



**Università degli Studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA 'TULLIO LEVI-CIVITA'

Corso di Laurea Triennale in Matematica

**Proprietà e transizione di fase del  
grafo aleatorio di Erdős-Rényi**

Candidato:

**Matteo Dalla Corte**

Matricola 2000421

Relatore:

**Prof.ssa**

**Alessandra Bianchi**

---

Anno accademico 2022/2023

22 Settembre 2023



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Processi di diramazione</b>	<b>1</b>
1.1 Preliminari . . . . .	1
1.2 Il processo di Galton-Watson . . . . .	8
1.3 Il processo di Esplorazione . . . . .	13
<b>2 Il grafo aleatorio di Erdős-Rényi</b>	<b>21</b>
2.1 Il modello di Erdős-Rényi . . . . .	21
2.2 Il problema della connettività . . . . .	23
<b>3 Il problema della componente connessa gigante</b>	<b>29</b>
3.1 La regione subcritica . . . . .	30
3.2 La regione supercritica . . . . .	33
<b>Bibliografia</b>	<b>37</b>



# Introduzione

Nell'ultimo secolo il mondo in cui viviamo è diventato un sistema sempre più grande ed interconnesso: ciò ha portato ad un aumento sostanziale della massa dei problemi e campioni da studiare. Di conseguenza, per avere una comprensione maggiore del mondo, delle strutture e dei meccanismi al suo interno, non sono più sufficienti delle semplici modellizzazioni, ma risultano necessarie tecniche matematiche e computazionali più avanzate.

I *real-world networks*, ovvero le reti di grandi dimensioni, o *large networks*, che caratterizzano il mondo, sono quindi diventati oggetti di studio di particolare importanza. Esempi di queste reti sono la popolazione di alcuni stati, o addirittura l'intera popolazione mondiale, e le relative connessioni sociali, le reti stradali, elettriche e delle telecomunicazioni, le collaborazioni e le citazioni in articoli scientifici, o ancora il *World Wide Web* e l'*Internet*. Una complicazione risulta però evidente, i *real-world networks* sono molto grandi e una descrizione globale diventa alquanto impossibile. Risulta quindi più conveniente affrontare prima il problema da un punto di vista locale, per poi generalizzarlo: si studiano cioè delle reti di piccole dimensioni per poi aumentarne la dimensione, in alcuni casi fino ad un numero infinito di elementi.

La teoria della probabilità offre un approccio efficace per gestire la complessità delle reti e porta a considerare i grafi aleatori. I grafi aleatori sono grafi in cui le connessioni fra i vertici seguono leggi probabilistiche, ciò permette di riflettere nel modello matematico la difficoltà nel conoscere tutte le connessioni che sono presenti nelle reti reali, fornendo così una più accurata rappresentazione della rete. Esistono vari modelli di grafi aleatori, ma il più semplice, nonché quello trattato in questo elaborato, è il grafo aleatorio di Erdős-Rényi, nel quale sono presenti  $n$  elementi che vengono connessi l'uno con l'altro con una probabilità fissata  $p$  e in maniera indipendente una coppia dall'altra.

L'obiettivo di questa tesi è lo studio del modello di grafo aleatorio di Erdős-Rényi, in particolare delle transizioni di fase che lo caratterizzano. Si analizzerà prima la connessione del grafo, mostrando che, nel limite  $n \mapsto +\infty$ ,

---

il fatto di essere, quasi certamente, connesso o meno dipende unicamente da un parametro presente nella definizione della probabilità che caratterizza il modello. Il risultato principale riguarderà però la formazione di una componente connessa gigante: si proverà l'esistenza di due regioni dette *subcritica* e *supercritica*. Nella prima regione, la più grande componente connessa ha una cardinalità molto piccola ( $O(\log n)$ ), di conseguenza i vertici del grafo saranno raggruppati in piccoli gruppi sparsi; nella regione supercritica compare, invece, una componente connessa *gigante*, con taglia maggiore di  $r_\lambda n$  con  $r_\lambda > 0$ . Per dimostrare questi risultati si utilizzeranno nozioni di probabilità, come la funzione generatrice di una variabile aleatoria, la disuguaglianza di Chernov e il binomiale condizionale, ma anche i processi di diramazione, in particolare il processo di Galton-Watson e il processo di esplorazione.

Nel capitolo 1 verranno introdotti alcuni preliminari di teoria dei grafi e richiamati alcuni risultati di teoria della probabilità che saranno utili nei calcoli seguenti. Si definirà, successivamente, il processo di Galton-Watson e si proverà un teorema sulla probabilità di estinzione della popolazione. Infine si analizzerà il processo di esplorazione, provando due risultati riguardanti le distribuzioni delle variabili aleatorie che definiscono il processo. Nel capitolo 2 si definirà il modello di grafo aleatorio di Erdős-Rényi e verrà dimostrato il teorema sulla connessione del grafo. Infine nel capitolo 3 si studierà il problema della più grande componente connessa nella regione subcritica e la comparsa della componente connessa gigante nella regione supercritica.

# Capitolo 1

## Processi di diramazione

Nella prima sezione di questo capitolo verranno introdotti i grafi, in quanto struttura matematica centrale di questo elaborato, e si elencheranno delle nozioni di probabilità necessarie per affrontare le dimostrazioni trattate. Si definiranno nomenclatura e notazioni necessarie che verranno date per note da questo punto in avanti. Dalla seconda sezione, si iniziano ad analizzare i *processi di diramazione*. Il primo modello, presentato nella seconda sezione, sarà quello di Galton-Watson ed in particolare verrà dimostrata la transizione di fase che caratterizza la probabilità di estinzione nel modello. Nella terza sezione verrà indagato il *processo di esplorazione*, sia nella definizione standard che in una modificata, e si proveranno delle proprietà importanti anche per i capitoli successivi.

### 1.1 Preliminari

Per definire un grafo, indicato con la lettera  $\mathbf{G}$ , è necessario definire due insiemi:

- il primo è l'insieme dei vertici  $\mathbf{V}$ . Questo insieme può essere sia finito, e in questo caso la cardinalità viene indicata con  $n \in \mathbb{N}$ , oppure infinito, anche se in questo elaborato verranno trattati solamente grafi *finiti*.
- il secondo è l'insieme degli archi  $\mathbf{E}$ , dove la E è l'iniziale della parola inglese *edges*, costituito da coppie di elementi dell'insieme  $V$ , ovvero di vertici.

In un grafo  $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ , i vertici rappresentano gli individui (o entità) che costituiscono la rete che si vuole studiare, mentre gli archi rappresentano le relazioni, fra essi, che vengono studiate. Poiché non tutte le relazioni che si possono studiare sono uguali, vi sono due tipologie di grafi:

1. un grafo è detto *semplice* se gli archi non sono orientati, ovvero se è indifferente quale sia il primo fra i due elementi della coppia che definisce un arco. Questi grafi permettono di modellizzare relazioni a "doppio senso" ovvero in cui, dati due vertici  $v, u \in V$ , se  $v$  è direttamente connesso a  $u$ , allora anche  $u$  è direttamente connesso a  $v$ . Un esempio è l'Internet, dove i vertici rappresentano i router e un arco è presente se due router sono collegati da un cavo fisico, e dal momento che il cavo che connette due router può essere usato in entrambe le direzioni, il grafo relativo all'Internet sarà semplice.
2. al contrario, un grafo è detto *orientato* se gli archi sono coppie ordinate di vertici, ovvero dove le coppie  $(v,u)$  e  $(u,v)$  rappresentano archi diversi e l'esistenza di una non garantisce l'esistenza dell'altra. Ad esempio se si pensa agli archi come alle strade di una città e ai vertici come alle intersezioni fra esse, la presenza di strade a senso unico determina che il grafo sarà orientato.

Un concetto fondamentale nello studio dei grafi è la *connessione*. Un grafo si dice *connesso* se presi due qualsiasi vertici, essi sono collegati da un cammino, che sarebbe un insieme di archi adiacenti. Anche se un grafo non è connesso globalmente può avere comunque comportamenti simili a grafi connessi, infatti è possibile partizionare l'insieme dei vertici di un grafo in modo da ottenere dei sottografi connessi internamente, ma non fra loro. Questi sottografi connessi vengono detti *componenti connesse*, più sinteticamente *c.c.*. Poiché nel seguito saranno di centrale importanza, si porta una definizione più formale di componente connessa: dato un grafo  $G = (V, E)$  e un vertice  $v \in V$ , la componente connessa contenente  $v$  è il sottografo  $S_v = (S, F)$  dove

$$V \supseteq S = \{u \in V : (v, u) \in E\} \cup \{v\} \quad \text{e} \quad E \supseteq F = \{(u, w) \in E : u, w \in S\}.$$

Preso un vertice  $v \in V$  si definisce il grado del vertice come

$$d_n = \#\{u \in V : (v, u) \in E\}$$

o anche più semplicemente con  $d$  se specificare il vertice non è necessario, che prende in  $[0, n-1]$ . Un esempio classico di grafo è il grafo completo  $K_n$ , in cui ogni vertice ha grado massimo e quindi è direttamente collegato ad ogni altro vertice; la caratteristica del grafo completo è che è il grafo *più connesso* possibile. Lo studio dei gradi dei vertici è molto importante e permette di dedurre dei risultati principalmente sulla connessione del grafo. Nei grafi si possono definire anche le distanze: dati due vertici  $v, u \in V$  si definisce la distanza tra  $u$  e  $v$ ,  $\text{dist}_G(v, u)$  come il numero minimo di archi che servono per

connettere i due vertici. Per convenzione, se i vertici scelti non appartengono alla stessa componente connessa, ovvero non esiste alcuna scelta di archi del grafo tale da connettere i due vertici, si dice che la  $dist(v, u) = \infty$ . Si può inoltre introdurre la definizione di *diametro del grafo* come semplicemente

$$diam(G) = \max_{v, u \in V} dist_G(v, u).$$

Questo oggetto però non è molto vantaggioso, perché non permette di trarre molte informazioni rispetto alla struttura del grafo ed inoltre è soggetta a grandi variazioni rispetto a minimi cambiamenti nel grafo. Risulta più efficace introdurre un diverso elemento, ovvero la *distanza tipica*. Scelti uniformemente a caso due vertici  $v_1, v_2 \in V$ , la distanza tipica del grafo è  $H_G = dist_G(v_1, v_2)$ , ciò rappresenta, considerando i casi in cui  $H_G < \infty$ , il numero tipico di archi che è presente fra una coppia di vertici scelti uniformemente, da cui il nome. Questa grandezza, inoltre, risulta essere una variabile aleatoria anche se il grafo  $G$  è deterministico, quindi la sua distribuzione fornisce informazioni riguardanti tutte le distanze, permettendo una maggiore comprensione della struttura del grafo.

In questo paragrafo si enunciano, solo a scopo conoscitivo, delle caratteristiche che accomunano i *real-world networks*. Oltre ad essere di grandi dimensioni, le reti reali sono caratterizzate da dei fenomeni, anche sorprendenti e contro intuitivi, come ad esempio lo *small-world phenomenon* e la proprietà di essere *scale-free*. In una rete reale, come può essere la popolazione mondiale e le relative relazioni sociali, la grande quantità di individui porta a pensare che vi sia una grande distanza, in media, fra essi. In realtà accade, in un certo senso, il contrario; infatti le reti reali sono degli *small-world*, ovvero dei piccoli mondi. Ciò significa che in genere la distanza fra due vertici è piccola e ciò garantisce la presenza di una componente connessa che contiene la maggior parte degli individui. Per esempio nel modello della popolazione, dove due individui sono "vicini" se si conoscono di persona, accade che prese due persone a caso, esse sono separate da al più 6 altre persone, ovvero esistono *sei gradi di separazione*. Un'altra particolarità delle reti reali è il fatto che sono *scale-free*, ovvero non si riesce ad individuare una scala tipica per la loro descrizione. Ovvero, scegliendo di raggruppare i vertici per la quantità di vicini che possiedono, pur variando la scala di raggruppamento dei vertici, ad esempio passando dalle decine, alle centinaia o migliaia di vicini per vertice (ovviamente tenendo a mente il numero totale di vertici), non sarà possibile trovare un valore per cui, in un suo intorno, vi è una concentrazione di vertici. Questo fenomeno è causato dal fatto che la distribuzione dei gradi segue una legge di potenza, detta *power law*, e che quindi non decade abbastanza velocemente da poter trovare una scala tipica,

perché appunto presenteranno una coda troppo grande da renderla trascurabile. Ciò si contrappone a leggi che decadono esponenzialmente come quella gaussiana, la cui proprietà forse più nota è che il 68% dei dati che seguono la legge differisce dalla media meno della deviazione standard e il 95% a meno di due.

In alcune delle dimostrazioni affrontate in questo elaborato, la *funzione generatrice* di una variabile aleatoria e le relative proprietà svolgono un ruolo importante. Si ricorda di seguito la definizione e le proprietà che verranno utilizzate.

**Definizione 1.1.1** (Funzione generatrice di una variabile aleatoria in  $\mathbb{N}_0$ ). Data la variabile aleatoria  $X$  in  $\mathbb{N}_0$ , con densità discreta  $p_X$ , la funzione  $G_X: [-1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$  definita da

$$G_X(s) := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} p_X(k) s^k = E[s^X] \quad (1.1)$$

(con la convenzione  $0^0 = 1$ ) è detta *funzione generatrice di  $X$* .

**Proposizione 1.1.2.** Sia  $X$  una variabile aleatoria a valori in  $\mathbb{N}_0$ . La sua funzione generatrice  $G_X$  è infinitamente derivabile (almeno) nell'intervallo  $(-1, 1)$ . Indicando con  $G_X^{(n)}$  la derivata  $n$ -esima di  $G_X$ , valgono le seguenti proprietà:

1. la derivata  $n$ -esima in 0 vale  $G_X^{(n)}(0) = n! p_X(n)$ ;
2. per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} G_X^{(n)}(s) = E[X(X-1) \cdots (X-n+1)] \in [0, +\infty].$$

3.  $X$  ammette momento di ordine  $n \in \mathbb{N}$  finito se e solo se

$$E[|X|^n] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad G_X^{(n)}(1^-) := \lim_{s \rightarrow 1^-} G_X^{(n)}(s) < +\infty.$$

*Dimostrazione.* La serie (1.1) converge assolutamente per ogni  $s \in [-1, 1]$ , quindi il raggio di convergenza  $R$  della serie di potenze vale almeno 1. Segue allora dal teorema di derivazione delle serie di potenza che  $G_X$  è infinitamente derivabile nell'intervallo  $(-R, R)$  (quindi in particolare in  $(-1, 1)$ ) e la sua derivata  $n$ -esima, per ogni  $s \in (-R, R)$ , è data da

$$G_X^{(n)}(s) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) p_X(k) s^{k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} p_X(k) s^{k-n}. \quad (1.2)$$

Ponendo  $s = 0$  in (1.2) si vede che tutti i termini sono nulli ad eccezione del termine  $k = n$  che vale  $n!p_X(n)$ . Ciò mostra che  $G_X^{(n)}(0) = n!p_X(n)$ , di conseguenza vale il punto (1).

Per il punto (2), se il raggio di convergenza è  $R > 1$  allora si può semplicemente applicare (1.2) al punto  $s = 1$ . Se  $R = 1$ , bisogna utilizzare un risultato più fine sulla convergenza delle serie di potenze in prossimità del raggio di convergenza. Di seguito si viene enunciato una versione del teorema della convergenza radiale di Abel per serie di potenze con coefficienti positivi.

**Lemma 1.1.3.** *Sia  $(a_n)_{n \geq 0}$  una successione di numeri positivi e sia  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, +\infty]$  definita da  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . Allora  $f$  è crescente e per ogni  $y > 0$  si ha  $\lim_{s \rightarrow y^-} f(x) = f(y) \in [0, +\infty]$ .*

Questo risultato mostra che per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , grazie a (1.2), si ha

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1^-} G_X^{(n)}(s) &= \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) p_X(k) \\ &= E[X(X-1) \cdots (X-n+1)] \in [0, +\infty], \end{aligned}$$

dove si usa il fatto che  $X(X-1) \cdots (X-n+1) \geq 0$  perché  $X$  è a valori in  $\mathbb{N}_0$ , quindi il valor medio è ben definito, ma può valere  $+\infty$ .

Per il punto (3), si considerino i polinomi  $P_n(x) := x(x-1) \cdots (x-n+1)$  per  $n \in \mathbb{N}$ . Si osserva che  $0 \leq P_n(X) \leq X^n$  perché  $X$  è a valori in  $\mathbb{N}_0$ : di conseguenza, se  $X$  ammette momento di ordine  $n$  finito, segue che  $E[P_n(X)] < \infty$ . Viceversa, si mostra per induzione su  $n \in \mathbb{N}$  l'affermazione seguente: "se  $E[P_n(X)] < \infty$ , allora  $E[X^n] < \infty$ ". Il caso  $n = 1$  è immediato, perché  $P_1(X) = X = X^1$ . Sia ora vera l'affermazione per ogni  $1 \leq k \leq n$ . Se  $E[P_{n+1}(X)] < \infty$ , una prima osservazione è che  $E[P_k(X)] < \infty$  per ogni  $1 \leq k \leq n$ : infatti si ha  $0 \leq P_k(X) \leq P_{n+1}(X) + n!$  perché  $P_k(X) \leq P_{n+1}(X)$  se  $X \geq n+1$ , mentre  $P_k(X) \leq n!$  se  $0 \leq X \leq n$ . Si deduce quindi dal passo induttivo che  $E[(X^k)] < \infty$  per ogni  $0 \leq k \leq n$ . Si osserva ora che è possibile scrivere  $X^{n+1} = P_{n+1}(X) + Q_n(X)$ , dove  $Q_n$  è un polinomio di grado  $n$ : è noto che  $Q_n(X)$  ammette valor medio finito, perché  $X$  ammette momento di ordine  $k$  finito per ogni  $1 \leq k \leq n$ ; inoltre anche  $P_{n+1}(X)$  ha valor medio finito, per ipotesi. Si deduce che  $E[X^n] < \infty$ , completando così la dimostrazione della proposizione.  $\square$

Dalla proposizione (1.1.2), segue direttamente il seguente risultato.

**Proposizione 1.1.4.** *Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie indipendenti a valori in  $\mathbb{N}_0$ . Allora*

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s), \quad \forall s \in [-1, +\infty).$$

Un altro strumento che sarà utilizzato è la disuguaglianza di Chernov.

**Proposizione 1.1.5** (Disuguaglianza di Chernov). *Sia  $X$  una variabile aleatoria reale. Per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$  valgono le disuguaglianze*

$$P(X \geq t) \leq e^{-at} E[e^{aX}], \quad P(X \leq t) \leq e^{at} E[e^{-aX}].$$

*Dimostrazione.* Innanzitutto si nota che le variabili aleatorie  $e^{aX}$  e  $e^{-aX}$  sono positive, quindi ammettono valor medio, che però può valere  $+\infty$ .

Per la prima disuguaglianza, si osserva che per  $a > 0$  la funzione  $x \mapsto e^{ax}$  è strettamente crescente e biunivoca da  $\mathbb{R}$  in  $(0, +\infty)$ . Di conseguenza si ha la seguente uguaglianza di eventi, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\{X \geq t\} = \{e^{aX} \geq e^{at}\}.$$

Applicando ora la disuguaglianza di Markov<sup>1</sup> alla variabile aleatoria positiva  $e^{aX}$ , si ottiene

$$P(X \geq t) = P(e^{aX} \geq e^{at}) \leq \frac{1}{e^{at}} E[e^{aX}].$$

Per la seconda disuguaglianza, si osserva che la funzione  $x \mapsto e^{-ax}$  è strettamente decrescente e biunivoca da  $\mathbb{R}$  in  $(0, +\infty)$ , quindi si ha l'uguaglianza di eventi  $\{X \leq t\} = \{e^{-aX} \geq e^{-at}\}$ , da cui segue che  $P(X \leq t) = P(e^{-aX} \geq e^{-at})$ . Applicando la disuguaglianza di Markov alla variabile aleatoria positiva  $e^{-aX}$  si ottiene la disuguaglianza cercata.  $\square$

Infine, è utile introdurre una notazione particolare: il *Binomiale condizionale*.

**Definizione 1.1.6** (Binomiale condizionale). Siano  $V, Z$  variabili aleatorie a valori in  $\mathbb{N}_0$ . Per  $p \in [0, 1]$ , si scrive

$$Z \sim \text{Bin}(V, p)$$

per dire che, *condizionatamente a ogni valore fissato  $V = k$* , la variabile aleatoria  $Z$  ha distribuzione  $\text{Bin}(k, p)$ , intendendo che per  $k = 0$  si ha  $Z = 0$ . Esplicitamente:  $Z \sim \text{Bin}(V, p)$  se, per ogni  $k \in \mathbb{N}_0$  tale che  $P(V = k) > 0$ , vale

$$P(Z = l | V = k) = \binom{k}{l} p^l (1-p)^{k-l} \quad \forall l \in \{0, \dots, k\}.$$

Il Binomiale condizionale presenta delle proprietà che derivano dalla distribuzione Binomiale:

<sup>1</sup>Dis. di Markov: data la v.a.  $X \geq 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  vale  $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}$ .

- Data una successione  $(X_m)_{m \geq 1}$  di v.a. indipendenti con distribuzione  $\text{Ber}(p)$ , e indipendenti da  $V$ , allora

$$\sum_{m=1}^V X_m \sim \text{Bin}(V, p), \quad (1.3)$$

dove per convenzione la somma vale 0 se  $V = 0$ .

- La seconda proprietà è

$$Z \sim \text{Bin}(V, p) \quad \Rightarrow \quad V - Z \sim \text{Bin}(V, 1 - p). \quad (1.4)$$

*Dimostrazione.* Innanzitutto, dati  $m \in \mathbb{N}$  e  $q \in [0, 1]$ , se  $Z \sim \text{Bin}(m, q)$ , allora  $m - Z \sim \text{Bin}(m, 1 - q)$ : infatti, vista  $Z$  come somma di  $m$  v.a.  $X_i \sim \text{Ber}(q)$  indipendenti, allora  $m - Z$  si scrive come somma di v.a.  $1 - X_i \sim \text{Ber}(1 - q)$  indipendenti e il resto segue dalla proprietà che lega la distribuzione di Bernoulli e quella Binomiale. Ora la dimostrazione è finita perché condizionatamente a  $V = k$ ,  $Z$  ha legge  $\text{Bin}(k, q)$  e dunque  $V - Z = k - Z$  ha legge  $\text{Bin}(k, 1 - q)$ .  $\square$

Un'ultima proprietà che viene sfruttata in una dimostrazione è la seguente.

**Lemma 1.1.7.** *Sia  $X$  una v.a. a valori in  $\mathbb{N}_0$  e sia  $Y$  una v.a. a valori in  $\mathbb{N}_0$  con legge  $\text{Bin}(X, p)$ , dove  $p \in [0, 1]$ .*

*Se  $X \sim \text{Bin}(n, q)$  con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q \in [0, 1] \implies Y \sim \text{Bin}(n, pq)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $0 \leq l \leq k$ , per la formula delle probabilità totali e per la definizione di Binomiale condizionale, si ha che

$$\begin{aligned} P(Y = l) &= \sum_{k=l}^n P(Y = l | X = k) P(X = k) \\ &= \sum_{k=l}^n \binom{k}{l} p^l (1 - p)^{k-l} \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k}. \end{aligned}$$

A questo punto, esplicitando i coefficienti binomiali, si raccolgono i termini indipendenti da  $k$  e si aggiunge il termine  $(n - l)! / (n - l)!$  così da ottenere la formula

$$\frac{n!}{l!(n-l)!} (pq)^l \sum_{k=l}^n \frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-k)!} q^{k-l} (1-p)^{k-l} (1-q)^{n-k}.$$

Infine, applicando la sostituzione  $k - l \mapsto j$ , si riconosce che in realtà la sommatoria è un binomio di Newton e riscrivendolo si ha che la probabilità cercata vale

$$P(Y = l) = \frac{n!}{l!(n-l)!} (pq)^l (q - pq + 1 - q)^{n-l} = \frac{n!}{l!(n-l)!} (pq)^l (1 - pq)^{n-l},$$

ovvero è la densità di una legge  $\text{Bin}(n, pq)$ , come volevasi dimostrare.  $\square$

## 1.2 Il processo di Galton-Watson

Il processo di diramazione di Galton-Watson, introdotto da Bienaymé [2] ed indipendentemente da Galton e Watson [5], è un semplice modello nato per studiare l'estinzione di un cognome in una popolazione. Questo processo però può essere applicato a vari ambiti, come all'evoluzione di una popolazione, per studiare ad esempio la probabilità che essa si estingua nel tempo in funzione del numero medio di figli pro capite.

Il modello presenta tre ipotesi:

- si prende in considerazione una popolazione di tipo aploide, ovvero dove ogni individuo si riproduce in modo autonomo dagli altri individui (è presente un solo genitore),
- il numero di figli, sono una variabile aleatoria  $X$  a valori in  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  e con distribuzione  $\mu_X$  detta legge di *riproduzione*,
- il numero di figli di ogni individuo sono variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione  $\mu_X$ .

Si definisce, per  $n \geq 0$ , la variabile aleatoria  $Z_n$  a valori in  $\mathbb{N}_0$  che tiene conto del numero di individui appartenenti all' $n$ -esima generazione. Partendo dalla "0-esima generazione", dove per ipotesi è presente un unico individuo, questa variabile aleatoria è definita per ricorsione in questo modo:

$$Z_0 := 1, \quad Z_{n+1} = 0 \quad \text{se} \quad Z_n = 0, \quad Z_{n+1} := \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n)} \quad \text{se} \quad Z_n \geq 1, \quad (1.5)$$

dove la variabile aleatoria  $X_i^{(n)}$  indica il numero di figli dell' $i$ -esimo individuo della  $n$ -esima generazione. Come da ipotesi, l'insieme numerabile  $(X_i^{(j)})_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}_0}$  è un insieme di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione  $\mu_X$ .

**Definizione 1.2.1** (Processo di diramazione di Galton-Watson). La successione di variabili aleatorie  $(Z_n)_{n \geq 0}$  definita in (1.5) è detta processo di Galton-Watson o processo di diramazione.

**Osservazione 1.2.1.** Si nota che  $Z_n$  è funzione per ricorsione delle v.a. (variabili aleatorie)  $X_i^{(j)}$  con  $j = 1, \dots, n - 1$ , dunque, per indipendenza a blocchi, essa è indipendente dalla famiglia  $(X_i^{(n)})_{i \geq 1}$ .

La domanda che viene posta riguarda l'estinzione della popolazione, ovvero quando  $Z_n = 0$ . In particolare si vuole studiare la seguente probabilità

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = 0).$$

Infatti nello spazio di probabilità in cui sono definite le  $Z_n$ , si considera l'evento  $\bigcup_{n \geq 0} \{Z_n = 0\}$  come l'evento *ad un certo punto la popolazione si estingue*. Quindi, visto che la successione  $(\{Z_n = 0\})_{n \geq 0}$  è crescente ( $Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = 0$ ), per continuità dal basso si può interpretare il limite sopra citato come

$$P\left(\bigcup_{n \geq 0} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = 0) = \textit{probabilità di estinzione della popolazione}.$$

Sia ora  $X$  una v.a. con la stessa distribuzione delle v.a.  $X_i^{(j)}$ , ossia la legge  $\mu_X$ , e sia  $p_X$  la sua densità discreta. Si possono subito analizzare due casi semplici:

- se  $p_X(0) = 0 \Rightarrow$  quasi certamente ogni individuo ha *almeno un figlio*, cioè  $Z_{n+1} \geq Z_n \geq \dots \geq Z_0 = 1 \Rightarrow$  la popolazione non si estingue mai:  $P(Z_n = 0) = 0 \forall n \geq 1$ .
- se  $p_X(0) > 0 \wedge p_X(0) + p_X(1) = 1 \Rightarrow$  quasi certamente ogni individuo ha *al più un figlio un figlio*, cioè  $Z_{n+1} \leq Z_n \leq \dots \leq Z_0 = 1 \Rightarrow Z_n \in \{0, 1\}$  inoltre  $Z_n = 1 \Leftrightarrow$  *tutti gli individui dalla generazione 0 alla generazione n hanno esattamente 1 figlio*, allora  $P(Z_n = 1) = (p_X(1))^n$ . Ora, per ipotesi, si ha che  $p_X(1) = 1 - p_X(0) < 1$ , quindi si ottiene che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = 0) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = 1) = 1$$

ovvero la popolazione si estingue.

D'ora in avanti si può quindi supporre che  $p_X(0) > 0 \wedge p_X(0) + p_X(1) < 1$ .

Prima di dimostrare il risultato principale di questa sezione, si mostra un primo risultato importante che definisce la funzione generatrice di  $Z_n$ , ossia

$$G_{Z_n}(s) := \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k) s^k = E[s^{Z_n}], \quad \forall s \in [-1, +\infty),$$

in funzione della funzione generatrice del numero di figli  $X$ , che verrà chiamata  $G$ :

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k)s^k = E[s^X]. \quad (1.6)$$

**Proposizione 1.2.2.** *La funzione generatrice di  $Z_n$  è data da*

$$G_{Z_n}(s) = G^{\circ n}(s) := \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{n \text{ volte}}(s), \quad \forall s \in [0, 1], \forall n \geq 1.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è per induzione su  $n$ . Per  $n = 1$  si ha  $Z_1 = \sum_{i=1}^{Z_0} X_i^{(0)} = x_1^{(0)}$ , e dato che  $X_1^{(0)}$  ha la stessa legge di  $X$  segue che  $Z_1 = X_1^{(0)}$  ha la funzione generatrice di  $X$ , dunque  $G_{Z_1} = G$ .

Si procede per induzione su  $n$ . Basta mostrare che  $\forall n \geq 1$  si ha  $G_{Z_{n+1}}(s) = G_{Z_n}(G(s))$  per  $s \in [0, 1]$ . Si osservi che vale  $G(s) \in [0, 1]$  per ogni  $s \in [0, 1]$ . Si può quindi esprimere la funzione generatrice di  $Z_{n+1}$  come segue:

$$G_{Z_{n+1}}(s) = E[s^{Z_{n+1}}] = E[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n)}}],$$

dove per convenzione si pone  $\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n)} := 0$  se  $Z_n = 0$ , oltre che  $0^0 := 1$ . Si noti che il numero di termini che compongono la sommatoria è *aleatorio*. La probabilità  $P(Z_{n+1} = j)$  si può scrivere nel modo seguente

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = j) &= P\left(\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n)} = j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k, \sum_{i=1}^k X_i^{(n)} = j) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k) P\left(\sum_{i=1}^k X_i^{(n)} = j\right), \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dall'indipendenza a blocchi. Allora si può riscrivere la funzione generatrice dei momenti di  $Z_{n+1}$ , per ogni  $s \in [0, 1]$  come:

$$\begin{aligned} G_{Z_{n+1}}(s) &= E[s^{Z_{n+1}}] = \sum_{j=0}^{\infty} s^j P(Z_{n+1} = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} s^j \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k) P\left(\sum_{i=1}^k X_i^{(n)} = j\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k) \sum_{j=0}^{\infty} s^j P\left(\sum_{i=1}^k X_i^{(n)} = j\right), \end{aligned}$$

dove si possono scambiare le somme per il teorema di Fubini-Tonelli. Per concludere serve riconoscere la funzione generatrice di  $\sum_{i=1}^k X_i^{(n)}$ , applicando la proposizione 1.1.4 si ottiene:

$$\sum_{j=0}^{\infty} s^j P\left(\sum_{i=1}^k X_i^{(n)} = j\right) = G_{\sum_{i=1}^k X_i^{(n)}}(s) = \prod_{i=1}^k G_{X_i^{(n)}}(s) = G(s)^k,$$

avendo usato il fatto che le  $X_i^{(n)}$  hanno la stessa distribuzione di  $X$  ovvero hanno la sua stessa funzione generatrice. Si conclude quindi la dimostrazione applicando la definizione di funzione generatrice:

$$G_{Z_{n+1}}(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(Z_n = k) G(s)^k = G_{Z_n}(G(s)), \quad \forall s \in [0, 1]. \quad \square$$

La proposizione 1.2.2 esprime la funzione generatrice di  $Z_n$  in funzione di quella di  $X$ , dunque della legge di riproduzione  $\mu_X$ . Inoltre grazie alla proposizione 1.1.2 si possono ottenere i momenti di  $Z_n$  (se esistono) a partire da  $G_{Z_n}$ . In particolare se  $X$  ha momento secondo finito, allora il valore medio e varianza di  $Z_n$  sono dati da

$$E[Z_n] = E[X]^n, \quad Var(Z_n) = \begin{cases} n Var(X) & \text{se } E[X] = 1, \\ \frac{E[X]^n - 1}{E[X] - 1} E[X]^{n-1} Var(X) & \text{se } E[X] \neq 1. \end{cases}$$

La cosa però più interessante è che è possibile esprimere la probabilità oggetto di studio in funzione della funzione generatrice di  $Z_n$  attraverso la formula  $P(Z_n = 0) = G_{Z_n}(0)$ , sempre come conseguenza della proposizione 1.1.2. Ora è possibile affrontare il risultato principale, ricordando che i casi semplici sono già stati analizzati.

**Teorema 1.2.3** (Probabilità di estinzione). *Sia  $(Z_n)_{n \geq 0}$  il processo di diramazione definito in (1.5). Assumiamo che la v.a. numero di figli  $X$  soddisfi  $p_X(0) > 0$  e  $p_X(0) + p_X(1) < 1$  e sia  $G(s) := E[s^X]$  la sua funzione generatrice. Allora, detto  $q := \min\{s \in [0, 1] : G(s) = s\}$  il più piccolo punto fisso della funzione  $G$  nell'intervallo  $[0, 1]$ , la probabilità di estinzione vale*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = 0) = q \quad \text{dove} \quad \begin{cases} q = 1 & \text{se } E[X] \leq 1, \\ q \in (0, 1) & \text{se } E[X] > 1. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Si definisca  $u_n := P(Z_n = 0) = G_{Z_n}(0)$  per ogni  $n \geq 0$  e si osservi che  $u_1 = p_X(0) > 0$ , dal momento che  $Z_1$  ha la stessa distribuzione di  $X$ . Per la proposizione 2.1.3, la successione  $(u_n)_{n \geq 0}$  soddisfa la relazione di ricorrenza

$$u_{n+1} = G(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.7)$$

Per prima cosa si mostra che  $(u_n)_{n \geq 0}$  è una successione crescente. Dato che  $u_0 = 0$ , perché  $Z_0 = 1$ , si ha chiaramente  $u_1 \geq u_0$ ; procedendo per induzione, assumendo che  $u_n \geq u_{n-1}$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ , dal fatto che  $G: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  è una funzione crescente si deduce che  $u_{n+1} = G(u_n) \geq G(u_{n-1}) = u_n$ .

Dato che ogni successione crescente ha limite, possiamo definire

$$\tilde{q} := \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = 0) \in (0, 1].$$

Prendendo il limite  $n \mapsto +\infty$  nella relazione (1.7) si ottiene  $\tilde{q} = G(\tilde{q})$ , perché  $G$  è una funzione continua, quindi  $\tilde{q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  è un punto fisso della funzione  $G$ .

Mostriamo ora che  $\tilde{q}$  è il più piccolo punto fisso di  $G$  nell'intervallo  $[0, 1]$ , ossia coincide con  $q := \min\{s \in [0, 1]: G(s) = s\}$  (l'esistenza di questo minimo è garantita dal fatto che  $G$  è una funzione continua, dunque l'insieme dei punti fissi è chiuso e limitato). Per prima cosa si osserva che  $u_n \leq q$  per ogni  $n \in \mathbb{N}_0$ : infatti  $u_0 = 0 < q$  e, per induzione, se  $u_n \leq q$  allora  $u_{n+1} = G(u_n) \leq G(q) = q$  (poiché  $G$  è crescente e  $q$  è un punto fisso). Passando al limite  $n \mapsto +\infty$ , si ottiene  $\tilde{q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq q$  e dunque  $\tilde{q} = q$ , perché  $\tilde{q}$  è un punto fisso.

Si è dunque mostrato che  $P(Z_n = 0)$  converge a  $q$ . Resta solo da capire quando  $q = 1$  e quando  $q < 1$ . Ora, grazie al teorema di derivazione delle serie di potenze, la funzione  $G$ , definita in (1.6), è derivabile infinite volte in  $(0, 1)$  e in particolare la sua derivata seconda vale

$$G''(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)s^{k-2}p_X(k), \quad \forall s \in (0, 1).$$

In questa somma i termini  $k = 0$  e  $k = 1$  sono nulli, ma l'ipotesi  $p_x(0) + p_X(1) < 1$  garantisce che esiste  $k \geq 2$  per cui  $p_X(k) > 0$ . Di conseguenza  $G''(s) > 0$  per ogni  $s \in (0, 1)$  e dunque la funzione  $G$  è strettamente convessa in  $(0, 1)$ .

Dato che  $X$  è una v.a. positiva, essa ammette valore medio e grazie alla proposizione 1.1.2 si può scrivere

$$G'(1^-) := \lim_{s \rightarrow 1^-} G'(s) = E[X].$$

Per concludere la dimostrazione si mostra che  $q = 1$  se  $E[X] \leq 1$ , mentre  $q < 1$  se  $E[X] > 1$ .

- Si supponga che  $E[S] \leq 1$ . Grazie alla convessità stretta, il grafico della funzione  $G$  è strettamente al di sopra della retta tangente nel punto 1,

cioè  $G(s) > G(1) + G'(1^-)(s-1)$  per ogni  $s \in [0, 1)$ . Dato che  $G(1) = 1$  e  $G'(1^-) = E[X] \leq 1$ , ne consegue che  $G(s) > s$  per ogni  $s \in [0, 1)$  e dunque l'unico punto fisso di  $G$  nell'intervallo  $[0, 1]$  è  $q = 1$ .

- Si supponga ora che  $E[X] \in (1, +\infty)$  e si fissi  $\varepsilon \in (0, E[X]-1) \neq \emptyset$ . Per continuità di  $G'$  in  $(0, 1)$  esiste  $s_0 \in (0, 1)$  tale che per ogni  $s \in [s_0, 1)$  si ha  $G'(s) \geq 1 + \varepsilon$ . Di conseguenza si ottiene

$$G(1) = 1 \geq G(s_0) + (1 + \varepsilon)(1 - s_0),$$

da cui segue che  $G(s_0) \leq s_0 - (\varepsilon(1 - s_0)) < s_0$ . Dato che  $G(0) = p_X(0) > 0$  e  $G(s_0) < s_0$ , il teorema degli zeri applicato alla funzione  $G(s) - s$  assicura che  $G(s) = s$  per qualche  $s \in (0, s_0)$  e dunque  $q := \min\{s: G(s) = s\} < s_0 < 1$ .

□

Questo risultato mostra che nel modello di Galton-Watson la popolazione ha una *probabilità di sopravvivenza non nulla*, ovvero una *probabilità di estinzione*  $q < 1$  se e solo se il numero medio di figli  $E[X]$  è strettamente maggiore di 1; ciò è un primo esempio di transizione di fase in un processo aleatorio.

### 1.3 Il processo di Esplorazione

Un altro strumento necessario per dimostrare alcuni risultati nello studio dei grafi è il processo di esplorazione, che è una rappresentazione del processo di diramazione come una passeggiata aleatoria. Come si evince dal nome, è un processo che esplora la componente connessa (c.c.) di un grafo che contiene un vertice fissato in modo algoritmico, vertice dopo vertice. Durante l'esplorazione i vertici verranno divisi in tre diverse categorie:

**vertici estinti** cioè che sono già stati visitati e di cui si hanno già esplorato i collegamenti;

**vertici attivi** cioè che sono già stati visitati ma di cui bisogna ancora esplorare i collegamenti;

**vertici inattivi** tutti gli altri vertici che non sono ancora stati visitati.

Si suppone inoltre che l'insieme dei vertici  $V$  del grafo  $G$  sia indicizzato, dunque si associa ad ogni vertice un numero da 1 a  $n = \#V$ . Il processo segue la seguente idea: si fissa un vertice  $i \in V_n := \{1, \dots, n\}$ , all'inizio c'è

solo un vertice *attivo*, il vertice scelto  $i$ , mentre tutti gli altri sono *inattivi*. Ad ogni passo dell'esplorazione, a meno dell'esistenza di almeno un vertice attivo, si seguono questi tre punti:

1. si sceglie un vertice  $u$  fra quelli attivi (in modo arbitrario);
2. si visitano tutti i vertici vicini (ovvero direttamente collegati) di  $u$  che sono *inattivi* e li rendiamo *attivi* (se non ci sono vertici inattivi si salta questo punto);
3. il vertice  $u$  da attivo diventa *estinto*.

Quindi ad ogni passo il numero di vertici *estinti* aumenta di 1 (solo quello scelto all'inizio passa da attivo ad estinto) fino al primo istante  $\widehat{T}$  in cui non ci sono più vertici attivi. Raggiunto questo istante, l'esplorazione si arresta perché la c.c. del vertice  $i$  è stata completamente esplorata e tutti i suoi vertici sono estinti. In particolare si nota che  $\widehat{T}$  è la *taglia*, ovvero la *dimensione*, della componente connessa del vertice  $i$ .

Segue ora una formalizzazione del processo. Si definiscono tre oggetti

- per  $j \geq 0$  si indica con  $\widehat{Y}_j$  il numero di vertici *attivi* dopo  $j$  passi;
- per  $j \geq 1$  si indica con  $\widehat{Z}_j$  il numero di vertici visitati durante il  $j$ -esimo passo (cioè quelli resi attivi, punto (2));
- infine  $\widehat{T} := \min\{j: \widehat{Y}_j = 0\}$  che coincide con la taglia della c.c. del vertice  $i$  scelto.

Si osserva che  $\widehat{Y}_0 = 1$  e che per  $j \geq 0$  se  $\widehat{Y}_j \geq 1$  (cioè se ci sono ancora vertici attivi dopo  $j$  passi)  $\Rightarrow \widehat{Y}_{j+1} = \widehat{Y}_j + \widehat{Z}_{j+1} - 1$ , mentre se  $\widehat{Y}_j = 0 \Rightarrow \widehat{Y}_{j+1} = 0$ .

**Definizione 1.3.1** (Processo di esplorazione). Con abuso di notazione, la successione  $(\widehat{Y}_j)_{j \geq 0}$  è detta *processo di esplorazione*.

Si osserva inoltre che se  $\widehat{Y}_j \geq 1$ , cioè se c'è almeno un vertice attivo dopo il  $j$ -esimo passo, il numero di vertici *estinti* è  $j$  e il numero di vertici *inattivi* è  $\widehat{V}_j = n - (\widehat{Y}_j + j)$ . Con questa notazione, scelto un vertice attivo  $u$ , nel passo  $(j + 1)$ -esimo vengono esaminate  $\widehat{V}_j$  coppie di vertici  $\{u, v\}$  (dove  $v$  è *inattivo*), che differiscono da quelle visitate fino a quell'istante (le coppie  $\{w, v\}$  dove  $w$  è un vertice *estinto*). Di queste coppie non tutte verranno visitate, solo quelle in cui la coppia esaminata forma un arco della c.c.. Se per ipotesi, la regola secondo cui una coppia di vertici, indipendentemente dalle altre coppie, formi un arco è aleatoria, in particolare segue una legge

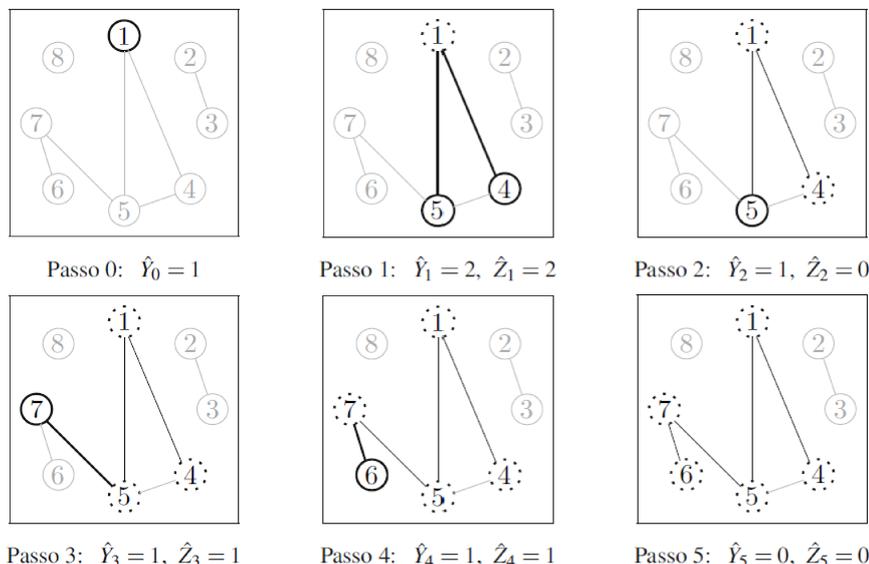


Figura 1.1: Processo di esplorazione per il grafo  $G = (V, E)$  definito da  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  ed  $E = \{(1, 4), (1, 5), (2, 3), (4, 5), (5, 7), (6, 7)\}$ , a partire dal vertice 1. In ogni passo  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  sono evidenziati in grassetto i vertici attivi, il cui numero è  $\hat{Y}_j$ , e gli archi visitati, il cui numero è  $\hat{Z}_j$ ; i vertici estinti sono tratteggiati. Il primo istante in cui non ci sono più vertici attivi è  $\hat{T} = 5$ , che coincide con la taglia della componente connessa  $\mathcal{C}_1 = \{1, 4, 5, 6, 7\}$  del vertice 1.

di Bernoulli di parametro  $p_n$ , si trova, ricordando la definizione di Binomiale condizionale 1.1.6, una relazione interessante:

$$\hat{Z}_{j+1} \sim \text{Bin}(\hat{V}_j, p_n) \quad \text{se } \hat{Y}_j \geq 1. \quad (1.8)$$

Infatti,  $\hat{Z}_{j+1}$  si scrive come somma di  $\hat{V}_j$  v.a.  $(X_m)_{m \geq 1}$  indipendenti e con legge  $\text{Ber}(p_n)$ , indipendenti da  $\hat{V}_j$ , allora grazie alla proprietà (1.3) si ha (1.8).

Il perché dell'ultima ipotesi e la relativa notazione, sarà chiaro nel prossimo capitolo, quando si introdurrà il grafo aleatorio di Erdős-Rényi. Questa ipotesi però varrà anche nel seguito della sezione, dunque è opportuno ripeterla: *scelta a caso una coppia di vertici del grafo, questa forma un arco con probabilità  $p_n$  indipendentemente dalle altre coppie; ovvero essa appartiene o meno all'insieme degli archi secondo una legge di Bernoulli di parametro  $p_n$  indipendentemente dalle altre coppie.*

Si introduce ora una nuova successione  $(Y_j)_{j \geq 0}$  di v.a. chiamata *processo*

*ausiliario:*

$$\begin{aligned} Y_0 &:= 1, \\ Y_{j+1} &:= Y_j + Z_{j+1} - 1, \end{aligned} \tag{1.9}$$

con  $Z_{j+1} \sim \text{Bin}(V_j, p)$ , per  $j \geq 1$ , dove  $V_j := n - Y_j - j$ . Più precisamente, ricordando la proprietà (1.3), si definisce  $Z_{j+1} := \sum_{m=1}^{V_j} X_m^{(j+1)}$ , dove  $(X_m^{(j)})_{m,l \in \mathbb{N}}$  è una famiglia di v.a. indipendenti con distribuzione  $\text{Ber}(p)$ . La legge  $\text{Bin}(V_j, p)$  in (1.9) è ben definita perché si mostra per induzione che  $V_j \geq 0$  per ogni  $j \geq 0$ . Il passo base è immediato, infatti  $V_0 = n - Y_0 - 0 = n - 1 \geq 0$ . Supponendo sia vero per  $j \geq 0$ , il passo induttivo è

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= n - Y_{j+1} - (j + 1) = n - Y_j - Z_{j+1} + 1 - j - 1 \\ &= n - Y_j - Z_{j+1} - j = V_j - Z_{j+1} + 1 \geq 0, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è verificata perché il numero di vertici visitati al  $j + 1$ -esimo passo dev'essere minore o uguale del numero di vertici inattivi dopo il  $j$ -esimo passo.

**Osservazione 1.3.1.** Il processo ausiliario  $Y$  in (1.9), a differenza del processo di esplorazione  $\widehat{Y}$  in (1.3.1), può diventare strettamente negativo (se  $Y_j = 0$  e  $Z_{j+1} = 0 \Rightarrow Y_{j+1} = -1$ ). Di conseguenza, dopo il primo istante in cui  $Y_j = 0$ , si perde l'interpretazione di  $(Y_j)_{j \geq 0}$  come processo di esplorazione. Però è cruciale osservare che il processo ausiliario ha la stessa evoluzione del processo di esplorazione, almeno fino al primo istante in cui  $Y_j = 0$ . In particolare la v.a.  $T := \min\{j : Y_j = 0\}$  ha la stessa distribuzione di  $\widehat{T} := \min\{j : \widehat{Y}_j = 0\}$ , che è la taglia della c.c. del vertice  $i$ .

La relazione ricorsiva (1.9) permette di determinare esattamente la distribuzione di  $Y_j$ .

**Lemma 1.3.2.** *Sia  $(Y_j)_{j \geq 0}$  la successione definita in (1.9), e sia  $V_j = n - Y_j - j$ . Allora per ogni  $j \in \mathbb{N}_0$ , si ha che  $V_j \sim \text{Bin}(n - 1, (1 - p_n)^j)$ ; in modo equivalente,  $Y_j + j - 1 \sim \text{Bin}(n - 1, 1 - (1 - p_n)^j)$ .*

*Dimostrazione.* Si mostra per induzione su  $j \in \mathbb{N}_0$  che  $V_j \sim \text{Bin}(n - 1, (1 - p_n)^j)$ . Per  $j = 0$  si ha  $V_0 = n - 1$ , perché al passo 0 ho un vertice attivo e gli altri sono inattivi, e dato che  $(1 - p_n)^0 = 1$  si ha che  $\text{Bin}(n - 1, 1) = n - 1$  (quasi certamente). Si fissi ora  $j \geq 0$ , e assumendo che  $V_j \sim \text{Bin}(n - 1, (1 - p_n)^j)$  si prova che  $V_{j+1} \sim \text{Bin}(n - 1, (1 - p_n)^{j+1})$ . Dalla relazione (1.9) si evince che

$$V_{j+1} = V_j - Z_{j+1},$$

dove  $Z_{j+1} \sim \text{Bin}(V_j, p_n)$ , per cui  $V_j - Z_{j+1} \sim \text{Bin}(V_j, 1 - p_n)$ ; questo perché vale la proprietà (1.4). Si applica ora il lemma 1.1.7:

$$\text{se } V \sim \text{Bin}(m, r) \quad \Rightarrow \quad \text{Bin}(V, q) \sim \text{Bin}(m, qr),$$

a  $V = V_j \sim \text{Bin}(n - 1, (1 - p_n)^j)$ ,  $q = 1 - p_n$  e  $r = (1 - p_n)^j$ , quindi segue facilmente che  $V_{j+1} \sim \text{Bin}(n - 1, (1 - p_n)^{j+1})$ .

L'ultima affermazione segue dalla proprietà (1.4), infatti:

$$Y_j + j - 1 = (n - 1) - V_j \text{ dove } V_j \sim \text{Bin}(n - 1, (1 - p_n)^j). \quad \square$$

Questo processo di esplorazione dopo aver esplorato tutta la componente connessa del vertice  $i$  fissato si arresta, ma per studiare un grafo nella sua interezza è necessario esplorare tutte le sue componenti connesse. Si introduce quindi una modifica al processo di esplorazione, detto *processo di esplorazione che "ricomincia"*. L'idea di base è la medesima del processo di esplorazione, ovvero si fissa un vertice  $i \in V_n := \{1, \dots, n\}$  e ne si esplora la componente connessa. Quando però non ci sono più vertici *attivi*, ovvero quando si ha finito di esplorare tutta la c.c. del vertice  $i$ , se rimangono vertici *inattivi* del grafo, ne viene scelto uno qualsiasi, lo si rende *estinto* e contemporaneamente tutti i suoi vicini li si rende *attivi*. Si prosegue ora con il processo di esplorazione *standard*, ovvero si seguono i punti (1), (2), (3), finché non c'è più alcun vertice attivo. A questo punto si ripete la procedura appena descritta e si sceglie un vertice fra quelli *inattivi* e così via. In questa maniera, dopo  $j$  passi, il numero di vertici estinti è sempre uguale a  $j$ . L'esplorazione si ferma dopo  $n$ -passi con tutti i vertici estinti, dato che tutto il grafo è stato visitato e trovate tutte le componenti connesse.

Questo processo modificato si può formalizzare come segue: per ogni  $j = 0, 1, \dots, n$ , sia  $\tilde{Y}_j$  il numero di vertici *attivi* dopo  $j$  passi del processo di esplorazione modificato sopra descritto. Si ha allora

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_0 &:= 1, \\ \tilde{Y}_{j+1} &= \tilde{Y}_j + \tilde{Z}_{j+1} - 1, \quad \text{per } j = 0, \dots, n - 1, \end{aligned} \quad (1.10)$$

dove la v.a.  $\tilde{Z}_{j+1}$  rappresenta il numero di vertici visitati al passo  $j + 1$ . Di conseguenza, ricordando l'ipotesi secondo cui una coppia di vertici, scelta a caso, appartiene o meno all'insieme degli archi con probabilità  $p_n$ , cioè segue una legge  $\text{Ber}(p_n)$ , si ha che

$$\tilde{Z}_{j+1} \sim \begin{cases} \text{Bin}(\tilde{V}_j, p_n) & \text{se } \tilde{Y}_j \geq 1, \\ 1 + \text{Bin}(\tilde{V}_j - 1, p_n) & \text{se } \tilde{Y}_j = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

dove  $\tilde{V}_j := n - \tilde{Y}_j - j$  indica il numero di vertici *inattivi* dopo  $j$  passi; si nota che se  $\tilde{Y}_j = 0$  si ha  $\tilde{V}_j - 1 = n - j - 1 \geq 0$  per ogni  $j = 0, \dots, n$ , per tanto la v.a.  $\text{Bin}(\tilde{V}_j - 1, p_n)$  in (1.11) è ben definita. Si definisce la successione  $(\tilde{Y}_j)_{0 \leq j \leq n}$  come *processo di esplorazione modificato*.

**Osservazione 1.3.2.** È importante osservare che il processo di esplorazione modificato  $(\tilde{Y}_j)_{0 \leq j \leq n}$  non è molto diverso dal processo ausiliario  $(Y_j)_{j \geq 0}$  definito in (1.9). Infatti, quando  $\tilde{Y}_j \geq 1$ , il processo di esplorazione modificato evolve secondo la stessa *relazione ricorsiva* (1.9) del processo ausiliario; invece, quando  $\tilde{Y}_j = 0$ , la relazione  $\tilde{Z}_{j+1} \sim 1 + \text{Bin}(\tilde{Y}_j - 1, p_n)$  è diversa da  $Z_{j+1} \sim \text{Bin}(V_j, p_n)$ . Ricordando la proprietà (1.3), è ovvio che si debba avere

$$1 + \text{Bin}(V - 1, p) \geq \text{Bin}(V, p),$$

perciò risulta naturale pensare che  $\tilde{Y}_j$  sia "più grande" di  $Y_j$ ,  $\forall j = 0, \dots, n$ .

Nel seguente lemma è contenuta una formulazione più precisa di quanto appena osservato.

**Lemma 1.3.3.** *È possibile definire sullo stesso spazio di probabilità due successioni  $(Y_j)_{0 \leq j \leq n}$  e  $(\tilde{Y}_j)_{0 \leq j \leq n}$  che verificano rispettivamente (1.9) e (1.10)-(1.11) per ogni  $0 \leq j \leq n$ , in modo che si abbia  $\tilde{Y}_j \geq Y_j$ ,  $\forall j \in \{0, \dots, n\}$ .*

*Dimostrazione.* Si fissi uno spazio di probabilità in cui è definita una famiglia di v.a.  $(X_i^{(j)})_{i, j \geq 0}$  indipendenti con legge  $\text{Ber}(p)$ . Queste v.a. saranno usate, a loro volta, per costruire le variabili  $Z_j$  e  $\tilde{Z}_j$  che compaiono al  $j$ -esimo passo. Si definiscono quindi le successioni  $(Y_j)_{0 \leq j \leq n}$  e  $(\tilde{Y}_j)_{0 \leq j \leq n}$  in modo iterativo, ponendo  $Y_0 = \tilde{Y}_0 = 1$ , e quindi, per  $0 \leq j \leq n - 1$

$$\begin{aligned} Y_{j+1} &= y_j - 1 + Z_{j+1} \quad \text{con} \quad Z_{j+1} := \sum_{i=1}^{n-Y_j-j} X_i^{(j+1)}, \\ \tilde{Y}_{j+1} &= \tilde{Y}_j - 1 + \tilde{Z}_{j+1} \quad \text{con} \quad \tilde{Z}_{j+1} := \sum_{i=1}^{n-\tilde{Y}_j-j} X_i^{(j+1)} + (1 - X_1^{(j+1)}) \mathbb{1}_{\{\tilde{Y}_j=0\}}. \end{aligned}$$

Si nota che  $Y$  verifica la relazione di ricorrenza (1.9). Invece per quanto riguarda  $\tilde{Y}$ , vedendo separatamente i due casi  $\tilde{Y} \neq 0$ , dove l'ultimo termine vale 0, e  $\tilde{Y} = 0$ . In particolare, nel secondo caso, si ha

$$\tilde{Y}_{j+1} = -1 + \tilde{Z}_{j+1} = -1 + \sum_{i=1}^{n-\tilde{Y}_j-j} X_i^{(j+1)} + 1 - X_1^{(j+1)} = \sum_{i=2}^{n-\tilde{Y}_j-j} X_i^{(j+1)},$$

ovvero una somma di  $n - \tilde{Y}_j - j - 1 = \tilde{V}_j - 1$  v.a. di  $\text{Ber}(p)$  indipendenti.

Rimane da mostrare che  $\tilde{Y}_j \geq Y_j \forall 0 \leq j \leq n$ . Si procede per induzione: il caso base  $j = 0$  è immediato perché per definizione  $Y_0 = \tilde{Y}_0 = 1$ . Per  $j \geq 0$ , assumendo che  $n - \tilde{Y}_j - j \leq n - Y_j - j$  per ipotesi induttiva, si ha che la somma in  $\tilde{Z}_{j+1}$  contiene meno addendi di quella in  $Z_{j+1}$ , pertanto

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{j+1} - Y_{j+1} &= \tilde{Y}_j - Y_j + \tilde{Z}_{j+1} - Z_{j+1} \geq \tilde{Y}_j - Y_j - \sum_{i=n-\tilde{Y}_j-j+1}^{n-Y_j-j} X_i^{(j+1)} \\ &= \sum_{i=n-\tilde{Y}_j-j+1}^{n-Y_j-j} (1 - X_i^{(j+1)}), \end{aligned}$$

dove per la prima disuguaglianza si usa il fatto che  $(1 - X_1^{(j+1)}) \mathbb{1}_{\{\tilde{Y}_j=0\}} \geq 0$ , e per l'ultima uguaglianza il fatto che la somma contiene  $\tilde{Y}_j - Y_j$  termini. Dato che  $X_i^{(j+1)} \leq 1$  segue subito che  $\tilde{Y}_{j+1} - Y_{j+1} \geq 0$ .  $\square$



## Capitolo 2

# Il grafo aleatorio di Erdős-Rényi

In questo capitolo si introducono brevemente i grafi aleatori, in particolare una variazione al modello di Erdős-Rényi [3]. Nella seconda sezione si indagherà la transizione di fase riguardante la connettività nel grafo di Erdős-Rényi.

### 2.1 Il modello di Erdős-Rényi

Per studiare reti di grandi dimensioni, l'approccio più conveniente risulta essere l'utilizzo dei grafi aleatori. I grafi aleatori sono dei grafi in cui la struttura si basa su una costruzione aleatoria e di conseguenza si possono vedere come variabili aleatorie. Dato un numero  $n \in \mathbb{N}$ , si considerano gli insiemi  $V_n := \{1, \dots, n\}$  e  $A_n := \{A \subset V_n : |A| = 2\}$ . Si definisce allora l'insieme di tutti i grafi con  $n$  vertici

$$\mathbb{G}_n := \{G = (V_n, E) : E \subseteq A_n\}.$$

Se ad ogni elemento di  $A_n$  viene associata una variabile a valori in  $\{0, 1\}$ :  $A_n \ni e \mapsto \omega(e) \in \{0, 1\}$ , si ottiene una corrispondenza biunivoca fra  $\Omega_n := \{0, 1\}^{|A_n|} = \{0, 1\}^{\binom{n}{2}}$  e  $\mathcal{P}(A_n)$ , infatti

$$\forall \omega \in \Omega_n : E(\omega) := \{e \in A_n : \omega(e) = 1\},$$

e quindi anche fra  $\Omega_n$  e  $\mathbb{G}_n$ , perché  $\mathbb{G}_n \leftrightarrow \mathcal{P}(A_n)$ . A questo punto si può costruire lo spazio di probabilità  $(\mathbb{G}_n, \mathcal{P}(\mathbb{G}_n), \mathbb{P}_n)$ , definito grazie alla relazione con lo spazio di probabilità  $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbb{P})$  data dalla corrispondenza biunivoca  $\alpha: \mathbb{G}_n \rightarrow \Omega_n$ , dove, in particolare, si ha  $\mathbb{P}_n := \mathbb{P} \circ \alpha^{-1}$ .

Se su  $\Omega_n$  si costruisce una successione di v.a. i.i.d. (indipendenti ed identicamente distribuite) con legge di Bernoulli, ed ad ognuna si associa

un elemento di  $\Omega_n$ , si ottiene il modello di grafo aleatorio di Erdős-Rényi. Infatti, con questa scelta, si ottiene un grafo aleatorio in cui un arco ha probabilità  $p$  di essere presente o meno, indipendentemente da tutti gli altri archi. Ponendo però altre condizioni oppure costruendo in maniera diversa gli spazi di probabilità, si ottengono diversi modelli di grafi aleatori.

Nei prossimi due capitoli verranno studiate le proprietà di un semplice modello di grafo aleatorio, introdotto nel 1959 da E. Gilbert e indipendentemente, con qualche variazione, da Erdős-Rényi. Si definisce ora il modello in maniera più qualitativa rispetto al punto di vista probabilistico sopra riportato.

**Definizione 2.1.1** (Grafo aleatorio di Erdős-Rényi). Il grafo  $ER_n(p) = (V_n, E_n)$  è definito da

- l'insieme dei vertici  $V_n := \{1, \dots, n\}$ ;
- l'insieme degli archi  $E_n := \{(i, j)^1 \in A_n : X_{(i,j)} = 1\}$ , dove  $(X_{(i,j)})_{(i,j) \in A_n}$  è una famiglia di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione  $\text{Ber}(p)$ ;

è chiamato *grafo aleatorio di Erdős-Rényi* con parametri  $n, p$ .

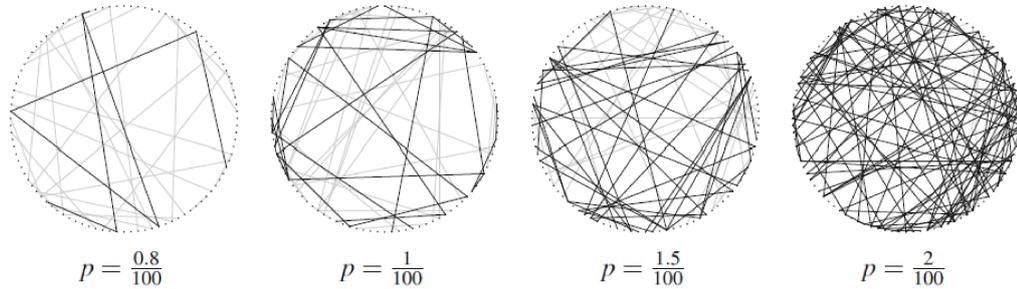


Figura 2.1: Simulazione di quattro grafi di Erdős-Rényi con  $n=100$ , per diversi valori di  $p$ , dove la componente connessa più grande  $C$  è rappresentata in nero e le altre componenti in grigio: da sinistra a destra,  $p = 0.008$  ( $|\mathcal{C}_{\max}| = 8$ ),  $p = 0.01$  ( $|\mathcal{C}_{\max}| = 27$ ),  $p = 0.015$  ( $|\mathcal{C}_{\max}| = 40$ ),  $p = 0.02$  ( $|\mathcal{C}_{\max}| = 74$ ).

Come già evidenziato, la definizione dell'insieme  $E_n$  corrisponde al fatto che un arco fra due vertici, sia presente con probabilità  $p$  indipendentemente dagli altri archi.

<sup>1</sup>Con un abuso di notazione gli archi del grafo vengono indicati con le parentesi tonde  $(\dots, \dots)$ , come stabilito nel primo capitolo, nonostante  $A_n$  sia un insieme di insiemi.

**Osservazione 2.1.1.** Si evidenziano i casi in cui la probabilità assume valori triviali:

- se  $p = 0$ , si ha che  $E_n = \emptyset$  q.c. (quasi certamente), ovvero nessun arco è presente nel grafo, che è costituito da vertici *isolati*;
- se  $p = 1$ , si ha che  $E_n = A_n$  q.c., ovvero tutti gli archi possibili sono presenti e il grafo è completamente connesso, si tratta dunque del grafo completo  $K_n$ , descritto nel primo capitolo.

Nella prossima sezione e nel capitolo successivo si tratteranno, rispettivamente, il problema della *connessione* e quello della comparsa di una *componente connessa gigante*, entrambe sono proprietà asintotiche per  $n \mapsto +\infty$ . In questi casi sarà necessario ammettere che la probabilità  $p$  dipenda dal numero di vertici  $n$  e si scriverà  $p_n$ .

## 2.2 Il problema della connettività

La prima proprietà che viene analizzata del grafo  $ER_n(p)$  è la sua connettività, ovvero studiare quando il grafo è connesso o meno. Il risultato che verrà provato è il seguente

**Teorema 2.2.1** (Connettività del grafo di Erdős-Rényi). *Fissato  $\beta \in (0, +\infty)$ , si pone  $p_n = \beta \frac{\log n}{n}$  per ogni  $n \geq 1$ . Allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(ER_n(p_n) \text{ è connesso}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta < 1, \\ 1 & \text{se } \beta > 1. \end{cases}$$

In questo primo risultato si può notare la prima transizione di fase che caratterizza il grafo aleatorio di Erdős-Rényi, in quanto vi è una divisione netta di quando il grafo è connesso (q.c.) e quando non lo è. Si nota inoltre che è possibile sostituire l'ipotesi riguardante il valore della probabilità  $p_n$  con la relazione asintotica  $p_n \sim \beta \frac{\log n}{n}$  ovvero  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{np_n}{\log n} = \beta$ .

Prima di dimostrare questo risultato, si prova una proposizione preliminare legata al problema che si sta studiando, ma che ha come oggetto i vertici *isolati*, ovvero quei vertici che non hanno vicini.

**Proposizione 2.2.2** (Vertici isolati nel grafo di Erdős-Rényi). *Fissato  $\beta \in (0, +\infty)$ , si pone  $p_n = \beta \frac{\log n}{n}$  per ogni  $n \geq 1$ . Allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(ER_n(p_n) \text{ non ha vertici isolati}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta < 1, \\ 1 & \text{se } \beta > 1. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Indicando con  $W_n$  il numero di vertici isolati in  $ER_n(p_n)$ , la probabilità da stimare è  $P(W_n = 0)$ . Possiamo riscrivere  $W_n$  nella forma

$$W_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{dove } A_i = \{i \text{ è un vertice isolato}\} = \bigcap_{j \neq i} \{X_{(i,j)} = 0\}.$$

Quindi  $W_n$  è somma di v.a. di Bernoulli (non indipendenti), di parametro

$$P(A_i) = P\left(\bigcap_{j \neq i} \{X_{(i,j)} = 0\}\right) = (1 - p_n)^{n-1},$$

dove qui è stata utilizzata l'indipendenza delle  $X_{(i,j)}$ . Per linearità, segue che il valore medio di  $W_n$  è

$$E[W_n] = \sum_{i=1}^n P(A_i) = n(1 - p_n)^{n-1}. \quad (2.1)$$

Con la scelta  $p_n = \beta \frac{\log n}{n}$ , si ottiene  $E[W_n] \sim n^{1-\beta}$  per  $n \mapsto +\infty$ , perché

$$(1 - p_n)^n = e^{n \log(1-p_n)} = e^{-np_n + O(np_n^2)} \sim e^{-\beta \log n} = 1/n^\beta.$$

Pertanto,  $\lim_{n \mapsto +\infty} E[W_n] = 0$  se  $\beta > 1$  e  $\lim_{n \mapsto +\infty} E[W_n] = +\infty$  se  $\beta < 1$ .

Se  $\beta > 1$ , per la disuguaglianza di Markov si ha che

$$P(W_n \geq 1) \leq E[W_n] \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \mapsto +\infty,$$

il che conclude il caso  $\beta > 1$ , dato che  $P(W_n = 0) = 1 - P(W_n \geq 1)$ .

Per il caso  $\beta < 1$ , si usa la disuguaglianza di Chebychev<sup>2</sup>: essendo  $W_n \geq 0$ , si ha  $P(W_n = 0) = P(W_n \leq 0)$ , per cui

$$\begin{aligned} P(W_n = 0) &= P(W_n - E[W_n] \leq -E[W_n]) \\ &\leq P(|W_n - E[W_n]| \geq E[W_n]) \leq \frac{\text{Var}(W_n)}{E[W_n]^2}. \end{aligned}$$

Rimane da stimare  $\text{Var}(W_n)$  e per farlo si stima la quantità

$$\text{Var}(\mathbb{1}_{A_i}) = P(A_i) - P(a_i^2) = P(a_i)(1 - P(A_i)) \leq P(A_i) = (1 - p_n)^{n-1},$$

e per  $i \neq j$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) &= P(A_i \cap A_j) - P(A_i)P(A_j) \\ &= (1 - p_n)^{2n-3} - (1 - p_n)^{2n-2} = p_n(1 - p_n)^{2n-3}. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Dis. di Chebychev: data la v.a.  $X \in L^2$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  vale  $P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$ .

Infatti,

$$A_i \cap A_j = \bigcap_{k \neq i} \bigcap_{k' \neq j} \{X_{(i,k)} = 0\} \cap \{X_{(k',j)} = 0\},$$

e l'intersezione contiene  $2(n-1) - 1 = 2n - 3$  archi distinti (dato che l'arco  $(i,j)$  viene contato solo una volta), da cui segue che  $P(A_i \cap A_j) = (1-p_n)^{2n-3}$ .

Infine, usando la formula (2.1) per  $E[W_n]$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \text{Var}(W_n) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(\mathbb{1}_{A_i}) + \sum_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} \text{Cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) \\ &\leq n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)p_n(1-p_n)^{2n-3} \leq E[W_n] + E[W_n]^2 \frac{p_n}{1-p_n}. \end{aligned}$$

Quindi

$$P(W_n = 0) \leq \frac{\text{Var}(W_n)}{E[W_n]^2} \leq \frac{1}{E[W_n]} + \frac{p_n}{1-p_n}.$$

Nel caso  $\beta \in (0, 1)$ , si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E[W_n] = +\infty$ : dato che in ogni caso  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$ , si conclude che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n = 0) = 0$ .  $\square$

*Dimostrazione (del teorema 2.2.1).* Si osserva, innanzitutto, che se  $ER_n(p_n)$  è connesso, allora non ha alcun vertice isolato, per cui

$$\{ER_n(p_n) \text{ è connesso}\} \subseteq \{ER_n(p_n) \text{ non ha vertici isolati}\},$$

da cui segue

$$P(ER_n(p_n) \text{ è connesso}) \leq P(ER_n(p_n) \text{ non ha vertici isolati}).$$

Di conseguenza, grazie alla proposizione 2.2.2, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(ER_n(p_n) \text{ è connesso}) = 0.$$

Si passa ora al caso  $\beta > 1$ : già sappiamo che con grande probabilità non vi saranno vertici isolati, ma nulla a priori impedisce che ci siano c.c. formate da più di un vertice. Dato un sottoinsieme  $S \subseteq V_n$  con  $S \neq \emptyset$  e  $S \neq V_n$ , diciamo che  $S$  è *isolato* se non esiste alcun arco "uscende da  $S$ ", cioè se per ogni  $u \in S$  e  $v \notin S$  si ha che  $u$  e  $v$  non sono connessi. L'osservazione essenziale è che *affinché  $ER_n(p_n)$  non sia connesso, deve esistere un sottoinsieme isolato  $S \subset V_n$* . Notando che se  $S$  è isolato allora anche  $S^c$  è isolato, deve esistere un sottoinsieme  $S \subset V_n$  isolato di cardinalità  $1 \leq |S| \leq \lfloor n/2 \rfloor$ . Si ha quindi l'inclusione, che in realtà è un'uguaglianza, seguente

$$\{ER_n(p_n) \text{ non è connesso}\} \subseteq \bigcup_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, n\} \\ 1 \leq |S| \leq \lfloor n/2 \rfloor}} \{S \text{ è isolato}\}.$$

Per sub-additività della probabilità, si ha

$$P(ER_n(p_n) \text{ non è connesso}) \leq \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{S \subseteq \{1, \dots, n\}: |S|=m} P(S \text{ è isolato}).$$

Fissato  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$  tale che  $|S| = m$ , la probabilità che  $S$  sia isolato è, per l'indipendenza delle  $X_{(i,j)}$ ,

$$P(S \text{ è isolato}) = P\left(\bigcap_{i \in S, j \notin S} \{X_{(i,j)} = 0\}\right) = (1 - p_n)^{m(n-m)},$$

dato che ci sono esattamente  $m(n-m)$  archi potenziali  $(i, j) \in A_n$  con  $i \in S$  e  $j \notin S$ . Si ottiene allora

$$P(ER_n(p_n) \text{ non è connesso}) \leq \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{m} (1-p_n)^{m(n-m)} \leq \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n^m}{m!} e^{-p_n(m(n-m))},$$

dove si usano le stime  $\binom{n}{m} \leq \frac{n^m}{m!}$  (perché  $\frac{n!}{(n-m)!} \neq n^m$ ) e  $1 - x \leq e^{-x}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Si ricorda, inoltre, che  $p_n = \beta \frac{\log n}{n}$ , dunque si ha  $n^m e^{-\beta \frac{\log n}{n} m(n-m)} = n^m n^{-\frac{\beta(m(n-m))}{n}} = n^{\frac{nm}{n}(1-\beta)} n^{\frac{\beta m^2}{n}}$  e la disuguaglianza diventa

$$P(ER_n(p_n) \text{ non è connesso}) \leq \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n^{(1-\beta)m}}{m!} n^{\frac{\beta m^2}{n}}. \quad (2.2)$$

Per la stima di questa somma, risulta conveniente spezzarla in due parti: si pone  $c_\beta := \frac{\beta-1}{2\beta} \in (0, \frac{1}{2})$  si stimano separatamente la somma per  $1 \leq m \leq c_\beta n$  e la somma per  $c_\beta n < m \leq \lfloor n/2 \rfloor$ .

- Per  $1 \leq m \leq c_\beta n$ , si ha  $n^{\frac{\beta m^2}{n}} \leq n^{\frac{(\beta-1)m}{2}}$  e la prima somma può essere allora stimata nel modo seguente:

$$\sum_{m=1}^{\lfloor c_\beta n \rfloor} \frac{n^{(1-\beta)m}}{m!} n^{\frac{\beta m^2}{n}} \leq \sum_{m=1}^{\lfloor c_\beta n \rfloor} \frac{n^{\frac{1-\beta}{2}m}}{m!} \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{n^{\frac{1-\beta}{2}m}}{m!} = \exp\left(n^{\frac{1-\beta}{2}}\right) - 1,$$

dove per l'ultima uguaglianza è stata usata la definizione della serie esponenziale. Quindi la parte di somma in (2.2) con  $1 \leq m \leq c_\beta n$  tende a 0 per  $n \mapsto +\infty$ .

- Per  $c_\beta n < m \leq \lfloor n/2 \rfloor$ , si usa il fatto che  $n^{\frac{\beta m^2}{n}} \leq n^{\frac{\beta m}{2}}$  e che  $m! \geq (m/e)^m$ , grazie alla formula di Stirling<sup>3</sup>: la seconda somma ammette allora la seguente stima:

$$\sum_{m=\lfloor c_\beta n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n^{(1-\beta)m}}{m!} n^{\frac{\beta m^2}{n}} \leq \sum_{m=\lfloor c_\beta n \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left( \frac{n^{1-\beta/2} e}{m} \right)^m \leq \sum_{m=\lfloor c_\beta n \rfloor + 1}^{+\infty} \left( \frac{n^{-\beta/2} e}{c_\beta n} \right)^m,$$

dove per l'ultima disuguaglianza è stato usato il fatto che  $n/m \leq 1/c_\beta$ . Ora si può scegliere un  $n$  abbastanza grande, in modo che  $n^{-\frac{\beta}{2}} \leq \frac{c_\beta}{2e}$ , quindi, usando la definizione di serie geometrica, si ha che la seconda parte di somma è maggiorata da

$$\sum_{m=\lfloor c_\beta n \rfloor + 1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^m = \left( \frac{1}{2} \right)^{\lfloor c_\beta n \rfloor},$$

che tende a 0 per  $n \mapsto +\infty$ .

È stato dunque mostrato che, se  $\beta > 1$ , l'espressione in (2.2) tende a 0, il che conclude la dimostrazione del teorema 2.2.1.  $\square$

---

<sup>3</sup>La formula di Stirling dice che per  $n \mapsto +\infty$   $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ ; equivalentemente vale anche: per ogni  $n \geq 1$  esiste  $\Theta(n) \in [0, 1]$  tale che  $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{\Theta(n)/12n}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

## 2.2. IL PROBLEMA DELLA CONNETTIVITÀ

---

## Capitolo 3

# Il problema della componente connessa gigante

In quest'ultimo capitolo si proveranno due risultati riguardanti la presenza o meno di una componente connessa gigante nel grafo aleatorio di Erdős-Rényi. Anche in questo caso, si potrà apprezzare una transizione di fase netta fra il regione *subcritico*, dove le componenti connesse sono tutte di piccole dimensioni, e il regione *supercritico*, dove invece la più grande componente connessa ha una taglia già consistente, tanto da essere definita "gigante". In particolare, scegliendo  $p_n := \frac{\lambda}{n}$  per  $\lambda \in (0, +\infty)$  fissato, si proverà che, per  $n \mapsto +\infty$ , il regione *subcritico* è caratterizzato da  $\lambda < 1$ , mentre quello *supercritico* da  $\lambda > 1$ .

**Osservazione 3.0.1.** Si osserva che, per come è definito,  $\lambda \in (0, +\infty)$  è molto vicino al *grado medio* dei vertici in  $ER_n(p_n)$ ; infatti il grado di un vertice, essendo somma di  $n - 1$  v.a. con legge  $\text{Ber}(p_n)$ , è una bernoulliana di parametri  $n - 1, p_n$  con media  $(n - 1)p$ .

Prima di iniziare con le dimostrazioni si ricorda la definizione di componente connessa contenente un vertice  $i \in V_n$ :

$$\mathcal{C}_i = \{j \in V_n : i \leftrightarrow j\},$$

dove  $i \leftrightarrow j$  significa che i vertici  $i$  e  $j$  sono collegati da un cammino; per convenzione  $i$  è collegato a se stesso. Inoltre si definisce la *più grande componente connessa*  $\mathcal{C}_{\max}$  come una qualsiasi c.c. con taglia massima, cosicché

$$|\mathcal{C}_{\max}| = \max_{i \in V_n} |\mathcal{C}_i|.$$

Di particolare importanza nelle prossime sezioni saranno i processi di diramazione definiti nel capitolo 1 di questo elaborato, poiché svolgono un ruolo cruciale nelle dimostrazioni dei risultati trattati.

### 3.1 La regione subcritica

Di seguito si tratterà il caso in cui  $\lambda < 1$ .

**Teorema 3.1.1** (Componenti connesse nel grafo di Erdős-Rényi: caso  $\lambda < 1$ ).  
 Sia  $\lambda \in (0, 1)$  e  $p_n = \frac{\lambda}{n}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(ER_n(p_n) \text{ possiede una c.c. di taglia } \geq \frac{2}{f(\lambda)} \log n\right) = 0,$$

dove  $f(\lambda) := \lambda - 1 - \log \lambda > 0$ .

**Osservazione 3.1.1.** Si osserva che  $f(\lambda) \rightarrow 0$  per  $\lambda \mapsto 1^-$ , quindi la quantità  $\frac{2}{f(\lambda)} \log n$  esplose. Questo significa che nel caso  $\lambda = 1$  il teorema perde di significato, o meglio non fornisce un'informazione utile.

*Dimostrazione.* Si ricorda che la successione  $(Y_j)_{j \geq 1}$  definita in (1.9) permette di conoscere la cardinalità della componente connessa del vertice  $i$ : più precisamente, il primo istante in cui  $Y_j = 0$  ha la stessa distribuzione del primo istante in cui  $\hat{Y}_j = 0$ , che corrisponde al termine dell'esplorazione della c.c. del vertice  $i$ ; si ha quindi che  $|\mathcal{C}_i| = \hat{T} = \min\{j: \hat{Y}_j = 0\}$  ha la stessa distribuzione di  $T = \min\{j: Y_j = 0\}$ . Si noti che  $|T| > l$  implica che  $Y_l > 0$ , di conseguenza  $\{|T| > l\} \subseteq \{Y_l \geq 1\}$ : pertanto

$$P(|\mathcal{C}_i| > l) \leq P(Y_l \geq 1) = P\left(\text{Bin}(n-1, 1 - (1-p_n)^l) \geq l\right),$$

dove per l'ultima uguaglianza si sfrutta il lemma 1.3.2. Si nota ora che se  $n \leq n'$  e  $p \leq p'$ , allora

$$P(\text{Bin}(n, p) \geq l) \leq P(\text{Bin}(n', p') \geq l) \quad \forall l \geq 0.$$

Infatti, siano  $X'_1, \dots, X'_{n'}$  v.a. indipendenti di Bernoulli di parametro  $p' > 0$  (se  $p' = 0$ , non c'è nulla da dimostrare), per cui  $\sum_{i=1}^{n'} X'_i \sim \text{Bin}(n', p')$ , e siano  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$  v.a. indipendenti di Bernoulli di parametro  $p/p'$ , indipendenti da  $X'_1, \dots, X'_{n'}$ . Allora  $X'_1 \tilde{X}_1, \dots, X'_{n'} \tilde{X}_{n'}$  sono v.a. Ber( $p$ ) indipendenti, dunque  $\sum_{i=1}^n X'_i \tilde{X}_i \sim \text{Bin}(n, p)$ . Si ha allora  $\sum_{i=1}^n X'_i \geq \sum_{i=1}^n X'_i \tilde{X}_i$ , da cui si conclude che  $P(\text{Bin}(n, p) \geq l) \leq P(\text{Bin}(n', p') \geq l)$  per ogni  $l \geq 0$ .

Infine, dato che  $n-1 \leq n$  e  $(p_n)^l \leq lp_n$ , segue che

$$P(|\mathcal{C}_i| > l) \leq P\left(\text{Bin}(n, lp_n) \geq l\right). \quad (3.1)$$

Rimane solo da stimare questa probabilità, che corrisponde ad una *grande deviazione*. Prima di concludere la dimostrazione del teorema, si enuncia un lemma più generale, che sarà utile anche nel caso  $\lambda > 1$ .

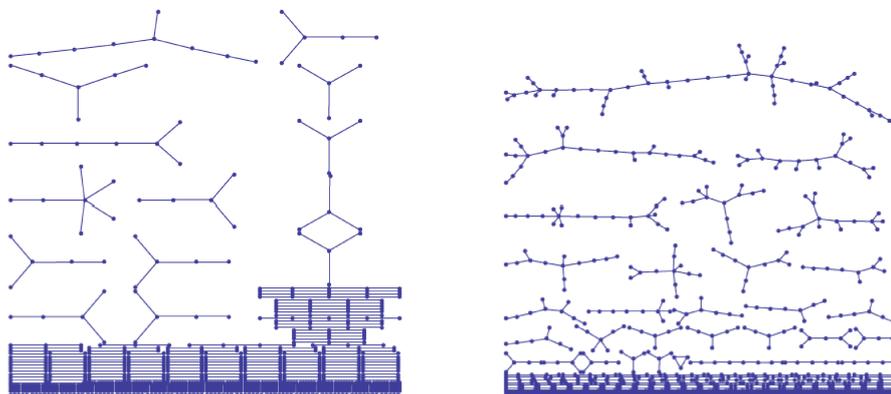


Figura 3.1: Simulazione di due grafi aleatori di Erdős-Rényi con  $n = 1000$  elementi e con valore di  $\lambda$ , rispettivamente,  $\lambda = 0.5$  e  $\lambda = 0.9$ .

**Lemma 3.1.2.** *Sia  $Z$  una v.a. con distribuzione  $\text{Bin}(n, p)$ , con  $p \in (0, 1)$  e sia  $l > 0$ . Si ponga  $\lambda^* := \frac{np}{l} \in (0, +\infty)$  e  $f(\lambda^*) := \lambda^* - 1 - \log \lambda^*$ , che è tale che  $f(\lambda^*) > 0$  per ogni  $\lambda^* \neq 1$ .*

1. Se  $\lambda^* < 1$ , allora

$$P(Z \geq l) \leq \exp(-lf(\lambda^*)).$$

2. Se  $\lambda^* > 1$ , allora

$$P(Z \leq l) \leq \exp(-lf(\lambda^*)).$$

*Dimostrazione.* Si scrive  $Z = \sum_{i=1}^n U_i$ , dove  $(U_i)_{i \geq 1}$  sono v.a. i.i.d. con legge  $\text{Ber}(p)$ . Iniziando dal punto (1): per ogni  $\alpha > 0$ , per la disuguaglianza di Chernov 1.1.5 si ha

$$P(Z \geq l) = P\left(\sum_{i=1}^n U_i \geq l\right) \leq e^{-\alpha l} E[e^{\alpha \sum_{i=1}^n U_i}].$$

Dato che le  $U_i$  sono indipendenti e  $E[e^{\alpha U_i}] = 1 - p + pe^\alpha$ , si ottiene grazie alle proprietà della funzione generatrice dei momenti<sup>1</sup> che

$$P\left(\sum_{i=1}^n U_i \geq l\right) \leq e^{-\alpha l} (1 - p + pe^\alpha)^n \leq \exp(-\alpha l + np(e^\alpha - 1)),$$

dove si usa il fatto che  $(1 + x)^n \leq e^{nx}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . La precedente disuguaglianza vale per ogni  $\alpha > 0$ : calcolandone la derivata si mostra che

---

<sup>1</sup>Siano  $X$  e  $Y$  due v.a. reali indipendenti, allora  $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

il termine a destra è minimo per  $\alpha = \log(l/np)$ , che è strettamente positivo se  $\lambda^* := np/l < 1$ . Sostituendo  $\alpha = -\log \lambda^*$  nell'espressione precedente, si ottiene la disuguaglianza del punto (1).

La dimostrazione del punto (2) è molto simile: per ogni  $\alpha > 0$ , usando ancora la disuguaglianza di Chernov 1.1.5, si ha

$$P(Z \leq l) = P\left(\sum_{i=1}^n U_i \leq l\right) \leq e^{\alpha l} E[e^{-\alpha \sum_{i=1}^n U_i}].$$

Facendo lo stesso calcolo, rimpiazzando  $\alpha$  con  $-\alpha$ , si ottiene la maggiorazione  $\exp(\alpha l + np(e^{-\alpha} - 1))$ , e ponendo  $\alpha = \log \lambda^* < 0$  si ottiene la disuguaglianza cercata.  $\square$

Si nota che nel caso di (3.1), il parametro è  $p = lp_n$ , per cui  $\lambda^* = np_n = \lambda < 1$ , si ha allora, grazie al lemma 3.1.2, che per ogni  $l \in \mathbb{N}$

$$P(|\mathcal{C}_i| > l) \leq e^{-lf(np_n)} = e^{-lf(\lambda)}.$$

Perciò, scegliendo  $l = \frac{2}{f(\lambda)} \log n$ , si ottiene

$$P\left(|\mathcal{C}_i| > \frac{2}{f(\lambda)} \log n\right) \leq e^{-2 \log n} = n^{-2}.$$

Per concludere la dimostrazione, si nota che esiste una c.c. di taglia superiore a  $\frac{2}{f(\lambda)} \log n$  se e solo se esiste un vertice  $i \in V_n$  tale che  $|\mathcal{C}_i| \geq \frac{2}{f(\lambda)} \log n$ : basta allora usare la subadditività per ottenere

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n \{|\mathcal{C}_i| > \frac{2}{f(\lambda)} \log n\}\right) \leq \sum_{i=1}^n P\left(|\mathcal{C}_i| > \frac{2}{f(\lambda)} \log n\right) \leq n \times n^{-2}.$$

Tale probabilità tende quindi a 0 per  $n \mapsto +\infty$  e questo completa la dimostrazione del teorema.  $\square$

Questo teorema prova che nel grafo aleatorio di Erdős-Rényi la probabilità, nel caso di  $\lambda < 1$ , che esista una c.c. di taglia maggiore di  $O(\log n)$  al limite di  $n \mapsto +\infty$  tende a 0. In realtà si può dimostrare che la taglia della più grande c.c. nel regime subcritico è dell'ordine di  $O(\log n)$ , si vedano i teoremi 4.4 e 4.5 del libro *Random graphs and complex networks* di R. van der Hofstad [6]. Però per gli obiettivi di questo elaborato non si prosegue con questa analisi, in quanto il risultato appena provato è sufficiente per evidenziare la transizione di fase in  $ER_n(p_n)$ .

## 3.2 La regione supercritica

In quest'ultima sezione si tratterà invece il caso in cui  $\lambda > 1$ .

**Teorema 3.2.1** (Componenti connesse nel grafo di Erdős-Rényi: caso  $\lambda > 1$ ).  
Sia  $\lambda \in (1, +\infty)$  e  $p_n = \frac{\lambda}{n}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora, per ogni  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(ER_n(p_n) \text{ possiede una c.c. di taglia } \geq (r_\lambda - \varepsilon)n\right) = 1,$$

dove  $r_\lambda$  è l'unica soluzione in  $(0, 1)$  dell'equazione  $1 - e^{-\lambda x} = x$ .

**Osservazione 3.2.1.** Si osserva che  $r_\lambda \rightarrow 0$  per  $\lambda \mapsto 1^+$ , quindi la quantità  $(r_\lambda - \varepsilon)n$  si azzerava. Questo significa che nel caso  $\lambda = 1$  il teorema perde di significato, o meglio non fornisce un'informazione utile, come nel caso del teorema 3.1.1.

*Dimostrazione.* Si ricorda che il processo di esplorazione modificato  $(\tilde{Y}_j)_{0 \leq j \leq n}$ , definito in (1.10)-(1.11), esplora una componente connessa fintanto che  $\tilde{Y}_j \geq 1$ ; dunque se  $\tilde{Y}_{j_0} = 0$ ,  $\tilde{Y}_{j_1+1} = 0$  e se  $\tilde{Y}_j \geq 1$  per ciascun  $j_0 + 1 \leq j \leq j_1$ , allora il processo  $(\tilde{Y}_j)_{j_0+1 \leq j \leq j_1}$  corrisponde all'esplorazione di una componente connessa di taglia  $j_1 - j_0$ . pertanto, per dimostrare che esiste una componente connessa di taglia maggiore a  $k$ , è sufficiente mostrare che  $\tilde{Y}_j \geq 1$  su un intervallo di lunghezza maggiore di  $k$ .

Grazie al lemma 1.3.3, per ogni  $0 \leq j \leq n$  vale l'inclusione di eventi  $\{\tilde{Y}_j \leq 0\} \subseteq \{Y_j \leq 0\}$ , nello spazio di probabilità fornito nel lemma 1.3.3. Dato che  $\tilde{Y}_j \geq 0$ , si ha

$$P(\tilde{Y}_j = 0) \leq P(Y_j \leq 0) \quad \text{per ogni } 0 \leq j \leq n. \quad (3.2)$$

Si dimostra ora un lemma necessario per concludere la dimostrazione.

**Lemma 3.2.2.** Sia  $\lambda > 1$ , e sia  $r_\lambda$  l'unica soluzione dell'equazione  $1 - e^{-\lambda x} = x$  nell'intervallo  $(0, 1)$ . Allora, per ogni  $\delta > 0$ , esiste una costante  $c_\delta > 0$  tale che, per ogni  $n$  sufficientemente grande,

$$P\left(\exists j \in \{[\delta n] + 1, \dots, [(r_\lambda - \delta)n]\} \text{ tale che } \tilde{Y}_j = 0\right) \leq n e^{-c_\delta n}.$$

*Dimostrazione.* Per subadditività, la probabilità da stimare è maggiorata da

$$\sum_{j=[\delta n]+1}^{[(r_\lambda-\delta)n]} P(\tilde{Y}_j = 0) \leq n \times \max_{\delta n \leq j \leq (r_\lambda-\delta)n} P(Y_j \leq 0). \quad (3.3)$$

dove si è maggiorato  $P(\tilde{Y}_j = 0)$  con il massimo su  $\delta n \leq j \leq (r_\lambda - \delta)n$ , usato il fatto che la somma contiene meno di  $n$  addendi, e applicato (3.2).

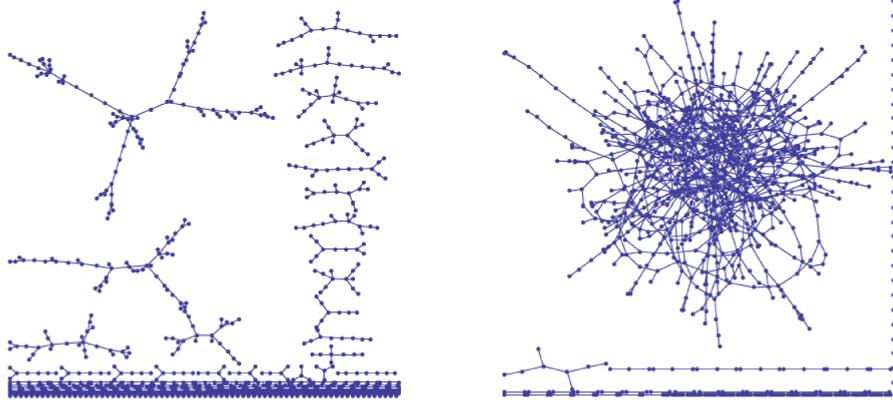


Figura 3.2: Simulazione di due grafi aleatori di Erdős-Rényi con  $n = 1000$  elementi e con valore di  $\lambda$ , rispettivamente,  $\lambda = 1.1$  e  $\lambda = 2$ .

Rimane solamente da maggiorare  $P(Y_j \leq 0)$  per  $\delta n \leq j \leq (r_\lambda - \delta)n$ . L'idea è usare il lemma 1.3.2 che fornisce la distribuzione di  $Y_j$ :

$$P(Y_j \leq 0) = P\left(\text{Bin}(n-1, 1 - (1-p_n)^j) \leq j-1\right) \leq \exp(-jf(\lambda^*))$$

dove è stato usato il lemma 3.1.2 con  $\lambda^* := \frac{n-1}{j}(1 - (1-p_n)^j)$ ; si ricorda che  $f(\lambda^*) = \lambda^* - 1 - \log \lambda^*$ . Bisogna però verificare che  $\lambda^* > 1$  (almeno per  $n$  grande). Usando la disuguaglianza  $(1-x)^j \leq e^{-jx}$  valida per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e  $j \geq 0$ , e il fatto che  $p_n = \frac{\lambda}{n}$ , si ottiene

$$\lambda^* \geq \frac{n-1}{n} \frac{1 - e^{-j\frac{\lambda}{n}}}{j/n} \geq \frac{n-1}{n} \lambda_\delta^*, \quad \text{con } \lambda_\delta^* := \frac{1 - e^{-\lambda(r_\lambda - \delta)}}{r_\lambda - \delta},$$

dove per la seconda disuguaglianza è stato usato il fatto che  $x \mapsto (1 - e^{-\lambda x})/x$  è una funzione decrescente<sup>2</sup> e che per  $j \in \{[\delta n], \dots, [(r_\lambda - \delta)n]\}$  si ha  $j/n \leq r_\lambda - \delta$ . Per definizione di  $r_\lambda$  e per convessità di  $x \mapsto 1 - e^{-\lambda x}$ , si ottiene che  $1 - e^{-\lambda x} > x$  per ogni  $x < r_\lambda$ , pertanto  $\lambda_\delta^* > 1$ . In particolare, per ogni  $n$  sufficientemente grande (tale che  $\frac{1}{n}\lambda_\delta^* \leq \frac{1}{2}(\lambda_\delta^* - 1)$ ), si ha

$$\lambda^* \geq \lambda_\delta^* - \frac{1}{2}(\lambda_\delta^* - 1) = \frac{1}{2}(\lambda_\delta^* + 1) > 1.$$

Dato che la funzione  $x \mapsto f(x) = x - 1 - \log x$  è crescente per  $x > 1$ , si dimostra che per ogni  $j \leq (r_\lambda - \delta)n$  e per ogni  $n$  sufficientemente grande si ha

$$P(Y_j \leq 0) \leq \exp(-jf(\frac{1}{2}(\lambda_\delta^* + 1))).$$

<sup>2</sup>Basta calcolare la derivata prima.

### CAPITOLO 3. IL PROBLEMA DELLA COMPONENTE CONNESSA GIGANTE

---

Pertanto  $P(Y_j \leq 0) \leq e^{-c_\delta n}$  per ogni  $\delta n \leq j \leq (r_\lambda - \delta)n$ , dove  $c_\delta = \delta f(\frac{1}{2}(\lambda_\delta^* + 1))$ . Grazie alla disuguaglianza (3.3), ciò conclude la dimostrazione del lemma.  $\square$

Il lemma 3.2.2 permette, passando al complementare, di concludere che per ogni  $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\tilde{Y}_j \geq 1 \text{ per ogni } j \in \{\lfloor \delta n \rfloor + 1, \dots, \lfloor (r_\lambda - \delta)n \rfloor\}\right) = 1.$$

Come notato in precedenza, il fatto che  $\tilde{Y}_j \geq 1$  per ogni  $j_0 + 1 \leq j \leq j_1$  corrisponde all'esplorazione di una componente connessa di taglia  $\geq j_1 - j_0$ . Si ottiene dunque l'inclusione di eventi

$$\left\{ \tilde{Y}_j \geq 1 \text{ per ogni } j \in \{\lfloor \delta n \rfloor + 1, \dots, \lfloor (r_\lambda - \delta)n \rfloor\} \right\} \\ \subseteq \left\{ \text{esiste una componente connessa di taglia } \geq (r_\lambda - 3\delta)n \right\}.$$

Ora, la probabilità dell'evento a sinistra, e quindi anche quella dell'evento a destra, tende a 1. Scegliendo  $\delta = \varepsilon/3$ , si conclude la dimostrazione del teorema.  $\square$

Si è quindi mostrato come in un grafo aleatorio di Erdős-Rényi vi sia una transizione di fase netta fra la presenza o assenza di una componente connessa gigante. Infatti, anche con  $\lambda$  poco diversi, però appartenenti a regioni diverse, si può notare una differenza nella composizione delle componenti connesse: si vedano, ad esempio, le figure 3.1 e 3.2 in cui già nel caso di  $\lambda = 1.1$  si nota la formazione di una componente connessa più grande, rispetto al caso  $\lambda = 0.9$  dove le componenti connesse sono più sparse.



## Bibliografia

- [1] Q. Berger, F. Caravenna e P. Dai Pra. *Probabilità. Un primo corso attraverso esempi, modelli e applicazioni*. A cura di Alfio Quarteroni. 2a edizione. Vol. 127. UNITEXT - La Matematica per il 3+2 0. Springer-Verlag Italia, 2021.
- [2] I.J. Bienaymé. *De la loi de multiplication et de la durée des familles*. Cosson, 1845.
- [3] P. Erdős e A. Rényi. *On random graphs*. Publicationes Mathematicae, 1959.
- [4] A. Frieze e M. Karoński. *Introduction to random graphs*. Cambridge University Press, 2015.
- [5] F. Galton e H.W. Watson. *On the probability of extinction of families*. Journal of the Royal Anthropological Institute 4: 138–144, 1874.
- [6] R. van der Hofstad. *Random graphs and complex networks*. Vol. 1. Cambridge University Press, 2016.