tradizionale. D'altro canto, questo aspetto è ampiamente bilanciato dalla riduzione della mole dei dati da trattare.

Il confronto tra i due protocolli mette in evidenza differenze di carattere operativo, ma anche concettuale. Nel caso tradizionale, l'origine e la struttura del segnale di interesse influenzano pesantemente la scelta degli algoritmi, in special modo di compressione. Al contrario, nel caso CS, l'approccio è sostanzialmente indipendente da questi aspetti. L'unica condizione riguarda la sparsità ed è, peraltro, soddisfatta dalla stragrande maggioranza dei segnali, in un opportuno dominio.

1.11 Norme: formulazioni e interpretazioni

Prima di procedere all'esposizione dei cardini della teoria CS, conviene dotarsi di uno strumento matematico diffusamente impiegato: le norme.

La letteratura matematica contiene molteplici formulazioni, ciascuna caratterizzata da una specifica simbologia. Al fine di garantire la massima coerenza formale nel prosieguo della trattazione, si propone qui un prontuario delle principali norme adottate.

Per cominciare, la norma $-l_p$ viene calcolata mediante la seguente espressione:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si tratta della formula di riferimento, cui si uniformano tutti i casi particolari. Attribuendo uno specifico valore all'esponente p , si conferisce un preciso significato al risultato.

Per esempio, la norma $-l_2$ rappresenta la distanza euclidea tra l'origine del riferimento e il punto di coordinate $(x_1 \dots x_n)$. Questa peculiarità le è valso anche il nome di norma euclidea:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

La norma $-l_1$, invece, determina la cosiddetta distanza di Manhattan tra l'origine del riferimento e il punto di coordinate $(x_1 \dots x_n)$:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Infine, con un piccolo abuso formale, si definisce la norma $-l_0$, che calcola il numero di elementi non nulli del vettore x :

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \text{card}(i \in \{1, \dots, n\}: x_i \neq 0)$$

Anche tale espressione si ricava dalla *norma* $-l_p$, con la semplice sostituzione $p = 0$, ma perde di significato ogni qualvolta $x_i = 0$.

1.12 Impianto teorico

La teoria del campionamento compresso si fonda su due cardini concettuali: la sparsità e l'incoerenza [12]. La prima è una proprietà esibita dal segnale di interesse, la seconda, invece, riguarda la modalità di acquisizione.

1.12.1 Sparsità e comprimibilità

Fino a questo momento, le proprietà di sparsità e comprimibilità di un segnale sono state descritte in termini intuitivi, richiamandosi a concetti quali il contenuto informativo o l'efficienza computazionale.

Per non restare in un contesto meramente astratto, che si presterebbe a semplicistiche o addirittura fuorvianti interpretazioni, conviene darne una definizione quantitativa. Solo in tal caso, infatti, è possibile determinare in modo inequivocabile se un segnale goda o meno di dette proprietà.

D.1.1 Un vettore \mathbf{x} di dimensione n si dice sparso se $\|\mathbf{x}\|_0 \ll n$ e si dice k -sparso se $\|\mathbf{x}\|_0 \leq k \leq n$ [8].

Da questa definizione discendono direttamente alcune semplici indicazioni per generare vettori tali da soddisfarla. Per esempio, dato un vettore qualsiasi \mathbf{x} , la sua migliore approssimazione composta di soli k termini è:

$$\mathbf{x}_k = \arg \min_{\mathbf{w}: \|\mathbf{w}\|_0 \leq k} \|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|_p$$

Il risultato del processo di ottimizzazione altro non è che lo stesso vettore \mathbf{x} in cui si sono posti a 0 tutti gli $n - k$ elementi più piccoli.

In modo del tutto analogo, si definisce il concetto di comprimibilità, molto affine alla sparsità.

D.1.2 Un vettore \mathbf{x} si dice *comprimibile* se esistono due costanti positive, $c > 0$ e $r > 1$, tali da verificare la seguente disuguaglianza [8]:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_p \leq ck^{-r}$$

Al calare di k , la disuguaglianza diventa sempre più stringente e difficile da soddisfare. Infatti, minore è il numero di coefficienti non nulli utilizzati, maggiore è la deviazione rispetto all'originale e, di conseguenza, anche l'entità del primo membro. Questo andamento mette in risalto la difficoltà di raggiungere tassi di compressione elevati che non pregiudichino l'accuratezza della ricostruzione.

1.12.2 Modello delle misure

La modalità con cui si acquisiscono le misure influenza in maniera cruciale il prosieguo del protocollo.

Nel caso tradizionale, lo schema operativo è rigido e inalterabile. Il segnale di interesse viene campionato con passo uniforme, ad una frequenza non inferiore al tasso di Nyquist. Nel caso CS, invece, si attua una netta generalizzazione. Esempio in tal senso è il nuovo modello approntato per il vettore delle misure:

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{s} = \Phi \Psi \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (1.1)$$

La formulazione matriciale permette di evidenziare alcuni aspetti significativi.

Innanzitutto, salta agli occhi che la relazione tra le misure \mathbf{y} e il segnale originario \mathbf{s} è lineare. Difatti, la cosiddetta *sensing matrix* Φ non dipende in alcun modo da \mathbf{s} . Ciò costituisce un indiscusso vantaggio, in quanto la linearità facilita, non poco, l'implementazione degli algoritmi risolutivi.

Peraltro, l'espressione (1.1) suggerisce un'interpretazione geometrica della procedura di acquisizione. In tal senso, ogni misura y_i rappresenta la proiezione ortogonale di \mathbf{s} lungo la direzione dell' i -esima riga di Φ :

$$y_i = \langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle, \quad i = 1, \dots, m$$

Evidentemente, la composizione della *sensing matrix* condiziona la natura dei risultati. A conferma di ciò, basti considerare due semplici esempi. Se le righe di Φ contengono degli impulsi di Dirac, opportunamente traslati, le misure sono i corrispondenti campioni di \mathbf{s} . Invece, se le righe di Φ contengono delle sinusoidi, opportunamente sfasate, le misure sono i corrispondenti coefficienti della serie di Fourier di \mathbf{s} .

Quest'ultima configurazione non rappresenta un mero esercizio formale. Al contrario, trova concrete realizzazioni: in particolare, in campo biomedicale, viene impiegata per la diagnostica mediante MRI [12].

Ovviamente, la possibilità di approntare la *sensing matrix* secondo le proprie esigenze conferisce una certa duttilità all'intero protocollo CS. Proprio in questo aspetto si può rintracciare uno dei motivi della sua fortuna e della sua rapida diffusione in ambiti anche molto eterogenei.

Procedendo nell'analisi dell'espressione (1.1), ci si imbatte in una nuova scomposizione matriciale. Nel terzo membro, infatti, il segnale originario \mathbf{s} viene espanso su di un'opportuna base ortonormale:

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{\psi}_i = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{x}$$

Per quanto riguarda i coefficienti di espansione, l'interpretazione è nuovamente geometrica. In particolare, ogni coefficiente x_i rappresenta la proiezione ortogonale di \mathbf{s} lungo la direzione dell' i – esima colonna di $\boldsymbol{\Psi}$:

$$x_i = \langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n$$

Facili valutazioni di opportunità suggeriscono di adottare una base in cui il vettore \mathbf{x} sia sparso. In tal senso, si spiega la denominazione *sparsifying matrix*, associata a $\boldsymbol{\Psi}$.

Infine, l'ultimo membro dell'espressione (1.1) effettua la sintesi delle precedenti osservazioni. La cosiddetta *measurement matrix* \mathbf{A} definisce un sistema lineare sotto – determinato, dalla cui soluzione dipende l'esito dell'intero protocollo.

1.12.3 Incoerenza

Per definizione, la sparsità è una proprietà intrinseca al segnale di interesse. Solo una sua accurata analisi può rivelare la *sparsifying matrix* più opportuna.

Tale scelta deve essere effettuata con cognizione di causa, visto che condiziona pesantemente la modalità di acquisizione delle misure. Un aspetto di fondamentale importanza è l'incoerenza tra Φ e $\boldsymbol{\Psi}$.

A differenza del segnale di interesse, le righe di Φ devono esibire una rappresentazione tutt'altro che sparsa nella base $\boldsymbol{\Psi}$. In tal senso, il concetto di incoerenza estende la celebre dualità che intercorre tra il dominio del tempo e il dominio della frequenza.

Finora si sono espone solo deduzioni di carattere qualitativo. Tuttavia, lo stesso argomento può essere affrontato anche con il rigore e la coerenza del formalismo matematico. In quest'ottica, si prenda in considerazione la coppia delle matrici $(\Phi, \boldsymbol{\Psi})$. Al fine di semplificare i calcoli, si restringe l'analisi a due basi ortonormali, tuttavia non si tratta di un vincolo imprescindibile.

In siffatto contesto, la coerenza tra Φ e Ψ viene quantificata mediante la seguente espressione [12]:

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |\langle \varphi_i, \psi_j \rangle|$$

Dal punto di vista operativo, questo indice misura il massimo valore di correlazione fornito da due qualsiasi vettori di Φ e Ψ . In questo modo, rivela l'eventuale presenza di elementi correlati nelle due matrici.

Dalla formulazione è facile dedurre anche l'intervallo di variazione dei valori che l'indice può assumere:

$$\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{n}]$$

L'estremo superiore deriva dal fatto che il prodotto scalare di due vettori a norma unitaria ha, comunque, modulo minore o uguale a 1. L'estremo inferiore, invece, discende direttamente dalla relazione di Parseval.

In particolare, questa afferma che per ogni j vale la seguente uguaglianza [12]:

$$\sum_{i=1}^m |\langle \varphi_i, \psi_j \rangle|^2 = \|\psi_j\|_2^2 = 1$$

1.12.4 Esempi di basi incoerenti

In linea di principio, l'obiettivo del protocollo CS è minimizzare la coerenza tra le matrici Φ e Ψ .

Apparentemente l'operazione può sembrare difficoltosa. In realtà, grazie ad alcuni accorgimenti, nella maggior parte dei casi la situazione si semplifica notevolmente.

Il più classico degli esempi vede in Φ la base canonica, ossia $\varphi_i(t) = \delta(t - i)$, e in Ψ la base di Fourier, ossia $\psi_j(t) = n^{-1/2} e^{i2\pi jt/n}$. Una simile configurazione ricorda il tradizionale campionamento nel tempo o nello spazio, a seconda del significato attribuito alla variabile t . Addirittura, vista la palese analogia, si è soliti parlare di coppia tempo – frequenza.

Come auspicato in precedenza, l'indice $\mu(\Phi, \Psi)$ assume valore unitario. Peraltro, questa condizione di massima incoerenza tra impulsi e sinusoidi è valida universalmente. Non dipende dalle dimensioni dello spazio in cui ci si trova ad operare.

Se questo primo risultato è, in un certo senso, pronosticabile, del tutto inattese sono le prestazioni delle cosiddette matrici casuali. Fissata la base Ψ a seconda del segnale di interesse, si appronti una base ortonormale Φ casuale. In tal senso, è sufficiente campionare in maniera indipendente e uniforme m vettori dalla sfera unitaria e normalizzarli. A quel punto, è fortemente probabile che l'indice di coerenza $\mu(\Phi, \Psi)$ si attesti attorno ad un valore di $\sqrt{2 \log n}$ [12]. Sebbene non coincida esattamente con l'estremo inferiore, si tratta comunque di ottime prestazioni.

Peraltro, il discorso si estende facilmente ad altre matrici Φ pseudo – casuali. Per esempio, le righe possono essere costituite da realizzazioni indipendenti di variabili aleatorie Gaussiane o di Bernoulli. Entrambi questi casi si dimostrano sufficientemente incoerenti con qualsiasi base Ψ fissata.

1.13 Un sistema sotto – determinato

Indipendentemente dalle scelte di Φ e Ψ , emerge un dato incontrovertibile: il numero m delle misure acquisite è strettamente inferiore al numero n delle incognite da determinare. Di conseguenza, il sistema matriciale $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ è sotto – determinato e ammette infinite possibili soluzioni.

Senza ulteriori informazioni sulla struttura di \mathbf{x} , è impensabile una realizzazione fattiva del protocollo CS. D’altro canto, sono note le proprietà di sparsità del vettore. Per la precisione, l’intero approccio del campionamento compresso si fonda sull’assunzione che qualsiasi segnale ammetta una rappresentazione sparsa, qualora espresso nell’opportuna base Ψ .

Sulla base di queste osservazioni, in letteratura sono apparsi diversi criteri che, una volta soddisfatti, individuano una soluzione unica del problema.

1.14 Proprietà di isometria ristretta

Prima di introdurre la fondamentale proprietà di isometria ristretta, brevemente RIP, è necessario introdurre un nuovo e specifico ente matematico.

D.1.3 Dato un intero positivo k , la costante di isometria δ_k della *measurement matrix* \mathbf{A} è il minimo numero tale da verificare la seguente disuguaglianza, per qualsiasi vettore \mathbf{x} k – sparso:

$$(1 - \delta_k)\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{Ax}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k)\|\mathbf{x}\|_2^2$$

Alla luce di questa definizione, la matrice \mathbf{A} soddisfa la RIP di ordine k se la costante δ_k assume un valore strettamente inferiore a 1. In tal senso, la verifica è piuttosto semplice: basta soddisfare un’unica condizione sufficiente.

Così formulata, la proprietà comporta diverse implicazioni sull’attuazione del protocollo CS.

In primo luogo, scelte k qualsiasi colonne di \mathbf{A} , queste risultano praticamente ortogonali. La minima incertezza deriva dal fatto che la matrice è rettangolare e presenta più colonne che righe. Di conseguenza, non si può parlare propriamente di ortogonalità.

In secondo luogo, \mathbf{A} conserva la lunghezza euclidea dei vettori k – sparsi. Anche questa proprietà è valida solo in prima approssimazione, tuttavia riveste un ruolo fondamentale nell’ambito del campionamento compresso. Una sua eventuale assenza vanificherebbe ogni speranza di risalire al segnale k – sparso originario. A tal proposito, è stato dimostrato un teorema significativo.

T.1.2 Se la matrice \mathbf{A} soddisfa la RIP di ordine $2k$, è sempre possibile ricostruire l’unica soluzione k – sparsa del sistema $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ [12].

D’altro canto, non bisogna cadere in facili quanto fuorvianti deduzioni. Certamente, l’enunciato T.1.2 garantisce l’esistenza della soluzione desiderata, parimenti non fornisce alcun algoritmo efficiente per calcolarla. Anzi, in genere, risolvere un sistema sotto – determinato è uno dei compiti più ardui e onerosi, dal punto di vista computazionale.

1.14.1 Errore di ricostruzione

Il criterio fornito dalla RIP viene impiegato diffusamente nella letteratura di settore. Infatti, la proprietà è facile da verificare e si presta all'analisi di molteplici configurazioni, anche molto eterogenee tra loro.

Un altro pregio che gli può essere, senza dubbio, ascritto è la possibilità di valutare l'entità dell'errore di ricostruzione. A tal proposito, individuata la soluzione k -sparsa $\hat{\mathbf{x}}$, si dimostra il seguente teorema [12].

T.1.3 Se $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$, allora esiste una costante positiva C_0 tale da soddisfare le due disuguaglianze:

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 \leq C_0 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_1 / \sqrt{k} \quad \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_1 \leq C_0 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_1$$

I risvolti di questo enunciato coinvolgono indistintamente segnali sparsi e non. Se \mathbf{x} è k -sparsa, allora $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$ e la ricostruzione è esatta. In caso contrario, ottengo comunque gli stessi risultati che otterrei conoscendo a priori la localizzazione dei k elementi più significativi di \mathbf{x} . In altri termini, è come se un "oracolo", in possesso di una perfetta conoscenza di \mathbf{x} , ne estraesse soltanto i k valori più elevati.

La conclusione cui perviene T.1.3 è prettamente deterministica: trovata una matrice \mathbf{A} che ne soddisfi le ipotesi, il successo è garantito, senza alcuna probabilità di fallimento [12].

Peraltro, lo stesso risultato può essere facilmente esteso alla consueta condizione di misure rumorose. Allo scopo, si introduce la variabile ε che quantifica l'ammontare delle componenti spurie e indesiderate [12].

T.1.4 Se $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$, allora esistono due costanti positive C_0 e C_1 , tali da soddisfare la disuguaglianza:

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 \leq C_0 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_1 / \sqrt{k} + C_1 \varepsilon$$

Secondo questa formulazione, l'errore di ricostruzione è limitato dalla somma di due termini. Il primo coincide con il caso ideale, privo di rumore. Il secondo, invece, è proporzionale al valore di ε .

In genere, le costanti C_0 e C_1 assumono valori ridotti: per esempio, se $\delta_{2k} = 0.25$, $C_0 \leq 5.5$ e $C_1 \leq 6$ [12].

Questi risultati ci restituiscono un'immagine del protocollo CS particolarmente solida e robusta. Infatti, si presta con agio all'acquisizione di qualsiasi tipo di segnale, indipendentemente dal suo livello di sparsità e dall'eventuale presenza di rumore sovrapposto alle misure.

1.14.2 Numero di misure

Nella presente analisi, ciò che ancora manca è una connessione tra il livello di sparsità k e il numero m delle misure da acquisire, ossia il numero delle righe di \mathbf{A} . Per definire un simile legame, bisogna, innanzitutto, approntare delle matrici tali da soddisfare la RIP con il maggior ordine possibile. Allo scopo, spesso si ricorre a principi di casualità, che conferiscono al discorso un carattere universale, indipendente dalla struttura e dall'origine del segnale di interesse.

In questa sede, si considerano tre configurazioni significative, dove le n colonne di \mathbf{A} sono composte da:

- 1) campioni uniformi e casuali della sfera unitaria in \mathbb{R}^m ;
- 2) realizzazioni indipendenti di una variabile aleatoria gaussiana di media 0 e varianza $1/m$;
- 3) realizzazioni indipendenti di una variabile aleatoria con distribuzione simmetrica di Bernoulli, tale che $P[A_{ij} = \pm 1/m] = 1/2$.

Queste tre configurazioni esibiscono un comportamento analogo, regolato da un apposito teorema [12].

T.1.5 La matrice \mathbf{A} soddisfa la RIP, se esiste una costante positiva C tale da verificare la disuguaglianza:

$$m \geq Ck \log(n/k)$$

A differenza dei precedenti enunciati T.1.3 e T.1.4, non si tratta di un risultato deterministico. D'altro canto, la probabilità che una matrice \mathbf{A} così formulata non soddisfi la RIP decresce esponenzialmente con m .

Evidentemente, il caso presentato da T.1.5 è piuttosto generico. L'imposizione di ulteriori opportune condizioni permette di incrementare le prestazioni, ossia di ridurre il minimo numero necessario di misure.

A titolo di esempio, si attui il prodotto matriciale $\mathbf{A} = \mathbf{R}\Phi\Psi$, dove Φ e Ψ sono due basi ortonormali, mentre \mathbf{R} è una griglia di campionamento, che estrae m coordinate in modo uniforme e casuale. Data una simile configurazione, la condizione del teorema T.1.5 viene sostituita da una nuova disuguaglianza:

$$m \geq Ck(\log n)^4$$

Poi, se si desidera una probabilità di insuccesso non superiore a $O(n^{-\beta})$ con $\beta > 0$, allora basta incrementare l'esponente del logaritmo da 4 a 5 [12].

1.15 Altri criteri

Dati alla mano, il criterio fondato sulla RIP è quello più citato e impiegato in letteratura. Ciò nonostante, non mancano le alternative: in particolare, si ricordano il criterio di mutua coerenza e la proprietà di spazio nullo, brevemente NSP.

1.15.1 Mutua coerenza

D.1.4 Considerata una matrice \mathbf{A} , le cui colonne \mathbf{a}_i siano state normalizzate, l'indice di mutua coerenza viene calcolato secondo l'espressione [13]:

$$M = \max_{i \neq j} \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j, \quad i, j = 1, \dots, n$$

Questo valore permette di determinare, a priori, il livello di sparsità della soluzione più sparsa $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\|\hat{\mathbf{x}}\|_0 = \left\lfloor \frac{1 + 1/M}{2} \right\rfloor$$

1.15.2 Spazio nullo

D.1.5 Lo spazio nullo di una matrice \mathbf{A} , indicato come $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, è l'insieme che raccoglie tutti i vettori \mathbf{x} tali che $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$. In particolare, data una matrice di n colonne, il suo spazio nullo costituisce un sotto-spazio lineare di uno spazio euclideo di dimensione n .

Peraltro, sono sempre valide tre fondamentali proprietà:

- 1) $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ contiene il vettore nullo;
- 2) se $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ e $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, allora $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$;
- 3) se $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ e c è uno scalare qualsiasi, allora $c\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Questa nozione di algebra lineare torna utile anche nella soluzione di sistemi lineari del tipo $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. In special modo, l'omonima proprietà ispira un criterio alternativo all'applicazione della RIP [14].

T.1.6 La matrice \mathbf{A} soddisfa la NSP di ordine l se esiste una costante positiva γ , tale che la disuguaglianza

$$\|\eta_S\|_1 \leq \gamma \|\eta_{S^c}\|_1$$

viene soddisfatta per qualsiasi $\eta \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ e qualsiasi insieme S degli indici, di cardinalità $\|S\|_0 \leq l$.

L'enunciato ha diverse implicazioni. Una in particolare riguarda i vettori sparsi: un valore di γ strettamente inferiore a 1 comporta che qualsiasi vettore non nullo $\eta \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ presenta almeno l elementi significativi. Questo aspetto può essere opportunamente sfruttato ai fini dell'acquisizione di un segnale k – sparso.

T.1.7 Se \mathbf{A} soddisfa la NSP di ordine $l \geq k$ con una costante $\gamma < 1$, allora $\hat{\mathbf{x}}$ è l'unica soluzione k – sparsa ammissibile [14].

Così formulata, la NSP si candida come una valida alternativa alla RIP. Tuttavia, il costo computazionale per la verifica e la mancanza di un'estensione al caso di misure rumorose ne hanno, finora, limitato l'impiego.

1.16 Algoritmi di ricostruzione

Giunti a questo punto, non resta che determinare l'algoritmo per risolvere il sistema sotto – determinato $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Notoriamente, dal punto di vista computazionale non si tratta di un problema facile. Il tradizionale approccio combinatorio si rivela addirittura *NP – hard*. In altri termini, i prolungati tempi di esecuzione rendono impraticabile qualsiasi tentativo di implementazione.

Alla luce di queste osservazioni emerge la necessità di approntare delle soluzioni *ad hoc*, adattate alle specifiche esigenze della ricostruzione di un vettore sparso. Al riguardo, la letteratura contempla due possibili approcci: gli algoritmi di ottimizzazione e gli algoritmi *greedy*, oggetto dei successivi due capitoli.

CAPITOLO II

Algoritmi di ottimizzazione

2.1 Introduzione

Nelle pubblicazioni di stampo ingegneristico, ricorre molto spesso il termine ottimizzazione, cui si attribuiscono, di volta in volta, sfumature e accezioni diverse. In matematica, invece, questa parola assume un significato ben preciso e designa una classe di problemi, caratterizzati dalla seguente formulazione [15]:

$$\arg \min_x f_0(\mathbf{x}), \text{ tale che } f_i(\mathbf{x}) \leq b_i, i = 1, \dots, m$$

Prima di procedere nella trattazione, conviene attribuire un nome ai diversi attori che compaiono in tale espressione: il vettore \mathbf{x} è la variabile di ottimizzazione, $f_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione obiettivo, $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la i -esima funzione di vincolo, cui è associata l' i -esimo valore di soglia b_i .

2.2 Classificazioni

La funzione obiettivo è definita per qualsiasi vettore a valori reali e di dimensione n . Di contro, i vincoli restringono notevolmente il campo delle possibili soluzioni. Tra queste, la scelta ottimale è quella che garantisce il minimo valore della funzione obiettivo.

Si tratta di un paradigma generale, duttile, capace di adattarsi alle specifiche esigenze imposte dall'utente o dall'ambiente di applicazione. La letteratura presenta diverse tipologie di problemi di ottimizzazione, che si distinguono per le specifiche formulazioni di f_0 e f_i .

2.2.1 Linearità

Una classificazione molto diffusa discrimina i problemi a seconda della loro linearità o meno. In particolare, se tutte le funzioni adottate sono lineari, ossia soddisfano la corrispondente condizione [15]:

$$f_i(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f_i(\mathbf{x}) + \beta f_i(\mathbf{y}) \quad i = 0, 1, \dots, m \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

si parla di *linear program*, altrimenti di *non linear program*.

2.2.2 Convessità

Particolare attenzione meritano, poi, i cosiddetti problemi di ottimizzazione convessa, dove tutte le funzioni adottate sono convesse. La proprietà di convessità è legata alla verifica della seguente disuguaglianza [15]:

$$f_i(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \leq \alpha f_i(\mathbf{x}) + \beta f_i(\mathbf{y}) \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (2.2) \\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tali che } \alpha + \beta = 1 \text{ et } \alpha, \beta \geq 0$$

Confrontando le condizioni (2.1) e (2.2), si osserva come la convessità sia più generale della linearità. Infatti, una disuguaglianza è meno stringente di una uguaglianza. Peraltro, la verifica è richiesta solo per alcuni valori di α e β e non per tutte le loro infinite possibili realizzazioni.

Per questo motivo, ogni *linear program* può essere considerato un caso particolare di un problema di ottimizzazione convessa.

2.3 Applicazioni ingegneristiche

Come affermato in precedenza, il termine ottimizzazione ricorre molto spesso nelle pubblicazioni di stampo ingegneristico. Infatti, questa classe di problemi permette di trattare, in termini quantitativi e oggettivi, qualsiasi processo decisionale in cui si debba eleggere la migliore scelta possibile tra una serie di candidati. A tal proposito, è possibile attribuire un significato astratto ai diversi elementi che compaiono nella formula. In quest'ottica, la variabile \mathbf{x} rappresenta la scelta effettuata, i vincoli $f_i(\mathbf{x}) \leq b_i$ definiscono i requisiti cui devono sottostare i candidati, mentre la funzione obiettivo $f_0(\mathbf{x})$ determina il costo, o, nella sua versione con segno opposto $-f_0(\mathbf{x})$, l'utilità, della scelta effettuata.

2.3.1 Alcuni esempi concreti

I possibili ambiti di applicazione sono innumerevoli.

Un esempio molto frequentato in letteratura è il problema del dimensionamento dei dispositivi elettronici, il cui obiettivo è la definizione degli spessori e delle lunghezze dei vari componenti del circuito. In un simile contesto, \mathbf{x} contiene i valori dimensionali, mentre le f_i esprimono eventuali requisiti generali o dello specifico circuito. Tipicamente, si impongono dei valori di soglia per i tempi di trasmissione o per l'area totale. La funzione obiettivo f_0 determina la potenza totale consumata dal circuito, anche se esistono molteplici definizioni alternative. Attenendoci a questa interpretazione, la soluzione del problema individua il miglior compromesso tra le esigenze tecnologiche e il fabbisogno energetico.

Un altro esempio è il cosiddetto problema di *data fitting*. Dato un modello, se ne determina la configurazione che ne minimizza lo scostamento dai dati sperimentali. Allora, \mathbf{x} contiene i parametri del modello, mentre le f_i esprimono i loro intervalli di variazione e le eventuali informazioni note a priori. La funzione obiettivo f_0 può misurare l'errore di predizione o la verosimiglianza, nell'accezione statistica del termine, dei valori attribuiti ai parametri. In ogni caso, la procedura di ottimizzazione identifica i parametri in modo da soddisfare i vincoli e, al contempo, minimizzare gli errori, deterministici o statistici che siano.

2.4 Il ruolo dell'utente

Gli esempi proposti dimostrano quanto sia duttile e trasversale l'approccio del problema di ottimizzazione. Di contro, è doveroso osservare che, nella maggior parte dei processi decisionali, il risultato matematico costituisce soltanto un utile supporto, un'informazione aggiuntiva. L'attore principale resta l'utente umano che supervisiona il processo, controlla i risultati e se necessario modifica i vincoli e le condizioni del problema.

Un'eccezione a questa regola è rappresentata dalla cosiddetta *embedded optimization*. Si tratta di un fenomeno piuttosto recente, ma già diffuso su larga scala, anche nei settori meno specializzati della società. La rapida proliferazione di dispositivi elettronici computerizzati, o quanto meno automatizzati, ha aperto la

strada a tutta una serie di applicazioni che devono operare scelte e fornire risposte in tempo reale. Per riuscirci, risolvono in maniera automatica dei problemi di ottimizzazione. L'estrema rapidità di esecuzione riduce al minimo o, addirittura, annulla le possibilità di intervento da parte dell'utente.

In tal senso, il problema delle *embedded real – time optimizations* attira l'attenzione sia della comunità scientifica, sia delle principali aziende del settore. L'argomento infatti può essere lo spunto per molteplici innovazioni: dal punto di vista teorico si tenta di incrementare l'affidabilità delle soluzioni, dal punto di vista tecnologico si cerca di ridurre al minimo i tempi di esecuzione.

2.5 I metodi risolutivi

Dato un problema di ottimizzazione, un metodo di soluzione è un qualsiasi algoritmo in grado di risolverlo, con un certo grado di accuratezza [15]. Sin a partire dalla fine degli anni Quaranta, ingenti sforzi sono stati compiuti per sviluppare dei metodi sempre più efficienti e funzionali.

A tal proposito, è impossibile determinare con esattezza a priori l'efficacia di un approccio. Infatti, sono molteplici i fattori capaci di influenzare, nel bene e nel male, i risultati finali. Tra questi si citano aspetti legati alla realizzazione dell'algoritmo stesso, come la funzione obiettivo, i vincoli, il numero delle variabili da identificare. Nondimeno, influiscono anche aspetti legati al particolare ambito di applicazione, come la struttura di x o l'intervallo di variazione dei suoi elementi.

Un esempio molto consueto, in tal senso, è rappresentato dalla proprietà di sparsità. Mutuando la definizione di vettore sparso, un problema di ottimizzazione si può dire sparso se ogni funzione di vincolo $f_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, dipende solo da un ridotto numero di elementi di x .

2.6 Valutazioni computazionali

Perfino quando la funzione obiettivo f_0 e le funzioni di vincolo f_i sono regolari, la risoluzione del problema presenta sorprendenti difficoltà.

Di conseguenza, i metodi di soluzione più comuni devono scendere a compromessi tra due esigenze contrastanti: bontà dei risultati e rapidità di esecuzione. Spesso, l'esattezza della soluzione è garantita solo a prezzo di uno sproporzionato incremento del carico computazionale. Di contro, algoritmi eccessivamente semplificati forniscono solo approssimazioni, non sempre affidabili, della soluzione esatta.

2.6.1 Alcune fortunate eccezioni

Fortunatamente, se ciò rappresenta la "regola", esistono alcune importanti "eccezioni".

Specifiche classi di problemi dispongono di peculiari metodi, in grado di risolvere il problema di ottimizzazione anche in presenza di centinaia o migliaia di variabili o vincoli.

In particolare, due sono gli esempi maggiormente conosciuti e diffusi, sia nei risultati teorici che nelle realizzazioni pratiche: il cosiddetto *least square problem*, o problema ai minimi quadrati, e il già citato *linear program*, o programma lineare.

2.7 Problema ai minimi quadrati

Con la denominazione *least square problem*, si indica un problema di ottimizzazione dove non siano specificati vincoli e la funzione obiettivo consista nella somma di alcuni termini quadratici. Una possibile formulazione, compatibile con queste ipotesi, è la seguente [15]:

$$\arg \min_x f_0(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 = \sum_{i=1}^k (\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i)^2$$

In particolare, la matrice \mathbf{A} di dimensioni $k \times n$, con $k \geq n$, presenta sulle righe i vettori \mathbf{a}_i^T , mentre il vettore \mathbf{x} di dimensione n rappresenta al solito la variabile di ottimizzazione.

2.7.1 Soluzione in forma analitica

Per quanto riguarda la soluzione, il problema ai minimi quadrati è equivalente al sistema lineare [15]:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

Quindi, una semplice procedura di inversione consente di esplicitare, in forma analitica, la soluzione:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

In letteratura esistono numerosi algoritmi risolutivi per sistemi lineari. In genere, garantiscono ottime prestazioni e godono di efficienti implementazioni *software*, che permettono di sfruttare al meglio le ingenti capacità computazionali degli attuali calcolatori.

Allo stato dell'arte, i tempi di esecuzione sono proporzionali al prodotto n^2k secondo una qualche costante nota [15]. Tale valore è sinonimo di ridotto carico computazionale, tuttavia ha una valenza solo indicativa, dal momento che l'incessante sviluppo tecnologico non accusa interruzioni né accenna a rallentare.

A tal proposito, la legge di Moore afferma che le prestazioni dei processori, e il numero di transistor ad esso relativo, raddoppiano ogni 18 mesi [16]. Questo risultato, sebbene derivi da osservazioni empiriche datate nel lontano 1965, mantiene inalterata, ancora oggi, ad oltre quarant'anni di distanza, la sua attualità e consistenza.

Concludendo, è presumibile attendersi che i tempi di esecuzione decrescano esponenzialmente nel prossimo futuro e consentano l'analisi di sempre maggiori moli di dati.

2.7.2 Casi particolari

In alcuni casi, la matrice \mathbf{A} presenta specifiche proprietà o caratteristiche, che, opportunamente sfruttate, possono incrementare ulteriormente l'efficienza del metodo di soluzione.

A titolo di esempio, si consideri una matrice \mathbf{A} sparsa. In altri termini, il numero degli elementi non nulli sia notevolmente inferiore al totale kn . Adottando algoritmi che si richiamano alla teoria del campionamento compresso, si riesce ad abbattere la soglia n^2k .

Tuttavia, come in ogni altro problema, le disponibilità non sono infinite. Per quanto semplici, le operazioni richiedono un certo tempo per essere svolte. Quando il loro numero cresce a dismisura, il carico computazionale diventa insostenibile e il calcolatore non riesce a fornire i risultati secondo la tempistica

desiderata. Fortunatamente, nell'ambito dei problemi ai minimi quadrati, tali situazioni limite si presentano così raramente da poter essere considerate delle eccezioni.

2.7.3 *Tecnologia, non arte*

Talvolta, la risoluzione di un problema matematico richiede conoscenze specifiche e attitudini di cui non tutti possono disporre. Non è questo il caso dei *least square problems*.

Con un'espressione molto ficcante e di immediata intuizione, gli studiosi Boyd e Vandenberghe li hanno definiti una "tecnologia", nel senso che chiunque può utilizzarli, in piena fiducia, anche se ne ignora completamente i dettagli teorici e realizzativi [15].

2.7.4 *Ambiti di applicazione*

Data l'assenza di vincoli specifici, i possibili ambiti di applicazione sono vari e molteplici. A titolo di esempio, si ricordano le analisi di regressione, i protocolli di controllo automatico e, più in generale, l'identificazione dei parametri di un modello che minimizzino l'errore di predizione.

All'atto pratico, è molto semplice riconoscere se un dato quesito possa essere riformulato come un problema ai minimi quadrati. Infatti, basta soddisfare un'unica condizione: la funzione obiettivo deve essere quadratica, ossia la forma quadratica ad essa associata deve essere semi-definita positiva [15].

La formulazione base è semplice, ma anche piuttosto rigida. Pertanto, nelle applicazioni concrete, spesso si apportano alcune modifiche o si aggiungono ulteriori termini, a seconda delle specifiche esigenze. A tal proposito, conviene considerare due particolari realizzazioni: la stima ai minimi quadrati pesati e la regolarizzazione.

Nella stima ai minimi quadrati pesati, la funzione obiettivo assume la seguente forma [15]:

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k w_i (\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i)^2$$

I coefficienti w_i sono, per definizione, positivi e attribuiscono dei pesi relativi ai diversi termini nella sommatoria: maggiore è il peso, maggiore è l'incidenza del termine corrispondente. Di solito, l'utente determina i coefficienti w_i per esprimere la propria preferenza nei confronti di alcuni valori, o semplicemente per influenzare il risultato finale.

Nella regolarizzazione, invece, la funzione obiettivo presenta un termine aggiuntivo [15]:

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k (\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i)^2 + \rho \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Il primo termine mantiene inalterato il proprio significato: si tratta della somma dei residui al quadrato, quindi quantifica lo scostamento tra ricostruzione e dati sperimentali.

Il secondo termine, invece, nel più semplice dei casi, è un termine quadratico. La sua funzione è penalizzare eventuali valori troppo elevati della variabile \mathbf{x} . In questo senso, svolge un compito di regolarizzazione, perché evita che la ricostruzione presenti variazioni troppo rapide o picchi improvvisi.

Il parametro ρ , positivo per definizione, determina l'influenza di questo termine aggiuntivo. Tarandone opportunamente il valore, l'utente trova il giusto compromesso tra l'aderenza ai dati sperimentali e la regolarità della stima.

2.8 Programmazione lineare

In un *linear program* tutte le funzioni, sia quella obiettivo che i vincoli, sono lineari. In particolare, una possibile formulazione del problema di ottimizzazione è la seguente [15]:

$$\arg \min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \text{ tale che } \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i, i = 1, \dots, m$$

Tutti i parametri assumono valori reali, con la differenza che $\mathbf{c}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ sono vettori di lunghezza n , mentre b_1, \dots, b_m sono semplici scalari.

2.8.1 Metodi risolutivi

A differenza di quanto accade nel problema ai minimi quadrati, in questo caso non si conosce una soluzione in forma analitica. Nondimeno, esiste una notevole varietà di metodi risolutivi, che si rivelano anche molto efficienti. Il più famoso risponde al nome di algoritmo del semplice, ma recentemente sono stati approntati anche gli innovativi *interior point methods*.

2.8.2 Algoritmo del semplice

L'algoritmo del semplice, ideato da George Dantzig nel 1947 [17], è un metodo numerico per risolvere problemi di programmazione lineare. Una delle principali riviste americane del settore, *Computing in Science and Engineering*, lo ha definito uno dei dieci migliori algoritmi del secolo scorso [18].

L'approccio è di tipo geometrico: il termine semplice indica un politopo di $N + 1$ vertici in N dimensioni, un segmento di retta in una dimensione, un triangolo in due dimensioni, un tetraedro in tre dimensioni.

Qualsiasi problema di ottimizzazione definisce la cosiddetta *feasible region*, ossia il luogo geometrico dei punti che soddisfano appieno i vincoli. Nel caso particolare della programmazione lineare, questa regione ammissibile è rappresentata da un poliedro, che può essere vuoto, limitato o illimitato.

L'algoritmo del semplice è in grado di determinare di che tipo di poliedro si tratti. Quindi, nel caso il problema ammetta una soluzione ottimale finita, la individua in uno dei vertici.

Così descritta, la procedura appare inconcludente. In realtà, la sua genericità le ha garantito una straordinaria diffusione. Infatti, l'idea originaria di Dantzig è stata poi applicata a molti problemi pratici di ricerca operativa, il che ha prodotto tutta una serie di algoritmi del semplice, ognuno tarato per uno specifico problema.

All'atto pratico, le prestazioni sono buone, anche se non necessariamente polinomiali. Nella peggiore delle ipotesi, il numero di vertici esplorati cresce esponenzialmente con le dimensioni del problema. Un aiuto in tal senso può venire dai più recenti *interior point methods*.

2.8.3 Interior point methods

I metodi del punto interno si basano sull'algoritmo sviluppato da Narendra Karmarkar nel 1984 [19]. La procedura, proposta dal matematico indiano, consente di risolvere qualsiasi programma lineare in un tempo polinomiale.

Si consideri un generico *linear program*, con n variabili e m vincoli. L'algoritmo del simplesso rappresenta il problema come un solido e cerca la soluzione in uno dei suoi vertici. L'algoritmo di Karmarkar, invece, evita accuratamente i vertici e ogni punto della frontiera della regione ammissibile. In particolare, genera una successione di punti strettamente ammissibili che convergono verso il punto ottimale, il quale invece può essere un vertice.

Anche in questo caso, dall'idea originaria sono gemmate molteplici versioni analoghe, ciascuna ottimizzata per la soluzione di uno specifico problema.

La proposta di Karmarkar riscuote unanime consenso, soprattutto grazie alla sua straordinaria consistenza: il tempo di esecuzione resta polinomiale anche se il problema è illimitato. In tal caso, l'algoritmo si accorge della non esistenza di un punto ottimale e si arresta.

2.8.4 Complessità computazionale

A differenza di quanto avvenuto con il problema ai minimi quadrati, nel descrivere gli algoritmi di Dantzig e Karmarkar, non si è potuto quantificare con precisione il numero di operazioni aritmetiche necessarie.

Una maggiore esattezza in tal senso è possibile solo se si usa un *interior point method*, con una data accuratezza. Allora, la complessità è proporzionale al prodotto $n m^2$ secondo una certa costante, che, però, non è così ben caratterizzata come nel caso dei minimi quadrati.

2.9 Un ponte ideale

Ad una prima analisi, la programmazione lineare e il problema ai minimi quadrati sono molto eterogenei e non hanno molti elementi in comune. Pertanto, appare difficile trovare un punto di incontro o una possibile combinazione. In realtà, una soluzione in tal senso è stata proposta da Pafnuty Chebyshev.

2.9.1 Il problema di Chebyshev

Il problema di approssimazione che porta il suo nome adotta la seguente formulazione [15]:

$$\arg \min_x \left(\max_{i=1, \dots, m} |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i| \right)$$

L'analogia con il problema *least squares* è evidente: ancora una volta, la funzione obiettivo è una misura dell'errore di predizione. Tuttavia, dei residui non si calcola tanto la somma dei quadrati, quanto piuttosto se ne considera il massimo valore assoluto. Inoltre, è doveroso sottolineare un'altra differenza fondamentale: la funzione obiettivo non solo non è quadratica, non è neppure differenziabile.

Curiosamente, il problema di Chebyshev può essere espresso anche nella forma di programma lineare [15]:

$$\arg \min t, \text{ tale che } \begin{cases} \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - t \leq b_i & i = 1, \dots, m \\ -\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - t \leq -b_i & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

2.9.2 *Impropriamente, una tecnologia*

Chiunque abbia una minima esperienza nella risoluzione dei problemi di ottimizzazione, riconosce immediatamente nel problema di Chebyshev un programma lineare camuffato. Non altrettanto si può dire per quanti non vantano un simile bagaglio culturale, che, peraltro, rappresentano la stragrande maggioranza della popolazione.

Quindi, il termine tecnologia, già attribuito al problema ai minimi quadrati, non sembra il più consono in questa situazione. Fortunatamente, le abilità richieste per risolvere problemi di questo genere sono poche e facili da acquisire. Addirittura, il campo può essere automatizzato, almeno in parte. A tal proposito, esistono delle applicazioni *software* in grado di decidere autonomamente se un dato problema possa essere o meno formulato come un *linear program*.

2.10 Ottimizzazione convessa

Sinora si sono considerati problemi cosiddetti lineari, dove tutte le funzioni adottate godono della proprietà di linearità, ossia verificano l'uguaglianza (2.1). La questione si amplia, ma al tempo stesso si complica, se si considerano problemi convessi, dove tutte le funzioni soddisfano il vincolo di convessità (2.2).

In generale, non esistono formulazioni analitiche per la soluzione di tali problemi. Fortunatamente, per i casi particolari più diffusi ed utilizzati, sono stati approntati dei metodi risolutivi molto efficienti, in termini sia di accuratezza dei risultati sia di brevità di esecuzione.

Per esempio, i già citati *interior point methods* si rivelano molto utili in questo campo. Anche in assenza di qualsiasi informazione sulla struttura del problema, pervengono alla soluzione in un numero di iterazioni compreso tra 10 e 100 [15]. Il costo computazionale di ogni ripetizione è fornito dalla seguente funzione:

$$\max\{n^3, n^2m, F\}$$

Il termine F indica il costo di calcolare le derivate prima e seconda della funzione obiettivo e delle funzioni di vincolo.

2.10.1 *Non ancora una tecnologia*

Allo stato dell'arte, non si può affermare con certezza che la soluzione di un problema convesso sia una tecnologia, nell'accezione coniata da Boyd e Vandenberghe. Si tratta, ancora, di un filone di ricerca molto vitale, in cui le proposte e le alternative si susseguono rapidamente. Nessun algoritmo ha ancora ricevuto un consenso unanime. Di conseguenza, non esiste un *gold standard* da prendere come modello e riferimento.

Tuttavia, è ragionevole attendersi che la soluzione di un problema convesso diventi a breve una tecnologia. Addirittura, per alcune particolari sottoclassi, come i *second – order cone programs* o i *geometric programs*, ciò si è già avverato.

2.10.2 Risvolti pratici

Le possibili applicazioni ricordano molto da vicino quelle dei problemi lineari, purché si tenga conto di alcuni distinguo.

Riconoscere un problema ai minimi quadrati è semplice e immediato, non altrettanto si può dire per un problema convesso. Infatti, esistono molti più camuffamenti e trasformazioni nel caso convesso che non in quello lineare.

Una volta acquisita una certa esperienza e sviluppata una certa abilità nel riconoscere funzioni convesse, è sorprendente constatare quanti fenomeni nel mondo reale possano essere ricondotti ad un problema di ottimizzazione convesso. In questo senso, la sfida consiste nel formulare il problema, non nel risolverlo, che risulta piuttosto agevole.

2.11 Ottimizzazione non lineare

In matematica, un problema di ottimizzazione si definisce non lineare se la funzione obiettivo o almeno una funzione di vincolo non è né lineare, né convessa.

Allo stato dell'arte, non esistono metodi capaci di pervenire alla soluzione esatta. Perfino i problemi, apparentemente semplici, con un numero contenuto di variabili, presentano difficoltà insormontabili. Se, poi, la mole dei dati è ingente, il problema diventa intrattabile anche dal punto di vista computazionale. Pertanto, ogni possibile approccio deve scendere a compromessi, fornendo un'approssimazione più o meno realistica della soluzione esatta.

2.11.1 Approccio locale

Un possibile compromesso prevede di individuare la soluzione del problema non lineare nel punto che minimizza la funzione obiettivo, non nell'intera regione ammissibile, ma solo in un suo intorno.

Un gran numero di pubblicazioni scientifiche sono state dedicate al tema dell'ottimizzazione locale, portando a diversi sviluppi ed estensioni. In genere, i metodi di ottimizzazione locale sono di rapida esecuzione e riescono a trattare anche problemi su larga scala, con ingenti moli di dati.

Inoltre, gli unici requisiti da soddisfare sono rappresentati dalla differenziabilità della funzione obiettivo e delle funzioni di vincolo. Per questi motivi, questi metodi vengono diffusamente applicati in molteplici applicazioni e ambiti, dove è sufficiente una soluzione rapida, anche se non precisissima.

Di contro, emergono anche alcuni difetti. In primo luogo, non ci sono garanzie sull'esattezza dei risultati, la cui validità è locale e solo raramente anche globale. Peraltro, non viene fornita alcuna misura di verosimiglianza, né alcuna informazione su quanto disti la reale soluzione del problema.

In secondo luogo, l'algoritmo necessita di una stima iniziale delle variabili. Ovviamente, si tratta di un aspetto cruciale, che influenza in modo decisivo i confini dell'area locale in cui si cerca la soluzione.

2.11.2 Un'arte a tutti gli effetti

Il bagaglio culturale necessario per affrontare un problema di ottimizzazione locale è molto variegato. L'utente deve dimostrare una certa dimestichezza con numerosi aspetti, come la selezione dell'algoritmo più consono, l'identificazione dei suoi parametri, la scelta della stima iniziale più plausibile.

In tal senso, l'approccio locale costituisce un'arte, più che una tecnologia. Certo, è ben sviluppata e spesso efficiente, ma pur sempre un'arte. Al momento, è ancora proibitiva una sua diffusione capillare in tutti gli ambiti della società, dacché il grande pubblico non dispone dei mezzi e delle conoscenze per apprezzarla e utilizzarla al meglio.

In realtà, la condizione sulla differenziabilità delle funzioni obiettivo e di vincolo non è particolarmente stringente. Quindi, esprimere un quesito nella forma di un problema di ottimizzazione locale è semplice e immediato, la vera sfida è risolverlo.

A tal proposito, rispetto all'ottimizzazione convessa, la situazione risulta ribaltata. In quel caso è difficile la formulazione, in questo la soluzione del problema.

2.11.3 Approccio globale

Un altro possibile compromesso prevede di trascurare l'efficienza, pur di garantire l'esattezza della soluzione. Questo approccio prende il nome di globale, a riprova del fatto che l'algoritmo esamina l'intera regione ammissibile.

La speranza dello sperimentatore che si affida ad un metodo del genere è che la configurazione del caso in esame consenta una rapida esecuzione. Tuttavia, ciò si realizza solo raramente: la ricerca della soluzione può durare ore, o perfino giorni, anche per problemi con poche variabili possono richiedere. Addirittura, nel caso peggiore, la complessità computazionale cresce esponenzialmente con le dimensioni n e m [15].

Alla luce di questi aspetti prestazionali, i metodi di ottimizzazione globali vengono applicati esclusivamente quando le variabili sono minime e l'esattezza della soluzione è un requisito inderogabile.

In campo ingegneristico, per esempio, si applicano alle verifiche dei sistemi in condizioni critiche, o *worst – case analysis*. Dato un sistema, le variabili del problema sono quei parametri che possono variare nel corso delle diverse fasi produttive o a seconda delle condizioni ambientali e operative. La funzione obiettivo costituisce una misura di utilità, cosicché minimizzarla significa considerare il *worst – case*. Le funzioni di vincolo esprimono le informazioni disponibili a priori sui parametri. Il problema di ottimizzazione globale identifica i parametri nella peggiore delle configurazioni: se la misura di utilità è ancora accettabile, il sistema viene certificato sicuro ed affidabile.

Verifiche del genere sono diffuse in diversi ambiti: dalla progettazione industriale all'edilizia, dal disegno di circuiti elettronici allo studio di sostenibilità ambientale o economica.

Evidentemente, un problema del genere non può essere risolto con un approccio locale: un eventuale esito positivo garantirebbe sicurezza e affidabilità solo nell'intorno considerato della stima iniziale.

2.12 Metodi di linearizzazione

Le difficoltà emerse nell'affrontare i problemi non lineari hanno messo in luce la necessità di nuovi metodi risolutivi alternativi.

L'idea base è quella di ricondursi ad una formulazione quantomeno convessa, più agevole da trattare. Per esempio, a partire dal problema originario, se ne può ricavare una versione lineare.

A quel punto, abbondano le proposte in letteratura. Adottato il metodo più consono alle esigenze sperimentali, il risultato costituisce un'approssimazione della soluzione originaria e quindi un'ottima stima iniziale per un problema di ottimizzazione globale.

2.13 Metodi euristici

Sovente, la soluzione deve soddisfare anche alcune proprietà strutturali, per esempio deve essere sparsa. Trattato da un punto di vista combinatorio, il problema diventa arduo. In particolare, anche con poche variabili, il carico computazionale lo rende intrattabile con i consueti strumenti di calcolo.

Fortunatamente, esistono delle specifiche formulazioni convesse, basate sull'opportuno ricorso alle norme, che conducono a soluzioni sparse in tempi ragionevoli.

2.13.1 Norm approximation

La denominazione *norm approximation* identifica una classe di problemi di ottimizzazione, caratterizzati dall'assenza di vincoli e dall'adozione, come funzione obbiettivo, della norma di una qualche grandezza correlata al segnale di interesse.

In termini matematici, la formulazione generale, coniugabile in molteplici varianti, è la seguente [15]:

$$\arg \min_x \|Ax - b\| \quad (2.3)$$

La *norm approximation* è convessa e ammette sempre una soluzione ottimale. Il problema può essere considerato un'approssimazione del sistema matriciale $Ax = b$, dove A è una matrice di dimensione $m \times n$, mentre x e b sono due vettori di lunghezza, rispettivamente, n e m . Senza perdita di generalità si può assumere che $m \geq n$ e che le colonne di A siano linearmente indipendenti.

Se m e n coincidono, la matrice è quadrata e invertibile. Di conseguenza, il problema porge immediatamente la soluzione: $\bar{x} = A^{-1}b$ [15]. È evidente che si tratta di un caso particolarmente fortunato, pertanto nel seguito si assume soltanto $m > n$.

Il paradigma (2.3) si presta a molteplici interpretazioni ed estensioni, a seconda dell'ambito di applicazione. Alcune sono trasposizioni di famosi problemi di ottimizzazione presentati in precedenza.

2.13.2 Approssimazione pesata

Una prima modifica alla (2.3) introduce una pesatura relativa dei diversi termini [15]:

$$\arg \min_x \|W(Ax - b)\|$$

La matrice \mathbf{W} è quadrata, di dimensioni $m \times m$, e diagonale. La sua funzione è attribuire ad ogni residuo un peso relativo. In questo modo, è possibile enfatizzare l'aderenza a certi dati, ritenuti più affidabili, e tralasciarne altri, ritenuti inattendibili.

2.13.3 Approssimazione ai minimi quadrati

Dati alla mano, in letteratura non esiste versione della (2.3) più diffusamente impiegata e discussa.

Adottando la norma $-l_2$ elevata al quadrato, si minimizzi la somma dei quadrati dei residui [15]:

$$\arg \min_x \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2$$

Il problema può essere facilmente risolto per via analitica, purché la funzione obiettivo si dimostri convessa e quadratica, ossia sia riconducibile ad una forma del tipo [25]:

$$f_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} - 2\mathbf{b}^T \mathbf{Ax} + \mathbf{b}^T \mathbf{b}$$

Per definizione, la soluzione $\bar{\mathbf{x}}$ minimizza la funzione obiettivo. Quindi, in essa si annulla il gradiente:

$$\nabla f_0(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

La stessa condizione può essere espressa dal cosiddetto sistema alle equazioni normali: $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$, che ammette sempre soluzione. In particolare, avendo assunto che le colonne di \mathbf{A} sono tra loro linearmente indipendenti, la soluzione è univoca e assume la forma analitica: $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ [15].

2.13.4 Approssimazione minimax

Perfettamente analoga al problema di Chebyshev è la seguente formulazione, nota anche con il nome di approssimazione *minimax*, dato che minimizza il massimo valore assoluto dei residui [15]:

$$\arg \min_x \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_\infty = \max\{|r_1|, |r_2|, \dots, |r_m|\}$$

Se sostituisco alla norma $-l_\infty$ la norma $-l_1$, la funzione obiettivo rappresenta la somma dei valori assoluti dei residui. Al problema si attribuisce, allora, il nome di stimatore robusto.

$$\arg \min_x \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_1 = |r_1| + |r_2| + \dots + |r_m|$$

2.13.5 Legge generale

Dagli esempi precedenti, si deduce una legge che si ripresenta in ogni caso. Adottando la norma $-l_p$, dove $1 \leq p < \infty$, la funzione obiettivo da minimizzare assume una formulazione del tipo:

$$f_0 = (|r_1|^p + |r_2|^p + \dots + |r_m|^p)^{1/p}$$

Come già visto nell'approssimazione ai minimi quadrati, è del tutto equivalente la funzione simmetrica:

$$f_0 = |r_1|^p + |r_2|^p + \dots + |r_m|^p \quad (2.4)$$

In questo modo, il risultato dipende solo dalla distribuzione dei valori assunti dai singoli residui.

2.14 Funzione penalità

Dalla legge (2.4) discende immediatamente il problema di approssimazione con funzione di penalità [15]:

$$\arg \min_x \varphi(r_1) + \varphi(r_2) + \dots + \varphi(r_m), \text{ tale che } \mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$$

Per definizione, la funzione di penalità φ basta che sia convessa. In realtà, nella stragrande maggioranza dei casi, è anche simmetrica, non negativa, e tale da annullarsi nell'origine.

All'atto pratico, per ogni x , si approssima il vettore \mathbf{b} con il prodotto $\mathbf{A}x$. L'eventuale discrepanza viene misurata dal vettore dei residui \mathbf{r} . Qui interviene la funzione di penalità, che assegna ad ogni elemento di \mathbf{r} uno specifico costo. In fin dei conti, la funzione obiettivo altro non è che la somma di quei costi.

La soluzione del problema si dimostra invariante a eventuali moltiplicazioni per fattori di scala della funzione di penalità. Ciò che conta realmente è l'andamento della funzione di penalità che determina la risultante distribuzione dei residui.

2.14.1 Possibili realizzazioni

Diversi studiosi hanno contribuito al dibattito sulla funzione penalità, con proposte più o meno originali. Una delle più scontate prevede una semplice norma l_p del residuo, ossia $\varphi(r_i) = |r_i|^p$, dove $1 \leq p < \infty$. Evidentemente, i risultati sono condizionati dal valore assunto da p . A tal proposito, due casi in particolare trovano ampio spazio in letteratura: $p = 1$ e $p = 2$. Curiosamente, l'adozione di tali funzioni penalità riduce il problema alla corrispondente *norm approximation*.

Un'altra proposta è la cosiddetta *deadzone linear penalty function*, il cui andamento risponde allo schema:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } |r| \leq a \\ |r| - a & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione non assegna alcun costo per i residui di ampiezza inferiore alla soglia a . Proprio per questo motivo, all'intervallo $[-a, +a]$ si attribuisce il nome di zona morta.

Infine, l'ultima proposta qui considerata è la cosiddetta *log barrier penalty function*, con il vincolo $a > 0$:

$$\varphi(r) = \begin{cases} -a^2 \log(1 - (r/a)^2) & \text{se } |r| < a \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tale funzione, detta anche barriera logaritmica, attribuisce un costo infinito a qualsiasi residuo di ampiezza superiore alla soglia a .

2.14.2 Un banco di prova

Un esempio concreto può mettere in luce come le differenze non riguardino soltanto le formulazioni, quanto piuttosto i risultati che provocano.

Siano \mathbf{A} una matrice a coefficienti reali, di dimensioni 100×30 , e \mathbf{b} un vettore a valori reali, di lunghezza pari a 100. Per ogni funzione di penalità presentata nel paragrafo precedente, si risolve il problema di approssimazione e si appronta un grafico che raffiguri la distribuzione delle ampiezze dei residui.

Per una maggiore chiarezza, ad ogni grafico viene sovrapposto l'andamento della corrispondente funzione di penalità. Dall'analisi comparata dei quattro grafici si deducono molte utili informazioni.

La norma l_1 è quella che assegna i pesi maggiori nello stretto intervallo dell'origine. Di contro, il suo andamento lineare fa sì che mano a mano che cresce l'ampiezza, i pesi si mantengono direttamente

proporzionali, ma inferiori a quanto previsto in altri casi. Per questo motivo, la stragrande maggioranza dei residui ha ampiezza nulla o comunque trascurabile, però ne rimangono alcuni di notevole ampiezza.

La norma $-l_2$ penalizza di meno i residui più piccoli, ma attribuisce un pesante costo a quelli più ampi. La relazione in tal senso è quadratica. Di conseguenza, non ci sono altrettanti residui esattamente nulli, gli stessi occupano un intervallo più ampio di valori. D'altro canto, la distribuzione è più raccolta: si riducono i valori massimi assunti dai singoli residui.

La *deadzone linear penalty function*, traslascia i residui compresi nella zona morta, qui $[-0.5, +0.5]$. Al suo esterno, invece, i pesi seguono un andamento lineare crescente, ma sono comunque ridotti, se rapportati agli altri casi. Di conseguenza, le ampiezze dei residui si concentrano su due valori, gli estremi della zona morta.

Infine, la barriera logaritmica ricalca l'andamento della norma $-l_2$ per quanto riguarda i residui più piccoli. Questo aspetto viene evidenziato dal grafico dove l'andamento quadratico viene rappresentato con una linea tratteggiata. Tolto quel breve tratto, i due andamenti si distinguono nettamente e la barriera logaritmica si presenta come la funzione più selettiva del novero. Nel particolare caso raffigurato, non sono ammessi residui di ampiezza superiore a 1. In termini matematici, a questi ultimi viene assegnato un peso illimitato. La distribuzione è una diretta conseguenza di queste osservazioni: nell'intervallo $[-1, +1]$ ricalca quella della norma $-l_2$.

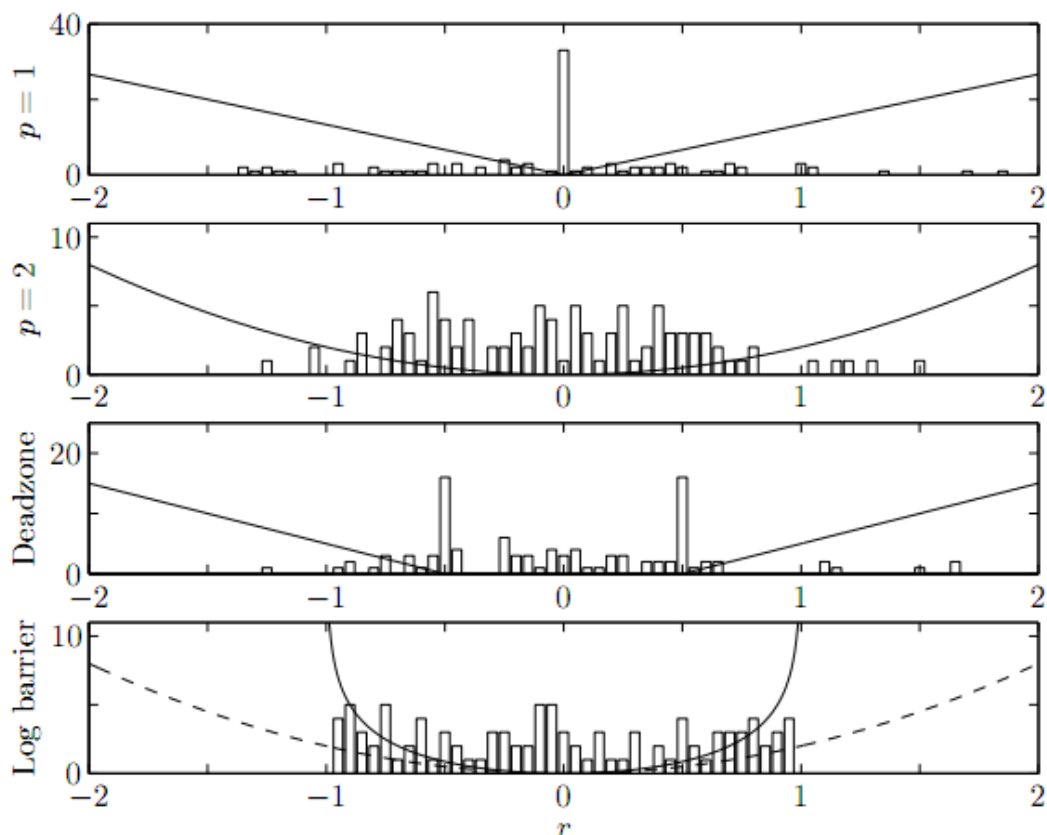


Figura 2.1 Distribuzione delle ampiezze dei residui nei quattro casi considerati, per maggiore chiarezza in ogni grafico è rappresentato anche l'andamento della corrispondente funzione penalità [15]

2.15 Outlier

Nell'ambito dei metodi di stima, il termine *outlier* designa una misura $y_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + v_i$, in cui la componente rumorosa v_i è preponderante. Generalmente, si tratta di un errore nel sistema di acquisizione o di un dato il cui valore è stato corrotto in fase di memorizzazione.

Qualunque sia la causa scatenante, bisogna attuare delle contromosse, per evitare di inficiare i risultati dell'intera procedura. Infatti, anche se si presentano raramente, bastano pochi esemplari per modificare radicalmente le proprietà statistiche di un insieme di misure. In tal senso, il caso più eclatante è rappresentato dalla media.

Idealmente, bisognerebbe attribuire a tali "mele marce" un peso nullo così da scartarle nel computo dei risultati. Sfortunatamente l'attuazione di questo principio non è immediata. Infatti, non basta imporre peso nullo per tutti i residui maggiori di una certa soglia. In questo modo, si preferirebbero le soluzioni con i residui più ampi. In altri termini, ci si discosterebbe dalla stragrande maggioranza delle misure acquisite.

L'adozione di un approccio diametralmente opposto, invece, si rivela una scelta vincente. In particolare, si appronta una funzione penalità che risponde al seguente schema [15]:

$$\varphi(r) = \begin{cases} r^2 & \text{se } |r| \leq M \\ M^2 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.5)$$

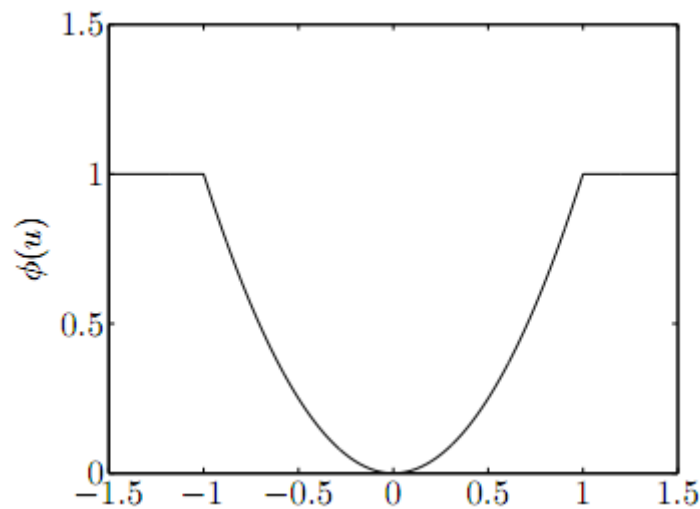


Figura 2.2 Andamento della funzione penalità (2.5) [15]

L'utente dispone anche di un grado di libertà: il parametro M da tarare a seconda delle esigenze e dell'entità degli eventuali *outlier*. Nell'intervallo $[-M, +M]$ l'andamento è quadratico e ricalca quello della norma $-l_2$. All'esterno, invece, il peso è fissato e non dipende dall'effettiva ampiezza del residuo. In questo modo, tutti i valori superiori a M sono notevolmente penalizzati, perché ritenuti *outlier* o comunque misure poco attendibili.

Sfortunatamente, la funzione (2.5) ha il difetto di non essere convessa. Quindi, neppure il problema di approssimazione associato è convesso, con tutte le complicazioni che ne derivano. Pertanto, conviene percorrere altre vie, che non si traducano in problemi combinatori impraticabili.

Evidentemente, la sensibilità di una funzione di penalità agli *outlier* dipende dal peso relativo attribuito ai residui più ampi. A tal proposito, limitandosi alle sole funzioni convesse, si definiscono robuste, ossia meno sensibili, quelle che impongono un peso che dipende secondo una relazione lineare dal valore assoluto del residuo. In particolare, se $|r|$ cresce, allora $\varphi(r)$ cresce.

Una proposta autorevole in tal senso è la cosiddetta funzione di penalità di Huber, che segue lo schema:

$$\varphi_{hub}(r) = \begin{cases} r^2 & \text{se } |r| \leq M \\ M(2|r| - M) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa formulazione rappresenta l'approssimazione convessa più fedele della (2.5). Infatti, nell'intervallo $[-M, +M]$ l'andamento è quadratico e coincide perfettamente. All'esterno attua una crescita lineare, quasi si trattasse di una norma $-l_1$.

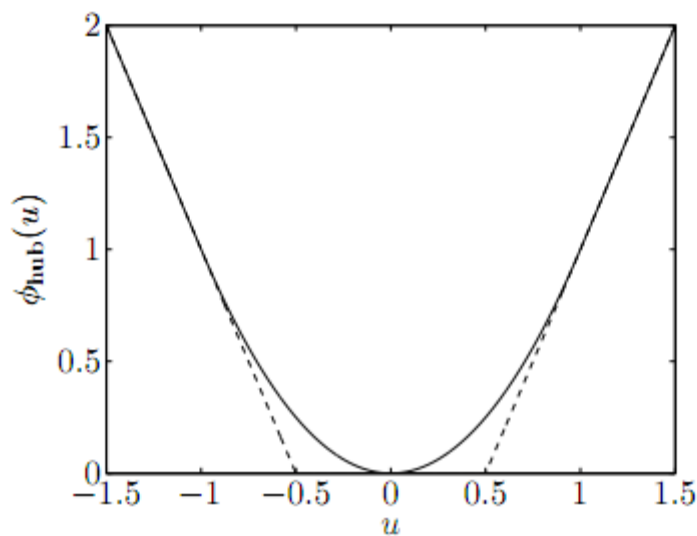


Figura 2.3 Andamento della funzione penalità di Huber [15]

2.16 Approssimazione vincolata

Nella *norm approximation* non sono previsti vincoli di alcun genere, come dimostrato dalla (2.3). D'altro canto, nulla vieta di aggiungerli, anche se non bisogna trascurare le implicazioni sulle eventuali proprietà di linearità o convessità del problema.

Esiste una notevole varietà di vincoli, che non hanno esclusivamente carattere restrittivo, ma permettono di arricchire il contenuto informativo del problema e di specificare meglio le esigenze dell'utente:

- delimitano l'insieme delle possibili soluzioni, escludendo risultati poco verosimili o addirittura inammissibili dal punto di vista fisico;
- esprimono in termini quantitativi e sintetici le informazioni a priori a disposizione dell'utente, inerenti le variabili, la loro struttura, il loro plausibile ordine di grandezza;
- suggeriscono una specifica interpretazione geometrica del problema: in particolare, l'insieme su cui si proietta \mathbf{b} potrebbe non essere un semplice sottospazio, ma un solido noto, come un cono o un poliedro.

Nel seguito si presentano tre possibili vincoli, in cui è facile imbattersi nelle pubblicazioni di argomento sia teorico che pratico. Si tratta, infatti, di funzioni adottate di consueto nelle prove di laboratorio.

2.16.1 Non negatività

Il vincolo di non negatività può avere diverse motivazioni. Tra le più comuni c'è quella di natura fisica: la variabile x rappresenta una grandezza, come una potenza o una frequenza, che per definizione non può assumere valori negativi. In tal caso, alla formulazione (2.3) viene aggiunto una specifica condizione [15]:

$$\arg \min_x \|Ax - b\|, \text{ tale che } x \geq 0$$

Dal punto di vista geometrico, risolvere il problema equivale a determinare la proiezione del vettore b sul cono generato dalle colonne di A .

2.16.2 Vincoli parametrici

Solitamente, i valori assunti dalla variabile x appartengono ad un intervallo limitato. Se sono noti a priori gli estremi di tale intervallo, conviene esprimere il problema nella forma [15]:

$$\arg \min_x \|Ax - b\|, \text{ tale che } l \leq x \leq u$$

Si osservi come la funzione di vincolo presenti due parametri l e u che l'utente determina sulla base delle informazioni a priori o delle sue preferenze.

2.16.3 Norm ball

Del tutto analogo è il cosiddetto vincolo *norm ball*, che trova una realizzazione concreta nella forma [15]:

$$\arg \min_x \|Ax - b\|, \text{ tale che } \|x - x_0\| \leq d$$

In tal caso, la soluzione si mantiene all'interno di una sfera di centro x_0 e raggio d . In genere, x_0 è una stima a priori, mentre d la massima deviazione ammessa.

2.17 Problemi a norma minima

Dall'esperienza dell'approssimazione vincolata discende una nuova classe di problemi di ottimizzazione, noti come *least-norm problems*, o problemi a norma minima, e rispondenti alla formulazione:

$$\arg \min_x \|x\|, \text{ tale che } Ax = b$$

La soluzione è definita solo laddove il vincolo viene rispettato, ossia solo se l'equazione lineare $Ax = b$ ammette a sua volta soluzione. La matrice A di dimensioni $m \times n$ si assume composta da righe linearmente indipendenti. È importante sottolineare che queste ipotesi non diminuiscono in alcun modo la generalità dei risultati conseguiti. In realtà, servono soltanto a facilitare l'implementazione degli algoritmi risolutivi, che spesso ricorrono a inversioni matriciali, o comunque richiedono matrici a rango completo.

L'indipendenza delle righe di A comporta necessariamente che le sue dimensioni rispettino la seguente disuguaglianza: $m \leq n$. Si prospettano allora due possibili scenari.

Se $m = n$, la matrice \mathbf{A} è quadrata e invertibile. In tal caso, l'equazione lineare ammette un'unica soluzione, ricavabile in forma chiusa mediante inversione: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Questo è l'unico valore capace di soddisfare le condizioni del problema, quindi, ne rappresenta anche la soluzione.

Se $m < n$, invece, l'equazione lineare risulta sotto – determinata. In altri termini, il numero delle incognite supera quello delle equazioni. In tal caso, i tradizionali metodi risolutivi non sono in grado di pervenire ad un risultato univoco, in forma chiusa. Bisogna raccogliere un maggior numero di informazioni sul sistema e sulle variabili, così da arricchire la formulazione del problema e restringere il campo delle possibili soluzioni. Alla luce di questi elementi, è suggeribile valutare separatamente le singole situazioni ed elaborare degli algoritmi *ad hoc*. Nel prosieguo si affrontano alcune delle casistiche più consuete ed interessanti e si forniscono degli utili suggerimenti.

2.17.1 Soluzione least squares

Il più famoso tra i cosiddetti *least – norm problems* considera la norma $– l_2$ della variabile e la eleva al quadrato. La formulazione presenta evidenti analogie con il *least – squares problem*:

$$\arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_2^2, \text{ tale che } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Proprio come nel problema di ottimizzazione ai minimi quadrati, la soluzione può essere determinata per via analitica. L'introduzione della variabile duale, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, consente di scrivere le condizioni di ottimalità:

$$2\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni lineari, peraltro facilmente risolvibile con il metodo di sostituzione:

$$\bar{\mathbf{v}} = -2(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{b} \quad \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{b}$$

2.17.2 Soluzione least penalty

Un'altra variazione sul tema, molto utile all'atto pratico, è il cosiddetto *least – penalty problem* [15]:

$$\arg \min_{\mathbf{x}} \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n) \\ \text{tale che } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Per definizione, la funzione φ è convessa, non assume valori negativi e soddisfa la condizione $\varphi(0) = 0$. Certamente, ricorda molto da vicino una funzione di penalità. Tutte le osservazioni e le interpretazioni, già elaborate in quell'ambito, possono essere riproposte fedelmente anche qui. È sufficiente sostituire all'ampiezza dei residui quella delle variabili.

2.17.3 Soluzioni sparse

In precedenza si è osservato che minimizzare la norma $– l_1$ produce una soluzione con molti residui identicamente nulli. Una simile distribuzione è un indizio innegabile di sparsità. In tal senso, si può affermare che minimizzare la norma $– l_1$ significa cercare la più sparsa delle soluzioni possibili [15]:

$$\arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1, \text{ tale che } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.6)$$

Infatti, in perfetta analogia a quanto affermato, la soluzione del cosiddetto *least l_1 – norm problem* contiene un gran numero di componenti nulle.

In realtà, il problema non è nuovo in letteratura, dove spesso appare con la dizione inglese di *basis pursuit*. Tipicamente, si ricorre ad algoritmi combinatori, che valutano in maniera esaustiva tutte le possibili soluzioni.

Dal punto di vista teorico, questo approccio non presenta notevoli difficoltà. Di contro, il peso computazionale è tale da scoraggiare qualsiasi effettiva implementazione della procedura.

In un simile contesto, nasce l'idea del *least l_1 - norm problem*, che coniuga ad un semplice schema operativo un ridotto tempo di esecuzione.

2.18 *Bi - criterion formulation*

Nel corso di questa breve trattazione si sono messe in luce alcune esigenze diverse.

Certi problemi focalizzano l'attenzione sull'aderenza ai dati sperimentali, ossia tendono ad annullare l'eventuale errore di predizione. Allo scopo, assumono come funzione obiettivo una qualche misura o una qualche norma dei residui.

Altri problemi, invece, concentrano i loro sforzi sulla variabile e le sue caratteristiche. In particolare, nel caso di soluzioni sparse, cercano di ridurre al minimo il numero delle componenti significative della variabile. In quest'ottica, la funzione obiettivo è costituita da una norma, generalmente la norma $- l_1$, della variabile.

Un interessante esperimento formale combina queste due linee guida nell'espressione comune [15]:

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}_+^2} (\|x\|, \|Ax - b\|)$$

Questo particolare formulazione prende il nome di *bi - criterion formulation*. Tale denominazione ha un chiaro significato. Nel cercare la soluzione, infatti, ci si attiene contemporaneamente a due criteri. Non a caso, la funzione obiettivo è composta da due membri, ciascuno rappresentato da una norma.

Peraltro, nulla vieta che le due quantità da ottimizzare adottino norme diverse per dimensione o tipologia.

Il problema gode anche di un'immediata trasposizione grafica. Per trovare il compromesso ottimale tra i due contributi conviene tracciare l'andamento dell'espressione $\|Ax - b\|$ in funzione di $\|x\|$. In particolare, gli obiettivi dell'analisi sono i punti di minimo di tale curva.

Il più facile da individuare è sicuramente quello in cui $\|x\|$ si annulla e la norma dei residui si riduce a $\|b\|$. Non necessariamente però è l'unico. A tal proposito, si consideri la sola funzione obiettivo $\|Ax - b\|$ e si definisca l'insieme C delle possibili soluzioni. Tra queste si selezioni quella a norma minima.

La configurazione individuata costituisce sicuramente un altro punto di minimo, ossia un altro compromesso ottimale tra i due criteri.

2.18.1 *Regolarizzazione*

Con il termine regolarizzazione si indica un'intera classe di metodi risolutivi della *bi - criterion formulation*.

Un classico esempio consiste nel minimizzare un'opportuna somma pesata dei due membri [15]:

$$\arg \min_x \|Ax - b\| + \gamma \|x\|$$

Il parametro γ fornisce all'utente un grado di libertà, in grado di determinare il predominio di un criterio sull'altro: maggiore è γ , maggiore è la regolarità della stima; minore è γ , minore è l'errore di predizione, ossia maggiore è l'aderenza ai dati sperimentali.

Rifacendosi alla precedente interpretazione grafica, è lecito affermare che al variare del parametro varia l'andamento della curva e quindi la configurazione degli eventuali punti di minimo.

Un'altra istanza molto diffusa, specialmente se le norme sono di classe l_2 , presenta marcate analogie con la formulazione del problema ai minimi quadrati [15]:

$$\arg \min_x \|Ax - b\|^2 + \delta \|x\|^2$$

Anche in questo caso, il parametro δ costituisce un utile strumento per condizionare e indirizzare le soluzioni del problema.

2.18.2 *Ambiti di applicazione*

Il ricorso ai metodi di regolarizzazione accomuna settori ed applicazioni, tra loro anche molto eterogenei.

Nell'ambito dei processi di stima, il problema può essere interpretato come l'identificazione dei parametri di un modello che garantiscono la migliore aderenza ai dati. In un simile contesto, l'introduzione del termine aggiuntivo, proporzionale alla norma della variabile, può rappresentare un'ulteriore informazione sulla variabile del problema. Per esempio, l'utente potrebbe conoscere a priori che la soluzione è sparsa, o comunque assume valori non troppo elevati.

Nell'ambito del disegno circuitale, le variabili rappresentano le dimensioni delle diverse componenti. Pertanto, i due membri della funzione obiettivo quantificano due specifici costi progettuali. Il primo misura la precisione con cui si seguono le specifiche desiderate, il secondo valuta le controindicazioni di adottare dispositivi dalle dimensioni eccessive.

Un altro aspetto di cui tenere conto è il seguente. La regolarizzazione permette anche di evidenziare o celare le eventuali variazioni della matrice A . Infatti, se x assume valori elevati, anche minime modifiche nella struttura di A vengono amplificate nel prodotto Ax . Di contro, ridurre la norma della variabile significa tralasciare tutti quei mutamenti, ritenuti di entità troppo bassa per essere significativi.

2.18.3 *Regolarizzazione di Tikhonov*

Senza ombra di dubbio, il metodo di regolarizzazione più noto è quello di Tikhonov. Questo approccio ricorre a due norme – l_2 e conduce ad un problema di ottimizzazione convesso e quadratico [15]:

$$\begin{aligned} \arg \min_x \|Ax - b\|^2 + \delta \|x\|^2 &= \\ &= x^T (A^T A + \delta I)x - 2b^T Ax + b^T b \end{aligned} \quad (2.7)$$

Il problema (2.7) ammette una soluzione, ricavabile anche per via analitica secondo l'espressione:

$$x = (A^T A + \delta I)^{-1} A^T b$$

Peraltro, dal momento che la quantità tra parentesi è sempre positiva, per qualsiasi valore positivo del parametro δ , la regolarizzazione di Tikhonov non impone alcuna condizione sulle dimensioni o il rango della matrice A .

2.19 Procedure di *smoothing*

La peculiarità dei metodi di regolarizzazione può essere riassunta in un unico elemento: l'aggiunta alla funzione obiettivo di un termine che penalizzi l'assunzione di valori elevati da parte della variabile x .

Lo schema base è piuttosto generico e si presta a molteplici variazioni sul tema.

All'atto pratico, è consuetudine adottare come termine aggiuntivo l'espressione $\|Dx\|$, in luogo della più semplice $\|x\|$. In questo modo, a seconda della struttura della matrice D , si mettono in luce alcune specifiche caratteristiche della variabile. Per esempio, in molte applicazioni, la matrice D costituisce un operatore differenziale discreto del primo o secondo ordine. Una simile scelta permette di quantificare con $\|Dx\|$ la *smoothness*, o regolarità, della variabile.

L'analisi di un'effettiva implementazione mette in luce le potenzialità di un simile approccio.

La variabile reale x , di dimensione n , rappresenti i valori assunti da un qualche parametro fisico all'interno di un intervallo continuo. Una semplice approssimazione della derivata prima del parametro in corrispondenza del suo valore i -esimo è la seguente: $n(x_{i+1} - x_i)$. In modo del tutto analogo la derivata seconda sempre in corrispondenza dell' i -esimo valore è approssimata come: $n^2(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})$.

Passando ad una notazione matriciale che consideri tutti i valori nel loro complesso, si ricorre alla matrice:

$$\Delta = n^2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 2.4 Matrice per il calcolo della derivata seconda della variabile x [15]

Di conseguenza, Δx approssima la derivata seconda dell'andamento del parametro, mentre $\|\Delta x\|_2^2$ rappresenta la media quadratica della curvatura di tale andamento.

A quel punto, si possono seguire diverse vie alternative. Quella più semplice da implementare e risolvere è rappresentata da un problema di ottimizzazione caratterizzato da una *bi - criterion formulation*. In questo modo, si possono perseguire due obiettivi simultaneamente: l'aderenza ai dati sperimentali e la regolarità della soluzione. Infatti, è quantomeno improbabile che un parametro di derivazione fisica presenti un andamento discontinuo o fortemente frastagliato. Di contro è lecito attendersi variazioni graduali, senza nette commutazioni, ma con cambi di pendenza dolci e arrotondati.

Per l'effettiva realizzazione conviene ricorrere alla formula (2.7) della regolarizzazione di Tikhonov:

$$\arg \min_x \|Ax - b\|_2^2 + \delta \|\Delta x\|_2^2$$

La funzione obiettivo evidenzia due distinti contributi. Il primo quantifica l'errore di predizione; invece, il secondo, come osservato in precedenza, è una misura della regolarità dei risultati. In questo contesto, il parametro δ determina il compromesso desiderato tra i due contributi.

Per affinare sempre più i risultati, la formulazione può essere arricchita di ulteriori termini. Per esempio:

$$\arg \min_x \|Ax - b\|_2^2 + \delta \|x\|_2^2 + \eta \|x\|_1^2$$

In questo caso, il parametro δ stabilisce il livello di regolarità dei risultati, mentre, in perfetta analogia, il parametro η controlla la loro dimensione.

2.20 Regolarizzazione e sparsità

Come è facile immaginare, nell'ambito dei problemi di regolarizzazione le possibili varianti sono infinite. Una in particolare si dimostra utile ai fini del presente studio.

$$\arg \min_x \|Ax - b\|_2 + \gamma \|x\|_1$$

Ancora una volta, la funzione obiettivo è bipartita, ma in questo caso i due contributi differiscono non solo per il loro significato, ma anche per i loro attributi formali. In particolare, il primo viene misurato con la norma l_2 , mentre il secondo adotta la norma l_1 .

Ovviamente, questo aspetto influenza anche la rispettiva interpretazione dei due termini: il primo determina l'errore di predizione, mentre il secondo fornisce una misura della sparsità della soluzione.

2.20.1 Esempio concreto

La pratica sperimentale propone spesso configurazioni riconducibili a questo paradigma.

Si consideri una matrice A , di dimensioni $n \times m$, le cui colonne siano dei potenziali regressori. Di contro, sia b un vettore di lunghezza n . L'obiettivo prefisso consiste nell'approssimare b con una combinazione lineare di k colonne di A , laddove $k < m$. In maniera del tutto equivalente, la consegna richiede di scegliere i k regressori più opportuni e di identificare i rispettivi coefficienti nella combinazione lineare.

In termini matematici, il quesito può essere espresso come un problema di ottimizzazione vincolato:

$$\arg \min_x \|Ax - b\|_2, \text{ tale che } \text{card}(x) \leq k$$

Il tradizionale approccio combinatorio risulta incompatibile con le consuete esigenze sperimentali, sia in termini di tempi di esecuzione sia in termini di capacità computazionale necessaria. Infatti, l'idea è quella di controllare singolarmente ogni possibile soluzione con solo k elementi non nulli.

Appare subito evidente che il numero dei tentativi dipende dai valori assunti da n e k . È, addirittura, possibile definire la relazione che intercorre tra queste grandezze:

$$\# \text{ tentativi} = \frac{n!}{(k!(n-k)!)}$$

Vista l'impraticabilità di questa soluzione, si abbandona l'approccio di tipo combinatorio per quello di tipo euristico. In quest'ottica, si ripiega su un problema di regolarizzazione, che esprima la condizione di sparsità con uno specifico termine aggiuntivo, caratterizzato dall'uso della norma l_1 :

$$\arg \min_x \|Ax - b\|_2 + \gamma \|x\|_1$$

Per non compromettere l'aderenza ai dati sperimentali, il parametro γ viene identificato come il minimo valore che produce una soluzione con cardinalità pari a k . A differenza del precedente, questo metodo risolutivo è leggero dal punto di vista computazionale e richiede solo ridotti tempi di esecuzione.

CAPITOLO III

Algoritmi *greedy*

3.1 Introduzione

L'aggettivo inglese *greedy* assume differenti significati a seconda dei contesti in cui viene impiegato. Di conseguenza, non è facile fornirne una traduzione univoca nella lingua italiana. Tra le possibili accezioni del vocabolo se ne sottolineano tre: avido, goloso e impaziente.

Ad una prima analisi, questi termini non sembrano compatibili con il rigore e la precisione degli studi ingegneristici. Al contrario, una semplice ricerca nella letteratura di settore dell'aggettivo *greedy* produce un numero estremamente rilevante di risultati. Questo inatteso fenomeno non deve, peraltro, destare alcuno stupore. Infatti, il vocabolo in questione designa un'intera classe di algoritmi per la soluzione dei problemi di ottimizzazione. Inizialmente, una simile denominazione appare curiosa, se non inappropriata. In realtà, una volta compreso l'impianto teorico e procedurale, tale scelta risulta motivata e ineccepibile.

3.2 Un approccio non convenzionale

In genere, la soluzione di un problema di ottimizzazione non è immediata, ma comporta l'esecuzione di una sequenza di operazioni. Ad ogni passaggio, con un andamento progressivo più o meno marcato, l'insieme dei possibili risultati si affina e riduce la propria cardinalità. Nella migliore delle ipotesi, la procedura termina con l'individuazione dell'unica soluzione ottima.

I cosiddetti *greedy algorithms*, invece, adottano un approccio del tutto alternativo. A tal proposito, cercano di pervenire ad una soluzione ottima del problema, partendo da una sua soluzione parziale ed estendendola iterativamente, finché questo non è più possibile.

Nel tentativo di estendere la soluzione parziale non vengono prese in considerazione tutte le possibili estensioni, che potrebbero essere numerosissime, ma solamente quelle definite locali. Queste ultime rappresentano le più piccole estensioni possibili e sono relativamente poche. Fra tutte, l'algoritmo sceglie la più conveniente, ossia quella che sembra, almeno localmente, la più promettente per raggiungere la soluzione ottima.

Un simile approccio richiede di specificare una serie di dettagli, tutt'altro che marginali. In primo luogo, che cosa si intende per soluzione parziale? Vale a dire, dato il problema che si vuole risolvere, come sono definite le sue soluzioni parziali? E ancora, come deve essere scelta la soluzione parziale iniziale? E le sue estensioni locali? Infine, con quale criterio si quantifica la convenienza di un'estensione locale?

In realtà, le risposte a queste domande non sono necessariamente uniche, ma variano a seconda della sensibilità e delle particolari esigenze dell'utente. Di conseguenza, uno stesso problema può ammettere molteplici soluzioni *greedy*, anche molto dissimili tra loro.

3.3 Pro e contro

Questa classe di algoritmi presenta fondamentalmente due punti di forza: sono facili da eseguire e rapidi da approntare. A fronte di questi vantaggi, bisogna ricordare che il buon esito della procedura non è per nulla garantito. Non sempre ma nella maggior parte dei casi, gli algoritmi *greedy* non pervengono alla soluzione ottima globale e si limitano a restituire un'approssimazione. Questo fenomeno si verifica perché non considerano in maniera esaustiva tutti i dati a disposizione, ma procedono iterativamente attraverso una successione di decisioni locali. Una scelta operata troppo presto che in seguito, disponendo di maggiori informazioni, si riveli errata, spesso preclude la possibilità di pervenire alla soluzione ottima globale. Proprio l'incapacità di valutare i dati nella loro interezza e l'impossibilità di tornare sui propri passi sono tra le principali critiche mosse a questa classe di algoritmi.

Alla luce di queste osservazioni, il loro ideale ambito di applicazione è costituito da problemi semplici, con una sottostruttura ottimale. A tal proposito, si dice che un problema esibisce una sottostruttura ottimale se una sua soluzione ottimale contiene soluzioni ottimali ai suoi sottoproblemi.

3.4 Banchi di prova

Spesso, alcuni esempi concreti possono risultare più istruttivi di molte parole. A tal proposito, si espongono due classici banchi di prova nell'ambito dei problemi di ottimizzazione. Il tentativo di pervenire ad una soluzione mediante un algoritmo *greedy* produce esiti contrastanti e pone in evidenza problematiche inattese e di difficile rimedio. Ciò nonostante, un'analisi di questo tipo si rivela molto informativa: i risultati raccolti sono la riprova fattuale e incontrovertibile dell'importanza della condizione sulla sottostruttura ottimale.

3.4.1 Problema del resto

Talvolta, le intuizioni più profonde e illuminanti traggono spunto da aspetti, apparentemente insignificanti, della vita quotidiana. In un certo senso, questo è valido anche per uno dei più celebri banchi di prova: il cosiddetto problema del resto. Al riguardo basti considerare la diffusione dei distributori automatici nei più svariati ambienti.

Tra le funzioni di questi macchinari è prevista anche quella di fornire il resto. L'omonimo problema di ottimizzazione si pone l'obiettivo di minimizzare il numero delle monete erogate. Si tratta a tutti gli effetti di un banco di prova, utilizzato per valutare le prestazioni di diversi metodi risolutivi.

In questo contesto, l'attenzione si restringe ai soli algoritmi *greedy*. Ad ogni passaggio, il distributore aggiorna il computo della somma da restituire. Quindi, eroga la moneta con il massimo valore che non eccede l'importo dovuto. Questa procedura si ripete iterativamente fino a quando il debito viene estinto o il distributore non dispone di monete di valore inferiore o pari alla cifra da saldare.

Una semplice e rapida casistica mette in luce pregi e difetti di un simile approccio *greedy* al problema.

Si consideri un distributore contenente soltanto monete da 25, 10 e 4 centesimi. Qualora il resto sia pari a 49 centesimi, l'algoritmo produce la sequenza ordinata di una moneta da 25, due da 10 e una da 4 centesimi. Qualora, invece, il resto sia pari a 41 centesimi, il distributore eroga, nell'ordine, una moneta da 25, una da 10 e una da 4 centesimi. A quel punto, però, non è in grado di colmare per intero la differenza. Al contrario, un algoritmo più sofisticato avrebbe risolto il problema con una moneta da 25 seguita da quattro da 4 centesimi.

L'insegnamento che si ricava da questo esempio è evidente: anche minime modifiche nella configurazione del problema possono inficiarne i risultati. In particolare, nel primo caso la sottostruttura è ottimale e l'algoritmo funziona correttamente. Altrettanto non si può dire per il secondo caso.

3.4.2 Problema del commesso viaggiatore

Un altro celebre banco di prova risponde al nome di problema del commesso viaggiatore. Questa curiosa denominazione trae spunto dalla prima interpretazione data storicamente al problema.

Un'impresa commerciale incarica il proprio commesso viaggiatore di recarsi in una serie di città, per incontrare degli importanti clienti. Al termine delle consultazioni, l'impiegato deve tornare in sede per fornire il proprio resoconto. Per minimizzare costi e tempi di viaggio, il commesso viaggiatore cerca il minimo percorso che passi per ogni città una ed una sola volta.

Un'immediata trasposizione formale è offerta dalla teoria dei grafi. Infatti, la rete utilizzata dal commesso per spostarsi da una tappa all'altra costituisce un grafo completo pesato. In particolare, le città sono i nodi, le strade gli archi e le distanze i pesi. Secondo tale interpretazione, il problema consiste nel trovare il ciclo hamiltoniano con peso minore.

Peraltro, le implicazioni di carattere pratico e applicativo non si limitano al campo della logistica. A tal proposito la letteratura contiene le più svariate letture del problema. Un esempio classico è la costruzione di circuiti stampati. Nel corso della produzione industriale uno dei passaggi cruciali è la pianificazione del percorso del trapano per creare i fori nella piastra. Solitamente, per minimizzare le imprecisioni, le operazioni di foratura e rifinitura sono affidate a dei *robot*. In siffatto contesto, le città diventano i fori da praticare, mentre il costo del "viaggio" include anche i tempi morti, ad esempio il tempo che impiega il *robot* per cambiare la punta del trapano, quando è necessario.

La semplicità con cui si presenta il quesito è ingannevole. In realtà, si tratta di uno dei problemi di ottimizzazione più studiati, un vero rompicapo computazionale. Allo stato dell'arte non si conosce ancora un metodo risolutivo ottimale. Addirittura, il Clay Mathematic Institute ha messo in palio un premio di un milione di dollari destinato a chiunque elabori un algoritmo funzionante ed efficiente.

Dato un elenco di n città da visitare, il numero totale dei possibili percorsi è facile da calcolare. Fissata la tappa di partenza esistono $n - 1$ possibili mete, di lì $n - 2$ e così via sino ad esaurimento. Il computo delle alternative allora è pari a $(n - 1)!$. D'altro canto, il problema è simmetrico visto che i punti di partenza e di

arrivo coincidono. Di conseguenza, il totale va diviso per un fattore 2. Concludendo, date n città ci sono $(n - 1)!/2$ percorsi che le collegano.

La formula di Stirling permette di approssimare l'espressione fattoriale con un'opportuna funzione esponenziale. Evidentemente, il numero delle alternative cresce molto rapidamente con il parametro n . Proprio in questo aspetto si cela la complessità computazionale del problema. Ad oggi, è impensabile ispezionare uno ad uno i possibili percorsi, o se non altro è impraticabile con gli odierni strumenti di calcolo. Nel corso degli anni diversi studiosi si sono dedicati a questo rompicapo. Tuttavia, qualsiasi tentativo con un approccio del tipo *greedy* si è rivelato infruttuoso, per non dire disastroso. In tal senso la proposta algoritmica più semplice e intuitiva si attiene al seguente criterio: raggiunta una città recati nella più vicina non ancora visitata. Le prestazioni, però, sono quanto mai sconfortanti. Addirittura, L'algoritmo restituisce la peggiore soluzione possibile.

Il motivo di un simile insuccesso è presto detto. Il problema del commesso viaggiatore non esibisce certo una sottostruttura ottimale. L'opportunità del percorso non può essere valutata di meta in meta, ma solo globalmente. In alcune tappe bisogna prendere una decisione apparentemente non ottimale, ma che si rivela vincente nel complesso. Per questo motivo, il problema non è certo un candidato ideale per applicare un algoritmo *greedy*.

3.5 Il concetto di matroide

L'impianto teorico che sorregge gli algoritmi *greedy* è molto solido e ben articolato. In esso si rintracciano aspetti tipici sia del calcolo matriciale che della teoria combinatoria. Il fulcro dell'intera trattazione è rappresentato da una particolare struttura matematica, nota con il nome di matroide. La sua introduzione consente di trattare il concetto di indipendenza, estendendo e ampliando quello di indipendenza lineare tra spazi vettoriali.

In termini formali, una matroide è costituita dalla coppia di due insiemi [20]. Al riguardo, una formulazione semplice ed efficace è la seguente: $M = (E, I)$.

Scendendo nel dettaglio, E è detto insieme ambiente o insieme sostegno di M , invece I è una collezione di particolari sottoinsiemi di E . In particolare, gli elementi di I , detti anche insiemi indipendenti di M , devono soddisfare tre condizioni:

- 1) L'insieme vuoto è indipendente.
- 2) Ogni sottoinsieme di un indipendente è indipendente.
- 3) Se A e B sono due insiemi indipendenti e A possiede più elementi di B , allora esiste almeno un elemento appartenente ad A , ma non a B , che, una volta aggiunto a B , porta ad un altro insieme indipendente.

Alle diverse condizioni si sono attribuiti dei nomi così da identificarle facilmente. In particolare, la seconda è nota come proprietà di ereditarietà dell'indipendenza, mentre la terza come proprietà di scambio. Quest'ultima denominazione merita un rapido chiarimento: dati due insiemi indipendenti della stessa

cardinalità, qualsiasi elemento dell'uno può essere sostituito da qualsiasi elemento dell'altro. Una simile operazione produce sempre e comunque un altro insieme indipendente. Questa evidenza di facile dimostrazione giustifica la scelta del termine scambio.

In perfetta analogia con il calcolo matriciale, anche di una matroide si può calcolare il rango. A tal proposito, una matroide è detta di rango finito se esiste un numero naturale tale che nessun insieme indipendente ha cardinalità ad esso superiore.

3.5.1 Estensioni di una soluzione parziale

L'introduzione delle matroidi permette di affrontare, con la dovuta coerenza e precisione, l'intricata questione delle estensioni delle soluzioni parziali.

Il contesto comprende una matroide $M = (E, I)$ e un suo particolare insieme indipendente A . Si consideri adesso un generico elemento x , non appartenente ad A . Questo si definisce un'estensione se, una volta aggiunto ad A , non ne inficia l'indipendenza, ossia se l'insieme risultante soddisfa ancora le proprietà di ereditarietà e scambio. Lo stesso concetto può essere espresso secondo i dettami della sintassi matematica, nella forma:

$$x \notin A : A \cup \{x\} \in I$$

Dalla nozione di estensione deriva tutta una serie di definizioni, che si rivelano molto utili nel prosieguo della trattazione. Per esempio, un insieme indipendente A si dice massimale se non ammette estensioni. Allo stesso modo, A è massimale se non è contenuto in nessun altro insieme indipendente.

Secondo una convenzione diffusamente accettata, un insieme indipendente massimale viene chiamato anche base. Al contrario, un insieme dipendente, ossia non indipendente, minimale vien chiamato circuito. Un altro risultato di facile dimostrazione è il seguente: tutte le basi di una stessa matroide hanno, necessariamente, la medesima cardinalità.

3.5.2 Le matroidi pesate

Il caso generale esplorato fino ad ora può essere arricchito in vari modi.

Per esempio, una matroide $M = (E, I)$ si dice pesata se le viene associata una funzione $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ che assegna un peso strettamente positivo ad ogni elemento dell'insieme ambiente.

La funzione di pesatura si estende facilmente dai singoli elementi anche a sottoinsiemi di E . Questo è reso possibile dalla linearità dell'operazione di addizione:

$$w(A) = \sum_{x \in A} w(x), \quad A \subseteq E$$

Talvolta, un'opportuna matroide pesata è la migliore rappresentazione di un problema risolvibile mediante un algoritmo *greedy*.

In tale contesto, l'obiettivo non è più l'ottimizzazione di uno specifico indice. Al contrario, l'analisi si concentra sugli insiemi indipendenti della matroide e individua quello a peso maggiore.

Adottando le regole del linguaggio matematico, data la matroide pesata $M_w(E, I)$, l'algoritmo *greedy* cerca il sottoinsieme $A \in I$, tale da massimizzare la funzione peso $w(A)$. Per sottolineare il suo duplice significato, il risultato viene chiamato sia soluzione, sia sottoinsieme ottimale di M .

Ad uno sguardo superficiale, la procedura può apparire incerta, ma, in realtà, segue uno schema rigido e ben definito. Definita la matroide pesata, l'algoritmo si serve di un insieme indipendente A , che costituisce la soluzione parziale di partenza. La sua scelta risponde a criteri più o meno soggettivi e arbitrari. Tra i fattori che la possono influenzare si ricordano valutazioni di opportunità computazionale, o informazioni note a priori, o condizioni imposte in sede di definizione del problema. In genere, A viene fatto coincidere con l'insieme vuoto.

Qualunque sia la scelta operata, il passaggio successivo prevede la progressiva estensione di A , che culmina nell'individuazione di un sottoinsieme ottimale. Allo scopo, l'algoritmo procede in maniera iterativa.

Per la precisione, ad ogni iterazione viene preso in considerazione un elemento dell'ambiente, $x \in E$, non appartenente ad A , $x \notin A$. Se l'operazione di unione $A \cup \{x\}$ produce un insieme indipendente, allora l'elemento è a tutti gli effetti un'estensione e viene effettivamente incluso in A , altrimenti viene scartato. Questo schema si ripete sempre uguale a se stesso, fino all'esaurimento delle possibili estensioni.

Senza ombra di dubbio, il risultato costituisce una base. Anzi, più precisamente, di tutte le basi della matroide pesata è quella a peso maggiore.

3.6 Una breve cronistoria

Il paradigma appena presentato si presta ad applicazioni in qualsiasi ambito. Non esistono, infatti, restrizioni di alcun genere per quanto riguarda la natura o la provenienza dei dati.

Nella prima metà degli anni Novanta sono apparse in letteratura due proposte autorevoli anche nel campo dell'acquisizione dei segnali. Nel 1992 gli studiosi Mallat e Zhang presentano un algoritmo, chiamato Matching Pursuit, brevemente MP, in grado di decomporre qualsiasi segnale in una combinazione lineare di forme d'onda opportunamente estratte da un dizionario ridondante [21].

La proposta è accolta con notevole interesse e riscuote immediatamente ampi consensi. In breve tempo, le ricerche e gli approfondimenti sull'argomento crescono a vista d'occhio. Inevitabilmente, l'algoritmo viene sottoposto ad analisi attente e minuziose, volte a scoprirne i punti di forza e di debolezza.

Nel 1993, proprio nell'ottica di risolvere un problema di ottimalità, gli studiosi Pati, Rezaifar e Krishnaprasad formula una versione estesa e corretta, cui danno il nome di Orthogonal Matching Pursuit, brevemente OMP [22].

Senza dubbio, queste due sono le proposte più autorevoli, ma sarebbe superficiale e inesatto considerarle dei casi unici e isolati. La contemporanea diffusione della teoria del campionamento compresso ha contribuito a focalizzare l'attenzione generale sul tema dell'acquisizione. Anche questo filone di ricerca ne ha tratto sicuramente beneficio.

La letteratura contiene innumerevoli rivisitazioni dei paradigmi del Matching Pursuit o dell'Orthogonal Matching Pursuit. Ognuna di queste versioni risponde a delle specifiche esigenze applicative o sfrutta peculiari caratteristiche dei segnali analizzati.

3.7 Una metafora linguistica

Il linguaggio umano è per molti versi stupefacente. Basti considerare la sorprendente varietà di idee che è in grado di esprimere. Parimenti è in grado di tracciare delle distinzioni anche tra concetti molto simili.

Questa duplice valenza è garantita da un vocabolario molto corposo, ricco di parole dal significato affine. Tale osservazione di carattere linguistico non è fine a se stessa. Al contrario, è una metafora molto istruttiva di quanto avviene nella moderna Teoria dell'informazione.

L'analogia si concretizza, per esempio, nel confronto tra segnali. Laddove le proprietà si differenziano nettamente anche le rispettive rappresentazioni seguono andamenti facilmente distinguibili. D'altro canto, se la risoluzione è sufficiente, anche le variazioni più impercettibili vengono adeguatamente evidenziate.

L'introduzione, poi, dei segnali complessi ha arricchito ulteriormente la varietà dei possibili andamenti.

Appunto per rispondere a queste esigenze, ha preso piede la pratica di decomporre i segnali servendosi di dizionari sempre più ridondanti di forme d'onda [21].

3.7.1 L'importanza della flessibilità

I primi esperimenti in tal senso non sono incoraggianti. L'idea più semplice è quella di adottare una singola base, sia quella della trasformata di Fourier, o quella della trasformata Wavelet, o qualsiasi altra. Tuttavia, le espansioni lineari che se ne ricavano non sono abbastanza flessibili.

Questa affermazione è avvalorata da numerose evidenze pratiche. Per esempio, la base della trasformata di Fourier incontra notevoli difficoltà nel rappresentare funzioni ben localizzate nel dominio del tempo. Di contro, la base della trasformata Wavelet non è compatibile con segnali dallo spettro concentrato, tanto più se si tratta di componenti ad alta frequenza [21].

Al di là di queste distinzioni, un ulteriore difetto accomuna entrambi i casi. La decomposizione non fornisce un grande contributo all'analisi del segnale. Infatti, non è facile dedurre delle proprietà specifiche del segnale a partire dai coefficienti dell'espansione. In tal senso, viene meno l'opportunità di effettuare la decomposizione.

Il motivo di questa inefficienza è presto detto. L'operazione di espansione lineare effettua una ridistribuzione del contenuto informativo del segnale. In una condizione ottimale, queste informazioni si concentrano in pochi coefficienti, relegando gli altri ad un ruolo marginale e trascurabile. A quel punto è facile attribuire ai diversi indici un significato trasposto, che riveli qualcosa sull'effettiva struttura interna del segnale. Al contrario, nei casi precedenti, il contenuto informativo viene spalmato uniformemente sull'intera base. Una simile configurazione complica oltremodo qualsiasi tentativo di deduzione a partire dai coefficienti [21].

Rifacendosi alla metafora linguistica, decomporre un segnale su di un'unica base equivale a scrivere un testo con un dizionario molto ridotto e stringato. Certo i vocaboli a disposizione sono sufficienti ad esprimere qualsiasi concetto. Però, a volte, bisogna ricorrere a pesanti circonlocuzioni per chiarire appieno il senso del discorso.

Ecco che una decomposizione flessibile risulta particolarmente utile qualora si debbano rappresentare componenti la cui localizzazione varia molto nel dominio del tempo, della frequenza, o in entrambi. In simili situazioni, l'espansione lineare ricorre a forme d'onda le cui proprietà si adattano opportunamente alle caratteristiche locali del segnale.

Nel lessico specialistico del settore, queste particolari forme d'onda prendono il nome di atomi in tempo – frequenza, o più semplicemente atomi. La scelta di questa denominazione segna una netta presa di posizione: i cosiddetti atomi non possono essere ulteriormente decomposti.

Alcune realizzazioni concrete aiutano a mettere a fuoco la questione. A titolo di esempio, si consideri una sequenza di impulsi nel dominio del tempo. Per decomporre un siffatto segnale servono funzioni molto concentrate nel tempo. Di contro, si consideri una situazione analoga nel dominio della frequenza. Una buona approssimazione delle righe spettrali richiede funzioni dal supporto molto sottile.

Questi esempi per quanto istruttivi non hanno notevole riscontro nell'effettiva realtà sperimentale. Si configurano piuttosto come degli utili banchi di prova per la verifica degli algoritmi. In genere, i segnali acquisiti non dimostrano una struttura così semplificata. Gli elementi caratteristici sono molteplici e possono variare a seconda dell'intorno considerato. Non è raro imbattersi in cambiamenti radicali dell'andamento nel dominio del tempo o del contenuto spettrale nel dominio della frequenza. Per questi motivi, conviene adottare un dizionario quanto più vasto e variegato.

3.8 L'algoritmo Matching Pursuit

Proprio in questo contesto si inserisce la ricerca di Mallat e Zhang. L'algoritmo da loro coniato intende decomporre qualsiasi segnale mediante un'espansione lineare di forme d'onda tratte da un dizionario ridondante. Gli autori hanno previsto anche una funzione di scelta cui spetta il compito di selezionare gli atomi che meglio approssimano le caratteristiche del segnale [21].

Nonostante si tratti di un algoritmo fondamentalmente non lineare, l'energia del segnale si conserva. Senza dubbio, questo aspetto rappresenta il principale punto di forza dell'intera procedura, dal momento che ne garantisce la convergenza asintotica.

Per amore della precisione, bisogna sottolineare che non si tratta di una scoperta nel vero senso della parola. Come ammesso dagli stessi autori, la strategia operativa ricorda molto da vicino l'algoritmo *projection pursuit*, elaborato da Friedman e Stuetzle per la stima dei parametri statistici [23]. A Mallat e Zhang va comunque ascritto il merito di aver formulato il primo efficiente algoritmo *greedy* per la rappresentazione dei segnali acquisiti.

Scendendo maggiormente nel dettaglio, la loro analisi si concentra su una forma di decomposizione definita adattativa. Una simile denominazione è dovuta alla particolare struttura degli atomi del dizionario. Questi, infatti, sono costituiti da traslazioni, dilatazioni e modulazioni di una stessa funzione finestra [21]. Attenendosi a tale configurazione, la scelta degli atomi rivela informazioni preziose sulle caratteristiche strutturali interne del segnale.

Talvolta, però, il dizionario può risultare insufficiente. In tal senso nessun atomo presenta sufficiente correlazione con l'andamento locale del segnale. Fortunatamente, esiste una via di uscita. L'approssimazione dell'elemento in questione non viene affidata ad un solo atomo, ma ad una combinazione lineare di più atomi. In questo modo, la flessibilità del dizionario segna un netto incremento e il potere risolutivo dell'algoritmo cresce a dismisura.

3.8.1 La definizione del dizionario

Per non ricadere nei casi particolari già ampiamente discussi in letteratura, conviene approntare un dizionario piuttosto generico. In quest'ottica, il nucleo della trattazione è rappresentato dalla cosiddetta funzione finestra $g(t)$. Ogni atomo è il risultato di una sua traslazione, dilatazione o modulazione.

Conviene esplicitare, sin da subito, alcune assunzioni su $g(t)$. Si tratta di una funzione reale, di variabile reale. La sua derivata prima è definita in modo continuo su tutto il dominio, mentre il suo integrale non si annulla mai.

In altri termini, nell'origine la funzione assume un valore non nullo, ossia $g(0) \neq 0$. Volendo fornire un'indicazione di massima, l'andamento può essere approssimato come $O(1/t^2 + 1)$. Un altro aspetto, utile ai fini dei calcoli successivi, riguarda la norma $-l_2$ che assume valore unitario, ossia $\|g\|_2 = 1$.

Tre sono i parametri che consentono di identificare univocamente un atomo. Di questi, ciascuno quantifica l'entità di una specifica modifica apportata alla funzione finestra $g(t)$, sia essa una traslazione, una dilatazione o una modulazione:

- Il passo di traslazione u .
- Il fattore di scala s .
- La frequenza portante ξ .

In genere, per questioni di chiarezza formale, si adotta un indice riassuntivo dei tre contributi, rappresentato dal vettore $\gamma = [u, s, \xi]$. L'insieme dei possibili valori assunti dai tre parametri costituisce il dominio Γ del vettore.

Direttamente da queste osservazioni discende la formula generale degli atomi appartenenti al dizionario:

$$g_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{i\xi t}$$

L'analisi di questa espressione fornisce molteplici informazioni sulle proprietà degli atomi, prima fra tutte la distribuzione dell'energia. A tal proposito, nel dominio del tempo questa si concentra in un intorno di u , la

cui ampiezza è proporzionale a s . Parallelamente, nel dominio della frequenza si concentra in un intorno di ξ , la cui ampiezza è proporzionale a $1/s$.

Un dizionario realizzato secondo queste istruzioni risulta estremamente ridondante. In altre parole, contiene un numero sorprendente di atomi, in grado di evidenziare anche le sfumature più impercettibili.

Nel prosieguo della trattazione, il simbolo adottato per indicarlo è il seguente: $\mathcal{D} = \{g_\gamma(t)\}_{\gamma \in \Gamma}$.

3.8.2 La procedura di espansione lineare

Solitamente, la rappresentazione di un segnale $f(t)$ non necessita del dizionario nella sua interezza. Attuare una simile scelta significherebbe incrementare inutilmente il carico computazionale. Conviene, piuttosto, selezionare solo un opportuno sottoinsieme degli atomi.

Per semplicità, si assume che tale sottoinsieme sia numerabile, ossia esprimibile come:

$$\{g_{\gamma_n}(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{dove } \gamma_n = [u_n, s_n, \xi_n]$$

Limitandosi a questa scrematura del dizionario, il segnale originario può essere decomposto mediante una combinazione lineare del tipo [21]:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g_{\gamma_n}(t)$$

Evidentemente, i coefficienti a_n esibiscono una spiccata dipendenza dalla selezione degli atomi. Peraltro, ad esserne influenzato non è solo il valore, ma anche il significato assunto dagli stessi coefficienti.

3.8.3 Due esempi concreti

Per esempio, nel caso si adotti la funzione finestra della trasformata di Fourier, tutti gli atomi presentano lo stesso fattore di scala, ossia $s_n = s_0, \forall n \in \mathbb{N}$. Di conseguenza, si trovano praticamente tutti localizzati nello stesso intervallo, di ampiezza proporzionale alla costante s_0 .

Inevitabilmente, le prestazioni di una simile configurazione sono mutevoli e dipendono da come sono distribuiti gli elementi strutturali caratteristici del segnale. Se questi sono rintracciabili in un intervallo di ampiezza paragonabile a s_0 , i coefficienti a_n forniscono effettivamente informazioni sulla loro localizzazione nel dominio del tempo e sul loro contenuto spettrale nel dominio della frequenza. Gli stessi atomi, al contrario, si rivelano inefficaci per descrivere strutture che occupino un intervallo di ampiezza molto superiore o molto inferiore a s_0 .

A maggior ragione, se il segnale presenta componenti di diverse dimensioni, conviene rivolgersi direttamente ad un altro dizionario. Nel caso particolare, il candidato ideale deve ammettere una gamma più ampia di fattori di scala.

A questa esigenza può rispondere, almeno in parte, la famiglia delle trasformate Wavelet. Gli atomi che se ne ricavano esibiscono un'interessante proprietà. I valori assunti dai parametri non sono del tutto indipendenti. In particolare, la frequenza portante ξ_n è legata al fattore di scala s_n dalla relazione

$\xi_n = \xi_0/s_n$, dove ξ_0 è una costante. Procedendo all'espansione lineare secondo tale configurazione, i coefficienti a_n forniscono informazioni sulle dimensioni delle diverse componenti.

Una classica applicazione di questo approccio è l'analisi dei cosiddetti oggetti frattali. Nello specifico, si tratta di particolari enti geometrici, caratterizzati da un numero frazionario di dimensioni, solitamente definiti per mezzo di procedure ricorsive. Determinate proprietà di scala fanno, peraltro, sì che rappresentazioni, in scale diverse, dello stesso oggetto frattale presentino similitudini strutturali. In altri termini, se si ingrandisce con un opportuno fattore di scala una porzione comunque piccola dell'oggetto, si riscontrano caratteristiche strutturali che riproducono fedelmente quelle dell'oggetto non ingrandito.

Di contro, neanche la famiglia delle trasformata Wavelet è esente da inefficienze e controindicazioni. Per esempio, gli atomi che se ne ricavano incontrano notevoli difficoltà nell'approssimare il contenuto spettrale dei segnali, la cui trasformata di Fourier è ben localizzata nel dominio della frequenza. In particolare, le complicazioni aumentano mano a mano che ci si spinge alle alte frequenze. Questo fenomeno è stato scoperto grazie alla pratica sperimentale, ma gode anche di una coerente spiegazione formale. La causa scatenante è proprio la frequenza portante ξ_n , vincolata ad essere inversamente proporzionale al fattore di scala s_n .

3.8.4 Una decomposizione adattativa

In sede di presentazione dell'algoritmo, la procedura di decomposizione è stata definita adattativa. Il significato di quell'espressione non è immediatamente palese e si apre a molteplici interpretazioni. Questa breve carrellata consente di dissipare ogni incertezza. Infatti, considerati gli esempi proposti, emerge con chiarezza un risultato quanto mai significativo.

Dato un generico segnale, che presenti anche componenti spettrali ad alta frequenza o di dimensione variabile, è impossibile stabilire a priori quali siano gli atomi più opportuni. La scelta, in tal senso, deve essere continuamente aggiornata e deve basarsi sulle proprietà locali dell'intorno considerato.

3.9 L'impianto teorico dell'algoritmo MP

Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert. In ambito matematico, questa denominazione indica un insieme dotato di una struttura lineare, cioè uno spazio vettoriale, su cui sia definita l'operazione di prodotto scalare. Inoltre, in uno spazio di Hilbert è garantita la completezza. Questo significa che le operazioni di passaggio al limite sono sempre e comunque ben definite.

In siffatto contesto, il dizionario viene definito come una famiglia di vettori, appartenenti allo spazio \mathcal{H} e caratterizzati da una norma $-l_2$ unitaria. Si tratta di due condizioni vincolanti, cui devono sottostare tutti gli atomi. La definizione ha un'immediata trasposizione matematica nella formula:

$$\mathcal{D} = \{g_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} : \begin{cases} g_\gamma \in \mathcal{H} \\ \|g_\gamma\|_2 = 1 \end{cases}$$

Parallelamente, anche il segnale in esame viene inserito nell'ambito dello spazio \mathcal{H} . Per la precisione, si parla di un vettore $f \in \mathcal{H}$.

L'obiettivo dichiarato dell'algoritmo MP è decomporre f su un opportuno sottoinsieme di \mathcal{D} . Il termine opportuno è piuttosto astratto e necessita di alcune precisazioni: nel processo di selezione, si cercano quei candidati che più si avvicinano agli elementi strutturali interni di f .

Il protocollo elaborato da Mallat e Zhang non perviene alla soluzione ottimale in un unico passaggio. Secondo una procedura tipicamente iterativa, i risultati vengono progressivamente affinati e approssimano sempre con maggiore fedeltà il segnale originario.

3.9.1 Proiezioni ortogonali

Il metodo seguito in ogni iterazione si rifà ai dettami della geometria proiettiva. Scendendo maggiormente nel dettaglio, ad ogni passaggio il vettore originario f viene proiettato lungo la direzione dei vari atomi prescelti.

A titolo di esempio, si consideri un caso particolarmente semplice, ma ugualmente istruttivo. Si immagini di utilizzare un unico atomo, tale $g_{\gamma_0} \in \mathcal{D}$. La formula di proiezione fornisce la seguente decomposizione:

$$f = \langle f, g_{\gamma_0} \rangle g_{\gamma_0} + Rf$$

Il vettore cosiddetto dei residui, Rf , colma le eventuali discrepanze tra l'andamento approssimato e quello originario. In tal senso, può essere considerato un indice dell'errore commesso in fase di decomposizione. Chiaramente, visto il procedimento adottato, il vettore dei residui è perfettamente ortogonale a g_{γ_0} .

Nell'ambito dell'acquisizione dei segnali, però, si è soliti valutare un diverso indice di affidabilità: l'errore normalizzato ed elevato al quadrato. In quest'ottica, si ricava la seguente uguaglianza:

$$\|f\|_2^2 = |\langle f, g_{\gamma_0} \rangle|^2 + \|Rf\|_2^2 \quad (3.1)$$

A questo punto, è facile valutare l'approssimazione restituita dall'algoritmo. La sua bontà è inversamente proporzionale alla misura quadratica dell'errore.

3.9.2 Selezione degli atomi

La (3.1) fornisce anche alcuni utili suggerimenti per la scelta ottimale dell'atomo g_{γ_0} . Infatti, il primo membro non dipende in alcun modo dalla procedura di decomposizione. Dunque, è lecito considerarlo a tutti gli effetti una costante. Altrettanto si può dire per la somma al secondo membro. Ecco, allora, che il candidato ideale per l'atomo g_{γ_0} massimizza il termine $|\langle f, g_{\gamma_0} \rangle|^2$, ossia minimizza il termine $\|Rf\|_2^2$.

Sfortunatamente, all'atto pratico non sempre questa condizione è realizzabile e si riesce soltanto ad avvicinarsi alla soluzione ottimale. In particolare, la scelta ricade sul vettore g_{γ_0} che soddisfa la seguente disuguaglianza, che prevede un ulteriore grado di libertà, rappresentato dal fattore di ottimalità α , il cui intervallo di variazione spazia tra 0, nel caso peggiore, e 1, nel caso migliore:

$$|\langle f, g_{\gamma_0} \rangle| \geq \alpha \sup_{\gamma \in \Gamma} (|\langle f, g_{\gamma} \rangle|)$$

In fin dei conti, la scelta del vettore g_{γ_0} è tutt'altro che casuale. Al contrario, si attiene ad un rigido criterio formale, esemplificato da questa disuguaglianza.

3.9.3 La funzione di scelta

Alla luce delle precedenti osservazioni, il processo di selezione può essere ridotto ad un'apposita funzione deterministica. Gli stessi autori Mallat e Zhang ne hanno approntato un prototipo, di facile realizzazione. Tipicamente, la cosiddetta funzione di scelta viene indicata con il simbolo C , che ricorda l'iniziale del termine inglese *choice*, che significa appunto scelta, selezione.

L'unico argomento in ingresso è rappresentato da un qualsiasi sottoinsieme Λ di Γ . In uscita, la funzione restituisce tra gli atomi con indice in Λ quello che meglio si presta ad approssimare il segnale originale.

Il concetto, a parole complicato, si rivela semplice e immediato non appena si considera un esempio concreto. A tal proposito, il sottoinsieme Λ_0 rispetti la seguente formulazione:

$$\Lambda_0 = \left\{ \beta \in \Gamma : |\langle f, g_\beta \rangle| \geq \alpha \sup(|\langle f, g_\gamma \rangle|)_{\gamma \in \Gamma} \right\}$$

Data una simile configurazione, la funzione di scelta porge come risultato precisamente $\gamma_0 = C(\Lambda_0)$.

Allo stato attuale, non si conosce una definizione di C valida universalmente. Al contrario, ne esistono diverse versioni, la cui opportunità dipende principalmente da questioni di complessità computazionale.

3.9.4 Progressiva decomposizione del residuo

L'algoritmo MP segue un procedimento di tipo iterativo: ad ogni passaggio, il residuo Rf viene ulteriormente decomposto. In questa ottica, viene proiettato lungo la direzione dell'atomo che meglio lo approssima. A tal proposito, l'analogia con l'espansione lineare di f è palese.

Idealmente, la procedura si sviluppa in modo semplice e lineare. Al passaggio iniziale, denotato dall'apice pari a 0, il residuo coincide esattamente con l'intero vettore f , ossia $R^0 f = f$. Mediante la funzione di scelta C , l'algoritmo elegge l'atomo g_{γ_n} che meglio approssima il residuo. Nello specifico, il candidato ottimale deve soddisfare la seguente disuguaglianza:

$$|\langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle| \geq \alpha \sup(|\langle R^n f, g_\gamma \rangle|)_{\gamma \in \Gamma}$$

Nota la direzione di proiezione, il residuo viene decomposto secondo la seguente espressione:

$$R^n f = \langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle g_{\gamma_n} + R^{n+1} f$$

Vista la modalità con cui viene ricavato, il computo aggiornato del residuo, pari a $R^{n+1} f$, è ortogonale all'atomo g_{γ_n} . Di conseguenza, è valida anche la seguente uguaglianza tra termini quadratici:

$$\|R^n f\|_2^2 = |\langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle|^2 + \|R^{n+1} f\|_2^2$$

Questo paradigma si ripete iterativamente, sempre uguale a se stesso. In linea di principio, gli autori non hanno formulato un vero e proprio criterio di arresto. Spetta all'utente decidere quando l'approssimazione fornita dall'algoritmo soddisfa le sue esigenze o i requisiti imposti.

La via più semplice da seguire prevede la definizione di un'apposita soglia: non appena il computo aggiornato del residuo si assesta al di sotto di questo valore limite, il procedimento iterativo si interrompe.

3.9.5 Approssimazioni intermedie

La proposta di Mallat e Zhang è molto affascinante, perché ad ogni passaggio riduce progressivamente il residuo, lo scarto rispetto al vettore originario. Tuttavia, l'algoritmo garantisce soltanto la convergenza asintotica. In altri termini, fissato un numero per quanto grande di iterazioni, rimane sempre e comunque una certa discrepanza.

A titolo di esempio, si considerino i risultati ottenuti al termine di m iterazioni. L'algoritmo esprime f con un'espressione che prevede una sommatoria di m termini e il computo del residuo:

$$f = \sum_{n=0}^{m-1} (R^n f - R^{n+1} f) + R^m f = \sum_{n=0}^{m-1} \langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle g_{\gamma_n} + R^m f$$

Con un procedimento del tutto analogo a quello seguito nella decomposizione del residuo, si normalizzano e si elevano al quadrato i vari addendi. La prima sommatoria porge la seguente espressione:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{m-1} (\|R^n f\|_2^2 - \|R^{n+1} f\|_2^2) + \|R^m f\|_2^2$$

Parallelamente, dalla seconda sommatoria discende un'analogha equazione, facilmente interpretabile come una condizione di conservazione dell'energia:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{m-1} |\langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle|^2 + \|R^m f\|_2^2 \quad (3.2)$$

Il significato della (3.2) è presto detto: nonostante l'operazione di proiezione sia palesemente non lineare, l'energia si conserva ugualmente.

Questo fenomeno ha due implicazioni di assoluta rilevanza. In primo luogo, garantisce in maniera incontrovertibile che il contenuto informativo non venga disperso nel corso dei passaggi. In secondo luogo, costituisce la base per le dimostrazioni formali della convergenza asintotica dell'algoritmo.

3.10 Problemi di ottimalità

Sin dalla sua pubblicazione, lo studio di Mallat e Zhang ha attirato l'attenzione di molti esperti del settore. Numerosi articoli sono stati dedicati all'analisi degli aspetti procedurali, ma anche alla quantificazione delle prestazioni dell'algoritmo.

Inevitabilmente, questo accurato lavoro di approfondimento e verifica ha portato alla luce anche alcuni difetti: ad esempio, le già citate proprietà di convergenza costituiscono il vero tallone d'Achille dell'algoritmo MP.

A tal proposito, la (3.2) garantisce la convergenza asintotica, però, se si interrompe la procedura dopo un qualsiasi numero finito di iterazioni, l'approssimazione risultante è comunque sub-ottimale [22].

Per comprendere appieno la portata di questa affermazione conviene definire con precisione il concetto di approssimazione ottimale.

3.10.1 Approssimazione ottimale

Innanzitutto, con il parametro m si indichi il numero finito delle iterazioni eseguite, $0 < m < +\infty$.

A meno del residuo, qui trascurato, l'algoritmo MP proietta il vettore originario f su m atomi selezionati dal dizionario, ottenendone una sommatoria pesata di m termini:

$$f^m = \sum_{n=0}^{m-1} \langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle g_{\gamma_n} \approx f$$

Proprio l'assenza del termine di errore vieta il segno di uguaglianza, ovvero impedisce la perfetta coincidenza con f . In fin dei conti, è lecito affermare che si tratta solo di una sua approssimazione.

Quindi, si introduce il sottospazio vettoriale generato dai soli m atomi selezionati, qui indicato come V^m .

Alla luce di queste definizioni, l'approssimazione f^m si dice ottimale se costituisce la proiezione ortogonale del vettore originario f sul sottospazio V^m .

D.3.1 Dato un vettore f , f^m ne è l'ottimale approssimazione con m termini se $f^m = \mathcal{P}_{V^m}(f)$.

L'introduzione di questa nozione di ottimalità offre lo spunto per alcune interessanti osservazioni. Qualora venga soddisfatta la D.3.1, l'approssimazione f^m è la migliore che si possa ottenere usando soltanto il sottoinsieme selezionato degli atomi del dizionario, $\{g_{\gamma_n}\}_{n=0, \dots, m-1} \subseteq \mathcal{D}$.

Per quanto riguarda la selezione, è doveroso sottolineare un aspetto non secondario. L'algoritmo non impone alcun tipo di vincolo o restrizione. In tal senso, la proprietà di ottimalità è del tutto indipendente dalla scrematura del dizionario.

Pertanto, è possibile formulare un'ulteriore versione equivalente della definizione di approssimazione ottimale: in questo caso, la condizione non è solo sufficiente, ma anche necessaria.

D.3.2 L'approssimazione f^m è ottimale se e solo se il residuo $R^m f$ è perfettamente ortogonale a V^m .

3.10.2 Approssimazione sub - ottimale

L'algoritmo MP non è in grado di soddisfare i requisiti di ottimalità, almeno non nella forma in cui sono stati espressi. Per poter effettivamente verificare D.3.1 o D.3.2, bisogna sostituire al semplice residuo $R^m f$ l'espressione $R^m f - g_{\gamma_m}$.

Questo è il motivo per cui si definisce solo sub - ottimale l'approssimazione restituita dall'algoritmo.

Le difficoltà connesse a questo fenomeno sono ben esemplificate da una semplice applicazione, tratta dalla geometria analitica e rappresentata nella Figura 3.1.

Come raffigurato nel grafico (a), il vettore originario f e gli atomi, selezionati per approssimarlo, g_{γ_1} e g_{γ_2} sono dei raggi della circonferenza unitaria. Il grafico (b) invece raffigura l'andamento dell'errore quadratico $\|R^k f\|_2^2$ al crescere del numero k di iterazioni.

L'interpretazione di questa curva evidenzia due aspetti principali: da un lato, è confermata la convergenza asintotica; dall'altro, dopo un qualsiasi numero finito di iterazioni, l'errore ha comunque un'ampiezza finita, non trascurabile.

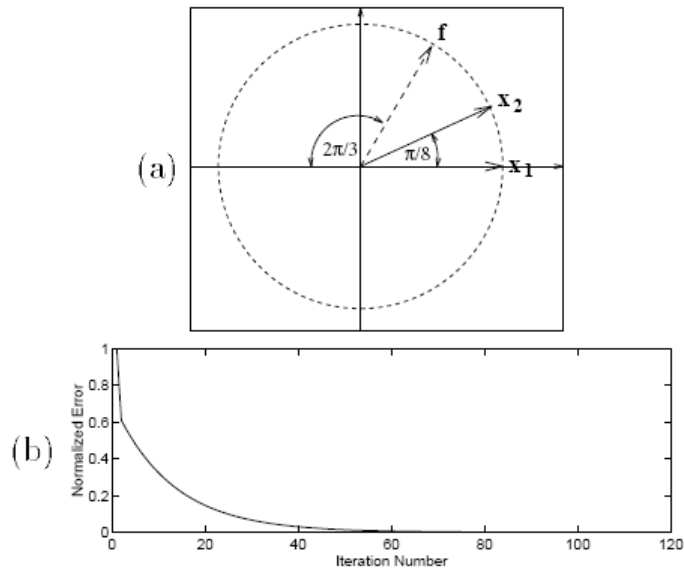


Figura 3.1 Esempio di MP nel piano cartesiano: nel grafico (a) i due atomi e il segnale, nel grafico (b) l'andamento dell'errore normalizzato in funzione del numero di iterazioni [22]

3.11 L'algoritmo Orthogonal Matching Pursuit

La sub – ottimalità, esibita dall'algoritmo MP, ha destato l'interesse di diversi studiosi. Comune a tutti è l'intento di trovare un rimedio, che risolva le difficoltà, senza snaturare l'intero approccio.

Dopo appena un anno di elaborazione, un gruppo di studiosi indiani Pati, Rezaifar e Krishnaprasad pubblica una nuova versione dell'algoritmo, cui attribuisce il nome di Orthogonal Matching Pursuit.

L'impianto teorico e procedurale non viene stravolto. Anzi, in molteplici aspetti, le proposte sono pressoché indistinguibili, se non coincidenti. L'unica marcata differenza è suggerita proprio dall'attributo *orthogonal*.

Infatti, fissato un numero finito k di iterazioni, $0 < k < +\infty$, il computo aggiornato del residuo $R^k f$ è comunque perfettamente ortogonale al sottospazio V^k . Di conseguenza, l'approssimazione è ottimale, indipendentemente dalla selezione degli atomi [22].

La nuova proposta ha svariate implicazioni, per lo più positive e vantaggiose. Ad esserne influenzate sono sia le proprietà di convergenza, sia le soluzioni realizzative, come traspare dal seguente risultato.

Si immagini di disporre di un dizionario composto da N elementi. Questi atomi generano un sottospazio vettoriale su cui viene proiettato il vettore originario f . Qualsiasi sia la configurazione dello specifico problema in esame, l'obbiettivo viene raggiunto in non più di N iterazioni.

Per esempio, tornando al caso esposto nel paragrafo precedente, l'algoritmo OMP perviene alla soluzione ottimale in appena due passaggi. Difatti, il dizionario, adottato in sede di decomposizione, consta proprio di due atomi.

Inevitabilmente, un simile incremento delle prestazioni deve essere bilanciato da una qualche controindicazione. A tal proposito, la nuova versione dell'algoritmo comporta un maggiore carico computazionale. Fortunatamente, questo non viene a gravare eccessivamente sui tempi di esecuzione. Anzi, grazie ad una formulazione ricorsiva i conti possono essere svolti in modo rapido ed efficiente [22].

3.12 Un analogo impianto teorico

Nella stesura del nuovo algoritmo, gli autori hanno voluto attenersi, ove possibile, alle stesse ipotesi assunte da Mallat e Zhang. Pertanto, il nuovo impianto teorico ricalca in larga parte quello dell'algoritmo Matching Pursuit.

Si consideri uno spazio di Hilbert, indicato dal simbolo \mathcal{H} . In siffatto contesto, il dizionario viene definito come una famiglia di vettori, appartenenti allo spazio \mathcal{H} e caratterizzati da una norma l_2 unitaria.

$$\mathcal{D} = \{g_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} : \begin{cases} g_\gamma \in \mathcal{H} \\ \|g_\gamma\|_2 = 1 \end{cases}$$

Parallelamente, anche il segnale in esame viene inserito nell'ambito dello spazio \mathcal{H} . Per la precisione, si parla di un vettore $f \in \mathcal{H}$.

3.12.1 Schema operativo

Anche in questo caso l'intenzione è quella di esprimere f mediante la combinazione lineare di alcuni atomi selezionati dal dizionario. Allo scopo la procedura ricalca la tecnica delle proiezioni ortogonali, già adottata dall'algoritmo MP.

La coincidenza, però, non è assoluta. Infatti, bisogna operare un importante distinguo. A differenza del suo predecessore, l'algoritmo OMP impone ad ogni iterazione la perfetta ortogonalità dell'errore rispetto al sottospazio generato dagli atomi.

All'atto pratico, le conseguenze sono immediate ed evidenti. A titolo di esempio, si immagini di effettuare un numero finito m di iterazioni. Il risultato dell'algoritmo consiste in una sommatoria di m atomi, opportunamente pesati, cui si aggiunge il termine del residuo:

$$f = \sum_{n=0}^{m-1} a_n^m g_{\gamma_n} + R^m f \quad \text{tale che} \quad \langle R^m f, g_{\gamma_n} \rangle_{n=0, \dots, m-1} = 0$$

Questa formulazione si presta a molteplici interpretazioni. La più immediata e verosimile vi legge un modello di ordine m del vettore f , dove i coefficienti a_n^m altro non sono che i parametri da identificare. In tal senso, effettuare un'ulteriore iterazione equivale ad incrementare l'ordine del modello:

$$f = \sum_{n=0}^m a_n^{m+1} g_{\gamma_n} + R^{m+1} f \quad \text{tale che} \quad \langle R^{m+1} f, g_{\gamma_n} \rangle_{n=0, \dots, m} = 0$$

3.12.2 Aggiornamento del dizionario

Gli atomi che compongono il dizionario non sono necessariamente ortogonali tra di loro. Questo aspetto rischia di complicare non poco la conversione ad un modello di ordine superiore.

Ad ogni iterazione, l'insieme degli atomi selezionati non viene modificato, semplicemente si arricchisce di un nuovo elemento. A tal proposito, si rende necessario introdurre un modello ausiliario, che chiarisca la relazione che intercorre tra l'ultimo atomo selezionato, g_{γ_m} , e i precedenti, $g_{\gamma_n=0, \dots, m-1}$.

In quest'ottica, gli autori hanno elaborato una forma di dipendenza, basata su una somma pesata del tipo:

$$g_{\gamma_m} = \sum_{n=0}^{m-1} b_n^m g_{\gamma_n} + \varepsilon^m \quad \text{tale che} \quad \langle \varepsilon^m, g_{\gamma_n} \rangle_{n=0, \dots, m-1} = 0$$

L'analisi di questa espressione si concentra principalmente sui due addendi del secondo membro.

Il primo costituisce la proiezione del nuovo atomo g_{γ_m} proprio sul sottospazio V^m , generato dagli atomi selezionati nel corso delle precedenti iterazioni, $g_{\gamma_n=0, \dots, m-1}$. In fin dei conti, questo termine non apporta alcuna innovazione: lo stesso contenuto informativo può essere comodamente espresso anche dal precedente modello di ordine inferiore.

Al contrario, il secondo addendo costituisce la proiezione del nuovo atomo g_{γ_m} sul sottospazio ortogonale a V^m . L'effettivo contributo del nuovo modello si concretizza proprio in questo termine. Infatti, il contenuto informativo ad esso associato non può essere espresso in alcuna versione precedente di ordine inferiore.

3.12.3 Aggiornamento dei coefficienti

L'esistenza di un simile legame tra gli atomi suggerisce una relazione analoga anche per gli altri parametri del modello, primi fra tutti i coefficienti a_n .

In modo del tutto analogo, ad ogni iterazione, l'insieme dei coefficienti non viene modificato, ma semplicemente si arricchisce di un nuovo elemento.

In particolare, il nuovo coefficiente a_n^{m+1} è funzione dei suoi predecessori, secondo la formula [22]:

$$a_n^{m+1} = a_n^m - a_n b_n^m$$

Peraltro, questo non è l'unica definizione del parametro. Rifacendosi all'ambito della geometria proiettiva, si ottiene una formulazione alternativa, che coinvolge anche il vettore originario e il residuo [22]:

$$a_n^{m+1} = \frac{\langle R^m f, g_{\gamma_m} \rangle}{\langle \varepsilon^m, g_{\gamma_m} \rangle} = \frac{\langle R^m f, g_{\gamma_m} \rangle}{\|\varepsilon^m\|_2^2} = \frac{\langle R^m f, g_{\gamma_m} \rangle}{\|g_{\gamma_m}\|_2^2 - \sum_{n=0}^{m-1} b_n^m \langle g_{\gamma_n}, g_{\gamma_m} \rangle}$$

3.12.4 Conservazione dell'energia

Come nel caso MP, la conservazione dell'energia è uno dei punti di forza dell'algoritmo OMP. Infatti, nonostante l'operazione di decomposizione sia palesemente non lineare, l'energia non si disperde.

La dimostrazione di questo fenomeno è molto semplice. Ad ogni iterazione il computo del residuo viene aggiornato. Considerando una pur breve successione di valori, si riscontra un andamento del tipo [22]:

$$R^m f = R^{m+1} f + a_n^{m+1} \varepsilon^m$$

Normalizzando ed elevando al quadrato, si ottiene proprio la condizione di conservazione desiderata [22]:

$$\|R^m f\|_2^2 = \|R^{m+1} f\|_2^2 + \frac{\langle R^m f, g_{\gamma_m} \rangle^2}{\|\varepsilon^m\|_2^2}$$

3.13 Possibili applicazioni alla teoria CS

Si consideri la seguente configurazione: sia x un vettore formato da n componenti, delle quali solo $k \ll n$ presentano un valore non nullo, o comunque non trascurabile. In tal senso, si può parlare di x come di un

segnale k – sparso, mentre il cosiddetto supporto di x altro non è che l'insieme delle posizioni di queste k componenti.

L'obiettivo è inferire questo supporto a partire da una raccolta di dati sperimentali \mathbf{y} . Il processo di misura segue un modello lineare, che prevede anche un termine additivo per la simulazione degli errori dovuti a malfunzionamenti, rumori o disturbi esterni [24]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}$$

Per la precisione, \mathbf{A} è una matrice di dimensioni $m \times n$, mentre \mathbf{w} un vettore di lunghezza m .

Da un punto di vista prettamente matematico, il supporto di x altro non è che un sottoinsieme degli indici delle sue componenti. Le possibili combinazioni da ispezionare ammontano a $\binom{n}{k}$, numero assolutamente proibitivo, viste le consuete dimensioni dei vettori trattati.

In un simile contesto, l'algoritmo OMP costituisce una valida alternativa: ad ogni iterazione, localizza una nuova componente non nulla. Così, fornisce una stima del supporto di x in appena k iterazioni.

Tropp e Gilbert ne hanno quantificato rigorosamente le prestazioni [25]. In particolare, hanno determinato il minimo numero di misure necessario a garantire il buon esito della ricostruzione. Allo scopo, impongono due specifiche assunzioni. In primo luogo, le misure sono funzioni lineari del vettore originario e non sono corrotte da alcuna fonte di incertezza:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

In secondo luogo, gli elementi della matrice \mathbf{A} sono realizzazioni di variabili aleatorie gaussiane indipendenti.

Sulla base di queste ipotesi, Tropp e Gilbert sono riusciti a dimostrare due importanti risultati. Da un lato, la ricostruzione mediante l'algoritmo OMP richiede un numero di misure tale da soddisfare la seguente disuguaglianza, per un qualche δ positivo [25]:

$$m \geq (1 + \delta)4k \log(n)$$

Dall'altro, la probabilità di buon esito cresce assieme ai valori assunti da n e k . Idealmente, il successo è assicurato, ossia la probabilità è unitaria, qualora i due parametri tendano asintoticamente all'infinito.

Gli stessi autori hanno deciso di condurre anche delle simulazioni numeriche, con l'intento di validare le proprie conclusioni. I risultati simulati si sono rivelati oltremodo lusinghieri e hanno suggerito l'idea che il numero minimo di misure possa essere ulteriormente ridotto. Addirittura, il fattore costante 4 può essere diminuito della metà e sostituito da un fattore 2.

Questa congettura, dedotta da un'evidenza sperimentale, ha presto trovato conferme formali. A tal proposito, il merito va ascritto a Fletcher e Rangan [24]. Proseguendo nel percorso tracciato da Gilbert e Tropp, hanno dimostrato che è sufficiente un numero m di misure tale da soddisfare la disuguaglianza:

$$m \geq (1 + \delta)2k \log(n - k) \tag{3.3}$$

Anche la probabilità di un esito positivo è stata adeguatamente aggiornata. In particolare, il successo è assicurato, qualora k e $n - k$ tendano asintoticamente all'infinito.

Rispetto all'analisi di Tropp e Gilbert vengono soppresse due condizioni difficili, se non impossibili, da realizzare nella consueta pratica sperimentale.

Per esempio, non sempre si conosce a priori l'esatto livello di sparsità di x . Al riguardo, la condizione (3.3) ammette un certo margine di incertezza sul valore del parametro k .

Come è noto, poi, qualsiasi processo di misura è inevitabilmente affetto da diverse fonti di imprecisione. La certezza asintotica di un buon esito resta valida, a patto che contemporaneamente anche il rapporto segnale – rumore tenda all'infinito [24].

3.13.1 Un confronto con il *basis pursuit*

Espresso in questi termini, l'algoritmo OMP si propone come un serio candidato per la ricostruzione del supporto di un segnale sparso. In tal senso, il suo "avversario" più accreditato è il celebre metodo di ottimizzazione, noto come *basis pursuit*, già affrontato nel capitolo precedente.

Dal punto di vista procedurale, i due approcci non possono essere più diversi: l'uno procede iterativamente, aggiungendo, di volta in volta, la migliore soluzione locale; l'altro minimizza una funzione obiettivo, rappresentata dalla norma l_1 del vettore originario.

Ciò nonostante, Fletcher e Rangan hanno individuato un punto di incontro, per certi versi sorprendente. L'argomento in questione è, ancora una volta, il numero delle misure. Curiosamente, la disuguaglianza (3.3) si dimostra valida per entrambi gli algoritmi. Addirittura, nell'ambito del *basis pursuit*, costituisce una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza, posto un elevato rapporto segnale – rumore [24].

Questa analisi in parallelo non può prescindere da un confronto delle prestazioni.

In genere, la preferenza viene accordata al metodo di ottimizzazione, pur essendo più complesso dal punto di vista computazionale. In realtà, questa presunta superiorità non è sempre così manifesta. Al contrario, bisogna valutare attentamente le condizioni e il contesto in cui si applica l'algoritmo.

A tal proposito, si consideri valido il modello lineare delle misure, $y = Ax$. Nel caso ideale di assenza di rumore, Donoho e Tanner hanno dimostrato che il buon esito della minimizzazione della norma l_1 è garantito da un numero di misure m pari a [26]:

$$m \cong 2k \log\left(\frac{n}{m}\right)$$

Evidentemente, il computo totale è nettamente inferiore a quello imposto dalla disuguaglianza (3.3).

Di contro, nel caso più verosimile di misure rumorose, la maggiore complessità del metodo *basis pursuit* non produce alcun incremento delle prestazioni. Sotto opportune ipotesi di matrice A gaussiana ed elevato rapporto segnale – rumore, il numero di misure necessario alla convergenza coincide perfettamente [24]:

$$m \cong 2k \log(n - k)$$

Certo, nemmeno in questo caso è lecito affermare che l'algoritmo OMP garantisce le migliori prestazioni. D'altro canto, è innegabile che, in determinati scenari, i due approcci siano interscambiabili ed esibiscano prestazioni molto simili.

CAPITOLO IV

Il convertitore MWC

4.1 Introduzione

Ancora oggi, la maggioranza dei convertitori analogico – digitali in commercio adotta il protocollo di acquisizione tradizionale, basato sul teorema di Shannon. Tuttavia, nel corso della presente trattazione, sono emersi elementi e risultati che ne sconsigliano l'applicazione, specialmente in presenza di componenti ad alta frequenza. Sono apparse in letteratura numerose proposte, definite *sub – Nyquist techniques*, per la capacità di ricostruire il segnale di interesse, pur operando a frequenze inferiori al tasso di Nyquist.

Allo scopo si è inizialmente pensato di sfruttare opportune informazioni a priori sul contenuto spettrale. Solitamente, però, il segnale di interesse è incognito al momento dell'acquisizione e conviene ricorrere alle cosiddette *blind techniques*, che non impongono alcun vincolo o assunzione preliminare.

Un tipico banco di prova in tal senso è rappresentato dai segnali multi – banda, molto comuni nell'ambito delle telecomunicazioni. Di particolare interesse è il caso in cui il supporto spettrale del segnale occupa solo una piccola porzione di tutta la sua estensione spettrale. Al riguardo, la letteratura contempla diverse alternative. Tra le più recenti e affermate spicca il cosiddetto *modulated wideband converter*, o brevemente MWC [27].

Le verifiche svolte dagli autori hanno permesso di indagare non solo la bontà della ricostruzione fornita, ma anche aspetti tecnologici non trascurabili in vista di eventuali applicazioni pratiche. Tra queste si citano la robustezza al rumore o agli errori nel modello del sistema, la possibilità di ulteriori semplificazioni a livello hardware, la stabilità agli effetti della quantizzazione, la capacità di operare in tempo reale o, comunque, con segnali il cui supporto spettrale varia nel tempo.

4.2 Un esempio concreto

La tecnologia a radio frequenza, brevemente RF, consente di modulare segnali a banda stretta per frequenze portanti elevate. Proprio per questo motivo, le comunicazioni in onde radio vengono spesso interpretate come segnali sparsi. Infatti, la loro analisi spettrale rileva un numero relativamente piccolo di trasmissioni che occupano delle strette bande, disseminate all'interno di uno spettro molto esteso.

In tal senso, le comunicazioni radio possono essere considerate anche degli esempi di segnali a banda larga. Per la loro acquisizione, gli studiosi hanno approntato alcune soluzioni tecnologiche *ad hoc*. A titolo di esempio, il cosiddetto *wideband receiver* sfrutta la peculiare struttura di questi segnali per massimizzare le proprie prestazioni [28, 29]. Per sommi capi, il dispositivo attua tre operazioni basilari in sequenza: in

principio una conversione analogico – digitale, quindi una elaborazione a bassa frequenza della sola porzione spettrale di interesse, infine una riconversione al formato analogico originario.

Si tratta, in realtà, di un protocollo di massima, che può essere facilmente arricchito e modificato, secondo le esigenze delle specifiche applicazioni.

4.3 L'importanza delle informazioni a priori

A causa della loro estensione spettrale, i segnali multi – banda possono presentare un tasso di Nyquist tale da eccedere le specifiche tecniche perfino dei più efficienti convertitori analogico – digitali. La differenza non è facilmente colmabile, in quanto si tratta, a volte, anche di diversi ordini di grandezza [27].

Qualsiasi tentativo di acquisire un segnale del genere deve, allora, sfruttarne la peculiare struttura in modo intelligente.

4.3.1 Demodulazione sequenziale

Per esempio, note le frequenze portanti, un comune protocollo prevede di demodulare il segnale per ognuna di esse singolarmente. In questo modo, la banda corrispondente risulta centrata attorno all'origine. A quel punto, un semplice filtro passa – basso elimina i contributi dovuti ad altre componenti o, comunque, indesiderati. Infine, la conversione al formato digitale viene eseguita ad una frequenza non inferiore all'estensione spettrale della banda analizzata.

Il vantaggio rispetto al protocollo tradizionale è evidente, dal momento che si tratta comunque di valori nettamente inferiori alla frequenza di Nyquist e comodamente supportati dagli attuali convertitori.

Ripetendo l'operazione per ogni portante separatamente, la frequenza di campionamento complessiva risulta pari alla somma delle estensioni spettrali delle bande considerate. Nel corso degli anni, tale valore è stato oggetto di numerosi studi e approfondimenti. In particolare, Lev Landau ha dimostrato che non è migliorabile e coincide con l'effettiva occupazione spettrale del segnale [30].

4.3.2 Campionamento periodico non uniforme

Alla luce della dimostrazione di Landau, la demodulazione sequenziale costituisce sicuramente una scelta ottimale per l'acquisizione di un segnale multi – banda di cui siano note a priori le portanti. Tuttavia, sarebbe un errore considerarla l'unica via percorribile.

Infatti, nelle medesime ipotesi, gli studiosi Lin e Vaidianathan hanno approntato un protocollo alternativo, che affronta il problema secondo una differente prospettiva [31]. La loro proposta non richiede stadi preliminari di elaborazione analogica, rappresentati nel caso precedente, dalla demodulazione e dal filtraggio passa – basso. Al contrario, il segnale viene direttamente campionato, secondo uno schema periodico non uniforme.

Ancora una volta, la frequenza di campionamento complessiva è nettamente inferiore a quella di Nyquist, anche se di poco superiore al valore ottimale postulato da Landau. In altri termini, la semplificazione del

flusso di elaborazione dei dati implica un leggero deterioramento delle prestazioni. Spetta alla sensibilità dell'utente e alle esigenze del caso specifico far propendere la scelta per l'una o l'altra procedura.

4.4 Approccio *spectrum – blind*

Un requisito fondamentale, comune a entrambe le precedenti proposte, è la conoscenza a priori delle portanti. Solitamente, però, tali valori sono incogniti o, comunque, variano nel tempo secondo andamenti non prevedibili.

Per affrontare simili situazioni servono i cosiddetti metodi *spectrum – blind*, in grado di ricostruire il segnale analizzato pur ignorandone il supporto spettrale.

4.4.1 *Multi – coset sampling*

In questo contesto si inserisce perfettamente il *multi – coset sampling* [32, 33], un paradigma applicabile in linea teorica a qualsiasi classe di segnali.

Il protocollo tradizionale adotta una griglia di campionamento uniforme, il cui passo è pari all'inverso della frequenza di Nyquist, ossia $T = 1/f_{Nyq}$. Il *multi – coset sampling*, invece, utilizza solo una selezione dei campioni raccolti in tal modo.

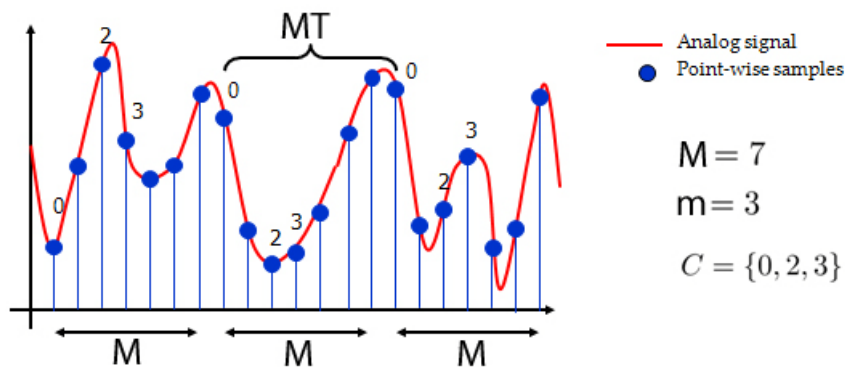


Figura 4.1 Griglia di campionamento nel *multi – coset sampling*

In particolare, la griglia uniforme viene suddivisa in blocchi di M campioni consecutivi. Una sequenza tempo invariante C contiene gli indici degli m campioni che vengono conservati in ogni blocco, mentre gli altri vengono trascurati, tanto da essere posti a zero. In altri termini, l'acquisizione consiste nella ripetizione della sequenza C , con un periodo pari a MT .

I parametri del protocollo sono fondamentalmente tre: la lunghezza M di ogni blocco, il numero e la localizzazione dei campioni da conservare. Nell'attribuire loro dei valori specifici, viene imposta un'unica condizione: ai campioni acquisiti deve corrispondere uno ed un solo segnale. In caso contrario, la ricostruzione del segnale di interesse risulta un problema mal posto, che ammette molteplici soluzioni, tutte ugualmente plausibili e coerenti con i dati a disposizione.

Adottato il consueto sistema matriciale delle misure, $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, si dimostra una condizione sufficiente per l'unicità della soluzione, che ricorre al rango di Kruskal della matrice \mathbf{A} , indicato come $\sigma(\mathbf{A})$.

T.4.1 Una sequenza di campionamento C che produce una matrice A di rango massimo, ossia $\sigma(A) = m$, assicura l'unicità della soluzione [34].

4.4.2 Pregi del multi – coset sampling

Il *multi – coset sampling* si presta all'analisi di qualsiasi classe di segnali, in quanto non dipende in alcun modo dal supporto spettrale. Le prestazioni, già buone, sono state progressivamente affinate, risolvendo gli aspetti più delicati e meno efficienti.

A tal proposito, un recente articolo ne ha ricavato un protocollo perfettamente *spectrum – blind* [34], che non richiede alcuna informazione a priori, né in fase di campionamento, né in fase di ricostruzione: per esempio, il supporto spettrale originario viene stimato grazie ad opportune proprietà della trasformata discreta di Fourier.

4.4.3 Campionamento periodico non uniforme

La strategia seguita dal *multi – coset sampling* non costituisce un'innovazione assoluta, quanto piuttosto un caso particolare del già citato campionamento periodico non uniforme.

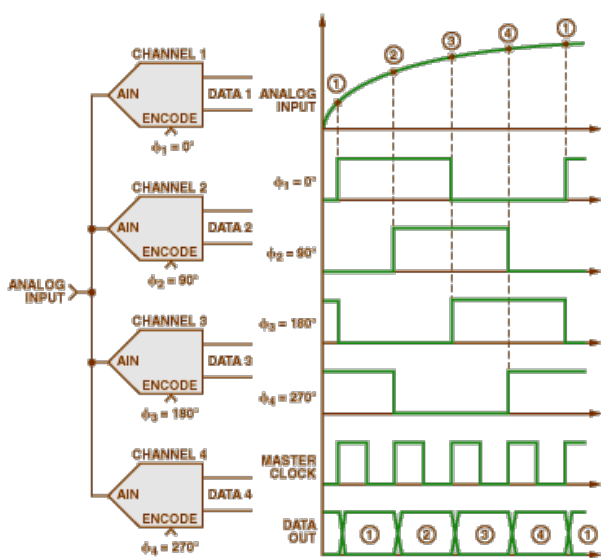


Figura 4.2 Schema di campionamento con *interleaved ADC*: disegno circuitale (sinistra), andamento temporale (destra)

L'aspetto di maggiore rilevanza di questo approccio non ha natura teorica, bensì tecnologica: invece di implementare un singolo convertitore che operi ad un'elevata frequenza R , si ricorre ad un sistema di *interleaved ADC*. In particolare, si utilizzano M convertitori, opportunamente sfasati nel tempo, che operano ad una frequenza pari a R/M .

Entrambe le implementazioni forniscono la medesima sequenza di campioni, però la scelta degli *interleaved ADC* riduce lo *stress* imposto ai dispositivi elettronici, chiamati ad operare in un *range* di frequenze ottimale e non più in prossimità dei loro limiti intrinseci.

Inoltre, agendo opportunamente sul numero di convertitori, si riescono ad analizzare anche segnali con estensione spettrale altrimenti incompatibile con le specifiche tecniche degli attuali dispositivi.

A fronte di questi vantaggi, emergono due limiti fondamentali.

In primo luogo, tutti gli M convertitori a bassa frequenza devono condividere lo stesso terminale di ingresso, che quindi deve supportare l'intera estensione spettrale del segnale analizzato.

In secondo luogo, non è facile implementare un sistema di *interleaved ADC* capace di mantenere con precisione sfasamenti temporali dell'ordine di $1/RM$ secondi. La probabilità di commettere errori e la loro incidenza sui risultati finali aumentano di pari passo con i valori dei parametri R e M .

La presenza di questi aspetti può produrre una distorsione non trascurabile del segnale acquisito e invalidare i risultati finali. Ovviamente, il *multi – coset sampling*, trattandosi di una particolare configurazione di *interleaved ADC*, ne condivide limiti e difetti.

4.4.4 Demodulatore casuale

Il cosiddetto demodulatore casuale è un'architettura specializzata nell'acquisizione dei segnali multi – tono. Un segnale multi – tono è il risultato della sovrapposizione di diverse onde sinusoidali, o toni, ciascuna caratterizzata da specifiche ampiezza, fase e frequenza. Tipicamente, un segnale multi – tono viene generato in modo tale da contenere un numero intero di cicli di ogni tono [35].

La trasformata di Fourier restituisce uno spettro in cui ogni tono è rappresentato da un impulso centrato nella frequenza corrispondente. Questa particolare configurazione spettrale rende i segnali multi tono un ideale banco di prova per valutare la risposta in frequenza di un sistema di acquisizione.

Il progetto del demodulatore casuale si fonda su una sequenza di tre operazioni basilari. Innanzitutto, il segnale in ingresso viene modulato mediante un generatore ad alta frequenza di numeri pseudo – casuali. Il risultato viene, quindi, integrato ed infine campionato a bassa frequenza [36].

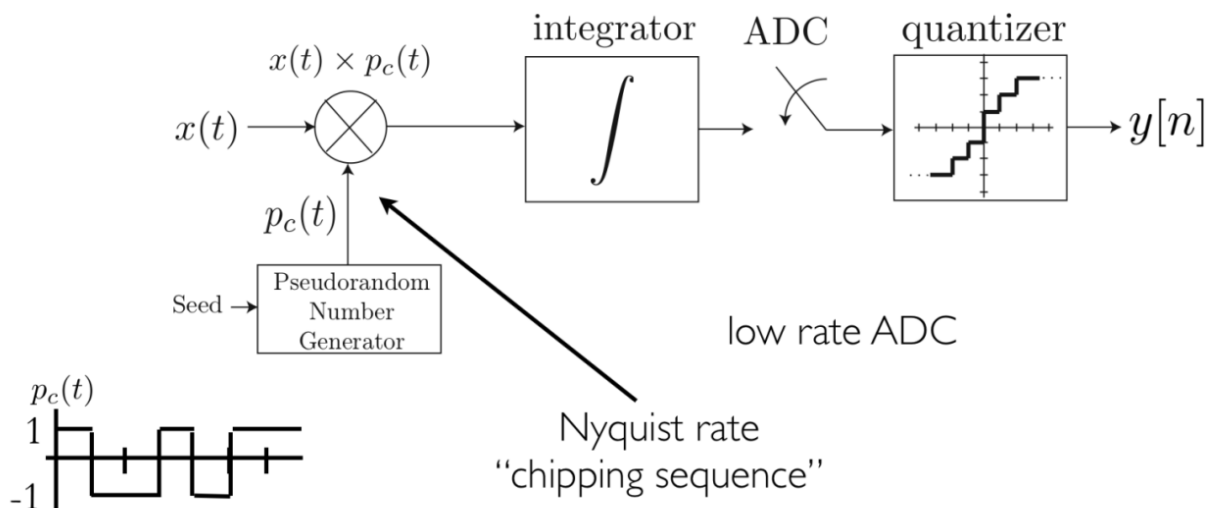


Figura 4.3 Schema operativo del demodulatore casuale: modulazione, integrazione e campionamento [36]

Ad una prima analisi, tale procedura è assolutamente universale e si presta all'analisi di qualsiasi segnale multi – tono, ma in realtà impone due condizioni inderogabili che ne limitano notevolmente il campo di applicazione.

In primo luogo, sono ammessi soltanto segnali discreti [36]. Di conseguenza, eventuali segnali continui devono essere preliminarmente campionati secondo una griglia uniforme e invariante nel tempo. Evidentemente, il passo di tale griglia incide da un lato sulla mole dei campioni, dall'altro sulla risoluzione con cui approssimo il segnale originario.

In secondo luogo, il numero di toni deve essere finito [36]. Anche questo vincolo può determinare la perdita di alcuni dettagli o, comunque, una minore aderenza al segnale originario.

4.5 Genesi del progetto MWC

All'atto pratico, né il campionamento periodico non uniforme, né il demodulatore casuale si dimostrano soluzioni ottimali per la ricostruzione *spectrum – blind* di un segnale multi – banda.

Tuttavia, sarebbe auspicabile combinare i pregi di queste due proposte in un'unica ed efficiente procedura. Appunto in quest'ottica, si inserisce il progetto del *modulated wideband converter*.

4.5.1 L'architettura analogica

Il primo contributo della ricerca di Eldar e Mishali è rappresentato dall'effettiva architettura del convertitore MWC: un sistema analogico costituito da un banco di modulatori e filtri passa – basso.

Lo schema operativo ricorda da vicino quello del demodulatore casuale. Per esempio, coincide nei due casi la successione degli stadi di elaborazione: modulazione, filtraggio passa – basso e campionamento. Però, se lo schema operativo resta invariato, a cambiare sono i parametri e le modalità esecutive delle tre fasi. Proprio queste differenze spiegano l'incremento delle prestazioni e dell'efficienza garantito dall'adozione di un convertitore MWC piuttosto che di un demodulatore casuale.

4.5.2 L'architettura digitale

Il secondo contributo della ricerca è uno strumento virtuale di simulazione: una trasposizione digitale del convertitore MWC, che può essere impiegata in vari modi.

In primo luogo, permette di effettuare tutta una serie di prove e verifiche, altrimenti difficilmente realizzabili in pratica. A tal proposito, il formato digitale consente di seguire, passo dopo passo, il flusso dei dati e registrarne con esattezza l'andamento e l'evoluzione. In questo modo, è possibile localizzare con estrema precisione dove si originano eventuali distorsioni o malfunzionamenti.

In secondo luogo, l'architettura digitale può ricostruire anche un'unica banda di interesse. La frequenza di campionamento si mantiene ridotta, indipendentemente dall'estensione e dalla localizzazione della stessa banda all'interno dello spettro.

4.6 Modello di segnale multi – banda

Prima di procedere nella trattazione, conviene definire in modo chiaro e preciso la classe dei cosiddetti segnali multi – banda.

Sia $x(t)$ un segnale reale a tempo continuo, il cui supporto spettrale sia limitato alla banda $\mathcal{F} = [-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$.

In altri termini, la trasformata di Fourier si annulla per ogni f non appartenente a tale intervallo: $x(t) \rightarrow X(f) : X(f) = 0$ per $f \notin \mathcal{F}$.

Per questioni di convenienza, che appariranno evidenti in seguito, si assume che la trasformata $X(f)$ sia continua a tratti nella variabile f .

Sulla base di queste assunzioni, è possibile definire, con linguaggio insiemistico, il modello dei segnali multi – banda, indicato per semplicità dal simbolo \mathcal{M} .

D.4.1 L'insieme \mathcal{M} contiene tutti i segnali $x(t)$ il cui supporto spettrale può essere contenuto entro l'unione di N intervalli disgiunti di \mathcal{F} . L'estensione di questi intervalli, detti anche bande, non può eccedere il valore B .

La trasformata di Fourier di un segnale a tempo continuo che assume valori reali, come $x(t)$, gode di simmetria hermitiana, ossia $X(-f) = X(f)$. Dunque, il numero N delle bande è necessariamente pari. Di contro, la localizzazione delle stesse bande è arbitraria e, in particolare, incognita a priori.

4.6.1 Limiti di campionamento

Disponendo di una conoscenza preliminare del supporto spettrale, è facile ridurre la frequenza di campionamento fino al valore limite postulato da Landau.

In assenza di tali informazioni a priori, invece, il discorso diventa molto più complicato e variegato. Per esempio, nei segnali appartenenti al modello \mathcal{M} , il valore limite si dimostra essere pari a $2NB$ [30]. Ovviamente, questo risultato implica un'effettiva riduzione della frequenza di campionamento solo se $2NB < f_{Nyq}$.

In caso contrario, le regioni attive del supporto spettrale hanno un'estensione complessiva superiore alla metà della frequenza di Nyquist. Quindi, il segnale è solo relativamente sparso nel dominio della frequenza e gli algoritmi basati sulla teoria CS non apportano alcun incremento delle prestazioni. Anzi, la soluzione ottimale resta il tradizionale protocollo di acquisizione che opera, appunto, alla frequenza di Nyquist.

Pertanto, nel prosieguo della trattazione ci si attiene al solo caso $2NB < f_{Nyq}$, molto più proficuo in termini di innovazioni algoritmiche e tecnologiche.

4.7 Un primo infruttuoso tentativo

La prima proposta concreta, di tipo *spectrum-blind*, si basa sul paradigma del *multi-coset sampling*.

In tal caso, la frequenza di campionamento media è pari a m/MT , inferiore di certo a quella di Nyquist pari a $1/T$. Peraltro, la parametrizzazione utilizzata permette di adattarsi al meglio alle specifiche

condizioni sperimentali. Infatti, se da un lato T è una caratteristica intrinseca del segnale e come tale invariabile, m e M sono due parametri costitutivi del sistema di acquisizione. Modificando opportunamente i valori loro assegnati, si ottiene la frequenza di campionamento desiderata.

Uno dei vantaggi della strategia *multi-coset sampling* è l'immediatezza della sua implementazione. Si dispongono in parallelo m blocchi campionatori che adottano una griglia a passo uniforme pari a MT . Il blocco i -esimo è sfasato rispetto all'istante di attivazione della corrispondente quantità $c_i T$.

Lo schema operativo è intuitivo. Non richiede neppure uno stadio di filtraggio tra l'introduzione del ritardo temporale e l'effettiva acquisizione dei campioni.

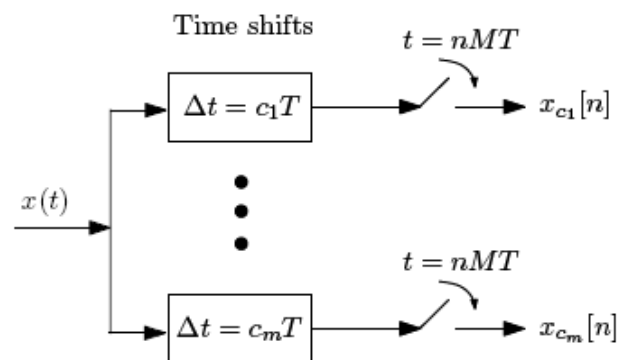


Figura 4.4 La generazione dei ritardi temporali [27]

Passando all'effettiva realizzazione tecnologica, la funzione dei blocchi campionatori è svolta da consueti convertitori analogico – digitali. Questi dispositivi sono molto duttili ed affidabili, tanto da essere impiegati nella stragrande maggioranza delle applicazioni elettroniche. Inoltre, la costante e rapida innovazione tecnologica ne migliora continuamente le prestazioni.

Ciò nonostante, restano alcune controindicazioni all'atto pratico. In particolare, il terminale di ingresso del dispositivo ha un'intrinseca limitazione in banda che può distorcere i campioni acquisiti. Un modello semplice ed intuitivo di questo fenomeno prepone all'effettivo campionamento uno stadio di filtraggio passa – basso. Il limite intrinseco del terminale di ingresso è tradotto nella frequenza di taglio del filtro.

Ovviamente, l'effetto distorcente diventa cruciale per le componenti ad alta frequenza, tanto da rendere la strategia del *multi – coset sampling* inadatta a trattare i segnali a banda larga, come quelli del modello \mathcal{M} .

4.7.1 Aspetti realizzativi

In linea di principio, un convertitore analogico – digitale fornisce una versione campionata del segnale in ingresso. La griglia adottata è uniforme e il suo passo è dettato dalla frequenza r a cui opera il convertitore. Tuttavia, nel passaggio dal progetto al mondo reale, bisogna considerare anche l'estensione in banda analogica alla massima potenza [37]. Questa grandezza infatti determina la massima frequenza b supportata dal convertitore, una soglia oltre la quale eventuali componenti spettrali vengono distorte e attenuate.

Tale limitazione è intrinseca al convertitore e non può esserne separata in alcun modo. Per questo motivo, le case produttrici generalmente raccomandano di far precedere un filtro passa – basso con frequenza di taglio pari a b . Inevitabilmente, questa soluzione presenta sia vantaggi che svantaggi. Da una parte evita le distorsioni, dall'altra trascura in maniera irreversibile le eventuali componenti esterne alla banda passante. Peraltro, l'aggiunta del filtro non è priva di conseguenze in termini di complessità del circuito, che dipende dal rapporto b/r . Secondo le specifiche delle principali case produttrici di convertitori, i valori ottimali sono compresi nell'intervallo: $1.5 r \leq b \leq 7 r$ [38].

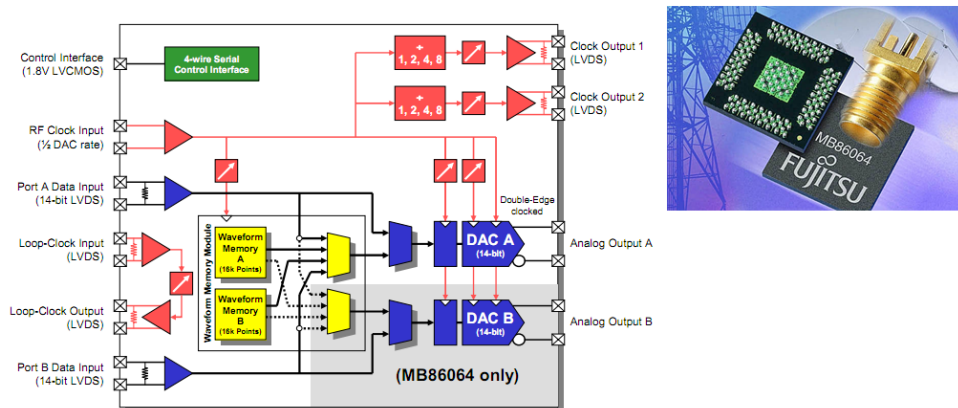


Figura 4.5 Schema costitutivo di un convertitore analogico – digitale, adoperato come unità di campionamento

4.7.2 Limiti della strategia multi – coset

Riguardo all'analisi di segnali a banda larga, come quelli del modello \mathcal{M} , emergono tre difetti principali.

Per comprendere meglio il primo, conviene rifarsi al precedente esempio delle comunicazioni radiofoniche. L'odierna tecnologia ad onde radio consente di generare trasmissioni che eccedono anche di diversi ordini di grandezza il valore limite b dei convertitori allo stato dell'arte. Quindi, qualsiasi implementazione del *multi – coset sampling* comporta una perdita irreversibile delle componenti spettrali non comprese nella banda passante: le sequenze di campioni non si riferiscono più al segnale originario, ma alla sua versione attenuata e distorta. Di conseguenza, l'interpretazione delle trasmissioni ricostruite potrebbe essere inesatta o parziale.

Il secondo difetto mette in luce uno spreco di risorse. L'incidenza di questo fenomeno non è banale, visto che si manifesta, sebbene in forma ridotta, persino nel caso limite in cui b coincide con la frequenza di Nyquist del segnale di ingresso.

Un semplice esempio fotografa perfettamente la situazione: si consideri un segnale sparso nel dominio della frequenza, il paradigma del *multi – coset sampling* conserva solo m dei totali M elementi della griglia di Nyquist. Certo, questo consente al convertitore di operare ad una frequenza b/M notevolmente inferiore al suo valore limite. Tuttavia, ciò non costituisce necessariamente un vantaggio: basti considerare che il dispositivo sfrutta solo una minima parte delle sue potenzialità. A quel punto, conviene ripiegare su un circuito equivalente formato da convertitori con prestazioni minori, ma adeguate agli scopi del progetto, il che garantirebbe anche un risparmio in termini economici.

Il terzo difetto, infine, riguarda gli sfasamenti temporali tra gli m blocchi campionatori. Allo stato dell'arte, è difficile realizzare un circuito capace di mantenere con precisione ritardi dell'ordine di T . Per compensare gli inevitabili errori di sincronizzazione sono stati proposti molteplici algoritmi. Tuttavia, il loro utilizzo incrementa in modo sostanziale la complessità a livello del ricevitore, pregiudicando così le prestazioni dell'intera procedura.

4.7.3 Valutazioni conclusive

Concludendo, l'implementazione mediante *multi – coset sampling* non si presta all'acquisizione di segnali a banda larga, come quelli del modello \mathcal{M} .

Un suo utilizzo in tal senso richiederebbe di progettare uno specifico circuito di campionamento ad elevata risoluzione, irrealizzabile con gli attuali dispositivi analogici. In realtà, la letteratura contiene alcune soluzioni innovative, però la notevole complessità e gli elevati costi di gestione ne limitano al momento la diffusione su larga scala.

Per esempio, un convertitore non convenzionale è stato realizzato mediante dispositivi ottici ad alta frequenza [39]. In questo modo, il terminale di ingresso impone una limitazione in banda compatibile con i segnali del modello \mathcal{M} . Di contro, costi e dimensioni del sistema aumentano considerevolmente. Inoltre,

rimane irrisolto il problema della precisione degli sfasamenti temporali, per il quale resta valido quanto affermato in precedenza.

4.8 La svolta: il convertitore MWC

La strategia del *multi – coset sampling* sfrutta la sparsità del supporto spettrale per acquisire un minor numero di campioni. Paradossalmente, il convertitore MWC ricorre, invece, a tecniche di acquisizione *spread – spectrum*, ossia adatte a trattare componenti in frequenza poco localizzate e diffuse lungo tutta l'estensione spettrale. In tal senso, la prospettiva da cui si guarda al problema è diametralmente opposta.

A prima vista, una scelta del genere può sembrare incompatibile con la peculiare struttura dei segnali appartenenti al modello \mathcal{M} . In realtà, considerando nel complesso la sequenza di elaborazione del segnale in ingresso, la scelta si dimostra non solo consona, ma anche efficiente.

Scendendo nel dettaglio, lo schema operativo prevede uno stadio cosiddetto di *mixing*, che distorce il supporto spettrale originario in modo tale che ciascuna banda attiva appaia in banda base. Evidentemente, questa operazione vanifica qualsiasi proprietà di sparsità dimostrata in precedenza dal supporto.

Allo scopo si adotta un *mixer*, composto da molteplici canali, ognuno dei quali realizza una specifica versione distorta delle componenti spettrali. In linea di principio, se il numero di questi canali è sufficientemente grande, è possibile risalire con precisione al segnale originale.

4.8.1 Schema di campionamento

Il segnale analizzato $x(t)$ entra simultaneamente negli m canali in parallelo che compongono il terminale di ingresso del *mixer*. In ogni i – esimo canale viene moltiplicato per la funzione di *mixing* $p_i(t)$, periodica di periodo T_p .

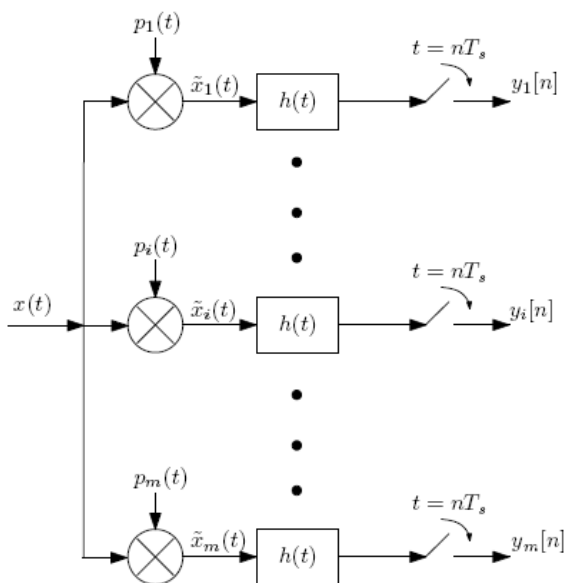


Figura 4.6 Schema operativo della fase di campionamento nel convertitore MWC [27]

A tal proposito, la soluzione più semplice da realizzare è rappresentata da una funzione costante a tratti, i cui valori sono tratti dall'insieme $\{+1, -1\}$, però, come si vedrà in seguito, non si tratta dell'unica via percorribile. Il solo requisito da soddisfare è la periodicità della funzione, per tutti gli altri aspetti realizzativi l'utente dispone di completa libertà. Ciò nonostante, ai fini di una maggiore chiarezza e comprensibilità dei risultati, conviene attenersi al caso delle funzioni unitarie a segno alterno.

Al termine di questa operazione, il supporto spettrale viene troncato mediante un filtro passa – basso con frequenza di taglio pari a $1/2T_s$. Infine, il risultato

viene campionato secondo una griglia uniforme, di passo T_s . Un simile schema operativo comporta due importanti conseguenze.

In primo luogo, l'introduzione dello stadio di filtraggio consente di soddisfare le ipotesi del teorema di Shannon, il che garantisce che le sequenze di campioni non siano né attenuate né distorte.

In secondo luogo, il passo di campionamento T_s è compatibile con le prestazioni offerte dai convertitori analogico digitali disponibili in commercio. In genere, per minimizzare gli sprechi si accorda la preferenza a dispositivi, magari non di ultima generazione, ma che esprimono il massimo delle proprie potenzialità in corrispondenza della frequenza desiderata. Questo ultimo aspetto segna una netta discrepanza rispetto alla realizzazione del *multi – coset sampling*, dove si ricorre addirittura a soluzioni tecnologiche all'avanguardia, o comunque non convenzionali, pur di massimizzare le prestazioni dei blocchi campionatori.

In realtà, il convertitore MWC risolve il problema della massima estensione spettrale supportata agendo non tanto sui singoli dispositivi adoperati, quanto piuttosto sul modo in cui vengono organizzati. Infatti, il progetto presenta numerosi parametri realizzativi, tra cui il numero m dei canali, la frequenza di campionamento $1/T_s$, l'andamento e il periodo T_p delle funzioni di *mixing*. Agendo opportunamente sui valori loro assegnati, l'utente può adattare la configurazione alle specifiche esigenze sperimentali e alle peculiari caratteristiche del segnale analizzato.

4.8.2 Aspetti realizzativi

A prima vista, lo schema di campionamento sembra complicato e inefficiente. In realtà, ad una più attenta analisi, quelle soluzioni progettuali, apparentemente evitabili o migliorabili, comportano dei vantaggi non trascurabili.

Per esempio, la scelta di servirsi di un *mixer* analogico si rivela vincente. Tale tecnologia, infatti, supporta anche le estensioni spettrali tipiche dei segnali a banda larga [40, 41]. Di conseguenza, vengono meno tutte le eventuali limitazioni in banda che caratterizzano i terminali di ingresso degli altri sistemi di acquisizione.

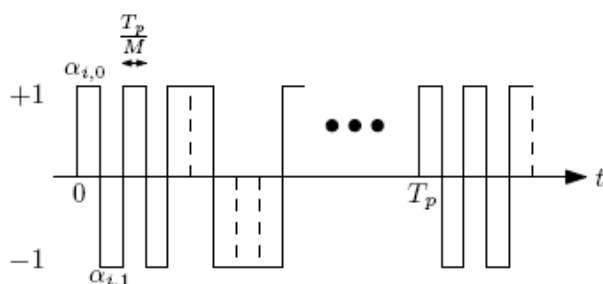


Figura 4.7 Possibile realizzazione di una funzione di *mixing* unitaria a segno alterno [27]

Le funzioni di *mixing* unitarie, a segno alterno, godono di una facile ed immediata implementazione. È sufficiente un consueto *shift register* ad alta frequenza. Allo stato dell'arte si riescono a raggiungere tassi di oscillazione dell'ordine dei GHz [42], arrivando perfino a toccare la soglia degli 80 GHz [43].

Per lo stadio di filtraggio passa – basso, si ricorre a dispositivi analogici. I vantaggi in tal senso sono due: da una parte, i filtri analogici garantiscono un'accuratezza più che sufficiente agli scopi dell'attuale applicazione; dall'altra, la loro realizzazione tecnologica non richiede più di qualche elemento passivo, quali condensatori o spire [44].

La frequenza di campionamento è pari alla metà della frequenza di taglio del filtro passa – basso, così da escludere l'insorgere di qualsiasi fenomeno distorto. Nel caso particolare dei segnali appartenenti al modello \mathcal{M} , di solito si assumono valori comparabili con B , massima estensione consentita alle bande attive. All'atto pratico, questo comporta una notevole flessibilità nella scelta dei convertitori analogico – digitali deputati all'effettivo campionamento. In linea di principio, per evitare inutili sprechi di risorse, la preferenza viene accordata a quei dispositivi che esprimono la massima potenzialità nel *range* di frequenza desiderato. Come già osservato, così si ripiega su soluzioni dalle medie prestazioni, disponibili in commercio a prezzi ragionevoli.

Infine, i blocchi campionatori vengono sincronizzati in modo da operare simultaneamente in ogni canale. Allo scopo, è sufficiente un unico dispositivo di *trigger* per innescare la procedura di campionamento in tutto il circuito. In questo modo, i vantaggi non riguardano solo il costo economico o la complessità del sistema, ma anche l'accuratezza che si riesce ad ottenere. Infatti, dal punto di vista tecnologico, è molto più semplice sincronizzare tutti i blocchi campionatori, piuttosto che introdurre dei minimi sfasamenti temporali tra un canale e l'altro.

4.9 Analisi nel dominio della frequenza

Per ottenere una ricostruzione univoca ed esatta, è essenziale determinare la relazione che intercorre tra la sequenza dei campioni acquisiti nell' i – esimo canale $y_i[n]$ e il segnale originario $x(t)$.

L'approccio più immediato suggerirebbe di operare nel dominio del tempo. Conoscendo la griglia di campionamento, si confrontano i campioni con i rispettivi valori assunti dal segnale.

In realtà, tale strategia ricava ben poche informazioni sull'effettivo legame tra i due insiemi di dati. Per questo motivo, Eldar e Mishali, hanno preferito condurre la propria trattazione nel dominio della frequenza, così da sfruttare al meglio anche la peculiare struttura dei segnali appartenenti al modello \mathcal{M} .

Innanzitutto, gli autori individuano due bande di interesse nell'estensione spettrale del segnale originario. Le frequenze che ne delimitano i confini non sono valori a sé stanti, ma hanno entrambe un significato in relazione alla sequenza dei campioni acquisiti.

$$\mathcal{F}_p = \left[\frac{-f_p}{2}, \frac{f_p}{2} \right] \quad \text{dove} \quad f_p = \frac{1}{T_p}$$

$$\mathcal{F}_s = \left[\frac{-f_s}{2}, \frac{f_s}{2} \right] \quad \text{dove} \quad f_s = \frac{1}{T_s}$$

4.9.1 Acquisizione dei campioni

Per il momento, l'attenzione si restringe ad un singolo canale i – esimo. Ovviamente, qualsiasi risultato o conclusione poi vengono estesi senza problemi a tutti i canali del convertitore MWC.

La funzione di *mixing*, a segno alterno, è periodica di periodo T_p . Quindi, può essere espressa mediante la serie di Fourier [27]:

$$p_i(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{il} e^{j\frac{2\pi}{T_p}lt}$$

Si ottiene così una combinazione lineare di infinite componenti, in cui i coefficienti derivano direttamente dal calcolo di uno specifico integrale [27]:

$$c_{il} = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p_i(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_p}lt} dt$$

Una volta definita con precisione la funzione di *mixing*, la moltiplicazione per il segnale originario restituisce un segnale $\tilde{x}_i(t) = x_i(t) \cdot p_i(t)$, la cui trasformata di Fourier presenta la seguente formulazione [37]:

$$\tilde{X}_i(f) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{il} X(f - lf_p)$$

In altri termini, la versione distorta restituita dal canale i – esimo del *mixer* altro non è che una combinazione lineare di infinite versioni di $X(f)$, traslate di f_p e pesate secondo i coefficienti c_{il} . In questo modo, si ha la sicurezza che ciascuna banda attiva compaia in banda base.

Per definizione, la trasformata di Fourier del segnale originario si annulla all'esterno della propria estensione spettrale \mathcal{F} , ossia $X(f) = 0$ per $f \notin \mathcal{F}$. Di conseguenza, nonostante la sommatoria sia infinita, la trasformata di Fourier della versione distorta dell' i – esimo canale presenta comunque un numero finito di componenti non nulle. In particolare, $\tilde{X}_i(f)$ contiene al massimo $\lceil f_{Nyq} / f_p \rceil$ termini non nulli.

Proseguendo nel flusso di elaborazione dei dati, a valle del *mixer* è situato il filtro passa – basso, che conserva inalterate le componenti comprese nella banda \mathcal{F}_s , mentre annulla tutte le altre.

La restrizione del supporto spettrale alla sola banda passante permette di esprimere la trasformata discreta di Fourier della sequenza dei campioni come una combinazione lineare di un numero finito di componenti:

$$Y_i(e^{j2\pi f T_s}) = \sum_{l=-L_0}^{+L_0} c_{il} X(f - lf_p) \quad \text{dove } f \in \mathcal{F}_s$$

L'intervallo di variazione dell'indice della sommatoria è rappresentato da L_0 . Si tratta del minimo valore intero che garantisce che la suddetta sommatoria contenga tutte le componenti non nulle di $X(f)$ comprese nella banda passante \mathcal{F}_s .

4.9.2 Legame con il segnale originario

Proprio la definizione del parametro L_0 fornisce lo spunto per un'osservazione di cruciale importanza. Confrontando le formulazioni di $\tilde{X}_i(f)$ e $Y_i(e^{j2\pi f T_s})$ emerge una differenza sostanziale: le sommatorie sono analoghe, ma nella prima l'intervallo di variazione dell'indice è illimitato, nella seconda ha dei limiti finiti e determinabili con precisione.

Nel caso di $\tilde{X}_i(f)$, l'intervallo illimitato dimostra da un lato che il *mixer* non introduce alcuna limitazione in banda, dall'altro però la sommatoria potrebbe non essere sempre ben definita. Di contro, nel caso di $Y_i(e^{j2\pi f T_s})$, il problema non sussiste: il filtro passa – basso considera solo un numero finito di ripetizioni di $X(f)$ e la sommatoria risulta sempre ben definita.

Aldilà delle questioni tecniche, la formulazione di $Y_i(e^{j2\pi f T_s})$ determina la relazione che intercorre tra le trasformate di Fourier del segnale originario e della sua versione campionata. In tal senso, conviene ampliare la prospettiva al sistema nel suo complesso e ricorrere ad una notazione matriciale del tipo

$$\mathbf{y}(f) = \mathbf{A} \mathbf{z}(f)$$

Il vettore $\mathbf{y}(f)$ ha lunghezza m e il suo i – esimo elemento è pari a $y_i(f) = Y_i(e^{j2\pi f T_s})$. L'incognita è un vettore di lunghezza $L = 2L_0 + 1$, il cui i – esimo elemento è pari a $z_i(f) = X(f + (i - L_0 - 1)f_p)$. Infine, la matrice \mathbf{A} , di dimensione $m \times L$, contiene i coefficienti c_{il} . In particolare, l'organizzazione in righe e colonne è tale che $A_{il} = c_{i,-l}$.

4.9.3 Ruolo dei parametri

Questo protocollo di acquisizione dipende da numerosi parametri, che differiscono non solo per i fenomeni che rappresentano, ma anche per il modo in cui incidono sui risultati finali. Una conoscenza specifica e approfondita dei principali parametri indirizza l'utente nell'assegnare loro dei valori che garantiscano risultati affidabili e prestazioni efficienti.

Il periodo T_p determina il tasso di distorsione applicato in ogni canale del *mixer*. Non a caso, si tratta del reciproco della frequenza f_p che costituisce il passo di cui vengono traslate le diverse componenti spettrali per apparire in banda base. In maniera del tutto equivalente, si può affermare che la frequenza f_p determina la suddivisione della trasformata di Fourier del segnale originale $X(f)$ nelle porzioni $z_i(f)$.

A tal proposito, una condizione comunemente adottata impone che il valore di f_p non sia inferiore a B , la massima estensione di una banda attiva nei segnali appartenenti al modello \mathcal{M} [27]:

$$f_p \geq B \quad (4.1)$$

In questo modo, ciascuna componente del segnale originario contribuisce al valore di una sola porzione $z_i(f)$ e gli elementi non nulli del vettore $\mathbf{z}(f)$ sono al più N . Tipicamente, all'atto pratico, si opta per un valore di f_p leggermente superiore a B per evitare fenomeni di sovrapposizione tra le porzioni in cui suddivido la trasformata di Fourier.

La frequenza di campionamento f_s determina l'estensione dell'intervallo \mathcal{F}_s in cui è valida la relazione tra $y[n]$ e $x(t)$. Al di fuori di questo intervallo gli algoritmi risolutivi si complicano al punto tale da rendere qualsiasi implementazione impraticabile o comunque incompatibile con le tempistiche sperimentali.

Fino a quando il sistema soddisfa la disuguaglianza [27]:

$$f_s \geq f_p \quad (4.2)$$

ricostruire il segnale originario $x(t)$ a partire dalle sequenze dei suoi campioni $y_i[n]$ equivale a ricostruire il vettore $\mathbf{z}(f)$ a partire dal vettore delle misure $\mathbf{y}(f)$ per ogni $f \in \mathcal{F}_p$.

Il parametro f_s indica la frequenza di campionamento adottata in ciascuno dei canali del *mixer*. Invece, per conoscere la frequenza complessiva dell'intero sistema bisogna identificare un ulteriore parametro: il numero m dei canali. In particolare, il convertitore MWC, grazie al particolare schema operativo, è in grado di raccogliere mf_s campioni al secondo del segnale in ingresso.

Tenendo conto delle osservazioni inerenti questi parametri, una soluzione semplice quanto efficiente prevede di assegnare alle frequenze di interesse dei valori tali da soddisfare sia la (4.1) che la (4.2):

$$f_s = f_p \approx B$$

e di dimensionare il numero dei canali in modo tale che la complessiva frequenza di campionamento soddisfi il teorema di Shannon, ossia $mf_s \geq f_{Nyq}$.

Non si tratta, peraltro, dell'unica soluzione percorribile. Infatti, i legami tra i diversi parametri consentono di attuare i compromessi che meglio si adattano alle esigenze sperimentali del caso in analisi o alle preferenze dell'utente. Per esempio, è possibile diminuire il numero dei canali a patto di aumentare la frequenza di campionamento in ogni canale [27]. In questo modo la diminuzione di m è controbilanciata dall'incremento di f_s ed è ancora lecito applicare il teorema di Shannon.

4.10 Funzioni di *mixing*

Certo, le funzioni di *mixing* incidono profondamente sugli esiti della ricostruzione. Non si tratta, come nei casi precedenti, di un singolo parametro variamente correlato agli altri. Al contrario, i gradi di libertà a disposizione dell'utente sono molteplici. L'unica condizione inderogabile è rappresentata dalla periodicità della funzione, mentre ampiezza, periodo e qualsiasi altra caratteristica sono totalmente arbitrari.

Basti considerare nuovamente la loro espansione come serie di Fourier:

$$p_i(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{il} e^{j\frac{2\pi}{T_p}lt}$$

I coefficienti c_{il} costituiscono i pesi delle diverse componenti nella combinazione lineare, ma anche gli elementi della matrice \mathbf{A} , secondo la relazione $A_{il} = c_{i,-l}$. In altri termini, la riga i – esima della matrice è occupata dai coefficienti della i – esima funzione di *mixing*.

4.10.1 Vincoli da soddisfare

Le dimensioni della matrice \mathbf{A} impongono che ogni riga sia composta da L elementi. Pertanto, in ogni periodo T_p , la funzione $p_i(t)$ dovrebbe effettuare un numero di transizioni tale che la sua espansione in serie di Fourier contenga circa L termini dominanti, o comunque marcatamente più significativi degli altri. Una volta soddisfatto questo requisito si ha la certezza che la versione distorta restituita da ogni canale del

mixer sia una combinazione di tutti gli elementi non nulli di $\mathbf{z}(f)$, ossia di tutte le bande attive del segnale originario. Parimenti, ogni funzione dovrebbe differire dalle altre così da generare righe della matrice \mathbf{A} tra loro linearmente indipendenti.

Come traspare da queste osservazioni, le condizioni imposte non restringono di molto il campo delle possibili implementazioni, anzi, lasciano alle condizioni sperimentali e alla sensibilità dell'utente il compito di scegliere la soluzione più valida e opportuna. L'unico requisito inderogabile riguarda la natura periodica delle funzioni: eventuali imprecisioni nell'ampiezza o nella tempistica delle transizioni diventano irrilevanti, se si ripresentano uguali a se stesse in ogni periodo.

Peraltro, il vincolo di periodicità comporta più vantaggi che complicazioni. Per quanto riguarda la stabilità del sistema, incrementa la robustezza alle cause di variabilità nel dominio del tempo. Per quanto riguarda la complessità computazionale, i coefficienti c_{il} possono essere calibrati in maniera retroattiva.

4.10.2 La scelta degli autori

Nell'ambito del progetto del convertitore MWC, Eldar e Mishali hanno optato per delle funzioni di ampiezza unitaria, a segno alterno. Tale scelta ha due motivazioni principali.

Da un punto di vista matematico, semplifica notevolmente la moltiplicazione operata all'interno di ogni canale del *mixer*. Da un punto di vista tecnologico, dispone di un'immediata implementazione mediante un semplice registro a scorrimento, o *shift register*.

Tale registro è costituito da una catena di celle di memoria ad un *bit* interconnesse tra loro. Ad ogni impulso del *clock* di sistema, viene consentito lo scorrimento dei *bit* da una cella a quella immediatamente adiacente. Di conseguenza, all'uscita del registro si alternano i valori logici 0 e 1, secondo una sequenza fissata dall'utente, che così determina le transizioni della funzione di *mixing*.

Adottando questa soluzione tecnologica, il calcolo dei coefficienti c_{il} porge l'espressione [27]:

$$c_{il} = \frac{1}{T_p} \sum_{k=0}^{M-1} \alpha_{ik} e^{-j\frac{2\pi}{M}lk} \int_0^{T_p/M} e^{-j\frac{2\pi}{T_p}lt} dt = d_l \sum_{k=0}^{M-1} \alpha_{ik} \theta^{lk}$$

La parametrizzazione adottata prevede che la variabile θ abbia un andamento esponenziale del tipo: $\theta = e^{-j\frac{2\pi}{M}}$. Questo stesso parametro è utile per formulare la matrice $\bar{\mathbf{F}}$ della trasformata discreta di Fourier, di dimensioni $M \times M$, la cui colonna i – esima è costituita dal vettore [27]:

$$\bar{\mathbf{F}}_i = [\theta^{0 \cdot i}, \theta^{1 \cdot i}, \theta^{2 \cdot i}, \dots, \theta^{(M-1) \cdot i}]^T$$

La matrice \mathbf{F} di dimensione $M \times L$ contiene un sottoinsieme di tali colonne, organizzate secondo lo schema:

$$\mathbf{F} = [\bar{\mathbf{F}}_{L_0}, \bar{\mathbf{F}}_{L_0-1}, \dots, \bar{\mathbf{F}}_0, \dots, \bar{\mathbf{F}}_{-L_0}]$$

Per rappresentare in forma matriciale le funzioni di *mixing* a segno alterno, si approntano una matrice \mathbf{S} , di dimensioni $m \times M$, tale che $S_{ik} = \alpha_{ik}$, e una matrice diagonale \mathbf{D} , di dimensioni $L \times L$ e valori $[d_{L_0}, d_{L_0-1}, \dots, d_0, \dots, d_{-L_0}]$.

Alla luce di queste definizioni è possibile fattorizzare la matrice A nella formulazione equivalente

$$\mathbf{y}(f) = \mathbf{A} \mathbf{z}(f) = \mathbf{S} \mathbf{F} \mathbf{D} \mathbf{z}(f)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_1(e^{j2\pi f T_s}) \\ Y_2(e^{j2\pi f T_s}) \\ \vdots \\ Y_m(e^{j2\pi f T_s}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}(f)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{1,0} & \cdots & \alpha_{1,M-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,0} & \cdots & \alpha_{m,M-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \underbrace{\begin{bmatrix} | & \cdots & | & \cdots & | \\ \bar{\mathbf{F}}_{L_0} & \cdots & \bar{\mathbf{F}}_0 & \cdots & \bar{\mathbf{F}}_{-L_0} \\ | & \cdots & | & \cdots & | \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} d_{L_0} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{-L_0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} X(f - L_0 f_p) \\ \vdots \\ X(f) \\ \vdots \\ X(f + L_0 f_p) \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}(f)}$$

Figura 4.8 Rappresentazione matriciale del sistema $\mathbf{y}(f) = \mathbf{S} \mathbf{F} \mathbf{D} \mathbf{z}(f)$ [27]

Tale scomposizione evidenzia i diversi contributi nella generazione del segnale campionato e con essi emergono ulteriori parametri, come i coefficienti α_{ik} o la dimensione M . In simili algoritmi, l'incremento del numero dei parametri è sempre salutato con favore. Ogni parametro, infatti, descrive in maniera quantitativa un fenomeno altrimenti celato o difficilmente separabile dal resto. Inoltre, fornisce all'utente uno strumento diretto per controllare ed influenzare l'andamento del sistema.

In particolare, i coefficienti α_{ik} rappresentano i valori della funzione di *mixing* all'istante iniziale, mentre la dimensione M indica il numero di transizioni, ossia di inversioni del segno.

Specialmente quest'ultimo parametro ha molteplici implicazioni sul processo di ricostruzione. Alcune sono di immediata comprensione, come per esempio il calcolo della frequenza di aggiornamento dello *shift register*, pari a $1/T_p M$. Altre, invece, sono più complesse e coinvolgono anche i valori assegnati ad altri parametri.

In generale, resta valido quanto affermato in precedenza: non si tratta di condizioni necessarie per il buon esito della ricostruzione, quanto piuttosto di suggerimenti e linee guida utili al momento di attribuire ai diversi parametri i valori più opportuni.

4.11 Impianto teorico del convertitore MWC

Dal punto di vista teorico, il passaggio più delicato è senza ombra di dubbio la necessità che alle sequenze di campioni corrisponda uno ed un solo segnale originario $x(t)$, in caso contrario qualsiasi tentativo di ricostruzione si rivelerebbe vano.

Un insieme di teoremi fissa i requisiti che garantiscono l'unicità della ricostruzione. Tuttavia, prima di enunciarli, conviene richiamare alcune definizioni inerenti il concetto di sparsità ed esprimerle in una forma più consona e utile al prosieguo della trattazione [27].

D.4.2 Un vettore \mathbf{u} si dice k -sparso se non contiene più di k elementi non nulli o significativi.

Si consideri allora un insieme di vettori definiti su un intervallo continuo, quale può essere

$$\mathbf{z}(\mathcal{F}_p) = \{\mathbf{z}(f) : f \in \mathcal{F}_p\}$$

Il supporto di un insieme contiene gli indici dei suoi elementi non nulli. In questo caso, equivale all'unione dei supporti dei vari $\mathbf{z}(f)$ e come tale è calcolato:

$$\text{supp}(\mathbf{z}(\mathcal{F}_p)) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}_p} \text{supp}(\mathbf{z}(f))$$

Alla luce di questa formulazione, è possibile estendere la definizione di sparsità dai singoli vettori agli insiemi di vettori. L'analogia tra i due casi è evidente.

D.4.3 Un insieme di vettori si definisce congiuntamente k – sparso se il suo supporto non contiene più di k indici.

4.11.1 Primo teorema di unicità

T.4.2 Sia $x(t)$ un segnale arbitrario appartenente al modello \mathcal{M} . Si proceda al campionamento ad una frequenza pari a $f_p = B$. Condizioni necessarie per pervenire ad una esatta ricostruzione in assenza di informazioni a priori sul supporto spettrale sono $f_s \geq f_p$ e $m \geq 2N$. Se poi la procedura di *mixing* è implementata mediante funzioni a segno alternato, si aggiunge alle precedenti un' ulteriore condizione:

$$M \geq M_{min} \triangleq 2 \left\lceil \frac{f_{Nyq}}{2f_p} + \frac{1}{2} \right\rceil - 1$$

Nel caso particolare in cui f_s e f_p coincidono, il valore limite M_{min} è pari a L [27].

L'enunciato T.4.2 non deve essere considerato una condizione immutabile: al variare delle ipotesi varia anche la condizione.

D'altro canto, all'atto pratico, conviene attenersi a delle linee guida. Per esempio, la scelta di porre $f_p = B$ si rivela vincente: da un lato, garantisce l'univocità della ricostruzione; dall'altro, riduce al minimo la frequenza di campionamento complessiva

Per quanto riguarda, invece, il parametro M , considerazioni di natura computazionale suggeriscono di rispettare la disuguaglianza $M \leq 2^{m-1}$. Questa indicazione sorge dal fatto che la matrice \mathbf{S} è definita su un alfabeto finito, nello specifico l'insieme $\{+1, -1\}$, e non può avere più di 2^{m-1} colonne linearmente indipendenti. Di conseguenza, se si optasse per un valore di $M > 2^{m-1}$, la matrice \mathbf{A} non avrebbe rango pieno, ossia alcuni gradi di libertà sarebbero inutilizzati.

4.11.2 Secondo teorema di unicità

T.4.3 Sia $x(t)$ un segnale arbitrario appartenente al modello \mathcal{M} . Si proceda al campionamento adottando funzioni di *mixing* a segno alterno. Se:

$$1) \quad f_s \geq f_p \geq B \quad \text{e} \quad \frac{f_s}{f_p} < \frac{M_{min} + 1}{2}$$

$$2) \quad M \geq M_{min}$$

3) $m \geq 2N$ nel caso *spectrum – blind*, più semplicemente $m \geq N$ nel caso si disponga di informazioni a priori sul supporto spettrale del segnale originario

4) qualsiasi $2N$ colonne della matrice prodotto $\mathbf{S F}$ sono linearmente indipendenti

Allora, per ogni $f \in \mathcal{F}_s$, il vettore $\mathbf{z}(f)$ è l'unica soluzione N – sparsa del sistema vettoriale $\mathbf{y}(f) = \mathbf{S F D z}(f)$ [27].

A differenza del T.4.2, le condizioni imposte dal T.4.3 sono sufficienti, non necessarie. La precisazione è fondamentale e mette in luce la diversa vocazione dei due enunciati: il primo fissa dei vincoli che, una volta soddisfatti dai parametri, garantiscono l'unicità della ricostruzione; il secondo suggerisce una particolare realizzazione del sistema, anche se ne esistono di altrettanto valide.

Tra tutte le possibili realizzazioni, il T.4.3 individua quella che consente di minimizzare il numero di campioni acquisiti e di conseguenza il carico computazionale. In particolare, ponendo $f_s = f_p = B$ e $m = 2N$, la frequenza media di campionamento è pari a $2NB$. Come ampiamente dimostrato in letteratura, si tratta del minimo valore accessibile per segnali appartenenti al modello \mathcal{M} .

Malgrado ciò, l'applicazione di questo secondo teorema apre le porte a due possibili problemi: il primo riguarda il numero dei canali m , il secondo riguarda i coefficienti α_{ik} .

4.11.3 Il numero dei canali

La matrice \mathbf{A} ha un numero di colonne L superiore al numero delle componenti spettrali attive $2N$.

Se $m = 2N$ è sufficientemente piccolo, il vincolo imposto dal T.4.2, ossia $M \geq L$, potrebbe non rispettare il suggerimento $M \leq 2^{m-1}$.

Certo, le due disuguaglianze non hanno lo stesso peso: la prima è una condizione necessaria, la seconda è solo un suggerimento per massimizzare le prestazioni. D'altro canto, la perdita di efficienza è innegabile, visto che il sistema non sfrutta a pieno tutti i suoi possibili gradi di libertà.

Fortunatamente, all'atto pratico questa situazione non si presenta quasi mai, grazie anche all'andamento esponenziale del termine 2^{m-1} . Peraltro, bastano pochi semplici assestamenti per configurare il convertitore MWC anche nel caso peggiore.

Per esempio, si può adottare una diversa interpretazione del supporto spettrale del segnale originario. A differenza di quanto affermato dal modello \mathcal{M} , il segnale $x(t)$ possiede ρN bande attive, il cui spessore massimo è pari a B/ρ . Applicando queste nuove impostazioni al consueto schema operativo, il numero dei canali si attesta al valore $m = 2\rho N$.

L'incremento di m ha conseguenze ambivalenti: da una parte, c'è la certezza di soddisfare la disuguaglianza $M \leq 2^{m-1}$; dall'altra, la mole dei campioni aumenta in maniera sproorzionata. Peraltro, il computo totale di dispositivi elettronici ha un notevole impatto sui costi di realizzazione.

In tal senso, ridurre il numero dei canali significherebbe ridurre anche il numero di filtri passa – basso e convertitori analogico – digitali. Una possibile strategia vincente è la seguente: incrementare la frequenza di campionamento f_s in ogni canale consente di ridurre la cifra complessiva.

Anche così, però, non mancano le controindicazioni. La principale è la necessità di aggiungere un ulteriore stadio di elaborazione digitale, che inevitabilmente appesantisce il carico computazionale del sistema.

Scendendo nel dettaglio, l'incremento è formalizzato dall'espressione $f_s = qf_p$, dove $q = 2q' + 1$. Mantenendo il medesimo schema operativo, l' i -esimo canale restituisce la sequenza campionata [27]:

$$y_i(f + kf_p) = \sum_{l=-L_0}^{L_0} c_{i,(l+k)} X(f - lf_p) \quad \text{dove} \quad f \in \mathcal{F}_p, k \in [-q', +q']$$

Utilizzare m canali a frequenza qf_p equivale ad utilizzare mq canali a frequenza f_p . Quindi, in linea di principio, questa strategia consentirebbe di ridursi ad un sistema composto da un unico canale che operi ad una frequenza $f_s = mf_p$.

Contrari a una simile soluzione estrema sono due fenomeni. In primo luogo, nel sistema ridotto ogni canale richiede la successione di q filtri digitali per ricondurre la frequenza nuovamente al valore f_p . In secondo luogo, al crescere di q diventa sempre più difficile approssimare la frequenza di taglio posta a π/q . Ovviamente, nel caso limite $q = m$, i problemi si manifestano al massimo grado di difficoltà, tanto da rendere praticamente irrealizzabile un sistema con un unico canale.

4.11.4 I coefficienti delle funzioni di mixing

L'ultima delle condizioni sufficienti espresse dal T.4.3 richiede che qualsiasi $2N$ colonne della matrice prodotto $\mathbf{S}\mathbf{F}$ siano linearmente indipendenti. Dal punto di vista computazionale, verificare che i coefficienti α_{ik} soddisfano tale vincolo non è semplice: bisogna controllare, uno ad uno, il rango di ogni insieme di $2N$ colonne.

D'altro canto, si nota una certa somiglianza con la RIP: la condizione addirittura coincide se si pone $\delta_k = \delta_{2N} < 1$. In questo caso, la verifica può essere agevolata dal ricorso a principi di casualità.

Per esempio, gli elementi della matrice segno \mathbf{S} possono essere tratti, in maniera indipendente e casuale, da una certa distribuzione di probabilità. A quel punto, \mathbf{S} soddisfa la RIP di ordine K se $m \geq CK \log\left(\frac{M}{K}\right)$ [45], dove la costante positiva C non dipende da nessun altro parametro.

La RIP è invariante a qualsiasi trasformazione unitaria delle righe. Pertanto, se \mathbf{S} è una matrice segno casuale, allora il prodotto $\mathbf{S}\mathbf{F}$ soddisfa la proprietà di isometria ristretta di ordine $2N$.

In queste osservazioni si è trascurata la matrice \mathbf{D} . Infatti, data la sua struttura diagonale, non influisce sul supporto delle grandezze cui viene moltiplicata: $\text{supp}(\mathbf{D}\mathbf{u}) = \text{supp}(\mathbf{u})$.

4.12 Modelli per le sequenze campionate

Risolti i problemi legati all'acquisizione del segnale originario, l'attenzione si sposta sull'analisi dei campioni. L'approccio più semplice ed immediato prevede di considerare separatamente le sequenze generate nei diversi canali. In questo contesto si inserisce il paradigma SMV, ossia *single measurement vector*, dove i campioni vengono rappresentati come gli elementi di un vettore, risultato del prodotto interno tra il segnale originario e la matrice di *sensing*.

Una prima estensione è offerta dal paradigma MMV, ossia *multiple measurement vectors*, che adotta una visione di insieme: le diverse sequenze sono interpretate come insiemi finiti di vettori congiuntamente sparsi. In particolare, gli indici degli elementi non nulli dei vari vettori appartengono ad uno stesso insieme comune.

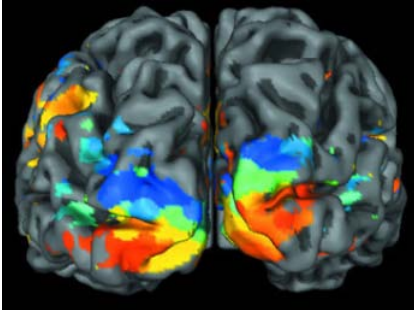


Figura 4.9 Studio neurologico: zone di attivazione cerebrale

Tale approccio gode di notevole successo, tanto da essere applicato in diversi ambiti e contesti. Tra questi si citano gli esami di MEG [46, 47], oppure ancora le analisi spettrali non parametriche [48] o infine le procedure di equalizzazione dei canali in una comunicazione sparsa [49, 50].

Un'ulteriore e decisiva estensione conduce al paradigma IMV, ossia *infinite measurement vectors*, secondo il quale le sequenze costituiscono degli insiemi infiniti di vettori congiuntamente sparsi.

Come nel caso precedente, esiste un insieme che contiene gli indici degli elementi non nulli dei vari vettori. Gli ambiti di applicazione sono molteplici, ma quello più citato in letteratura è proprio la ricostruzione dei segnali analogici. La possibilità di ricorrere ad infiniti vettori consente, infatti, di riprodurre fedelmente il loro andamento continuo, che qualsiasi approccio finito può soltanto approssimare.

Per esempio, anche il modello \mathcal{M} può essere considerato un esempio particolare di modello IMV. Allo stesso modo, il radar CS rimpiazza la consueta approssimazione discreta dei velivoli con un modello IMV [51], perché i risultati forniti dallo strumento siano più precisi e dettagliati.

4.12.1 Duplice conversione

In linea di principio, il convertitore MWC è destinato all'acquisizione dei segnali appartenenti al modello \mathcal{M} , quindi conviene avvalersi del paradigma IMV. Tuttavia, una simile scelta comporta la necessità di ricostruire un insieme di cardinalità infinita di vettori congiuntamente sparsi.

In letteratura, i precedenti tentativi in tal senso seguono due approcci analoghi. Elemento comune a entrambi è la conversione dall'ambito continuo all'ambito discreto per ridurre il numero delle incognite da infinito a finito. A variare, invece, è il livello al quale operano.

Il primo approccio mantiene valide le assunzioni iniziali, ma poi ricerca soltanto un'approssimazione discreta di $\mathbf{z}(f)$ [52]. Il secondo, invece, modifica la prospettiva sin dai passi iniziali. Infatti, rinuncia al paradigma IMV per un modello discreto di dimensione finita [35].

Eldar e Mishali suggeriscono, invece, una strategia alternativa: sostituire al sistema basato sul paradigma IMV un corrispondente sistema basato sul paradigma MMV. C'è una sola condizione da soddisfare: i modelli IMV e MMV devono condividere lo stesso supporto. In modo del tutto analogo, sebbene non si adotti esattamente lo stesso procedimento, si può sostituire il sistema basato sul paradigma MMV con un corrispondente sistema basato sul paradigma SMV. Ancora una volta, la sola condizione necessaria è rappresentata dalla coincidenza del supporto.

Riassumendo, l'approccio di Eldar e Mishali si sviluppa su due livelli. Nel primo, la conversione dal modello IMV al modello MMV riduce le incognite ad un numero finito e consente di trovare una soluzione in forma esplicita del sistema. Nel secondo, la conversione dal modello MMV al modello SMV semplifica notevolmente l'algoritmo risolutivo.

4.12.2 Modello SMV

Nell'ambito del modello SMV, le misure acquisite in ogni canale possono essere rappresentate dal generico sistema: $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$. Volendo ricostruire il segnale originario, bisogna tenere conto del seguente teorema [53]:

T.4.4 Dato il sistema $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, se $\bar{\mathbf{x}}$ ne è una soluzione k – sparsa e se il rango di Kruskal della matrice \mathbf{A} è pari ad almeno due volte k , ossia $\sigma(\mathbf{A}) \geq 2k$, allora $\bar{\mathbf{x}}$ è l'unica soluzione k – sparsa del sistema.

4.12.3 Modello MMV

Quando si passa al modello MMV, conviene adottare una specifica parametrizzazione che distingua i diversi elementi che lo costituiscono. Attenendosi a questo consiglio, il sistema assume la seguente formulazione:

$$\mathbf{y}(\lambda) = \mathbf{Ax}(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda$$

dove Λ è un insieme di cardinalità finita e noto allo sperimentatore.

D.4.4 L'insieme $\mathbf{x}(\Lambda) = \{\mathbf{x}(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ si dice congiuntamente k – sparso se soddisfa le seguenti condizioni:

- 1) Qualsiasi vettore $\mathbf{x}(\lambda)$ è k – sparso.
- 2) Gli indici degli elementi non nulli dei vari $\mathbf{x}(\lambda)$ appartengono ad un medesimo insieme, di dimensione non superiore a k [53].

La presente definizione fornisce diversi spunti per la soluzione del problema. Per esempio, si può considerare singolarmente ogni valore assunto da λ : il sistema si riconduce così al paradigma SMV e, coerentemente con quanto affermato da T.4.4, l'unicità della soluzione è garantita da $\sigma(\mathbf{A}) \geq 2k$.

D'altro canto, un approccio del genere non sfrutta appieno le caratteristiche dell'insieme $\mathbf{x}(\Lambda)$. La sparsità congiunta rappresenta una proprietà più forte rispetto alla sparsità semplice. Quindi, è lecito attendersi che sia sufficiente un valore inferiore del rango di Kruskal per garantire l'unicità della soluzione.

A tal proposito, Eldar e Mishali hanno elaborato un teorema, che estende le conoscenze, già affermate in letteratura, inerenti il paradigma MMV.

T.4.5 Se $\bar{\mathbf{x}}(\Lambda)$ è una soluzione k – sparsa del sistema $\mathbf{y}(\lambda) = \mathbf{Ax}(\lambda)$, per ogni $\lambda \in \Lambda$, e se

$$\sigma(\mathbf{A}) \geq 2k - (\dim(\text{span}(\mathbf{y}(\Lambda)) - 1))$$

allora $\bar{\mathbf{x}}(\Lambda)$ è l'unica soluzione k – sparsa del sistema [53].

Nell'enunciato compare la notazione $\text{span}(\mathbf{y}(\Lambda))$ che indica il sottospazio di dimensione minima che contiene l'intero insieme $\mathbf{y}(\Lambda)$. Indipendentemente dalla cardinalità di Λ , tale sottospazio ha sicuramente dimensione finita, visto che ogni vettore $\mathbf{y}(\lambda)$ ha lunghezza finita.

In fin dei conti, il teorema T.4.5 conferma quanto già suggerito dal buon senso, ossia che la sparsità congiunta impone un vincolo meno stringente sul rango di Kruskal della matrice del sistema.

4.12.4 Analogie SMV – MMV

Un aspetto che balza immediatamente agli occhi nel leggere i teoremi T.4.4 e T.4.5 è la forte similitudine, analogia, che li contraddistingue. In entrambi, infatti, si esprimono due condizioni sufficienti: l'una inerente il rango di Kruskal della matrice \mathbf{A} , l'altra inerente la sparsità, semplice o congiunta, della soluzione $\bar{\mathbf{x}}$. Questo ultimo elemento, in particolare, trova spazio in un comune risultato [53]:

T.4.6 Se $\bar{\mathbf{x}}$ è l'unica soluzione k – sparsa del sistema $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, allora è anche la soluzione unica più sparsa.

4.13 Riduzione del modello IMV

Sostanzialmente, il paradigma IMV rappresenta un'estensione diretta del paradigma MMV, dove la cardinalità dell'insieme Λ passi da finita a infinita.

Questa modifica, da un lato avvicina alla realtà sperimentale il modello teorico, dall'altro complica, e non poco, il problema matematico. Infatti, le incognite così come le equazioni sono infinite.

Allo stato dell'arte, un sistema di infinite incognite non può essere analizzato mediante le consuete tecniche risolutive. Pertanto, Eldar e Mishali propongono di riportare il sistema basato sul paradigma IMV ad una versione equivalente ai fini della soluzione, ma dotata di un numero finito di incognite.

4.13.1 Discretizzazione

L'approccio più immediato individua una griglia finita all'interno dell'insieme Λ , del tipo $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$, e trova la soluzione $\mathbf{x}(\tilde{\Lambda})$, valida solo per $\lambda \in \tilde{\Lambda}$. Quindi, per approssimare la soluzione del sistema originario, la procedura termina con l'interpolazione di $\mathbf{x}(\tilde{\Lambda})$ sull'intero insieme Λ [53].

Però, nulla assicura che il risultato finale coincida con l'effettiva soluzione $\bar{\mathbf{x}}(\Lambda)$. Anzi, ciò si verifica molto raramente: non di rado, la versione interpolata non rispetta la condizione $\mathbf{y}(\Lambda) = \mathbf{Ax}(\Lambda)$ quando valutata al di fuori della griglia, ossia per $\lambda \notin \tilde{\Lambda}$.

Inoltre, la densità della griglia influenza direttamente la complessità computazionale e la bontà della ricostruzione. Per la precisione, i due aspetti vanno in controtendenza ed è difficile trovare un compromesso ottimale: l'incremento della cardinalità di $\tilde{\Lambda}$ comporta una migliore aderenza ai dati, ma anche un aggravarsi del carico computazionale [53].

Alla luce di questi difetti, è preferibile evitare il ricorso alla discretizzazione, e concentrare la propria attenzione su riduzioni che, sebbene più complesse, non comportino alcuna perdita di informazione.

4.13.2 Riduzione "esatta"

L'approccio cosiddetto esatto si sviluppa in due stadi successivi: il primo appronta una stima del supporto del segnale originario $S = \text{supp}(\mathbf{x}(\Lambda))$; il secondo, invece, fornisce la ricostruzione del segnale originario a partire dalla stima di S e dai dati a disposizione $\mathbf{y}(\Lambda)$.

Per ipotesi, la soluzione $\bar{\mathbf{x}}(\Lambda)$ è congiuntamente k – sparsa, il che ha due rilevanti conseguenze. In primo luogo, il suo supporto, $S = \text{supp}(\mathbf{x}(\Lambda))$, non può contenere più di k elementi, ossia $|S| \leq k$. In secondo luogo, il teorema T.4.5 assicura che il rango di Kruskal di \mathbf{A} è pari almeno a k , ossia $\sigma(\mathbf{A}) \geq k$.

Definita \mathbf{A}_S come la matrice formata dalle sole colonne di \mathbf{A} i cui indici appartengano a S , è immediato verificare che tali colonne sono linearmente indipendenti. In altri termini, il rango di \mathbf{A}_S è pieno ed è valida l'uguaglianza $(\mathbf{A}_S)^\dagger \mathbf{A}_S = \mathbf{I}$.

A quel punto, la stima del supporto del segnale originario può essere sfruttata per riformulare il sistema in un'espressione più compatta e facilmente risolvibile, che considera solo gli elementi del vettore $\mathbf{x}(\lambda)$ i cui indici appartengano a S [63]:

$$\mathbf{y}(\lambda) = \mathbf{A}_S \mathbf{x}_S(\lambda)$$

Una semplice operazione di inversione porge la soluzione del sistema [53]:

$$x_i(\lambda) = \begin{cases} (\mathbf{A}_S)^\dagger \mathbf{y}(\lambda) & i \in S \\ 0 & i \notin S \end{cases}$$

4.13.3 Primo stadio: conversione IMV – MMV

Come emerge anche dalle precedenti osservazioni, il nodo cruciale è rappresentato dalla stima del supporto del segnale originario. A tal proposito, si osserva che qualsiasi collezione finita di vettori, definita nel sottospazio $\text{span}(\mathbf{y}(\Lambda))$, contiene sufficienti informazioni per ricostruire con esattezza S .

Non si tratta di un'intuizione o di una deduzione dall'esperienza sperimentale, quanto piuttosto di un risultato teorico, dimostrato formalmente dal seguente teorema.

T.4.7 Sia $\bar{\mathbf{x}}(\Lambda)$ l'unica soluzione k – sparsa del sistema $\mathbf{y}(\Lambda) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\Lambda)$. La matrice \mathbf{A} di dimensioni $m \times n$ soddisfi il vincolo $\sigma(\mathbf{A}) \geq 2k - (\dim(\text{span}(\mathbf{y}(\Lambda)) - 1))$. Sia \mathbf{V} una matrice di m righe, tale che il minimo sottospazio che contenga le sue colonne coincida con $\text{span}(\mathbf{y}(\Lambda))$. Allora, il sistema lineare $\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ ha un'unica soluzione k – sparsa $\bar{\mathbf{X}}$, il cui supporto coincide con S [53].

Questo enunciato costituisce il fondamento teorico che permette di sostituire ad un sistema basato sul paradigma IMV il suo equivalente basato sul paradigma MMV.

L'unica difficoltà concerne la costruzione di una matrice \mathbf{V} tale da soddisfare le ipotesi del T.4.7. Fortunatamente, esiste un altro teorema che risponde perfettamente alle specifiche esigenze del caso.

T.4.8 Sia $\mathbf{x}(\lambda)$ una funzione continua a tratti per $\lambda \in \Lambda$ tale che $\mathbf{y}(\lambda) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\lambda)$, ed esista finito l'integrale:

$$\mathbf{Q} = \int_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{y}(\lambda) \mathbf{y}(\lambda)^H d\lambda$$

Allora, qualsiasi matrice \mathbf{V} , tale da soddisfare l'uguaglianza $\mathbf{Q} = \mathbf{V}\mathbf{V}^H$, soddisfa anche le ipotesi del teorema T.4.7 [53].

Dall'enunciato discendono alcune osservazioni di carattere prettamente matematico.

La condizione di esistenza e finitezza dell'integrale si traduce nella richiesta che il vettore delle misure $\mathbf{y}(\lambda)$ abbia energia finita per ogni $\lambda \in \Lambda$. Peraltro, \mathbf{Q} costituisce una matrice semi – definita positiva, ossia può essere sempre scomposta nel prodotto di due matrici del tipo $\mathbf{Q} = \mathbf{V}\mathbf{V}^H$.

All'atto pratico, sono possibili diverse realizzazioni della matrice \mathbf{V} : quella più consueta presenta sulle colonne gli autovettori di \mathbf{Q} , moltiplicati per le radici quadrate dei rispettivi autovalori.

4.13.4 Secondo stadio: conversione MMV – SMV

Il primo stadio ha permesso di individuare un sistema equivalente all'originale, ma basato sul paradigma MMV, invece che sul paradigma IMV. Nel secondo stadio, l'obiettivo finale è del tutto analogo, in quanto si cerca un'altra versione equivalente del sistema, basata però sul paradigma SMV.

Sarebbe semplicistico quanto infruttuoso adottare la medesima riduzione "esatta". In realtà, la strategia approntata da Eldar e Mishali ricorre a principi probabilistici ed evidenze sperimentali.

D.4.5 Una distribuzione di probabilità \mathcal{P} si dice assolutamente continua se qualsiasi valore nullo occorre con probabilità nulla [54]. In maniera equivalente, una distribuzione di probabilità \mathcal{P} si dice assolutamente continua se e solo se può essere rappresentata mediante l'integrale di una funzione densità integrabile [55].

Per esempio, la distribuzione gaussiana, o quella uniforme, presentano una funzione densità che è integrabile. Dunque entrambe sono assolutamente continue. Altrettanto non si può dire di alcune distribuzioni di probabilità singolari, come quella discreta.

La D.4.5 viene richiamata anche nel teorema alla base della conversione dal paradigma MMV a quello SMV.

T.4.9 Sia dato il sistema $\mathbf{y}(\Lambda) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\Lambda)$ basato sul paradigma MMV, dove $\mathbf{y}(\Lambda)$ è una matrice di dimensioni $m \times d$, \mathbf{A} è una matrice di dimensioni $m \times n$, $\mathbf{x}(\Lambda)$ è una matrice di dimensioni $n \times d$. Sia $\bar{\mathbf{x}}(\Lambda)$ l'unica soluzione k – sparsa del sistema e sia soddisfatta la condizione $\sigma(\mathbf{A}) \geq 2k$.

Sia \mathbf{a} un vettore, di dimensione d , i cui elementi siano tratti in maniera casuale da una distribuzione di probabilità assolutamente continua. Si definiscano i vettori, generati in maniera casuale, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\Lambda)\mathbf{a}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\Lambda)\mathbf{a}$.

Allora, considerando il sistema $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, basato sul paradigma SMV, sono valide le seguenti due osservazioni:

- 1) Per qualsiasi realizzazione di \mathbf{a} , $\bar{\mathbf{x}}$ è l'unica soluzione k – sparsa del sistema.
- 2) Il supporto coincide nei due casi SMV e MMV, ossia l'uguaglianza $\text{supp}(\bar{\mathbf{x}}) = \text{supp}(\bar{\mathbf{x}}(\Lambda))$ è verificata con probabilità unitaria [53].

L'enunciato descrive nei minimi dettagli il protocollo per combinare in un unico vettore \mathbf{y} le colonne della matrice $\mathbf{y}(\Lambda)$. A tal proposito, è doveroso sottolineare il ruolo fondamentale giocato dal vettore \mathbf{a} , i cui elementi fungono da coefficienti della combinazione lineare.

Paradossalmente, la realizzazione casuale si dimostra la migliore scelta possibile, dato che nessuna realizzazione deterministica garantisce con certezza di conservare il supporto. A suffragio di questa affermazione esistono numerose prove.

Un esempio lampante è offerto dall'adozione per \mathbf{a} di un vettore unitario, ossia i cui elementi siano tutti pari a 1. In tal caso, se anche ad una sola riga non nulla di $\mathbf{x}(\Lambda)$ corrisponde un valore nullo di $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\Lambda)\mathbf{a}$, la stima del supporto che se ne ricava è errata.

Di contro, l'adozione di qualsiasi realizzazione casuale di \mathbf{a} non altera il supporto del sistema di partenza.

4.14 Primi tentativi di implementazione

Visti i vantaggi prospettati nel suo enunciato, gli autori hanno cercato di implementare il T.4.9 nel modo più fedele ed efficiente possibile. In questa ottica, hanno approntato un algoritmo che si sviluppa in tre stadi operativi successivi.

Nel primo stadio, data la matrice delle misure $\mathbf{y}(\Lambda)$, se ne combinano opportunamente le colonne al fine di ottenere un singolo vettore \mathbf{y} . I coefficienti di tale combinazione altro non sono che realizzazioni casuali di una distribuzione di probabilità assolutamente continua.

Nel secondo stadio, a partire dal sistema risultante $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, basato sul paradigma SMV, si appronta una stima del supporto S del segnale originario.

Nel terzo e conclusivo stadio, l'inversione del sistema ridotto $\mathbf{y} = \mathbf{A}_S\mathbf{x}_S$ conduce alla soluzione definitiva.

4.14.1 Difficoltà e complicazioni

Sebbene si sia seguito accuratamente il teorema, questo algoritmo presenta ancora degli aspetti poco chiari. In particolare, il problema si rivela *NP-hard*, ossia intrattabile dal punto di vista computazionale.

La letteratura al riguardo propone molteplici tecniche risolutive sub – ottime, che, però, non godono di unanime consenso: da un lato, esse presentano tempi di esecuzione compatibili con le consuete esigenze della pratica sperimentale; dall'altro, non necessariamente restituiscono la soluzione più sparsa.

A tal proposito, un risultato empirico, sebbene non ancora formalizzato in modo rigoroso, può rivelarsi molto istruttivo. Si considerino due vettori k – sparsi $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}$. Entrambi presentano gli elementi non nulli nei medesimi indici, ma i valori assunti non necessariamente coincidono. In altri termini, si tratta di due vettori diversi con il medesimo supporto. Applicando la stessa tecnica sub – ottima ai sistemi $\mathbf{y} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{A}\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}$, non di rado capita di pervenire alla soluzione corretta solo in uno dei due casi, o addirittura in nessuno. Questo fenomeno è una prova evidente della mal posizione del problema.

4.15 Algoritmo ReMBo

Nel tentativo di risolvere le difficoltà presentatesi, gli autori hanno apportato delle modifiche all'algoritmo sino a pervenire alla stesura definitiva, cui hanno assegnato il nome di ReMBo, acronimo dell'espressione: *reduce MMV and boost*.

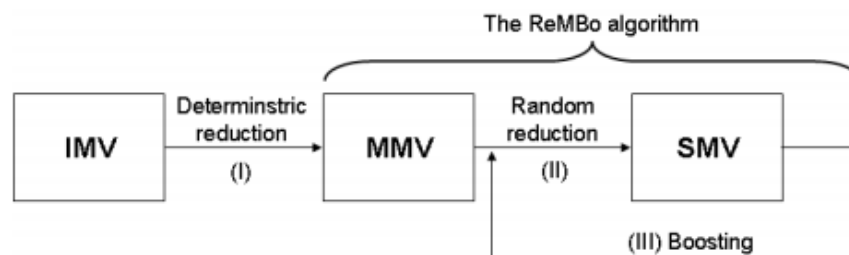


Figura 4.10 Schema concettuale dell'algoritmo ReMBo [53]

In pratica, il primo stadio operativo viene ripetuto iterativamente. Ad ogni ripetizione, si ottiene una nuova combinazione delle colonne di $\mathbf{y}(\Lambda)$. Al riguardo, il T.4.9 garantisce che il sistema risultante conserva

l'informazione sul supporto con probabilità unitaria. Pertanto, il procedimento iterativo non inficia la bontà dei risultati. Anzi, è ragionevole affermare che faciliti l'individuazione della soluzione effettivamente più sparsa.

4.15.1 Parametri operativi

L'algoritmo dispone di molteplici parametri, ma solo ad alcuni sono deputate le principali funzioni di controllo. Tra questi, in particolare, si citano: *MaxIters*, k e ϵ .

Algorithm 1 ReMBo (Reduce MMV and Boost)

Input: \mathbf{Y}, \mathbf{A}
Control Parameters: $K, \epsilon, \text{MaxIters}, \mathcal{S}, \mathcal{P}$
Output: $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathcal{S}}, \text{flag}$

- 1: Set iter= 1
- 2: Set flag=false
- 3: **while** (iter \leq MaxIters) and (flag is false) **do**
- 4: draw a random vector \mathbf{a} of length d according to \mathcal{P} .
- 5: $\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{a}$
- 6: Solve $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ using SMV technique \mathcal{S} . Denote the solution $\hat{\mathbf{x}}$.
- 7: $\hat{\mathcal{S}} = I(\hat{\mathbf{x}})$
- 8: **if** ($|\hat{\mathcal{S}}| \leq K$) and ($\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|_2 \leq \epsilon$) **then**
- 9: flag=true
- 10: **else**
- 11: flag=false
- 12: **end if**
- 13: Construct $\hat{\mathbf{X}}$ using $\hat{\mathcal{S}}$ and (10)-(11)
- 14: iter=iter+1
- 15: **end while**
- 16: **return** $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathcal{S}}, \text{flag}$

Figura 4.11 Sequenza delle principali operazioni dell'algoritmo ReMBo [53]

Il numero massimo delle iterazioni costituisce la condizione di arresto. Indipendentemente dai risultati raggiunti, *MaxIters* determina quante volte può essere ripetuta la conversione del sistema dal paradigma MMV al paradigma SMV.

I parametri k e ϵ non influenzano il primo stadio operativo, quanto piuttosto la validazione dei risultati. Infatti, la soluzione finale viene sottoposta a due generi di verifiche, prima di essere ritenuta esatta a tutti gli effetti.

La prima verifica riguarda la sparsità. In particolare si valuta il supporto della soluzione: se la sua cardinalità supera k , significa che la soluzione non è sufficientemente sparsa e non viene presa in considerazione.

La seconda verifica, invece, controlla l'aderenza alle misure disponibili. In tal senso, se la discrepanza tra andamento misurato e andamento ricostruito eccede la soglia ϵ , la soluzione deve essere scartata.

A seconda dei valori attribuiti ai parametri k e ϵ , vengono premiate la maggiore sparsità o la maggiore aderenza ai dati.

4.15.2 Il blocco CTF

All'interno del convertitore MWC esiste uno specifico blocco deputato alla progressiva riduzione dal paradigma IMV al paradigma SMV. Gli autori del progetto gli hanno attribuito il nome di blocco CTF, dove l'acronimo sta per *Continue To Finite*. La stessa denominazione tradisce la funzione del blocco, chiamato a

convertire un problema continuo, ossia con un numero infinito di incognite, in un equivalente problema discreto, ossia con un numero finito di incognite.

Nel caso specifico del convertitore MWC, la matrice \mathbf{Q} assume la seguente formulazione [27]:

$$\mathbf{Q} = \int_{f \in \mathcal{F}_s} \mathbf{y}(f) \mathbf{y}^H(f) df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{y}[n] \mathbf{y}^T[n]$$

In particolare, il vettore $\mathbf{y}[n]$ contiene i campioni relativi alla griglia di campionamento di passo $T_s = 1/f_s$. La matrice \mathbf{Q} non svolge un ruolo diretto nella procedura di ricostruzione, ma permette di identificare alcuni attori importanti, prima fra tutti la matrice \mathbf{V} .

In precedenza si è data grande rilevanza ai vantaggi di un'eventuale realizzazione casuale di \mathbf{Q} . All'atto pratico, invece, non si segue alcun principio di casualità. Comunque, grazie al vincolo di sparsità congiunta, il rango di \mathbf{V} non supera il valore limite $2N$ [56].

Una simile configurazione permette di limitare l'intervallo di variazione dell'indice della sommatoria: sono sufficienti appena $2N$ campioni linearmente indipendenti. Inoltre, solo in casi particolarmente rari, è necessario acquisirne un numero significativamente più grande per poter massimizzare il rango di \mathbf{V} [56]. Al di là di questi casi, definiti patologici, la sommatoria si riduce sempre da infinita a finita.

Una volta risaliti al supporto originale S , una semplice inversione matriciale porge l'espressione [27]:

$$\mathbf{z}_s[n] = \mathbf{A}_s^\dagger \mathbf{y}[n] \quad \text{dove} \quad \mathbf{z}_i[n] = 0, i \notin S$$

Le sequenze $\mathbf{z}_i[n]$ vengono generate alla stessa frequenza f_s del processo di campionamento e costituiscono la base di partenza per la definitiva ricostruzione del segnale originario. A tal proposito esistono due opzioni alternative.

4.15.3 Prima opzione

La prima opzione è percorribile solo se la frequenza di Nyquist del segnale originario è compatibile con le specifiche tecniche dei dispositivi elettronici adottati in sede di implementazione. In tal caso, si affrontano due stadi successivi di elaborazione: il primo digitale, il secondo analogico.

Nello stadio digitale, le sequenze $\mathbf{z}_i[n]$ vengono innanzitutto sottoposte a *zero padding* secondo lo schema:

$$\tilde{\mathbf{z}}_i[\tilde{n}] \begin{cases} \mathbf{z}_i[n] & \text{per } \tilde{n} = nL, n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Quindi, vengono interpolate alla frequenza di Nyquist da un ideale filtro digitale con risposta impulsiva $\mathbf{h}_l[n]$. Infine, il risultato viene modulato nel tempo e sommato fino a restituire le nuove sequenze:

$$\mathbf{x}[n] = \sum_{i \in S} (\tilde{\mathbf{z}}_i[n] * \mathbf{h}_l[n]) e^{2\pi i f_p n T}$$

Nello stadio analogico, è sufficiente adottare un filtro passa basso la cui frequenza di taglio sia pari a $1/2T$ per riportarsi nel dominio continuo del tempo e fornire una ricostruzione fedele del segnale originario $\mathbf{x}(t)$.

4.15.4 Seconda opzione

Nel caso in cui la prima opzione non sia percorribile, l'alternativa opera ad un livello esclusivamente analogico. Ciascuna sequenza $\mathbf{z}_i[n]$ attraversa un filtro passa basso con frequenza di taglio pari a $f_s/2$.

Il risultato è la sequenza $\mathbf{z}_i(t)$, continua e a valori complessi. A quel punto, la ricostruzione si riduce ad un'operazione di modulazione e somma delle componenti reale ed immaginaria, secondo la formula:

$$x(t) = \sum_{i \in \mathcal{S}, i \geq 0} \Re\{\mathbf{z}_i(t)\} \cos(2\pi i f_p t) + \Im\{\mathbf{z}_i(t)\} \sin(2\pi i f_p t)$$

Dall'esposizione di entrambe le opzioni emerge un comune aspetto in un certo senso inatteso. Nonostante la trattazione teorica sia stata svolta prevalentemente nel dominio della frequenza, le effettive operazioni di ricostruzione sono svolte esclusivamente nel dominio del tempo.

4.16 Architettura del convertitore MWC

Al termine di questa dettagliata analisi è possibile volgere uno sguardo d'insieme sull'intera architettura del convertitore MWC responsabile della procedura di ricostruzione e seguire il flusso dei dati attraverso le diverse fasi di elaborazione. Dato il carattere divulgativo del testo, la chiarezza e la comprensibilità dei concetti esposti risultano più importanti del livello di accuratezza raggiunto.

In tal senso, del progetto originale si presenta qui non tanto il disegno circuitale quanto piuttosto uno schema a blocchi che evidenzia concettualmente i principali nuclei operativi e le loro interconnessioni.

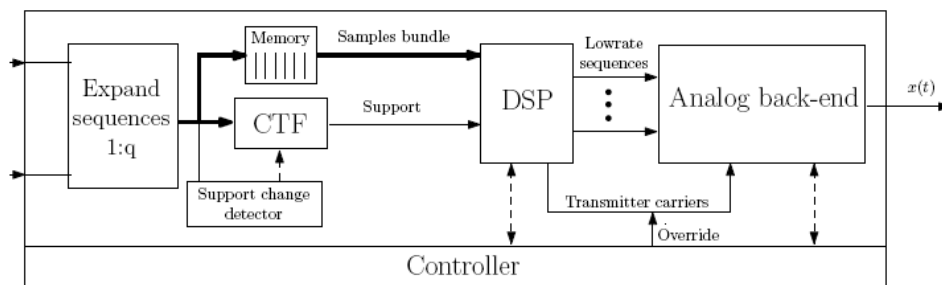


Figura 4.12 Schema a blocchi di un'architettura per la ricostruzione efficiente di un segnale multi – banda [27]

Il primo blocco rappresenta la possibilità di espandere le sequenze dei campioni mediante il fattore $q = f_s/f_p$. Ovviamente, si tratta di un passaggio attuato solo se e quando necessario. In condizioni normali, il rapporto assume valore unitario.

Proseguendo, l'unità di controllo ha il compito di attivare il blocco CTF in due specifiche situazioni: al momento dell'inizializzazione e ogniqualvolta si registri una variazione del supporto spettrale del segnale in ingresso. La ricostruzione del supporto è particolarmente onerosa e non sarebbe efficiente ripeterla ad ogni passaggio se il supporto non varia e si mantiene uguale a se stesso. Il riconoscimento delle eventuali variazioni può essere attuato secondo due approcci alternativi.

Il primo approccio prevede di approntare un dispositivo *ad hoc*, che operi in maniera separata dal blocco CTF. Agendo ad un livello superiore, il dispositivo esamina direttamente i dati prima che entrino nella

catena di elaborazione e qualora lo ritenga necessario invia un segnale all'unità di controllo che procede all'attivazione del blocco CTF.

Il secondo approccio, invece, non adotta dispositivi *ad hoc*, ma sfrutta in maniera opportuna quelli già inseriti nell'architettura. Infatti, individua le eventuali variazioni nelle sequenze $\mathbf{z}_i[n]$ con la seguente strategia. Dato il supporto originario S , lo si estende includendovi anche un generico indice j inizialmente non compreso al suo interno. In termini matematici, l'estensione può essere formalizzata dall'espressione

$$\tilde{S} = S \cup \{j\} \quad j \notin S$$

A quel punto è sufficiente tenere sotto controllo la sola sequenza $\mathbf{z}_j[n]$. Fintanto che il supporto resta immutato, $\mathbf{z}_j[n]$ è nulla o comunque assume valori trascurabili dovuti a rumore o disturbi vari. Se, invece, $\mathbf{z}_j[n]$ supera il valore di soglia per un numero prefissato di istanti successivi, il blocco CTF viene nuovamente attivato per aggiornare la stima del supporto spettrale.

I punti di forza di questa strategia sono di natura computazionale. Infatti, la ricostruzione della sola $\mathbf{z}_j[n]$ richiede di implementare un'unica riga della matrice $\mathbf{A}_{\tilde{S}}^\dagger$. Inoltre, l'accuratezza non deve essere assoluta, ma solo sufficiente a discriminare il superamento o meno del valore di soglia. Pertanto, la moltiplicazione $\mathbf{z}_j[n] = \mathbf{A}_{\tilde{S},j}^\dagger \mathbf{y}[n]$ può essere svolta anche a bassa risoluzione, ossia senza gravare eccessivamente sul carico computazionale.

Tornando al progetto del convertitore MWC, a valle del blocco CTF si situa il processore digitale. Questo blocco presenta una linea di uscita e due linee di ingresso.

Mediante la linea di uscita, fornisce una ricostruzione a bassa frequenza di ogni banda attiva all'interno dell'estensione spettrale.

Mediante le linee di ingresso, riceve la stima del supporto e le sequenze dei campioni. In particolare, la stima deriva direttamente dal blocco CTF, mentre le sequenze di campioni provengono da un'unità di memorizzazione parallela al blocco CTF. Una simile scelta progettuale può sembrare a prima vista più complessa del necessario. In realtà, è indispensabile nell'analisi in tempo reale dei segnali il cui supporto varia durante l'intervallo di osservazione. Infatti, l'aggiornamento della stima del supporto richiede necessariamente alcuni istanti, durante i quali il processore digitale non è in grado di effettuare alcun calcolo. Di conseguenza, la continuità del flusso dei dati verrebbe interrotta ad ogni variazione del supporto e qualsiasi tentativo di acquisizione in tempo reale risulterebbe vano. L'aggiunta di un'unità di memorizzazione, invece, risolve brillantemente la questione. Infatti, tale dispositivo conserva circa $2N$ esemplari delle sequenze dei campioni. Ad ogni aggiornamento, il processore non si arresta in attesa dei nuovi dati, ma utilizza la stima precedente e le sequenze memorizzate per continuare a fornire risultati in uscita. L'unica controindicazione è rappresentata da un piccolo ritardo tra la presentazione di una variazione in ingresso e la sua manifestazione in uscita. Si tratta comunque di sfasamenti impercettibili, che non inficiano l'affidabilità dell'analisi in tempo reale.

L'ultimo blocco è deputato all'effettiva ricostruzione del segnale originario. Nello specifico, si tratta di un terminale analogico che interpola le sequenze a bassa frequenza generate dal processore digitale.

Il governo dell'intera architettura spetta ad un'unità di controllo che assicura il corretto fluire dei dati da un blocco all'altro, ma è anche in grado di imporre la sola ricostruzione di alcune bande di interesse, senza necessariamente dover stimare l'intero supporto originario.

CAPITOLO V

Software di simulazione

5.1 Introduzione

Eldar e Mishali sono stati i primi a realizzare e collaudare un dispositivo per l'acquisizione dei segnali a banda larga, che operasse ben al di sotto della frequenza di Nyquist, in condizioni *spectrum blind*.

A corredo della loro proposta, i due studiosi hanno elaborato un duttile strumento virtuale di simulazione, che consentisse di comprendere a fondo le diverse fasi dell'algoritmo di ricostruzione. Così, la complicata architettura analogica del convertitore MWC è stata trasposta in un programma Matlab, che genera un plausibile segnale di interesse e lo ricostruisce. Il *software* non presenta particolari controindicazioni: i costi computazionali sono contenuti, i tempi di esecuzione ragionevoli.

Questa architettura digitale dimostra un notevole potenziale. L'ambiente virtuale di simulazione permette di effettuare un gran numero di prove, non sempre replicabili all'atto pratico. Allo scopo vengono definiti numerosi parametri, che quantificano l'incidenza delle grandezze o dei fenomeni di interesse.

Peraltro, in sede di valutazione dei risultati, il formato digitale dei dati costituisce un indubbio vantaggio. Seguendone il flusso lungo le diverse fasi dell'algoritmo, è possibile localizzare con estrema precisione dove si originano eventuali distorsioni o malfunzionamenti.

5.2 Il segnale di interesse

Il convertitore MWC è stato espressamente disegnato per acquisire segnali il cui supporto spettrale è sì esteso, ma anche sparso. Volendo attenersi, per quanto possibile, a tale modello concettuale, il programma genera un segnale la cui frequenza di Nyquist è pari a 10 GHz. Nondimeno, questa considerevole estensione spettrale è occupata da appena tre bande attive, il cui spessore non supera i 50 MHz.

Peraltro, data la natura reale del segnale, vale la simmetria hermitiana: l'aggiunta delle rispettive versioni coniugate fornisce un computo totale di sei bande attive.

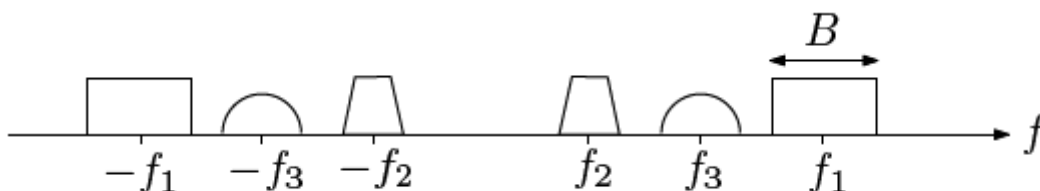


Figura 5.1 Andamento spettrale del segnale generato dall'architettura digitale

Così formulato, il segnale è un ottimo prototipo per lo studio delle comunicazioni a radiofrequenza. In tal senso, ogni banda attiva rappresenta una trasmissione, modulata per la relativa portante.

5.3 Organizzazione del codice

L'architettura digitale, deputata alla generazione e ricostruzione del segnale, è molto articolata. Per evitare disordine o incoerenza formale, gli autori l'hanno suddivisa in nove sezioni. Ciascuna di esse svolge una specifica funzione, dalla definizione della frequenza di Nyquist alla presentazione dei risultati.

Nel prosieguo della trattazione si procede in modo sequenziale, evidenziando di volta in volta i passaggi più salienti e i parametri più significativi.

5.4 Modello del segnale

La prima porzione del codice è dedicata ai dettagli realizzativi del segnale. In quest'ottica vengono introdotti diversi parametri, tra cui la frequenza di Nyquist, il numero, l'estensione spettrale, l'energia e la localizzazione temporale delle bande attive.

Parallelamente, viene definita la finestra di osservazione. Questo aspetto, all'apparenza così banale, merita particolare attenzione: la sua implementazione, infatti, si ripercuote su molte delle successive operazioni.

L'introduzione di quattro parametri *ad hoc* consente di formulare la lunghezza complessiva del segnale mediante una semplice espressione algebrica: $R * (K + K_0) * L$, per un totale di 19695 campioni.

Ogni parametro riveste una funzione specifica nell'ambito dell'algoritmo. Gli indici K e K_0 suddividono la finestra di osservazione in due porzioni distinte: i primi $R * K * L$ campioni sono destinati al segnale vero e proprio, la restante parte viene colmata mediante *zero padding*. Il significato dei parametri L ed R viene chiarito in seguito.

5.4.1 Parametri di campionamento

Lo stadio di campionamento del segnale si avvale di un *mixer* a 50 canali. Una simile implementazione gode di notevoli vantaggi, come è emerso nella trattazione dell'architettura analogica.

In quest'ottica, il già citato parametro L rappresenta un fattore di sottocampionamento. Infatti, adottando una frequenza di campionamento inferiore a quella di Nyquist è inevitabile incorrere in sovrapposizioni e alterazioni del contenuto spettrale del segnale dovute ad *aliasing*, la cui entità è stabilita proprio dal parametro L . Nel caso specifico, il codice gli attribuisce un valore piuttosto elevato: 195.

Ogni canale adotta una frequenza di campionamento pari a: $q * (f_{Nyq} / L)$. Il fattore dispari q può così introdurre un ulteriore grado di libertà. Tipicamente, assume valore unitario, divenendo a tutti gli effetti trascurabile. All'occasione, però, incrementandone il valore, si può ridurre il numero complessivo dei canali. In questa porzione di codice, vengono approntate anche le cosiddette sequenze di *mixing* a segno alterno. Allo scopo, la piattaforma Matlab dispone di un'apposita funzione: *randsrc* permette di generare sequenze di scalari che assumono il valore $+1$ e -1 con la medesima probabilità.

5.4.2 Rappresentazione del segnale

L'andamento sparso nel dominio della frequenza è un requisito imprescindibile per il buon esito della simulazione. In quest'ottica, la scelta è ricaduta sulla funzione *sinc*, la cui trasformata di Fourier è ben

circoscritta e forma un impulso rettangolare. Così, il segnale viene costruito come la somma di tre funzioni *sinc*, ciascuna dotata di una specifica energia e modulata con una specifica portante sinusoidale. Lo spettro che se ne ricava presenta sei intervalli di frequenza, disposti a coppie simmetriche rispetto all'origine.

Nel definire le frequenze delle portanti, si ricorre ad una procedura pseudo – casuale. I vincoli cui attenersi sono appena due: non bisogna oltrepassare la soglia massima $f_{Nyq} / 2$; ogni frequenza deve distare dalle altre di almeno $B/2$, per evitare indesiderate sovrapposizioni spettrali.

Per facilitare l'interpretazione dei grafici, il codice interpone una certa distanza fra le tre funzioni *sinc* nel dominio del tempo. In realtà, questa premura non incide sulla bontà dei risultati: l'algoritmo ricostruisce perfettamente l'istante di occorrenza delle varie componenti, anche nelle condizioni più sfavorevoli.

Prima di procedere allo *zero padding*, il segnale viene moltiplicato per una finestra di Hanning, il cui profilo temporale esibisce un caratteristico andamento a campana rovesciata. In questo modo, i dati risultano più verosimili visto che i segnali considerati risultano a durata limitata.

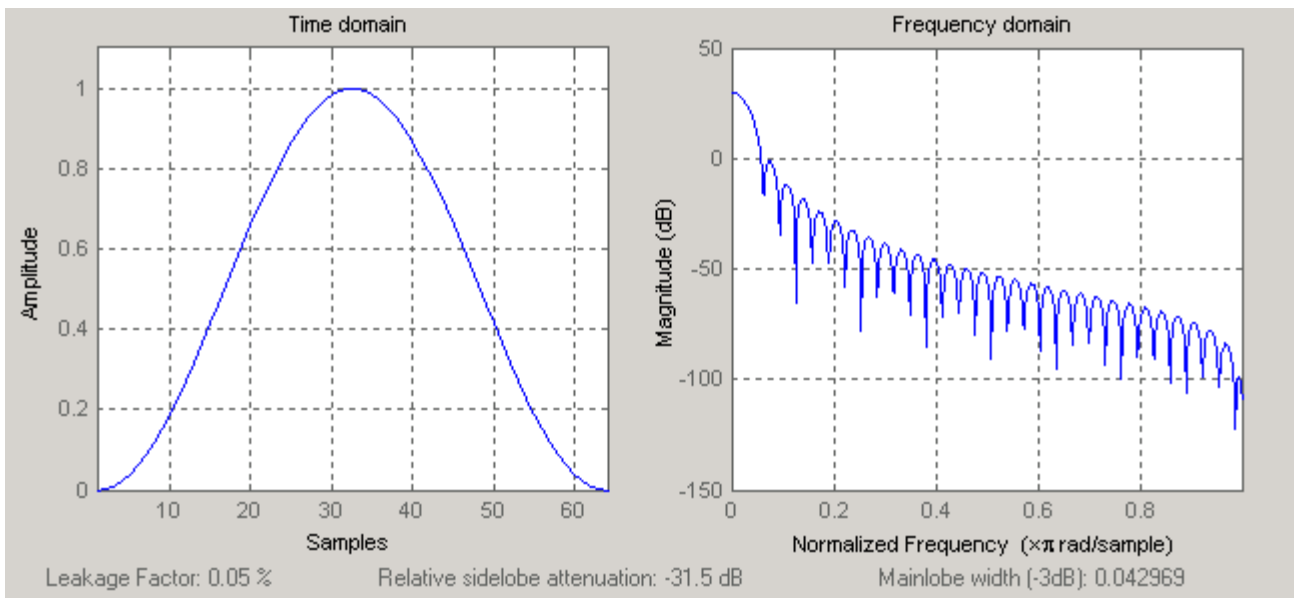


Figura 5.2 Tipici andamenti di una finestra di Hanning: a sinistra, nel dominio del tempo; a destra, nel dominio della frequenza

In vista della verifica finale, il programma appronta il supporto del segnale generato. In altri termini, memorizza gli indici iniziali e finali delle sei componenti rettangolari in frequenza. La medesima operazione viene, poi, ripetuta sullo spettro del segnale ricostruito. Un semplice confronto dei due insiemi determina l'esito favorevole o contrario dell'intero algoritmo.

Queste osservazioni trovano un immediato riscontro nei grafici dell'andamento temporale e spettrale del segnale generato. In particolare, nel dominio del tempo, si sottolineano la configurazione imposta dall'adozione delle funzioni *sinc* e gli effetti dell'applicazione della finestra di Hanning. Nel dominio della frequenza, invece, spicca l'andamento perfettamente rettangolare delle sei componenti.

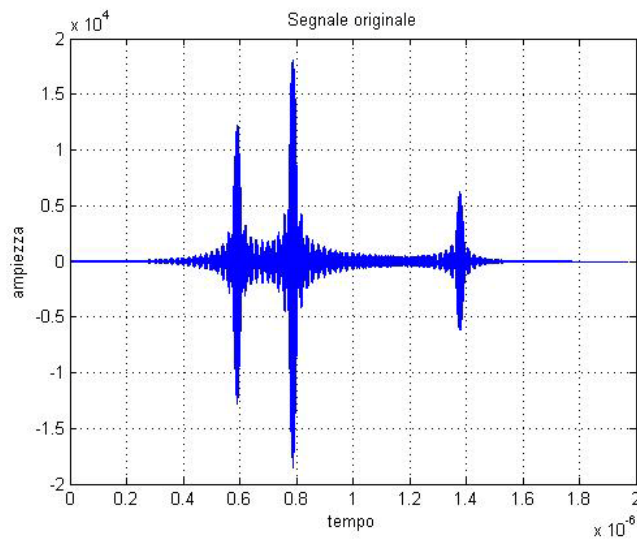


Figura 5.3 Andamento temporale del segnale generato

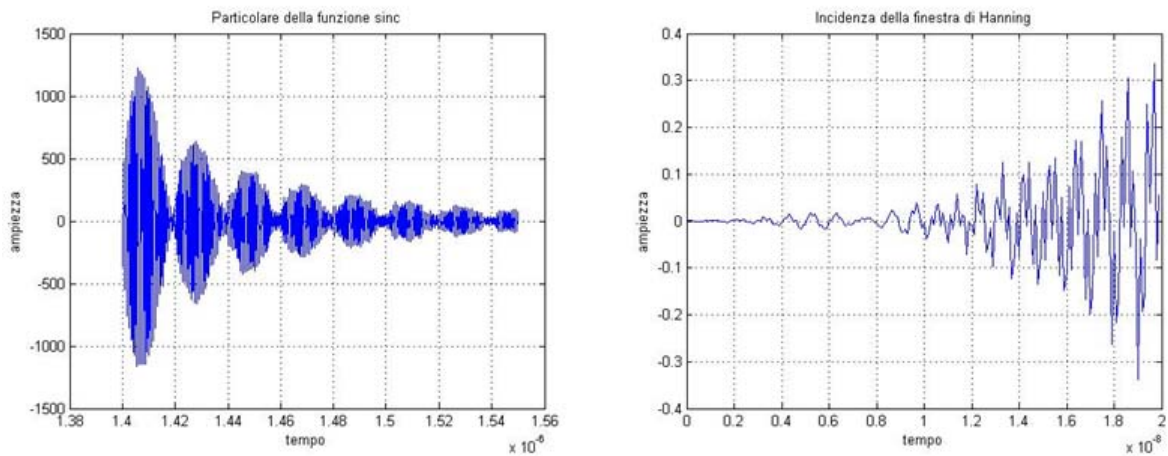


Figura 5.4 Due particolari: a sinistra, una porzione di funzione *sinc* al termine della modulazione; a destra, l'effetto di attenuazione in corrispondenza dei primi campioni dovuto all'applicazione della finestra di Hanning

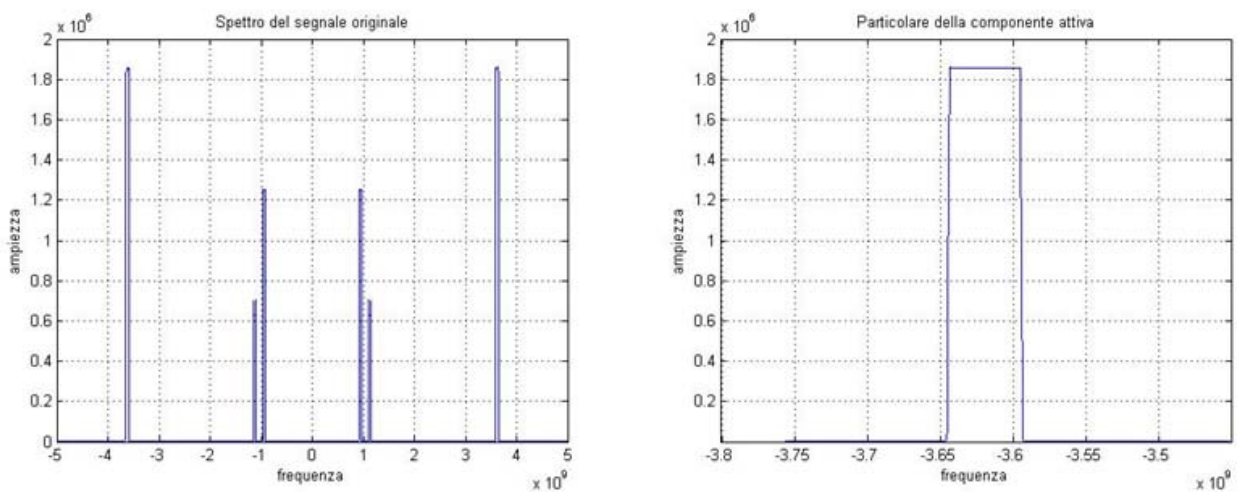


Figura 5.5 A sinistra, andamento spettrale del segnale generato; a destra, particolare del profilo rettangolare delle bande attive

5.4.3 Generazione del rumore

All'atto pratico, non esiste acquisizione del tutto immune da componenti rumorose o interferenze esterne. In quest'ottica, il codice prevede una sequenza di rumore bianco Gaussiano, che abbia la stessa lunghezza del segnale di interesse. Allo scopo viene adottata la funzione *randn*, che restituisce valori scalari tratti da una distribuzione normale con media 0 e deviazione standard 1.

Curiosamente, la scelta degli autori prevede di elaborare in forma separata il segnale di interesse e il rumore. Una volta effettuato il campionamento, le due componenti vengono sommate e possono essere inviate all'algoritmo di ricostruzione.

5.5 Fase di misura

Nel cosiddetto stadio di *mixing*, il segnale e il rumore vengono moltiplicati per le sequenze a segno alterno. Allo scopo, il codice si avvale della funzione *MixSignal*, approntata per l'occasione dagli stessi autori.

I risultati che se ne ricavano sono ambivalenti. Il profilo temporale non si discosta molto da quello originale; al contrario, lo spettro appare irricognoscibile e privo di qualsiasi sparsità. Infatti, l'operazione di *mixing* distorce il supporto originale, in modo tale che ciascuna componente attiva venga riproposta in banda base.

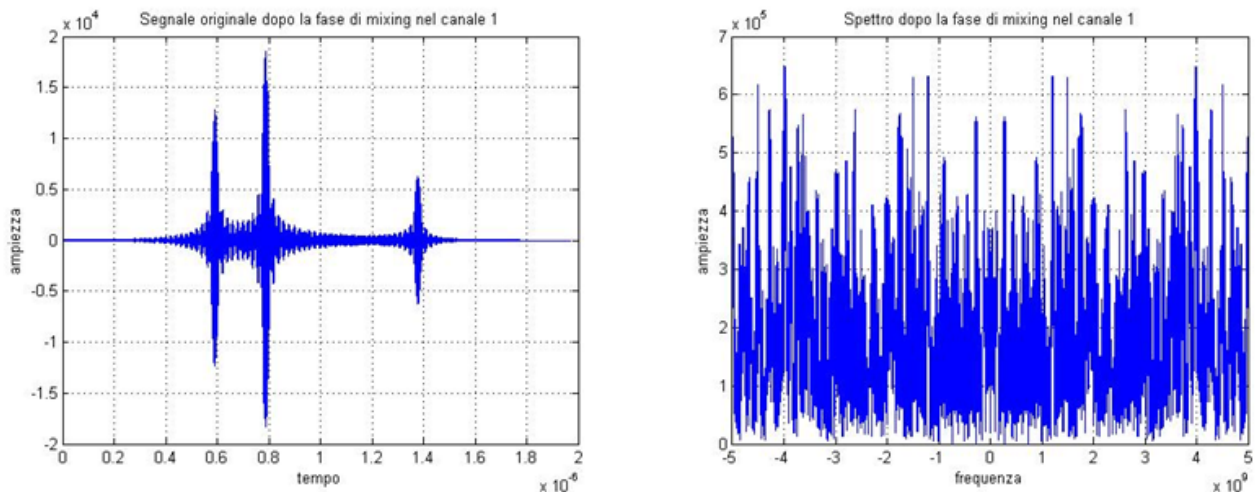


Figura 5.6 Risultati dell'operazione di *mixing* nel canale 1: a sinistra, l'andamento temporale; a destra, quello spettrale

5.5.1 Filtraggio passa – basso ed effettivo campionamento

In ogni canale, a valle dello stadio di *mixing*, il segnale e il rumore vengono sottoposti a due ulteriori elaborazioni, un filtraggio passa – basso e una decimazione, ossia vengono campionati in banda base.

Nel realizzare la risposta impulsiva, gli autori intendono attenersi, ove possibile, all'andamento ideale dei filtri passa – basso. Così, approntano un vettore nullo, composto da appena $K + K_0$ campioni. Dopo aver attribuito valore unitario al primo campione, procedono all'interpolazione sull'intero asse dei tempi e alla normalizzazione per il fattore R/L .

Il profilo risultante soddisfa pienamente le esigenze del codice. Nel dominio della frequenza, la banda passante è circoscritta ad uno stretto intorno dell'origine. Peraltro, i fronti di salita sono piuttosto ripidi, ossia il filtro dimostra una pregevole selettività.

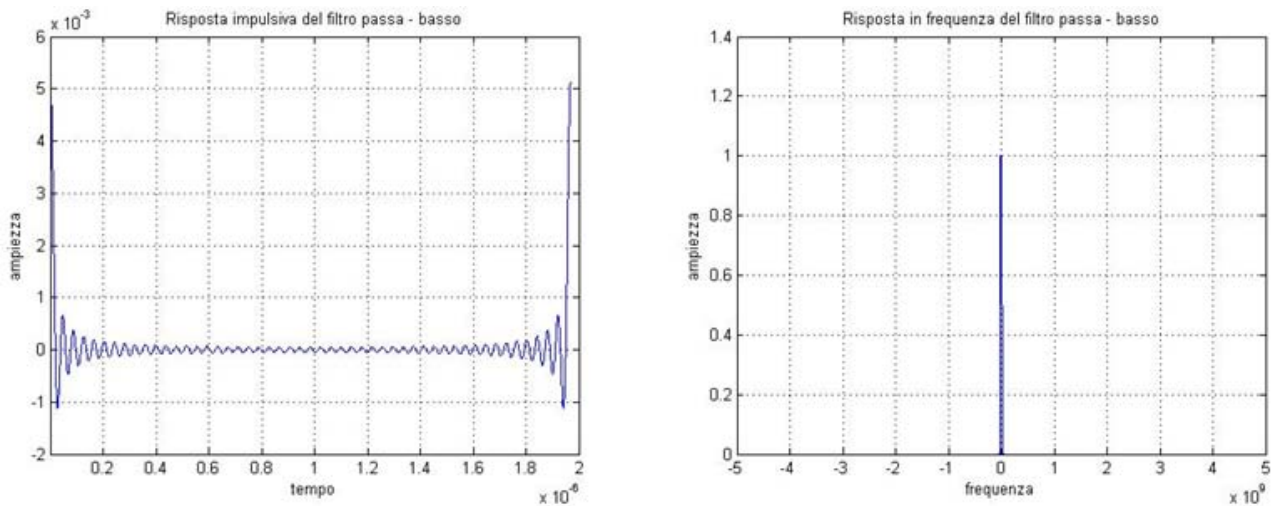


Figura 5.7 Filtro passa – basso: a sinistra, risposta impulsiva; a destra, risposta in frequenza

Approntato il filtro, gli autori definiscono un fattore di decimazione, pari a $R * L$. Il guadagno in termini computazionali è notevole: basti considerare che ogni canale riceve un segnale di 19695 campioni e ne acquisisce appena 101.

5.6 Fase di ricostruzione

La successiva porzione di codice è dedicata all'implementazione del blocco CTF, fulcro dell'intero algoritmo di ricostruzione.

Attenendosi fedelmente all'impianto teorico del convertitore MWC, la matrice del sistema viene formulata come la complessa coniugata del prodotto: $S * F * D$, come indicato al paragrafo 4.10.2. Entrando maggiormente nel dettaglio, S contiene nelle proprie righe le varie sequenze di *mixing* a segno alterno, F è una derivazione della trasformata discreta di Fourier, D è un'opportuna matrice diagonale.

Parallelamente, il teorema T.4.8 individua una plausibile realizzazione di Q nella matrice di autocorrelazione dei campioni. Allo scopo, in ogni canale vengono sommati i campioni relativi al segnale e al rumore, questi ultimi pesati per il rapporto SNR desiderato dall'utente (il codice gli attribuisce un valore di 10 dB). Raccolti i diversi vettori in un'unica matrice, se ne calcola l'autocorrelazione.

Proprio questo aspetto garantisce un'estrema sensibilità nei confronti degli istanti di occorrenza delle tre funzioni *sinc*. Per definizione, infatti, ogni sequenza di *mixing* differisce da tutte le altre. Disponendo di ben 50 varianti, anche il minimo spostamento lungo l'asse dei tempi non passa inosservato e altera, in modo significativo, la matrice Q . Così, nonostante la decimazione, l'algoritmo mantiene inalterato il proprio potere risolutivo: è in grado di distinguere variazioni dell'ordine T_{nyq} .

Lo stesso teorema T.4.8 afferma che qualsiasi matrice V , tale da soddisfare l'uguaglianza $Q = VV^H$, soddisfa ipotesi del teorema T.4.7, ossia garantisce un'unica soluzione al problema di ricostruzione.

All'atto pratico, esistono molteplici realizzazioni di V , tutte egualmente ammissibili. Nel caso specifico, gli autori optano per una matrice che presenti sulle colonne gli autovettori di Q , opportunamente pesati per le radici dei rispettivi autovalori.

In tal senso, la struttura sparsa del segnale consente una netta semplificazione del codice: non tutti gli autovettori partecipano alla costruzione di V , bensì solo quelli più significativi. Allo scopo, si determina il numero di autovalori che superano la soglia minima posta al valore di $5 * 10^{-8}$: generalmente, si tratta di una cifra molto contenuta, in caso contrario il codice fissa il limite superiore a $2 * N$.

Disponendo di tutti gli elementi necessari, il codice procede alla ricostruzione del supporto spettrale, mediante un algoritmo *greedy* ispirato al protocollo OMP. La configurazione quanto mai sparsa e regolare esibita dal segnale esalta le prestazioni di un simile schema operativo. Infatti, le bande attive assomigliano molto a delle semplici righe spettrali. L'algoritmo così ha gioco facile: ad ogni iterazione, ricostruisce la componente spettrale più plausibile.

Peraltro, la scelta di considerare i soli autovettori più significativi comporta una notevole riduzione del rumore sovrapposto. Tipicamente, tali componenti indesiderate sono associate ad autovalori di minima entità: trascurarli equivale ad un algoritmo di *noise reduction*. In verità, non è poi così facile conseguire risultati simili mediante filtraggio o altre tecniche di elaborazione digitale.

Entrando maggiormente nel dettaglio, gli autori hanno elaborato un'apposita funzione, dal nome *RunOMP_Unnormalized*. La sua invocazione prevede un corposo numero di argomenti: le matrici A e V , una variabile logica che sancisce la simmetria o meno del supporto e tre valori di soglia.

La natura iterativa dell'algoritmo necessita, infatti, di un criterio di arresto. L'attenzione si concentra su tre elementi: il numero di iterazioni, la norma $-l_2$ del vettore dei residui, il rapporto tra quest'ultimo valore e la norma $-l_2$ della soluzione corrente. Nel caso specifico, i tre valori di soglia vengono fissati rispettivamente a: 6, 0 e 0.01.

Al termine della procedura iterativa, la funzione restituisce una stima del supporto originale. La valutazione dei risultati si avvale di due criteri, di immediata verifica. Da un lato, le colonne di A , i cui indici siano contenuti nel supporto stimato, devono essere linearmente indipendenti. Dall'altro, in termini insiemistici, il supporto stimato deve essere contenuto nel supporto originale.

5.6.1 Ricostruzione del segnale

Disponendo finalmente di una stima del supporto, il codice può procedere all'effettiva ricostruzione del segnale. L'inversione del sistema di misura richiede alcuni semplici passaggi.

La matrice A_S è composta dalle sole colonne di A , i cui indici siano contenuti nel supporto. Calcolatane la pseudo – inversa mediante la funzione *pinv*, la si moltiplica per i campioni ottenuti nel *mixer*.

In perfetta analogia con la generazione del segnale, l'algoritmo si conclude con la modulazione di ciascuna banda attiva per la corrispondente portante. Allo scopo, l'onda sinusoidale viene espressa nella forma di un esponenziale complesso, mentre le frequenze sono ricavate dal supporto stimato. Evidentemente, tale operazione restituisce un vettore di valori complessi: ai fini della rappresentazione grafica, se ne considera la sola parte reale.

5.6.2 Grafici finali

Il programma di simulazione produce a video tre grafici significativi. Nel primo viene raffigurato l'andamento temporale del segnale originale. Nel secondo gli si sovrappone la componente rumorosa a testimoniare l'effettiva incidenza delle componenti indesiderate. Nel terzo si propone la ricostruzione.

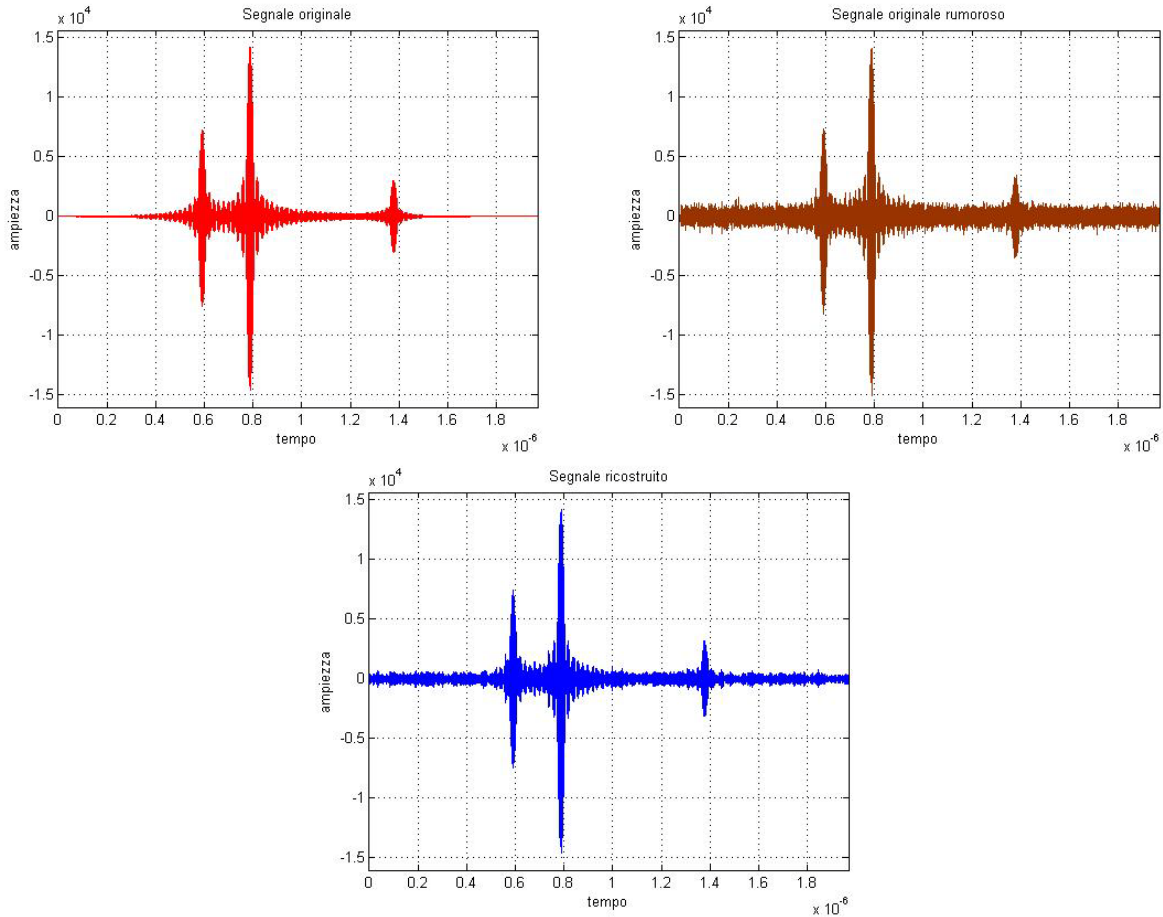


Figura 5.8 Grafici restituiti dal programma di simulazione

La ricostruzione si dimostra affidabile anche nel dominio della frequenza. Le bande attive risultano centrate nelle medesime frequenze.

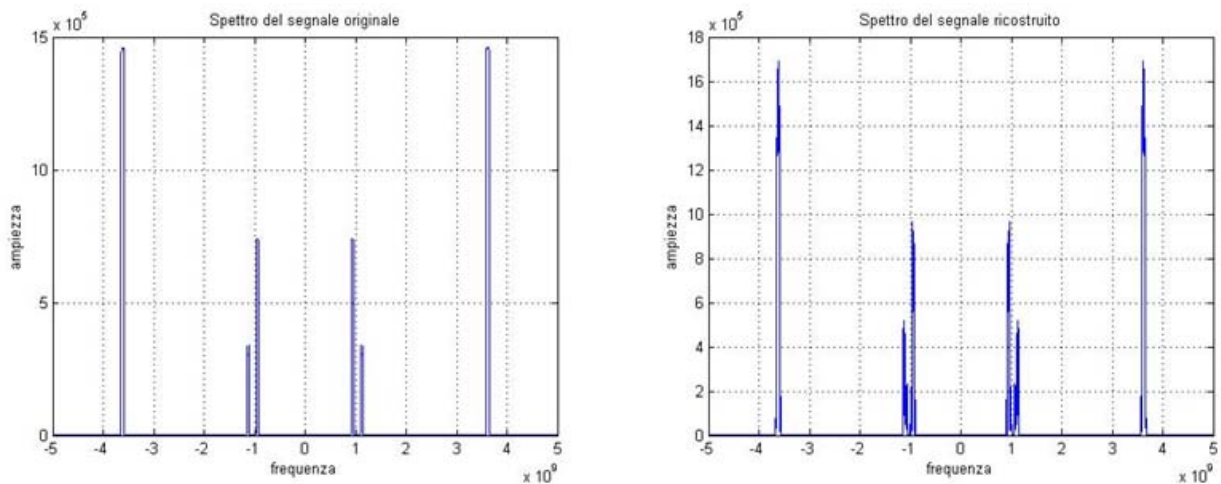


Figura 5.9 Andamento nel dominio della frequenza: a sinistra, del segnale originale; a destra, del segnale ricostruito

Il profilo non è esattamente rettangolare, ma si mantiene entro i limiti di una tollerabile variabilità.

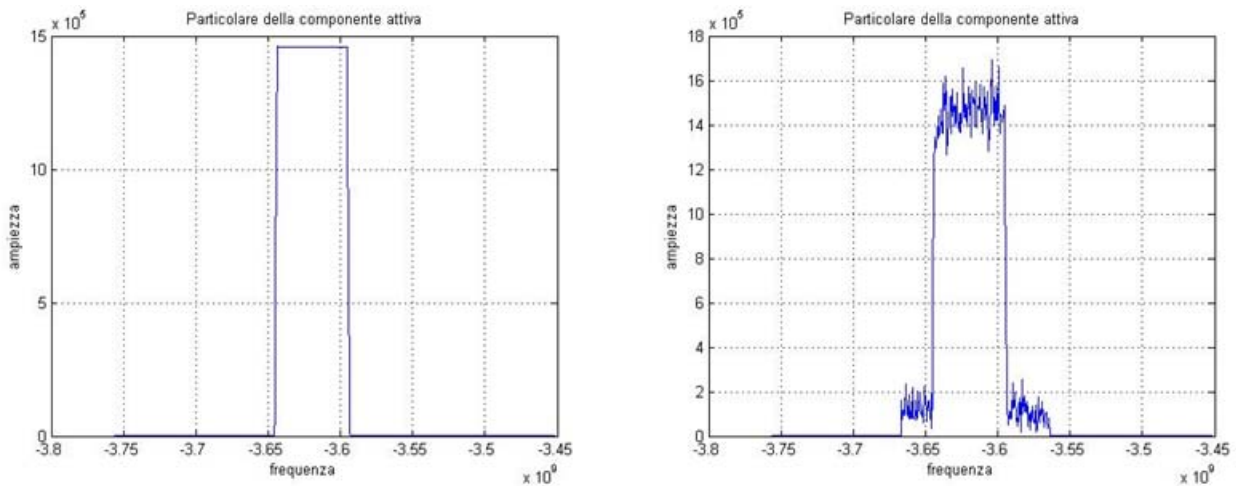


Figura 5.10 Confronto di due bande attive: a sinistra, nello spettro originale; a destra, nello spettro ricostruito

5.7 Valutazione dell'algoritmo di simulazione

Gli autori hanno presentato questa architettura digitale come un pregevole supporto nella valutazione delle prestazioni algoritmiche. In effetti, l'ambiente di simulazione si dimostra molto particolareggiato e duttile. Un'attenta e capillare parametrizzazione offre all'utente la possibilità di intervenire su molteplici aspetti. Basti considerare i criteri di arresto dell'algoritmo di ricostruzione: agendo opportunamente sui valori di soglia, si può incentivare la sparsità piuttosto che l'aderenza ai dati del supporto ricostruito.

D'altro canto, l'analisi dettagliata del codice ha portato alla luce anche delle evidenti discrepanze rispetto all'effettiva realtà sperimentale. Due aspetti, in particolare, balzano agli occhi: la generazione del segnale originale e l'elaborazione della componente rumorosa.

5.7.1 Segnale originale

In sede di presentazione del problema, si è assunto il modello \mathcal{M} come riferimento nella generazione del segnale. Una simile decisione è avvalorata dalle evidenze sperimentali: le trasmissioni a radiofrequenza sono un ottimo esempio di segnali sparsi nel dominio della frequenza.

Evidentemente, in tal senso, la scelta appare ineccepibile. D'altro canto, pur di massimizzare le prestazioni dell'algoritmo, si rischia di perdere di vista l'effettiva realtà con cui ci si deve confrontare.

A conferma di quanto affermato, la funzione *sinc* costituisce un modello esclusivamente teorico. Un simile andamento non trova riscontro in alcun fenomeno fisico conosciuto. Pertanto, la sua adozione come profilo temporale delle tre bande attive è del tutto inverosimile.

Al contrario, attenendosi all'ambito dei segnali RF, ogni pacchetto di informazioni esibisce un più plausibile profilo di tipo rettangolare o trapezoidale. Trovandosi ad operare in un contesto non ideale, le variazioni non possono essere istantanee, ma devono seguire un andamento più dolce e graduale.

Inevitabilmente, queste modifiche si riflettono anche sul contenuto spettrale del segnale. La stretta banda rettangolare lascia il posto ad un profilo molto più espanso e frastagliato. In particolare, si distinguono dei lobi laterali, la cui ampiezza decresce mano a mano che ci si allontana dalla frequenza centrale.

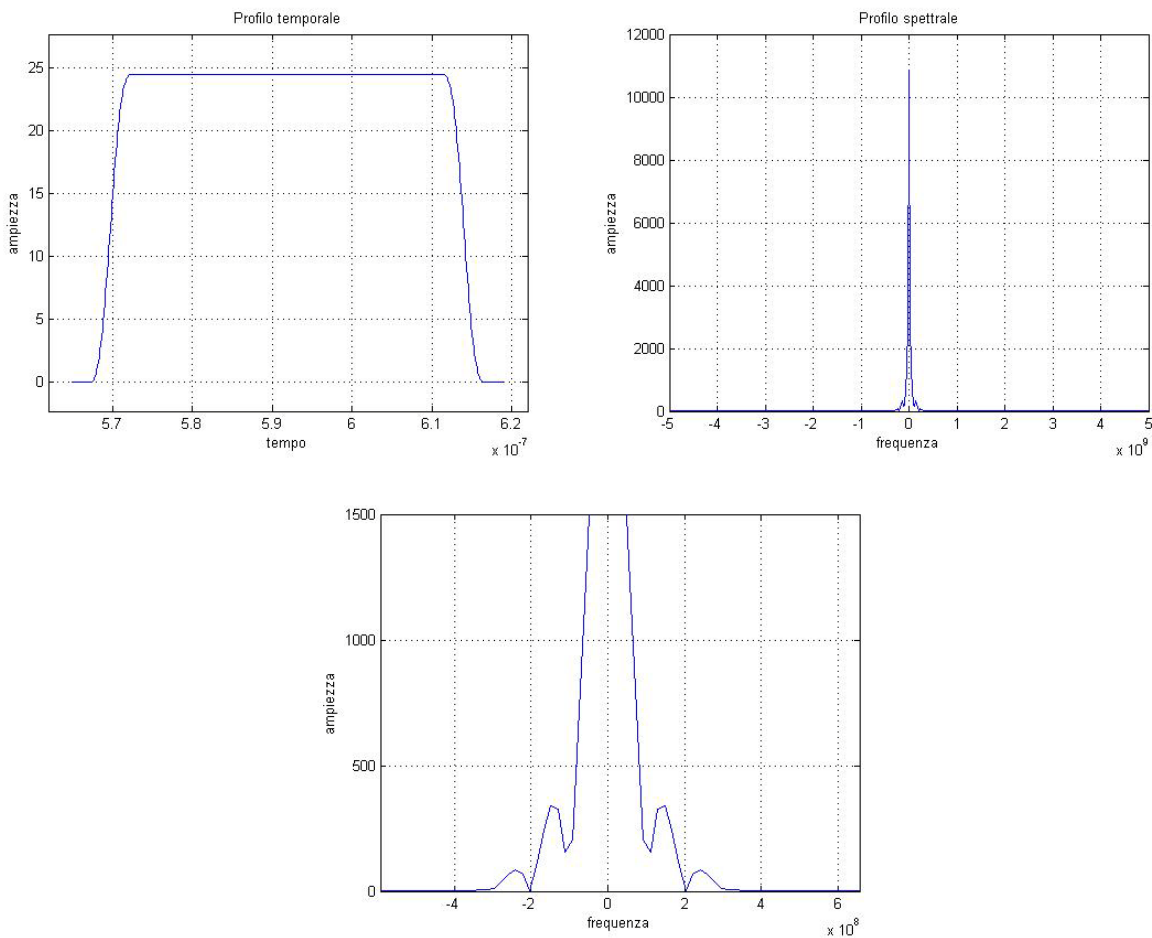


Figura 5.11 Sopra, il plausibile andamento di un pacchetto nel dominio del tempo (a sinistra) e della frequenza (a destra)
Sotto, un particolare del profilo spettrale

In questo contesto, un esempio altrettanto significativo è costituito dai segnali WLAN. Si tratta, peraltro, di un argomento molto attuale, vista l'ampia diffusione negli odierni ambienti di lavoro.

Nel dominio della frequenza, il profilo è piuttosto compatto e occupa interamente la banda dedicata alle comunicazioni *wireless*. La natura del segnale spesso si presta anche alla quantificazione di fenomeni quali depolarizzazione, *fading* o attenuazione. Allo scopo, si pongono a confronto misure spettrali effettuate in condizioni opposte: da una parte, lo spettro acquisito in una camera anecoica; dall'altra, lo spettro acquisito in un ambiente reale, soggetto a diverse forme di degradazione.

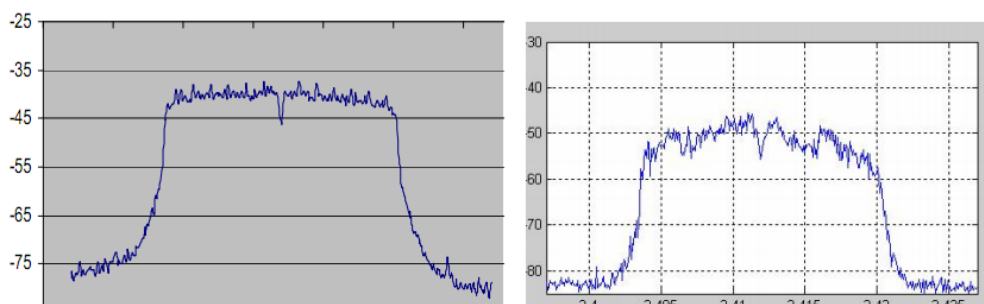


Figura 5.12 Profilo spettrale di un segnale WLAN: a sinistra, in una camera anecoica; a destra in un ambiente soggetto a degradazioni

5.7.2 Componente rumorosa

Nell'implementare la fase di *mixing*, gli autori attuano una scelta curiosa: segnale e rumore vengono elaborati separatamente, per essere sovrapposti solo al termine dell'effettivo campionamento.

Indubbiamente, un simile approccio consente di apprezzare gli effetti delle singole operazioni. Nondimeno, è del tutto irrealizzabile all'atto pratico. In linea di principio, è preferibile inviare al *mixer* un segnale già corrotto dal rumore bianco Gaussiano. Peraltro, le prestazioni non ne risentono in maniera significativa. Tralasciati i casi critici ove il rumore è preponderante sul contenuto informativo, la matrice Q non differisce molto rispetto all'implementazione precedente.

5.8 Prove di simulazione

Sotto certi aspetti, la pratica sperimentale presenta un quadro della situazione nettamente diverso da quello ipotizzato da Eldar e Mishali nella stesura del codice. Con l'intento di riprodurre condizioni di utilizzo più verosimili, si sono apportate delle modifiche al segnale di interesse. Applicando, poi, il medesimo algoritmo di ricostruzione, se ne può misurare l'effettiva duttilità.

5.8.1 Nuovo modello del segnale

Nel dominio del tempo, il segnale si immagina composto da tre impulsi rettangolari, i cui fronti siano addolciti dalla convoluzione per un'opportuna finestra di Hanning. I rispettivi istanti di occorrenza sono tali da evitare fenomeni di sovrapposizione o adiacenza. Tale scelta non introduce alcun vantaggio dal punto di vista algoritmico, ma consente una più immediata interpretazione dei risultati grafici.

Per quanto riguarda, invece, il dominio della frequenza, i singoli impulsi sono modulati per una portante sinusoidale, la cui frequenza viene generata in maniera pseudo – casuale nell'intervallo $[0, f_{Nyq}/2]$.

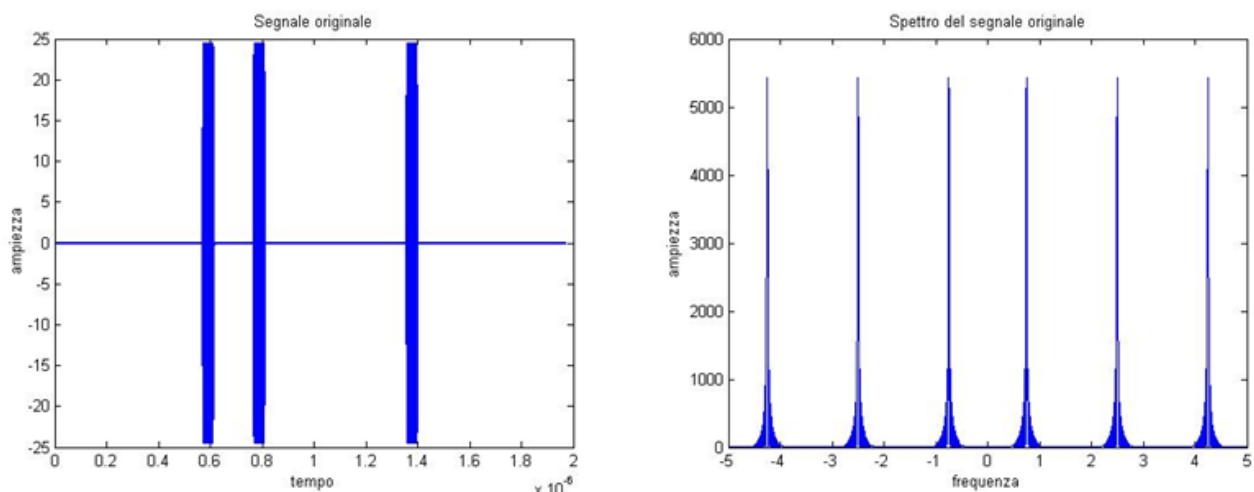


Figura 5.13 Esempio di segnale più verosimile: le frequenze di modulazione sono **0.75, 2.5 e 4.25 GHz**

L'adozione di un modello più verosimile pone lo sperimentatore di fronte a nuovi quesiti e problemi da risolvere. In tal senso, particolare attenzione va riservata alla ricostruzione del supporto spettrale. Il profilo non più rettangolare incide sui risultati dell'algoritmo? Eventuali sovrapposizioni degradano le prestazioni?

Al fine di rispondere a simili domande, si sono effettuate molteplici simulazioni. Dai risultati qui proposti emerge un quadro più che confortante: il protocollo approntato da Eldar e Mishali si dimostra affidabile anche in condizioni apparentemente critiche.

5.8.2 Condizioni generiche

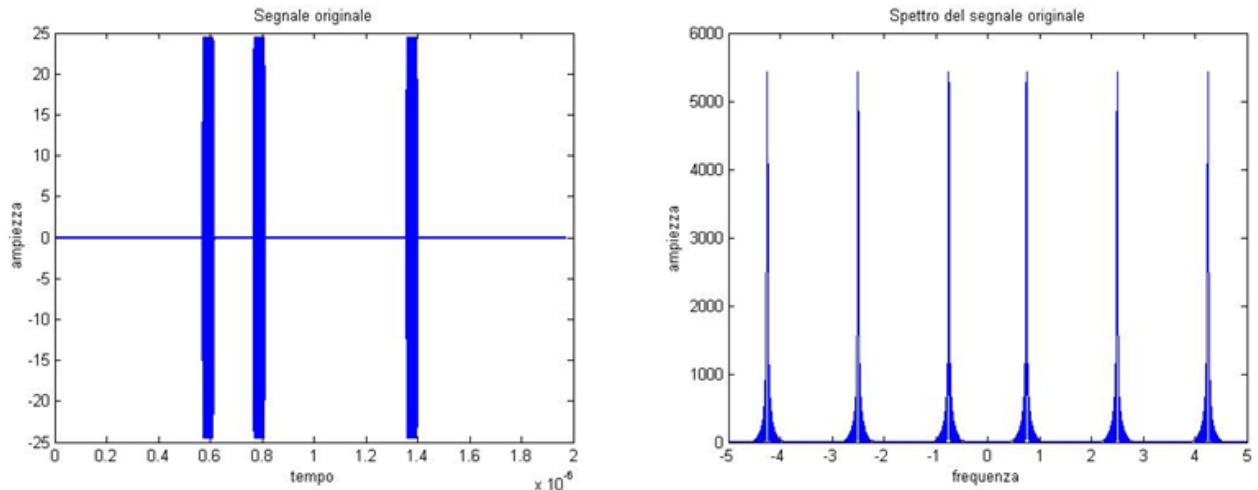


Figura 5.14 Segnale originale: a sinistra, profilo nel dominio del tempo; a destra, profilo nel dominio della frequenza

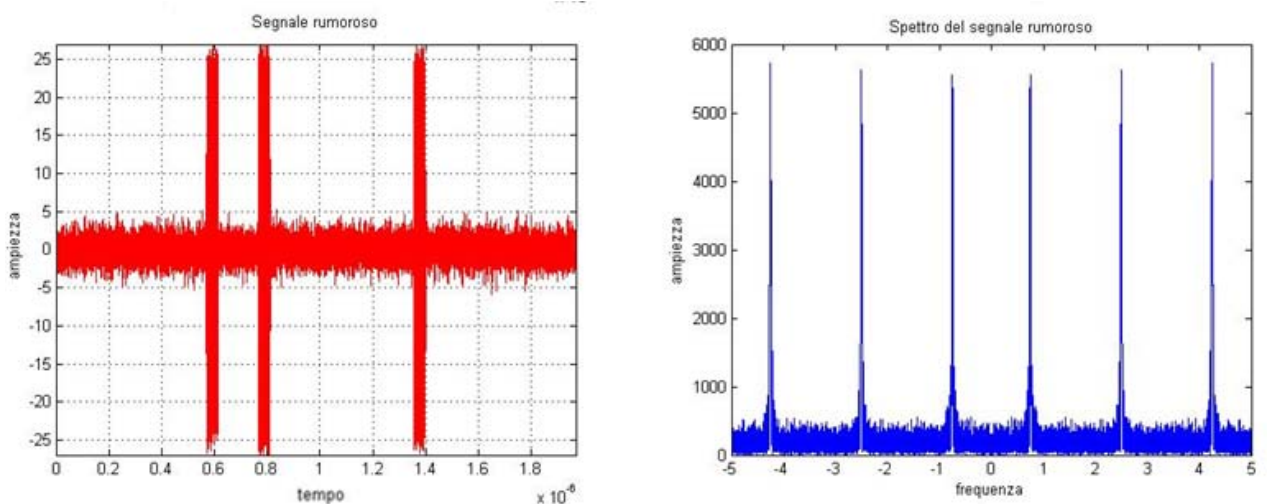


Figura 5.15 Sovrapposizione del rumore bianco Gaussiano con SNR pari a 10

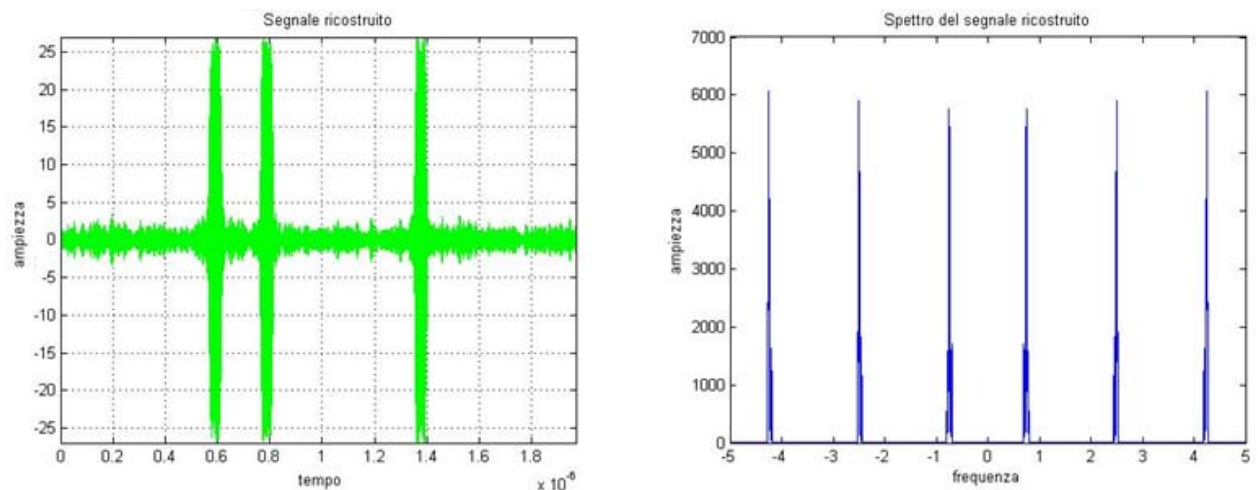


Figura 5.16 Ricostruzione: a sinistra, nel dominio del tempo; a destra, nel dominio della frequenza

Senza introdurre alcuna ulteriore difficoltà, l'algoritmo restituisce ottimi risultati: nel dominio del tempo, gli istanti di occorrenza sono ricostruiti con precisione; nel dominio della frequenza, le componenti esibiscono ancora un improbabile profilo rettangolare, ma sono centrate nelle frequenze delle rispettive portanti.

5.8.3 Sovrapposizioni in frequenza

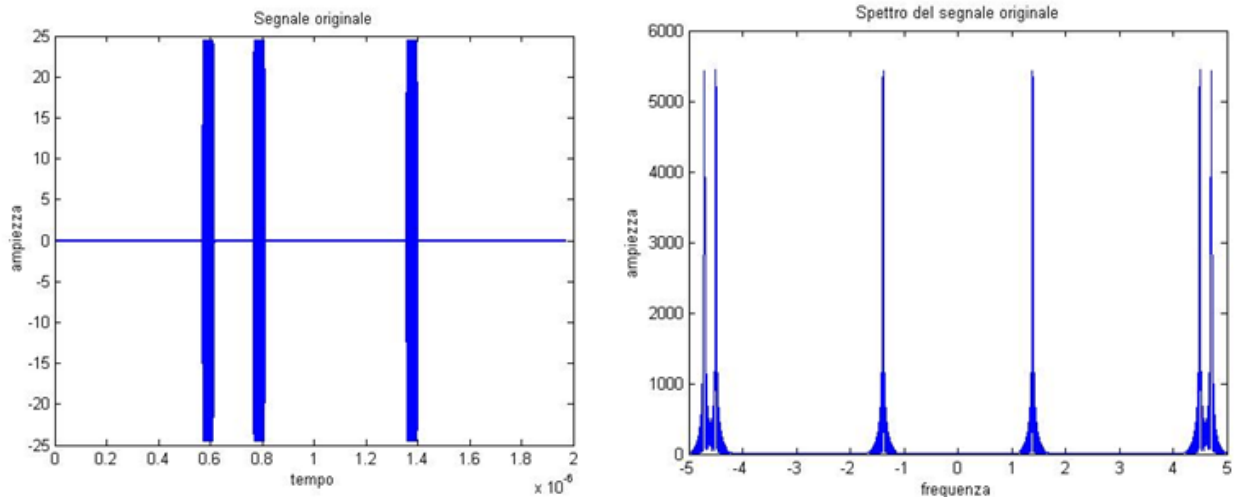


Figura 5.17 Segnale originale: a sinistra, profilo nel dominio del tempo; a destra, profilo nel dominio della frequenza

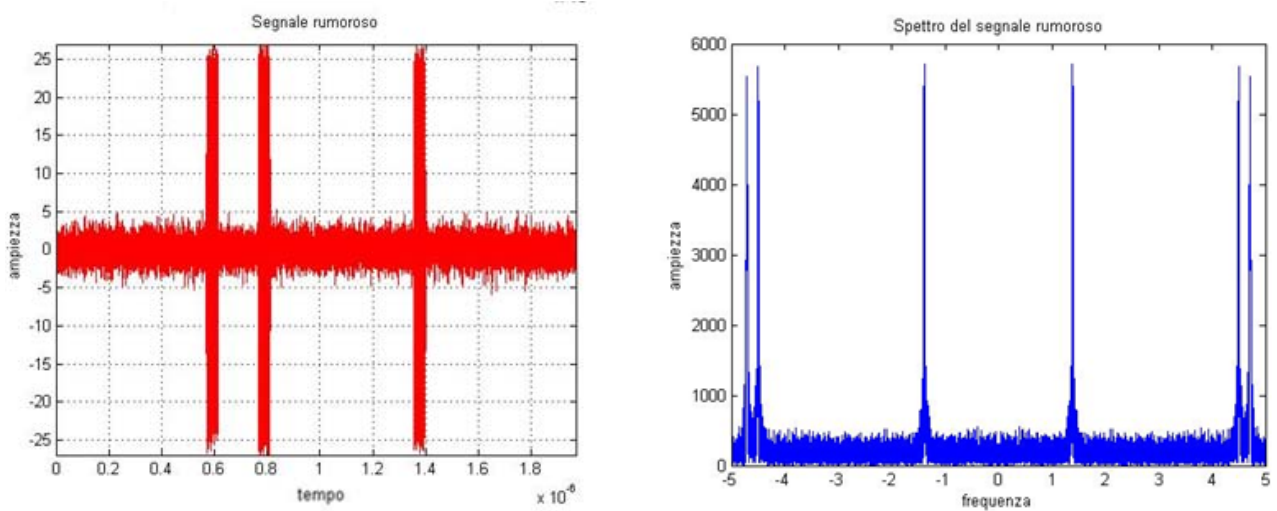


Figura 5.18 Sovrapposizione del rumore bianco Gaussiano con SNR pari a 10

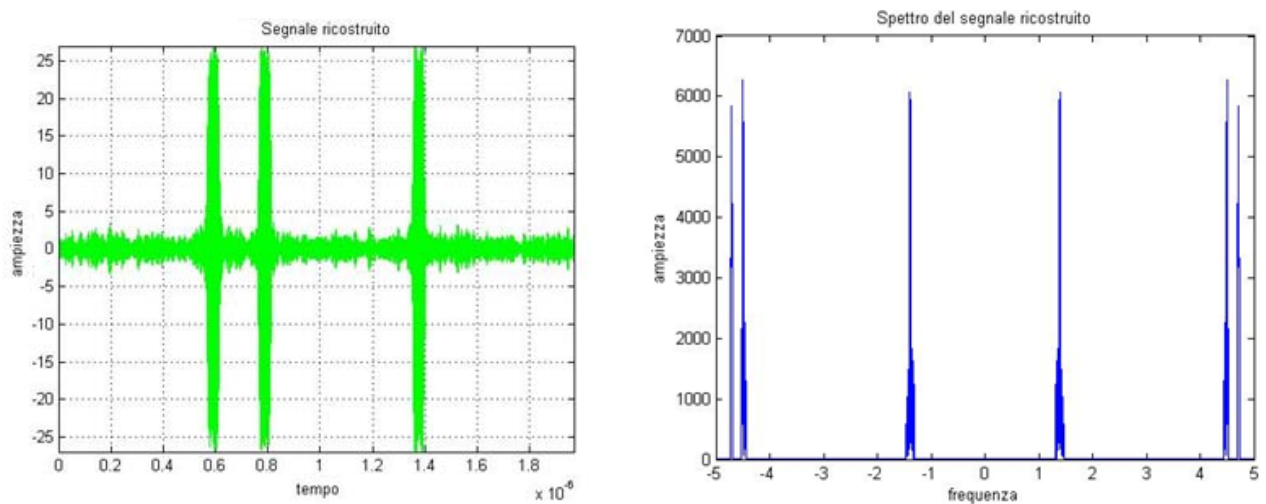


Figura 5.19 Ricostruzione: a sinistra, nel dominio del tempo; a destra, nel dominio della frequenza

Nel nuovo modello, il profilo assunto dalle componenti spettrali ha una maggiore estensione e ammette la possibilità di eventuali sovrapposizioni. Verosimilmente, ciò potrebbe complicare l'interpretazione dello spettro e inficiarne la corretta ricostruzione.

Alla prova dei fatti, invece, l'algoritmo supera brillantemente l'ostacolo: per quanto vicine, le frequenze delle portanti sono ricostruite con estrema precisione. Senza dubbio, gli stessi risultati si possono ottenere, in modo più agevole, semplicemente imponendo una soglia allo spettro del segnale rumoroso. Nondimeno, l'algoritmo dimostra un'accuratezza sorprendente. Basti considerare le condizioni più critiche, ove la sovrapposizione confonde totalmente le tre componenti.

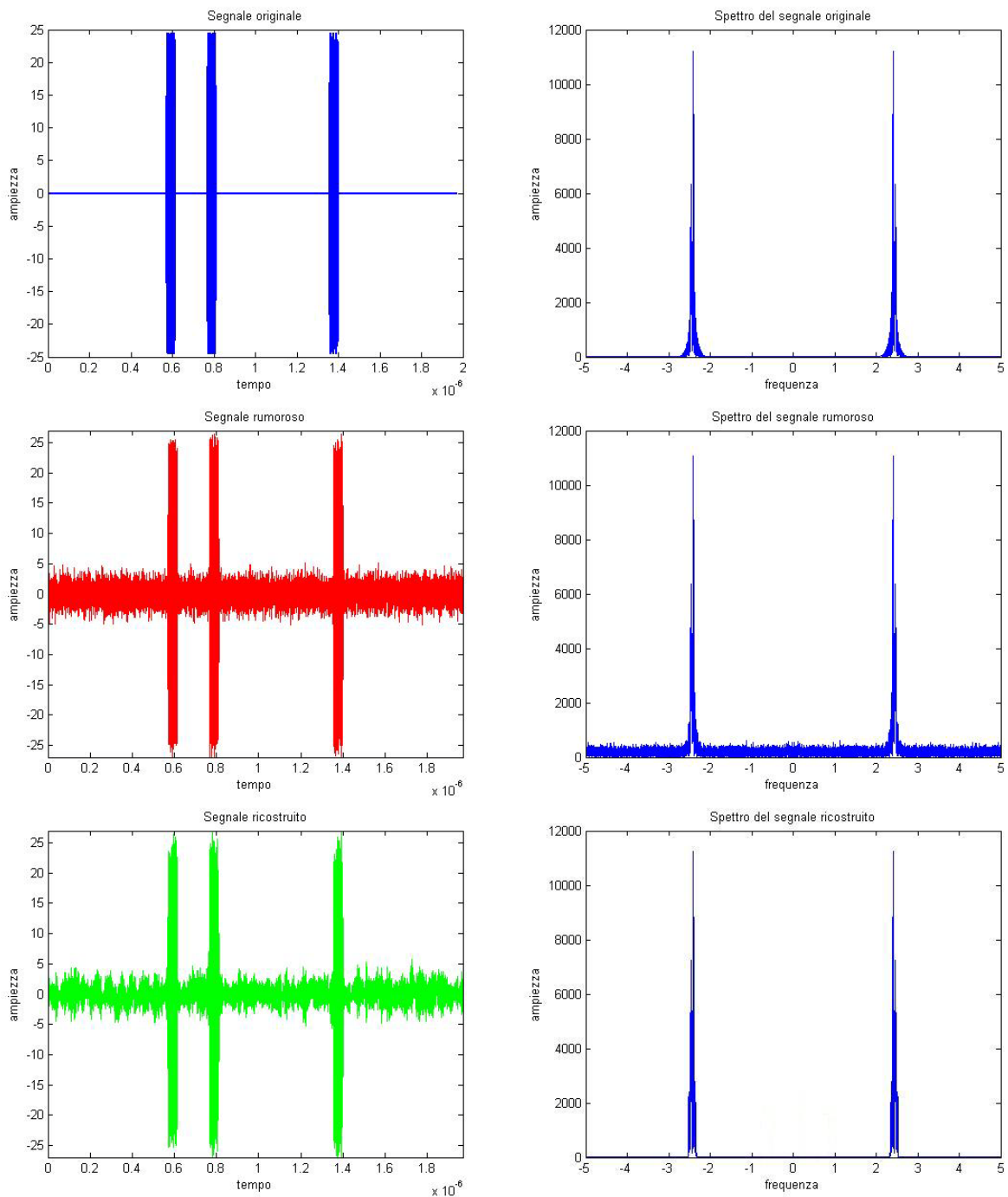


Figura 5.20 Ricostruzione di un segnale, ove le frequenze di modulazione sono pari a 2.463, 2.409 e 2.41 GHz

5.8.4 Sovrapposizioni nel tempo

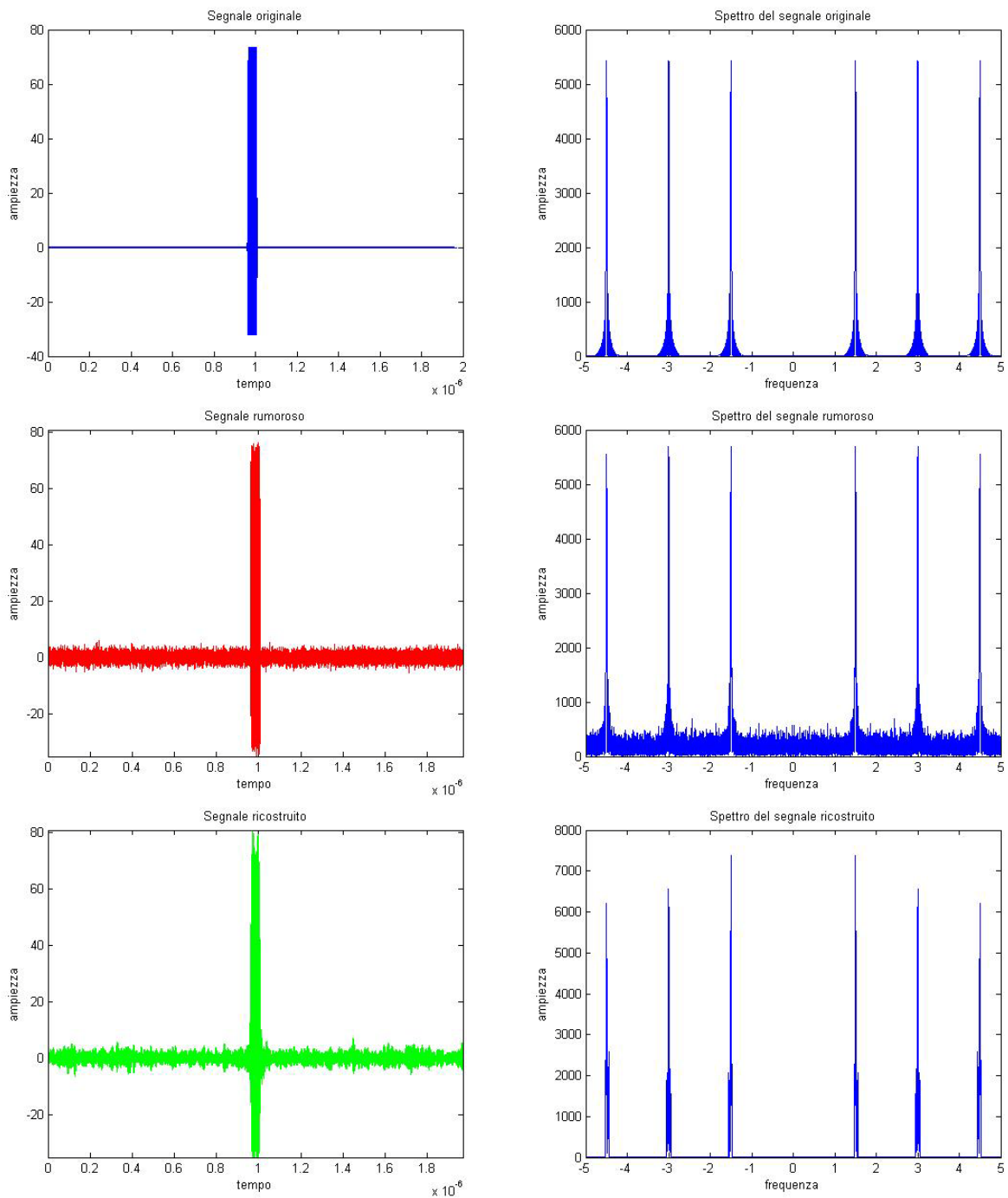


Figura 5.21 Ricostruzione di un segnale, ove le frequenze di modulazione sono 1.5, 3 e 4.5 GHz

Anche facendo coincidere l'istante di occorrenza dei tre pacchetti i risultati non cambiano. La ricostruzione del supporto spettrale non incontra particolari problemi e conserva una pregevole accuratezza.

5.8.5 Conclusioni

I dati preliminari raccolti in queste prove suggeriscono la possibilità di applicare con successo il presente algoritmo alle procedure di *spectrum sensing*, argomento trattato nei successivi due capitoli.

CAPITOLO VI

Modulazione digitale

6.1 Introduzione

L'avvento delle tecniche di modulazione digitale segna una vera e propria rivoluzione nel settore delle telecomunicazioni. La loro introduzione, infatti, consente di incrementare la qualità e il contenuto informativo delle trasmissioni. Peraltro, il formato digitale si avvale di strumenti per la conservazione e la protezione dei dati, difficilmente replicabili in ambito analogico. In breve tempo, queste innovative tecniche hanno conosciuto una diffusione capillare e hanno trovato larga applicazione in diversi sistemi di comunicazione. Un classico esempio, in tal senso, è rappresentato dalle trasmissioni a radio frequenza, brevemente RF.

Scendendo nel dettaglio, l'utilizzo della modulazione digitale ha permesso di risolvere una condizione potenzialmente patologica. Al giorno d'oggi, infatti, la banda RF viene condivisa da un numero elevatissimo di soggetti e l'incessante domanda di nuove utenze e nuovi servizi non può che peggiorare la situazione. Solo l'impiego delle tecniche di modulazione digitale ha permesso una ripartizione efficiente e funzionale delle risorse a disposizione.

6.2 Complessità e prestazioni spettrali

A fronte di questi innegabili pregi, i progettisti hanno dovuto fronteggiare anche alcune problematiche, inerenti l'estensione della banda occupata, il consumo in termini di potenza e l'inevitabile presenza di componenti rumorose o comunque indesiderate.

Si dimostra, così, sempre attuale un compromesso tipico nel settore delle telecomunicazioni, valido sia per le trasmissioni via cavo sia per quelle attraverso l'etere. In commercio sono disponibili diverse tipologie di trasmettitori e ricevitori, alcune più semplici, alcune più complesse. Optando per le versioni più semplici, si facilita la fase produttiva, ma, al tempo stesso, si degradano le prestazioni. In particolare, si espande la banda necessaria alla trasmissione, limitando il massimo numero ammissibile di utenti. Al contrario, optando per le versioni più complesse, si può trasmettere lo stesso messaggio riducendo di molto la banda occupata.

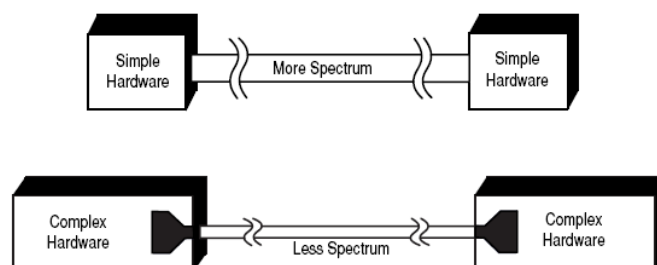


Figura 6.14 Compromesso fondamentale tra complessità e occupazione spettrale [57]

D'altro canto, non bisogna cadere in facili quanto fuorvianti entusiasmi. Non è facile ottenere un effettivo miglioramento delle prestazioni: maggiore è la complessità dello strumento, maggiore è la difficoltà nel progettarlo e realizzarlo.

6.3 Scomposizione I / Q

La trasmissione di un segnale attraverso l'etere richiede l'esecuzione di tre passaggi fondamentali. A livello del trasmettitore, si genera una portante e la si modula con l'informazione da trasmettere. A livello del ricevitore, invece, si attua il procedimento inverso, noto come demodulazione.

Nell'ambito delle telecomunicazioni, il termine informazione designa qualsiasi cambiamento nelle caratteristiche del segnale, che possa essere misurato in modo certo e affidabile. In particolare, nel dominio del tempo, esistono tre variabili che determinano le caratteristiche di un segnale sinusoidale: ampiezza, frequenza e fase. Peraltro, frequenza e fase sono due indici diversi che quantificano lo stesso cambiamento. Questa suddivisione si ripropone anche nella classificazione delle tecniche di modulazione analogica.

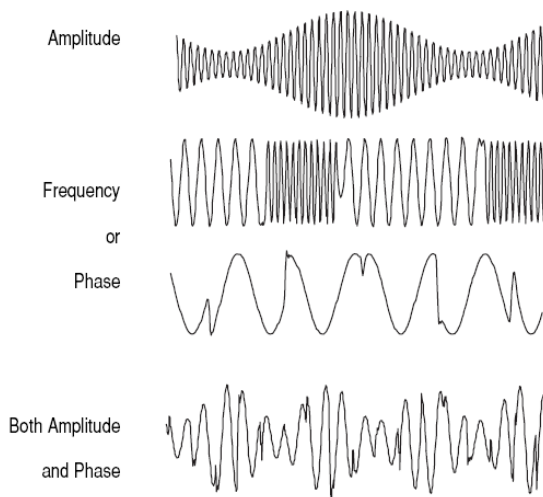


Figura 6.15 Esempi di modulazione di ampiezza, frequenza e fase [57]

Definita la variabile di interesse, ad ogni cambiamento nelle caratteristiche del segnale corrisponde un cambiamento nelle caratteristiche della portante. A seconda della variazione imposta, si distinguono la modulazione in ampiezza o AM, la modulazione in frequenza o FM, e la modulazione in fase o PM.

In linea di principio, ampiezza e fase possono essere modulate separatamente. Tuttavia, all'atto pratico, emergono notevoli difficoltà, soprattutto in fase di demodulazione. Pertanto, il segnale viene scomposto nella componente in fase,

brevemente I , e nella componente in quadratura, brevemente Q . Tali componenti sono perfettamente ortogonali e non interferiscono in alcun modo l'una con l'altra.

6.3.1 Diagramma polare

Un diagramma polare è un utile supporto grafico che permette di distinguere, a prima vista, l'ampiezza e la fase del segnale trasmesso. Le due grandezze differiscono per un aspetto fondamentale. La fase deve essere valutata rispetto ad un riferimento, rappresentato in genere dalla fase della portante. L'ampiezza, invece, può essere interpretata sia in termini assoluti, sia in termini relativi all'ampiezza della portante.

Dal punto di vista grafico, il segnale viene raffigurato come un punto: l'ampiezza determina la distanza dall'origine, mentre la fase determina l'angolo rispetto al riferimento della portante. In un simile contesto, anche le tecniche di modulazione trovano un riscontro grafico: la AM modifica la distanza del punto dall'origine; la PM ne altera l'angolo; la loro composizione altro non è che la sovrapposizione dei rispettivi effetti.

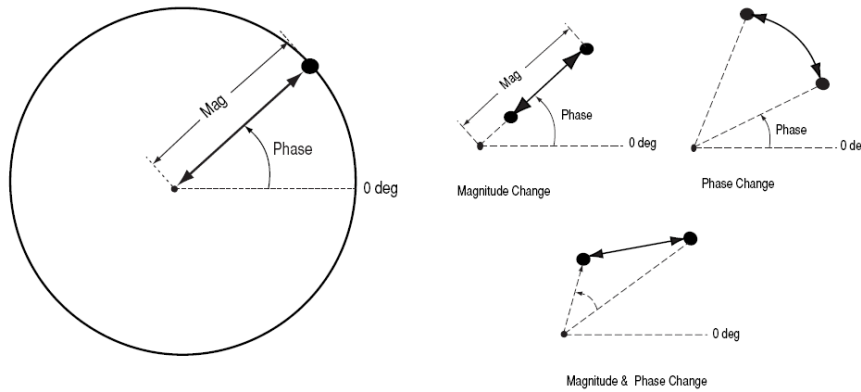


Figura 6.16 Diagramma polare e rappresentazione delle modulazioni in ampiezza (AM) e in fase (PM) [57]

Il diagramma polare consente di evidenziare anche alcune delle problematiche emerse nella progettazione di un sistema RF. Idealmente, una pura modulazione in ampiezza dovrebbe produrre una linea retta dall'origine a un qualche picco che indica la massima ampiezza raggiunta. All'atto pratico, però, la linea presenta comunque una leggera curvatura. Non è possibile effettuare una AM, che non comporti anche una, seppur minima, PM. L'esperienza ha dimostrato che questi effetti discorsivi sono inevitabili nei sistemi che applicano variazioni di ampiezza.

6.3.2 Formato I / Q

La scomposizione del segnale nelle sue componenti I e Q può essere interpretata mediante un'opportuna rappresentazione rettangolare del diagramma polare.

Allo scopo, si definiscono l'asse delle I , concorde al riferimento a fase nulla, e l'asse delle Q , ad esso perpendicolare e rivolto verso l'alto. Le componenti I e Q altro non sono che le proiezioni del segnale sui relativi assi.

Così definito il diagramma assume l'aspetto di un classico piano cartesiano, suddiviso in quattro quadranti, cui si possono applicare i fondamenti dell'algebra lineare.

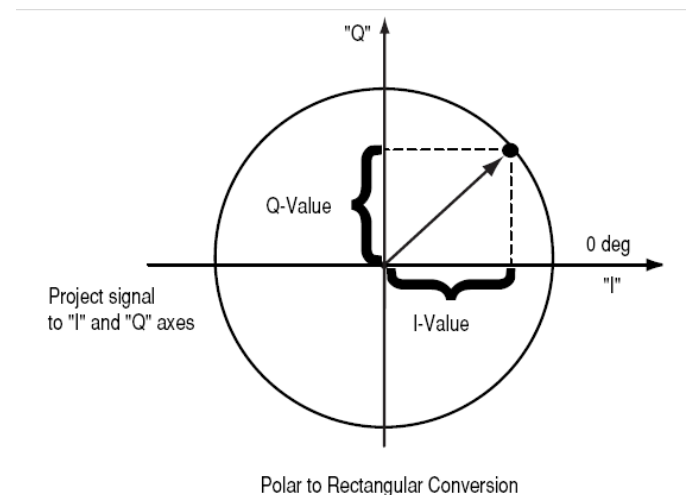


Figura 6.17 Conversione dal diagramma polare al diagramma I / Q [57]

6.3.3 Modulatore I/Q

A livello del trasmettitore, le componenti I e Q procedono su due canali in parallelo e vengono modulate con la portante fornita da uno stesso oscillatore locale. Una traslazione in fase di 90° viene applicata alla sola componente in quadratura. Infine, I e Q vengono sommate a formare l'effettivo segnale di uscita.

A livello del ricevitore, la struttura è del tutto analoga. Il segnale acquisito si dirama entro due canali in parallelo, dove viene modulato con la portante fornita da uno stesso oscillatore locale. In modo *arbitrario*, una traslazione in fase di 90° viene applicata ad uno solo dei due canali. In questo modo, il segnale è stato nuovamente scomposto nelle sue componenti in fase e in quadratura.

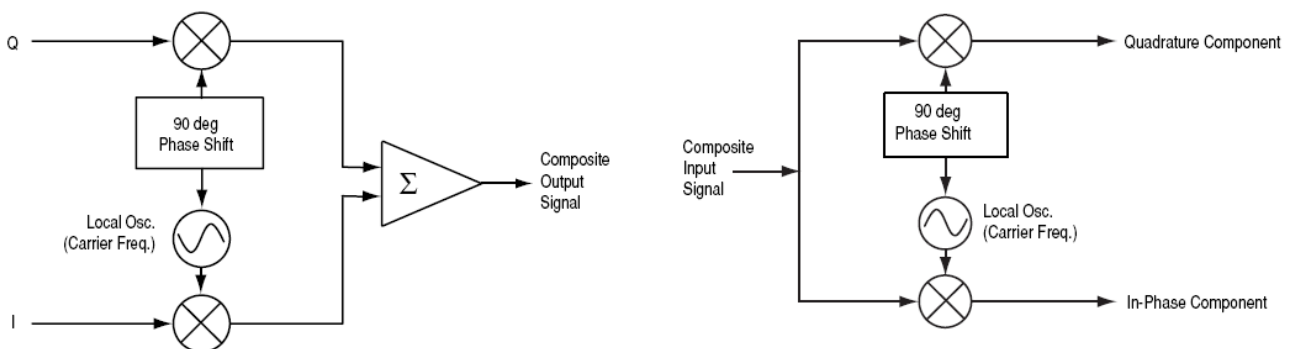


Figura 6.18 Un trasmettitore (a sinistra) e un ricevitore (a destra) RF che adottano la scomposizione I/Q [57]

Questo schema operativo non si presta a modulazioni della sola ampiezza o della sola fase. Tuttavia, è lo strumento ideale per effettuare simultaneamente AM e PM. Peraltro, l'immediato riscontro grafico consente di seguire l'evoluzione delle caratteristiche del segnale nel corso delle diverse fasi di elaborazione. Allo stato dell'arte, gran parte degli algoritmi di modulazione digitale si avvale delle cosiddette costellazioni, ossia rappresenta i dati come punti discreti nel diagramma I/Q .

6.3.4 Indici di efficienza

Tipicamente, i segnali reali sono continui. Tuttavia, il passaggio al formato digitale impone di adottare un numero finito di cifre per rappresentarli. Nell'ambito delle tecniche di modulazione, questa scelta si riflette nella necessità di individuare un numero finito di stati che il segnale può assumere nel corso della modulazione. Ognuno di questi stati è identificato da una cifra binaria e viene definito simbolo. Dal punto di vista grafico, nel diagramma I/Q i simboli sono raffigurati mediante dei punti; la loro disposizione complessiva, rivelatrice di molte informazioni sul sistema e il suo funzionamento, prende il nome di costellazione. Il passaggio da uno stato all'altro non è mai una commutazione istantanea, ma una variazione graduale. I valori assunti dal segnale costituiscono il percorso di transizione da un simbolo all'altro.

Prima di procedere alla comparazione delle diverse tecniche, conviene definire i principali due indici di efficienza: la *bit rate* e la *symbol rate*.

La *bit rate* misura la frequenza del flusso dei *bit* all'interno del sistema. A titolo di esempio, si consideri un ricevitore RF dotato di un campionatore a 8 *bit*. Fissata la frequenza di campionamento a 10 *kHz*, si ricava una *bit rate* di 80 *Kbit* al secondo.

La *symbol rate*, invece, viene definita come il rapporto tra la *bit rate* e il numero di *bit* trasmessi con ogni simbolo. Per esempio, se ogni simbolo veicola un solo *bit*, i due indici coincidono. Al contrario, se ogni simbolo veicola due *bit*, la *symbol rate* è pari alla metà della *bit rate*.

Questa dualità riporta alla luce il compromesso tra complessità ed efficienza spettrale. Infatti, la banda occupata dalla trasmissione dipende direttamente dalla *symbol rate*. Maggiore è la complessità del sistema, maggiore è il numero di *bit* veicolati da ogni simbolo. Parimenti, maggiore è la complessità del sistema, maggiore è la sua efficienza.

6.3.5 *Symbol clock*

Secondo il paradigma del modulatore I / Q , ogni trasmettitore contiene al suo interno un dispositivo che regola la successione temporale delle diverse fasi di elaborazione. Il cosiddetto *symbol clock* determina l'istante preciso in cui trasmettere il simbolo corrente. A meno di malfunzionamenti o anomalie, l'orologio viene tarato in modo da scattare al termine di ogni transizione. In questo modo, il segnale si trova con certezza in uno dei punti noti della costellazione.

6.4 Phase Shift Keying

La Phase Shift Keying, brevemente PSK, è una tecnica di modulazione digitale che interviene sulla fase della portante. Allo stato dell'arte, ne esistono diverse varianti, capaci di rispondere a diverse esigenze sperimentali e procedurali.

Elemento caratteristico di ogni PSK è la particolare costellazione: i simboli sono disposti uniformemente su una circonferenza. Tale configurazione comporta due principali vantaggi. Da un lato, garantisce la massima separazione in fase tra stati adiacenti e quindi la massima immunità a fenomeni di interferenza o corruzione dei dati. Dall'altro, i simboli sono equidistanti dall'origine e richiedono lo stesso consumo di energia per essere trasmessi.

La realizzazione più semplice del protocollo PSK prevede appena due stati: è sufficiente un'unica cifra binaria per identificare i relativi simboli. Per questo motivo, si è scelto il nome di Binary Phase Shift Keying, brevemente BPSK. Evidentemente, *bit rate* e *symbol rate* coincidono e assumono tipicamente valori dell'ordine di un *bit* al secondo.

All'atto pratico, questa tecnica adotta una portante ad ampiezza fissa e ne varia la fase in modo che assuma i valori 0° e 180° . Dal punto di vista grafico, il diagramma I / Q evidenzia due punti sull'asse delle I .

Una variante impiegata più diffusamente è la cosiddetta Quadrature Phase Shift Keying, brevemente QPSK. La costellazione è composta da quattro possibili stati: sono sufficienti due cifre binarie per identificare i relativi simboli. Rispetto al caso precedente, la *symbol rate* risulta dimezzata: un minimo incremento della complessità ha prodotto un netto miglioramento dell'efficienza spettrale.

Ad una prima analisi, la QPSK ammette infinite possibili costellazioni. In realtà, si cerca di perseguire dei criteri di simmetria, che consentano di utilizzare solo due valori di I e due valori di Q . In questo modo, le possibili configurazioni si riducono a due.

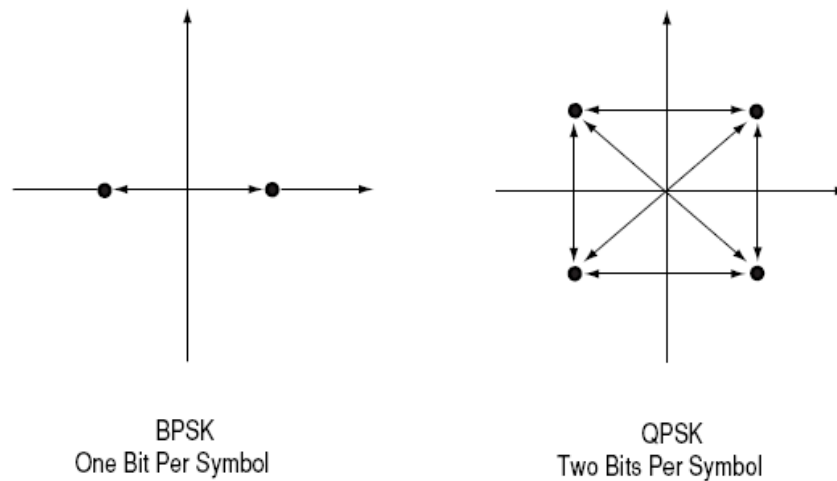


Figura 6.19 Esempi di costellazione per la BPSK (a sinistra) e la QPSK (a destra) [57]

6.5 Frequency Shift Keying

La modulazione in frequenza e quella in fase sono strettamente correlate: aumentare staticamente la frequenza della portante di 1 Hz equivale ad aumentarne la fase di 360° al secondo.

Questo fenomeno ha ispirato un'apposita tecnica di modulazione, nota come Frequency Shift Keying, brevemente FSK. Data una portante ad ampiezza fissa, se ne varia la frequenza in funzione del segnale.

Ancora una volta, la realizzazione più semplice prevede appena due possibili stati, ossia un unico *bit*, da cui il nome di Binary Frequency Shift Keying, brevemente BFSK. Così, il modulatore è in grado di imporre due frequenze diverse alla portante, a seconda del valore assunto dal *bit*.

6.5.1 Minimum Shift Keying

Qualsiasi variazione imposta alla frequenza si ripercuote anche sulla fase. Di conseguenza, per individuare le eventuali transizioni, è sufficiente campionare l'andamento della fase ad ogni commutazione del *symbol clock*. In corrispondenza dei simboli identificati da un numero pari, l'informazione è veicolata dalla polarità della componente in fase. Al contrario, in corrispondenza dei simboli identificati da un numero dispari, l'informazione è veicolata dalla polarità della componente in quadratura. In tal senso, l'ortogonalità tra I e Q costituisce un utile punto a favore, dal momento che semplifica gli algoritmi di individuazione e ne riduce il consumo in termini di potenza.

Tuttavia, non sempre le variazioni imposte alla frequenza garantiscono la perfetta ortogonalità delle due componenti. Perché ciò avvenga, lo sfasamento deve essere di $\pm 90^\circ$ per simbolo. A tal proposito, si richiedono massima precisione e accuratezza: bastano minime imprecisioni per inficiare la successiva fase di demodulazione.

Una particolare variante della FSK adotta il minimo valore tale da soddisfare questo vincolo, perciò prende il nome di Minimum Shift Keying, brevemente MSK. Esistono soltanto due possibili stati: uno sfasamento di $+90^\circ$ equivale ad un *bit* di valore 1, mentre uno sfasamento di -90° equivale ad un *bit* di valore 0.

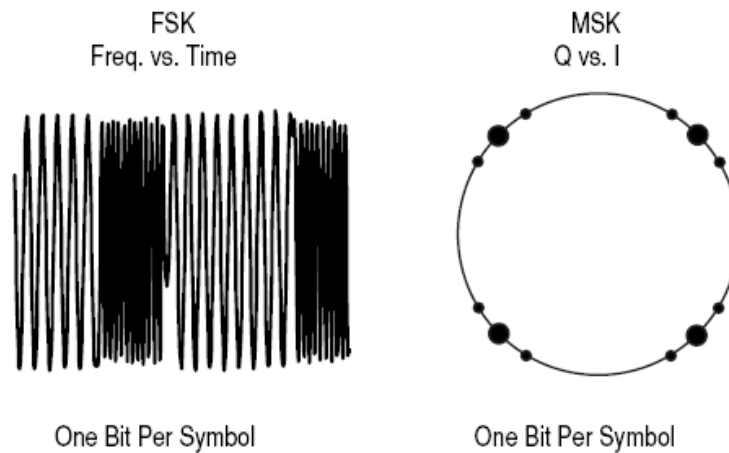


Figura 6.20 A sinistra, andamento della frequenza nel tempo; a destra, andamento della componente Q in funzione della componente I [57]

6.5.2 Ottimizzazione delle prestazioni

Generalmente, qualsiasi variante di FSK ricorre a portanti ad ampiezza fissa. I motivi alla base di una simile scelta sono molteplici: da un lato, l'esigenza di non complicare inutilmente la fase di demodulazione; dall'altro, il desiderio di ridurre al minimo i consumi in termini di potenza del trasmettitore.

Eventuali variazioni in ampiezza possono introdurre notevoli problemi a livello del trasmettitore. Innanzitutto, bisogna utilizzare amplificatori con funzioni di trasferimento lineari, che risultano, però, più dispendiosi in termini di potenza consumata. Ciò nonostante, la variabilità dell'ampiezza può comunque introdurre delle non linearità, tali da degradare anche le prestazioni spettrali del sistema. In tal senso, ricorrere a portanti ad ampiezza fissa elimina qualsiasi vincolo sulla natura degli amplificatori.

Un aspetto finora tralasciato è la forma d'onda del segnale: se questo contiene rapide transizioni o andamenti frastagliati, la banda occupata della trasmissione è particolarmente ampia. Per risolvere questo difetto, si applica al segnale una fase preliminare di filtraggio passa – basso, che ne restringa l'estensione spettrale. Allo scopo la preferenza viene, solitamente, accordata al filtro Gaussiano. Infatti, il suo andamento nel dominio del tempo è ideale: in particolare, non presenta alcun *overshoot*, che potrebbe produrre un indesiderato incremento della banda occupata.

La combinazione di filtro Gaussiano e modulazione MSK, indicata con l'acronimo GMSK, garantisce prestazioni spettrali superiori a qualsiasi altra variante della FSK.

6.6 Quadrature Amplitude Modulation

La cosiddetta Quadrature Amplitude Modulation, brevemente QAM, è la combinazione di due differenti tecniche di modulazione: una in fase e una in ampiezza. In particolare, la procedura restituisce la somma di due segnali modulati in ampiezza, in quadratura di fase.

Nell'analisi della PSK e della FSK, si è assunto che gli stati possibili giacessero su di una circonferenza, ossia condividessero lo stesso valore di energia. Altrettanto non si può dire per la QAM: intervenendo sull'ampiezza della portante, è inevitabile alterare il contenuto energetico dei diversi stati.

6.6.1 Possibili varianti

Curiosamente, se si prevedono appena quattro stati possibili, la 4QAM coincide perfettamente con la QPSK. Se, invece, esistono sedici stati possibili, ossia si effettua una 16QAM, ogni simbolo veicola quattro *bit*. La *symbol rate* che ne consegue è pari ad un quarto della *bit rate* e garantisce prestazioni spettrali superiori a quelle della BPSK, della QPSK e addirittura della 8PSK.

Incrementando ulteriormente il numero degli stati, si perviene alla 32QAM. La componente in fase e quella in quadratura possono assumere ciascuna sei valori diversi, per un totale di 36 stati. Tuttavia, questo numero non è una potenza di due e mal si presta ad essere rappresentato in cifre binarie. Pertanto, lo si riduce a 32, in modo tale che ogni simbolo veicoli esattamente cinque *bit*. Allo scopo, si eliminano dalla costellazione i simboli più distanti dall'origine, che necessitano un maggiore consumo in termini di potenza per essere trasmessi.

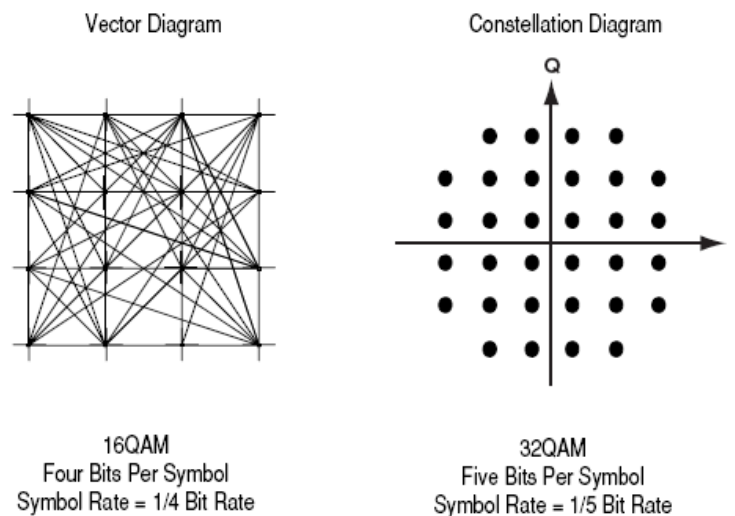


Figura 6.21 A sinistra, diagramma vettoriale della 16QAM; a destra, costellazione della 32QAM [57]

Allo stato dell'arte, la massima evoluzione è rappresentata dalla 256QAM, dove ogni simbolo veicola ben otto *bit*. Le prestazioni spettrali sono ottime, visto che la *symbol rate* riduce di otto volte la *bit rate*.

D'altro canto, la costellazione molto fitta implica che le differenze tra i vari simboli siano minime. Quindi, l'inevitabile presenza di rumore o distorsione può introdurre errori in fase di demodulazione. In tal senso, la soluzione più agevole prevede di incrementare le distanze tra un simbolo e l'altro, anche se questo significa incrementare il consumo in termini di potenza.

6.7 Attraversamento dell'origine

A titolo di esempio, si consideri un segnale modulato mediante la tecnica QPSK. Una volta normalizzate, le componenti I e Q possono assumere solo due valori: $+1$ e -1 . Nel caso in cui entrambe varino simultaneamente da $+1$ a -1 , il segnale attraversa l'origine del diagramma I / Q . Questo significa che, nel corso della transizione, l'ampiezza della portante, momentaneamente, si annulla.

Tuttavia, non tutte le transizioni attraversano l'origine: la variazione di una sola delle componenti altera l'ampiezza della portante, ma non l'annulla, neanche per un istante. Riassumendo, nel corso della modulazione, l'ampiezza della portante può subire variazioni notevoli, come anche minimali.

Tale incertezza complica non poco le operazioni di trasmissione. A livello del ricevitore, il dispositivo deputato al recupero del *symbol clock* non può basarsi unicamente sull'ampiezza della portante. A livello del trasmettitore, eventuali non linearità nel circuito di amplificazione espandono la banda occupata.

A tal proposito, una transizione che attraversi l'origine non è di per sé sintomo di cattive prestazioni spettrali: disponendo di un circuito di amplificazione perfettamente lineare, lo spettro non subirebbe alcuna modifica. Allo stato dell'arte, però, i circuiti contengono sempre qualche elemento non lineare, tale da distorcere lo spettro. Maggiori sono le variazioni in ampiezza, peggiori sono gli esiti sulla trasmissione. Nel lessico tecnico si parla anche di *spectral regrowth*: gli sforzi compiuti in fase di modulazione per minimizzare la *symbol rate*, vengono vanificati in fase di amplificazione.

Ad aggravare la situazione interviene anche il fenomeno di intermodulazione che produce delle fastidiose bande laterali, in grado di distorcere eventuali canali adiacenti. Infine, un ulteriore peggioramento delle prestazioni spettrali si registra quando il segnale ha natura pulsata: ogni accensione o spegnimento introduce componenti ad alta frequenza che espandono la banda occupata. Nel lessico tecnico questo fenomeno risponde al nome di *spectral splatter*.

6.8 Evoluzioni degli schemi classici

Nel corso della presente trattazione, sono stati affrontati i tre principali paradigmi della modulazione digitale: PSK, FSK e QAM. La maggior parte degli odierni sistemi di comunicazione ricorre ad almeno una di queste tecniche. Tuttavia, la pratica sperimentale ha suggerito agli studiosi alcune evoluzioni, tali da non stravolgere il protocollo operativo, ma migliorarne l'efficienza in determinate situazioni. È questo il caso di tre proposte che hanno ricevuto unanime consenso e approvazione: la I / Q offset modulation, la differential modulation e la constant envelope modulation.

6.8.1 I / Q offset modulation

Questa evoluzione si applica a qualsiasi tecnica di modulazione, però l'esempio più diffuso è senza dubbio la cosiddetta Offset QPSK, brevemente OQPSK.

Nella QPSK tradizionale, il flusso dei *bit* nei canali *I* e *Q* è perfettamente sincronizzato: ogni *bit* viene aggiornato simultaneamente nei due canali. In termini equivalenti, si può affermare che i canali *I* e *Q* condividano lo stesso *symbol clock*.

Al contrario, nella OQPSK, si introduce uno sfasamento pari a metà del periodo del *symbol clock*. In questo modo, ad ogni transizione, solo una componente può modificare il proprio valore. Questa configurazione si riflette anche sulla costellazione: nonostante ogni simbolo veicoli ancora solo due simboli, le transizioni seguono traiettorie che non attraversano mai l'origine, con tutti i vantaggi che ne conseguono.

Concludendo, la OQPSK conserva i pregi della QPSK, apportando anche qualche miglioria. Infatti, la *symbol rate* resta inalterata e coincide con quella tradizionale, mentre l'ampiezza della portante registra variazioni molto più ridotte: si parla di 3 dB nel caso OQPSK rispetto ai 30 ÷ 40 dB del caso QPSK. A beneficiarne sono i consumi in termini di potenza, ma anche la maggiore robustezza del sistema nei confronti delle non linearità del circuito di amplificazione.

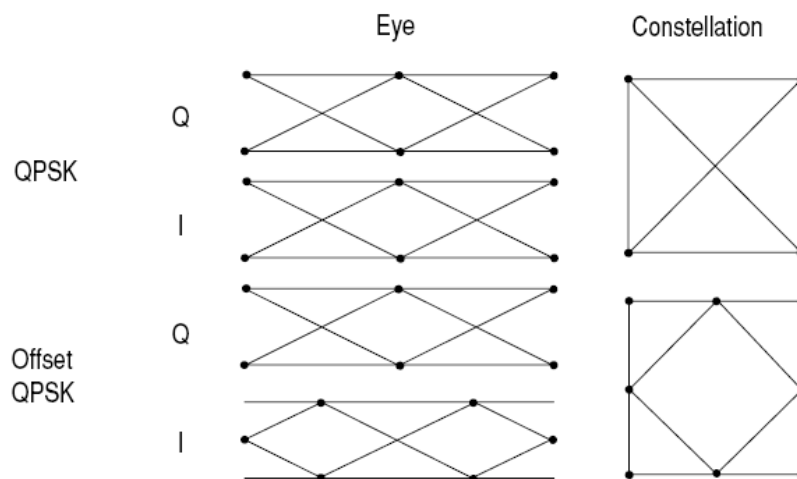


Figura 6.22 A sinistra, diagramma a occhi del flusso dei bit nei canali *I* e *Q*; a destra, relative costellazioni [57]

6.8.2 Differential modulation

La denominazione differenziale indica un diverso approccio alla trasmissione dei dati: l'informazione non è più contenuta nel valore assoluto degli stati, quanto piuttosto nelle transizioni da uno stato all'altro.

In alcuni casi, risulta opportuno introdurre delle restrizioni alle possibili transizioni. Per esempio, la $\pi/4$ DQPSK non ammette traiettorie che attraversino l'origine del diagramma *I / Q*.

Più precisamente, la $\pi/4$ DQPSK utilizza due costellazioni QPSK sfasate di 45° : ad ogni transizione si passa da un simbolo dell'una ad un simbolo dell'altra. La particolare configurazione necessita ancora di due soli *bit* per simbolo. Peraltro, garantisce una continua variazione della fase, che facilita il recupero del *symbol clock* a livello del ricevitore.

Infine, adottando un filtro preliminare del tipo a radice di coseno rialzato, si possono addirittura superare le prestazioni spettrali del protocollo GMSK.

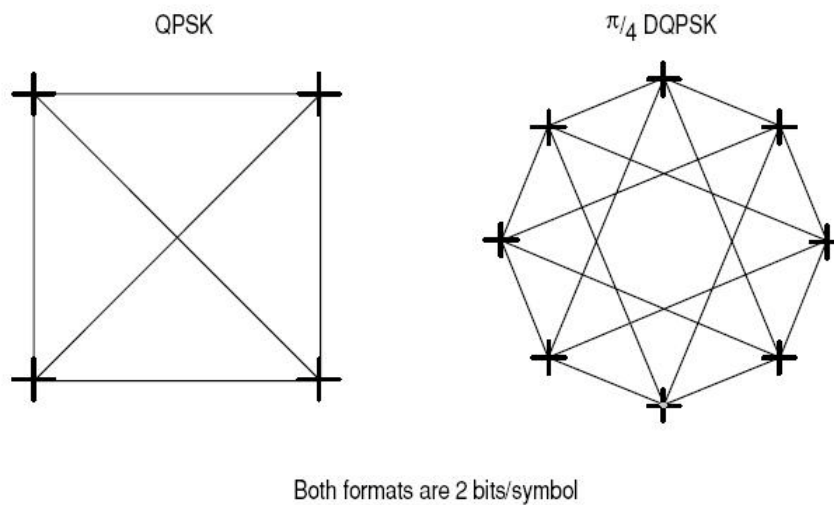


Figura 6.23 Confronto della costellazione nel caso QPSK, a sinistra, e $\pi/4$ DQPSK, a destra [57]

6.8.3 Constant envelope modulation

Nelle varianti della constant envelope modulation, l'ampiezza della portante si mantiene costante, indipendentemente dalle variazioni del segnale. Evidentemente, a beneficiarne sono soprattutto i consumi in termini di potenza.

Una conferma di quanto affermato si rintraccia anche nella scelta del circuito di amplificazione. Nell'ambito della radiofrequenza, gli amplificatori di classe *C* offrono le migliori prestazioni: in condizioni ideali la loro efficienza rasenta il 100%, all'atto pratico si assesta comunque attorno al 90%. Un sistema che effettui la constant envelope modulation può comodamente dotarsi di amplificatori di classe *C*, senza per questo incorrere in fenomeni di *spectral regrowth*.

6.9 Filtraggio

Nell'affrontare il tema della modulazione digitale, due sono gli aspetti che meritano la massima attenzione: da una parte la tecnica di modulazione, dall'altra il segnale da modulare.

Finora, la trattazione si è concentrata sulle peculiarità delle principali tecniche, dedicando particolare attenzione alla loro efficienza sia per quanto riguarda la banda occupata dalla trasmissione, sia per quanto riguarda i consumi in termini di potenza.

Tuttavia, questi stessi aspetti vengono influenzati anche dalla natura del segnale: per esempio, la presenza di rapide variazioni, in ampiezza, fase o frequenza, produce un marcato incremento della banda occupata. Per risolvere questo problema, conviene approntare uno stadio preliminare di filtraggio passa – basso. Tale soluzione consente di ottenere un duplice risultato: da una parte, una riduzione della banda occupata; dall'altra, una maggiore robustezza nei confronti di rumore e interferenze.

All'atto pratico, però, non mancano alcune controindicazioni. In tal senso, alcune tipologie di filtro possono alterare la traiettoria seguita dal segnale nel corso di una transizione. Non è raro il caso in cui il percorso tracciato per passare da uno stato all'altro compia delle escursioni indesiderate, il cui unico effetto è incrementare il fabbisogno energetico per la trasmissione. Sfortunatamente, è difficile porre rimedio a questo fenomeno. Infatti, imporre dei limiti all'ampiezza o alla fase della portante è controproducente, visto che comporta un'immediata *spectral regrowth*.

Un'altra grave controindicazione è rappresentata dall'interferenza inter – simbolica, brevemente ISI: un filtraggio eccessivo rischia di avvicinare i simboli al punto da confonderli l'uno con l'altro. In questo modo, ogni simbolo interferisce su quelli vicini, complicando le operazioni di demodulazione e recupero del *symbol clock*, a livello del ricevitore.

In letteratura, l'argomento è stato affrontato da diversi studiosi, con dovizia di particolari. Nell'ambito delle trasmissioni RF, allo stato dell'arte sono due le proposte che godono di maggiore consenso e diffusione: i filtri a coseno rialzato e i filtri Gaussiani.

6.9.1 Filtri a coseno rialzato

Il filtro a coseno rialzato viene diffusamente impiegato nelle applicazioni di modulazione digitale, visto che, come ogni filtro di Nyquist, è in grado di ridurre sensibilmente l'interferenza inter – simbolica. L'elemento distintivo è rappresentato dalla sua risposta impulsiva, che si annulla in corrispondenza del *symbol clock*.

Grazie a questa particolare configurazione, non si registrano interferenze tra simboli adiacenti. Allo scoccare dell'orologio interno, viene trasmesso il solo simbolo corrente, senza distorsioni di alcun tipo.

In realtà, il filtro a coseno rialzato non elimina alla radice l'ISI. Semplicemente, ne annulla l'incidenza ad ogni scatto del *symbol clock*.

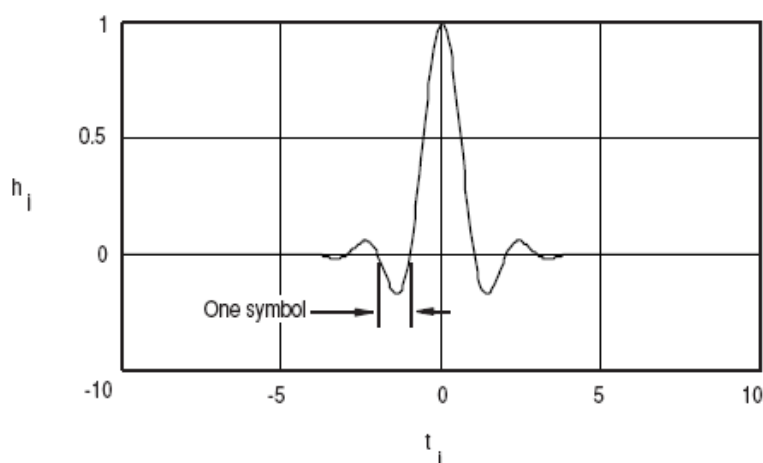


Figura 6.24 Risposta impulsiva di un filtro a coseno rialzato [57]

Talvolta, si preferisce applicare un filtro sia al trasmettitore che al ricevitore. Come visto, nel primo caso, l'obiettivo è minimizzare la banda occupata e l'interferenza inter – simbolica. Nel secondo caso, invece,

l'intenzione è aumentare la robustezza del sistema nei confronti del rumore a banda larga e delle interferenze provenienti da canali adiacenti, adoperati da altri trasmettitori.

Esiste un unico requisito da soddisfare: la combinazione dei due filtri deve essere ancora un filtro a coseno rialzato. In tal senso, la soluzione più semplice è rappresentata da due filtri a radice di coseno rialzato. Peraltro, l'applicazione della radice quadrata non modifica la caratteristica fondamentale: ancora una volta, la risposta impulsiva si annulla in corrispondenza del *symbol clock*.

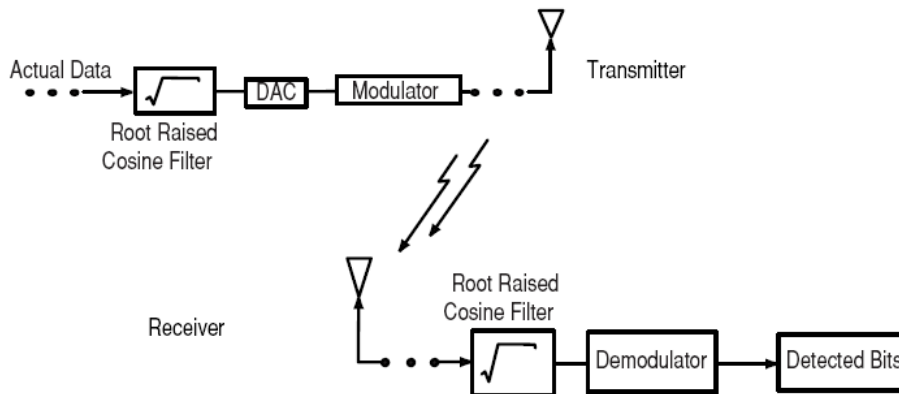


Figura 6.25 Configurazione *matched filters* di trasmettitore e ricevitore [57]

6.9.2 Filtri Gaussiani

Il filtro Gaussiano deve il suo nome al caratteristico andamento esibito sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza. Evidentemente, la sua risposta impulsiva non si annulla in perfetta corrispondenza del *symbol clock*. Di conseguenza, non è possibile eliminare definitivamente l'interferenza inter – simbolica: per quanto minimale, c'è sempre una certa confusione tra i diversi simboli.

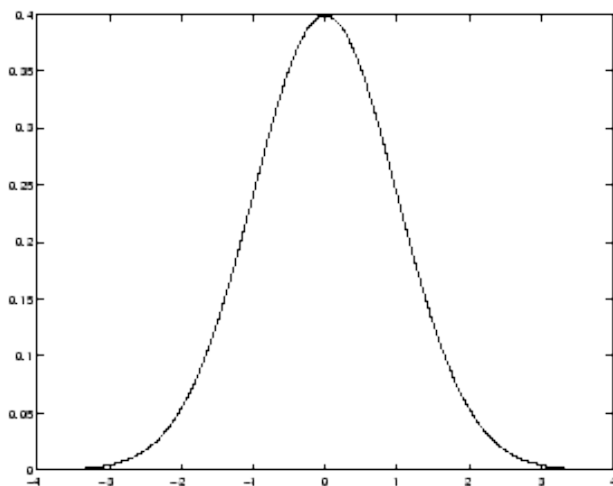


Figura 6.26 Tipico andamento gaussiano

D'altro canto, la situazione è tutt'altro che critica. Il classico profilo a campana ha generalmente uno spessore ridotto: all'interno della costellazione, ogni simbolo interferisce in modo significativo solo con il suo predecessore e il suo successore. Peraltro, il filtro Gaussiano si lascia preferire sotto aspetti altrettanto importanti: un migliore contenimento dei consumi e un più facile recupero del *symbol clock*.

Alla luce di queste osservazioni, non stupisce la capillare diffusione di questa tecnologia negli odierni sistemi di comunicazione. Basti considerare lo standard GSM per la telefonia mobile o le principali architetture *wireless*.

6.9.3 Parametro di selettività

La selettività in frequenza di un filtro a coseno rialzato può essere quantificata mediante un apposito parametro α , direttamente proporzionale all'estensione della banda occupata secondo la relazione:

$$\text{banda occupata} = \text{symbol rate} * (1 + \alpha)$$

In condizioni ideali, il filtro assume un profilo perfettamente rettangolare: il parametro α si annulla e la banda occupata coincide con la *symbol rate*. Evidentemente, si tratta di una condizione non riproducibile all'atto pratico. Pertanto, α è detto anche fattore dell'eccesso di banda, dato che quantifica l'incremento della banda imputabile alla non idealità del filtro. Il caso peggiore, invece, si registra per $\alpha = 1$. La banda occupata è pari addirittura al doppio della *symbol rate*.

Allo stato dell'arte, la soglia minima per le trasmissioni RF è fissata a 0.2, mentre per alcune trasmissioni di segnali video ci si spinge fino a 0.11. La maggior parte dei dispositivi in commercio, invece, si attesta su valori compresi tra 0.35 e 0.5.

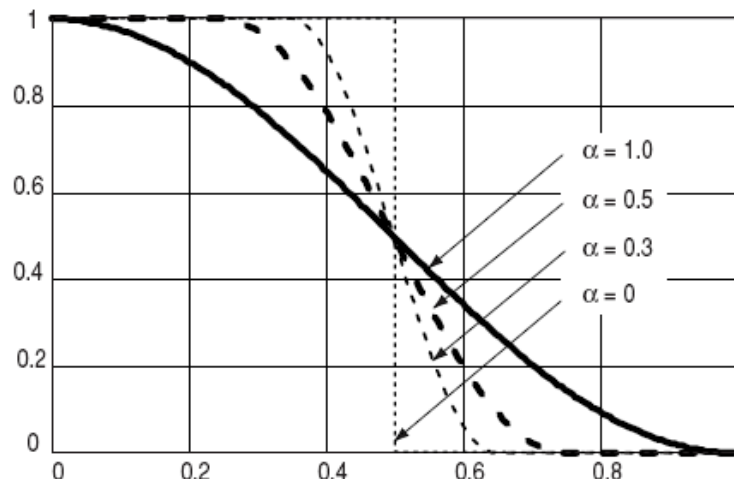


Figura 6.27 Andamento della risposta in frequenza di un filtro a coseno rialzato al variare del parametro α [57]

In modo del tutto analogo, si può determinare la selettività anche di un filtro Gaussiano. Allo scopo, si ricorre al parametro *BT*, acronimo dell'espressione inglese: bandwidth time product. Tipicamente i suoi valori si mantengono tra 0.3 e 0.5, ma non si può definire un'esatta relazione che li leghi all'effettiva banda occupata. Infatti, la risposta in frequenza del filtro è tale da annullarsi solo asintoticamente.

6.9.4 Incidenza sulle tempistiche e sui consumi

A titolo di esempio, si consideri un segnale modulato mediante la tecnica QPSK. Il valore di α condiziona pesantemente le traiettorie che congiungono i diversi stati.

Dal punto di vista matematico, l'assenza di qualsivoglia filtro di trasmissione corrisponde ad un ideale valore infinito di α . Una simile trasmissione presenta transizioni istantanee, ma necessita di una banda altrettanto infinita. Invece, mano a mano che il filtro si fa più selettivo, si assiste ad una progressiva riduzione della banda occupata, accompagnata da un progressivo arrotondamento delle traiettorie.

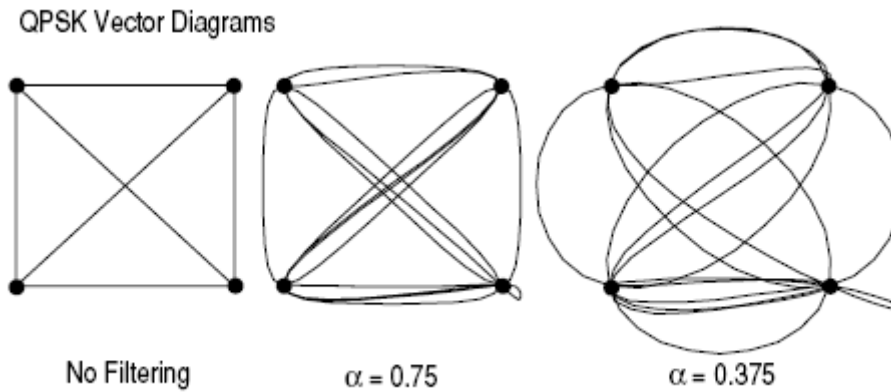


Figura 6.28 Andamento delle transizioni per tre diversi valori del parametro α [57]

Inevitabilmente, questo fenomeno si ripercuote anche sui consumi del trasmettitore. In assenza di filtri, non è richiesto alcuno sforzo aggiuntivo rispetto alla potenza nominale dei simboli. Invece, mano a mano che il filtro si fa più selettivo, le traiettorie si allungano, producendo *overshoot* e *loop*. La conseguenza immediata è un netto aumento della potenza consumata in fase di trasmissione.

6.9.5 Valutazioni conclusive

Riassumendo quanto emerso finora, si possono distinguere due tendenze contrastanti: massima selettività, minimi consumi. Solo l'analisi delle condizioni di utilizzo può condurre ad un compromesso ottimale.

Suddividere la banda RF in pochi canali molto estesi è un vero e proprio spreco di risorse. Così si è introdotto lo stadio di filtraggio preliminare, al fine di restringere la banda occupata dalla trasmissione. L'obiettivo dichiarato è conciliare la selettività del filtro con l'accuratezza della demodulazione.

In tal senso, la diminuzione del valore di α conduce ad esiti ambivalenti. Da un lato, attua una progressiva riduzione della banda occupata. Dall'altro, altera le traiettorie che congiungono i diversi stati, complicando vistosamente il diagramma vettoriale.

Questa nuova configurazione si riflette in un netto incremento dell'interferenza inter – simbolica, che rende difficoltoso il corretto riconoscimento dei simboli e il recupero del *symbol clock* a livello del ricevitore. Parallelamente, la comparsa di *overshoot* va a gravare sul fabbisogno energetico della trasmissione. Infatti, bisogna dotarsi di un circuito di amplificazione in grado di supportare i picchi di potenza della portante, senza introdurre distorsioni significative.

Allo stato dell'arte, tali prestazioni sono garantite solo da amplificatori di grandi dimensioni, alimentati da batterie ingombranti e pesanti. A risentirne è l'intero trasmettitore, più esposto così a fenomeni di surriscaldamento e di interferenza elettrica da parte di altri circuiti.

Una valida alternativa prevede di ridurre il *talk time*. La minore affidabilità della trasmissione è bilanciata dai minori consumi: è così possibile ripiegare su circuiti e batterie meno ingombranti e dispendiosi.

6.10 Metodi di rappresentazione

La rappresentazione di un segnale non è univoca: variando il dominio o la tecnica di misura, si possono evidenziare specifiche caratteristiche, altrimenti celate nel flusso dei dati.

In tal senso, un semplice esempio può risultare chiarificatore. Si consideri un cercapersone che opera a radiofrequenza. Il dispositivo adotta una FSK a due livelli: la frequenza della portante oscilla tra 930.000 MHz e 930.008 MHz .

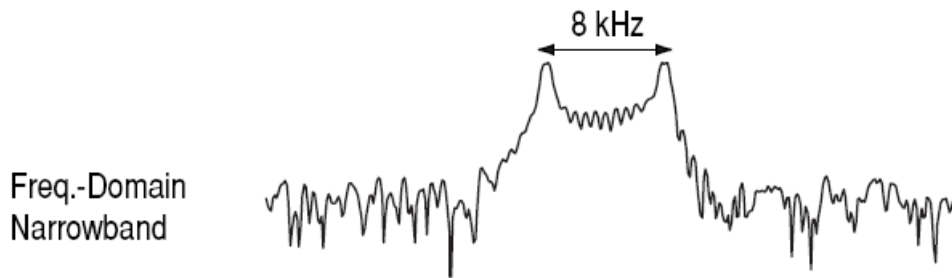


Figura 6.29 Andamento nel dominio della frequenza del segnale di un cercapersone che opera nella banda RF [57]

La scelta ricade su una tecnica di modulazione in frequenza, perché è meno soggetta a fenomeni di interferenza o attenuazione, molto diffusi in un contesto urbano. Altri protocolli, più accurati nella demodulazione del segnale, non sono compatibili con l'elevato tasso di rumori e disturbi, tipico degli odierni edifici, specie se composti in massima parte da acciaio.

L'estensione della banda occupata è trascurabile in relazione alla sua frequenza centrale. Così, la differenza di appena 8 kHz diventa impercettibile nel dominio del tempo: neppure i migliori oscilloscopi riescono a misurare questa minimale variazione del periodo.

Per migliorare la risoluzione, il dispositivo attua una traslazione in frequenza: mediante un'opportuna operazione di mixing la frequenza centrale passa 930.004 MHz a 2 kHz . In questo modo, le variazioni imposte alla portante sono distinguibili ad occhio nudo. Questa procedura, molto diffusa nell'ambito delle trasmissioni RF, prende anche il nome di *zoom time* o *IF time*.

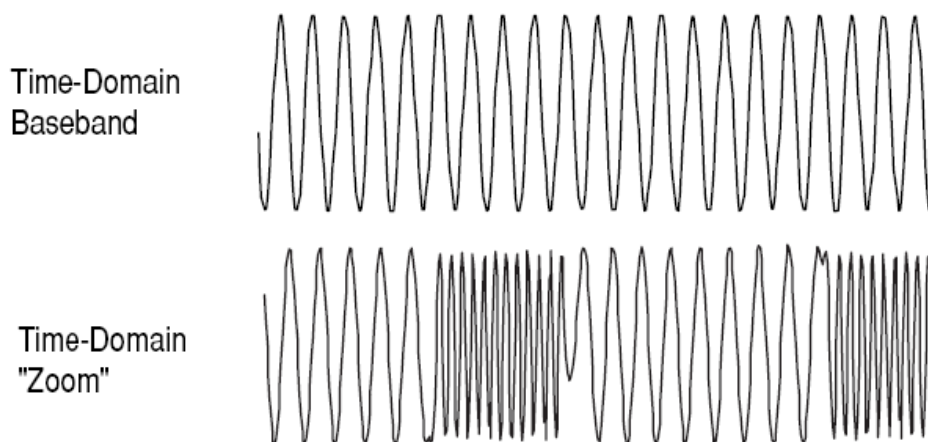


Figura 6.30 Andamento nel tempo del segnale del cercapersone, prima (sopra) e dopo (sotto) lo *zoom time* [57]

6.10.1 Analisi di potenza

Nella caratterizzazione del dispositivo, destano particolare interesse le fasi di accensione e spegnimento. In tal senso, l'analisi dei livelli di potenza può rivelare preziose informazioni. Generalmente, si pongono a confronto i simultanei andamenti temporali della potenza e dell'attivazione in frequenza.

Variazioni molto rapide della potenza assicurano un pronto funzionamento del dispositivo, ma, allo stesso tempo, provocano fenomeni di *spectral splatter*. Particolare attenzione va riservata all'eventuale presenza di picchi o andamenti impulsivi: un'eccessiva richiesta di potenza al circuito di amplificazione può comportare la compressione o addirittura la perdita di alcuni dati.

Variazioni molto lente della potenza non incidono in modo significativo sull'estensione spettrale della banda di trasmissione. D'altro canto, rallentano notevolmente il funzionamento del dispositivo: fino a quando la potenza non raggiunge i livelli di regime, la trasmissione non può cominciare. Peraltro, un'eccessiva lentezza può causare un alto tasso di errore nella codifica dei primi simboli.

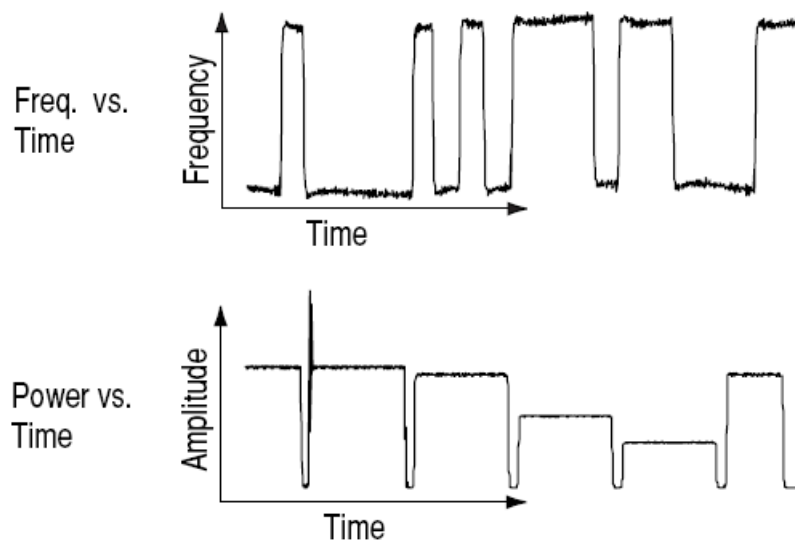


Figura 6.31 Analisi grafica dei livelli di potenza e dei loro effetti sulle prestazioni spettrali [57]

6.10.2 Costellazione

Un classico diagramma polare esprime il segnale in termini di ampiezza e fase. Di contro, il diagramma I / Q lo scompone nelle componenti in fase e in quadratura. Infatti, a livello circuitale è molto più semplice adottare degli assi coordinati lineari e ortogonali.

Questo metodo di rappresentazione raffigura i valori assunti dalla portante nel corso delle transizioni da uno stato all'altro. In tal senso, permette di individuare eventuali *overshoot* o *loop*, ma non fornisce informazioni sulla bontà dei simboli trasmessi.

Per rispondere a questa esigenza conviene ricorrere ad un altro supporto grafico. La costellazione raffigura soltanto i valori assunti dalla portante allo scoccare del *symbol clock*. Le informazioni che se ne ricavano permettono di valutare l'incidenza della fase di filtraggio e l'entità dell'ISI.

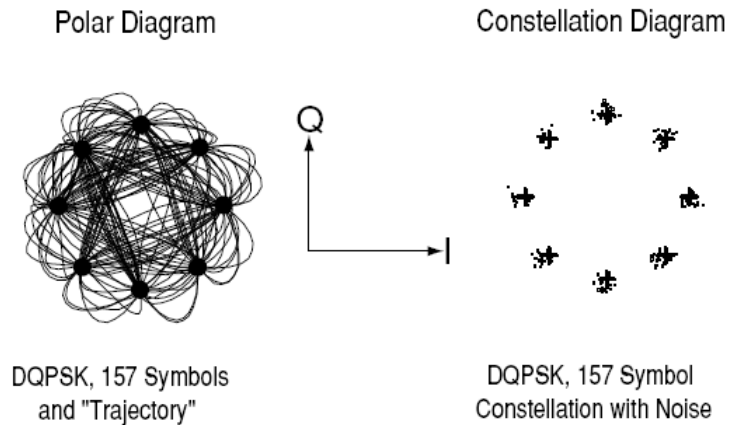


Figura 6.32 Confronto tra diagramma polare (a sinistra) e costellazione (a destra) [57]

Tipicamente, per ottenere dei risultati affidabili, la costellazione deve essere composta da almeno 2^n punti, dove n è il numero di *bit* veicolati da ogni simbolo.

6.11 Multiplexing

Per quanto vasto, lo spettro RF ha un'estensione finita. L'incessante aumento di utenze e servizi ha imposto una sua efficiente suddivisione in canali.

Allo scopo, sono sorti i cosiddetti protocolli di multiplexing. Ne esistono diverse varianti, ciascuna basata su uno specifico criterio. Sta alle condizioni di utilizzo individuare il protocollo più opportuno.

6.11.1 Multiplexing in frequenza

Il padre dei protocolli di multiplexing è senza dubbio il Frequency Division Multiple Access, brevemente FDMA, formulato già agli inizi del ventesimo secolo. Lo schema operativo prevede di assegnare uno specifico canale ad ogni coppia formata da un trasmettitore e un ricevitore.

Per ottenere le massime prestazioni, conviene ricorrere ad un trasmettitore a banda stretta e ad un ricevitore dotato di un filtro molto selettivo, capace di escludere tutti i contributi indesiderati.

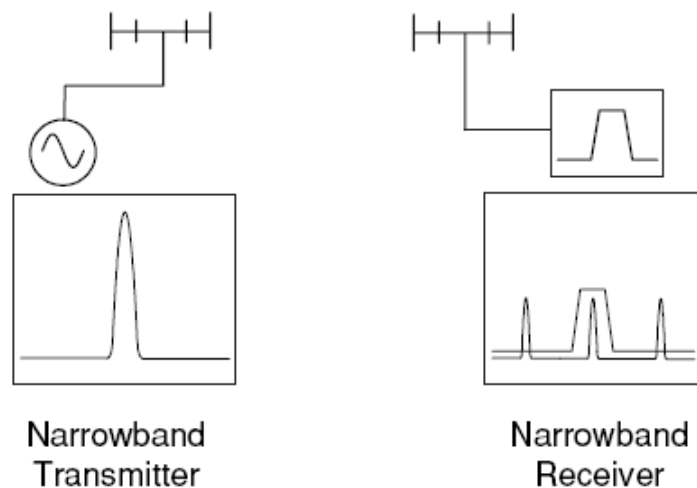


Figura 6.33 Trasmettitore e ricevitore a banda stretta, ideali per il protocollo FDMA [57]

6.11.2 Multiplexing nel tempo

Una rigida organizzazione temporale consente a più dispositivi di operare alla stessa frequenza. In tal senso, la realizzazione più semplice è rappresentata dal cosiddetto Time Division Duplex, brevemente TDD. Tra le possibili applicazioni spiccano le classiche ricetrasmittenti: premendo un bottone è possibile trasmettere un messaggio, rilasciandolo è possibile ascoltarlo.

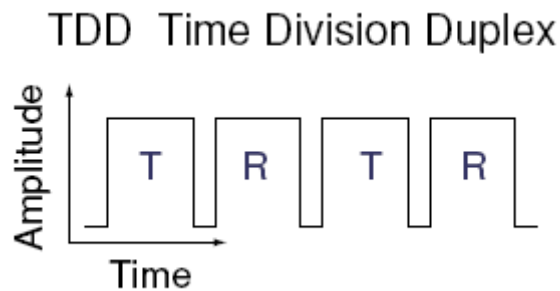


Figura 6.34 Successione temporale delle fasi di trasmissione e ricezione in un protocollo TDD [57]

Con il passare del tempo, il criterio si è progressivamente affinato, avvalendosi anche delle più moderne tecnologie del settore. L'ultima variante, nota con il nome di Time Division Multiple Access, brevemente TDMA, ospita sulla stessa frequenza diversi trasmettitori e ricevitori.

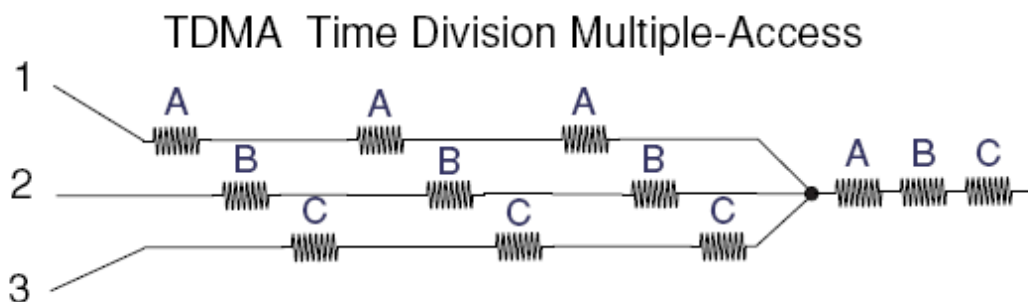


Figura 6.35 Organizzazione temporale dei diversi utenti in un protocollo TDMA [57]

6.11.3 Multiplexing dei segnali codificati

Sfruttando in modo opportuno alcune proprietà della codifica dei dati trasmessi, più utenti possono operare simultaneamente, sullo stesso canale. In tal senso, vengono superate le restrizioni imposte dai precedenti protocolli, nel dominio del tempo e della frequenza.

Si consideri, ad esempio, il cosiddetto Code Division Multiple Access, brevemente CDMA. Tale protocollo assegna ad ogni dispositivo una specifica sequenza digitale. In fase di trasmissione, questa viene sovrapposta al segnale, con una frequenza superiore, tale da non distorcere l'informazione. A quel punto, solo i dispositivi associati al mittente ne riconoscono la sequenza e procedono alla demodulazione.

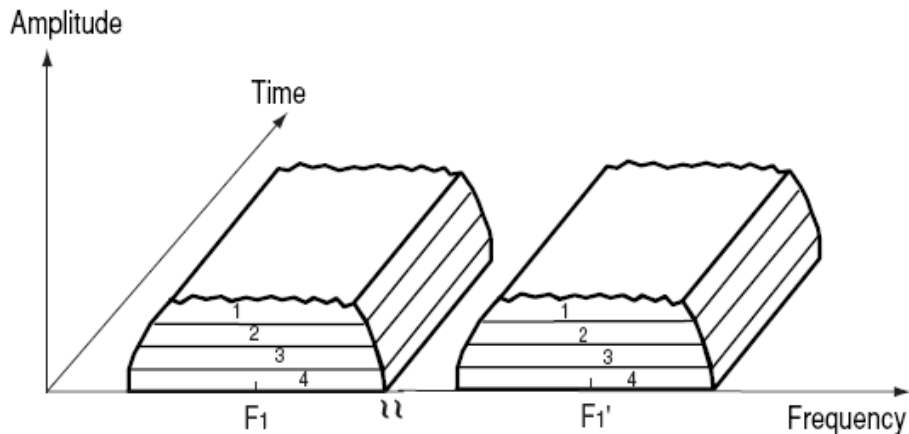


Figura 6.36 Canali occupati da diverse trasmissioni simultanee grazie al protocollo CDMA [57]

6.11.4 Multiplexing geografico

Si considerino due coppie, formata ciascuna da un trasmettitore e un ricevitore: se sono sufficientemente distanti, possono operare alla medesima frequenza senza, per questo, interferire l'una con l'altra. Questa forma di multiplexing, definita anche geografica, viene applicata in qualsiasi settore. Le eccezioni sono rarissime: si tratta in genere di canali dedicati a trasmissioni internazionali o a comunicazioni militari.

6.12 Penetrazione ed efficienza

Nell'ambito delle telecomunicazioni, un segnale si definisce penetrante se è possibile rintracciarlo anche in presenza di rumore, attenuazione e interferenze. In tal senso, è molto istruttivo porre a confronto due dispositivi tipici della pratica quotidiana: un cercapersone e un cellulare.

Un cercapersone è in grado di ricevere un segnale anche all'interno di un edificio di metallo, o comunque di una struttura rinforzata con travi di acciaio, come può essere un grattacielo. Solitamente, adotta una modulazione FSK a due livelli, con un'ampia deviazione in frequenza e una ridotta *symbol rate*. Una simile configurazione facilita notevolmente il compito del ricevitore. I due livelli di frequenza sono facilmente distinguibili e si mantengono per lungo tempo.

D'altro canto, questi stessi aspetti limitano il contenuto informativo della trasmissione. La ridotta *symbol rate* ne dilata enormemente i tempi. Mentre, l'esiguo numero di stati possibili, appena due, peraltro ben distanziati, offre ben poche sfumature nella redazione di un testo. Tali caratteristiche non rappresentano un grave problema per un cercapersone, cui è richiesto solo di trasmettere un indirizzo e, al massimo, un breve testo in codifica ASCII.

Il discorso cambia radicalmente se si considera un cellulare: la trasmissione di complessi messaggi vocali e testuali impone una *symbol rate* molto più elevata e una tecnica di modulazione molto più efficiente. Allo stato dell'arte, un cellulare che adotta una GMSK può trasmettere oltre 270000 simboli al secondo.

Sfortunatamente, questo incremento dell'efficienza si traduce in un netto degrado della penetrazione. Questi dispositivi sono un chiaro esempio di come sia difficile trovare un compromesso ottimale tra due esigenze contrastanti quali penetrazione ed efficienza.

6.13 Misure su sistemi RF digitali

Il progetto di un sistema di comunicazione digitale è complicato dalla necessità di accomodare diverse esigenze, spesso contrastanti tra loro. In tal senso, il valore di alcuni parametri può fornire un valido supporto nella scelta della configurazione più opportuna.

Tipicamente, le misure effettuate sui sistemi RF digitali vengono suddivise in quattro categorie principali: misure di potenza, di frequenza, di sincronizzazione temporale e di accuratezza della modulazione.

6.13.1 Misure di potenza

Nell'ambito delle misure di potenza, il parametro più interessante è senza dubbio la potenza del canale adiacente. Tale indice quantifica, in termini energetici, la porzione di segnale che fuoriesce dal canale dedicato alla trasmissione e si riversa in quello adiacente. Scendendo nel dettaglio, viene calcolato il rapporto in dB tra la potenza del canale adiacente e la potenza totale della trasmissione.

Inevitabilmente, questo fenomeno è causa di distorsioni e interferenze e va affrontato con la massima cautela. Una possibile soluzione prevede di aumentare lo spessore dei singoli canali, mantenendo il più possibile separate le diverse trasmissioni. D'altro canto, ciò significherebbe ridurre drasticamente il numero complessivo dei canali e quindi delle utenze ospitate in banda RF.

Nei sistemi che presentano un funzionamento pulsato, come nel protocollo TDMA, l'andamento della potenza ha una chiara dipendenza dal tempo, forse anche dalla frequenza. In quest'ottica, destano particolare interesse soprattutto le fasi di accensione e spegnimento.

In aggiunta ai classici profili della potenza in funzione del tempo o della frequenza, può risultare utile anche effettuare la media su un buon numero di ripetizioni.

6.13.2 Misure di frequenza

Tipicamente, l'estensione della banda occupata è un parametro del tutto complementare alla già citata potenza del canale adiacente. La conoscenza di entrambi i valori permette di verificare che la trasmissione si mantenga effettivamente nel canale che le è stato destinato.

In genere, la banda occupata viene identificata con l'intervallo spettrale che contiene almeno il 99% della potenza totale della trasmissione.

6.13.3 Misure di accuratezza della modulazione

In genere, vista la mole dei dati trattati, è improponibile un'analisi dettagliata, campione per campione, del segnale modulato. Una strategia molto più accessibile prevede di confrontare la costellazione e le traiettorie seguite in fase di transizione con i rispettivi andamenti ideali. La corretta disposizione dei simboli

viene determinata in base alla tecnica di modulazione prescelta. Per quanto riguarda le traiettorie, il discorso si complica, in quanto entrano in gioco diversi fattori legati alla specifica implementazione del sistema. Ciò nonostante, con un piccolo sforzo computazionale è comunque possibile determinare l'andamento atteso delle traiettorie.

L'errore introdotto dalla modulazione non è un semplice scalare. Al contrario, anch'esso può essere valutato all'interno di un diagramma polare, mettendo in evidenza il diverso contributo sull'ampiezza e sulla fase del segnale.

In quest'ottica, conviene introdurre due nuovi enti geometrici. I valori istantanei di ampiezza e fase del segnale definiscono il cosiddetto fasore misurato. Parimenti, dalle traiettorie ricostruite si ricava il cosiddetto fasore ideale o di riferimento.

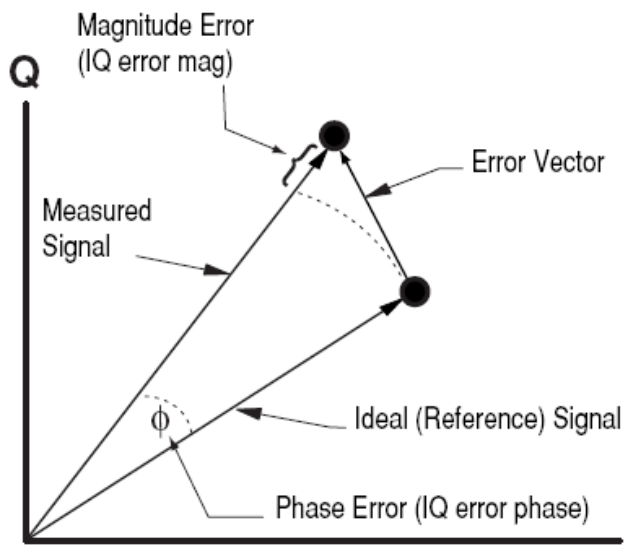


Figura 6.37 Misure dell'accuratezza della modulazione [57]

Il vettore che congiunge le estremità dei due fasori prende il nome di Error Vector, proprio perché fornisce alcune importanti informazioni sull'errore. La sua ampiezza viene detta anche Error Vector Measurement, brevemente EVM. Al contrario, la sua fase assume valori casuali e viene trascurata. Infatti, all'atto pratico la disposizione dei simboli nella costellazione è influenzata da innumerevoli fattori, difficilmente conciliabili in un'unica relazione deterministica. Pertanto, è ragionevole considerarla una funzione casuale.

Nonostante la maggior parte degli odierni strumenti proceda al computo automatico dell'EVM, può essere interessante analizzare nel dettaglio la sequenza di passaggi che conducono all'effettiva misura.

Il primo passaggio prevede la demodulazione del messaggio ricevuto. In tal senso, si recupera il corretto *symbol clock* e si procede alla ricostruzione del flusso dei *bit* trasmessi. Nel secondo passaggio, questi stessi *bit* vengono utilizzati per generare l'andamento atteso del segnale. Tale forma d'onda si presenta in condizioni ideali, con un elevato grado di risoluzione e del tutto priva di rumore. Infine, il terzo passaggio effettua la differenza tra l'andamento misurato e quello atteso. L'operazione è leggermente complicata dal fatto che entrambe le forme d'onda sono complesse, consistendo di una componente in fase e una in quadratura. Fortunatamente, gli odierni strumenti dispongono di unità di calcolo molto potenti, in grado di effettuare la sottrazione e restituire i risultati desiderati.

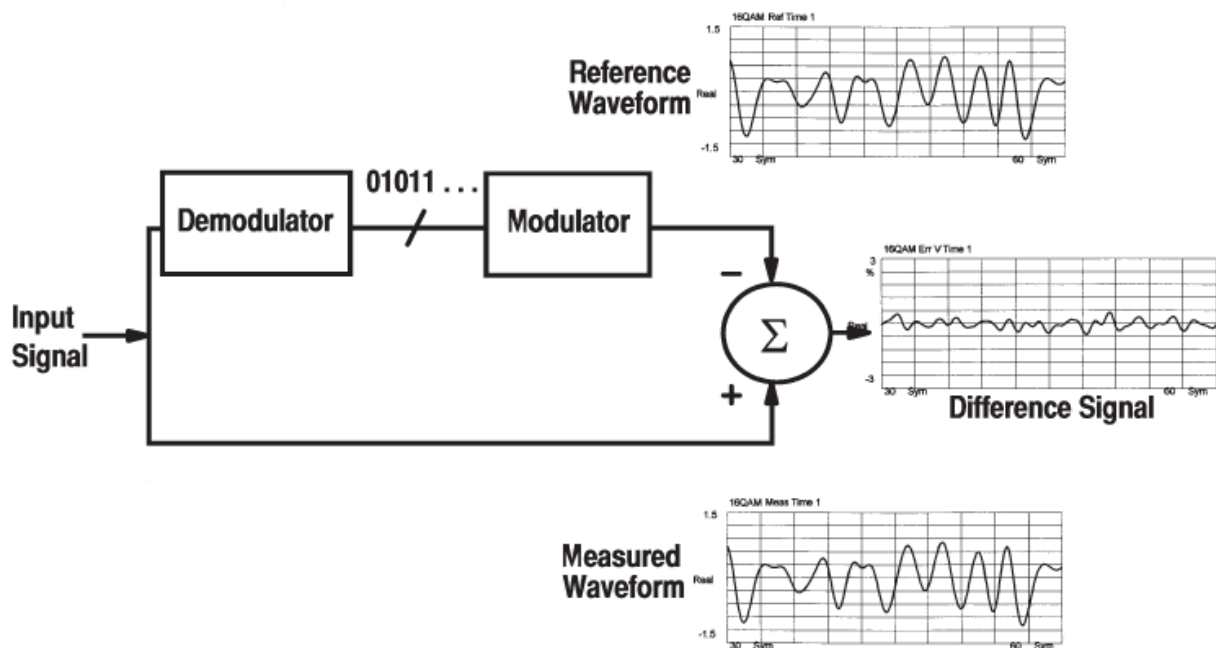


Figura 6.38 Sequenza di passaggi che conduce alla misura dell'EVM nel caso di un segnale modulato con una 16QAM [58]

Rifacendosi ai dettami dell'algebra lineare, il confronto dei due fasori fornisce due ulteriori parametri. La differenza tra le rispettive fasi è detta errore di fase I / Q , mentre la differenza tra le rispettive ampiezze è detta errore di ampiezza I / Q .

6.13.4 Interpretazione dei dati raccolti

Differenti fonti di errore incidono in maniera diversa sui risultati. Solo conoscendo le cause scatenanti si possono attuare le contromisure più opportune.

Nel tracciare la diagnosi di un sistema di comunicazione, si è soliti cominciare confrontando gli errori di fase e ampiezza I / Q . In tal senso, non si considerano i valori assoluti, bensì la loro media temporale, valutata sull'intero intervallo di acquisizione. Peraltro, si tratta di grandezze eterogenee: l'errore medio di fase è misurato in gradi o radianti, mentre l'errore medio di ampiezza è un indice percentuale.

Se il valore della fase è pari ad almeno cinque volte quello dell'ampiezza, allora è presente qualche forma indesiderata di PM. In modo del tutto analogo, se il valore dell'ampiezza è significativamente maggiore di quello della fase, allora è presente qualche forma indesiderata di AM. Nella maggior parte dei casi, però, i due errori medi sono confrontabili e la causa va ricercata altrove.

L'analisi dell'andamento temporale dell'errore di fase I / Q rivela qualsiasi componente PM sovrapposta al segnale. La presenza di una forma d'onda regolare è un chiaro sintomo di un segnale interferente modulato in fase. Invece, un profilo frastagliato simile a quello del rumore uniforme indica un disturbo di più lieve entità come può essere un *random jitter*.

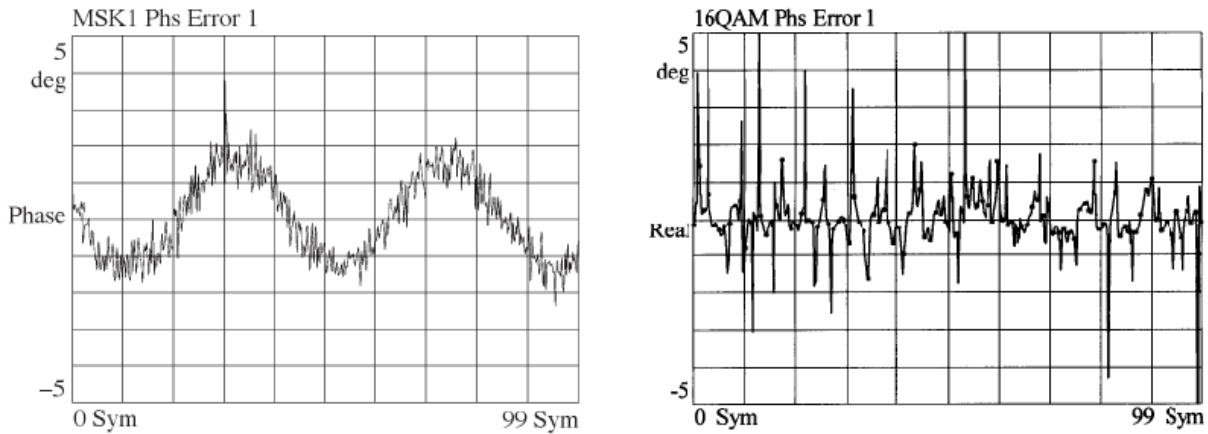


Figura 6.39 Andamento temporale dell'errore di fase I / Q : a sinistra, forma d'onda regolare; a destra, rumore uniforme [58]

Al termine della ricostruzione, il segnale dovrebbe presentare una costellazione uniforme e simmetrica rispetto all'origine. Non è raro, però, che la massima ampiezza sull'asse I non coincida con la massima altezza sull'asse Q , ossia che si verifichi un certo sbilanciamento nel diagramma I / Q . Generalmente, questo fenomeno è dovuto ad un errore nella traslazione in fase imposta all'asse Q .

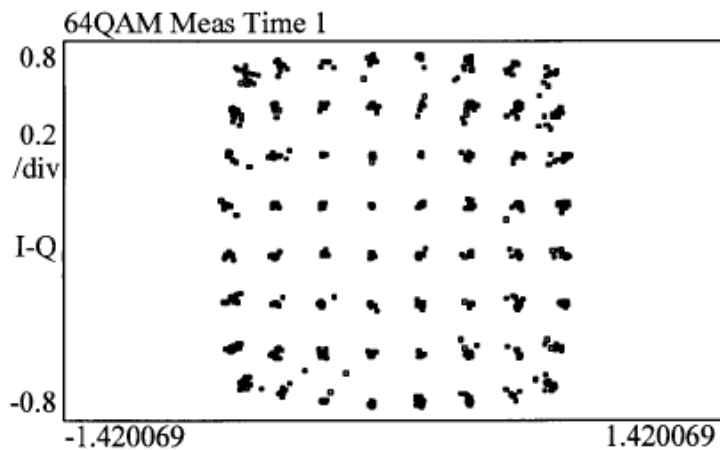


Figura 6.40 Costellazione che denota un chiaro sbilanciamento degli assi I e Q [58]

L'andamento temporale dell'EVM è strettamente correlato a quello del segnale. Quando i picchi dell'errore occorrono in corrispondenza dei picchi del segnale, alcuni dati sono stati compressi o addirittura tralasciati. Quando, invece, i picchi dell'errore occorrono in corrispondenza dei punti di minimo del segnale, possono esserci delle non linearità collegate ad un attraversamento dell'origine del diagramma I / Q .

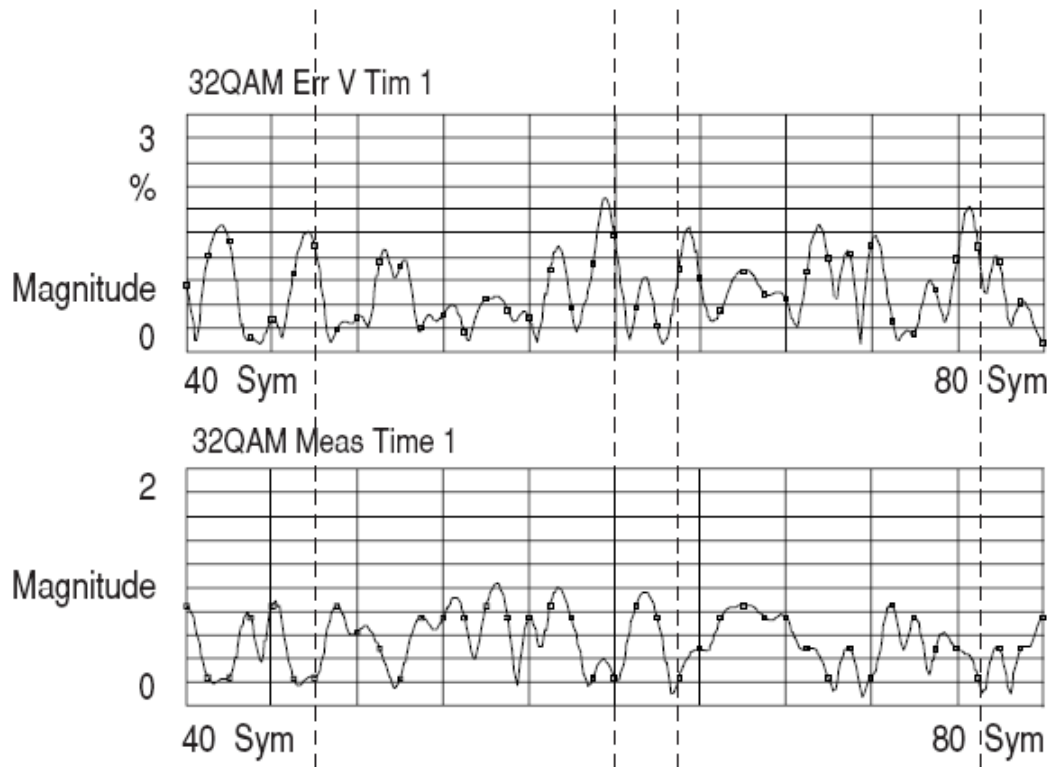


Figura 6.41 Andamenti temporali a confronto: sopra, l'EVM; sotto, il segnale [58]

Applicando la trasformata di Fourier all'EVM, si possono cogliere alcuni dettagli, altrimenti invisibili nel dominio del tempo. Un basso livello di rumore uniforme non desta preoccupazione. Lo stesso non si può dire quando il rumore si concentra in determinate bande. Questo fenomeno può essere interpretato come un chiaro indizio di interferenza, da parte di un canale adiacente o di un altro circuito accoppiato.

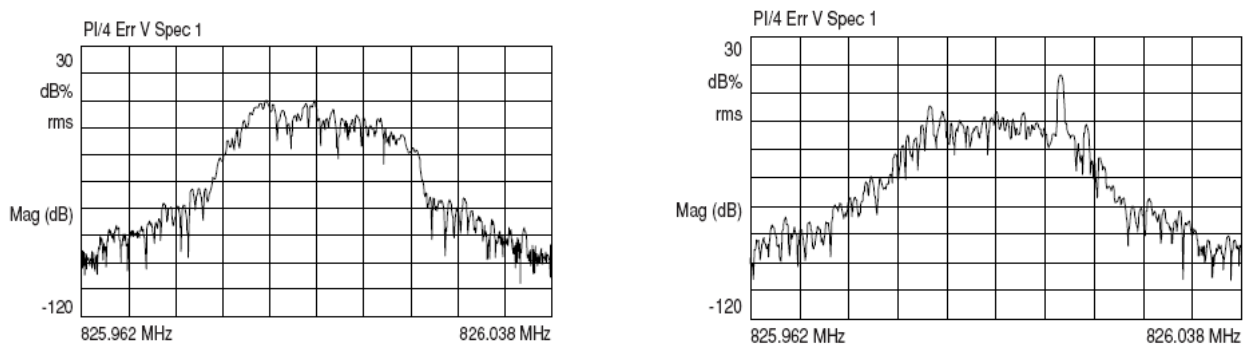


Figura 6.42 A sinistra, interferenza da parte di un canale adiacente; a destra, interferenza dovuta all'accensione in un circuito accoppiato esternamente [58]

CAPITOLO VII

Risultati sperimentali

7.1 Introduzione

L'incessante domanda di nuovi servizi ha imposto un cambiamento radicale allo scenario delle trasmissioni a radiofrequenza. In tal senso, si possono distinguere due attori principali: da un lato, gli utenti primari, detentori di regolare licenza; dall'altro, gli utenti secondari, abili a sfruttare le porzioni libere dello spettro. Nulla vieta che la banda destinata ad un utente primario sia temporaneamente non occupata. Al contrario, un recente studio ha effettuato misure di occupazione spettrale in un campione di località statunitensi, conseguendo risultati inattesi e sorprendenti: il valore medio si attesta attorno al 5%, con picchi massimi del 13% [59]. In molti paesi, questo fenomeno ha convinto gli organi di controllo ad abbandonare la tradizionale politica delle licenze, a favore di un utilizzo più efficiente dello spettro, rappresentato dalle cosiddette tecniche di *spectrum sharing*.

L'apporto della comunità scientifica è stato notevole: basti considerare l'ingente numero di pubblicazioni dedicate all'argomento. Allo stato dell'arte, la proposta più accreditata risponde al nome di *cognitive radio*. Tale denominazione rivela il nucleo concettuale del progetto, espresso già nella versione originale di Mitola [60, 61]. Il dispositivo attua un costante monitoraggio dell'ambiente interno ed esterno alla radio, acquisendo informazioni sull'occupazione spettrale, sulle esigenze dell'utente e sullo stato del circuito. Quindi, sulla base di questi dati, identifica i parametri di trasmissione e ricezione che garantiscono la massima efficienza di comunicazione, senza interferire con altri utenti, primari o secondari che siano.

In quest'ottica, particolare attenzione va rivolta allo *spectrum sensing*, ossia all'acquisizione e alla gestione delle informazioni spettrali. Misure inaffidabili o imprecise rischiano di compromettere le prestazioni del dispositivo, provocando il disturbo o addirittura l'interruzione delle comunicazioni di altri utenti.

7.2 *Spectrum sensing*

Nell'economia dei sistemi di comunicazione RF, l'adozione delle tecniche di *spectrum sensing* costituisce un indubbio vantaggio. Monitorare in tempo reale le condizioni operative e l'ambiente esterno consente di ottimizzare le risorse a disposizione, abbattendo i costi e i tempi di trasmissione.

All'atto pratico, i risultati sono molto lusinghieri, ma non devono trarre in inganno. Un simile approccio dimostra ancora ampi margini di miglioramento, soprattutto per quanto riguarda l'affidabilità del processo di misura. Per esempio, le odierne tecniche sono sensibili ai soli trasmettitori. Questo aspetto è una potenziale causa di inefficienza: in linea di principio, la banda occupata da un trasmettitore può essere riutilizzata se non vi sono ricevitori all'ascolto. Su questi e analoghi dettagli si concentra l'attenzione dei ricercatori, volta a fornire delle misure sempre più precise e affidabili.

7.2.1 Energy detection

La soluzione meno dispendiosa, in termini sia realizzativi che di informazioni a priori, risponde al nome di *energy detection*. Un apposito sensore quantifica l'energia associata alla banda di interesse: il superamento di una soglia prefissata è indice di attività spettrale.

L'indiscusso vantaggio di questa tecnica è rappresentato dalla sua generalità: la natura del segnale trasmesso è del tutto ininfluente ai fini dell'esito finale. D'altro canto, un approccio così aspecifico limita notevolmente il contenuto informativo dei risultati: nulla si può dire sulle caratteristiche del sistema o dell'utente che occupano la banda di interesse.

La semplicità del concetto di fondo ha favorito la comparsa di diversi prototipi, noti anche come radiometri. Tuttavia, all'atto pratico, sono emerse controindicazioni tali da consigliarne l'utilizzo su larga scala. Infatti, i radiometri mal tollerano la presenza di componenti indesiderate, tanto più se variabili nel tempo. Peraltro, la definizione della soglia richiede un'analisi preventiva dell'ambiente di lavoro, che quantifichi il livello delle componenti rumorose e delle interferenze prodotte da altri circuiti limitrofi.

7.2.2 Cyclostationarity detection

Un processo stocastico si definisce ciclostazionario se alcune delle sue proprietà statistiche esibiscono un andamento periodico nel tempo. In tal senso, l'esempio più consueto è rappresentato dalla funzione di autocorrelazione che, trascorso un certo intervallo, si ripropone identica a se stessa.

Questo modello matematico si presta a diverse interpretazioni. Nell'ambito delle telecomunicazioni, la periodicità dei dati può essere dovuta ai processi di modulazione, campionamento o codifica.

Nasce così la *cyclostationarity detection*, in grado di ridurre l'analisi dell'occupazione spettrale ad un semplice problema di ottimizzazione. Tipicamente, la funzione obiettivo coincide con l'autocorrelazione di un parametro ciclostazionario, per esempio la *symbol rate*. Peraltro, l'affidabilità dei risultati è garantita dal ricorso a stimatori di tipo bayesiano, che si avvalgono, cioè, di informazioni a priori.

Dal confronto con la *energy detection*, emergono pregi e difetti. Indubbiamente, questa tecnica ha un maggiore grado di specificità, in quanto si applica esclusivamente a segnali che esibiscano proprietà statistiche periodiche. D'altro canto, è in grado di classificare il segnale acquisito, determinando se si tratta di un utente primario o secondario ed esplicitando il paradigma di modulazione.

Quest'ultimo aspetto si rivela molto utile all'atto pratico. Infatti, consente di distinguere le diverse trasmissioni, tracciando così una sorta di mappa temporale della banda di interesse. Peraltro, la nuova formulazione del problema implica un maggiore carico computazionale, ma anche una maggiore robustezza nei confronti delle componenti indesiderate, quali rumore e interferenze.

7.2.3 Matched filter detection

Nell'ambito della banda di interesse, non tutti i segnali godono della stessa priorità o rilevanza. Ragionando in termini quantitativi, la *energy detection* adotta un criterio piuttosto semplicistico e ne valuta soltanto il

contenuto energetico. Invece, la *ciclostationarity detection* è in grado di classificare il segnale acquisito, ossia distingue una componente indesiderata da un'effettiva trasmissione.

Talvolta, però, si nutre l'interesse di riconoscere una specifica forma d'onda, definita sulla base di conoscenze aprioristiche o di semplici assunzioni. Allo scopo, la cosiddetta *matched filter detection* calcola la correlazione tra il segnale acquisito e il profilo di riferimento. Il risultato viene espresso in termini di ampiezza e fase: laddove l'ampiezza supera una soglia prefissata, il segnale si intende riconosciuto.

All'atto pratico, un simile protocollo operativo si rivela molto affidabile: conoscendo a priori la forma d'onda trasmessa, si può ridurre drasticamente l'incidenza di rumori e interferenze. Di contro, la sua applicazione richiede un ingente mole di informazioni a priori, non sempre disponibile.

7.2.4 Approccio cooperativo

Questa rapida carrellata ha esposto tre semplici criteri per le procedure di *spectrum sensing*. Parimenti, un aspetto da non tralasciare è il numero dei sensori cui è deputato il compito di misurare e valutare le grandezze di interesse.

Indubbiamente, l'adozione di un unico sensore permette di tenere sotto controllo i costi di realizzazione e la complessità del sistema. D'altro canto, una simile configurazione cela anche delle insidie. Il segnale acquisito dal sensore è influenzato da diversi fattori ambientali: nel caso peggiore può risultare schermato, o attenuato al punto da vanificare qualsiasi tentativo di misura.

Alcune immediate contromisure prevedono il ricorso a soluzioni tecnologiche d'avanguardia o a valori di soglia molto conservativi. Tuttavia, non si tratta di scelte indolori: la prima incide sui costi realizzativi; la seconda, invece, incrementa la probabilità di falsi allarmi, ossia la probabilità di ritenere una banda occupata anche quando, in realtà, non lo è.

Il manifestarsi di questi svantaggi ha convinto i ricercatori ad adottare un approccio cooperativo, dove le misure siano condotte da un insieme di sensori, opportunamente coordinati. In particolare, i dati acquisiti ad ogni nodo del circuito sono realizzazioni indipendenti della medesima variabile aleatoria.

Tale configurazione garantisce un netto miglioramento delle prestazioni: la probabilità di un esito positivo, in precedenza pari a \mathcal{P}_D , si attesta ora a $\mathcal{P}_{CD} = 1 - (1 - \mathcal{P}_D)^N$, dove N è il numero complessivo di sensori. Senza dubbio, si tratta di un incremento significativo, che mette al riparo da spiacevoli errori di valutazione. Peraltro, un innocuo sacrificio in termini di \mathcal{P}_{CD} può ridurre drasticamente l'occorrenza dei falsi allarmi.

7.2.5 Selezione e coordinamento dei sensori

La definizione del numero più appropriato di sensori deve tenere conto di due esigenze contrastanti.

Da un lato, il desiderio di misure sempre più affidabili induce a incrementare N . Dall'altro, la necessità di contenere costi realizzativi e consumi energetici impone di ridurre N . Come spesso accade, la soluzione ottimale attua un compromesso tra le due istanze.

Per non precludere alcuna scelta, le odierne *cognitive radio* dispongono di numerosi sensori: a seconda delle specifiche esigenze, se ne seleziona un certo numero, lasciando gli altri inoperosi. Naturalmente, la preferenza viene accordata a quelli che garantiscono misure precise accurate. In tal senso, un indice significativo è rappresentato dalla dissipazione del segnale del trasmettitore di interesse. Tanto minore è l'entità del fenomeno, quanto maggiore è l'affidabilità del sensore.

La fase di selezione ha ispirato numerose proposte algoritmiche. L'approccio più consueto prevede la definizione di una funzione obiettivo, la cui minimizzazione fornisce la soluzione ottimale. In quest'ottica, ad ogni coppia di sensori viene associato uno specifico costo, tipicamente una misura di correlazione, derivata dalla stima delle rispettive posizioni [62]. Ne risulta un classico problema di ottimizzazione, la cui complessità $NP - hard$ suggerisce un ricorso a metodi risolutivi *ad hoc*, per esempio un algoritmo *greedy*.

Adottare un criterio quantitativo garantisce migliori prestazioni rispetto ad una selezione casuale. Questo principio intuitivo trova conferma nella pratica sperimentale. Pur variando la distribuzione dei sensori nello spazio, l'idea di preferire quelli meno correlati si dimostra vincente: incrementa la probabilità di successo, diminuisce l'incidenza dei cosiddetti falsi allarmi.

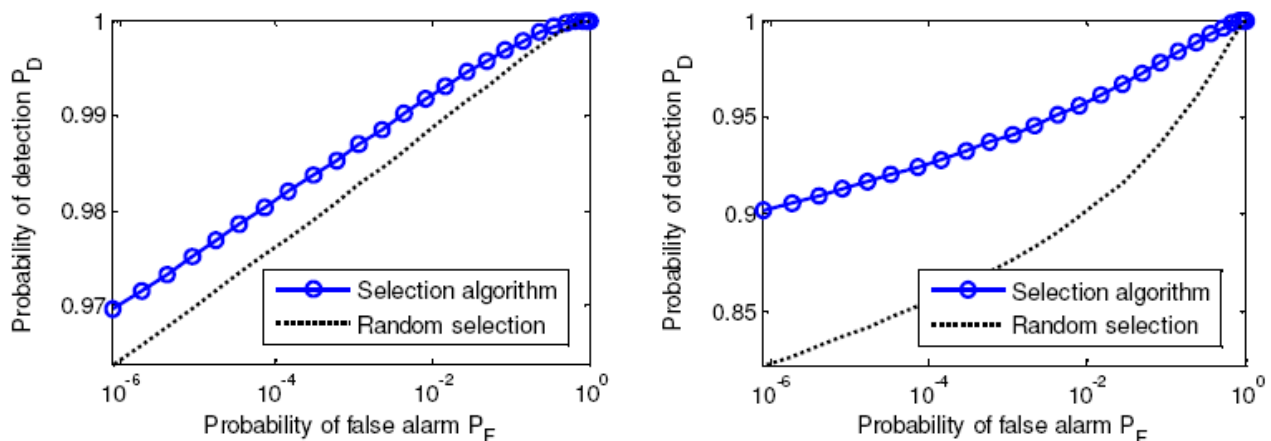


Figura 7.43 Confronto degli andamenti di $\mathcal{P}_D/\mathcal{P}_F$ in presenza di selezione casuale e deterministica dei sensori, con due distribuzioni dei sensori: a sinistra, uniforme; a destra, *clustered* [63]

La cooperazione dei sensori consente anche di ripartire opportunamente carichi computazionali e consumi. In tal senso, la banda di interesse viene suddivisa in intervalli più piccoli, ciascuno dei quali viene affidato ad uno specifico gruppo di sensori. Generalmente, la composizione dei gruppi non è immutabile, ma viene rinnovata in maniera periodica. Il cosiddetto grado di diversità indica quanti sensori formano ogni gruppo. All'atto pratico, questo parametro incide su fenomeni quali propagazione dei disturbi o dissipazione del segnale di interesse.

Terminata la fase di acquisizione, una comune unità di controllo raccoglie le informazioni provenienti dai diversi nodi e ne ricava un profilo complessivo dell'occupazione spettrale. Al fine di minimizzare i tempi di esecuzione, si attua un'opportuna coordinazione: ad ogni istante, una sequenza temporale pseudo - casuale determina quale gruppo di sensori attivare, ossia quale intervallo ispezionare: a tutti gli effetti, è lecito parlare di *frequency hopping*.

D'altro canto, lo *spectrum sensing* è una procedura continuativa e non prevede interruzioni di sorta. Così, al fine di minimizzare i consumi, si classificano gli intervalli della banda di interesse a seconda della frequenza con cui vengono adoperati. Non ha senso monitorare incessantemente un canale, che per la maggior parte del tempo si dimostra libero e inutilizzato.

Una consueta suddivisione distingue tre tipologie di canali: *used*, *backup* e *other*. La prima classe identifica i canali maggiormente utilizzati: ad ogni ciclo di funzionamento del dispositivo il loro stato viene aggiornato. La seconda classe contiene i canali di riserva, monitorati con una certa frequenza. Infine, la terza classe contempla tutti gli altri canali, che per un motivo o per l'altro non vengono impiegati: è sufficiente un controllo saltuario e occasionale.

7.3 Ruolo del convertitore MWC

Mantenendosi nell'ambito dello *spectrum sensing*, la necessità di misure accurate e affidabili ha convinto i ricercatori ad abbandonare i classici protocolli di acquisizione, a favore di progetti innovativi e rivoluzionari. Lo stesso convertitore MWC può far parte a pieno titolo di questa categoria. Opportune scelte algoritmiche gli consentono di stimare la localizzazione e l'estensione delle principali componenti spettrali, tralasciando invece rumori e interferenze varie.

I dati raccolti eccedono le richieste di una semplice analisi di occupazione spettrale. Nondimeno, rivelano informazioni fondamentali sul segnale trasmesso. Al riguardo, basti considerare la costellazione del segnale ricostruito. La procedura di ricostruzione non ne sconvolge le proprietà; al contrario, l'andamento ricalca quello previsto, in condizioni ideali, per lo schema di modulazione adottato.

In chiave sperimentale, queste lusinghiere affermazioni hanno trovato conferma in numerose verifiche. Allo scopo, torna utile lo strumento di simulazione rappresentato dall'architettura digitale. I risultati, per quanto virtuali, confermano i pregi di un simile approccio: fedele nel ricostruire gli andamenti, ma anche rispettoso delle proprietà e del contenuto informativo delle varie trasmissioni.

7.4 Codice di simulazione

Al fine di garantire ordine e coerenza nelle operazioni da svolgere, il codice di simulazione viene suddiviso in due porzioni principali: la prima deputata alla generazione del segnale, la seconda alla sua acquisizione e ricostruzione. Effettivamente, le modifiche apportate alla versione originale sono poche e ben circoscritte: non intaccano i capisaldi dell'impianto teorico su cui poggia l'algoritmo.

7.4.1 Generazione del segnale

In sede di generazione del segnale, emergono due esigenze contrastanti: da un lato, si persegue la maggior verosimiglianza possibile; dall'altro, conviene attenersi alla parametrizzazione originale, garanzia di risultati certi e affidabili. In quest'ottica, il codice prevede la successione di cinque passaggi fondamentali.

Il segnale consiste di un'unica trasmissione, che si avvale di un protocollo di modulazione digitale di fase. Nel dominio del tempo, il pacchetto viene situato al centro dell'intervallo di osservazione. Tale scelta non è dettata da esigenze algoritmiche o computazionali: semplicemente, agevola l'interpretazione dei grafici.

L'idea fondamentale è quella di riprodurre una tipica trasmissione *wireless*. Per motivi di semplicità, se ne trasla il contenuto spettrale nella banda $[-200, 200]Hz$. In realtà, nell'ambito delle telecomunicazioni, un simile modo di procedere non è insolito: al contrario, molti strumenti preferiscono acquisire le componenti di interesse solo dopo averle riportate in banda base o comunque in una banda intermedia.

Il primo aspetto da chiarire concerne l'andamento temporale del segnale. Così, si introduce una finestra rettangolare, opportunamente traslata, che definisca i limiti della trasmissione. Volendo, però, conservare una certa aderenza con la realtà sperimentale, i fronti rettilinei vengono addolciti mediante convoluzione con una funzione di Hanning. Quest'ultima operazione rischia di influire sull'ampiezza dell'intera finestra. Così, si agisce opportunamente sulle dimensioni dei due fattori: la finestra rettangolare ha una durata di 6000 campioni, la funzione di Hanning di appena 20.

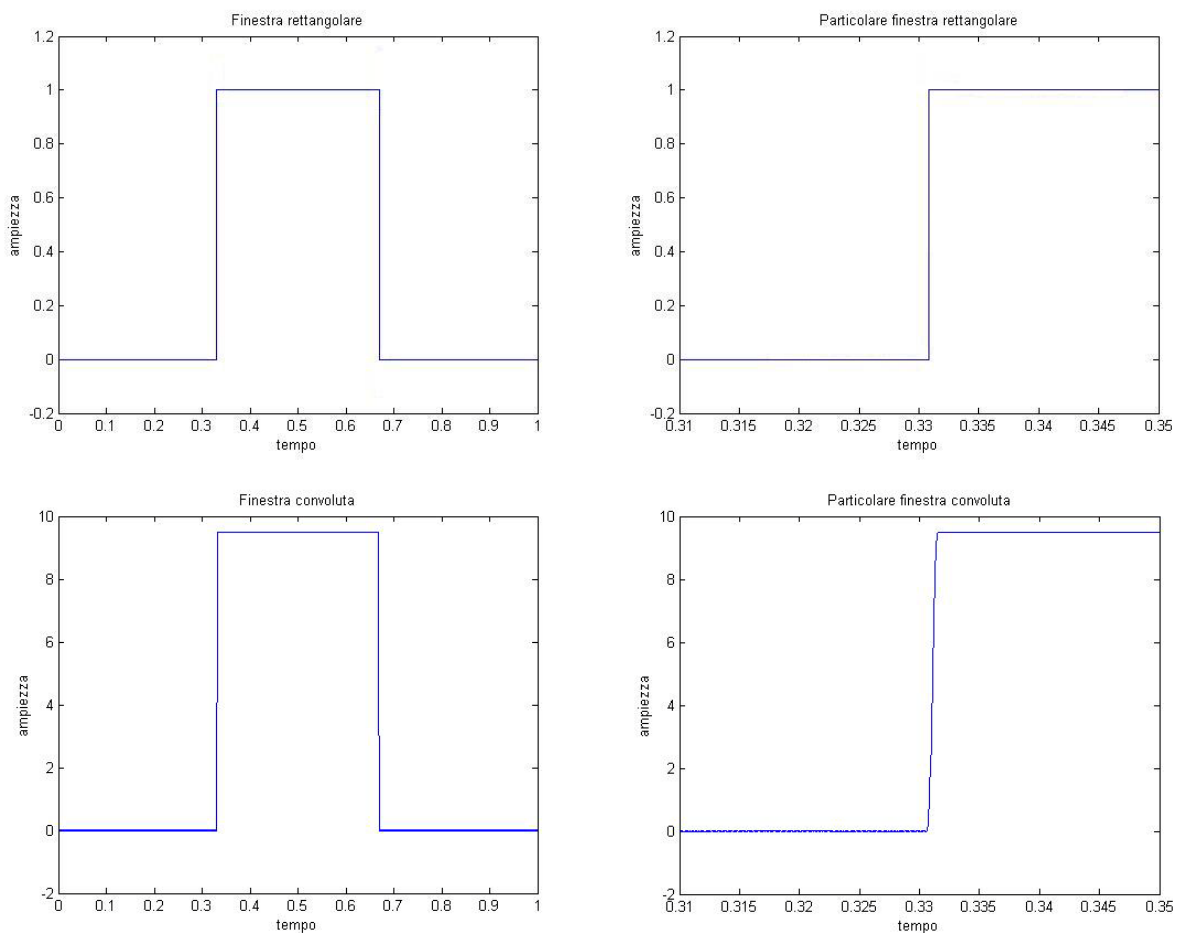


Figura 7.44 Andamento della finestra rettangolare prima e dopo la convoluzione con la funzione di Hanning

Giunti a questo punto, il codice definisce i principali parametri del protocollo di modulazione: la preferenza viene accordata alla QPSK, caratterizzata da una costellazione con appena quattro simboli.

D'altro canto, l'adozione di immediati criteri di simmetria riduce a due i valori assumibili da I e da Q , con un'evidente semplificazione in termini computazionali. Nel caso specifico, la scelta ricade su una configurazione ove i simboli giacciono sugli assi coordinati.

Tornando al codice, una sequenza casuale, formata da 100 interi appartenenti all'intervallo $[0, 3]$, viene inviata al modulatore. Come è lecito attendersi, il diagramma di costellazione che se ne ricava evidenzia, in modo chiaro e distinto, le posizioni dei quattro simboli.

Il passaggio successivo prevede l'interpolazione del segnale sull'intero asse dei tempi. Tale operazione va condotta con la massima attenzione, in quanto può introdurre componenti indesiderate ad alta frequenza. Per mitigare il fenomeno, si è soliti associare all'interpolatore un apposito filtro passa – basso, anche se non si tratta di una soluzione immune da controindicazioni.

Infatti, l'estensione della banda passante incide sulle caratteristiche della trasmissione, prima fra tutte sulle traiettorie che congiungono i diversi simboli. Mano a mano che il filtro si fa più selettivo, si assiste ad un progressivo arrotondamento delle traiettorie, fino alla comparsa di *overshoot* e *loop* nel corrispondente diagramma vettoriale.

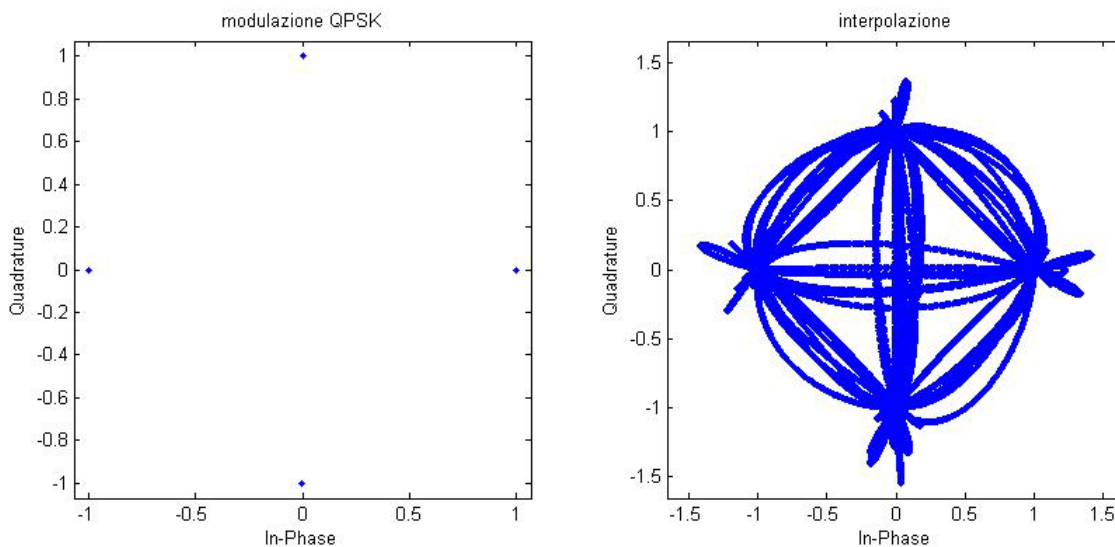


Figura 7.45 Scatterplot al termine della fase di modulazione QPSK (a sinistra) e di interpolazione (a destra)

Procedendo in modo sequenziale, il quarto passaggio prevede la modulazione per una portante sinusoidale. Nel dominio della frequenza, tale operazione equivale ad una traslazione della componente di interesse. Dovendo simulare un tipico ambiente di trasmissione *wireless*, si riproduce la stessa suddivisione in canali. Così, la frequenza assunta dalla portante appartiene ad un insieme, ove i valori plausibili distano almeno 5 MHz l'uno dall'altro. In particolare, vengono individuati 13 canali, centrati rispettivamente in:

12 17 22 27 32 37 42 47 52 57 62 67 72 MHz

Infine, nel quinto ed ultimo passaggio, il segnale risultante viene moltiplicato per la finestra rettangolare, approntata nel primo passaggio.

Al termine di questa articolata procedura, il segnale esibisce le tipiche caratteristiche di una trasmissione: nel dominio del tempo, il pacchetto è un impulso rettangolare dai fronti arrotondati, nel dominio della frequenza, la componente di interesse si mantiene all'interno del canale a lei dedicato. Evidentemente, non trattandosi di un segnale reale, bensì complesso, non vige la simmetria hermitiana.

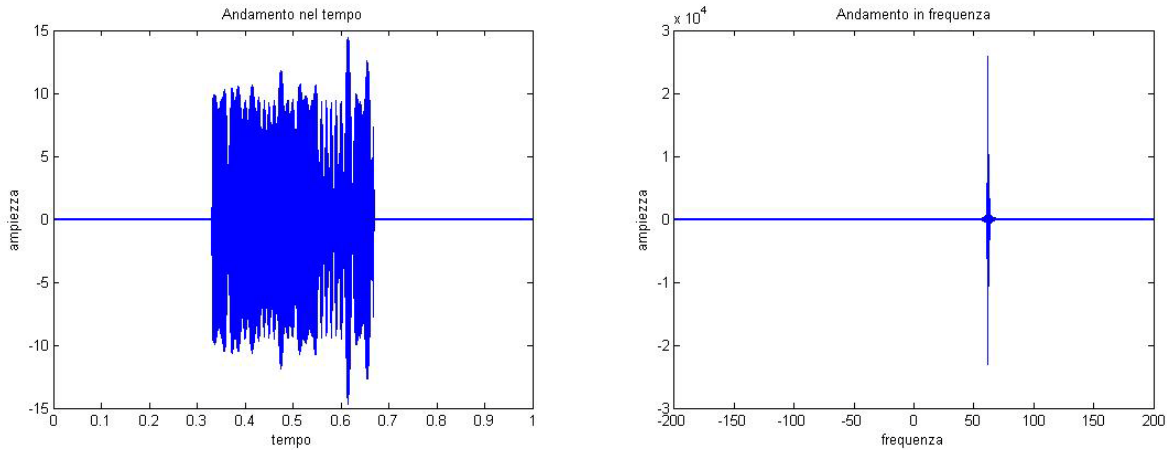


Figura 7.46 Andamento finale del segnale generato: a sinistra, nel dominio del tempo; a destra, nel dominio della frequenza

7.4.2 Ricostruzione del segnale

In sede di presentazione del problema, si è espressa l'intenzione di attenersi per quanto possibile alla parametrizzazione originale. Certo, tale scelta ha comportato qualche limitazione per quanto riguarda la generazione del segnale. Nondimeno, si dimostra azzeccata e vincente al momento della ricostruzione.

Infatti, salvo minime modifiche, il codice ricalca in ogni aspetto la proposta originaria di Eldar e Mishali.

Ripercorrendo, per sommi capi, i punti più salienti, si possono individuare almeno sei passaggi principali.

Innanzitutto, nel primo passaggio, il segnale viene corrotto da un rumore bianco gaussiano: l'entità del rapporto SNR viene decisa dall'utente mediante un apposito parametro.

Il secondo passaggio, invece, sancisce l'ingresso nel *mixer*: la moltiplicazione per le funzioni a segno alterno distorce il supporto originale, in modo tale che la componente attiva venga riproposta in banda base. Quindi, si procede al filtraggio passa – basso e alla successiva decimazione: ogni canale riceve un segnale di 19695 campioni e ne acquisisce appena 101.

Giunti a questo punto, l'utente dispone di tutti i dati necessari alla stima del supporto originario. Il compito, così cruciale per le sorti dell'algorithm, è assolto dal già citato blocco CTF. A tal proposito, nell'invocare la funzione *RunOMP_Unnormalized*, bisogna specificare la natura asimmetrica del supporto originario.

Per concludere, nel sesto ed ultimo passaggio, viene ricostruito l'effettivo profilo temporale del segnale. Allo scopo, data la matrice A del sistema di misura, il codice ne estrapola A_S , ossia ne conserva le sole colonne i cui indici appartengano al supporto stimato. Quindi, mediante l'apposita funzione *pinv*, calcola la pseudo – inversa di A_S e la moltiplica per i campioni acquisiti nel *mixer*.

Apparentemente, questo sesto passaggio è del tutto inutile ai fini di un'analisi di *spectrum sensing*. In realtà, fornisce valide informazioni in merito alla natura della trasmissione e dell'utente che l'ha effettuata.

7.5 Valutazione dei risultati

L'architettura del convertitore MWC non nasce, in origine, per assolvere a compiti di *spectrum sensing*. Nondimeno, alcuni aspetti procedurali si prestano perfettamente a questo scopo. Al riguardo, basti considerare la pregevole risoluzione offerta nel dominio della frequenza o la possibilità di distinguere le componenti significative da quelle rumorose o, comunque, indesiderate. In questo contesto, prende forma l'innovativo approccio alla disciplina dello *spectrum sensing*, forte anche dei vantaggi offerti dalla teoria CS. Volendo stilare un giudizio obiettivo sulle prestazioni dell'algoritmo, si sono dovuti individuare degli indici quantitativi e di facile interpretazione. In tal senso, la scelta è ricaduta su due particolari grafici: il primo rappresenta l'errore di ricostruzione nel tempo, il secondo la costellazione del segnale ricostruito.

La pratica sperimentale insegna come rumori e disturbi, sovrapposti al segnale di interesse, ne possano compromettere un'affidabile acquisizione. Neanche quest'approccio è del tutto immune alle componenti indesiderate, sia che provengano dall'ambiente esterno, sia che si generino nello stesso processo di misura. Pertanto, è lecito attendersi un progressivo deterioramento delle prestazioni, al calare del rapporto SNR.

Una dettagliata valutazione dell'algoritmo non può prescindere da questo aspetto. Così, ogni grafico è stato replicato per diversi valori del rapporto SNR, alla ricerca di una qualche forma di correlazione. In tal senso, viene esplorata una discreta gamma di configurazioni: 25, 10, 0, -10 e -20 dB.

7.6 Errore di ricostruzione nel tempo

A titolo di esempio, si consideri un segnale di interesse la cui componente attiva sia centrata a 22 MHz.

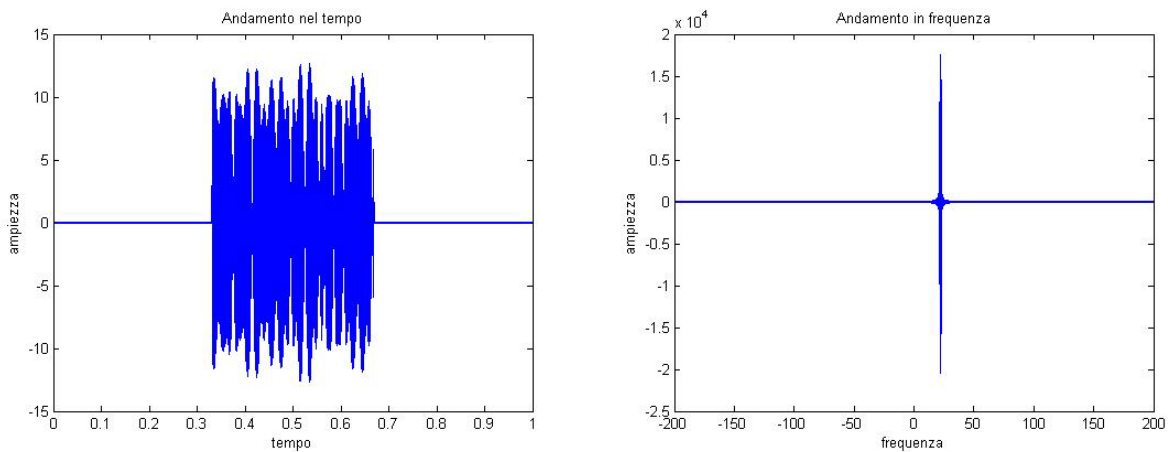


Figura 7.47 Andamento del segnale di interesse nel dominio del tempo (a sinistra) e della frequenza (a destra)

L'apposito algoritmo è in grado di riprodurre fedelmente questo profilo temporale. L'eventuale discrepanza rispetto al riferimento originale prende il nome di errore di ricostruzione. Tale indice gode di un'immediata trasposizione grafica, fonte di numerose e utili informazioni. In quest'ottica, valori scorrelati e di ampiezza trascurabile sono imputabili alla sola componente rumorosa e certificano la bontà della ricostruzione; al contrario, valori di picco, positivi o negativi che siano, indicano la presenza di imprecisioni, sfasamenti o dettagli non rilevati.

Volendo evidenziare proprio fenomeni del genere, la presente analisi si concentra su due specifici intervalli: il primo denota un'oscillazione ad ampiezza pressoché costante; il secondo corrisponde all'occorrenza di una variazione di fase.

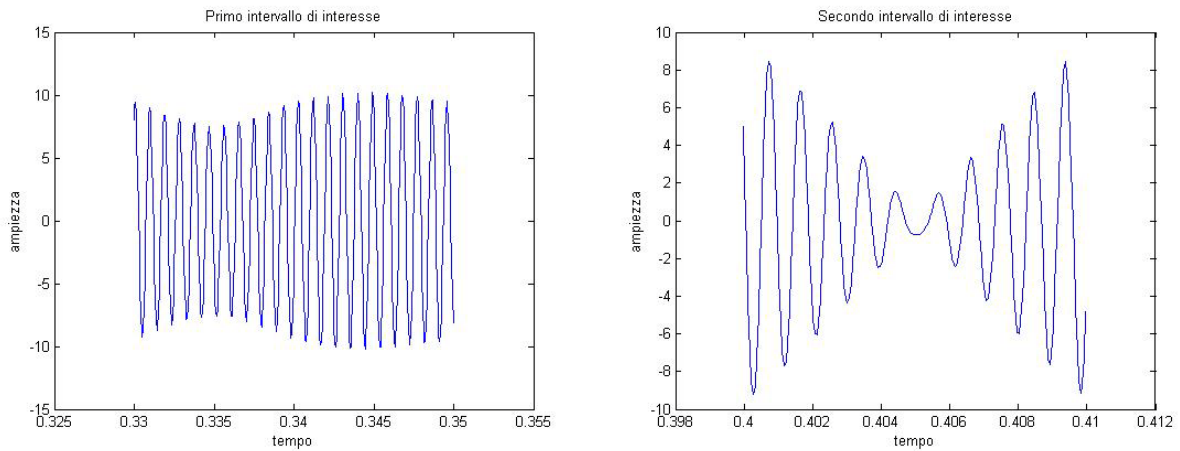


Figura 7.48 Andamento nel dominio del tempo dei due intervalli di interesse

7.6.1 Rapporto SNR 25 dB

Adottando un rapporto SNR pari a 25 dB, il profilo del segnale di interesse non subisce variazioni di rilievo, né nel dominio del tempo, né nel dominio della frequenza. Come è lecito attendersi, la ricostruzione non presenta particolari problemi: entrambi gli andamenti riproducono fedelmente l'originale.

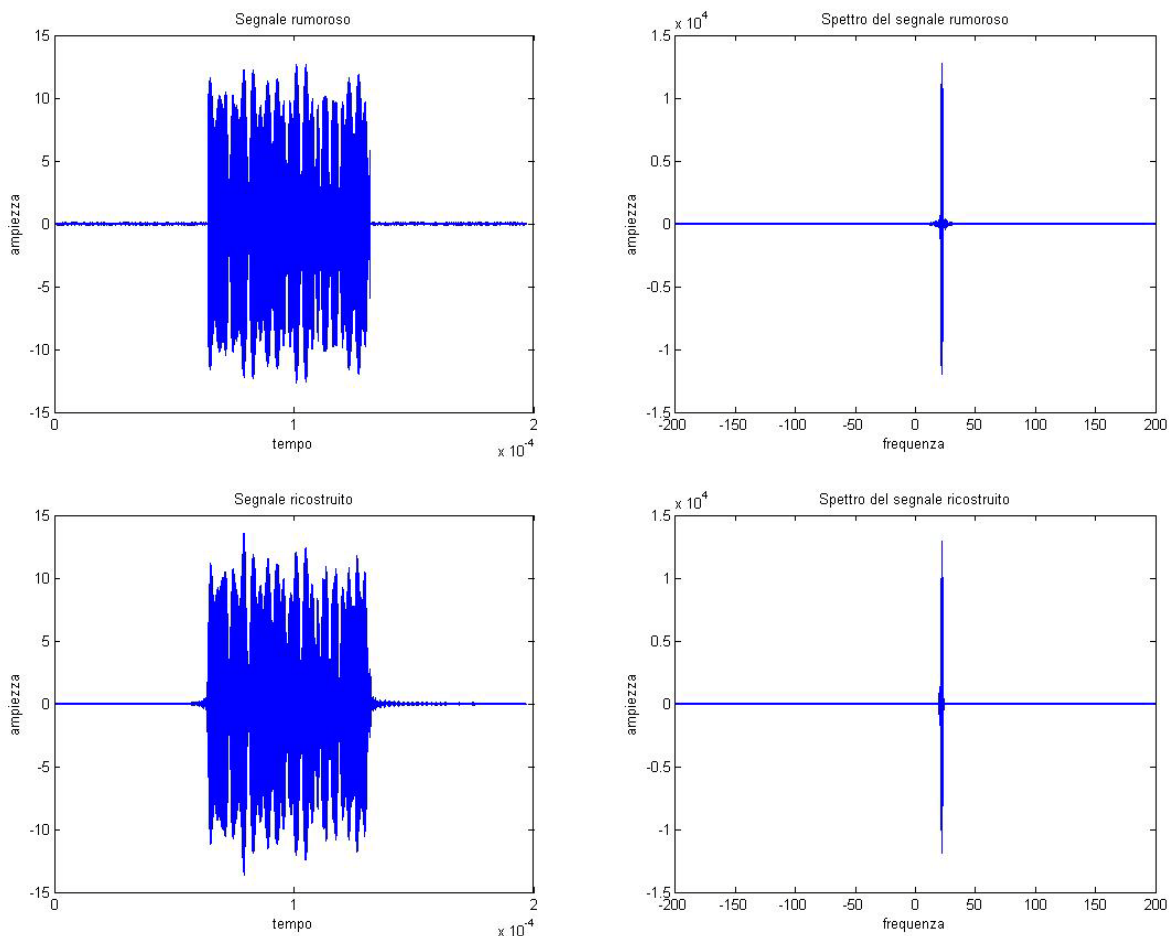


Figura 7.49 Andamenti nel dominio del tempo e della frequenza del segnale rumoroso (sopra) e ricostruito (sotto)

Si passa ora a valutare l'errore di ricostruzione in corrispondenza dei due intervalli di interesse.

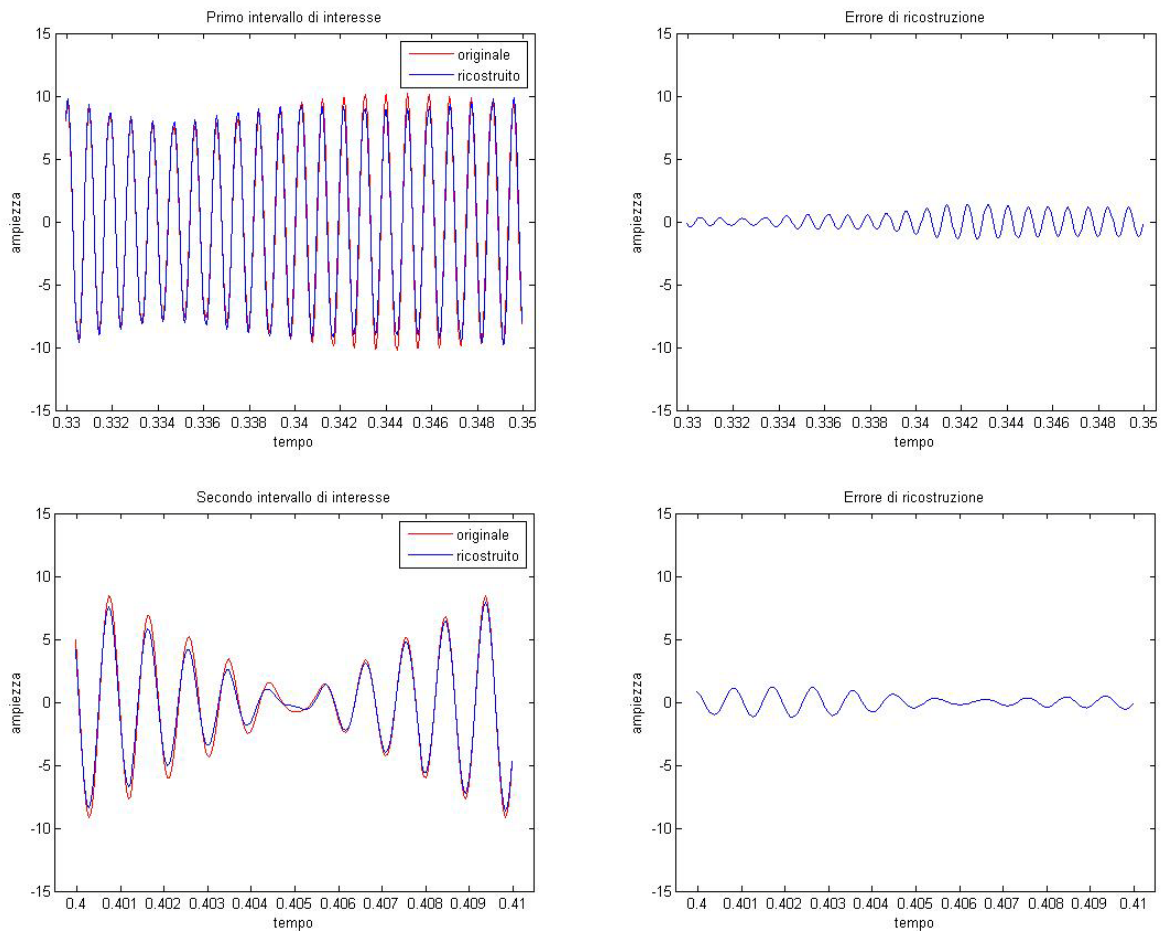
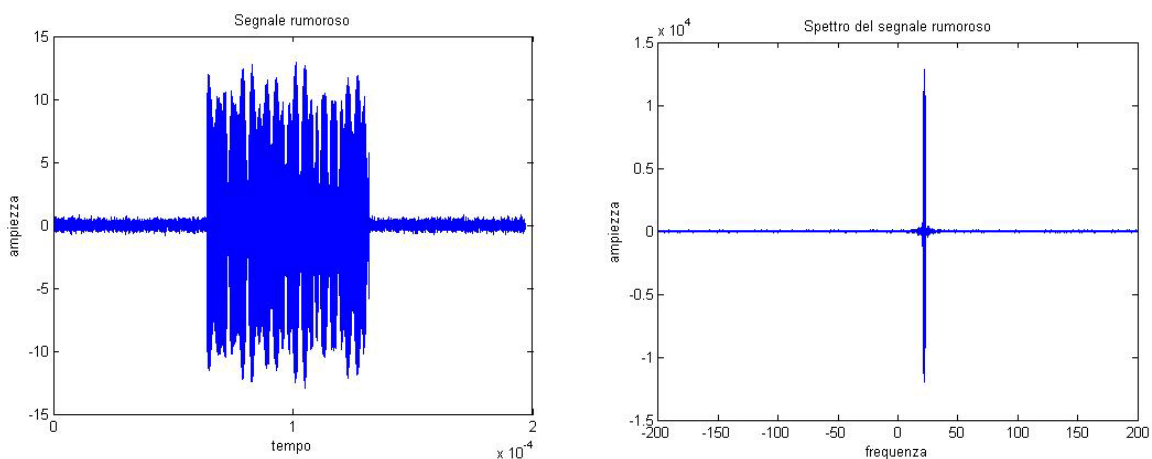


Figura 7.50 Valutazione dell'errore di ricostruzione nel primo (sopra) e secondo (sotto) intervallo di interesse

In entrambi i casi, la ricostruzione aderisce quasi perfettamente al profilo di riferimento. Lo stesso dato è confermato dall'andamento dell'errore di ricostruzione, la cui entità è trascurabile rispetto all'ampiezza del profilo originale.

7.6.2 Rapporto SNR 10 dB

Il passaggio ad un rapporto SNR pari a 10 dB non altera radicalmente il quadro della situazione.



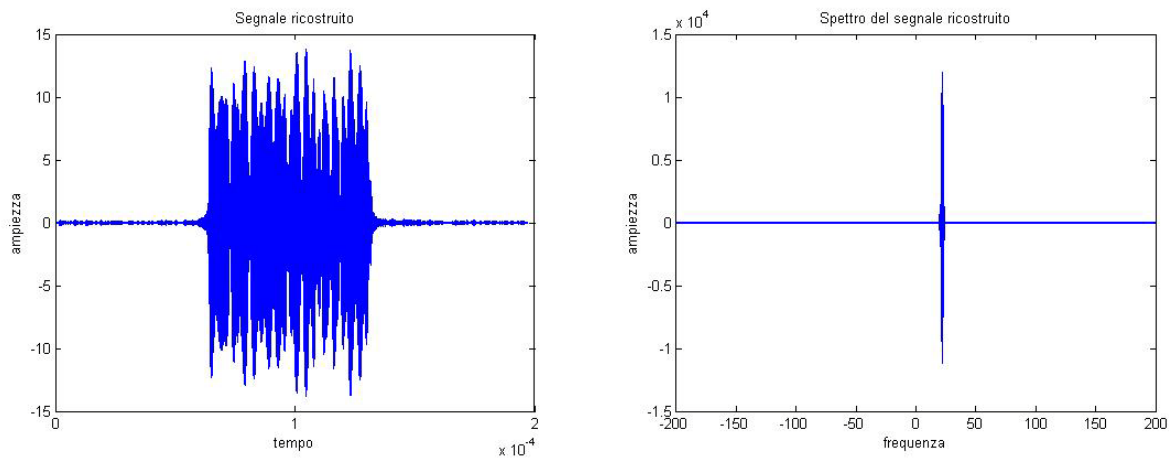


Figura 7.51 Andamenti nel dominio del tempo e della frequenza del segnale rumoroso (pag. precedente) e ricostruito (sopra)

Neppure l'errore di ricostruzione si discosta molto da quanto esibito nel caso precedente: in entrambi i casi, le discrepanze sono così minimali da poter essere trascurate.

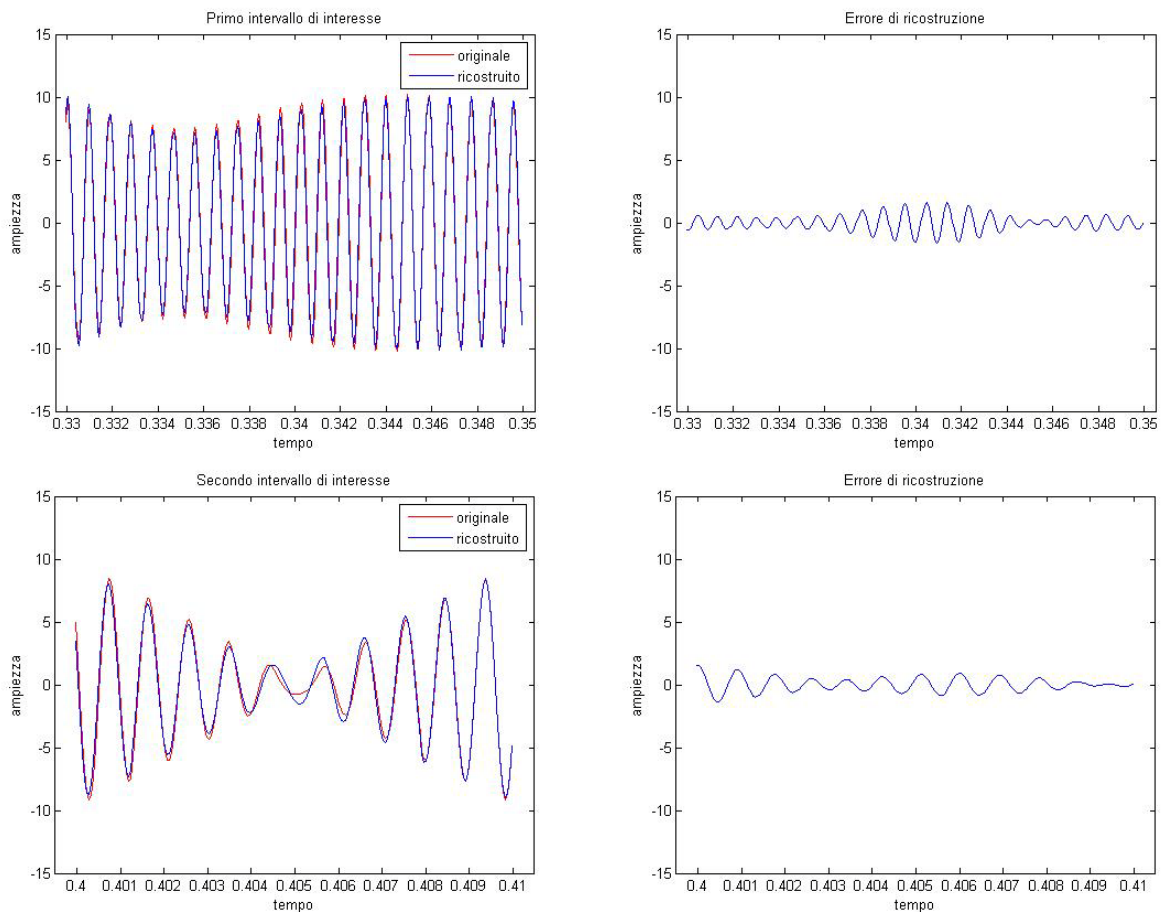


Figura 7.52 Valutazione dell'errore di ricostruzione nel primo (sopra) e secondo (sotto) intervallo di interesse

7.6.3 Rapporto SNR 0 dB

Pur aggravando, ulteriormente, l'entità delle componenti rumorose, l'algoritmo continua a fornire risultati più che soddisfacenti. Anche in presenza di un rapporto SNR pari a 0 dB, i profili ricostruiti nel dominio del tempo e della frequenza evidenziano i soli particolari di interesse, tralasciando quelli spuri o indesiderati. L'errore di ricostruzione si attesta, ancora una volta, su valori non superiori al 10%.

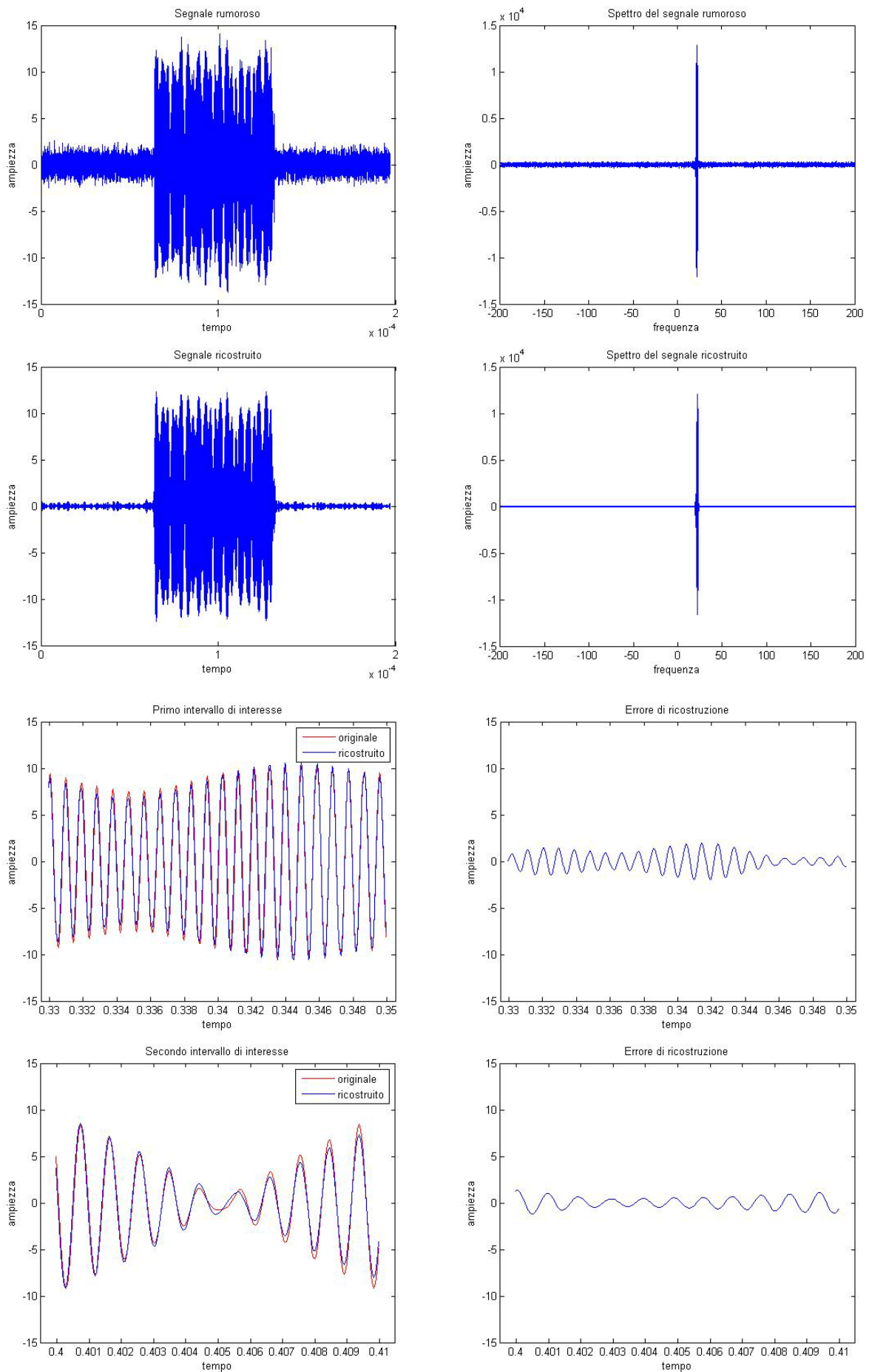


Figura 7.53 Andamenti del segnale rumoroso e ricostruito (prima e seconda riga); errore di ricostruzione nei due intervalli di interesse (terza e quarta riga)

7.6.4 Rapporto SNR –10 dB

Volendo indagare il comportamento dell’algoritmo anche nelle condizioni più critiche e svantaggiose, si attribuisce al rapporto SNR il valore proibitivo di -10 dB . Questa scelta comporta un netto deterioramento del profilo temporale: il rumore dimostra un’ampiezza di poco inferiore a quella del segnale di interesse.

Fortunatamente, l’algoritmo effettua una notevole “pulizia” dalle componenti indesiderate, garantendo un’interpretazione chiara ed immediata del contenuto informativo.

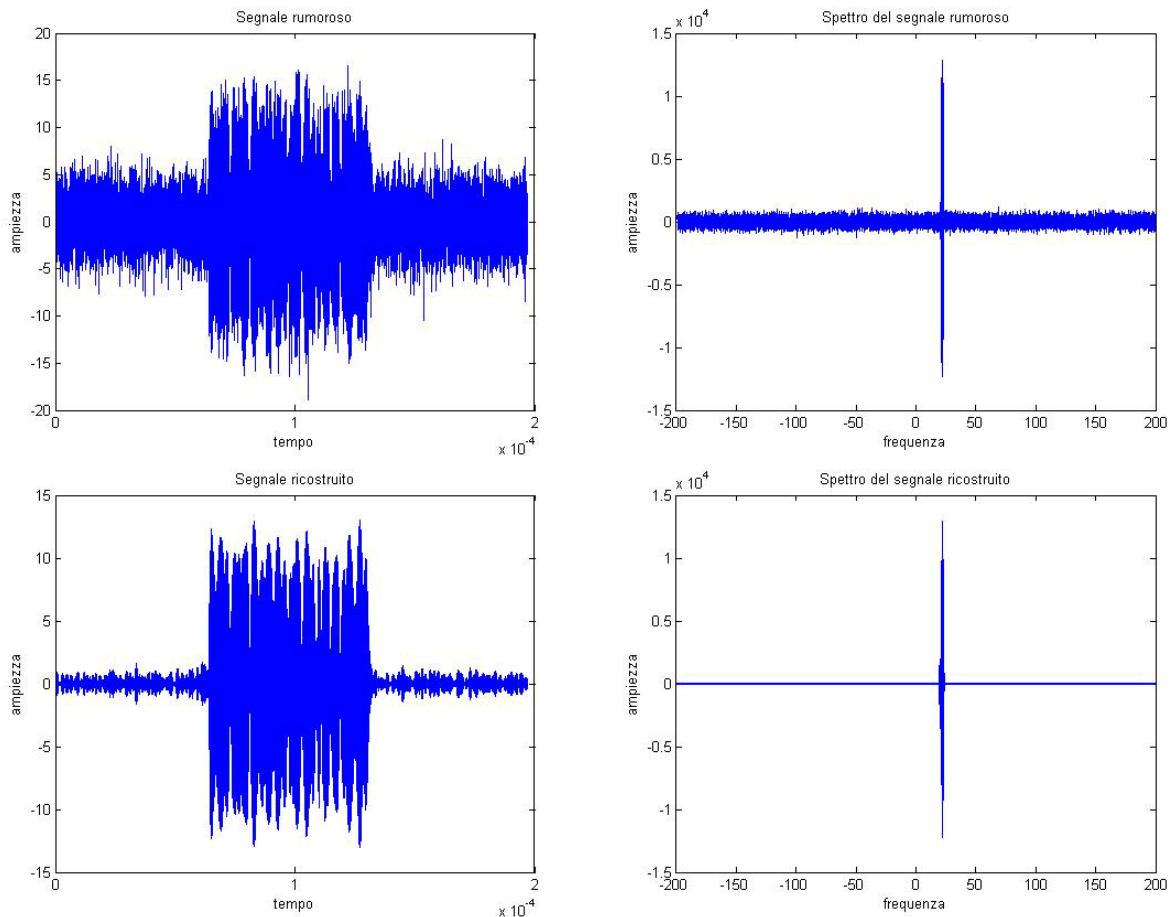


Figura 7.54 Andamenti nel dominio del tempo e della frequenza del segnale rumoroso (sopra) e ricostruito (sotto)

D’altro canto, per la prima volta nel corso della presente analisi, si assiste ad inequivocabili problemi di ricostruzione. Al riguardo, conviene scindere i discorsi inerenti il primo e il secondo intervallo di interesse, finora accomunati da andamenti pressoché confrontabili.

Nel primo intervallo, la discrepanza è piuttosto contenuta e si mantiene entro un *range* di valori accettabili. Al contrario, nel secondo intervallo, il profilo ricostruito non aderisce all’originale, evidenziando fenomeni di sfasamento ed errori di ampiezza non trascurabili. Fortunatamente, si tratta di una modulazione PSK: sono le variazioni di fase e non di ampiezza a veicolare il contenuto informativo.

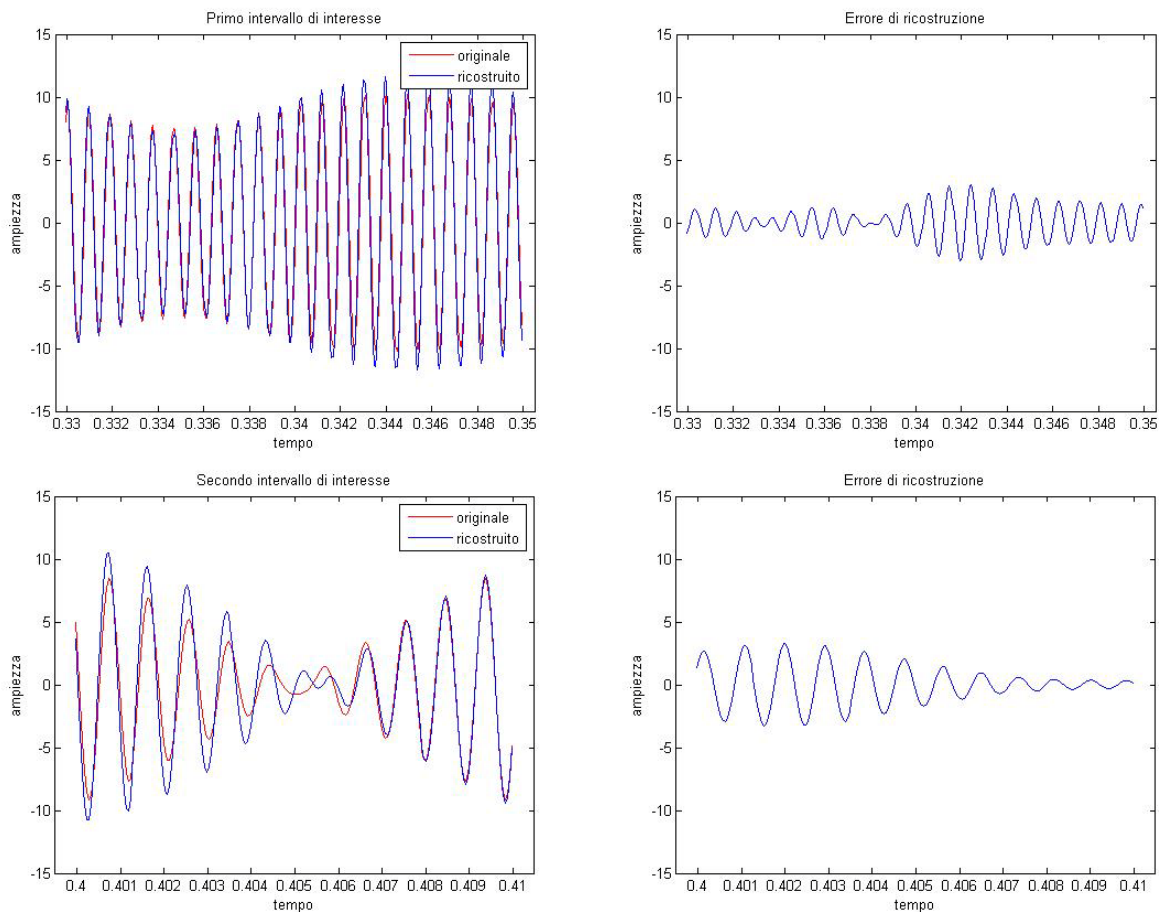


Figura 7.55 Valutazione dell'errore di ricostruzione nel primo (sopra) e secondo (sotto) intervallo di interesse

7.6.4 Rapporto SNR -20 dB

Concludendo, l'ultima configurazione esplorata prevede addirittura un rapporto SNR pari a -20 dB.

La componente rumorosa presenta la stessa ampiezza del segnale di interesse: ad una prima analisi, i due contributi sono praticamente indistinguibili. Ciò nonostante, la sparsità, esibita nel dominio della frequenza, consente all'algoritmo di stimare, con sufficiente risoluzione, il supporto originale.

Di contro, nel dominio del tempo, i risultati non sono altrettanto soddisfacenti: il profilo ricostruito si discosta in modo marcato dall'originale. Sono poche le informazioni affidabili che se ne possono ricavare. Un esempio significativo, in tal senso, è rappresentato dalla rilevazione di eventuali trasmissioni, altrimenti sepolte dalle componenti rumorose.

Passando alla valutazione dell'errore di ricostruzione, si assiste ad un notevole degrado delle prestazioni.

Nel primo intervallo di interesse, il profilo ricostruito denota un andamento oscillatorio dell'ampiezza, che non trova riscontro nel profilo originale. La discrepanza che ne deriva non è certo trascurabile: in termini quantitativi, l'errore supera la soglia del 50%.

Nel secondo intervallo, invece, l'errore non concerne la sola ampiezza. L'intero profilo risulta alterato, con il rischio di inficiare la localizzazione della variazione di fase. Trattandosi di un segnale PSK, un simile errore è molto più grave del precedente.

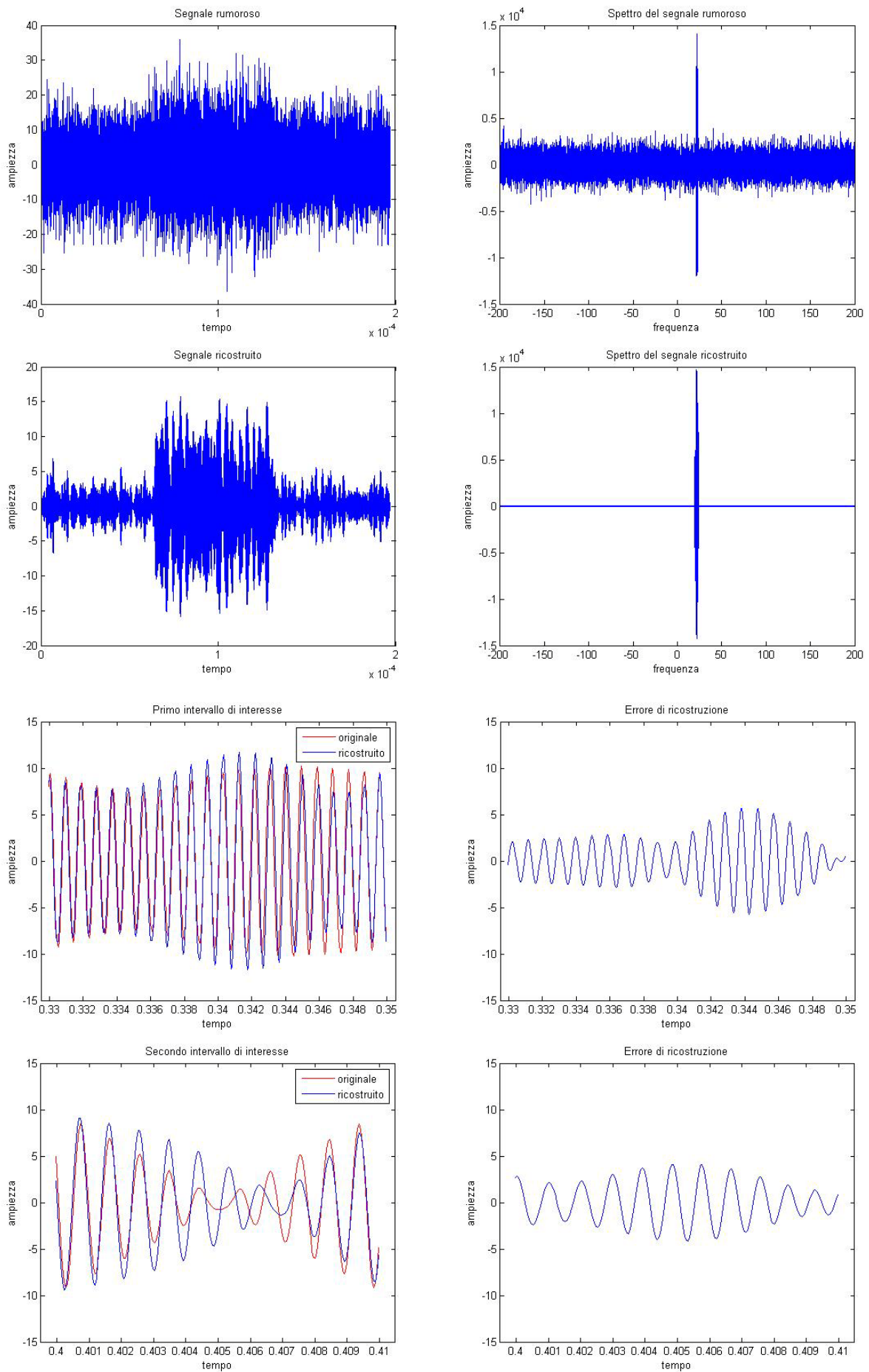


Figura 7.56 Andamenti del segnale rumoroso e ricostruito (prima e seconda riga); errore di ricostruzione nei due intervalli di interesse (terza e quarta riga)

7.7 Diagramma di costellazione del segnale ricostruito

La disciplina dello *spectrum sensing* non si limita a determinare l'occupazione della banda di interesse, ma concerne una vasta gamma di informazioni: un aspetto di primaria importanza è rappresentato dalla natura delle trasmissioni rilevate o dalla priorità assegnata alle diverse utenze.

In quest'ottica, il convertitore MWC può fornire un valido supporto all'analisi. È richiesta la conoscenza di un importante dettaglio realizzativo, ossia il fattore di interpolazione. Non si tratta, però, di una grave limitazione: i consueti sistemi di comunicazione adottano valori pressoché standardizzati, facili da reperire.

Disponendo di tale informazione, si utilizza lo stesso fattore per decimare il segnale ricostruito e tracciarne lo *scatterplot*. In condizioni ideali, il grafico raffigura la costellazione originale e rivela utili informazioni sulla tecnica di modulazione adottata. All'atto pratico, invece, bisogna tenere conto di diverse influenze: una ricostruzione imprecisa comporta una maggiore variabilità e dispersione dei simboli entro il piano I / Q .

Alla luce di queste osservazioni, è lecito attendersi che il rumore incida pesantemente sull'esito finale. Così, si sono esplorate diverse configurazioni, variando opportunamente il rapporto SNR. Ogni valore attribuito al parametro è stato oggetto di 10 prove, i cui *scatterplot* sono stati poi sovrapposti in un unico grafico.

L'ispezione visiva dei risultati finali conferma un fenomeno facilmente pronosticabile: tanto minore è il rapporto SNR, quanto maggiore è la dispersione dei quattro simboli nel piano I / Q . Peraltro, in totale analogia con il paragrafo precedente, l'algoritmo esibisce una notevole robustezza nei confronti del rumore: il calo delle prestazioni diventa critico solo in corrispondenza di un rapporto SNR pari a -20 dB.

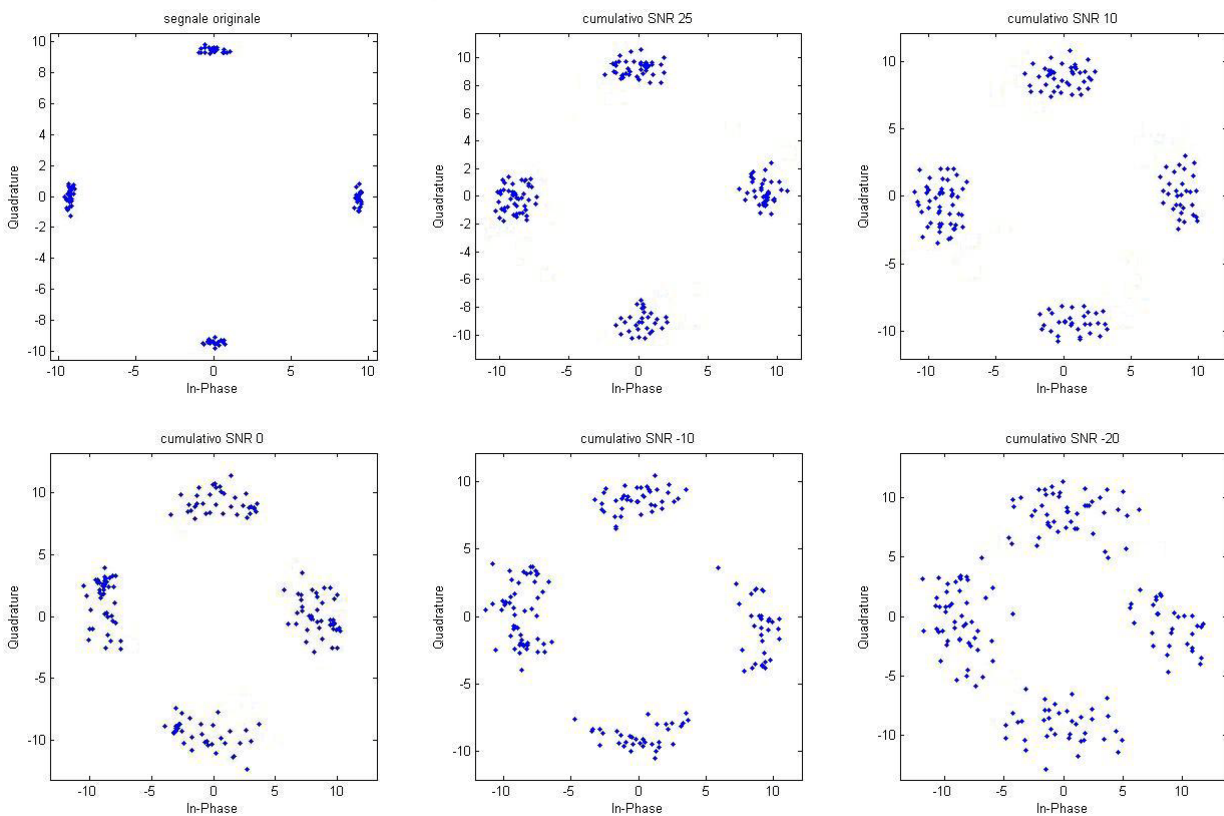


Figura 7.57 Da sinistra a destra, rappresentazioni cumulative degli *scatterplot* al calare del rapporto SNR

Un maggiore rigore formale impone l'adozione di specifici indici, capaci di quantificare la dispersione. A tal proposito, la proposta più consona e facile da realizzare si richiama ai principi del calcolo vettoriale. Nell'ambito del diagramma I / Q , un punto è identificato dal suo vettore posizione, ovvero dal suo modulo e dalla sua fase. Conoscendo i dettagli della modulazione digitale, è possibile stimare a priori la posizione attesa di ogni simbolo. In particolare, il caso in esame adotta una costellazione, i cui simboli giacciono sugli assi coordinati: è sufficiente specificare la distanza r dall'origine.

Nel prosieguo della trattazione, l'analisi si restringe al solo simbolo localizzato sul semiasse delle I negative. Tuttavia, questa preferenza è del tutto soggettiva: nulla vieta di applicare il medesimo protocollo operativo anche ai restanti simboli.

Considerato uno dei grafici, tutti i punti relativi al simbolo di interesse vengono compresi entro un'ellisse. Nel tracciare la figura, si pone attenzione che il centro coincida con la posizione attesa del simbolo stesso. Allora, si dispone di un riferimento univoco, rispetto al quale valutare modulo e fase dei vari punti.

In quest'ottica, i semiassi dell'ellisse forniscono informazioni molto utili e significative. Infatti, quantificano il massimo scostamento registrato lungo le direttrici verticale e orizzontale. All'atto pratico, per evitare l'insorgere di eventuali problemi di dimensionamento, entrambe le misure vengono normalizzate per r .

Ciascun semiasse viene associato ad una specifica componente del vettore posizione: il minore determina l'intervallo di variazione del modulo;

invece, il maggiore fornisce informazioni sulla fase. A tal proposito, il vincolo è rappresentato dal valore dell'arcotangente α .

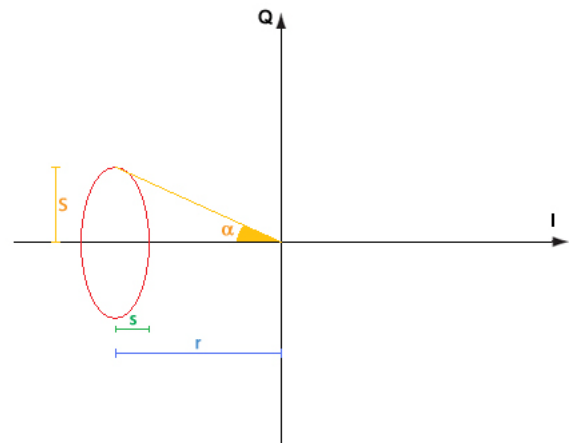


Figura 7.58 Rappresentazione grafica delle grandezze di interesse

I grafici risultanti non tradiscono le attese: entrambi gli indici di dispersione diminuiscono all'aumentare del rapporto SNR. Il profilo, praticamente lineare, evidenzia una marcata discontinuità in corrispondenza della configurazione a -20 dB , dove si assiste ad un netto degrado delle prestazioni. Questo dato può essere letto come un'ulteriore conferma della bontà dell'innovativo approccio basato sul convertitore MWC.

Solo elevati livelli di rumore possono inficiarne i risultati. In condizioni normali, invece, la ricostruzione si dimostra precisa e dettagliata, al punto da consentire una stima affidabile della costellazione originale.

Nelle figure 7.17 e 7.18 è riportato anche il riferimento al valore originale, in assenza di rumore, per il quale la variabilità è da ascrivere esclusivamente all'effetto dell'interpolazione.

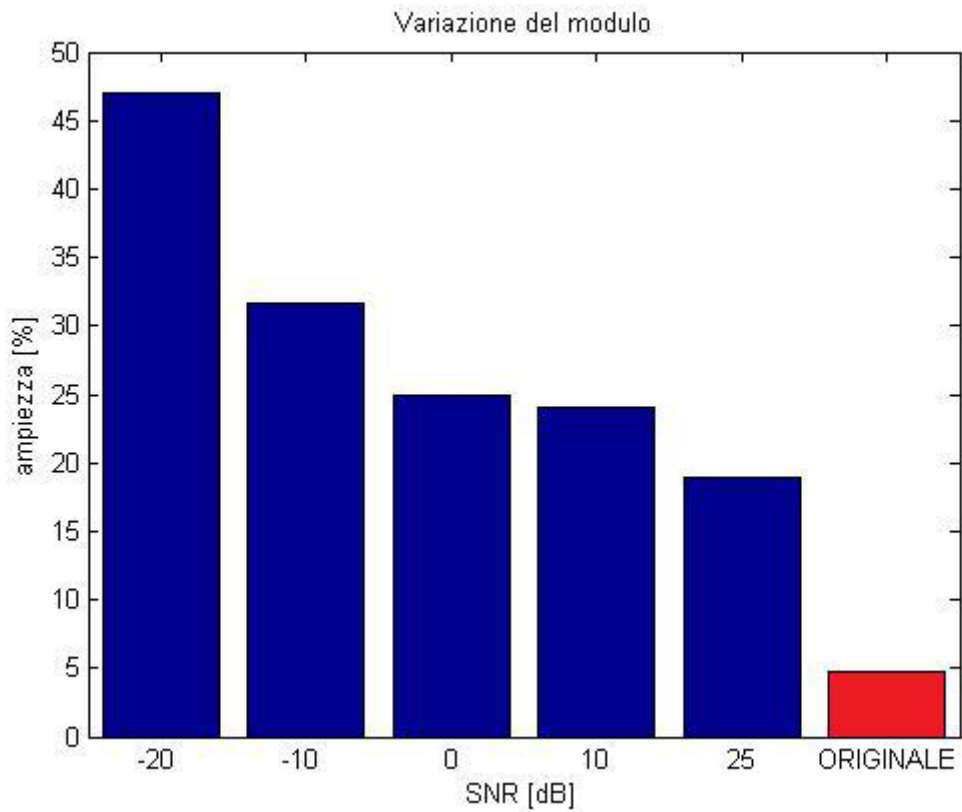


Figura 7.59 Variazione del modulo del vettore posizione, in rosso il valore misurato nel riferimento originale

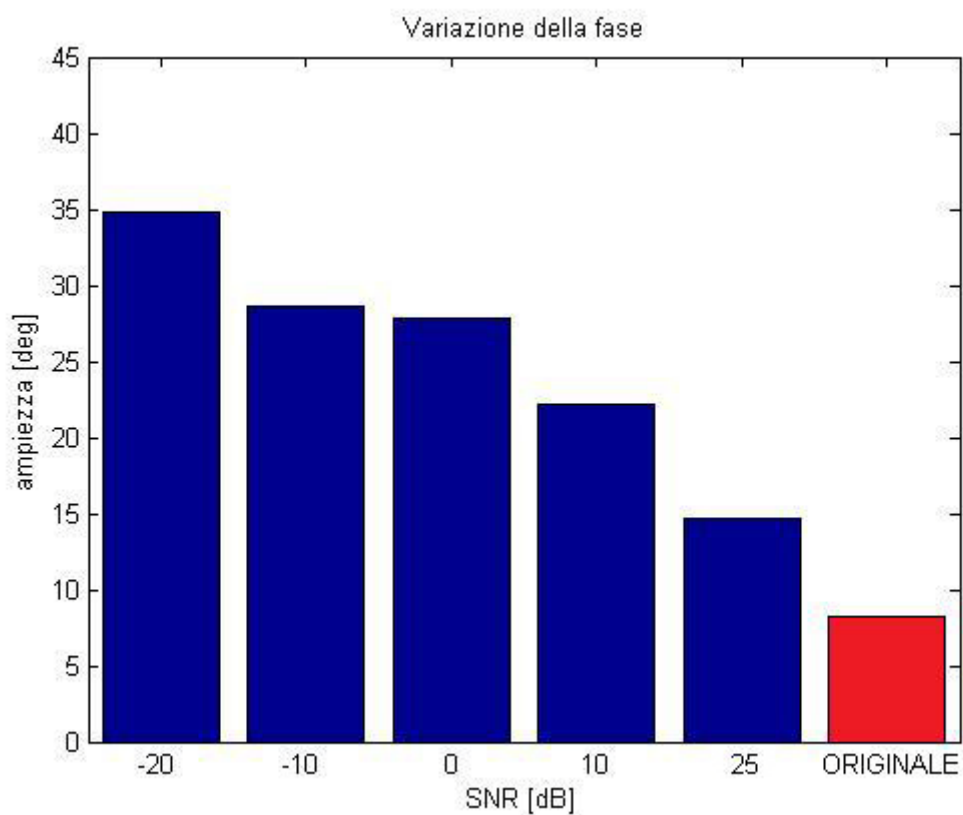


Figura 7.60 Variazione della fase del vettore posizione, in rosso il valore misurato nel riferimento originale

Conclusione

Recenti studi hanno suggerito di applicare i dettami del campionamento compresso alle procedure di *spectrum sensing*. Infatti, i segnali a radiofrequenza esibiscono una struttura marcatamente sparsa nel dominio della frequenza.

In quest'ottica, lo studio qui presentato ha verificato la funzionalità del *modulated wideband converter*. L'affidabilità dei risultati è garantita da una stima del supporto spettrale sempre precisa e accurata, anche in presenza di componenti adiacenti o sovrapposte. Peraltro, l'algoritmo si dimostra oltremodo robusto nei confronti del rumore sovrapposto alle misure: le componenti spurie, o comunque indesiderate, vengono tralasciate in sede di ricostruzione.

Questo studio si è occupato di caratterizzare in modo più approfondito il comportamento dell'algoritmo in condizioni che ricordano da vicino l'ambiente trasmissivo proprio delle reti *wireless*. Allo stesso contesto si richiamano i parametri e le condizioni operative adottate in sede di valutazione. I risultati raccolti certificano la bontà di un simile approccio, che garantisce prestazioni molto interessanti.

D'altro canto, la procedura qui approntata non si limita a determinare l'occupazione spettrale della banda di interesse. Al contrario, rivelata una trasmissione, è in grado di riprodurre fedelmente la costellazione, fonte di informazioni sulla tecnica di modulazione e sulla natura dell'utente.

Alla luce di tali risultati, questo studio non può che formulare un giudizio positivo sulla proposta e augurarsi una sua pronta realizzazione pratica.

Bibliografia

- [1] UNSER, *Sampling – 50 years after Shannon*, In: *Proc. IEEE*, 2000, 88: 569 – 587
- [2] SHANNON, *Communication in the presence of noise*, In: *Proc. Inst. of Radio Engineers*, 1949, 37: 10 – 21
- [3] WHITTAKER, *The Fourier theory of the cardinal functions*, In: *Proc. of the Edinburgh Mathematical Society*, 1928, 1: 169 – 176
- [4] KOTEL'NIKOV, *On the transmission capacity of "ether" and wire in electrocommunications*, In: *Physics-Uspokhi*, 2006, 49(7): 736 – 744
- [5] BUTZER, *A survey of the Whittaker – Shannon sampling theorem and some of its extensions*, In: *J. Math. Res. Exposit.*, 1983, 3: 185 – 212
- [6] BENEDETTO, *Frames, sampling and seizure prediction*, In: LAU, *Advances in Wavelets*, Springer 1999
- [7] WYNER, SHAMAI, *Introduction to "Communication in the presence of noise" by C. E. Shannon*, In: *Proc. IEEE*, 1998, 86(2): 442 – 446
- [8] GROSSI, *Introduzione al campionamento compresso – Sparsità e l'equazione $y = Ax$* , lezione del 31/08/2010 nell'ambito del Seminario di eccellenza "Italo Gorini"
- [9] CLAERBOUT, MUIR, *Robust modeling of erratic data*, In: *Geophysics*, 1973, 38: 826 – 844
- [10] SANTOSA, SYMES, *Linear inversion of band – limited reflection seismograms*, In: *SIAM J. Sci. and Statist. Comput.*, 1986, 3: 1307 – 1330
- [11] BARANIUK, CANDÈS, NOWAK, VETTERLI, *From the guest editors*, In: *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 12 – 13
- [12] CANDÈS, WAKIN, *"People hearing without listening": an introduction to compressive sampling*, In: *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 21 – 30
- [13] DONOHO, ELAD, *Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via l_1 minimization*, In: *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 2003, 100(5): 2197 – 2202
- [14] COHEN, DAHMEN, DEVORE, *Compressed sensing and best k – term approximation*, In: *J. Amer. Math. Soc.*, 2009(22): 211 – 231
- [15] BOYD, VANDENBERGHE, *Convex optimization*, Cambridge University Press 2004
- [16] MOORE, *Cramming more components onto integrated circuits*, In: *Electronics*, 1965, 38(8): 114 – 117
- [17] DANTZIG, ORDEN, WOLFE, *The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints*, In: *Pacific J. Math.*, 1955, 5: 183 – 195
- [18] NASH, *The (Dantzig) simplex method for linear programming*, In: *Computing in Science and Engineering*, 2000, 2(1): 29 – 31

- [19] KARMARKAR, *A new polynomial time algorithm for linear programming*, In: *Combinatorica*, 1984, 4(4): 373 – 395
- [20] OXLEY, *Matroid theory*, Oxford University Press 2006
- [21] MALLAT, ZHANG, *Matching Pursuit with time – frequency dictionaries*, In: *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41: 3397 – 3415
- [22] PATI, REZAEIFAR, KRISHNAPRASAD, *Orthogonal Matching Pursuit: recursive function approximation with applications to Wavelet decomposition*, In: *Conference Record of The Twenty-Seventh Asilomar Conference on signals, systems and computers*, 1993, 1: 40 – 44
- [23] FRIEDMAN, STUETZLE, *Projection Pursuit regression*, In: *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1981, 76: 817 – 823
- [24] FLETCHER, RANGAN, *Orthogonal Matching Pursuit from noisy measurement: a new analysis*, In: *Proc. 23rd Ann. Conf. Neural Information Processing Systems*, 2009
- [25] TROPP, GILBERT, *Signal recovery from random measurements via Orthogonal Matching Pursuit*, In: *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2007, 53(12): 4655 – 4666
- [26] DONOHO, TANNER, *Counting faces of randomly – projected polytopes when the projection radically lowers dimension*, In: *J. Amer. Math. Soc.*, 2009, 22: 1 – 53
- [27] MISHALI, ELDAR, *From theory to practice: sub – Nyquist sampling of sparse wideband analog signals*, In: *IEEE Journal of Selected Topics on Signal Processing*, 2010, 4(2): 375 – 391
- [28] POK, CHEN, SCHAMUS, MONTGOMERY, TSUI, *Chip Design for Monobit Receiver*, In: *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 45(12): 2283 – 2295
- [29] CHEN, GEORGE, McCORMIK, TSUI, HARY, GRAVES, *Design and Performance Evaluation of a 2.5-GSPS Digital Receiver*, In: *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, 2005, 54(3): 1089 – 1099
- [30] LANDAU, *Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions*, In: *Acta Math.*, 1967, 117: 37 – 52
- [31] LIN, VAIDYANATHAN, *Periodically nonuniform sampling of bandpass signals*, In: *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1998, 45(3): 340 – 351
- [32] HERLEY, WONG, *Minimum rate sampling and reconstruction of signals with arbitrary frequency support*, In: *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1999, 45: 1555 – 1564
- [33] VENKATARAMANI, BRESLER, *Perfect reconstruction formulas and bounds on aliasing error in sub-Nyquist nonuniform sampling of multiband signals*, In: *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1999, 46(6): 2173 – 2183
- [34] MISHALI, ELDAR, *Blind Multi-Band Signal Reconstruction: Compressed Sensing for Analog Signals*, In: *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2009, 57(3): 993 – 1009
- [35] LASKA, KIROLOS, DUARTE, RAGHEB, BARANIUK, MASSOUD, *Theory and implementation of an analog-to-information converter using random demodulation*, In: *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, Maggio 2007

- [36] TROPP, LASKA, DUARTE, ROMBERG, BARANIUK, *Beyond Nyquist: efficient sampling of sparse, bandlimited signals*, In: *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2010, 56(1): 520 – 544
- [37] *A/D Converter - Definition of terms*, National Semiconductors Corp., 2000, Online: [http://www.national.com/appinfo/adc/files/definition of terms.pdf](http://www.national.com/appinfo/adc/files/definition%20of%20terms.pdf)
- [38] *A/D Converters*, Analog Devices Corp., 2009, Online: <http://www.analog.com/en/analog-to-digital-converters/ad-converters/products/index.html>
- [39] FLEYER, ROSENTHAL, LINDEN, HOROWITZ, *Multirate synchronous sampling of sparse multiband signals*, In: *Optics Express*, 2010, 18(16): 16929 – 16945
- [40] KIENMAYER, TIEBOUT, SIMBURGER, SCHOLTZ, *A low-power low-voltage NMOS bulk-mixer with 20 GHz bandwidth in 90 nm CMOS*, In: *Proc. of the 2004 International Symposium on Circuits and Systems*, 2004, 4(4): 385 – 388
- [41] RAZAVI, *A 60-GHz CMOS receiver front-end*, In: *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 2006, 41(1): 17
- [42] LASKIN, VOINIGESCU, *A 60 mW per Lane, 4 23-Gb/s $2^7 - 1$ PRBS Generator*, In: *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 2006, 41(10): 2198
- [43] DICKSON, LASKIN, KHALID, BEERKENS, JINGQIONG, KARAJICA, VOINIGESCU, *An 80-Gb/s $2^{31} - 1$ pseudorandom binary sequence generator in SiGe BiCMOS technology*, In: *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 2005, 40(12): 2735
- [44] ZVEREV, *Handbook of Filter Synthesis*, Wiley – Interscience 2005
- [45] BARANIUK, DAVENPORT, DEVORE, WAKIN, *A simple proof of the restricted isometry property for random matrices*, In: *Constructive Approximation*, 2008, 28(3): 253 – 263
- [46] GORODNITSKY, RAO, *Sparse signal reconstruction from limited data using focuss: a re-weighted minimum norm algorithm*, In: *IEEE Trans on Signal Processing*, 1997, 45(3): 600 – 616
- [47] PHILLIPS, LEAHY, MOSHER, *Meg-based imaging of focal neuronal current sources*, In: *IEEE Trans on Medical Imaging*, 1997, 16(3): 338 – 348
- [48] STOICA, MOSES, *Introduction to Spectral Analysis*, Prentice Hall 1997
- [49] FEVRIER, GELFAND, FITZ, *Reduced complexity decision feedback equalization for multipath channels with large delay spreads*, In: *IEEE Transactions on Communication*, 1999, 47(6): 927 – 937
- [50] COTTER, RAO, *Sparse channel estimation via matching pursuit with application to equalization*, In: *IEEE Transactions on Communication*, 2002, 50(3): 374 – 377
- [51] HERMAN, STROHMER, *High – resolution radar via compressed sensing*, In: *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(6): 2275 – 2284
- [52] TROPP, WAKIN, DUARTE, BARON, BARANIUK, *Random filters for compressive sampling and reconstruction*, In: *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Maggio 2006
- [53] MISHALI, ELDAR, *Reduce and boost: recovering arbitrary sets of jointly sparse vectors*, In: *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2008, 56(10): 4692 – 4702

- [54] KARR, *Probability*, Springer 1993
- [55] BILLINGSLEY, *Probability and measure*, Wiley – Interscience 1995
- [56] TROPP, *Algorithms for simultaneous sparse approximation. Part II: convex relaxation*, In: *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2006, 86(3): 589 – 602
- [57] *Digital modulation in communications systems – An introduction*, Agilent Technologies, 2001, Application Note 1298
- [58] *Using Error Vector Magnitude measurements to analyze and troubleshoot vector-modulated signals*, Agilent Technologies, 2000, Product Note 89400-14
- [59] DA SILVA, CHOI, KIM, *Distributed spectrum sensing for cognitive radio systems*, In: *Information Theory and Applications Workshop*, 2007
- [60] MITOLA III, MAGUIRE, *Cognitive radio: making software radios more personal*, In: *IEEE Pers. Commun.*, 1999, 6: 13 – 18
- [61] MITOLA III, *Cognitive radio: an integrated agent architecture for software defined radio*, tesi dottorato presso: *Stockholm Royal Institute Technology*, 2000
- [62] SELÉN, KRONANDER, TULLBERG, *Sensor selection for cooperative spectrum sensing*, In: *3rd IEEE Symposium on New Frontiers in Dynamic Spectrum Access Networks*, Ottobre 2008
- [63] *End to End Efficiency, Spectrum sensing*, White Paper, November 2009