



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"
Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

Stati Metastabili in Meccanica Quantistica

Laureando:
Giovanni Pierobon
Matricola 1097871

Relatore:
Prof. Stefano Giusto

Anno Accademico 2016-2017

Indice

1	Formulazione Lagrangiana	3
1.1	L'integrale di cammino di Feynman	3
1.1.1	Approssimazione Gaussiana	5
1.1.2	L'oscillatore armonico	6
1.1.3	L'integrale di cammino Euclideo	8
1.2	Teoria perturbativa	9
1.2.1	Funzioni di Green e diagrammi di Feynman	11
2	Metodi semiclassici	15
2.1	L'approssimazione WKB	15
2.1.1	L'equazione di Hamilton-Jacobi	15
2.1.2	Approssimazione e regime di validità	16
2.1.3	Applicazione all'effetto tunnel	18
2.2	Gli istantoni	19
2.2.1	La doppia buca	20
2.2.2	Forma analitica degli istantoni	21
2.2.3	Approssimazione semiclassica	22
2.2.4	Calcolo del fattore correttivo	23
3	Stati metastabili	25
3.1	Uno stato metastabile	25
3.1.1	Decadimento dello stato	26
3.2	Instantoni in potenziali metastabili	27
3.3	Sviluppo perturbativo	29
3.3.1	Regimi di validità	30
A	Funzione di Green nel caso libero	35
B	Calcolo di determinanti	37
	Bibliografia	39

Introduzione

Secondo la moderna formulazione delle teorie fisiche due principi fondamentali descrivono la fenomenologia che si manifesta indipendentemente dalla scala (lunghezza, energia, ...) o dal tipo di interazione fondamentale:

- ◊ Ogni cosa nell'Universo appartiene al suo livello energetico; intuitivamente più è alto il livello, più energia è presente nel sistema.
- ◊ Stabilità: ogni processo fisico avviene per minimizzare il suo livello di energia ed essere più stabile. Per esempio un corpo dotato di massa immerso in un campo gravitazionale cercherà i punti in cui sia minima la sua energia potenziale, detti appunto stabili.

La ricerca della stabilità e della minimizzazione dell'energia è quindi il fine principale di un qualsiasi sistema fisico. Anche nelle scale atomiche e subatomiche si ha a che fare con livelli energetici. In particolare i modelli che spiegano per esempio la fisica atomica evidenziano la quantizzazione dell'energia in livelli discreti e i concetti di stabilità si ritrovano allo stesso modo. A tal proposito sappiamo che in un sistema esiste un unico stato di energia minima ed indefinitamente stabile: si tratta del *ground state*. Tutti gli altri livelli hanno maggiore energia e per questo un sistema in un tale livello tende a diseccitarsi fino al livello più basso nel minor tempo possibile. Esistono però alcuni stati particolari chiamati *metastabili*.

Questi hanno la particolarità di aver una vita media molto lunga, tipicamente almeno 10^3 volte maggiore rispetto al resto degli stati. In altre parole lo stato metastabile si può definire *localmente stabile*, dato che su scala di tempo lunga rispetto alle vite medie degli stati instabili è sostanzialmente come il ground state. Uno stato metastabile è definito falso vuoto (*false vacuum*) proprio per questo motivo. L'unica differenza risiede nella vita media: solo il ground state può essere stabile per un tempo infinito (*true vacuum*). Nonostante la sua relativamente lunga stabilità un sistema metastabile ha perciò una probabilità non nulla di passare ad uno stato di energia minore, tipicamente il ground state; minore è la probabilità e maggiore sarà la vita media dello stato. In sistemi governati da regimi quantomeccanici questo *decadimento* dello stato metastabile può avvenire attraverso l'effetto tunnel. La più semplice trattazione di un tale decadimento si può fare, e ci limiteremo a questo caso, nel contesto di un sistema di Meccanica Quantistica. Il lavoro svolto però è estendibile, soprattutto nel formalismo dell'integrale di cammino, al caso molto più concreto della teoria dei campi (*Quantum Field Theory*). In particolare è interessante il caso dell'interazione del campo di Higgs: secondo i fisici teorici [11], questo si troverebbe proprio in uno stato metastabile. Non avendo raggiunto il suo livello di ground state c'è una possibilità non nulla che avvenga questa transizione che porterebbe al cosiddetto *vacuum decay* e ad un nuovo stato dell'Higgs con conseguente rilascio di energia. In ambito cosmologico teorie di metastabilità

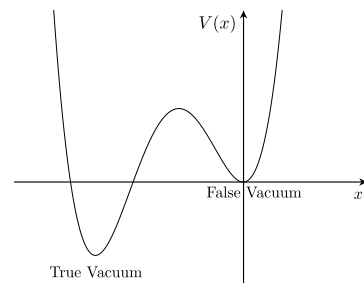


Figura 1: Rappresentazione grafica di un potenziale metastabile e del concetto di *True Vacuum*.

sono quindi oggetto di studio ancora oggi. Molte altre sono però le applicazioni fisiche di sistemi metastabili: per esempio nello studio della termodinamica di non equilibrio. Nel corso di una transizione di fase infatti, un sistema può venirsi a trovare in uno stato metastabile, ovvero in una configurazione di equilibrio che, se non perturbata da azioni esterne, può permanere all'infinito. Con l'intervento di una causa esterna, o una fluttuazione termodinamica lo stato si può modificare in uno stato stabile. Stati metastabili sono comuni anche in materia condensata: un esempio è il diamante, forma metastabile del carbonio. Esso può portarsi allo stato della grafite, altra forma allotropica del carbonio, più stabile del diamante. La metastabilità del diamante risiede nel fatto che a temperature e pressioni standard la probabilità che avvenga questa transizione è sostanzialmente trascurabile.

Il caso di interesse svolto nel seguito si concentra nello studio di sistemi quantistici per semplicità unidimensionali (ma generalizzabili in più dimensioni) di particella singola immersa in un potenziale. Per sviluppare una trattazione coerente con i sistemi della teoria di campo è stata necessaria l'introduzione di uno strumento matematico importante: l'integrale di cammino. Questo metodo evidenzia il principio di stabilità appena discusso: nasce infatti dal formalismo Lagrangiano ed è strettamente legato al principio di minima azione di Hamilton; in particolare Feynman mostrò che a partire da questo principio si può ottenere la formulazione quantistica. Nella maggior parte dei casi delle forze che conosciamo in natura il potenziale di interazione, che può essere metastabile, non corrisponde ad un sistema risolvibile esattamente (vedremo nel seguito quale sarà la particolarità che caratterizza un potenziale risolvibile in maniera esatta). Solitamente si può infatti descrivere il sistema come somma di una parte risolvibile esattamente (imperturbata) e una perturbazione, che caratterizza l'interazione stessa; si può pensare all'interazione come per esempio un accoppiamento tra un campo generato da una sorgente e la sorgente stessa o ad un auto-interazione del campo. La perturbazione introduce una costante di accoppiamento, che nel seguito verrà indicata λ . Se questa costante è piccola ($\lambda \rightarrow 0$ si parla di accoppiamento debole) si può risolvere il sistema con metodi perturbativi: sostanzialmente viene fatta un'espansione in serie di λ da cui si possono estrarre i termini dominanti che contribuiscono alla grandezza interessata. Nel nostro caso calcolare la correzione all'energia del falso vuoto sarà utile per quantificare l'effetto che la perturbazione introduce al sistema.

Parallelamente a questo la distinzione di un sistema stabile da uno metastabile è dovuta alla presenza in quest'ultimo di effetti non perturbativi, trascurabili rispetto ad ogni ordine in λ perturbativo, che in buona parte del lavoro cercheremo di descrivere. Difatti questi effetti hanno la tipica dipendenza e^{-1/λ^2} e si possono calcolare esattamente nel limite *semiclassico* $\hbar \rightarrow 0$, nel contesto dell'espansione semiclassica. Quest'ultima è simile all'espansione perturbativa, ma il parametro di espansione è proprio la costante di Planck \hbar . Le due espansioni in serie sono sostanzialmente diverse perché descrivono effetti diversi, ma descrivono entrambe una approssimazione di un sistema quantistico. In particolare l'obiettivo sarà quello di confrontare le due espansioni, cercandone di quantificare gli effetti e gli eventuali regimi in cui si possono applicare per il caso di potenziali con vuoto metastabile.

L'organizzazione del materiale viene suddivisa in tre capitoli. Nel corso del primo capitolo viene descritta la teoria di Feynman dell'integrale di cammino; in particolare tratteremo un esempio di sistema esatto, ovvero l'oscillatore armonico. Questo formalismo è utile sia per la trattazione di effetti perturbativi come per quelli non perturbativi. In questo contesto la teoria perturbativa che verrà descritta trova applicazione nei diagrammi di Feynman, che vengono perciò utilizzati anche in sistemi di meccanica quantistica. Nel secondo capitolo introduciamo gli effetti non perturbativi o semiclassici mediante due tipologie: il metodo WKB e gli istantoni. Il primo è considerato il metodo semiclassico per eccellenza, mentre gli istantoni sono una prima diretta applicazione dell'integrale di cammino. Nel capitolo finale discuteremo i contributi perturbativi e non perturbativi nel caso di un potenziale metastabile cubico.

Capitolo 1

Formulazione Lagrangiana

Il principio di minima azione di Hamilton è senza ombra di dubbio la formulazione più elegante della Meccanica Classica. Senza la necessità di introdurre le forze interagenti, è possibile descrivere un sistema solo scrivendo la Lagrangiana e minimizzando il funzionale d'azione. *Richard Feynman* si chiese però perché potesse descrivere solo la Meccanica Classica: nel suo lavoro di tesi di dottorato mostrò come invece descriva anche il contributo principale nell'approssimazione alla Meccanica Quantistica. Per fare ciò definiremo gli integrali di cammino su spazi di funzioni (spesso sono anche chiamati integrali funzionali) che sono molto utilizzati per la descrizione di un sistema quantistico o di una teoria di campo quantistica. In questo capitolo tratteremo la descrizione formale dovuta a Feynman, il suo collegamento con la Meccanica Quantistica di Schrödinger ed i principali metodi ed esempi di risoluzione.

1.1 L'integrale di cammino di Feynman

L'intuizione fisica che si può associare al concetto di integrale sui cammini è una revisione del noto esperimento della doppia fenditura di Young[10]. Una delle conseguenze principali derivate da questo esperimento è che se gli elettroni, o in generale le particelle, si comportano in regime quantistico come onde allora la differenza tra Meccanica Classica e Quantistica nella composizione delle probabilità è dovuta al termine di interferenza. In altre parole se la probabilità è definita $P = |\Phi|^2$, la quantità additiva non è la probabilità stessa ma l'ampiezza d'onda Φ . Con due fenditure si ha quindi $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ e le diverse ampiezze corrispondono a diversi cammini (*paths*) degli elettroni. Immaginiamo ora di modificare l'esperimento e di aggiungere più fenditure, è chiaro che ora ci sono molti più cammini che contribuiscono all'ampiezza totale di un elettrone che si propaga dalla sorgente allo schermo, uno di questi è il cammino classico, ma esisteranno un'infinità di cammini che contribuiscono e che non sono possibili classicamente. Definiamo ora il *propagatore* o *ampiezza di transizione*:

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_t, t_f | x_i, t_i \rangle \quad (1.1)$$

che descrive la probabilità che una particella compia la transizione da uno stato di posizione $|x_i\rangle$ allo stato $|x_f\rangle$ nel tempo $t = t_f - t_i$. Il propagatore contiene tutta l'informazione dell'evoluzione temporale e permette di risolvere l'equazione di Schrödinger $\psi(x, t)$ secondo la relazione

$$\psi(x, t) = \int K(x, t; x', 0) \psi_0(x') dx' \quad (1.2)$$

dove in questo caso $\psi_0(x')$ è la funzione d'onda all'istante iniziale $t = 0$. L'integrale di cammino esprime l'ampiezza di transizione come una sommatoria su tutti i possibili cammini che connettono lo stato iniziale e finale considerato. Il peso di questi cammini deve essere tale che, nel limite

$\hbar \rightarrow 0$, si trovi il cammino classico. Intuitivamente quindi si può pensare al propagatore come alla sommatoria

$$K = \sum_{\{\gamma\}} e^{i \frac{S[\gamma]}{\hbar}} \quad (1.3)$$

dove compare l'azione $S = \int L dt$ e $\{\gamma\}$ è l'insieme dei cammini che connettono i dati iniziali e finali di K . Questa relazione non è formalmente giusta (nel seguito troveremo l'equazione corretta) ma possiamo già vedere che si tratta di una scelta opportuna. È infatti evidente che nel limite $\hbar \rightarrow 0$ il fattore di fase oscilla così rapidamente da fare cancellare nella sommatoria i contributi di quasi tutti i cammini. Rimane un solo contributo, il cammino classico, che rende stazionaria l'azione. In questo modo possiamo affermare che in questo limite l'integrale sui cammini è dominato dalla soluzione classica e dal principio di minima azione. Con il crescere di \hbar , addentrandoci sempre più in regime quantomeccanico, la soluzione classica porta ancora il contributo principale all'integrale ma esistono altri cammini la cui azione ($S \simeq \hbar$) ha un contributo significativo all'ampiezza: sono le fluttuazioni quantistiche.

Vediamo ora come si può formalizzare la sommatoria di equazione (1.3) per ricavare la formulazione degli integrali di Feynman. Consideriamo un sistema di Hamiltoniana $H = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$. Nella visuale di Schrödinger⁽¹⁾ il propagatore (1.1) si scrive:

$$K(x_f, t; x_i, 0) = \langle x_f | e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | x_i \rangle \quad (1.4)$$

Dividendo il tempo t in N intervalli, ciascuno di larghezza $\varepsilon \ll 1$, è possibile riscrivere il propagatore (1.4) come prodotto di ampiezze infinitesime, mediante la relazione di completezza⁽²⁾:

$$\langle x_f | e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | x_i \rangle = \int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \langle x_f | e^{-\frac{iH\varepsilon}{\hbar}} | x_{N-1} \rangle \dots \langle x_2 | e^{-\frac{iH\varepsilon}{\hbar}} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-\frac{iH\varepsilon}{\hbar}} | x_i \rangle \quad (1.5)$$

Le ampiezze infinitesime $\langle x' | e^{-\frac{iH\varepsilon}{\hbar}} | x \rangle$ si possono scrivere ancora una volta con la relazione di completezza di stati $|p\rangle$:

$$\langle x' | e^{-\frac{iH\varepsilon}{\hbar}} | x \rangle = \int dp \langle x' | p \rangle \langle p | e^{-\frac{iH\varepsilon}{\hbar}} | x \rangle \quad (1.6)$$

Nel caso della nostra Hamiltoniana è facile dimostrare

$$\langle p | e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right)} | x \rangle = e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\frac{p^2}{2m} + V(x) \right)} \langle p | x \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (1.7)$$

dove abbiamo sostituito a \hat{p} e \hat{x} i corrispondenti autovalori e i contributi $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ derivano dal fatto che il commutatore $[\hat{p}, \hat{x}]$ è diverso da zero. È ragionevole non considerare questi termini, dal momento in cui $\varepsilon \ll 1$. L'equazione (1.6) diventa quindi:

$$\langle x' | e^{-\frac{iH\varepsilon}{\hbar}} | x \rangle \simeq \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \left[e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\frac{p^2}{2m} + V(x) \right)} e^{\frac{i}{\hbar} p(x'-x)} \right] \quad (1.8)$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left[\frac{p^2}{2m} + V(x) - px \right]} \quad (1.9)$$

(1) In rappresentazione delle coordinate si può scrivere $\psi(x, t) = \langle \psi(t) | x \rangle$ e allora l'evoluzione temporale diventa $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | e^{-iH(t_f-t_i)/\hbar} | x_i \rangle$

(2) $\int |x\rangle \langle x| dx = 1$.

dove nell'ultimo passaggio abbiamo definito $\dot{x} = (x' - x)/\varepsilon$. Vediamo ora che effettuando il cambio di variabile $\tilde{p} = p - m\dot{x}$ l'integrale nella variabile \tilde{p} è Gaussiano ed è risolvibile esattamente. La (1.9) diventa infatti:

$$\int \frac{d\tilde{p}}{2\pi\hbar} e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar} \left[\frac{\tilde{p}^2}{2m} + V(x) - \frac{m\dot{x}^2}{2} \right]} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}} e^{i\frac{\varepsilon}{\hbar} [m\dot{x}^2/2 - V(x)]} = \frac{1}{c} e^{i\frac{\mathcal{L}(x,\dot{x})\varepsilon}{\hbar}} \quad (1.10)$$

Nell'esponenziale è comparsa ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ e possiamo identificare al primo ordine in ε la quantità $\mathcal{L}(x, \dot{x})\varepsilon$ con l'azione

$$S(x', x) = \int_0^\varepsilon \mathcal{L}(x, \dot{x}) dt \quad (1.11)$$

Se consideriamo ora gli N intervalli in cui abbiamo inizialmente diviso l'intervallo temporale si ottiene

$$\langle x_f | e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | x_i \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{c} \int \prod_{k=1}^{N-1} \left[\frac{dx_k}{c} \right] e^{i\frac{S(x_f, x_i)}{\hbar}} \quad (1.12)$$

Il fattore davanti all'esponenziale è l'integrale sui cammini che formalmente scriveremo $\int \mathcal{D}[x(t)]$. La nota relazione di Feynman è quindi la seguente:

$$K(x_f, t; x_i, 0) = \int \mathcal{D}[x(t)] e^{i\frac{S[x(t)]}{\hbar}} \quad (1.13)$$

I cammini sono tutti quelli che collegano gli stati x_f e x_i , l'integrale in questione è quindi una funzione del tempo t e degli estremi x_i e x_f .

1.1.1 Approssimazione Gaussiana

L'integrale di equazione (1.13) non è solitamente risolvibile esattamente; nel caso di azione (o meglio Lagrangiana) quadratica è invece possibile in quanto si tratta di risolvere un integrale Gaussiano. In questa sezione introduciamo una espansione in \hbar che viene spesso utilizzata per la risoluzione di un sistema generico non esattamente risolvibile. Questo procedimento viene chiamato approssimazione Gaussiana o *one-loop approximation*. Prima di svolgere l'espansione per gli integrali di Feynman richiamiamo l'integrale Gaussiano in più variabili. Se disponiamo del seguente integrale:

$$\int \prod_i dx_i e^{-\sum_{i,j} \lambda_{ij} x_i x_j} \quad (1.14)$$

dove λ_{ij} è una matrice reale simmetrica, allora può essere risolto diagonalizzando tale matrice. Il cambio di variabile che la rende diagonale $\tilde{x}_i = O_{ij} x_j$ non cambia la misura di integrazione dato che O_{ij} è una matrice ortogonale: $\prod_i \tilde{x}_i = \prod_i x_i$. In questo modo l'integrale è ora Gaussiano e si può risolvere

$$\int \prod_i d\tilde{x}_i e^{-\sum_i \lambda_i \tilde{x}_i^2} = \prod_i \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} = \det \left(\frac{\hat{\lambda}}{\pi} \right)^{-1/2} \quad (1.15)$$

Nel caso dell'integrale di cammino

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int \mathcal{D}[x(t)] e^{i\frac{S[x(t)]}{\hbar}} \quad (1.16)$$

il metodo consiste nell'effettuare un cambio di variabile, centrando la variabile $x(t)$ attorno alla soluzione classica $x_c(t)$:

$$x(t) = x_c(t) + y(t) \quad (1.17)$$

La nuova variabile di integrazione è $y(t)$ e la misura è ovviamente la stessa di $x(t)$. Espandendo in serie di Taylor $S[x_c(t) + y(t)]$ in $y(t)$ si ottiene

$$S[x_c(t) + y(t)] = S[x_c] + \int dt \frac{\delta S}{\delta x(t)} \Big|_{x=x_c} y(t) + \frac{1}{2} \int dt dt' \frac{\delta^2 S}{\delta x(t) \delta x(t')} \Big|_{x=x_c} y(t) y(t') + \mathcal{O}(y^3) \quad (1.18)$$

Il termine lineare $\delta S/\delta x$ se valutato nella soluzione classica è ovviamente nullo per definizione e possiamo scrivere l'integrale di cammino (con la breve notazione $\delta^2 S/\delta x^2$):

$$K(x_f, t_f, ; x_i, t_i) = e^{\frac{i}{\hbar} S[x_c(t)]} \int \mathcal{D}[y(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \left[\frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta x^2} y^2 + \mathcal{O}(y^3) \right]} \quad (1.19)$$

Questo risultato è l'approssimazione Gaussiana: si può notare che il propagatore è decomposto in una parte dominante, la traiettoria classica, data dall'esponentiale $e^{iS[x_c]/\hbar}$ e da un'integrazione sulla funzione $y(t)$ che rappresenta la fluttuazione quantistica attorno al valore classico. Mettiamo ora in evidenza il fatto che questa approssimazione è una espansione in \hbar . Effettuando il cambio di variabile $y = \hbar^{1/2} \tilde{y}$ l'equazione (1.19) si scrive

$$K(x_f, t_f, ; x_i, t_i) = \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_c(t)]} \int \mathcal{D}[\tilde{y}(t)] \exp \left(\frac{i}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta x^2} \tilde{y}^2 + \mathcal{O}(\tilde{y}^3) \right) \quad (1.20)$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar} S[x_c(t)]} G(x_f, t_f, ; x_i, t_i) [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (1.21)$$

dove abbiamo indicato per comodità $G(x_f, t_f, ; x_i, t_i)$ l'integrale Gaussiano sulle fluttuazioni. Nel passaggio da equazione (1.20) a (1.21) il primo termine che contribuisce è $\mathcal{O}(\hbar) \leftrightarrow \mathcal{O}(\tilde{y}^4)$, vediamo infatti nel dettaglio. L'espansione in serie di potenze di \hbar si scrive a partire dall'esponente

$$\frac{S[x_c + \sqrt{\hbar} \tilde{y}]}{\hbar} = \frac{S[x_c]}{\hbar} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta x^2} \tilde{y}^2 + \frac{\sqrt{\hbar}}{3!} \frac{\delta^3 S}{\delta x^3} \tilde{y}^3 + \frac{\hbar}{4!} \frac{\delta^4 S}{\delta x^4} \tilde{y}^4 + \mathcal{O}(\hbar^{3/2}) \quad (1.22)$$

Nell'espansione dell'esponente nell'integrale di cammino il contributo $\sqrt{\hbar}$ si cancella perché l'integrando è dispari, e rimangono contributi fino all'ordine $\mathcal{O}(\hbar)$ dati dai termini

$$\hbar \left\{ \frac{1}{4!} \frac{\delta^4 S}{\delta x^4} \tilde{y}^4 + \frac{i}{2} \left[\frac{1}{3!} \frac{\delta^3 S}{\delta x^3} \tilde{y}^3 \right]^2 \right\} \quad (1.23)$$

che vanno integrati sui cammini di misura $\mathcal{D}[\tilde{y}(t)]$.

1.1.2 L'oscillatore armonico

Un esempio di sistema risolvibile esattamente è il caso dell'oscillatore armonico, descritto da Lagrangiana quadratica

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (1.24)$$

In questo sistema risulta utile l'espansione attorno alla soluzione classica (1.17) nonostante l'obiettivo di questa sezione sia quello di calcolare il propagatore di uno dei pochi sistemi risolvibili esattamente. Il propagatore è:

$$K(x_f, T, ; x_i, 0) = e^{i \frac{S_{cl}}{\hbar}} \int \mathcal{D}[y] \exp \left(\frac{i}{2\hbar} \frac{\delta^2 S}{\delta x^2} y^2 \right) = c e^{i \frac{S_{cl}}{\hbar}} \left[\det \frac{\delta^2 S}{\delta x^2} \right]^{-1/2} \quad (1.25)$$

dove c è una costante. L'azione classica $S_{cl} = S[x_c]$ si trova con una banale integrazione

$$S_{cl} = \frac{m\omega}{2} \left[(x_f^2 + x_i^2) \cot(\omega T) - \frac{2x_f x_i}{\sin(\omega T)} \right] \quad (1.26)$$

Secondo il cambio di variabile (1.17) la funzione $y(t)$ è nulla agli estremi $t_i = 0$ e $t_f = T$ e si trova con la sostituzione che il propagatore ha la seguente forma:

$$K = e^{i\frac{S_{cl}}{\hbar}} \int \mathcal{D}[y] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{m}{2} (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2) dt \right] \quad (1.27)$$

Si tratta quindi di risolvere l'integrale in equazione (1.27). Innanzitutto osserviamo che per integrazione per parti e le condizioni al contorno vale la relazione

$$\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{m}{2} (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2) dt = \frac{i}{2} \int_0^T y \hat{O} y dt \quad (1.28)$$

Dobbiamo quindi calcolare il determinante dell'operatore

$$\hat{O} = -\frac{m}{\hbar} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \quad (1.29)$$

Per fare ciò è necessario espandere in serie di Fourier la funzione $y(t)$:

$$y(t) = \sum_n a_n y_n(t), \quad y_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \left(\frac{n\pi t}{T} \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.30)$$

$y_n(t)$ sono le autofunzioni ortonormali di \hat{O} e formano una base completa dello spazio di Hilbert $L_2(0, T)$, in questo modo i coefficienti a_n formano un set di variabili di integrazione. Vale quindi

$$\mathcal{D}[y(t)] = \prod_n \frac{da_n}{\sqrt{2\pi i}} \tilde{N} \quad (1.31)$$

dove abbiamo indicato con \tilde{N} lo Jacobiano della trasformazione. Inoltre abbiamo che

$$\int y \hat{O} y dt = \sum_{m,n} \int a_m a_n y_m \hat{O} y_n dt = \sum_n \lambda_n a_n^2 \quad (1.32)$$

dove λ_n sono gli autovalori di \hat{O}

$$\lambda_n = \frac{m}{\hbar} \left[\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right] \quad (1.33)$$

Quindi l'integrale di equazione (1.27) che indichiamo $J(T)$ si scrive

$$J(T) = \tilde{N} \int \prod_n \frac{da_n}{\sqrt{2\pi i}} e^{\frac{i}{2} \sum_n \lambda_n a_n^2} = \left(\prod_n \lambda_n \right)^{-1/2} \tilde{N} e^{-in - \frac{\pi}{2}} \quad (1.34)$$

dove n_- è il numero degli autovalori (1.33) negativi. In realtà nella loro definizione sia il prodotto degli autovalori che lo Jacobiano \tilde{N} sono mal definiti nel limite di grandi n , in quanto portano a divergenze. Notiamo però che l'operatore \hat{O} dipende da ω mentre lo jacobiano \tilde{N} no, quindi per $\omega = 0$ la computazione di $J(T)$ deve essere quella della particella libera $J_0(T)$ ⁽³⁾. Se scriviamo

$$J_\omega(T) = \tilde{N} \left(|\det \hat{O}_\omega| \right)^{-1/2} e^{-in - \frac{\pi}{2}} \quad J_0(T) = \tilde{N} \left(|\det \hat{O}_0| \right)^{-1/2} \quad (1.35)$$

(3) Il fattore prima dell'esponenziale per la particella libera si può trovare facilmente in [5] $J_0(T) = \sqrt{m/(2\pi i \hbar T)}$

Allora il rapporto tra questi è ovviamente convergente

$$\frac{J_\omega(T)}{J_0(T)} e^{-in-\frac{\pi}{2}} = \left(\left| \prod_n \frac{\lambda_n(0)}{\lambda_n(\omega)} \right| \right)^{1/2}, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(0)}{\lambda_n(\omega)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2}{\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2} = \frac{\omega T}{\sin \omega T} \quad (1.36)$$

da cui

$$J_\omega(T) = J_0(T) \sqrt{\frac{\omega T}{\sin \omega T}} e^{-in-\frac{\pi}{2}} \quad (1.37)$$

e si trova il propagatore dell'oscillatore armonico, considerando il caso in cui $\omega t < \pi$:

$$K(x_f, t, x_i, 0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega t)}} \exp \left[i \frac{m\omega}{2\hbar} \left((x_f^2 + x_i^2) \cot(\omega t) - \frac{2x_f x_i}{\sin(\omega t)} \right) \right] \quad (1.38)$$

1.1.3 L'integrale di cammino Euclideo

Nei metodi che esporremo nel seguito gli integrali di cammino saranno caratterizzati da un'evoluzione temporale immaginaria⁽⁴⁾, in questo modo l'esponenziale non sarà più oscillante e gli integrali potranno essere trattati con maggiore facilità. Si può quindi procedere ad una estensione analitica del tempo e considerare le sostituzioni

$$t' = -i\tau \quad t = -i\beta$$

dove τ è la variabile di integrazione e β l'intervallo temporale puramente immaginario. Si ricavano le seguenti relazioni

$$K(x_f, x_i; -i\beta) \equiv K_E(x_f, x_i; \beta) = \langle x_f | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | x_i \rangle, \quad \beta \in \mathbb{R}_+ \quad (1.39)$$

In questo modo, analogamente alla precedenti sezioni, l'espressione del propagatore mediante l'integrale di cammino risulta essere

$$K_E(x_f, x_i; \beta) = \int \mathcal{D}_E[x] e^{-\frac{S_E[x]}{\hbar}} \quad (1.40)$$

dove $\mathcal{D}_E[x]$ è la misura di integrazione sui cammini e l'azione euclidea $S_E[x]$ presenta un potenziale invertito di segno $V_E(x) = -V(x)$ (dovuto al passaggio $iS[x] \rightarrow -S_E[x]$):

$$S_E[x] = \int_0^\beta \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] d\tau \quad (1.41)$$

La denominazione 'Euclideo' deriva dal fatto che effettuando questa sostituzione nel tempo l'intervallo spazio-temporale $ds^2 = -dt^2 + dx_i^2$ che corrisponde ad una metrica di Minkowski con segnatura $(-, +, +, +)$ diventa $ds_E^2 = d\tau^2 + dx_i^2$, ovvero con metrica Euclidea. Spesso gli integrali di cammino vengono calcolati utilizzando quest'ultima; per ritornare al tempo reale si può compiere una trasformazione nel piano complesso chiamata *Rotazione di Wick* e riottenere le espressioni precedenti. Per esempio il propagatore dell'oscillatore armonico (1.38) diventa nell'Euclideo

$$K_E(x_f, x_i; \beta) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi \hbar \sinh(\omega\beta)}} e^{-\frac{S_E[x_c]}{\hbar}} \quad (1.42)$$

Dal propagatore è facile risalire agli autovalori e quindi anche al valore minimo di energia: se $\{\psi_n\}$ è un set completo di autostati dell'energia allora vale

$$K_E(x_f, -\beta/2; x_i, \beta/2) = \langle x_f | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | x_i \rangle = \sum_n \psi_n(x_f) \psi_n^*(x_i) e^{-\beta E_n/\hbar} \quad (1.43)$$

(4) Il pedice 'E' d'ora in poi indicherà la presenza del tempo immaginario

e nel limite $\beta \rightarrow \infty$

$$K_E(x_f, -\beta/2; x_i, \beta/2) \stackrel{\beta \rightarrow \infty}{\approx} \psi_0(x_f) \psi_0^*(x_i) e^{-\beta E_0/\hbar} [1 + \mathcal{O}(e^{-\beta(E_1-E_0)/\hbar})] \quad (1.44)$$

dove E_1 è il primo stato eccitato di energia. È inoltre possibile definire la funzione di partizione $Z(\beta)$ (che sarà molto utile nell'ambito di teoria perturbativa) con tale formalismo

$$Z(\beta) \equiv \text{tr} e^{-\beta \hat{H}} = \int dx \langle x | e^{-\beta H} | x \rangle = \int dx K(x, x; -i\beta) = \int_P \mathcal{D}_E[x] e^{-S_E[x]/\hbar} \quad (1.45)$$

L'integrazione avviene considerando cammini chiusi $\{x(0) = x(\beta)\}$ ed è infatti definita periodica. La differenza principale tra il propagatore $K_E[\beta]$ e la funzione di partizione sta proprio nelle condizioni al contorno. Questa differenza sarà più evidente nella definizione delle funzioni di correlazione, si vedano le equazioni (1.49) e (1.50). Nel formalismo euclideo si può quindi risalire al valore di E_0 (con eventuali correzioni): dalla meccanica statistica è noto che l'energia libera di un sistema in equilibrio alla temperatura T ⁽⁵⁾ è

$$F(\beta) = -\frac{\hbar}{\beta} \ln Z(\beta) \quad (1.46)$$

e nel limite $\beta \rightarrow \infty$ la funzione di partizione è dominata dall'energia di punto zero E_0 , come in (1.44):

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} F(\beta) = E_0 \quad (1.47)$$

1.2 Teoria perturbativa

Il formalismo degli integrali di cammino non solo è utile per determinare effetti semiclassici in potenziali instabili ma ha anche una diretta applicazione in teoria perturbativa, che va considerata per una trattazione completa del problema. Un potenziale di perturbazione che descrive l'interazione introduce un parametro importante chiamato costante di accoppiamento (λ). L'espansione perturbativa si sviluppa in potenze di λ che è generalmente una costante piccola. Introduciamo i punti di correlazione che espressi in termini di derivate funzionali non sono altro che funzioni di Green da cui si possono estrapolare le combinazioni dell'espansione perturbativa, noti in letteratura come diagrammi di Feynman.

La definizione dei punti di correlazione si fa a partire dal seguente integrale:

$$\int_{x(-\beta/2)=x_i}^{x(\beta/2)=x_f} \mathcal{D}_E[x(\tau)] x(\tau_1) \dots x(\tau_n) e^{-S_E[x(\tau)]/\hbar} \quad (1.48)$$

Nel limite $\beta \rightarrow \infty$ l'equazione è indipendente da x_i e x_f , perciò possiamo definire gli *n-point correlators* $G_D(\tau_1, \dots, \tau_n)$ con la condizione al contorno di Dirichlet ($x_i = x_f = 0$) e gli *n-point correlators* $G_P(\tau_1, \dots, \tau_n)$ con la condizione al contorno periodica ($x_i = x_f$)

$$\hbar^{n/2} G_D(\tau_1, \dots, \tau_n) := \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_i=x_f=0} \mathcal{D}_E[x(\tau)] x(\tau_1) \dots x(\tau_n) e^{-\frac{S_E}{\hbar}}}{\int_{x_i=x_f=0} \mathcal{D}_E[x(\tau)] e^{-\frac{S_E}{\hbar}}} \quad (1.49)$$

$$\hbar^{n/2} G_P(\tau_1, \dots, \tau_n) := \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\int_{x(-\beta/2)=x(\beta/2)} \mathcal{D}_E[x(\tau)] x(\tau_1) \dots x(\tau_n) e^{-\frac{S_E}{\hbar}}}{\int_{x(-\beta/2)=x(\beta/2)} \mathcal{D}_E[x(\tau)] e^{-\frac{S_E}{\hbar}}} \quad (1.50)$$

(5) Ovviamente $\beta = 1/(k_B T)$ e k_B è la costante di Boltzmann.

Il fattore $\hbar^{n/2}$ viene introdotto per convenienza nei calcoli che seguono. Secondo la definizione vedremo che $G_{P,D}$ non sono altro che le funzioni di Green che utilizzeremo nel calcolo dei contributi perturbativi. Spesso i correlatori (1.49) e (1.50) sono definiti con la notazione

$$\langle x(\tau_1)x(\tau_2)\dots x(\tau_n) \rangle \quad (1.51)$$

Nel seguito ci riferiamo a $G_D(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ma la trattazione per G_P è formalmente identica.

Introduciamo ora il metodo che ci porterà al profondo legame che esiste tra le funzioni di correlazione e le derivate funzionali per arrivare all'espansione perturbativa. Spesso in fisica per studiare alcune proprietà di un sistema fisico spesso lo si fa interagire con una perturbazione esterna, una *sorgente* e si ricavano informazioni in base alla risposta. Questo semplice approccio empirico ha un sua controparte formale nello studio dei sistemi quantistici.

Consideriamo un sistema di Lagrangiana $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ che interagisce con una sorgente arbitraria esterna

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + J(\tau)x(\tau)$$

In questo modo il propagatore diventa un funzionale della sorgente $J(\tau)$

$$K_E[\beta, J] = \int_D \mathcal{D}_E[x] \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau (\mathcal{L}_E(x, \dot{x}) - J(\tau)x(\tau)) \right] \quad (1.52)$$

Questo funzionale contiene delle informazioni fisiche del sistema rilevanti: applicando derivate funzionali $K_E[\beta, J]$ si possono ottenere i valori di aspettazione dell'operatore \hat{x} e quindi di qualsiasi operatore funzione della posizione $O(\hat{x})$. I correlatori si leggono ora

$$\hbar^{n/2} G_D(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{K_E[\beta, 0]} \frac{\hbar \delta}{\delta J(\tau_1)} \dots \frac{\hbar \delta}{\delta J(\tau_n)} K_E[\beta, J] \Big|_{J=0} \quad (1.53)$$

dove per derivata funzionale si intende

$$\delta K = \int d\tau \frac{\delta K}{\delta J(\tau)} \delta J(\tau), \quad \frac{\delta J(\tau')}{\delta J(\tau)} = \delta(\tau' - \tau) \quad (1.54)$$

Ora vediamo nel dettaglio come si collegano gli effetti di una perturbazione, come per esempio l'auto-interazione di un oscillatore armonico, con i metodi funzionali dovuti alla sorgente esterna. La densità di Lagrangiana è scomposta

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \mathcal{L}_0(x, \dot{x}) + \mathcal{L}_{\text{pert}}(x, \dot{x})$$

con \mathcal{L}_0 parte imperturbata e $\mathcal{L}_{\text{pert}}$ perturbazione

$$\mathcal{L}_0(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2, \quad \mathcal{L}_{\text{pert}}(x, \dot{x}) = \sum_n \frac{\lambda_n}{n!} x^n$$

Il valore di n determina le caratteristiche perturbative; nel seguito considereremo perturbazione cubiche e quartiche ($n = 3, 4$).

Definiamo ora il propagatore *libero* $K_E^0[J]$, tralasciando le ovvie dipendenze:

$$K_E^0[J] = \int_D \mathcal{D}[x] \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int (\mathcal{L}_0 - Jx) d\tau \right] \quad (1.55)$$

É possibile esprimere in termini di derivate funzionali il propagatore perturbato. Per esempio per un potenziale di perturbazione $\mathcal{L}_{\text{pert}}(x, \dot{x}) = -\frac{\lambda_3}{3!}x^3$ abbiamo

$$K_E[J] = \int_D \mathcal{D}[x] \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int (\mathcal{L}_0 - \frac{\lambda_3 x^3}{3!} - Jx) d\tau \right] \quad (1.56)$$

$$= \int_D \mathcal{D}[x] \sum_n \frac{1}{n!} \int \left(\frac{\lambda_3}{3!\hbar} \right)^n x^3(\tau_1) \dots x^3(\tau_n) K_E^0[J] d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (1.57)$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!} \int \left(\frac{\lambda_3}{3!\hbar} \right)^n \frac{\hbar^3 \delta^3}{\delta J^3(\tau_1)} \dots \frac{\hbar^3 \delta^3}{\delta J^3(\tau_n)} K_E^0[J] d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (1.58)$$

$$= \exp \left(\int \frac{\lambda_3 \hbar^2}{3!} \frac{\delta^3}{\delta J^3(\tau)} d\tau \right) K_E^0[J] \quad (1.59)$$

Ora dall' espressione (1.59) si trova per un potenziale di perturbazione generico

$$K_E[\beta, J] = \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int d\tau \mathcal{L}_{\text{pert}} \left(\frac{\hbar \delta}{\delta J(\tau)} \right) \right] K_E^0[\beta, J] \quad (1.60)$$

Perciò, riassumendo, si dovrà calcolare la funzione imperturbata $K_E^0[\beta, J]$ e poi valutare in modo efficiente le derivate funzionali rispetto a $J(\tau)$. Il primo passo si riduce al calcolo di un integrale Gaussiano e porta alla computazione della funzione di Green $G(\tau_1, \tau_2)$, propagatore tra due punti. Introdurremo invece per le derivate funzionali una rappresentazione in diagrammi che semplificherà il conteggio delle correzioni all'ordine perturbativo considerato.

1.2.1 Funzioni di Green e diagrammi di Feynman

Rimandando all'Appendice A per una trattazione precisa, il propagatore libero ha la seguente espressione

$$K_E^0[\beta, J] = \exp \left(\frac{1}{2\hbar} J \cdot G_D \cdot J \right) K_E^0[\beta, 0] \quad (1.61)$$

dove $K_E^0[\beta, 0]$ è il propagatore indipendente dalla sorgente: in pratica si tratta del prefattore calcolato nell'equazione (1.42) con particolare attenzione al fatto che ora siamo nell'Euclideo. $G_D(\tau, \tau')$ è in questo caso l'operatore inverso dell'operatore dell'oscillatore armonico

$$\hat{O} = m(-\partial_\tau^2 + \omega^2) \quad (1.62)$$

ed è quindi, si veda (A.6), il propagatore tra due punti:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} G_D(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2m\omega} e^{-\omega|\tau_1 - \tau_2|} \quad (1.63)$$

Cerchiamo di studiare come agiscono le derivate funzionali. Notiamo innanzitutto che il fattore indipendente da J , ovvero $K_E^0[\beta, 0]$, non contribuisce alla computazione e quindi dalle equazioni (1.49) e (1.60) abbiamo

$$\hbar^{n/2} G_{D,P}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \hbar^{n/2} \left(\prod_{k=1}^n \frac{\delta}{\delta J(\tau_k)} \right) e^{\frac{1}{2\hbar} J \cdot G_D \cdot J} \Bigg|_{J=0} \quad (1.64)$$

Il fattore $\hbar^{n/2}$ viene messo in evidenza nel membro di destra grazie al riscaldamento $J \rightarrow J/\sqrt{\hbar}$. Verifichiamo da quest'ultima uguaglianza che il correlatore 2-punti è la funzione di Green (1.63):

$$G(\tau_1, \tau_2) = \frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} \frac{\delta}{\delta J(\tau_2)} e^{\frac{1}{2\hbar} J \cdot G \cdot J} \Big|_{J=0} \quad (1.65)$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} \int J(\tau) G(\tau, \tau_2) d\tau e^{\frac{1}{2\hbar} J \cdot G \cdot J} \Big|_{J=0} \quad (1.66)$$

$$= \left[\int d\tau d\tau' J(\tau) G(\tau, \tau_2) J(\tau') G(\tau', \tau_1) + \int d\tau \delta(\tau - \tau_1) G(\tau, \tau_2) \right] e^{\frac{1}{2\hbar} J \cdot G \cdot J} \Big|_{J=0} \quad (1.67)$$

$$= G(\tau_1, \tau_2) \quad (1.68)$$

Quindi la notazione $G_D(\tau_1, \dots, \tau_n)$ è spiegata: come era stato anticipato i correlatori, in base alla nostra definizione (1.49) sono proprio le funzioni di Green a n -punti. Seguendo lo schema di questo esempio della funzione a 2-punti possiamo descrivere come agiscono esplicitamente le derivate funzionali:

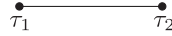
◇ Se n è dispari $G(\tau_1, \dots, \tau_n) = 0$: infatti agendo funzionalmente un numero dispari di volte e valutando a $J = 0$ si annullano tutti gli integrali.

◇ Se n è pari

$$G(\tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{a \in \Pi_n} G(\tau_{a(1)}, \tau_{a(2)}) \dots G(\tau_{a(n-1)}, \tau_{a(n)}) \quad (1.69)$$

dove Π_n è il gruppo delle permutazioni di n elementi. Noto n questo gruppo contiene $(n-1)!!$ elementi.

Il banale esempio di prima, del correlatore a 2 punti $G(\tau_1, \tau_2)$, è rappresentato graficamente:

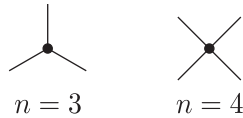


Introdotta il risultato di equazione (1.69) possiamo generalizzare le regole dei diagrammi che utilizzeremo per la correzione all'energia del ground state di un potenziale perturbativo.

1. Il propagatore (1.63) è rappresentato da una linea che collega due punti τ_1 e τ_2 . Si può intendere quindi come una funzione di correlazione a due punti che scriviamo con la notazione $\langle x(\tau_1)x(\tau_2) \rangle$.

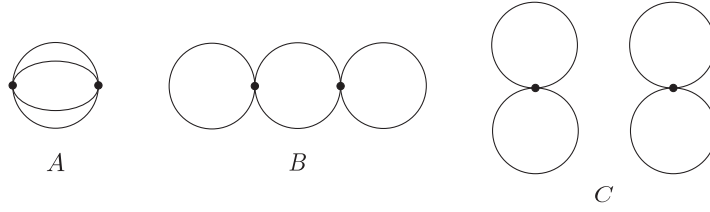


2. Un potenziale perturbativo n -dimensionale è rappresentato da un vertice con n linee attorno:



3. Se m è il numero di vertici, le regole standard impongono m integrazioni: una di queste dà il fattore β e rimangono $m-1$ integrazioni su \mathbb{R} . Si veda per esempio (3.24) e (3.25).
4. Funzioni di correlazione (qualsiasi potenza n) a m punti $\langle x^n(\tau_1) \dots x^n(\tau_m) \rangle$ corrispondono a correzioni perturbative del m -esimo ordine.

5. Diagrammi topologicamente distinti portano a correzioni diverse: per esempio il termine $\langle x^4(\tau_1)x^4(\tau_2) \rangle$ ha tre rappresentazioni topologiche diverse



6. Nella correzione all'energia contano solo diagrammi *connessi*, ovvero rappresentazioni che colleghino i τ_n vertici interessati⁽⁶⁾
7. Ad ogni diagramma corrisponde una molteplicità calcolabile mediante considerazioni combinatorie. La somma delle molteplicità dei diagrammi è data da $(n-1)!!$ dove n è il numero dei punti considerati. Per esempio nei diagrammi esposti nel punto 5 si tratta della correzione al secondo ordine di un potenziale quartico: ci sono quindi 8 funzioni di correlazione; la molteplicità totale (divisa tra i diagrammi A , B e C) è $7!! = 105$.

Infine vediamo che secondo la relazione (1.60) l'espansione in λ segue dall'esponenziale

$$\left[1 - \frac{\hbar\lambda}{n!} \int d\tau \left(\frac{\delta}{\delta J(\tau)} \right)^n + \frac{1}{2!} \left(\frac{\hbar\lambda}{n!} \right)^2 \int d\tau d\tau' \left(\frac{\delta}{\delta J(\tau)} \right)^n \left(\frac{\delta}{\delta J(\tau')} \right)^n + \dots \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot G \cdot J} \Bigg|_{J=0} \quad (1.70)$$

Si nota quindi come in teoria perturbativa l'espansione in \hbar e λ coincidono. In altre parole nella serie perturbativa è del tutto analogo considerare la costante $\hbar\lambda$.

(6) Nel caso di $\langle x^4(\tau_1)x^4(\tau_2) \rangle$ il diagramma C non va considerato.

Capitolo 2

Metodi semiclassici

In questo capitolo tratteremo i cosiddetti effetti semiclassici. Questi hanno un ruolo fondamentale quando il sistema considerato è prossimo al limite $\hbar \rightarrow 0$, o in generale quando per esempio si ha a che fare con effetti di *tunneling*. In un primo momento verrà descritto l'approssimazione WKB, dovuta a *Wentzel–Kramers–Brillouin*: il metodo sviluppa la funzione d'onda in una espansione in potenze della costante \hbar , chiamata appunto semiclassica. In seguito verrà esposta la stessa approssimazione ma nel contesto formale più elegante e diretto dell'integrale di cammino: gli *istantoni*, come soluzioni semiclassiche. L'idea del nome istantone deriva dal fatto che sono degli oggetti simili nella loro struttura matematica ai solitoni, soluzioni *particle-like* di teorie classiche di campo, per questo il suffisso '-oni'; essendo però strutturati nel tempo (Euclideo) il noto fisico *G. 't Hooft* propose il prefisso 'istant-'[1]. Entrambi i metodi non sono rappresentabili con dei diagrammi, infatti quando si considerano accoppiamenti deboli (λ) dovuti a perturbazioni i contributi semiclassici sono proporzionali a e^{-1/λ^2} . In altre parole non comportano correzioni perturbative al sistema.

2.1 L'approssimazione WKB

Il metodo WKB è uno dei metodi di risoluzione più efficienti dell'equazione di Schrödinger. L'uso di questa approssimazione, spesso definita *approssimazione semiclassica*, può essere come alternativa all'integrale di cammino come metodo di calcolo per un confronto diretto. La trattazione inizierà ricavando, a partire dalla meccanica quantistica, l'equazione di Hamilton-Jacobi (classica) per poi risolvere la funzione nel limite semiclassico $\hbar \rightarrow 0$.

2.1.1 L'equazione di Hamilton-Jacobi

Per ricavare l'equazione di Hamilton-Jacobi consideriamo l'equazione di Schrödinger di una particella immersa in un potenziale

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right] \psi(\vec{x}, t) \quad (2.1)$$

Effettuando la sostituzione $\psi(\vec{x}, t) = e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar}$ l'equazione si scrive

$$-\frac{\partial S}{\partial t} \psi = \left[\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 S + V \right] \psi \quad (2.2)$$

Esprimendo la funzione $S(\vec{x}, t)$ in serie di \hbar si compie la cosiddetta *espansione semiclassica*

$$S(\vec{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k S_k = S_0 + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \dots \quad (2.3)$$

Inserendola all'interno dell'equazione (2.2), sempre considerando $\psi \neq 0$ si ottengono (per esempio per i primi due ordini):

$$-\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\nabla S_0)^2 + V, \quad -\frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{1}{2m}[-i\nabla^2 S_0 + 2(\nabla S_0)(\nabla S_1)], \quad \dots \quad (2.4)$$

Risolvendo k equazioni per le S_k funzioni si trova l'espansione al k -esimo ordine desiderata. L'equazione al primo ordine è l'equazione di Hamilton-Jacobi: in questo modo abbiamo ricavato, nel limite $\hbar \rightarrow 0$, un'equazione classica a partire da un'equazione quantistica.

2.1.2 Approssimazione e regime di validità

L'approssimazione WKB consiste nel mantenere i termini nell'espansione fino all'ordine $\mathcal{O}(\hbar)$. Il nostro caso di interesse riguarda gli autostati dell'energia, in particolare lo stato di energia minima. È noto che la funzione d'onda degli autostati abbia la dipendenza temporale $e^{-iEt/\hbar}$. Questo comporta che l'azione si può dividere in una parte spaziale ed una parte temporale

$$S(\vec{x}, t) = S(\vec{x}) - Et \quad (2.5)$$

Nel caso unidimensionale per S_0 l'equazione di Hamilton-Jacobi (2.4) corrisponde alla seguente

$$E = \frac{1}{2m}(S_0')^2 + V(x) \quad (2.6)$$

La soluzione di questa equazione si ricava facilmente

$$S_0(x) = \pm \int^x \sqrt{2m(E - V(x'))} dx' = \int^x p(x') dx' \quad (2.7)$$

La grandezza $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$ è proprio il momento classico della particella. Risolto l'integrale e trovata S_0 si può iterare il procedimento e risolvere l'equazione per S_1 che dalla (2.4) diventa

$$2S_0'S_1' = iS_0'' \quad (2.8)$$

La soluzione si trova per integrazione

$$S_1(x) = i \int^x \frac{S_0''(x')}{2S_0'(x')} dx' = \frac{i}{2} \log p(x) + c \quad (2.9)$$

La funzione d'onda, fino all'ordine $\mathcal{O}(\hbar)$, si scrive quindi:

$$\psi(x, t) = \exp \left[i \frac{S_0(x) + \hbar S_1(x)}{\hbar} \right] e^{-iEt/\hbar} \quad (2.10)$$

$$= \frac{c}{\sqrt{p(x)}} \exp \left[\pm \frac{i}{\hbar} \int^x \sqrt{2m(E - V(x'))} dx' \right] e^{-iEt/\hbar} \quad (2.11)$$

Questa espressione è la nota approssimazione WKB, il \pm ad esponente indica due onde che si propagano in direzioni diverse. È evidente dalla forma analitica che nei cosiddetti *punti classici di inversione*, ovvero dove l'energia totale eguaglia l'energia potenziale $E = V(x)$, la soluzione non ha senso perché si annulla $p(x)$. In altre parole, l'approssimazione è valida al di fuori di questi punti di inversione dove una particella classica può esistere ($E > V(x)$) o non può esistere ($E < V(x)$). Questo è il motivo per cui questo metodo non è realmente un limite classico, ma si applica anche a casi di effetti tunnel dove la fisica è puramente quantomeccanica. In particolare,

nella regione classicamente proibita la funzione d'onda è caratterizzata da esponenziali reali, dovuti ad un momento immaginario

$$\psi(x, t) = \frac{c}{[2m(V(x) - E)]^{1/4}} \exp \left[\pm \frac{1}{\hbar} \int^x \sqrt{2m(V(x') - E)} dx' \right] e^{-iEt/\hbar} \quad (2.12)$$

Nelle ultime equazioni abbiamo troncato l'espansione (2.3) fino al termine S_1 ; ciò è valido solo se S_1 è molto minore del termine precedente S_0 . Similmente, in relazione all'equazione (2.2), il termine di ordine \hbar deve essere molto minore del primo termine ($\hbar \nabla^2 S \ll (\nabla S)^2$) e deve quindi valere, utilizzando l'espressione di S_0 , la relazione⁽¹⁾

$$|p(x)|^2 \gg \hbar |p'(x)| \quad (2.13)$$

Utilizzando la definizione di $p(x)$ arriviamo alla condizione di validità

$$\left| \frac{\hbar V'(x)}{2(E - V(x))p(x)} \right| \ll 1 \quad (2.14)$$

Questa condizione si può ottenere seguendo il ragionamento di *De Broglie*: introducendo infatti la lunghezza d'onda $\lambda(x) = 2\pi\hbar/p(x)$ l'approssimazione semiclassica è valida se $\lambda(x)$ non varia apprezzabilmente sull'ordine di grandezza del sistema. La (2.13) equivale di fatto alla seguente:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \ll 1 \quad (2.15)$$

Come detto prima nei punti classici di inversione il metodo non è applicabile. Cerchiamo di trovare la funzione d'onda nei pressi di tali punti. Consideriamo il punto $x = a$ tale per cui $V(a) = E$ e $V(x) > E$ per $x > a$. Intuitivamente nella regione proibita classicamente la funzione d'onda deve smorzarsi: ad una distanza sufficiente dal punto di inversione la si può scrivere

$$\psi(x) = \frac{c}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \left| \int_a^x p(x') dx' \right| \right), \quad x > a \quad (2.16)$$

Nella regione a sinistra del punto di inversione invece la soluzione si scrive, facendo riferimento alla (2.11)

$$\psi(x) = \frac{c_1}{\sqrt{p(x)}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_a^x p(x') dx' \right) + \frac{c_2}{\sqrt{p(x)}} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_a^x p(x') dx' \right), \quad x < a \quad (2.17)$$

Per determinare i coefficienti c_1 e c_2 si deve studiare $\psi(x)$ nei pressi del punto di inversione. Per $|x - a|$ piccoli abbiamo

$$E - V(x) \approx F_0(x - a), \quad F_0 = -\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=a} < 0$$

Segue quindi $p(x) = \sqrt{2mF_0(x - a)}$ da sostituire in equazione (2.16). A questo punto è necessario considerare formalmente $\psi(x)$ come funzione di variabile complessa in modo tale da operare nel passaggio da $x - a$ positivi e $x - a$ negativi sempre lontano dal punto $x = a$. Per esempio nella variazione di ψ attraverso il punto di inversione da destra verso sinistra viene descritto un semicerchio di raggio ρ nel semipiano superiore ($\text{Im } x > 0$), ovvero $x - a = \rho e^{i\varphi}$, con $\varphi \in [0, \pi]$, in modo che

$$\int_a^x \sqrt{x' - a} dx' = \frac{2}{3} \rho^{3/2} \left(\cos \frac{3\varphi}{2} + i \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \quad (2.18)$$

(1) Nel caso indipendente dal tempo e unidimensionale.

Il modulo del fattore esponenziale di (2.16) in un primo momento cresce per $\varphi \in [0, 2\pi/3]$ e poi decresce fino ad 1 per $\varphi = \pi$. Alla fine del passaggio l'esponente è però diventato immaginario puro

$$-\frac{1}{\hbar} \left| \int_a^x p(x') dx' \right| \rightarrow -\frac{i}{\hbar} \left| \int_a^x p(x') dx' \right| \quad (2.19)$$

Il fattore prima dell'esponenziale cambia invece come $(x-a)^{-1/4} \rightarrow (a-x)^{-1/4} e^{-i\pi/4}$. In questo modo la ψ di (2.16) si è trasformata nel secondo termine della (2.17) con $c_2 = \frac{c}{2} e^{-i\pi/4}$. Per determinare c_1 si procede analogamente, ma nel semipiano inferiore ($\text{Im } x < 0$) e si trova $c_1 = \frac{c}{2} e^{i\pi/4}$ (2). Si trova perciò che alla funzione d'onda (2.16) corrisponde per $x < a$ la funzione

$$\psi(x) = \frac{c}{\sqrt{p(x)}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.20)$$

Abbiamo quindi ricavato una regola di corrispondenza tra le funzioni d'onda di regioni diverse separate da punti di inversione:

$$\frac{c}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \left| \int_{a, V(x) > E}^x p(x') dx' \right| \right) \rightarrow \frac{c}{\sqrt{p(x)}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \left| \int_{a, V(x) < E}^x p(x') dx' \right| - \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.21)$$

2.1.3 Applicazione all'effetto tunnel

Consideriamo ora un caso rilevante che concerne gli stati metastabili di energia: l'effetto di penetrazione di una barriera, comunemente chiamato effetto tunnel. Questo contributo può

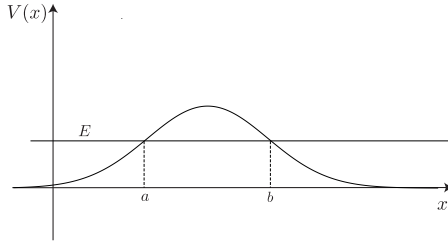


Figura 2.1: Illustrazione dell'effetto di attraversamento di una barriera

essere ricavato in approssimazione WKB se sono soddisfatte le condizioni di semiclassicalità: la barriera deve essere larga e di conseguenza il coefficiente di trasmissione deve risultare piccolo. Il sistema è riportato in Figura 2.1. Per la determinazione di tale coefficiente ci rifacciamo alle considerazioni appena fatte, in particolare alle regole di corrispondenza. Se assumiamo che l'onda incida da sinistra verso destra, allora nella regione III l'onda sarà tutta trasmessa e progressiva, del tipo

$$\psi_{III}(x) = \sqrt{\frac{D}{v(x)}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_b^x p(x') dx' + \frac{i\pi}{4} \right) \quad (2.22)$$

dove D è la densità di corrente dell'onda e $v(x) = p(x)/m$ è la velocità classica. Per trovare la funzione d'onda nella regione II ($x < b$) procediamo come nella sezione precedente, ovvero estendo x al piano complesso. Si trova la regola di corrispondenza

$$\sqrt{\frac{D}{v(x)}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{b, x > b}^x p(x') dx' + \frac{i\pi}{4} \right) \rightarrow \sqrt{\frac{D}{|v(x)|}} \exp \left(\frac{1}{\hbar} \left| \int_{b, x < b}^x p(x') dx' \right| \right) \quad (2.23)$$

(2) In questo caso ovviamente la ψ di (2.16) corrisponde al primo termine di (2.17)

Nella regione II abbiamo quindi

$$\psi_{II}(x) = \sqrt{\frac{D}{|v(x)|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \left| \int_b^x p(x') dx' \right|\right) \quad (2.24)$$

$$= \sqrt{\frac{D}{|v(x)|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \left| \int_a^b p(x') dx' \right| - \frac{1}{\hbar} \left| \int_a^x p(x') dx' \right|\right) \quad (2.25)$$

Invece per il passaggio alla regione I possiamo utilizzare in particolare la regola (2.21):

$$\psi_I(x) = 2\sqrt{\frac{D}{v(x)}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \left| \int_a^b p(x') dx' \right|\right) \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^a p(x') dx' - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.26)$$

Ponendo

$$D = T_{ab} = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p(x')| dx'\right) \quad (2.27)$$

allora la ψ_I diventa

$$\psi_I(x) = \frac{1}{\sqrt{v(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_a^x p(x') dx' + \frac{i\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{v(x)}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_a^x p(x') dx' - \frac{i\pi}{4}\right) \quad (2.28)$$

Il primo termine descrive un'onda incidente sulla barriera mentre il secondo un'onda riflessa. La normalizzazione scelta corrisponde alla densità di corrente uguale a uno nell'onda incidente, di conseguenza la grandezza (2.27) coincide con il coefficiente di trasmissione della barriera cercato.

2.2 Gli istantoni

Una diversa trattazione semiclassica è spiegata da soluzioni classiche in metrica Euclidea chiamate *istantoni*. Sostanzialmente questo metodo evidenzia la fenomenologia a regimi in cui $\hbar \rightarrow 0$ come il metodo WKB ma nel contesto della formulazione di Feynman anziché quello della Meccanica Quantistica ondulatoria ordinaria. La trattazione che affrontiamo, sviluppata principalmente da *S.Coleman* nei primi anni '80 [1], ebbe molto successo perché è facilmente generalizzabile nel caso della teoria di campo. Consideriamo anche in questo caso un sistema di particella singola in un moto unidimensionale. Lo strumento principale per il calcolo dell'ampiezza sarà l'integrale di cammino Euclideo tra lo stato di posizione $x_i = x(-\beta/2)$ e lo stato $x_f = x(\beta/2)$

$$\langle x_f | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | x_i \rangle = K_E(x_f, x_i; \beta) = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}_E[x] e^{-\frac{S_E[x]}{\hbar}} \quad (2.29)$$

con le solite notazioni Euclidee. Come abbiamo visto nel corso del Capitolo 1 l'approssimazione Gaussiana individua una soluzione dominante x_c che rende stazionaria l'azione e risolve l'integrale di cammino secondo la relazione

$$K_E = \mathcal{N} \left[\det \left(-m \frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_c) \right) \right]^{-1/2} e^{-S_E[x_c]/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (2.30)$$

La condizione $\delta S_E / \delta x = 0$ porta alle equazioni del moto. Il fatto di essere in metrica Euclidea gioca ora un ruolo fondamentale: le soluzioni di queste equazioni descrivono il moto nel tempo immaginario τ di un sistema classico con potenziale invertito $V_E(x) = -V(x)$. A seconda del potenziale si possono studiare le soluzioni classiche nel potenziale stesso ma invertito di segno e calcolarne l'azione e il determinante Gaussiano. Vediamo un esempio concreto.

2.2.1 La doppia buca

L'esempio della doppia buca è ideale per descrivere gli istantoni. Il potenziale considerato ha la forma analitica

$$V(x) = \frac{\lambda}{4!}(x^2 - a^2)^2 \quad (2.31)$$

ed è rappresentato in Figura 2.2.

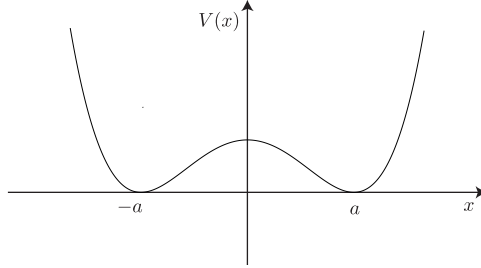


Figura 2.2: Grafico del potenziale della doppia buca

Prima di introdurre la soluzione istantonica focalizziamoci sulle caratteristiche del potenziale. Sotto la trasformazione $x \rightarrow -x$ è ovviamente simmetrico e presenta due minimi in $x = \pm a$ equivalenti. Nelle due buche si ha un'energia minima *idealmente* identica: questo significa che lo sarebbero nel limite di buche infinite. A questa energia ideale E_0 corrispondono due stati diversi $\psi_0(a)$ e $\psi_0(-a)$. Secondo la teoria perturbativa ogni stato di energia dovrebbe quindi essere doppiamente degenere grazie alla simmetria. Vedremo che gli istantoni portano il contributo dominante alla differenza tra i due livelli di energia minore E_+ ed E_- (ora non più degeneri) che derivano dallo splitting di E_0 .

Cerchiamo quindi di calcolare le seguenti ampiezze di transizione:

$$\langle a | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | a \rangle, \quad \langle -a | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | -a \rangle, \quad \langle a | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | -a \rangle, \quad \langle -a | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | a \rangle \quad (2.32)$$

secondo l'approssimazione (2.30). Notiamo in questo caso che il limite $\hbar \rightarrow 0$ corrisponde al limite $\beta \rightarrow \infty$, d'ora in poi considereremo spesso quest'ultimo come limite semiclassico. Il primo step è quello di trovare le soluzioni classiche nel tempo euclideo, ovvero nel potenziale invertito (Figura 2.3).

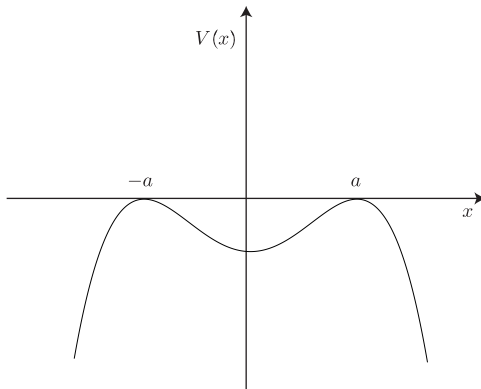


Figura 2.3: Grafico del potenziale della doppia buca invertito

Le soluzioni classiche in quest'ultimo potenziale possono essere di due tipi:

1. Soluzioni banali: $x(\tau) = \pm a$ la particella rimane fissa in uno dei due massimi. Queste soluzioni nel potenziale normale corrispondono al fatto che le buche sono in prima approssimazione degli equilibri stabili di oscillatore armonico
2. Istantoni: la particella compie un moto di oscillazione tra i due massimi del potenziale invertito in un tempo infinito, ovvero $x(-\infty) = -a$ e $x(\infty) = a$ e viceversa. Nel potenziale normale questa soluzione corrisponde all'attraversamento della barriera per effetto tunnel e il passaggio da un minimo all'altro. Queste soluzioni sono esatte nel limite $\beta \rightarrow \infty$. La soluzione che parte da $x = a$ e arriva in $x = -a$ si dice invece anti-istantone.

2.2.2 Forma analitica degli istantoni

Nel caso degli istantoni considerando che la soluzione raggiunge asintoticamente $x = \pm a$, abbiamo a che fare con energia nulla

$$E_E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V_E(x) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) = 0 \quad (2.33)$$

Nel caso specifico del potenziale (2.31) l'equazione diventa, introducendo $\omega^2 = \lambda a^2/3m$

$$\dot{x} = \pm \frac{\omega}{2a}(x^2 - a^2) \quad (2.34)$$

Le soluzioni analitiche dell'istantone e dell'anti-istantone si ricavano dall'equazione (2.34) per integrazione

$$x_c(\tau) = \pm a \tanh \left[\frac{\omega}{2}(\tau - \tau_0) \right] \quad (2.35)$$

L'istantone (soluzione con il +) è ritratto in Figura 2.4 (a).

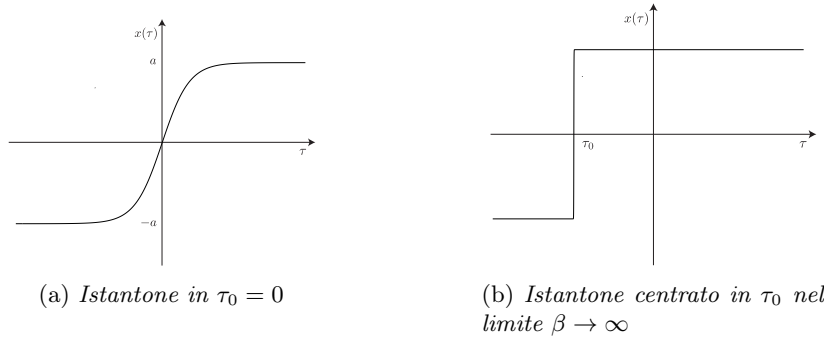


Figura 2.4: Grafici della forma analitica degli istantoni

Per tempi $\tau \rightarrow \infty$ la soluzione raggiunge, nel caso dell'istantone, il valore $x = a$ e si può approssimare l'equazione (2.34) e la soluzione con le seguenti:

$$\dot{x} = \omega(a - x) \quad (a - x) \propto e^{-\omega(\tau - \tau_0)} \quad (2.36)$$

Gli istantoni sono degli oggetti che occupano una posizione temporale molto precisa, esistono cioè per un istante piccolo dell'ordine $\Delta\tau = 1/\omega$. Questa caratteristica è di importanza cruciale, perché nel limite $\beta \rightarrow \infty$ l'istantone non solo segue l'andamento di una funzione a gradino (Figura 2.4 (b)), ma esistono soluzioni (che rendono stazionaria l'azione) costituite da un insieme di istantoni e anti-istantoni largamente separati. Nella computazione dell'approssimazione semiclassica vanno considerate tali soluzioni⁽³⁾.

(3) Graficamente si tratta di una stringa di funzioni gradino che passano continuamente dal valore a al valore $-a$ e viceversa.

2.2.3 Approssimazione semiclassica

Considerando un numero $n = n_I + n_A$ totale di istantoni e anti-istantoni si dovranno avere per esempio $n_I = n_A$ per $\langle a|e^{-\frac{\beta H}{\hbar}}|a\rangle$ e $n_I - n_A = 1$ per $\langle -a|e^{-\frac{\beta H}{\hbar}}|a\rangle$. Inoltre per una soluzione con due istantoni in τ_1 e τ_3 e un anti-istantone in τ_2 deve valere $\tau_1 \ll \tau_2 \ll \tau_3$. Ora, per il conteggio dell'ampiezza si tratta di calcolare l'esponenziale e il determinante.

1. Nell'esponenziale l'azione è semplicemente $nS[x_c]$ se n sono gli istantoni e gli anti-istantoni. $S[x_c]$ è calcolabile grazie all'equazione (2.33)

$$\frac{S_E[x_c]}{\hbar} = \int_{-a}^a \frac{\sqrt{2mV(x)}}{\hbar} = \frac{2m^2\omega^3}{\hbar\lambda} \quad (2.37)$$

2. Per il determinante ricordiamo che tranne per istanti infinitesimi il sistema si trova in uno dei due 'vuoti' $x = \pm a$ dove il potenziale è armonico. Se non fosse quindi per questi istanti la computazione del determinante si avrebbe con $V''(x) = m\omega^2/2$ per tutto l'asse temporale e il prefattore di equazione (2.30) si scriverebbe come quello di oscillatore armonico trovato inizialmente in (1.42):

$$\left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\omega\beta)}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{\omega\beta}{2}} \quad (2.38)$$

L'effetto degli istantoni corregge la (2.38) con un fattore K^n che valuteremo nel seguito.

Prima del conteggio dell'ampiezza non dobbiamo dimenticarci di integrare sulle posizioni degli n istantoni

$$\int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} d\tau_1 \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\tau_{n-1}} d\tau_n = \frac{\beta^n}{n!} \quad (2.39)$$

Calcoliamo per esempio $\langle -a|e^{-\frac{\beta H}{\hbar}}|-a\rangle$. La probabilità di transizione $-a \rightarrow -a$ si può ottenere con $n = 0$, ovvero lo stato rimane nella buca di sinistra, $n = 2$ che rappresenta la coppia IA⁽⁴⁾, $n = 4$ ecc... In generale n deve essere pari, e il conteggio è una sommatoria dei possibili contributi:

$$\langle -a|e^{-\frac{\beta H}{\hbar}}|-a\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{\omega\beta}{2}} \sum_{n=\text{pari}} \frac{(Ke^{S_E[x_c]/\hbar\beta})^n}{n!} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (2.40)$$

Il contributo dell'ampiezza $\langle a|e^{-\frac{\beta H}{\hbar}}|-a\rangle$ somma invece su n dispari e si ottiene:

$$\langle \pm a|e^{-\frac{\beta H}{\hbar}}|-a\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{\omega\beta}{2}} \frac{1}{2} \left(\exp[Ke^{S_E[x_c]/\hbar\beta}] \mp \exp[-Ke^{S_E[x_c]/\hbar\beta}]\right) [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (2.41)$$

Richiamando l'espansione in autostati di energia (1.43) si ottengono i valori di energia

$$E_{\pm} = \frac{\hbar\omega}{2} \pm \hbar K \exp\left[-\frac{2m^2\omega^3}{\hbar\lambda}\right] \quad (2.42)$$

La degenerazione iniziale dei livelli energetici viene rimossa dalla possibile penetrazione della barriera, infatti la differenza tra i due è proporzionale a tale probabilità $e^{-\frac{2m^2\omega^3}{\hbar\lambda}}$. Chiamando $|+\rangle$ e $|-\rangle$ gli autostati relativi a E_+ ed E_- allora lo stato di energia minore corrisponde, come ci si aspetterebbe dalla teoria perturbativa, alla combinazione pari degli stati di oscillatore in $\pm a$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_0(x+a) + \psi_0(x-a)] \quad (2.43)$$

(4) Istantone e anti-istantone

I livelli energetici in (2.42) sono stati ricavati con l'approssimazione semiclassica, ma è necessario fare una precisazione. Non avendo considerato infatti gli effetti perturbativi (λ) del potenziale non possiamo considerare come contributo principale la correzione semiclassica perché è esponenzialmente più piccola di qualsiasi correzione perturbativa $\Delta E_n \sim \hbar\omega(\hbar\lambda)^n$. Possiamo invece considerare il termine esponenziale come prima correzione alla differenza dei due livelli più bassi, dove gli effetti perturbativi si cancellano. La (2.42) scritta correttamente è quindi la seguente

$$E_+ - E_- = 2\hbar K \exp\left[-\frac{2m^2\omega^3}{\hbar\lambda}\right] \quad (2.44)$$

2.2.4 Calcolo del fattore correttivo

Non ci resta che calcolare K , che altro non è che la computazione del determinante di equazione (2.30). Si tratta di studiare l'equazione agli autovalori

$$-\frac{d^2}{d\tau^2}x_n + V''(x_c)x_n = \lambda_n x_n \quad (2.45)$$

dove x_c è il singolo istantone. Per invarianza sotto traslazioni temporali quest'equazione possiede un autostato di autovalore nullo⁽⁵⁾

$$x_1(\tau) = \sqrt{\frac{m}{S[x_c]}} \dot{x}_c(\tau) \quad (2.46)$$

Ricordando l'espansione attorno al valore classico, in questo caso l'istantone,

$$x(\tau) = x_c(\tau) + \sum_n c_n x_n \quad (2.47)$$

l'integrazione del coefficiente c_1 deve essere trattata diversamente, perché porterebbe ad una divergenza. In realtà abbiamo già effettuato questa integrazione in (2.39) attorno alla posizione dell'istantone: basta quindi considerare lo spostamento della posizione x dovuto allo *shift* temporale della posizione dell'istantone

$$\frac{dx_c}{dt} dt_1 = dx = x_1 dc_1 \quad (2.48)$$

da cui si deduce, grazie a (2.46) e alle solite normalizzazioni:

$$\frac{dc_1}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \sqrt{\frac{S[x_c]}{2\pi\hbar}} dt_1 \quad (2.49)$$

Nella computazione del determinante non si dovrà tener conto dell'autovalore nullo includendo però in K il fattore $\sqrt{S[x_c]/2\pi\hbar}$. Il contributo all'ampiezza di un solo istantone è

$$\langle a | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | -a \rangle_1 = \beta \sqrt{\frac{S[x_c]}{2\pi\hbar}} e^{-\frac{S[x_c]}{\hbar}} [\hat{\det}(-\partial_\tau^2 + V''(x_c))]^{-1/2} \quad (2.50)$$

dove $\hat{\det}$ indica il determinante senza l'autovalore nullo. Confrontando con le ampiezze trovate precedentemente si ottiene

$$K = \sqrt{\frac{S[x_c]}{2\pi\hbar}} \left| \frac{\det(-\partial_\tau^2 + m\omega^2)}{\hat{\det}(-\partial_\tau^2 + V''(x_c))} \right|^{1/2} \quad (2.51)$$

(5) Il fattore sotto radice deriva dalla normalizzazione

$$\int \dot{x}_c^2(\tau) d\tau = \frac{S[x_c]}{m}$$

La risoluzione di questo rapporto tra determinanti è trattata per esempio da Coleman[1] con un metodo che evita la computazione diretta del prodotto degli autovalori. Nell'appendice B viene mostrata questa metodologia, con l'aiuto di un teorema, che porta al seguente risultato

$$\left| \frac{\det(-\partial_\tau^2 + m\omega^2)}{\hat{\det}(-\partial_\tau^2 + V''(x_c))} \right| = 2\omega c^2 \quad (2.52)$$

dove c si ottiene dal limite $\Delta\tau \rightarrow \infty$ ($|\tau - \tau_0| \gg 1/\omega$) della soluzione con autovalore nullo

$$x_1 = \sqrt{\frac{m}{S[x_c]}} \dot{x}_c \rightarrow ce^{-\omega|\tau-\tau_0|}, \quad \tau \rightarrow \pm\infty \quad (2.53)$$

Dalla soluzione (2.35) è facile ottenere

$$\dot{x}_c \sim 2a\omega e^{-\omega|\tau-\tau_0|} \quad c = 2\sqrt{\frac{m}{S[x_c]}} a\omega \quad (2.54)$$

Possiamo quindi concludere, completando l'equazione (2.44)

$$E_+ - E_- = 4a\hbar\omega \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{2m^2\omega^3}{\hbar\lambda} \right] \quad (2.55)$$

Capitolo 3

Stati metastabili

In questo capitolo applicheremo i metodi esposti per un caso di potenziale metastabile: l'oscillatore cubico. Ci occupiamo di mostrare come approcci non perturbativi diversi portino agli stessi risultati, nel limite semiclassico. In particolare calcoleremo l'ampiezza di decadimento Γ mediante il metodo WKB, ovvero attraverso la probabilità di tunneling, mentre successivamente mostreremo l'approccio degli istantoni, in maniera simile ma sostanzialmente diversa al capitolo 3. Inoltre si cercherà di collegare tra loro effetti perturbativi ($\lambda \rightarrow 0$) ed effetti non perturbativi ($\hbar \rightarrow 0$) in base ai regimi di validità delle due approssimazioni. Nella parte finale verranno discussi infatti gli effetti puramente perturbativi del potenziale.

3.1 Uno stato metastabile

La trattazione perturbativa di un sistema quantomeccanico non tiene conto di effetti non perturbativi importanti che si possono manifestare. Si consideri per esempio il potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - \lambda x^3 \quad (3.1)$$

mostrato in figura 3.1, dove supponiamo $\lambda > 0$ costante.

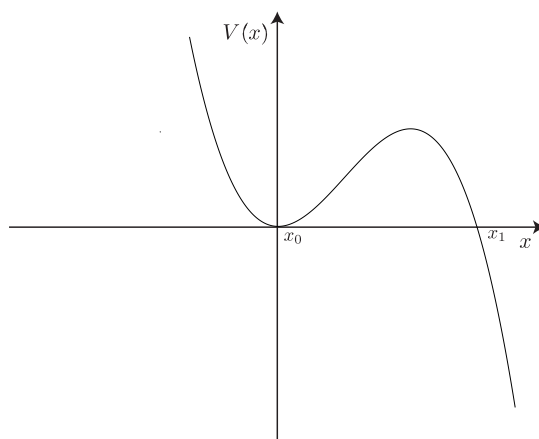


Figura 3.1: Grafico del potenziale cubico

Lo studio del sistema si focalizza nel punto $x = 0$, minimo locale, dove il potenziale è in prima approssimazione ($\lambda = 0$) un oscillatore armonico. Si potrebbe quindi espandere la serie perturbativa nel parametro λ e trovare a qualsiasi ordine le correzioni al ground state dell'energia.

Facendo ciò non si terrebbe conto però dell'aspetto più importante del punto di minimo, ovvero la sua instabilità. Esiste una probabilità non nulla di attraversamento della barriera che porterebbe il ground state a decadere nella regione in cui il potenziale è negativo. Questi effetti non perturbativi, come visto nel capitolo precedente, sono gli istantoni. Vedremo che questi effetti hanno comportamento asintotico

$$\sim e^{-A/\lambda^2}$$

invisibile a qualsiasi ordine perturbativo finito. In un potenziale con vuoto metastabile significa che l'energia del ground state ha una parte immaginaria che avrà la dipendenza in λ tipica di un istantone

$$E_0 = \text{Re}E_0(\lambda) + i \text{Im}E_0(\lambda) \quad \text{Im}E_0(\lambda) \sim e^{-A/\lambda^2}$$

La grandezza principale a cui siamo interessati è l'instabilità dello stato di energia. Se consideriamo la *vita media* τ definiamo la *larghezza di decadimento* Γ

$$\frac{\hbar}{\tau} =: \Gamma = -\text{Im}E_0(\lambda) \quad (3.2)$$

La larghezza in energia sarà il parametro che caratterizza la metastabilità di uno stato quantistico.

3.1.1 Decadimento dello stato

Considerando il potenziale cubico (3.1) abbiamo visto che la probabilità di attraversamento della barriera per effetto tunnel è data dall'equazione (2.27):

$$P = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_0}^{x_1} |p(x)| dx \right\} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (3.3)$$

Dove x_0 e x_1 sono i punti classici di inversione: consideriamo per semplicità il decadimento dello stato minimo di energia, ovvero il ground state. Per questo motivo nell'espressione di $p(x)$ consideriamo il caso $E = 0$. La probabilità di trovare la particella nella buca dopo un tempo t molto più grande del periodo di oscillazione T è

$$w(t) = (1 - P)^{t/T} \approx e^{-tP/T} = e^{-2t/\tau} \quad (3.4)$$

dove

$$\tau = \frac{2T(E)}{P} = 2T \exp \left(\frac{2}{\hbar} \int_{x_0}^{x_1} |p(x)| dx \right) \quad (3.5)$$

Notiamo quindi che lo stato di una particella in un potenziale del genere non è stazionario, ma ha una certa probabilità di decadere, si può considerare *quasi-stabile*. Questo significa che la particella prima di decadere compie un numero di oscillazioni grande, τ/T . Il modulo della funzione d'onda decresce esponenzialmente come $e^{-t/\tau}$, perciò considerata la fase dipendente dal tempo tipica di un autostato di energia, come in (2.10) $\psi_t = e^{-iEt/\hbar}$ allora la funzione d'onda cambia nel tempo con l'andamento

$$\exp \left(-\frac{i(E_n - i\Gamma)t}{\hbar} \right) \quad (3.6)$$

dove Γ è la larghezza di stato metastabile definita in (3.2). In questo modo lo stato metastabile, con probabilità di decadimento, può essere descritto alternativamente come uno stato ad energia complessa

$$E = E_n - i\Gamma \quad (3.7)$$

Vediamo fisicamente cosa rappresenta Γ : espandendo in trasformata di Fourier la funzione d'onda dello stato si ottiene

$$\psi(t) = \int \tilde{\psi}(E) e^{-iEt/\hbar} dE \quad (3.8)$$

il modulo quadro $|\tilde{\psi}(E)|^2$ rappresenta la densità di probabilità di trovare il sistema con energia E . Si trova

$$|\tilde{\psi}(E)| = \frac{c}{(E - E_n)^2 + \Gamma^2} \quad (3.9)$$

Γ è quindi l'incertezza ΔE del livello energetico. La vita media τ si può invece considerare come

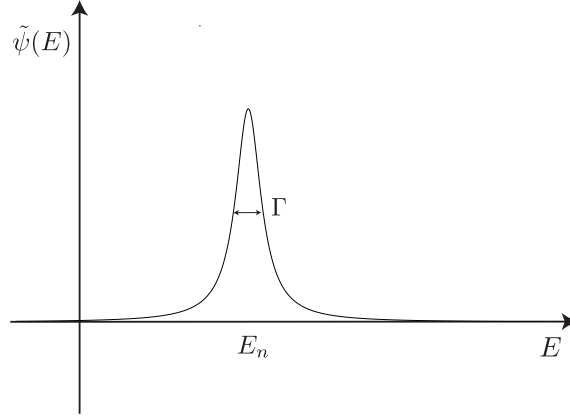


Figura 3.2: Distribuzione di energia centrata in $E = E_n$

incertezza sul tempo Δt . Dalla relazione (3.2) si può risalire al principio di Heisenberg:

$$\Delta E \Delta t \simeq \hbar \quad (3.10)$$

Dalle equazioni (3.2) e (3.5) si trova

$$\Gamma = \frac{\hbar}{2T} \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^{\omega^2/2\lambda} \sqrt{\omega^2 x^2 - 2\lambda x^3} dx \right] = \frac{\hbar}{2T} \exp \left[-\frac{2\omega^5}{15\lambda^2 \hbar} \right] \quad (3.11)$$

3.2 Instantoni in potenziali metastabili

Come visto nel capitolo precedente gli instantoni si manifestano come transizione *vuoto-vuoto*, dove per vuoto si intende un vuoto perturbato. Nel caso di potenziali metastabili, come vedremo in dettaglio nel potenziale di oscillatore cubico, gli instantoni sono delle transizioni *vuoto-infinito*, chiamati 'bounces', che rendono stazionario il funzionale azione. Il contributo principale della parte immaginaria dell'energia minima che nasce da una probabilità diversa da zero di decadimento, si calcola allo stesso modo della doppia buca, ovvero mediante la *one-loop approximation*. Vediamo in dettaglio il caso del nostro potenziale (3.1), dove per semplicità consideriamo un sistema che abbia massa unitaria:

$$V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \lambda x^3$$

Se non si considerassero gli effetti di penetrazione della barriera questo potenziale avrebbe un autostato di energia nel minimo $x = 0$. L'obiettivo è quello di calcolare le proprietà e le correzioni all'energia del falso ground state dovute agli effetti di tunneling. Richiamando l'integrale di

cammino Euclideo sono rilevanti i punti classici di inversione $x_0 = 0$ e $x_1 = \omega^2/2\lambda$ per il potenziale invertito e l'ampiezza

$$\langle x_0 | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | x_0 \rangle = K_E(x_0, x_0; \beta) = \int_{x_0, -\frac{\beta}{2}}^{x_0, \frac{\beta}{2}} \mathcal{D}[x] e^{-\frac{S_E[x]}{\hbar}} \quad (3.12)$$

dove l'azione euclidea è ovviamente

$$S_E[x] = \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} d\tau \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 - \lambda x^3 \right) \quad (3.13)$$

L'ampiezza (3.12) è dominato dalle traiettorie con azione stazionaria con le condizioni $x_0 = x(\beta/2)$ e $x_0 = x(-\beta/2)$. Studiando il potenziale invertito $V_E(x) = -V(x)$ si trova il moto in cui la particella inizia in cima al massimo locale in x_0 e oscilla fino al punto di inversione x_1 , per poi ritornare al massimo. Questo moto è solitamente definito *bounce*. Come nel caso della doppia buca è possibile definire, integrando l'equazione del moto con energia nulla, la forma analitica del bounce nel limite $\beta \rightarrow \infty$. Facendo riferimento alla figura 3.3 si trova:

$$x_c(\tau) = \frac{\omega^2}{2\lambda \cosh^2\left(\frac{\omega}{2}(\tau - \tau_0)\right)} \quad (3.14)$$

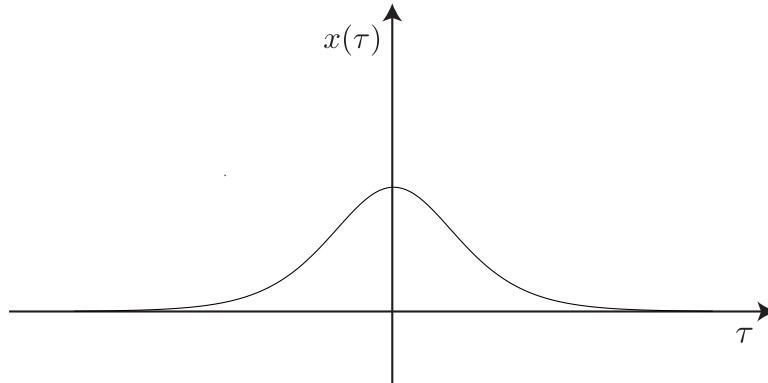


Figura 3.3: Configurazione del *bounce*

L'azione del bounce è la medesima integrazione di (2.37) dove gli estremi di integrazione sono i punti di inversione x_0 e x_1 ⁽¹⁾

$$S_E[x_c] = 2 \int_0^{\omega^2/2\lambda} \sqrt{2V(x)} dx = 2\sqrt{2} \int_0^{\omega^2/2\lambda} \left[\frac{1}{2} \omega^2 x^2 - \lambda x^3 \right]^{1/2} dx = \frac{2\omega^5}{15\lambda^2} \quad (3.15)$$

La sommatoria sui vari bounce si effettua quindi come nel caso della doppia buca, con la differenza che la sommatoria è estesa a tutti i numeri interi dato che il bounce è una configurazione unica ⁽²⁾

$$\langle x_0 | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | x_0 \rangle = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/2} e^{-\frac{\beta \omega}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(K e^{-S_E/\hbar} \beta)^n}{n!} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (3.16)$$

(1) Il fattore 2 dell'integrazione di (3.15) è dovuto al fatto che la configurazione passa da x_0 a x_1 e torna in x_0 in maniera simmetrica.

(2) Nel caso della doppia buca le soluzioni potevano essere istantone o anti-istantone

Il fattore K è calcolabile come in (2.51), nel limite $\tau - \tau_0 \gg 1/\omega$:

$$x_c(\tau) \sim \frac{\omega^2}{2\lambda} 4e^{-\omega|\tau-\tau_0|} \quad \dot{x}_c(\tau) \sim -\frac{2\omega^3}{\lambda} e^{-\omega|\tau-\tau_0|} \quad (3.17)$$

e dalle relazioni (2.52) e (2.54) il valore di K è il seguente

$$K = -\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \frac{2\omega^3}{\lambda} \quad (3.18)$$

Si ottiene quindi la correzione semiclassica alla parte immaginaria dell'energia

$$\text{Im}E_0(\lambda) = \hbar K \exp\left[-\frac{2\omega^5}{15\lambda^2\hbar}\right] = -\left(\frac{\omega\hbar}{\pi}\right)^{1/2} \frac{2\omega^3}{\lambda} \exp\left[-\frac{2\omega^5}{15\lambda^2\hbar}\right] \quad (3.19)$$

La larghezza dello stato metastabile è dalla (3.2)

$$\Gamma = \left(\frac{\omega\hbar}{\pi}\right)^{1/2} \frac{2\omega^3}{\lambda} \exp\left[-\frac{2\omega^5}{15\lambda^2\hbar}\right] \quad (3.20)$$

3.3 Sviluppo perturbativo

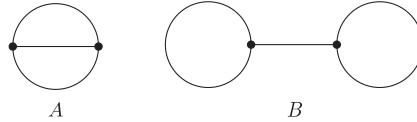
Come visto in precedenza la teoria libera corrisponde ad un integrale Gaussiano ed è risolvibile analiticamente. Il potenziale cubico è però interagente e per questo motivo ricorriamo all'espansione perturbativa mediante le regole e i diagrammi di Feynman, trovati nel Capitolo 2. Di seguito calcoliamo (reintroducendo la massa m) la correzione all'energia del ground state $E_0(\lambda)$ senza considerare gli effetti semiclassici. Secondo il potenziale considerato l'azione Euclidea si scrive

$$S_E[x] = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 - \lambda x^3 \right] \quad (3.21)$$

Nel limite $\beta \rightarrow \infty$ abbiamo visto che la funzione $Z[\beta]$ è dominata dal ground state. Per trovare la prima correzione non nulla dobbiamo espanderla in serie di λ ma è evidente dalle relazioni funzionali che il primo termine (lineare) sia nullo

$$Z_J[\beta] = Z_0[\beta] \left[1 + \frac{(\hbar\lambda)^2}{2!} \int d\tau d\tau' \left(\frac{\delta}{\delta J(\tau)}\right)^3 \left(\frac{\delta}{\delta J(\tau')}\right)^3 + \mathcal{O}(\lambda^3) \right] e^{\frac{1}{2}J \cdot G \cdot J} \Big|_{J=0} \quad (3.22)$$

Le correzioni al secondo ordine sono funzioni di correlazione a due punti di potenziali cubici e corrispondono perciò ad una doppia integrazione. Si tratta quindi di trovare i diagrammi a due punti connessi dove ad ogni vertice corrispondono tre linee. Gli unici risultati possibili sono



L'espansione si riduce quindi

$$Z_J[\beta] = Z_0[\beta] \left[1 + \frac{\hbar^2\lambda^2}{2} (3!A + 3^2B) + \mathcal{O}(\lambda^3) \right] \quad (3.23)$$

I fattori $3!$ e 3^2 sono le molteplicità dei due diagrammi. Dato che le derivate funzionali sono 6 sappiamo che $G(\tau_1, \dots, \tau_6)$ contiene $5!! = 15$ elementi. Nel diagramma A è facile ricavare la

molteplicità⁽³⁾: le combinazioni possibili sono $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, per il diagramma B si può semplicemente fare la differenza $15 - 6 = 9$. Ricordando la funzione di Green (1.63) i due integrali si svolgono⁽⁴⁾

$$A = \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} d\tau \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} d\tau' G^3(\tau, \tau') = \frac{1}{8m^3\omega^3} \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\rho e^{-3\omega|\rho|} = \frac{\beta}{12m^3\omega^4} \quad (3.24)$$

$$B = \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} d\tau \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} d\tau' G(\tau, \tau) G(\tau, \tau') G(\tau', \tau') = \frac{\beta}{4m^3\omega^4} \quad (3.25)$$

La funzione di partizione è quindi

$$Z_J[\beta] = Z_0[\beta] \left[1 + \frac{11\hbar^2\lambda^2\beta}{8m^3\omega^4} + \mathcal{O}(\lambda^3) \right] \quad (3.26)$$

Avendo già effettuato il limite $\beta \rightarrow \infty$ l'energia del ground state diventa

$$E_0 = -\frac{\hbar}{\beta} \ln Z_J[\beta] \quad (3.27)$$

da cui si ricava

$$E_0(\lambda) = \frac{\hbar\omega}{2} \left[1 - \frac{11\hbar^2\lambda^2}{8m^3\omega^4} + \mathcal{O}(\lambda^3) \right] \quad (3.28)$$

3.3.1 Regimi di validità

Non ci resta che verificare che nel regime di approssimazione semiclassica lo sviluppo perturbativo è applicabile, ovvero il termine correttivo è trascurabile rispetto a $E_0 = \hbar\omega/2$ e la probabilità di tunneling dal ground state in $x_0 = 0$ è esponenzialmente piccola. Il regime semiclassico è imposto dalla relazione (2.14) che nel caso del potenziale (3.1) si scrive⁽⁵⁾

$$\left| \frac{\hbar[(m\omega^2)x - 3\lambda x^2]}{m^{1/2}(m\omega^2 x^2 - 2\lambda x^3)^{3/2}} \right| \ll 1 \quad (3.29)$$

Il nostro obiettivo è quello di trovare una relazione semiclassica con \hbar tra i parametri m , ω e λ , ma nella condizione (3.29) è ancora presente la variabile x . È chiaro che in prossimità dei punti di inversione, non essendo valida l'approssimazione semiclassica questo criterio non è applicabile. Nella regione compresa tra i punti x_0 ed x_1 è perciò ragionevole considerare per esempio il valore del punto medio tra i due: $x_m = \frac{m\omega^2}{4\lambda}$. Inserito nella (3.29) dà la condizione

$$\hbar \ll \frac{m^{3/2}\omega^2}{2\lambda} \quad (3.30)$$

Mettendo in evidenza le costanti \hbar e λ otteniamo

$$\hbar\lambda \ll m^{3/2}\omega^2 \quad \rightarrow \quad \hbar^2\lambda^2 \ll m^3\omega^4 \quad (3.31)$$

e osservando la correzione $E_0(\lambda)$ in (3.28) vale la relazione

$$\frac{11\hbar^2\lambda^2}{8m^3\omega^4} \ll 1 \quad (3.32)$$

(3) Si veda nella sezione sulle regole dei diagrammi

(4) $G(\tau, \tau') = G(\tau - \tau') \rightarrow G(0) = \frac{1}{2m\omega}$

(5) Consideriamo il caso semplice in cui $E_{cl} = 0$

Possiamo inoltre affermare che il criterio (3.29) è ragionevolmente valido in generale per valori di $x \approx m\omega^2/\lambda$. Il risultato (3.32) dimostra che il termine dovuto alla correzione perturbativa è molto piccolo se valutato in approssimazione semiclassica. In altre parole prima di considerare eventuali effetti semiclassici, come gli istantoni, è doveroso calcolare i termini correttivi dell'energia E_0 dovuti alla perturbazione. Nel conteggio dell'ampiezza (3.16) i valori di E_0 e K da considerare dovrebbero contenere contributi perturbativi:

$$\langle x_0 | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | x_0 \rangle = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/2} e^{-\frac{\beta E_0(\lambda)}{\hbar}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(K(\lambda) e^{-S_E/\hbar} \beta)^n}{n!} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (3.33)$$

dove ora $E_0(\lambda)$ e $K(\lambda)$ sono corretti:

$$E_0(\lambda) = \frac{\hbar\omega}{2} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n(\hbar\lambda)^n \right] = \frac{\hbar\omega}{2} \left[1 - \frac{11\hbar^2\lambda^2}{8m^3\omega^4} + \mathcal{O}(\lambda^3) \right] \quad (3.34)$$

$$K(\lambda) = K \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n(\hbar\lambda)^n \right] \quad (3.35)$$

Conclusioni

Nello studio di un potenziale metastabile abbiamo visto essere rilevanti due tipologie di correzioni: gli effetti semiclassici e perturbativi.

- ◊ Gli effetti perturbativi sono fluttuazioni quantistiche di un punto stazionario e le correzioni si esprimono in un'espansione della costante λ . In questi casi l'espansione lo è anche per la costante $\hbar\lambda$, come in equazione (1.70). In altre parole contare potenze di \hbar corrisponde a contare potenze della costante di accoppiamento nel computo di effetti perturbativi e le due espansioni coincidono. La correzione al primo dell'energia di ground state del potenziale (3.1) è:

$$E_0(\lambda) = \frac{\hbar\omega}{2} \left[1 - \frac{11\hbar^2\lambda^2}{8m^3\omega^4} + \mathcal{O}(\lambda^3) \right]$$

- ◊ Gli effetti non perturbativi sono invece una manifestazione di indeterminazione quantistica, di possibilità di attraversamento di una barriera di potenziale. Le due tipologie svolte corrispondono all'espansione in \hbar approssimate nel limite semiclassico che rende tale probabilità esponenzialmente piccola, e corrispondono a punti stazionari non banali dell'azione Euclidea. In particolare si è trovato per il potenziale (3.1):

$$\Gamma = \left(\frac{\omega\hbar}{\pi} \right)^{1/2} \frac{2\omega^3}{\lambda} \exp \left[-\frac{2\omega^5}{15\lambda^2\hbar} \right]$$

- ◊ Gli effetti non perturbativi sono esponenzialmente più piccoli di quelli perturbativi, come mostrato nella sezione 3.3.1. In questo modo la parte di immaginaria dell'energia risulta trascurabile rispetto a qualunque ordine perturbativo della parte reale. Note queste considerazioni i contributi delle parti reale ed immaginaria di E_0 danno la completa descrizione del sistema, o almeno del livello minimo di energia. Si è trovato:

$$E_0(\lambda) = \frac{\hbar\omega}{2} \left[1 - \frac{11\hbar^2\lambda^2}{8m^3\omega^4} + \mathcal{O}(\lambda^3) \right] + i \left\{ \left(\frac{\omega\hbar}{\pi} \right)^{1/2} \frac{2\omega^3}{\lambda} \exp \left[-\frac{2\omega^5}{15\lambda^2\hbar} \right] \right\}$$

Appendice A

Funzione di Green nel caso libero

In questa appendice verrà ricavata la relazione (1.61) a partire dall'espressione del propagatore libero $K_E^0[\beta, J]$. Sarà inoltre necessario determinare la funzione di Green $G_D(\tau, \tau')$ nel caso limite $\beta \rightarrow \infty$. Possiamo scrivere il propagatore libero nel seguente modo:

$$K_E^0[\beta, J] = \int \mathcal{D}_E[x] \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int d\tau \frac{m}{2} x(\tau) \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) x(\tau) - J(\tau)x(\tau) d\tau \right] \quad (\text{A.1})$$

$$= \int \mathcal{D}_E[x] \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int d\tau \frac{1}{2} x(\tau) \hat{O} x(\tau) - J(\tau)x(\tau) d\tau \right] \quad (\text{A.2})$$

dove abbiamo indicato con \hat{O} l'operatore di (1.62). È conveniente scrivere l'esponente usando l'inverso di \hat{O} , ovvero la funzione di Green G_D tale per cui

$$\hat{O}_{\tau_1} G_D(\tau_1, \tau_2) \equiv m(-\partial_{\tau_1}^2 + \omega^2)G_D(\tau_1, \tau_2) = \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (\text{A.3})$$

con le condizioni al contorno di Dirichlet

$$G_D(\pm\beta/2, \tau) = G_D(\tau, \pm\beta/2) = 0 \quad (\text{A.4})$$

La funzione di Green è facilmente ricavabile nel limite $\beta \rightarrow \infty$, che risulta essere il limite di nostro interesse. In questo modo l'invarianza per traslazioni viene ripristinata ed è possibile applicare il metodo della trasformata di Fourier. Troviamo per G_D il seguente integrale:

$$G_D(\tau_1, \tau_2) = -\frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{k^2 + m^2} e^{ik(\tau_1 - \tau_2)} \quad (\text{A.5})$$

che si risolve con il metodo dei residui, ovvero estendo la variabile k al piano complesso. Si notano infatti le singolarità (poli) in $k = \pm i\omega$ che contribuiscono al calcolo dell'integrale. Il risultato è

$$G_D(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2m\omega} e^{-\omega|\tau_1 - \tau_2|} \quad (\text{A.6})$$

Tornando all'esponente di (A.2) possiamo usare la seguente uguaglianza

$$x(\tau_1) = \int G_D(\tau_1, \tau_2) J(\tau_2) d\tau_2 + y(\tau_1) \equiv G \cdot J + y \quad (\text{A.7})$$

in questo modo l'esponente diventa⁽¹⁾

$$\frac{1}{2} x \cdot \hat{O} \cdot x - J \cdot x = \frac{1}{2} (y \cdot \hat{O} \cdot y + J \cdot G_D \cdot \hat{O} \cdot G_D \cdot J + 2y \cdot J) - (J \cdot y + J \cdot G_D \cdot J) \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{1}{2} (y \cdot \hat{O} \cdot y - J \cdot G_D \cdot J) \quad (\text{A.9})$$

(1) In questa notazione il simbolo \cdot indica la convoluzione nella variabile τ .

e troviamo l'espressione cercata del propagatore libero

$$K_E^0[\beta, J] = \exp \left[\frac{1}{2\hbar} \int d\tau_1 d\tau_2 J(\tau_1) G_D(\tau_1, \tau_2) J(\tau_2) \right] \int \mathcal{D}_E[y] e^{-S_E^0[y]/\hbar} \quad (\text{A.10})$$

$$= \exp \left(\frac{1}{2\hbar} J \cdot G_D \cdot J \right) K_E^0[\beta, 0] \quad (\text{A.11})$$

Appendice B

Calcolo di determinanti

Per affrontare la computazione del fattore correttivo K dovuto agli istantoni ci rifacciamo ad un'argomentazione di Coleman [1] sul calcolo di determinanti. Studiamo l'equazione agli autovalori

$$(-\partial_\tau^2 + W)\psi = \lambda\psi \quad (\text{B.1})$$

dove l'operatore $\partial_\tau^2 + W$ agisce in uno spazio di funzioni che si annullano agli estremi $\pm\beta/2$. Definendo

$$\det(-\partial_\tau^2 + W) = \prod_n \lambda_n \quad (\text{B.2})$$

possiamo enunciare il teorema:

Teorema B.0.1. *Siano $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$ due funzioni di τ , e siano $\psi_\lambda^{(1,2)}$ le soluzioni a tali funzioni di equazione (B.1). Allora*

$$\det \left[\frac{-\partial_\tau^2 + W^{(1)} - \lambda}{-\partial_\tau^2 + W^{(2)} - \lambda} \right] = \frac{\psi_\lambda^{(1)}(\beta/2)}{\psi_\lambda^{(2)}(\beta/2)} \quad (\text{B.3})$$

Dimostrazione. Definiamo le seguenti funzioni

$$f(\lambda) = \frac{\psi_\lambda^{(1)}(\beta/2)}{\psi_\lambda^{(2)}(\beta/2)} \quad g(\lambda) = \det \left[\frac{-\partial_\tau^2 + W^{(1)} - \lambda}{-\partial_\tau^2 + W^{(2)} - \lambda} \right] \quad (\text{B.4})$$

La funzione $f(\lambda)$ è una funzione meromorfa che possiede tutti gli zeri in corrispondenza agli autovalori di $-\partial_\tau^2 + W^{(1)}$ e tutti i poli a quelli di $-\partial_\tau^2 + W^{(2)}$. $f(\lambda) \rightarrow 1$ per $\lambda \rightarrow \infty$, proprietà che deriva dalla soluzione dell'equazione (B.1). $g(\lambda)$ ha esattamente gli stessi poli e zeri di $f(\lambda)$ e vale lo stesso limite $g(\lambda) \rightarrow 1$ per $\lambda \rightarrow \infty$. La funzione

$$h(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} \quad (\text{B.5})$$

è analitica ovunque in λ . Questo perché le singolarità ai poli di f sono neutralizzate dagli zeri semplici di $1/g$ e viceversa. Anche $h(\lambda)$ tende ad 1 per $\lambda \rightarrow \infty$ e quindi

$$h(\lambda) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{h(z) - 1}{z - \lambda} dz \rightarrow 0 \quad (\text{B.6})$$

dato che $\lim_{|z| \rightarrow \infty} (h(z) - 1) = 0$. Abbiamo quindi $h(\lambda) \equiv 1$ che dimostra la (B.3). □

Se definiamo N tale che

$$\frac{\det(-\partial_\tau^2 + W)}{\psi_0(\beta/2)} = \pi\hbar N^2 \quad (\text{B.7})$$

dove ψ_0 è la soluzione di (B.1) con $\lambda = 0$, allora per l'eq. (B.3) N non dipende da W . Non avendo definito precedentemente il fattore di normalizzazione è possibile utilizzare la relazione (B.7) per la formula dell'integrale funzionale Gaussiano

$$N[\det(-\partial_\tau^2 + W)]^{-1/2} = [\pi\hbar\psi_0(\beta/2)]^{1/2} \quad (\text{B.8})$$

Utilizziamo quindi questo risultato per la computazione del fattore K di (2.51). Dobbiamo valutare un determinante con un autovalore omesso ($\hat{\det}$): si può effettuare calcolando il determinante intero in un intervallo finito $[-\beta/2; \beta/2]$, dividerlo per il suo autovalore minimo λ_0 ed effettuando poi il limite $\beta \rightarrow \infty$. Conosciamo già una soluzione dell'equazione (2.45)

$$x_1 = S[x_c]^{-1/2} \dot{x}_c \rightarrow ce^{-\omega|\tau-\tau_0|}, \quad |\tau - \tau_0| \gg \frac{1}{\omega} \quad (\text{B.9})$$

L'equazione agli autovalori ha però una seconda soluzione con $\lambda = 0$, che chiamiamo y_1 . Le soluzioni vanno per convenienza normalizzate e il Wronskiano è

$$x_1 \partial_\tau y_1 - y_1 \partial_\tau x_1 = 2\omega c^2 \quad (\text{B.10})$$

e anche y_1 ha il comportamento asintotico

$$y_1 \rightarrow \pm ce^{\omega|\tau-\tau_0|}, \quad |\tau - \tau_0| \gg \frac{1}{\omega} \quad (\text{B.11})$$

Possiamo quindi costruire la funzione ψ_0 per valori grandi di β :

$$\psi_0(\tau) = \frac{1}{2\omega c} (e^{\omega\beta/2} x_1 + e^{-\omega\beta/2} y_1) \quad \psi_0(\beta/2) = \frac{1}{\omega} \quad (\text{B.12})$$

In questo modo il determinante è calcolato con la (B.8). Per trovare invece l'autovalore minimo dobbiamo trovare le funzioni $\psi_\lambda(\tau)$ per λ piccolo. Possiamo scrivere (B.7) in forma integrale e iterare una volta

$$\psi_\lambda(\tau) = \psi_0(\tau) - \frac{\lambda}{2c^2} \int_{-\beta/2}^{\tau} d\tau' [y_1(\tau)x_1(\tau') - x_1(\tau)y_1(\tau')] \psi_0(\tau') \quad (\text{B.13})$$

dove abbiamo trascurato i termini $\mathcal{O}(\lambda^2)$. Inserendo l'equazione (B.12) otteniamo

$$\psi_\lambda(\beta/2) = 1 - \frac{\lambda}{4c^2} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau [e^{\omega\beta} x_1^2 - e^{-\omega\beta} y_1^2] \stackrel{\beta \rightarrow \infty}{\cong} 1 - \frac{\lambda}{4c^2} e^{\omega\beta} \quad (\text{B.14})$$

Quindi l'autovalore minore si trova essere

$$\lambda_0 = 4c^2 e^{-\omega\beta} \quad (\text{B.15})$$

trovando, sempre nel limite $\beta \rightarrow \infty$, l'espressione cercata (2.52)

$$\left| \frac{\hat{\det}(-\partial_\tau^2 + V''(x_c))}{\det(-\partial_\tau^2 + m\omega^2)} \right| = \frac{2\psi_0(\beta/2)}{\lambda_0 e^{\omega\beta}} = \frac{1}{2\omega c^2} \quad (\text{B.16})$$

Bibliografia

- [1] S. Coleman (1985), *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] L.D. Landau, E.M. Lifšits (1976), *Fisica teorica 3 (Meccanica Quantistica -Teoria non relativistica)*, Editori Riuniti.
- [3] Harald J.W. Müller-Kiritsen (2006), *Introduction to Quantum Mechanics: Schrödinger Equation and Path Integral*, World Scientific.
- [4] V. Rubakov (2002), *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton University Press, Princeton.
- [5] R. Rattazzi (2009), *The Path Integral approach to Quantum Mechanics*, Lecture Notes for Quantum Mechanics IV.
- [6] M. Mariño, *Istantons and large N*, Département de Physique Théorique et Section de Mathématiques, Université de Genève, Genève, Switzerland.
- [7] R. MacKenzie, *Path Integral Methods and Applications*, University of Montreal, Canada.
- [8] *WKB Lecture Notes*, University of Berkeley, California.
- [9] V.L. Pokrovsky, *Semiclassical and Adiabatic Approximation in Quantum Mechanics*.
- [10] <https://en.wikipedia.org/wiki/Double-slit-experiment>
- [11] Giuseppe Degrossi, Stefano Di Vita, Joan Elias-Miró, José R. Espinosa, Gian F. Giudice, Gino Isidori, Alessandro Strumia (2013), Higgs mass and vacuum stability in the Standard Model at NNLO, arXiv:1205.6497 [hep-ph].