

Stima della Topologia per Smart Grid

Ermanno Lazzarin

25/10/2011

Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare i miei genitori Franco e Carla, che con i loro sacrifici mi hanno permesso di svolgere questo percorso di studi e arrivare fin qui. Grazie per il vostro sostegno costante e per tutti quei valori che in questi anni avete saputo trasmettermi.

Grazie alle mie sorelle Pamela e Lorianna, per aver contribuito a facilitare il mio cammino agevolandomi con il materiale universitario e deliziandomi con nuove ricette culinarie.

Un ringraziamento va in particolare al mio relatore, Professor Stefano Tomasin, del dipartimento di Ingegneria dell'Università di Padova, per avermi seguito costantemente nella stesura di questa tesi, dimostrando grande disponibilità e professionalità.

Grazie al Professor Tommaso Erseghe e ad Alberto Vigato per il prezioso contributo in fase di elaborazione e stesura di questa tesi.

Come non ringraziare i miei due compagni di avventura Mattia e Nicolò, i quali hanno saputo rendere speciale ogni singola banale giornata grigia con direzione Padova. Grazie per i preziosi consigli, per le giornate di studio passate assieme, per aver condiviso con me una parte così importante della mia vita.

Non dimentico Marco, Alessio e Fabio, per la costante vicinanza dimostratami e per le innumerevoli serate passate in compagnia. Grazie per il sostegno che mi avete sempre donato nei momenti più difficili.

Desidero inoltre ringraziare tutti gli amici, i colleghi di università e le persone che mi hanno accompagnato in questi anni e che in un modo o nell'altro hanno incrociato il mio cammino.

Infine un ringraziamento di cuore ad Elena, per avermi sopportato ed essermi stata vicina in questo periodo. Sono davvero felice di averti accanto.

Abstract

La forma di energia più versatile e ampiamente utilizzata è l'energia elettrica, una risorsa accessibile a oltre cinque miliardi di persone in tutto il mondo.

Oggi giorno l'erogazione di energia elettrica proviene essenzialmente da centrali di grandi dimensioni alimentate principalmente da combustibile fossile, energia nucleare e idroelettrica che operano tramite sistemi di trasmissione e distribuzione ormai consolidati. Sebbene questi sistemi offrano un servizio efficiente in tutto il mondo da oltre un secolo, i tempi stanno cambiando. La domanda di energia è in rapida crescita a causa dei celeri sviluppi sociali in numerose parti del mondo, ma anche in ragione del fatto che le economie digitali moderne dipendono in misura sempre maggiore dalla disponibilità di energia elettrica. Tale rapporto di dipendenza impone nuovi sviluppi strutturali al fine di evitare problemi sulle reti, il cui costo grava notevolmente sulle economie mondiali.

Allo stesso tempo, le società moderne hanno compreso che, per combattere il cambiamento climatico, occorre ridurre le emissioni. A un impiego ottimale delle fonti tradizionali deve affiancarsi lo sviluppo della produzione da fonti non tradizionali, quali ad esempio impianti eolici, ad energia mareomotrice, solari, geotermici e a biomasse. Si assiste quindi alla diffusione di un'ampia gamma di fonti energetiche che comportano numerose complessità in termini di progettazione delle reti elettriche.

In questo ambito nasce il concetto di Smart Grid, una rete elettrica in grado di gestire efficacemente le risorse, riducendo sensibilmente le perdite e migliorando l'affidabilità del sistema. Nel primo capitolo verranno meglio

descritte le dinamiche che hanno portato un forte interessamento in quest'ambito e saranno analizzate le principali caratteristiche che una rete di questo tipo deve possedere.

Nel secondo capitolo viene presentato il concetto di operazioni di ranging, e in particolare l'importanza del loro utilizzo al fine di ottenere un comportamento efficiente della rete. Questo sarà la base per la procedura di stima della topologia di una rete elettrica, corpo centrale di questa tesi. Conoscere la topologia della rete infatti è di fondamentale importanza per perseguire le intenzioni precedentemente illustrate.

Nel Capitolo 3, viene brevemente presentato un modello di una rete elettrica che permette di osservare il comportamento di una Smart Grid, caratterizzandone le principali peculiarità.

Successivamente l'elaborato affronta con maggior attenzione l'operazione di mapping della rete. Si parte con una descrizione delle principali topologie utilizzate, analizzando i modelli matematici esistenti che tentano di stimare una riproduzione fedele (Capitolo 4).

Nel Capitolo 5 viene presentata l'idea utilizzata per cercare di ottenere una stima corretta dell'effettiva struttura di una rete di distribuzione elettrica, con una parentesi dedicata al problema del cammino minimo in un grafo corrotto da rumore.

I capitoli successivi affrontano nel dettaglio il problema, presentando l'analisi matematica che sta alla base e riassumendo infine i risultati e le simulazioni realizzate.

Indice

| | |
|--|-----------|
| Abstract | v |
| 1 Smart Grid | 1 |
| 1.1 Definizione | 1 |
| 1.2 Motivazioni e principali caratteristiche | 2 |
| 1.3 Modello concettuale | 5 |
| 1.4 Sviluppi internazionali | 12 |
| 2 Ranging | 15 |
| 2.1 Tecniche di ranging | 16 |
| 2.2 Ranging nelle smart micro grids | 17 |
| 2.3 Ottimizzazione nelle micro grids | 18 |
| 2.4 PLC e problematiche | 22 |
| 3 Modello del sistema | 25 |
| 3.1 Struttura | 25 |
| 3.2 Parametri caratterizzanti | 27 |
| 4 Topologia della rete | 29 |
| 4.1 Topologia nelle Smart Grid | 29 |
| 4.2 Caratteristiche topologiche | 31 |
| 4.3 Modelli per la rete | 35 |
| 4.3.1 Modello RT-nested-Smallworld | 36 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5 | Stima della topologia | 43 |
| 5.1 | Introduzione all'idea risolutiva | 43 |
| 5.2 | Operazione di ranging | 44 |
| 5.3 | Criterio di decisione | 45 |
| 5.3.1 | Problema del cammino minimo in un grafo corrotto da rumore | 48 |
| 6 | Algoritmo per la stima della topologia | 65 |
| 6.1 | Modello di rumore gaussiano bianco | 67 |
| 6.1.1 | Calcolo delle probabilità | 68 |
| 6.1.2 | Calcolo della probabilità di identificare un cammino non ottimo | 70 |
| 6.1.3 | Calcolo probabilità di False Alarm e Miss Detection sul cammino minimo | 75 |
| 6.1.4 | Calcolo dell'albero minimo | 78 |
| 6.1.5 | Calcolo della probabilità di identificare correttamente l'albero ottimo | 88 |
| 6.2 | Modello di rumore Gaussian Mixture | 91 |
| 7 | Implementazione e risultati | 101 |
| 7.1 | Generazione di una rete tramite modello RT-nested-SmallWorld | 102 |
| 7.2 | Simulazione delle operazioni di ranging | 103 |
| 7.3 | Stima della soglia di decisione | 104 |
| 7.3.1 | Modello di rumore gaussiano bianco | 105 |
| 7.3.2 | Caso cammino minimo | 109 |
| 7.3.3 | Considerazioni sul numero di passi del cammino se- condario | 112 |
| 7.3.4 | Modello di rumore Gaussian Mixture | 115 |
| 7.4 | Conclusioni | 120 |
| | Bibliografia | 121 |

Capitolo 1

Smart Grid

Con l'incremento della diffusione di piccole sorgenti di energia, il concetto di micro grids si sta fortemente sviluppando. L'apertura fatta in questi anni verso le fonti di energia rinnovabili pone particolare attenzione allo sviluppo di tale settore.

La forte dipendenza dell'economia mondiale dal petrolio e dai suoi derivati, è da sempre motivo di discussione e analisi. Oltre ad essere una fonte dannosa per l'ambiente, si tratta comunque di una risorsa sempre più costosa e, guardando la prospettiva futura, limitata.

Nasce dunque la necessità di trovare un'alternativa in grado di contrastare l'avvento di queste problematiche altrimenti incombenti.

1.1 Definizione

In questo ambito nasce il concetto di *Rete Intelligente* (Smart Grid): una rete elettrica che integra e gestisce in modo efficiente il comportamento e le azioni di tutti gli utenti connessi, con l'obiettivo di garantire un funzionamento economicamente efficiente del sistema elettrico, con un elevato livello di sicurezza, continuità e qualità della fornitura.

Non si tratta quindi di una rivoluzione che prevede lo smantellamento dell'attuale sistema di distribuzione dell'energia, ma piuttosto di un'evoluzione

dello stesso. Si passa da una gestione di tipo Broadcast in cui i nodi produttori (centrali elettriche, idroelettriche, nucleari, carbone) immettono energia assorbita dagli utilizzatori (abitazioni, fabbriche.), ad un sistema controllato di tipo Multicast.

In questo diverso tipo di gestione intervengono infatti i contributi forniti dalle piccole sorgenti alternative che collaborano tra loro in un contesto distribuito.

1.2 Motivazioni e principali caratteristiche

Le principali carenze dell'attuale sistema di distribuzione sono le seguenti:

- non è previsto alcun controllo di flusso;
- non vengono effettuati test riguardanti la qualità;
- non si riesce a trovare un sistema per la gestione delle perdite di energia lungo le linee;
- non è previsto alcun meccanismo di ottimizzazione del flusso di potenza all'interno della rete.

È proprio su questi fattori che il concetto di Smart Grid punta pesantemente. L'idea è quella di affiancare all'attuale sistema di distribuzione le tecnologie adibite al controllo e alla comunicazione digitale, in modo tale da distribuire intelligentemente l'energia, riducendo le perdite e allo stesso tempo aumentando l'affidabilità e la trasparenza del servizio.

Le motivazioni che dunque portano a questa evoluzione nel sistema di distribuzione di energia elettrica sono molteplici. In particolare poi dal punto di vista strettamente economico si possono riassumere con i seguenti concetti base:

- integrazione di produzione di energia da fonti rinnovabili anche sulla rete di distribuzione;

- efficienza energetica nella generazione e nell'impiego dell'energia;
- nuovi impieghi del vettore elettrico (auto elettrica);
- allargamento del mercato dell'energia e dei servizi offerti da generazione e utenza diffusa;
- maggior coinvolgimento nel mercato dell'energia degli utenti finali.



Figura 1.1: Minori emissioni di CO_2 , energie alternative, rete intelligente [1]

Dal punto di vista degli utenti invece, la rete attuale necessita di nuove caratteristiche, più vicine alle esigenze dei soggetti che si interfacciano con essa:

- nuove esigenze di connessione;
- miglioramento dell'esercizio della rete;

- sicurezza e qualità della fornitura;
- nuovi criteri di pianificazione degli investimenti;
- miglioramento delle funzionalità del mercato;
- maggior coinvolgimento dei consumatori.

Per riuscire ad attuare questa evoluzione del sistema, oltre alle infrastrutture già esistenti della rete di distribuzione, la realizzazione di una rete intelligente prevede l'utilizzo di:

1. dati e applicazioni;
2. sistemi di comunicazione;
3. intelligenza dei componenti.

Per una corretta gestione della rete sono sicuramente necessari dati tecnici ed economici dei sistemi ad essa connessi. In questo ambito nasce l'esigenza di creare applicazioni adibite al controllo e all'amministrazione. Inoltre assumono particolare importanza sistemi addetti alla previsione della generazione di energia da fonti non programmabili, e della domanda proveniente dagli utilizzatori.

I sistemi di comunicazione per le motivazioni fin qui viste assumono una grande rilevanza nell'ambito Smart Grid. È necessaria una rete di telecomunicazione che si integri con quella di potenza per rendere possibile l'interazione tra le risorse connesse. Questa rete dovrà essere capillare, sicura, con tempi di trasmissione prevedibili. Inoltre deve risultare poco costosa, senza stravolgere l'architettura esistente.

La comunicazione, proprio per l'interazione che avviene tra gli elementi della rete, diventa bidirezionale.

Infine l'intelligenza dei componenti assume un ruolo fondamentale per una gestione ottimizzata. Sistemi di controllo e di protezione, sensori a basso costo per la misurazione in tempo reale delle grandezze elettriche e sistemi

per l'immagazzinamento dell'energia sono la base delle infrastrutture necessarie a fornire tale requisito.

1.3 Modello concettuale

Il concetto di Smart Grid in realtà non si può definire univocamente. Molto spesso gli obiettivi e le motivazioni sono le stesse, ma lo sviluppo è pesantemente legato alla realtà in cui ci si trova. Trattandosi infatti di una evoluzione, ogni singolo paese o continente è dotato di infrastrutture e peculiarità diverse, e dunque il percorso seguito non è detto sia comune a tutti.

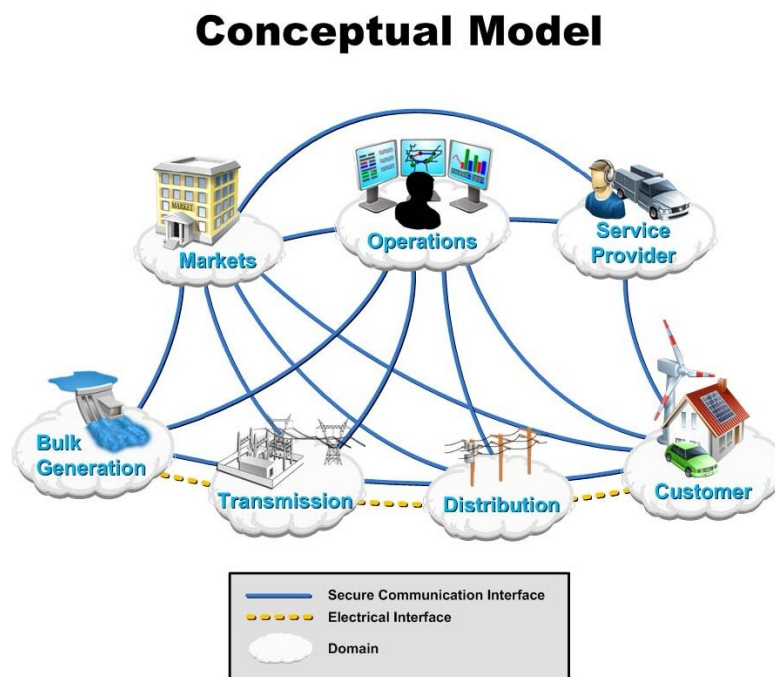


Figura 1.2: Modello concettuale di una Smart Grid [2]

Tuttavia all'interno del modello concettuale di una Smart Grid [3] [2] pos-

sono essere evidenziati sette domini funzionali:

1. generazione dell'energia;
2. trasmissione;
3. distribuzione;
4. clientela;
5. operazioni;
6. mercati;
7. service providers.

Generazione dell'energia

L'energia come è noto viene prodotta da sorgenti di diverso tipo. Fonti non rinnovabili, come il carbone, il gas e il nucleare, ma anche fonti di energia rinnovabili. Un'ulteriore distinzione tra le sorgenti rinnovabili riguarda la variabilità o meno della disponibilità di queste.

L'energia solare ed eolica fa parte della categoria delle energie rinnovabili ma variabili, mentre le sorgenti idroelettriche, geotermali, o lo sfruttamento delle biomasse sono rinnovabili e non variabili.

Nella Figura 1.3 sono riportati i principali metodi di produzione, ed i legami che questo dominio funzionale possiede con gli altri.

Trasmissione

Il dominio di trasmissione comprende la classica rete di trasmissione dell'energia su lunghe e medie distanze. Racchiude anche apparecchi che immagazzinano l'energia per poi rilasciarla quando richiesta.

Lega in maniera diretta il dominio di generazione con quello che si occuperà della distribuzione dell'energia stessa. Per permettere questo collabora coi

Bulk Generation

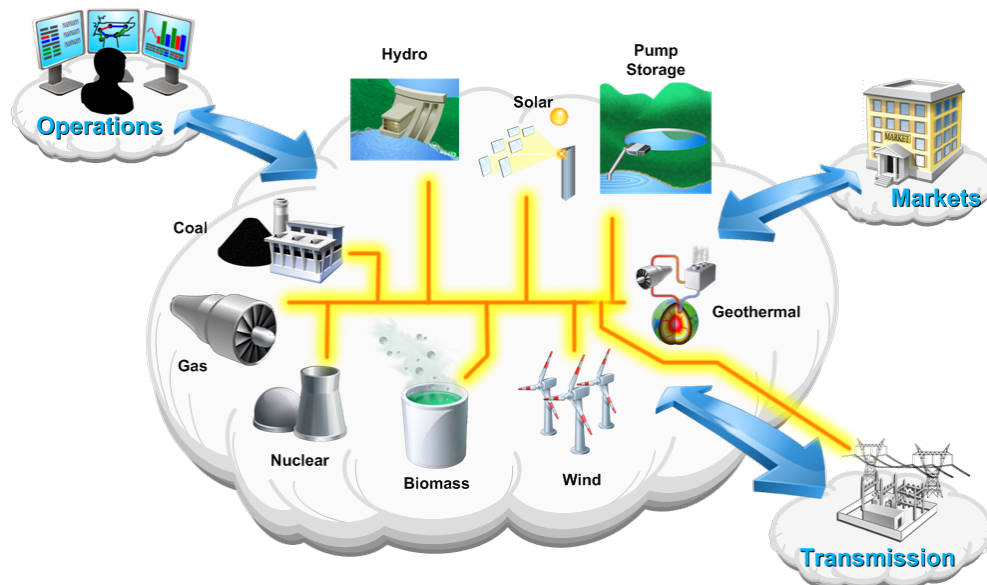


Figura 1.3: Generazione dell'energia [2]

domini rappresentanti il mercato e le operazioni.

Inoltre compaiono operazioni di controllo e stabilizzazione dell'energia, molto importanti per il corretto funzionamento della rete.

Distribuzione

Il dominio di distribuzione è la connessione tra il dominio di trasmissione prima presentato, e i consumatori finali. Collabora con gli altri domini come quelli del mercato e delle operazioni.

L'energia elettrica viene prelevata dalla trasmissione, ma anche attinta dai clienti che sono al tempo stesso produttori. Il tutto gestito in maniera intelligente. Di questo dominio fanno parte anche gli strumenti di misura

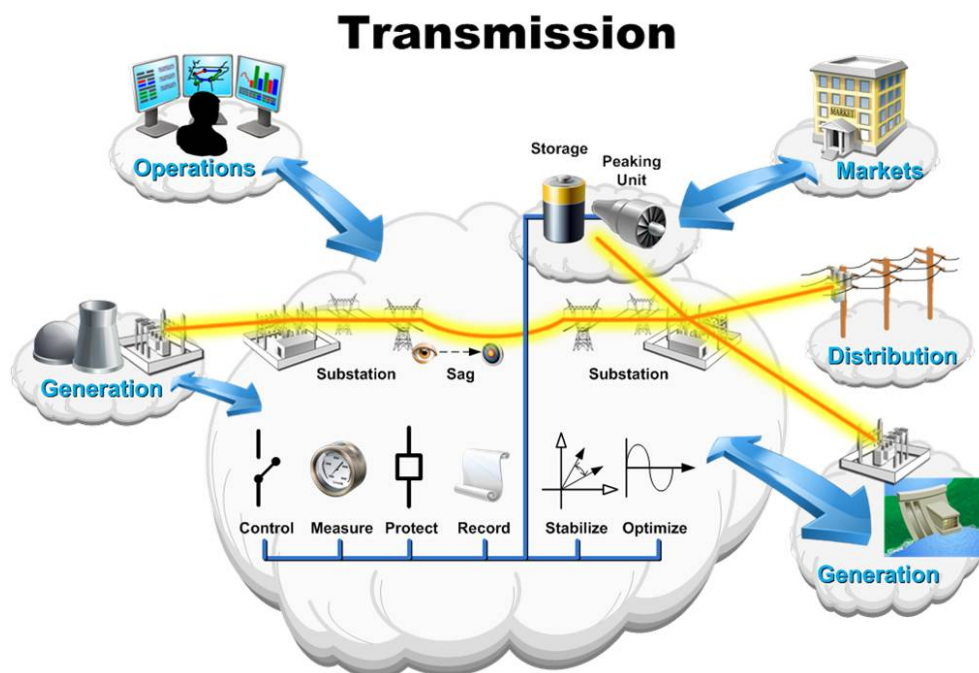


Figura 1.4: Trasmissione dell'energia [2]

installati e tutti gli apparati utili alla distribuzione: anche la distribuzione infatti si occupa di garantire un servizio di controllo e protezione.

Clientela

Il dominio cliente è elettricamente connesso al dominio di distribuzione, e oltre a comunicare con questo è strettamente legato anche ai domini delle operazioni, del mercato e dei service provider.

Rappresenta la connessione degli utenti finali alla rete attraverso strumenti di misura. Questi strumenti regolano il flusso di energia entrante ed uscente, e raccolgono allo stesso tempo informazioni riguardanti l'utilizzo della stessa.

In Figura 1.6 è riportato il dominio del cliente in tutte le sue principali funzionalità. Si noti la suddivisione in tre principali aree, quella casalinga,

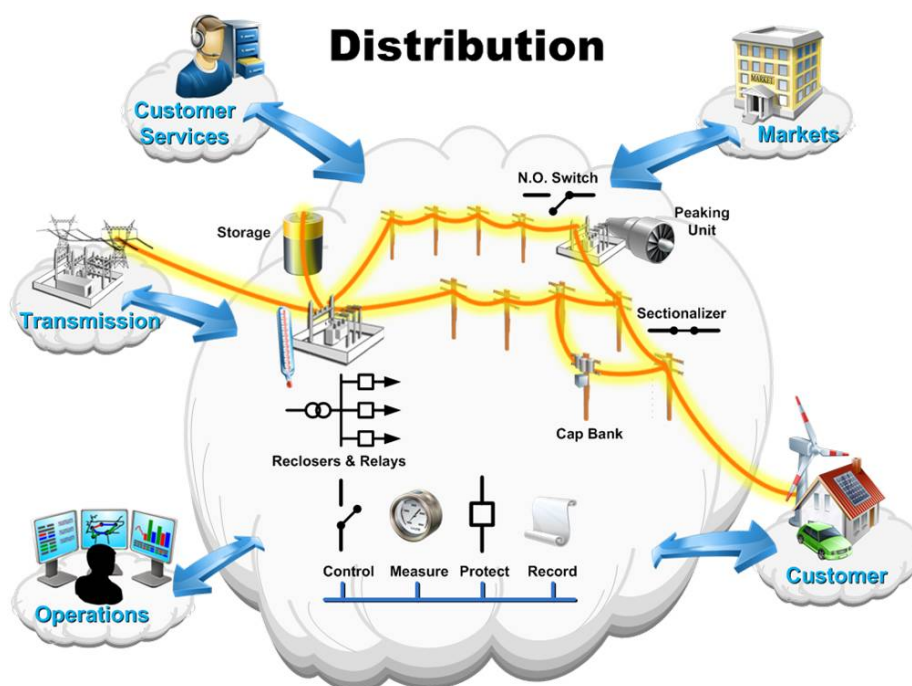


Figura 1.5: Distribuzione dell'energia [2]

quella industriale e quella commerciale.

Operazioni

Il dominio delle operazioni ha una visione globale della rete: si occupa infatti della gestione e del controllo di tutti gli altri domini. Sfruttando una rete di comunicazione bidirezionale (spesso tramite Power Line Communication) supervisiona e controlla lo stato del sistema. Senza questo dominio i meccanismi di gestione del mercato si troverebbero spiazzati e poco informati sulle decisioni da prendere. Coinvolge dunque più in generale il mercato dell'energia.

Come si può notare dalla Figura 1.7 le operazioni da svolgere per il controllo e la manutenzione di una rete di distribuzione elettrica sono molteplici. Si aggiungono inoltre operazioni di costruzione o estensione della rete stessa.

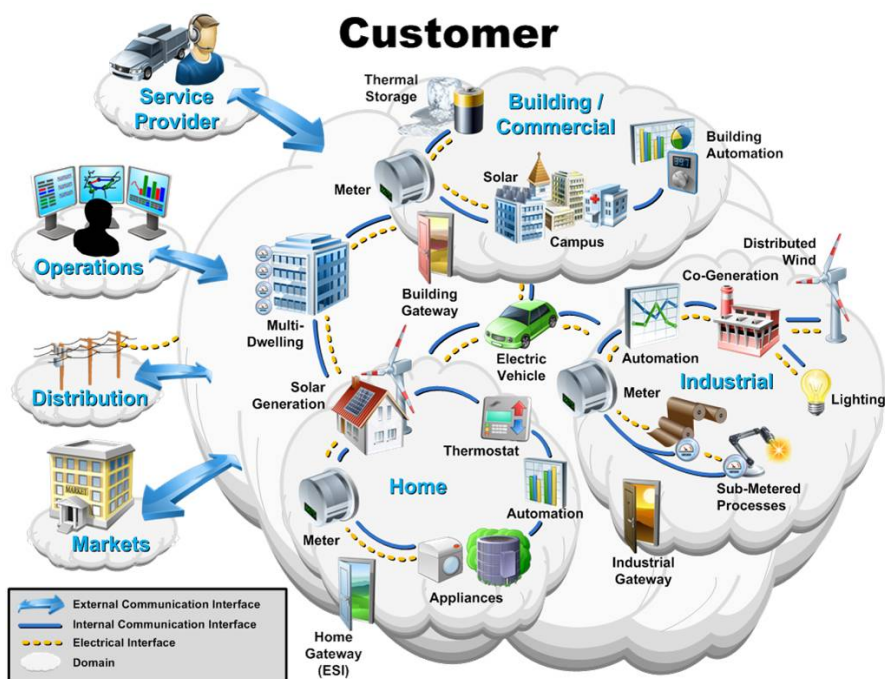


Figura 1.6: Dominio cliente [2]

Mercato

Il dominio del mercato coordina tutti i soggetti in gioco nel mercato dell'energia che ruota attorno alla Smart Grid. Si parte dalla gestione del mercato su ampia scala per passare al commercio al dettaglio e agli scambi di servizi energetici.

Anche questo dominio è interfacciato strettamente agli altri in modo che tutti siano coordinati in un contesto di mercato libero e concorrenziale.

Service provider

Il dominio dei service providers gestisce tutte le operazioni tra i domini svolte da terze parti. I servizi offerti sono molteplici e hanno la peculiarità di

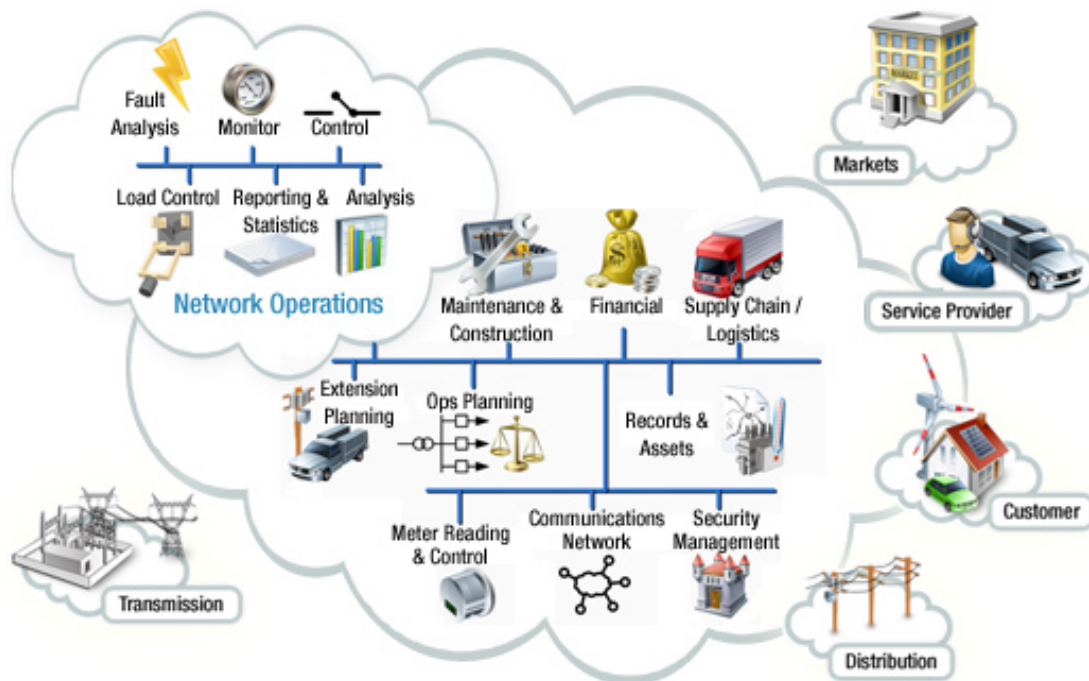


Figura 1.7: Dominio delle operazioni [2]

essere a stretto contatto con gli utilizzatori finali.

Ad esempio l'utilizzo di un portale web per il controllo dell'energia erogata ai clienti, o servizi legati alla gestione delle interruzioni.

Il dominio dei service providers perciò come ci si può attendere è direttamente connesso al dominio dei consumatori. Il tutto senza compromettere in alcun modo la sicurezza, l'affidabilità, l'integrità e la stabilità della rete elettrica.

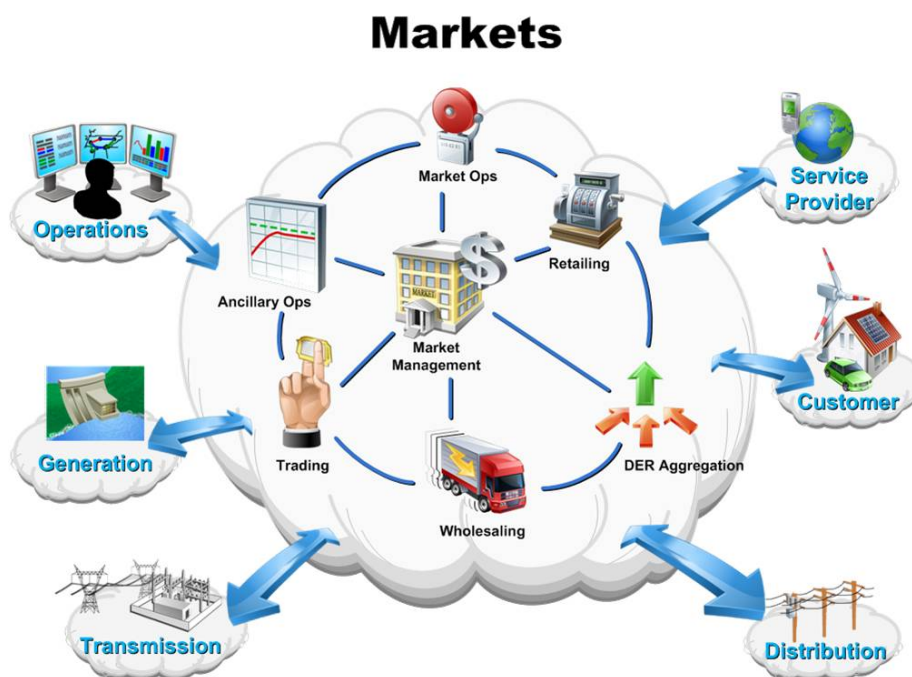


Figura 1.8: Dominio dei mercati [2]

1.4 Sviluppi internazionali

I primi passi verso una forma differente di gestione dell'energia sono stati mossi dagli Stati Uniti d'America, seguiti dalla comunità Europea e dai principali paesi asiatici in forte sviluppo.

Come detto in precedenza non esiste una definizione rigida per il concetto di Smart Grid, e molto spesso le realizzazioni presenti nei vari paesi presentano sostanziali differenze. Tuttavia esiste un filo conduttore, dettato soprattutto dai seguenti fattori:

1. continuo aggravarsi delle condizioni ambientali del nostro pianeta;
2. necessità di aumentare la sicurezza e la qualità delle forniture energetiche, con particolare attenzione alle perdite lungo le linee;
3. apertura e liberalizzazione del mercato di distribuzione dell'energia.



Figura 1.9: Dominio dei servizi [2]

Capitolo 2

Ranging

Con il termine ranging si definisce la capacità di estrapolare informazioni accurate sulla posizione di un dispositivo. Si può intuire come questo settore assuma sempre più importanza in ambiti come quello militare o della pubblica sicurezza. Tuttavia anche per applicazioni commerciali, o nella vita di tutti i giorni, siamo circondati da dispositivi in grado di ottenere o fornire indicazioni sulla posizione geografica (GPS).

Esistono poi altre tecniche di ranging che riescono ad operare anche dove il GPS fallisce, come all'interno di edifici o altre barriere architettoniche, garantendo anche una precisione maggiore visto il diverso uso cui sono adibite. Basti pensare al monitoraggio dei movimenti di persone in aree di alta sicurezza, o a quello di pazienti in determinati servizi di assistenza medica. Non bisogna poi dimenticare quanto importante possano essere queste tecniche in ambiti come quello militare o in operazioni di ricerca di dispersi in disastri naturali.

Inoltre, le tecniche di ranging trovano ampia collocazione in applicazioni come i protocolli di rete, dove assumono un ruolo fondamentale per gestire le tecniche di routing e dunque garantire una elevata efficienza della rete.

2.1 Tecniche di ranging

Lo scopo della localizzazione dunque è quello di ricavare la posizione di nodi partendo da un insieme di misurazioni. Esistono diverse tecniche per la stima della distanza tra due nodi: alcune sfruttano la propagazione temporale di un segnale che viaggia dalla sorgente al destinatario, in altre invece il parametro fondamentale per la stima è la misura della potenza del segnale ricevuto.

Per stimare la distanza tra due nodi sfruttando l'approccio temporale le operazioni da svolgere nel caso basilare sono piuttosto semplici:

1. si invia dalla sorgente un segnale in un determinato istante;
2. si osserva al destinatario l'istante di arrivo;
3. si calcola la differenza dei due istanti e, supponendo che il segnale viaggi alla velocità della luce, si stima la distanza che intercorre tra i due nodi.

Tuttavia questa prima versione semplificata è sensibile rispetto a molte problematiche che intercorrono nel mondo non ideale. Inoltre prevede una sincronizzazione tra la sorgente e il destinatario che non è sempre garantita.

Esistono dunque una serie di tecniche più complesse che sono state studiate per sopperire alle problematiche emerse.

L'introduzione dell'informazione di timestamp nel pacchetto inviato dalla sorgente al destinatario, o la stima del Round-Trip Time (RTT) anziché della misurazione di singola andata, sono solo alcuni di questi accorgimenti. Ad esempio, proprio per limitare il problema della sincronizzazione tra la sorgente e il destinatario, si consideri la seguente soluzione (Figura 2.1):

- il nodo A trasmette un pacchetto al nodo B ;
- il nodo B elabora il dato ricevuto in un tempo prefissato τ_e ;
- successivamente il nodo B risponde con un pacchetto di acknowledgment;

- la sorgente ora sarà in grado di calcolare il RTT e da questo ricavare la lunghezza del collegamento.

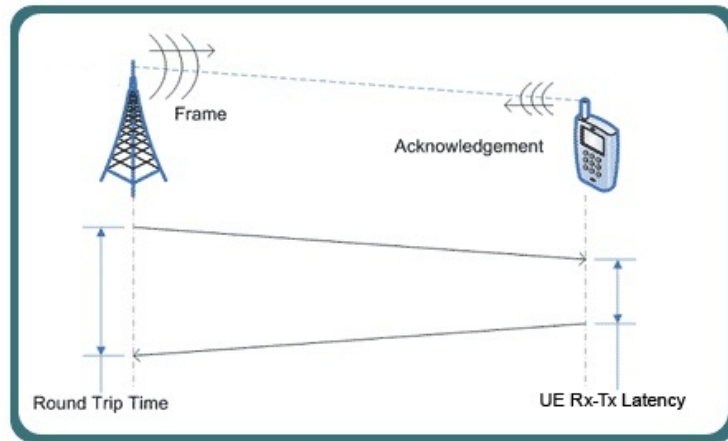


Figura 2.1: Calcolo del RTT

In particolare, il calcolo del RTT in questo caso sarà effettuato come segue:

$$RTT = 2\tau_p + \tau_e \quad (2.1.1)$$

dove τ_p è il tempo di propagazione del segnale lungo la linea.

In questo modo una errata sincronizzazione tra sorgente e destinatario risulta essere indifferente ai fini di una corretta stima della distanza.

2.2 Ranging nelle smart micro grids

Negli ultimi anni la forte apertura verso l'energia rinnovabile ha portato alla nascita di numerose sorgenti di energia alternativa.

Queste sorgenti per uso residenziale (ma non solo) come pannelli fotovoltaici, micro turbine o pale eoliche possono essere utilizzate al fine di ridurre al minimo i costi di produzione e distribuzione dell'energia. Per raggiungere tali obiettivi diventa fondamentale la presenza di un sistema di controllo e di misura, ovvero la realizzazione di una smart micro grid.

L'idea è quella di agire sulle correnti immesse dai generatori locali, in modo da garantire una tensione stabile sulla rete minimizzando così le perdite sulle linee. In questo modo si riducono i costi ed è possibile migliorare il dimensionamento della linea stessa.

Per perseguire tale scopo evitando di spostarsi verso un orientamento centralizzato, una soluzione è quella di utilizzare un approccio di tipo token ring [4]. Nella rete quindi circolerà un token che permetterà al nodo in suo possesso di porre alcune correzioni alla corrente immessa. Il token poi verrà passato ad un altro nodo che ripeterà le stesse operazioni.

Questo tipo di approccio risulta essere il migliore sotto il punto di vista prestazionale, inoltre gode dei benefici relativi ad una politica di tipo distribuito, evitando i principali problemi di una scelta centralizzata.

Il controllo ottimale viene raggiunto quando tutti i generatori locali conoscono la topologia della rete, ed in particolare la distanza che intercorre con i loro vicini. Nasce dunque l'esigenza di stimare correttamente le dimensioni delle linee. Tale problema è affrontato tramite l'utilizzo delle cosiddette Power Line Communication (PLC). Grazie a questo tipo di comunicazione gli obiettivi prefissati sono perseguibili con maggior facilità, garantendo un'infrastruttura di comunicazione necessaria per il controllo e la realizzazione di un sistema di misura per la stima delle lunghezze.

2.3 Ottimizzazione nelle micro grids

In questo capitolo si vuole approfondire l'importanza di utilizzare tecniche di ranging, ovvero la capacità di ottenere informazioni accurate sulla posizione di un dispositivo.

Nelle micro-grid le sorgenti locali sono interfacciate alla rete attraverso dei dispositivi elettronici di potenza. L'obiettivo è quello di farle lavorare in modo cooperativo, raggiungendo così gli scopi prefissati:

- sfruttare in modo completo le sorgenti locali;
- ridurre le perdite di distribuzione lungo le linee;

- stabilizzare la tensione.

Come accennato in precedenza, una tecnica che fornisce buone prestazioni è basata sul token ring [5], in cui le sorgenti locali si passano un token attraverso la rete ed eseguono alcune operazioni. Più nel dettaglio, quando una sorgente ottiene il token, entra nella fase di controllo. L'abilitazione avviene fisicamente tramite la ricezione di un segnale di enable associato ad un pacchetto dati.

Durante questa fase di controllo il processore va ad agire sulla corrente in uscita dalla sorgente in accordo con l'algoritmo di controllo stesso per poi spedire il token ad un altro processore.

Nella fase in cui la sorgente non possiede il token invece la corrente viene mantenuta inalterata.

Questa operazione è molto utile in quanto permette di evitare interazioni e stabilizza l'impedenza vista da ogni processore nella fase di controllo. L'algoritmo di controllo è scelto in modo tale da soddisfare due requisiti fondamentali del sistema:

- la regolazione sulla corrente attiva, che è necessaria al fine di massimizzare lo sfruttamento delle sorgenti di energia locali. In particolare nel caso di sorgenti di energia rinnovabili lo scopo da raggiungere è quello di estrarre la maggior potenza possibile, mentre per quanto riguarda le unità di stoccaggio, l'energia è accumulata o fornita, a seconda delle necessità della rete;
- la regolazione sulla corrente reattiva, che permette di controllare la tensione e minimizzare le perdite di distribuzione.

Come si può notare in Figura 2.2 il nodo N è dotato di un insieme di nodi adiacenti N_1, \dots, N_K , legati tramite gli archi L_1, \dots, L_K .

Si esprime poi con U_n la tensione all' n -esimo nodo, $n = 1, \dots, K$.

Uno dei principali obiettivi è quello di minimizzare le perdite dovute alla distribuzione dell'energia prodotta dalle sorgenti locali.

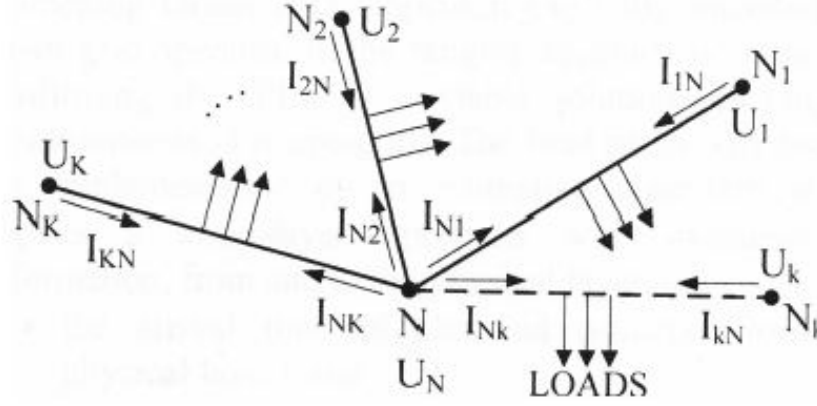


Figura 2.2: Nodi attivi vicini in una micro grid

Per poter ridurre al minimo questo contributo negativo è fondamentale regolare la tensione al nodo N , nel seguente modo:

$$U_N^{Opt} = \frac{\sum_{k=1}^K \frac{U_k}{Z_k}}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{Z_k}}, \quad (2.3.1)$$

dove Z_k è l'impedenza associata al percorso L_k . Se il valore di impedenza per unità di lunghezza è la stessa per tutti i percorsi, l'equazione precedente diventa:

$$U_N^{Opt} = \frac{\sum_{k=1}^K \frac{U_k}{d_k}}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{d_k}}, \quad (2.3.2)$$

con d_k lunghezza associata al percorso L_k .

Definendo:

- I_N corrente al nodo N ,
- ΔI_N variazione della corrente al nodo N ,
- U_N^0 tensione iniziale assunta costante,
- Z_{eq} impedenza equivalente al nodo N , ricavata tramite misurazioni sulla linea, pari a $Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}$.

La miglior configurazione di corrente che permette alla tensione di raggiungere il valore ottimo è facilmente determinata osservando che se la corrente ha una deviazione ΔI_N , la tensione diventa:

$$U_N = U_N^0 + Z_{eq}\Delta I_N = U_N^0 + Z_{eq}(\Delta I'_N + j\Delta I''_N). \quad (2.3.3)$$

Le variazioni di corrente attiva e reattiva sono espresse come:

$$\Delta I'_N = \left[R_{eq} (U'_{ref} - U_N^0) + X_{eq} U''_{ref} \right] / Z_{eq}^2, \quad (2.3.4)$$

$$\Delta I''_N = \left[R_{eq} U''_{ref} - X_{eq} (U'_{ref} - U_N^0) \right] / Z_{eq}^2. \quad (2.3.5)$$

Un controllo ottimale della corrente produce come effetto positivo la diminuzione delle perdite di distribuzione e la stabilizzazione della tensione nell'intera rete.

Ecco perché l'analisi pone particolare enfasi su queste considerazioni.

Per ottenere valori di tensione al nodo N vicini all'ottimo U_N^{opt} si sfruttano le variazioni delle correnti.

Nella pratica però solamente la variazione di corrente reattiva $\Delta I''_N$ può essere scelta in maniera indipendente, mentre $\Delta I'_N$ deve soddisfare le condizioni sui flussi di potenza richiesti.

Si è parlato dell'importanza di ottimizzare il controllo, tuttavia per perseguire tale scopo sono necessari alcuni presupposti:

- è necessario conoscere la struttura della rete, dunque i nodi vicini devono essere identificati e la loro distanza deve essere misurata,
- sono necessari protocolli di comunicazione per lo scambio di informazioni e dati sulle misurazioni di tensione tra i nodi adiacenti.

Per soddisfare tali condizioni è necessario che:

- tutti i nodi attivi della rete siano dotati di PLC,
- ogni nodo deve essere univocamente riconoscibile. Ad esempio può essere utilizzato un codice che rappresenta l'indirizzo del dispositivo. Il paragone che nasce inevitabilmente con le reti di computer offre efficacemente una possibile risoluzione.

Fondamentale importanza dunque assume la procedura di mappatura della rete, corpo centrale di questa tesi.

L'identificazione dei vicini di un nodo in tempo reale avviene secondo due fasi:

1. il nodo in fase di controllo spedisce una richiesta di informazioni tramite PLC e riceve una serie di risposte. Analizzando le repliche, salva l'indirizzo del mittente in memoria. Tutti i nodi che rispondono alla richiesta sono detti corrispondenti;
2. allo stesso tempo grazie alla tecnica di ranging vengono stimate anche le distanze tra i nodi attivi sulla rete. Associando la distanza al rispettivo indirizzo viene così costruita una tabella che descrive la rete in quel particolare istante.

Grazie alla tabella costruita con la modalità presentata si ottengono informazioni importanti sulla struttura della rete. Proprio queste saranno la base di partenza per il problema di mapping di una smart grid.

Tuttavia per caratterizzarne pienamente l'evoluzione queste operazioni devono essere ripetute periodicamente, aggiornando così la tabella complessiva.

2.4 PLC e problematiche

Diversamente dalle altre tecnologie trasmissive basate sull'utilizzo di cavi coassiali, fibre ottiche o doppini telefonici, le PLC forniscono una tecnologia per la trasmissione di dati sfruttando la rete elettrica come mezzo trasmissivo.

La comunicazione si realizza sovrapponendo al trasporto comune di corrente elettrica a bassa frequenza un segnale a frequenza più elevata che, tramite opportuna modulazione porta l'informazione desiderata.

La separazione delle due funzionalità avviene poi tramite l'utilizzo di appositi filtri.

In realtà la nascita di questa tecnologia non è legata allo sviluppo recente

delle smart grid, ma in passato è stata utilizzata in diversi ambiti. Ad esempio prima dell'introduzione della telefonia mobile, le PLC furono utilizzate nelle trasmissioni con treni in marcia, oppure per il controllo di apparati elettrici tramite la propria rete di alimentazione, o ancora per la lettura dei contatori elettrici in modo remoto. Più recentemente invece è stata utilizzata per dare accesso dati (molto spesso Internet) alle case tramite la rete elettrica, limitando così la necessità di instaurare collegamenti tramite cavi coassiali.

Questa tecnica tuttavia presenta alcune problematiche. In primo luogo i punti di collegamento tra i cavi, o i box di connessione, contribuiscono alla presenza di fenomeni riflessivi che devono essere opportunamente gestiti. Anche la diversa impedenza caratteristica dei cavi di distribuzione fa sì che il percorso tra trasmettitore e ricevitore non sia univoco e diretto, ma subisca echi. Il risultato è quindi uno scenario di tipo multipath fading.

Tuttavia questa non è l'unica problematica riscontrata. Possono nascere interferenze dovute ad altri sistemi di comunicazione che operano sulle stesse frequenze delle PLC. Inoltre il campo elettrico può essere assorbito dai cavi generando fenomeni distorsivi sui segnali trasmessi.

Capitolo 3

Modello del sistema

Fino a questo momento si è parlato di rete elettrica “intelligente”, di alcune sue caratteristiche e peculiarità, ma a livello puramente fisico non è stata fornita alcuna considerazione.

Il tema di questo capitolo sarà la definizione di un modello per una rete elettrica lineare che permetterà di caratterizzare una smart grid [6].

3.1 Struttura

Si consideri una rete elettrica lineare. Grazie a questa assunzione le quantità elettriche si possono pensare nel dominio della frequenza composte da una collezione di K componenti dette armoniche.

La rete sarà composta da due tipologie di sorgenti:

1. una serie di sorgenti di energia rinnovabile (pannelli fotovoltaici, turbine, pale eoliche) chiamate sorgenti locali (local sources, LS) o interfacce elettriche di potenza (Power Electronic Interface, PEI), indicizzate da $m = 1, \dots, M$;
2. una sorgente principale (Main Source, MS) che si allaccia alla rete in un punto di accoppiamento comune (Point of Common Coupling, PCC).

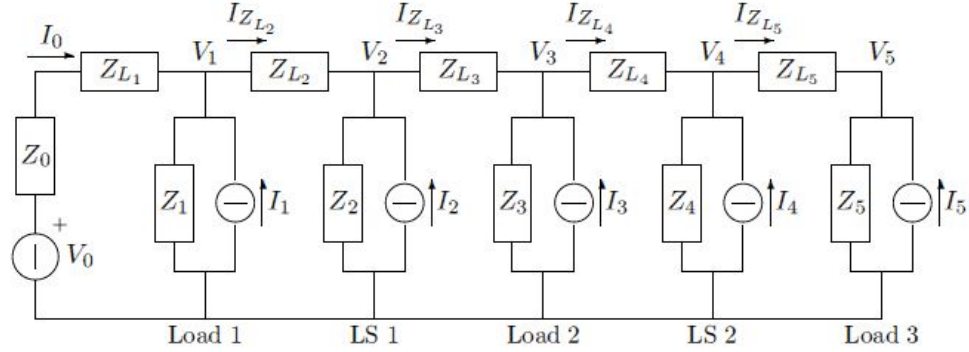


Figura 3.1: Rete con PCC, $M = 2$ sorgenti locali e $L = 3$ carichi.

In Figura 3.1 è riportato un esempio di rete in cui oltre alla presenza della sorgente principale compaiono due sorgenti locali e tre carichi.

Nel modello considerato ciascuna sorgente locale è rappresentata tramite un generatore reale di corrente. Più dettagliatamente è composta dal parallelo tra un generatore ideale di corrente $I_m^{(k)}$ e un'impedenza caratteristica $Z_m^{(k)}$. Sintetizzando il contributo di corrente delle varie sorgenti locali in un unico vettore $I^{(k)}$, si ha:

$$I^{(k)} = [I_1^{(k)}, I_2^{(k)}, \dots, I_M^{(k)}]^T = [I_m^{(k)}]^T \in \mathbb{C}^M, \quad (3.1.1)$$

dove $m = 1, \dots, M$. Considerando invece la matrice di tutte le correnti generate ad ogni frequenza k :

$$I = [I^{(1)T}, I^{(2)T}, \dots, I^{(K)T}]^T \in \mathbb{C}^{MK}. \quad (3.1.2)$$

La MS viene invece modellata come un generatore reale di tensione, ovvero come la serie tra una generatore ideale di tensione e un'impedenza caratteristica.

Oltre alle sorgenti, nella rete sono presenti anche dei carichi (LOADs) che saranno modellati tramite generatori reali di corrente. Anche questi dunque saranno scomposti dal parallelo tra un generatore ideale $I_l^{(k)}$ e un'impedenza

caratteristica $Z_l^{(k)}$. Con $l = 1, \dots, L$.

Raccogliendo le correnti dei generatori ideali dei diversi carichi in un unico vettore risulta:

$$I_L^{(k)} = [I_1^{(k)}, I_2^{(k)}, \dots, I_L^{(k)}]^T = [I_l^{(k)}]^T \in \mathbb{C}^L \quad (3.1.3)$$

3.2 Parametri caratterizzanti

L'obiettivo primario è quello di ottimizzare al massimo l'utilizzo delle sorgenti locali, limitando le perdite sulle linee. La funzione costo da minimizzare dunque dipenderà dalla quantità di corrente (e quindi dalla potenza attiva) iniettata nella rete dalle sorgenti locali.

Ovviamente l'obiettivo di minimizzare la funzione costo dovrà essere perseguito rispettando le richieste di potenza necessarie ai carichi della rete.

Nasce la necessità di definire un modello appropriato della funzione costo, che rappresenti con semplicità le caratteristiche della rete.

Si considerano come incognite per il sistema:

- $I_0^{(k)}$ corrente della sorgente principale
- $V_m^{(k)}$ tensione ai capi dell' m -esima sorgente locale.

Il modello con cui si è deciso di descrivere la rete è lineare, e dunque gode delle proprietà caratterizzanti questa categoria. Ad esempio è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti ottenendo le relazioni:

$$\begin{aligned} I_0^{(k)} &= a^{(k)} I^{(k)} + \alpha^{(k)} \\ V_m^{(k)} &= b_m^{(k)} I^{(k)} + \beta_m^{(k)} \quad , \quad m > 0 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Dove $a^{(k)}$ e $b_m^{(k)}$ sono vettori riga di dimensione M che dipendono dai carichi, dalle impedenze di linea, e dalla topologia della rete.

Gli elementi del vettore $a^{(k)}$ sono adimensionali, mentre quelli del vettore $b_m^{(k)}$ sono espressi in ohm . Le costanti $\alpha^{(k)}$ e $\beta_m^{(k)}$ oltre a dipendere anch'esse dalla topologia della rete, sono soggette anche alle variazioni delle correnti

I_l^k e della tensione della MS $V_0^{(k)}$.

Le unità di misura per queste costanti sono rispettivamente Ampere e Volt. Si può esprimere la potenza attiva generata da ogni sorgente locale alla frequenza k -esima come funzione delle correnti generate:

$$P_m^{(k)} = 2\Re \left[V_m^{(k)} I_m^{(k)*} \right] = I^{(k)H} R_m^{(k)} I^{(k)} + I^{(k)H} p_m^{(k)} + p_m^{(k)H} I^{(k)} + d_m^{(k)}, \quad (3.2.2)$$

dove:

- la matrice $R_m^{(k)}$ è di dimensione $M \times M$,
- il vettore $p_m^{(k)}$ è di dimensione $1 \times M$,
- $d_m^{(k)}$ è una costante scalare,

$$R_m^{(k)} = \begin{cases} 0 & m = 0 \\ e_m^T b_m^{(k)} + b_m^{(k)H} e_m & m > 0 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

$$p_m^{(k)} = \begin{cases} a^{(k)H} V_0^{(k)} & m = 0 \\ e_m^T \beta_m^{(k)} & m > 0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

$$d_m^{(k)} = \begin{cases} 2\Re \left[a^{(k)*} V_0^{(k)} \right] & m = 0 \\ 0 & m > 0, \end{cases} \quad (3.2.5)$$

dove i vettori e_m rappresentano la base canonica.

La potenza attiva per armonica può essere sommata in modo da ottenere la potenza attiva totale generata da ogni LS:

$$P_m = \sum_{k=1}^K P_m^{(k)} \quad m = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (3.2.6)$$

La potenza attiva prodotta dalla sorgente principale MS viene indicata col simbolo P_0 .

Dopo queste considerazioni si può notare dunque come il sistema possa essere descritto completamente sulla base della conoscenza dei vettori $a^{(k)}$ e $b_m^{(k)}$, e delle costanti $\alpha^{(k)}$ e $\beta_m^{(k)}$.

Capitolo 4

Topologia della rete

Conoscere la topologia della rete elettrica è di fondamentale importanza. Anche nell'ambito telefonico o più generalmente nel mondo delle telecomunicazioni moderne conoscere la topologia della rete è un requisito quasi indispensabile.

In particolar modo poi risulta fondamentale ai fini dell'applicazione dei metodi di ottimizzazione vincolati dalla rete, poiché è proprio la topologia di questa ad influenzare la dinamica delle grandezze in gioco.

4.1 Topologia nelle Smart Grid

Nell'ambito delle Smart Grids la struttura della rete ha un peso non indifferente nella scelta della tecnologia da implementare. Infatti come detto precedentemente l'obiettivo è quello di rendere la rete il più intelligente possibile, limitando le perdite di energia sulle linee.

Inoltre sono necessari protocolli di comunicazione, come possono essere le PLC [7], che a loro volta partono proprio dall'analisi topologica della rete per poi trasmettere l'informazione.

Non ultima, la conoscenza delle caratteristiche topologiche e statistiche permette di sviluppare una piattaforma di simulazione in grado di generare un'infinità di casistiche di rete che risultano molto utili nelle applicazioni.

Proprio questa motivazione ha attirato l'attenzione di molti ricercatori che hanno formulato molteplici modelli statistici. Tuttavia molto spesso la struttura della rete è fortemente dipendente dalla tecnologia del paese in cui è presente.

Un altro importante fattore che separa in tre grandi aree la struttura della rete è la tensione che esse trasportano:

- Alta tensione (132 - 220 KV), che comprende la parte di trasmissione su lunga distanza, ovvero le dorsali presenti tra la generazione e la rete di distribuzione;
- Media tensione (5.3 – 30 KV), che comprende la parte della rete di distribuzione che lega le dorsali all'utenza finale;
- Bassa tensione (220 – 380 V), che comprende la parte di distribuzione lato utente finale;

In maniera del tutto generale, all'interno della rete di distribuzione comprendente medie e basse tensioni, si possono trovare diverse topologie:

- radiali;
- ad albero;
- ad anello;
- grafo fortemente connesso;
- grafo sparso.

Reti, o parti di esse tipicamente radiali si incontrano in particolare in zone rurali, in cui esistono lunghe linee con zone di carico isolate e distanti tra loro. Ovviamente, questo tipo di topologia è decisamente la peggiore per i protocolli di comunicazione. Ad esempio con le PLC, per comunicare da una sorgente, ad un destinatario presente nella parte opposta della rete, si dovrebbero per forza attraversare tutti i nodi intermedi.

Nelle zone urbane invece, la topologia della rete cambia. Spesso ci si trova realtà strutturali ad anello, oppure interconnesse. Queste topologie sono più consone nella distribuzione del servizio dove la densità abitativa è elevata.

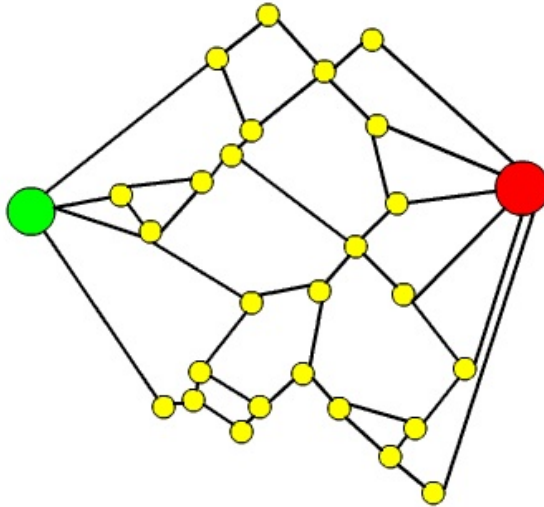


Figura 4.1: Esempio di topologia a grafo parzialmente connesso.

Per la parte a bassa tensione, dove la rete arriva a stretto contatto con l'utenza finale, la struttura predominante è quella ad albero, in cui le foglie rappresentano gli utilizzatori (Figura 4.3).

Lo studio affrontato si focalizzerà maggiormente nel caso della bassa/media tensione, essendo quest'ultima oggetto di molti recenti studi in particolare nel nord America. Qui infatti, a differenza della zona europea, la media tensione possiede una copertura più capillare, arrivando quasi a contatto con l'utenza finale.

4.2 Caratteristiche topologiche

Dal punto di vista topologico dunque la rete di distribuzione si può vedere come un grafo non orientato dotato di L archi e N nodi. Questa topologia

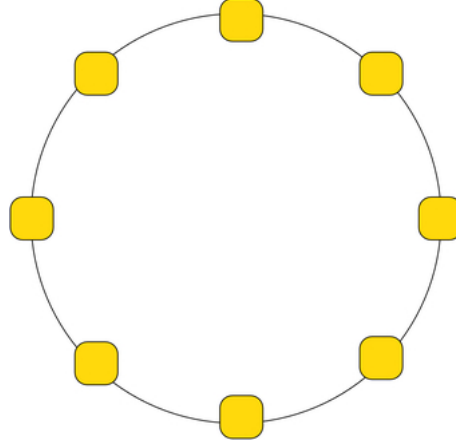


Figura 4.2: Esempio di topologia ad anello.

permette una grossa flessibilità, infatti molti altri tipi di struttura possono essere visti come caso particolare di grafo.

Considerando ora una notazione matriciale, si definisce A matrice di incidenza link-nodi:

$$A : \begin{cases} A(t, i) = 1 & i \in N, t \in L \\ A(t, j) = -1 & j \in N, t \in L \\ A(t, k) = 0 & k \in N, t \in L \quad k \neq i, k \neq j \end{cases} \quad (4.2.1)$$

questa matrice avrà dimensioni $L \times N$.

Partendo da questa definizione si può ottenere una rappresentazione matriciale del grafo calcolando la sua matrice Laplaciana L :

$$L = A^T A \quad (4.2.2)$$

$$L : \begin{cases} A(i, j) = -1 & \text{se esiste il link che lega } i \text{ a } j, \text{ e } i \neq j \\ L(i, j) = k & k = -\sum_{i \neq j} L(i, j), \quad i = j \\ L(i, j) = 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.2.3)$$

con $i, j = 1, \dots, N$. Dove, per evitare incongruenze di notazione, la cardinalità dell'insieme rappresentante i link sarà espressa dalla lettera m .

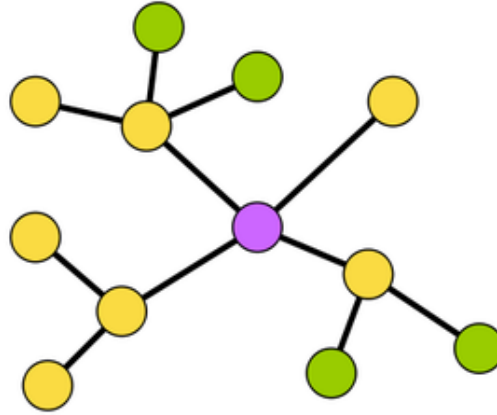


Figura 4.3: Esempio di topologia ad albero.

La matrice L è di fondamentale importanza, poiché da quest'ultima è possibile ricavare le metriche su cui si basa l'analisi. In particolare:

- Il numero di link m della rete:

$$m = \frac{1}{2} \sum_i L(i, i) \quad (4.2.4)$$

- Il grado medio dei nodi \underline{k} della rete, che rappresenta il numero di lati connessi allo stesso nodo. Si ricava dalla matrice Laplaciana come segue:

$$\underline{k} = \frac{1}{N} \sum_i L(i, i). \quad (4.2.5)$$

- La matrice di adiacenza M_{adj} che dipende direttamente da L come segue:

$$M_{adj} = -L + \text{diag}(\hat{k}) \quad \text{dove:} \quad (4.2.6)$$

$$\hat{k} = \text{diag}(L) = [k_1, \dots, k_N].$$

- La densità spettrale $\rho(\lambda)$ del grafo:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i). \quad (4.2.7)$$

in cui λ_i $i = 1, \dots, N$ rappresenta lo spettro del grafo, ovvero l'insieme degli autovalori della sua matrice di adiacenza.

- La connettività algebrica $\lambda_2(L)$ del grafo, facilmente ricavabile in quanto direttamente espressa dal secondo più piccolo autovalore della matrice L .

Altre metriche caratterizzanti la topologia di una rete sono:

- Il grado medio \bar{k} di un nodo selezionato casualmente nella rete:

$$\bar{k} = \frac{1}{2m} \sum_{(i,j)} (k_i + k_j) = \frac{1}{2m} \sum_{(i)} k_i^2, \quad (4.2.8)$$

- Il rapporto $r \{k > \bar{k}\}$, ovvero il rapporto tra il numero di nodi con grado superiore a \bar{k} , e il numero N di nodi della rete

$$r \{k > \bar{k}\} = \frac{\|k_i : k_i > \bar{k}\|_\infty}{N}, \quad (4.2.9)$$

- Il coefficiente di Pearson ρ che rappresenta una misura della correlazione esistente tra i gradi dei diversi nodi della rete

$$\rho = \frac{\sum_{i,j} (k_i - \bar{k})(k_j - \bar{k})}{\sqrt{\sum_{i,j} (k_i - \bar{k})^2 (k_j - \bar{k})^2}}. \quad (4.2.10)$$

Per farsi una idea dei valori che questi parametri possono assumere nei vari casi reali si osservi la tabella sotto riportata.

| | (N, m) | \underline{k} | ρ | $r \{k > \bar{k}\}$ |
|----------|-------------|-----------------|---------|---------------------|
| IEEE-30 | (30,41) | 2.73 | -0.0868 | 0.2333 |
| IEEE-57 | (57,78) | 2.74 | 0.2432 | 0.2105 |
| IEEE-118 | (118,179) | 3.03 | -0.1526 | 0.3051 |
| IEEE-300 | (300,409) | 2.73 | -0.2206 | 0.2367 |
| NYISO | (2935,6567) | 4.47 | 0.4593 | 0.1428 |
| WSCC | (4941,6594) | 2.67 | 0.0035 | 0.2022 |

Caratteristiche topologiche di reti reali del mid-west degli Stati Uniti (IEEE-30, 57, 118), new England (IEE 300), New York (NYISO) ed ovest degli United States (WSCC).

Nella prima colonna compaiono le cardinalità degli insiemi che rappresentano i nodi e gli archi con cui viene modellato il grafo. Via via poi compaiono gli altri parametri presentati.

Particolare importanza assume il grado medio di connettività, in quanto fornisce direttamente importanti considerazioni a livello topologico. Si noti come il valore di \underline{k} non sia direttamente proporzionale alle dimensioni della rete, questo implica che la struttura che meglio la caratterizza sia quella di un grafo sparso.

Il grado di connettività invece ha una stretta dipendenza dalla particolare area geografica in cui opera la rete. Osservando la rete IEEE-300 (300 nodi e 409 links) presente nel New England, si nota come abbia grado di connettività medio inferiore rispetto alla rete IEEE-118 (118 nodi e 179 links) ubicata nel mid-west degli USA, nonostante le dimensioni siano più che doppie.

4.3 Modelli per la rete

Molti ricercatori hanno cercato di trovare un buon modello di rete basato su parametri statistici che fosse coerente alla realtà. Alcuni, ad esempio, cercarono di riportarsi verso una struttura ad anello, mentre altri utilizzarono

una topologia ad albero per studiare la robustezza della rete di distribuzione nei punti critici.

Sotto alcuni aspetti il loro lavoro costituiva un buon modello, ma la topologia della rete ad anello o ad albero non rifletteva completamente il caso di una rete elettrica reale.

Un grande contributo è quello fornito da Watts e Strogatz [8] che per primi introdussero il concetto di small-world network. Una rete con questo tipo di topologia è caratterizzata da una lunghezza media dei percorsi minore (in termini di hop) e un indice di clustering maggiore.

4.3.1 Modello RT-nested-Smallworld

Il modello proposto da Watts e Strogatz non risulta essere perfettamente coerente con la realtà, soprattutto se si considerano reti di distribuzione dell'energia. Infatti, le reti di distribuzione godono di una migliore connettività e scalabilità rispetto alla proposta Small-World.

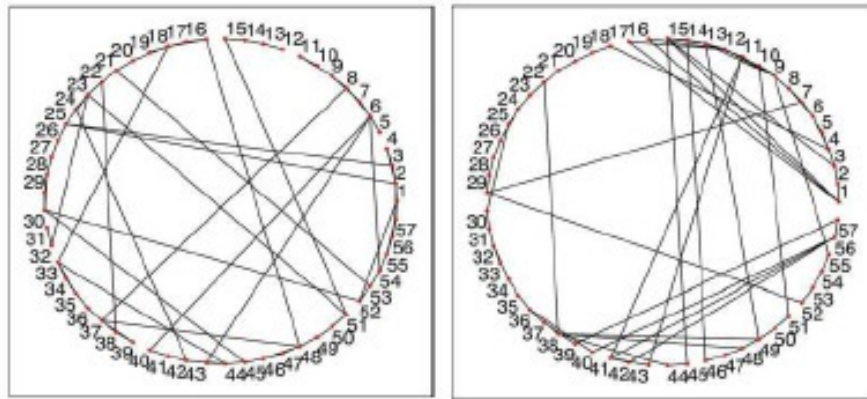


Figura 4.4: Confronto tra topologie di rete casuale. (1, modello Watts-Strogatz), (2, rete reale IEEE-57).

Nasce così l'esigenza di creare un nuovo modello, che sviluppi l'idea di base fin qui vista avvicinandosi con maggior precisione al mondo reale.

RT-nested-SmallWorld [9] ha come idea di base quella di partire generando sottoreti di tipo Small-World, per poi unirle in una struttura ad anello. Le sottoreti create inizialmente sono di dimensione tale da produrre grafi con un coefficiente di connessione molto realistico, e l'operazione finale di collegamento delle sottoreti garantisce una connettività algebrica simile a quella di una rete concreta.

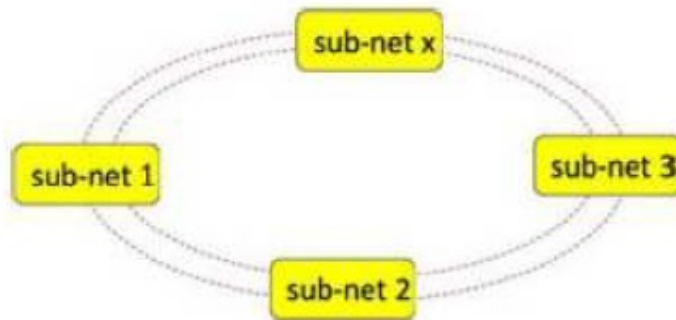


Figura 4.5: Struttura del modello RT-nested-Smalworld.

Ottenuta la topologia cercata, l'operazione successiva è quella di assegnare le impedenze di linea. Questa operazione viene svolta utilizzando parametri e distribuzioni diverse a seconda della rete che si vuole modellare.

Il modello RT-nested-SmallWorld, è stato scelto come base per poter generare reti di test in ambiente Smart Grid. Le principali motivazioni di tale preferenza sono:

- disponibilità di infinite topologie di rete da poter utilizzare.
Con i precedenti modelli infatti spesso la scelta risultava limitata, e dunque nel caso di reti differenti da quelle considerate, l'analisi non

forniva report realistici. Avendo a disposizione una gamma più ampia e variegata invece questo problema non sussiste più;

- struttura gerarchica del modello proposto. Le reti reali, anche se di dimensioni elevate, sono costituite da sottoinsiemi di dimensioni minori tra loro connessi. Questo modello rispecchia pienamente questa considerazione di tipo topologico, e come visto precedentemente la sfrutta nella sua implementazione;
- simulatore veloce ed affidabile.

La generazione della rete con questo modello è composta da tre passi fondamentali:

- generazione dei sottoinsiemi chiamati Cluster-SmallWorld;
- connessione a reticolo dei cluster;
- generazione ed assegnazione delle impedenze di linea ai link della rete.

La generazione dei cluster è una versione rivisitata delle reti Small-World proposte da Watts-Strogatz, ed è composta a sua volta da due fasi: link selection e link rewiring.

La fase di link selection inizia selezionando la dimensione delle sottoreti che si andranno a creare, ovvero il numero di nodi N presenti in ognuna di queste. Prendendo in considerazione un nodo alla volta, si andranno a creare k link che legheranno quest'ultimo ai suoi nodi vicini, dove i nodi sono considerati vicini se la loro distanza risulta essere inferiore ad una certa soglia d_0 .

Il valore k è un numero estratto da una variabile aleatoria geometrica di media \bar{k} , ovvero il grado di connettività medio della rete.

La fase di link rewiring è volta alla creazione dei cross-link all'interno del Cluster-SmallWorld.

Il meccanismo di rewiring si basa sull'utilizzo di una catena di Markov a due

stati, come si può notare dalla Figura 4.6.

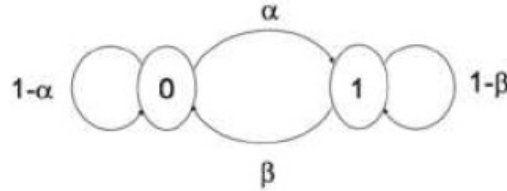


Figura 4.6: Catena di Markov per l'operazione di link rewiring.

La catena compie un numero di passi pari al numero di nodi appartenenti al cluster, e all' n -esimo nodo verrà assegnato lo stato equivalente a quello della catena nell' n -esima iterazione.

Gli stati rappresentano:

- 1 la possibilità di subire azione di rewiring,
- 0 non essere coinvolto in tale operazione.

Si creeranno in questo modo gruppi di nodi nello stato "1", seguiti da gruppi di nodi nello stato "0". È facilmente intuibile che le probabilità di transizione della catena influenzino pesantemente la distribuzione degli stati per i nodi. Per questo motivo i valori assunti da α e β sono:

- $\beta = \frac{1}{K_{clst}}$ con k_{clst} dimensione media dei gruppi nello stato 1
- $\alpha = \frac{\beta p_1}{1-p_1}$ dove p_1 è la probabilità asintotica.

I nodi nello stato "0" dunque rimarranno invariati, mentre i link dei nodi nello stato "1" subiscono l'azione di rewiring con una certa probabilità q_{rw} . L'operazione consiste nello scollegare la destinazione dell'arco appartenente

al nodo con stato unitario, e prevede la ricollocazione di questo in un altro gruppo di nodi il cui stato è “1”.

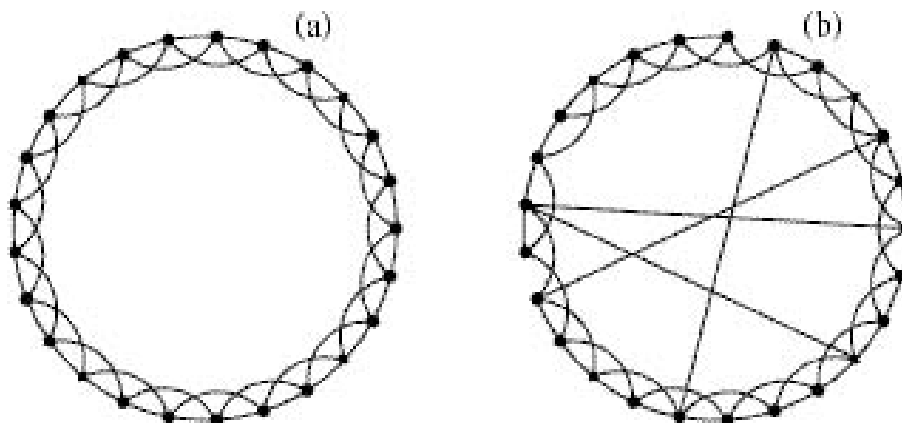


Figura 4.7: Operazione di rewiring.

La parte successiva prevede la connessione in un reticolo dei cluster appena generati. I nodi da connettere sono selezionati casualmente tra le sottoreti vicine.

Infine rimane l'operazione di generazione e assegnazione delle impedenze. Si sceglie una delle possibili distribuzioni (Tabella 4.8), e si procede all'attribuzione dei valori.

Ovviamente i link appartenenti al singolo cluster avranno dimensioni inferiori rispetto a quelli appartenenti alle operazioni di rewiring. Inoltre compaiono anche i link di connessione tra i cluster, che assumeranno lunghezze decisamente superiori.

L'idea è quella di generare m valori di impedenza secondo la distribuzione scelta, ordinarli in modo crescente, e assegnarli ai vari link a seconda del loro gruppo di appartenenza.

| System | Fitting Distribution | ML Parameter Estimates ($\alpha=0.05$) |
|------------|--|--|
| IEEE-30 | $\Gamma(x a, b)$ | $a = 2.14687$ $b = 0.10191$ |
| IEEE-118 | $\Gamma(x a, b)$ | $a = 1.88734$ $b = 0.05856$ |
| IEEE-57 | $gp(x k, \sigma, \theta)$ | $k = 0.33941$ $\sigma = 0.16963$ $\theta = 0.16963,$ |
| IEEE-300 | $gp(x k, \sigma, \theta)$ | $k = 0.45019$ $\sigma = 0.07486$ $\theta = 0.00046,$ |
| NYISO-2935 | $logn_{clip}(x \mu, \sigma, Z_{max})$ | $\mu = -2.37419$ $\sigma = 2.08285$ $Z_{max} = 1.9977$ |
| | $dPIN_{clip}(x \alpha, \beta, \mu, \sigma, Z_{max})$ | $\alpha = 44.25000$ $\beta = 44.30000$ $\mu = -2.37420$ $\sigma = 2.082600$ $Z_{max} = 1.9977$ |

Figura 4.8: Distribuzione dei parametri nelle reti reali.

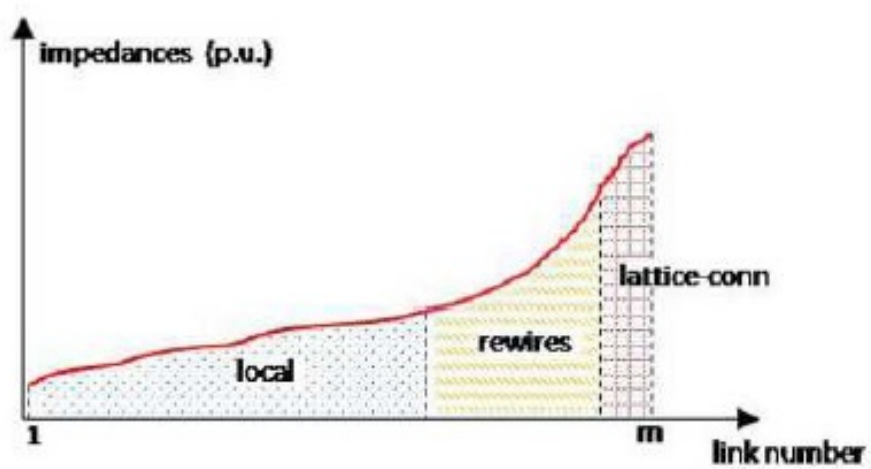


Figura 4.9: Impedenze di linea riordinate in valore a seconda della tipologia del link a cui sono assegnate.

Capitolo 5

Stima della topologia

Si è parlato in precedenza di come la conoscenza della topologia di una rete di distribuzione elettrica possa essere requisito fondamentale per la sua ottimizzazione. Nasce così l'esigenza di poterne avere una buona stima.

5.1 Introduzione all'idea risolutiva

In questo paragrafo sono presentate le operazioni necessarie al fine di ottenere una buona stima della topologia della rete. L'idea risolutiva presentata sinteticamente si può suddividere nei seguenti passi:

- si svolge l'operazione di ranging partendo da tutti i nodi verso tutti gli altri, ottenendo quindi una matrice fortemente connessa rappresentante le distanze;
- partendo da un grafo completamente connesso, si analizzeranno tutti gli archi uno alla volta;
- si cerca di stimare se l'arco preso in considerazione sia effettivamente una connessione diretta col nodo di partenza. In questo caso si tratta di un link realmente esistente;

- se la stima fornisce risultato contrario, ovvero l'arco non rappresenta una connessione diretta col nodo di partenza, questo collegamento non è da considerarsi reale.

Si analizzano ora le operazioni riassunte precedentemente più nel dettaglio.

5.2 Operazione di ranging

Si supponga di svolgere un'operazione di ranging su tutti i nodi della rete, stimando dunque la distanza di un nodo con tutti gli altri, e iterando il procedimento su tutti i nodi.

Da questo momento per semplicità di notazione verranno chiamate *nodi della rete* tutte le sorgenti locali presenti. Il risultato si potrà riassumere in una matrice $N \times N$, dove N è la cardinalità dell'insieme rappresentante i nodi definita come segue

$$D = \begin{bmatrix} \widehat{d}_{1,1} & \cdots & \widehat{d}_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{d}_{N,1} & \cdots & \widehat{d}_{N,N} \end{bmatrix}. \quad (5.2.1)$$

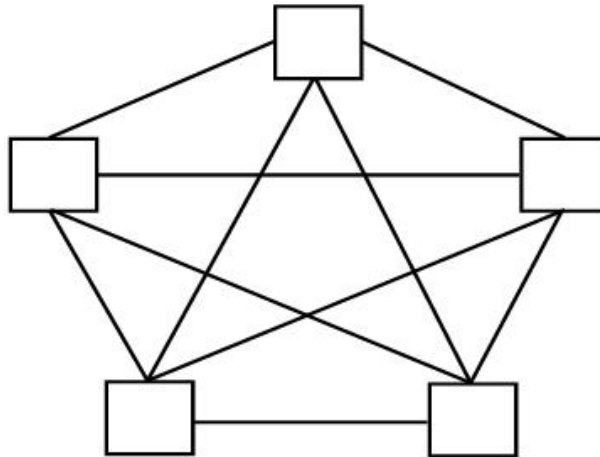


Figura 5.1: Esempio di grafo completamente connesso.

Ognuno di questi valori rappresenta una misurazione che va a stimare la distanza che intercorre dalla sorgente al destinatario. Trattandosi di una misurazione, come è stato descritto nel paragrafo 2.4, il risultato sarà soggetto ad errori.

Le distanze contenute nella matrice dunque avranno una componente rumorosa dovuta alle varie problematiche fisiche che si vengono a creare svolgendo un'operazione di ranging in una rete di distribuzione elettrica.

5.3 Criterio di decisione

Partendo ora dalla matrice D del grafo completamente connesso si cerca di stimare quali siano gli archi effettivamente esistenti nella rete reale e quali invece siano cammini non diretti.

Le lunghezze dei vari cammini $\widehat{d}_{i,j}$ contenute nella matrice possono essere sostanzialmente divise in due categorie:

1. le lunghezze relative ai cammini diretti, che rappresentano un collegamento effettivamente presente nella rete reale;
2. le lunghezze relative ai cammini alternativi, che legano i nodi $i - j$ attraverso più passi, coinvolgendo cioè altri nodi intermedi.

Questi archi rappresentano connessioni fittizie, ovvero non presenti nella realtà.

Fissando un nodo ad esempio, questo sarà realmente connesso solo con alcuni vicini. Tuttavia tramite le operazioni di ranging effettuate precedentemente sono note le distanze che lo legano a tutti gli altri nodi del grafo.

Dunque le distanze che associano il nodo considerato con gli altri nodi non appartenenti all'insieme dei suoi vicini non rappresentano un collegamento effettivo, ma un percorso secondario ottenuto attraversando altri nodi intermedi.

Per meglio comprendere questo passaggio logico si osservi l'esempio in Figura 5.2.

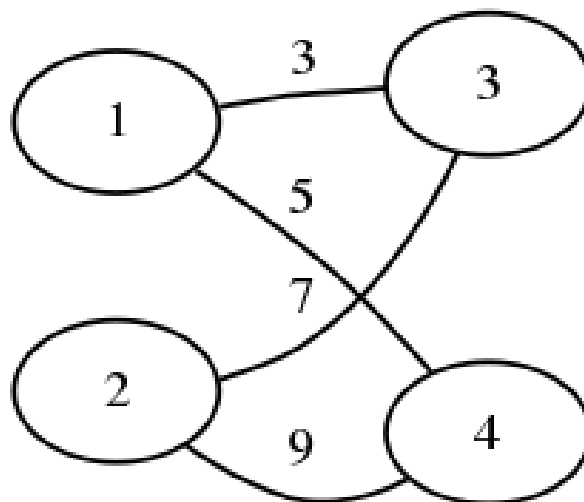


Figura 5.2: Grafo rappresentante la connessione elettrica tra i nodi.

Dopo aver svolto le operazioni di ranging, come detto in precedenza il risultato è una matrice D completamente connessa:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 3 & 5 \\ 10 & 0 & 7 & 9 \\ 3 & 7 & 0 & 8 \\ 5 & 9 & 8 & 0 \end{vmatrix}.$$

Tuttavia come si può osservare non tutte le distanze rappresentano link realmente esistenti. Ad esempio la distanza $\widehat{d}_{1,2}$, che descrive la connessione tra il primo e il secondo nodo, è data in realtà dalla somma di due lunghezze relative a due cammini intermedi che coinvolgono il nodo numero tre.

Come decidere quindi quali distanze siano effettivamente rappresentanti archi diretti, e quali invece da cammini che coinvolgono altri nodi?

I passi fondamentali nel criterio di scelta sono:

- Si prenda in considerazione un arco alla volta $i - j$

- Si consideri la distanza associata presente nella matrice D , ovvero $\widehat{d}_{i,j}$
- Si elimini l'arco $i - j$ dal grafo completamente connesso
- Si calcoli la nuova distanza minima tra i nodi i e j chiamata $\widehat{d}_{i,j}^-$
- Fissato un valore di ε , si decida se l'arco esiste o meno in base alla seguente disequaglianza:

$$\left| \widehat{d}_{i,j}^- - \widehat{d}_{i,j} \right| < \varepsilon \quad (5.3.1)$$

- Se la disequaglianza è verificata significa che il cammino secondario $\widehat{d}_{i,j}^-$ è vicino alla distanza $\widehat{d}_{i,j}$ a meno di un ε , e dunque l'arco che lega i nodi i e j verosimilmente sarà composto da più di un passo. Nella realtà quindi l'arco è da considerarsi non esistente.
- Se invece la disequaglianza non è verificata, significa che il cammino alternativo si differenzia da quello presunto diretto per più della soglia. Dunque con buona probabilità l'arco è effettivamente presente nella rete.

L'idea che sta alla base dell'algoritmo è piuttosto semplice, ma particolare attenzione merita il problema di calcolare il cammino di distanza $\widehat{d}_{i,j}^-$, ovvero la distanza che intercorre tra i due nodi escludendo dalla matrice D l'arco di distanza $\widehat{d}_{i,j}$.

Se la matrice D rappresentasse la distanza effettiva tra i vari componenti della rete basterebbe utilizzare algoritmi di ricerca del cammino minimo su di un grafo per ovviare al problema. Dijkstra, Floyd-Warshall o Bellman-Ford, sono solo alcuni esempi dei più conosciuti metodi di risoluzione.

Tuttavia in questo caso il problema risulta molto più complesso, in quanto la matrice D riporta le distanze ottenute tramite le operazioni di ranging, e quindi corrotte dal rumore.

Le varie distanze $\widehat{d}_{i,j}$ dunque sono percorsi corrotti da rumore, e portano intrinsecamente il contributo delle varie sorgenti di disturbo che caratterizzano sistemi come le PLC.

5.3.1 Problema del cammino minimo in un grafo corrotto da rumore

In letteratura il problema di trovare cammini ottimi in una rete caratterizzata da distanze non deterministiche è stato affrontato con diverse metodologie.

La prima pubblicazione in merito è dovuta a Frank [10], il quale accese l'interesse sull'argomento che fino a quel momento non era mai stato trattato. Infatti precedentemente al suo contributo era stata prestata una grandissima attenzione al calcolo dei cammini minimi su grafi con pesi deterministici, e quindi fissati. Tale impegno ha fornito risultati importanti, alcuni noti a molti come gli algoritmi di Dijkstra e di Floyd, che forniscono una strategia ottima per il calcolo di un cammino minimo tra due nodi della rete.

Tuttavia esiste un'innumerabile serie di varianti che permettono il calcolo del cammino minimo tra tutti i nodi della rete, oppure tra tutte le coppie di nodi che compongono il grafo.

Nessuno però aveva mai prestato attenzione al caso in cui i pesi degli archi componenti la rete fossero variabili aleatorie con una determinata distribuzione di probabilità.

Questa ipotesi non è così remota, anzi, trova spesso legami forti con i casi reali. Il tempo o i costi infatti, nella vita di tutti i giorni possono assumere connotati variabili, e dunque modellabili attraverso distribuzioni di probabilità.

Frank nel suo lavoro cerca di trovare ed esprimere la distribuzione del cammino minimo discriminando i vari casi a seconda della natura delle informazioni statistiche disponibili.

Dal 1968 in poi si susseguirono una serie di pubblicazioni che ripresero lo studio di Frank, spesso cercando di ricondurlo allo specifico caso di interesse.

SPP con pesi multidimensionali

In [11] si riprende il calcolo del cammino minimo in un grafo con costi non

deterministici.

Un percorso sul grafo dunque viene descritto come somma di variabili aleatorie, ciascuna delle quali rappresenta l'arco componente il cammino.

Il problema dello *Shortest Path (SPP)*, in questo caso come in molti altri, è legato alla funzione di utilità che si va a considerare. L'obiettivo dunque è quello di scegliere gli archi del grafo che rispettino il cammino desiderato in modo da massimizzare la funzione di utilità.

Tuttavia l'approccio proposto nel documento si basa sull'eventualità di avere pesi multidimensionali legati agli archi. Ed inoltre, riconduce il caso dello Stochastic-SPP proprio ad un problema di grafo dotato di multidimensional weights.

SSPP con modello Markoviano

Un altro approccio legato allo Stochastic Shortest Path Problem (SSPP) è quello Markoviano, in cui però si trova una differenza concettuale di base. Come si può notare dal documento [12], la stocasticità del problema viene rappresentata tramite una catena di Markov. Per ogni nodo cioè si seleziona una distribuzione di probabilità (da un set prefissato di distribuzioni), verso tutti gli altri vertici del grafo.

Tuttavia questo tipo di orientamento risulta poco efficace al fine della risoluzione del nostro problema.

SPP nelle politiche di instradamento

Come detto in precedenza, la ricerca del cammino minimo su di un grafo dotato di distanze deterministiche è stata abbondantemente studiata, ma nella vita reale in molte occasioni risulta naturale modellare gli archi del grafo come variabili aleatorie.

Di particolare interesse sotto questo punto di vista risulta il contributo fornito da [13].

L'idea è quella di trovare una politica di instradamento per spostarsi dalla sorgente al destinatario minimizzando i costi.

L'esempio ricorrente è quello della rotta ottima per una nave in presenza di incerte condizioni meteo, ma grazie ad alcuni modelli statistici per rappresentare la congestione stradale, può essere ricondotto al più comune routing di una automobile.

Vista la particolare funzionalità per cui si considera lo SSPP, è opportuno differenziare alcuni casi in base alla modalità con cui si viene a conoscenza del costo di un singolo arco:

- si può assumere di essere preventivamente a conoscenza dei parametri che caratterizzano l'arco che si andrà ad attraversare,
- al contrario si possono conoscere i parametri del cammino solo dopo averlo percorso interamente,
- considerando invece una formulazione intermedia, la conoscenza dei parametri avviene progressivamente, via via che gli archi componenti il grafo sono attraversati.

In tutti questi casi comunque si assume che il costo degli archi sia casuale, ma invariante nel tempo.

Tuttavia in [13] si propone come modello per il peso dei cammini una realizzazione del vettore dei costi tratta da un set prefissato e pesato per una certa probabilità. Il caso di costi considerati variabili aleatorie indipendenti dunque viene rilassato al precedente modello.

Particolare importanza assume il caso in cui le lunghezze degli archi componenti il grafo siano variabili aleatorie gaussiane.

Ogni arco dunque risulta caratterizzato da due parametri fondamentali, la media e la varianza.

$$g_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_p}{\sigma_p}\right)^2\right) \quad (5.3.2)$$

SPP che massimizza la funzione utilità

Uno dei modelli in cui l'aleatorietà è rappresentata tramite questa descrizione statistica è quello descritto in [14].

Ogni arco dunque avrà una media μ_{ij} e una varianza σ_{ij}^2 .

La lunghezza di un percorso p tra due nodi del grafo è indicata con c_p e vale:

$$c_p = \sum_{(i,j) \in p} c_{i,j}, \quad (5.3.3)$$

dunque c_p è ancora una variabile aleatoria.

Per stimare il percorso ottimo, gli autori si servono di una funzione lineare a tratti che ha la particolarità di essere concava.

$$\begin{aligned} U(c_p) &= a_{0,i} + a_{1,i}c_p \\ d_{i-1} &\leq c_p \leq d_i \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

U_p dunque come si può notare dalla Figura 5.3 risulta essere composta da k segmenti lineari uniti da breakpoint $0 < d_i < \infty$.

Il problema è dunque quello di calcolare un percorso ottimo che sia in grado di massimizzare la funzione utilità, ovvero:

$$\text{maximize } \{E[U(c_p)] \mid p \in P\}. \quad (5.3.5)$$

Questo approccio risulta essere adatto ad applicazioni onerose, ovvero utili alla risoluzione di problemi di grandi dimensioni. Ciò nonostante, l'idea risolutiva si basa pesantemente sull'aspettazione della funzione di utilità, e dunque riduce notevolmente il campo di utilizzo di tale algoritmo.

SSPP con funzione utilità e modello di rumore gaussiano

In [15] si riprende il modello gaussiano per la descrizione delle lunghezze degli archi. Anche in questo caso il cammino ottimo viene scelto secondo il criterio di massimizzazione di una determinata funzione di utilità.

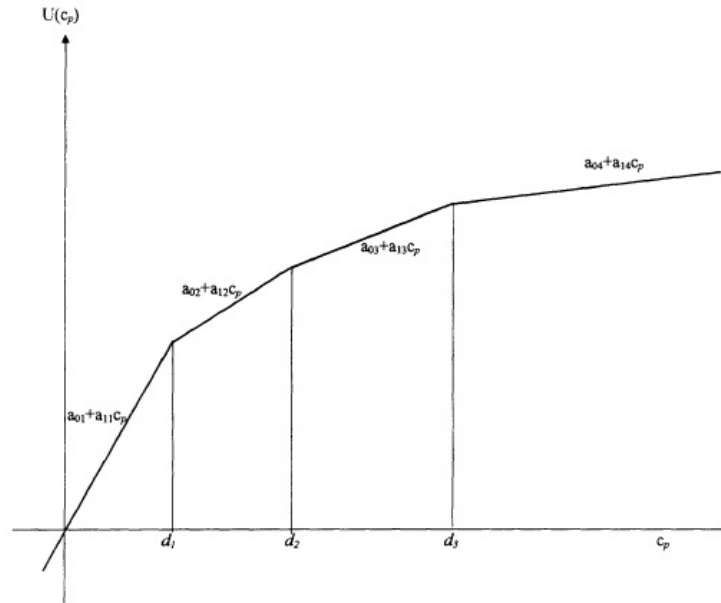


Figura 5.3: Funzione utilità lineare a tratti concava.

Definito con X_{ij} il costo dell'arco che unisce i nodi i e j , la variabile aleatoria X_p che rappresenta il percorso tra due nodi del grafo risulterà:

$$X_p = \sum_{(i,j) \in \epsilon p} X_{i,j}. \quad (5.3.6)$$

Vista la distribuzione normale dei vari archi:

$$X_p \sim N \left(\sum_{(i,j) \in \epsilon p} \mu_{ij}, \sum_{(i,j) \in \epsilon p} \sigma_{ij}^2 \right). \quad (5.3.7)$$

La scelta della funzione di utilità come si può intuire risulta fondamentale per la stima del cammino ottimo.

Gli autori riportano le loro considerazioni proprio in base alle caratteristiche di tale funzione, quadratica, esponenziale, o lineare.

In quest'ultimo caso:

$$U(X_p) : \begin{cases} a - bX_p & X_p \leq d \\ 0 & X_p > d \end{cases} \quad (5.3.8)$$

dove d rappresenta la deadline mentre a e b sono reali. I parametri a, b e d sono tali per cui la funzione è sempre non negativa. Come detto l'idea è quella di massimizzare l'aspettazione di tale funzione dunque:

$$\begin{aligned} E(U(X_p)) &= \int_{\mathfrak{R}} U(x)g_p(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^d (a - bx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_p}{\sigma_p}\right)^2\right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{d - \mu_p}{\sigma_p}} (a - b\sigma_p y - b\mu_p) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \\ &= (a - b\mu_p)P\left(Z \leq \frac{d - \mu_p}{\sigma_p}\right) + b\sigma_p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d - \mu_p}{\sigma_p}\right)^2\right) = \\ &= (a - b\mu_p)G\left(\frac{d - \mu_p}{\sigma_p}\right) + b\sigma_p g\left(\frac{d - \mu_p}{\sigma_p}\right) \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

dove G e g sono la distribuzione e la densità di una variabile aleatoria gaussiana a media nulla e varianza unitaria. Dunque nel caso lineare la soluzione del SSPP è data da:

$$\max_{p \in P} \left[(a - b\mu_p)G\left(\frac{d - \mu_p}{\sigma_p}\right) + b\sigma_p g\left(\frac{d - \mu_p}{\sigma_p}\right) \right]. \quad (5.3.10)$$

Sorge a questo punto una importante considerazione che influisce sulla modalità di risoluzione. Non è detto che il cammino ottimo sia formato da sottocammini anch'essi ottimi. Per conferma a questa affermazione si osservi l'esempio in figura 5.4.

Il cammino ottimo tra il nodo 1 e il 4 è quello che passa direttamente per il nodo 3, in quanto la funzione utilità è massimizzata. Tuttavia osservando il cammino parziale tra il nodo 1 e il nodo 3, si sarebbe intenzionati a prendere la via del ramo di sinistra.

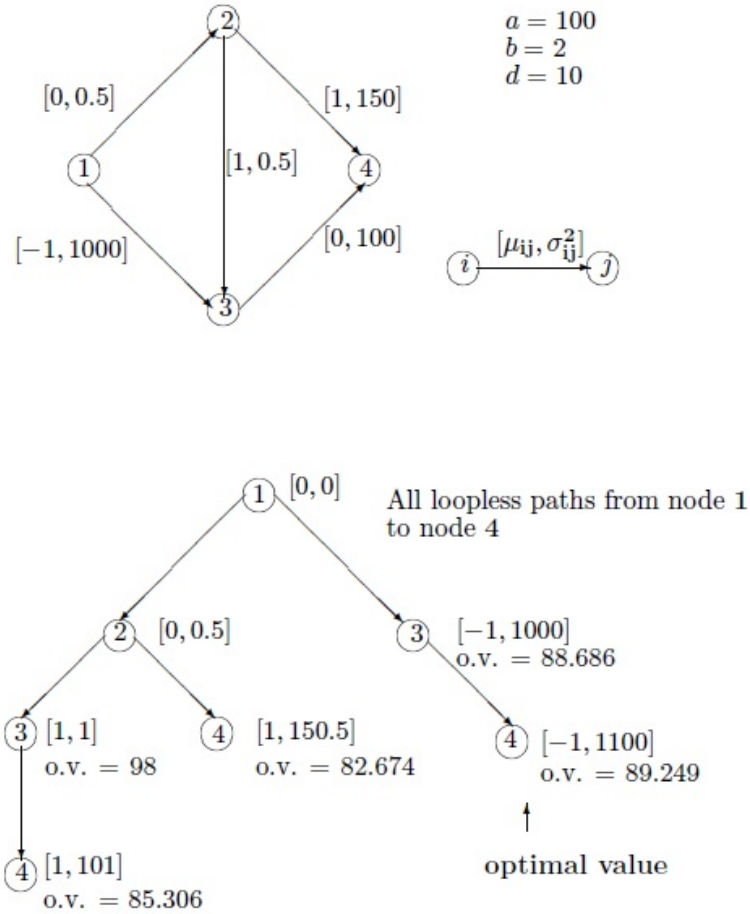


Figura 5.4: Esempio cammini sub-ottimi.

La risoluzione dunque si basa sul seguente approccio:
 si parte realizzando le derivate parziali rispetto a μ e σ^2 .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E(U(X_p))}{\partial \mu_p} &= -bG\left(\frac{d - \mu_p}{\sigma_p}\right) - \frac{a - bd}{\sigma_p} g\left(\frac{d - \mu_p}{\sigma_p}\right) \\
 \frac{\partial E(U(X_p))}{\partial \sigma_p^2} &= \frac{g\left(\frac{d - \mu_p}{\sigma_p}\right)}{2(\sigma_p^2)^{\frac{3}{2}}} [(a - db)\mu_p + b\sigma_p^2 - d(a - bd)].
 \end{aligned}
 \tag{5.3.11}$$

Dato che $a - db \geq 0$ per ipotesi, si nota che:

$$\frac{\partial E(U(X_p))}{\partial \mu_p} \leq 0, \quad (5.3.12)$$

mentre il segno dell'altra derivata parziale dipende da:

$$D(\mu_p, \sigma_p^2) = (a - db)\mu_p + b\sigma_p^2 - d(a - bd). \quad (5.3.13)$$

Se il segno di D risulta negativo, la funzione aspettazione di U è una funzione decrescente. Dunque il problema del cammino ottimo si riconduce a:

$$X_{p^*} \sim N \left(\min \sum_{(i,j) \in p} \mu_{ij}, \min \sum_{(i,j) \in p} \sigma_{ij}^2 \right). \quad (5.3.14)$$

Al contrario se D risultasse positivo:

$$X_{p^*} \sim N \left(\min \sum_{(i,j) \in p} \mu_{ij}, \max \sum_{(i,j) \in p} \sigma_{ij}^2 \right). \quad (5.3.15)$$

Dunque il caso $D = 0$, separa il piano $\mu - \sigma^2$ in due regioni, come illustrato dalla Figura 5.5.

Chiamando p e q due possibili cammini che partendo dalla sorgente raggiungono il destinatario considerato, si può dire che p domina q se:

$$p \preceq q \quad \iff \quad \mu_p \leq \mu_q \wedge \sigma_p^2 \leq \sigma_q^2.$$

Tuttavia considerando la suddivisione dello spazio in due si può dire che se tutti i percorsi addizionali di un nodo i appartenente a P appartengono alla regione uno, allora p_{si} domina q_{si} se e solo se:

$$\mu_{p_{si}} \leq \mu_{q_{si}} \wedge \sigma_{p_{si}}^2 \geq \sigma_{q_{si}}^2$$

mentre se p_{si} e q_{si} appartengono alla regione due, p_{si} domina q_{si} se e solo se:

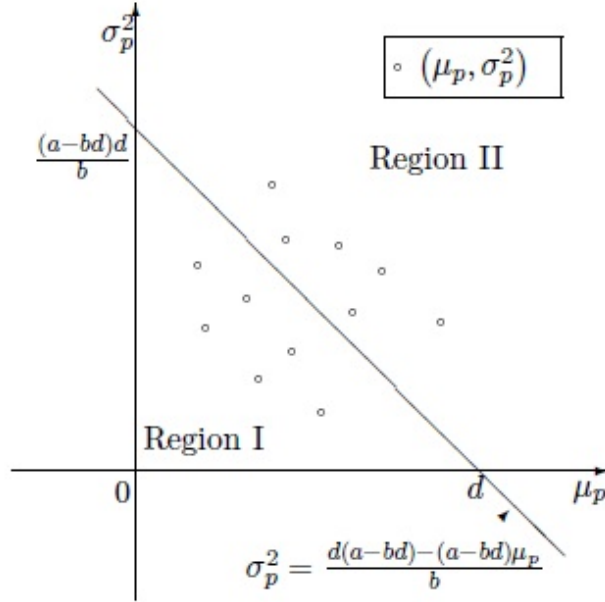


Figura 5.5: Piano $\mu_p - \sigma_p^2$.

$$\mu_{p_{si}} \leq \mu_{q_{si}} \wedge \sigma_{p_{si}}^2 \leq \sigma_{q_{si}}^2.$$

La soluzione ottima alla fine è quella che soddisfa il principio di ottimalità in entrambe le regioni.

Per ottenere tale soluzione dunque:

1. si calcolano tutte le soluzioni non dominate della regione I ;
2. si calcolano tutte le soluzioni non dominate della regione II ;
3. tra queste si sceglie quella tale che X_p massimizza

$$\left\{ (a - b\mu_p)G\left(\frac{d - \mu_p}{\sigma_p}\right) + b\sigma_p g\left(\frac{d - \mu_p}{\sigma_p}\right) \right\}.$$

Mapping di un grafo aleatorio in uno deterministico

Particolare interesse desta il contributo riportato in [16]. Gli autori propongono un approccio innovativo rispetto alla letteratura corrente, per risolvere il problema del cammino minimo in un grafo con distanze non deterministiche.

Il loro lavoro risulta applicabile anche nel caso si utilizzi una generica distribuzione per le misure di distanza, tuttavia focalizzano le osservazioni sul caso gaussiano. Considerando un generico percorso sul grafo, esso sarà composto da una somma di archi, dunque da una somma di variabili aleatorie. L'obiettivo è quello di minimizzare una funzione costo, espressa come $\mu_p + \Phi(\sigma_p^2)$, dove Φ è una funzione arbitraria.

Ad esempio nel caso di distribuzione gaussiana Φ può essere espressa come $\Phi(x) = 3\sqrt{x}$, in quanto è noto che per le variabili aleatorie normali sussiste la proprietà:

$$P(|L_p - \mu_p| \leq 3\sigma_p) > 0.99. \quad (5.3.16)$$

Come detto in precedenza l'idea proposta risulta essere innovativa, dato che si propone di espandere il grafo originale di partenza in un uno di dimensioni maggiori. Di seguito verranno presentate le modalità con cui procedere in tale operazione.

Si definisce X_e arco generico del grafo, con media μ_e e varianza σ_e^2 . Dunque, vista l'indipendenza delle distribuzioni dei pesi:

$$\mu_p = \sum_{e \in P} \mu_e, \quad \sigma_p^2 = \sum_{e \in P} \sigma_e^2. \quad (5.3.17)$$

Se la funzione costo avesse la forma $\mu_p + k\sigma_p^2$, il problema si potrebbe risolvere con maggior facilità, ma questo approccio non si può utilizzare con $\mu_p + \Phi(\sigma_p^2)$ dato che

$$\Phi(\sigma_p^2) \neq \sum_{e \in P} \Phi(\sigma_e^2). \quad (5.3.18)$$

Il fatto che questa funzione non goda della proprietà additiva viene meglio

percepito se si considera l'analisi precedentemente dimostrata che i sottocammini del cammino ottimo non è detto siano anch'essi ottimi.

Il grafo espanso dovrà avere la proprietà di essere deterministico, quindi le lunghezze caratterizzanti i suoi archi saranno fissate. In questo tipo di struttura dunque, risulterà facile implementare algoritmi come Dijkstra per il calcolo del cammino minimo.

Ma come è possibile mappare un grafo aleatorio in uno deterministico? E sotto quali condizioni?

La condizione più stringente in questo tipo di approccio risulta sicuramente la necessità di avere una varianza per i pesi intera. Nel caso in cui questa condizione salti, è possibile utilizzare operazioni di discretizzazione. Le operazioni per l'espansione della rete di partenza si dividono in tre casi:

- Si consideri per primo il nodo sorgente. Come si può notare in Figura 5.6 per ogni arco che lega la sorgente ad un nodo a nel grafo originario, esisterà il corrispondente nel grafo espanso. Questo arco avrà lunghezza pari alla media del cammino originale, e legherà la sorgente s all'arco a_i in cui $i = \sigma_e^2$.

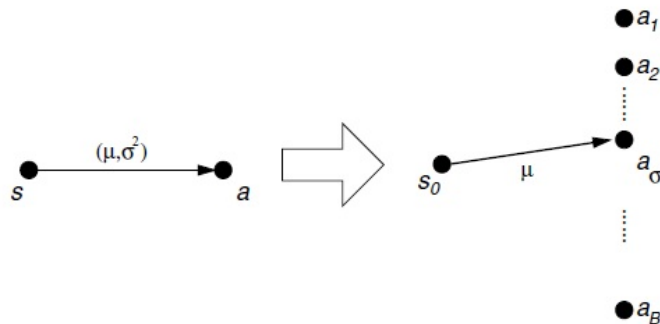


Figura 5.6: Modalità di espansione del nodo sorgente.

- Si consideri poi un generico arco $e = (u, v)$ con $u \neq s$ e $v \neq s$. I nodi della rete originale u e v nel grafo modificato saranno moltiplicati

generando una serie di nodi di indice i e j che verranno legati tra loro da archi di peso μ solo se soddisferanno la seguente uguaglianza. Come si può notare anche dalla Figura 5.7 gli archi creati nel nuovo grafo non si intrecciano tra loro.

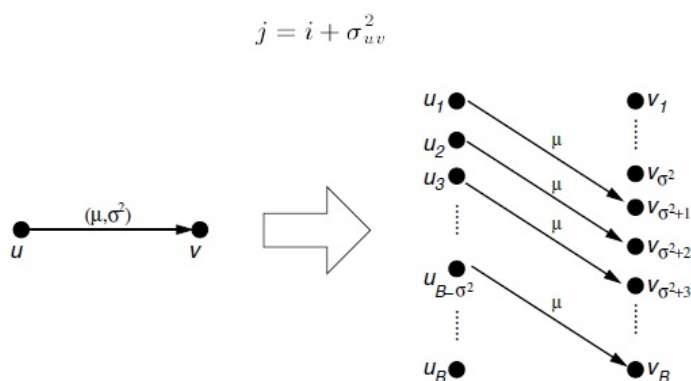


Figura 5.7: Operazioni per un generico arco.

- L'ultimo caso è quello dedicato al nodo destinatario. Nel grafo espanso comparirà ancora una volta, corredato però precedentemente da un nuovo set di nodi, la cui utilità è quella di mappare il contributo dato dalla funzione Φ . Ognuno di questi nuovi cammini introdotti infatti rappresenterà il valore della funzione Φ per quel determinato valore di σ^2 .

Per facilitare la comprensione di questa procedura si osservi il seguente esempio in Figura 5.8.

Si considerino i pesi degli archi come variabili aleatorie gaussiane, dotate dunque di una certa media e una varianza. Come detto la varianza deve essere necessariamente intera.

Si possono notare le operazioni di splitting dei nodi interni, e successivamente la creazione dei nodi collegati al destinatario t che mappano la funzione $\Phi = 3\sqrt{\sigma}$.

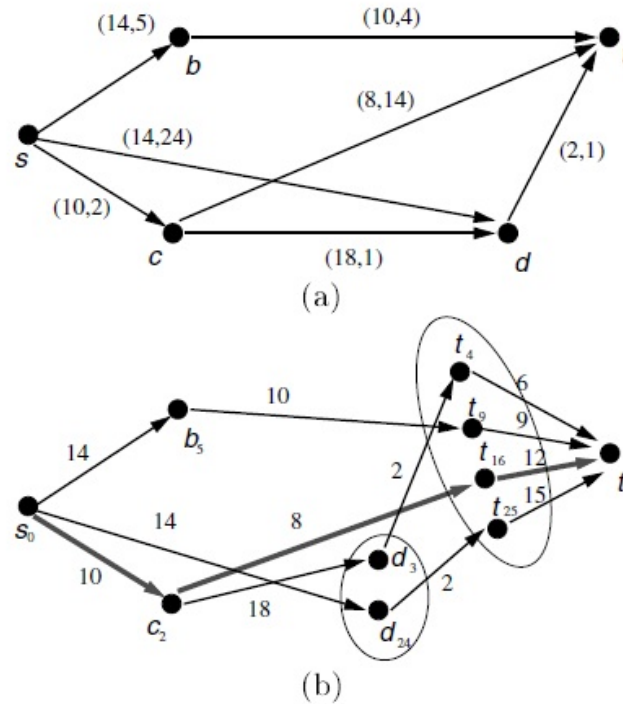


Figura 5.8: Operazioni per il nodo destinatario.

Questo metodo propone di mappare l'aleatorietà della rete iniziale cambiando la topologia del grafo, in modo tale da renderlo deterministico e dunque facilmente manipolabile. Nascono però difficoltà implementative, in quanto non solo servirebbe discretizzare le varianze per poterlo applicare, ma il numero di operazioni da compiere inizierebbe a diventare troppo oneroso. Si pensi ad esempio a quante operazioni di splitting sarebbero necessarie in una rete mediamente complessa.

SPP e moltiplicatori di Lagrange

A dimostrazione del fatto che questo tipo di problema riscontra applicazioni in molti casi reali, il lavoro presentato in [17], descrive come il cammino mi-

nimo in un grafo non deterministico risulti utile nella progettazione di chip, in particolare per la gestione dei gradienti di temperatura.

Come nei casi precedenti ogni arco viene modellato come una variabile alea-

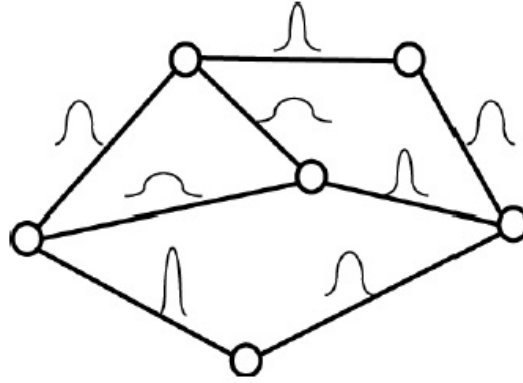


Figura 5.9: Aleatorietà in un grafo.

toria, dunque l'obiettivo è quello di minimizzare la funzione costo qui rappresentata come $\min(\mu_p + k\sigma_p)$. Spesso ci si riconduce al caso gaussiano, in cui per i motivi citati precedentemente $k = 3$. La soluzione al problema del cammino minimo deve essere dunque ricercata tra i possibili percorsi lungo il grafo che legano la sorgente al destinatario. Spesso l'insieme dei cammini candidati risulta corposo, e quindi può essere utile introdurre alcuni vincoli per limitarne la cardinalità.

Ad esempio si consideri il problema

$$p^* = \left\{ \min_p \mu_p \quad \text{subject to } \sigma_p^2 \leq B \right\} \quad (5.3.19)$$

dove:

$$\begin{aligned} \mu_p &= \sum_{i \in P} \mu_i, & \sigma_p^2 &= \sum_{i \in P} \sigma_i^2, \\ P &= \text{percorso sorgente-destinatario} \\ \min_p \sigma_p^2 &< B \leq \max_p \sigma_p^2 + \epsilon \quad \text{per piccoli } \epsilon \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

Come si nota il valore B viene fatto variare tra i bound riportati. Ovviamente in base al valore assunto da B , la soluzione del problema vincolato cambia. Tuttavia potrebbero esserci casi in cui si ottiene lo stesso path ottimo. Per eliminare la ridondanza, al passo successivo il valore di B verrà settato in modo da escludere tale percorso dai possibili candidati.

Un altro metodo per la risoluzione dello SSPP è quello basato sui moltiplicatori di Lagrange.

La funzione costo diventa $\mu_p + \lambda(\sigma_p^2 - B)$, dove λ è il moltiplicatore di Lagrange, e si ottiene

$$L(\lambda) = \min \{ \mu_p + \lambda(\sigma_p^2 - B) \} \quad \text{per } p \in P, \lambda \geq 0. \quad (5.3.21)$$

Il problema coi moltiplicatori di Lagrange dunque è il duale del problema con i vincoli visto prima.

La soluzione trovata tramite questo metodo g^* fornirà un lower bound della soluzione ottima relativa al problema primario p^* .

$$g^* = \max_{\lambda \geq 0} L(\lambda) = \max_{\lambda \geq 0} \min \{ \mu_p + \lambda(\sigma_p^2 - B) \} \quad \text{per il path } P \quad (5.3.22)$$

$$\max_{\lambda \geq 0} \min \{ \mu_p + \lambda(\sigma_p^2 - B) \} = g^* \leq p^* = \left\{ \min_p \mu_p \quad \text{subject to } \sigma_p^2 \leq B \right\} \quad (5.3.23)$$

Fissata la costante B , la funzione che rappresenta i costi in ogni arco del grafo sarà dipendente dal solo parametro λ , e dunque la situazione in un generico grafo potrebbe essere quella rappresentata nella Figura 5.10.

Fissato il valore per il moltiplicatore di Lagrange λ poi, sarà possibile calcolare il cammino minimo utilizzando le consuete tecniche previste per un grafo deterministico.

Il risultato finale della soluzione trovata tramite i moltiplicatori di Lagrange formerà una funzione lineare a tratti concava. Tutti i punti della funzione

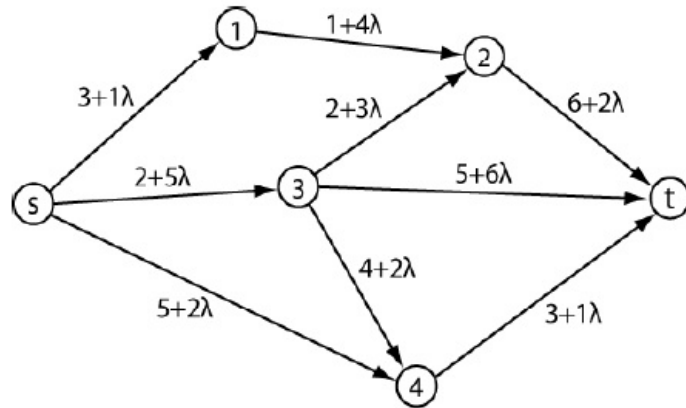


Figura 5.10: Grafo con funzione costo dipendente da λ .

saranno lower bound per la soluzione ottima del problema originale.

La relazione che dunque lega il problema duale con quello originario è meglio espressa dalla Figura 5.11.

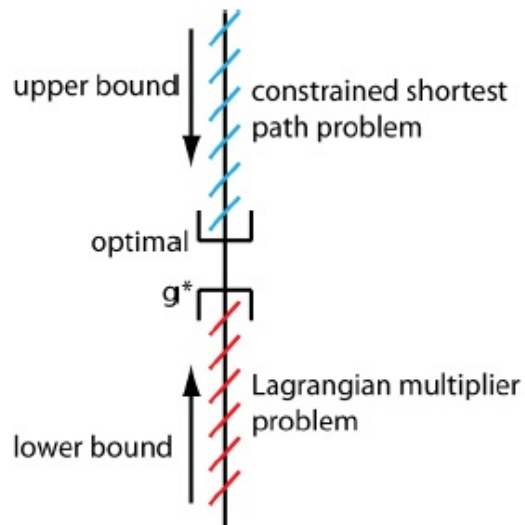


Figura 5.11: Relazione tra le due soluzioni presentate.

Il punto più vicino all'ottimo per il problema duale è ottenuto massimizzando la funzione Lagrangiana.

La risoluzione utilizzando i moltiplicatori di Lagrange porta ad avere una funzione concava, ma non è detto che questa sia necessariamente differenziabile. Per ovviare a tale problema, può essere utile svolgere un'operazione di ottimizzazione basata sul gradiente. In altre parole si cerca di muoversi dove la derivata direzionale della funzione risulta positiva.

Commenti finali

Il problema del cammino minimo in una rete non deterministica, o corrotta da rumore, trova riscontri nei più disparati ambiti della vita quotidiana: dalla rotta delle navi, alla gestione del gradiente di temperatura in un chip. Tutte queste metodologie presentate hanno fornito la base per cominciare a intuire quali siano le principali complicazioni che si incontrano nell'affrontare problematiche di questo tipo.

Tuttavia l'obiettivo di questa tesi è quello di stimare l'effettiva presenza o meno di un collegamento diretto tra due sorgenti. Si tratta dunque di analizzare una particolare istanza del problema, e su questa decidere se considerare reale o fittizio un link.

Nelle metodologie presentate invece si analizza la soluzione al problema globale del cammino minimo su di un grafo corrotto da rumore. Quindi ai fini dello sviluppo dell'idea risolutiva presentata queste soluzioni non possono essere adottate.

Capitolo 6

Algoritmo per la stima della topologia

Alla luce di queste nuove considerazioni l'idea risolutiva per la stima della corretta topologia della rete presentata precedentemente, può ora essere descritta nel dettaglio.

Per comodità sono riportati i passaggi fondamentali:

- Si prenda in considerazione un arco alla volta $i - j$
- Si consideri la distanza associata presente nella matrice D , ovvero $\widehat{d}_{i,j}$
- Si elimini l'arco $i - j$ dal grafo completamente connesso
- Si calcoli la nuova distanza minima tra i nodi i e j chiamata $\widehat{d}_{i,j}$
- Fissato un valore di ϵ , si decida se l'arco esiste o meno in base alla seguente disequaglianza:

$$\left| \widehat{d}_{i,j} - \widehat{d}_{i,j} \right| < \epsilon \quad (6.0.1)$$

- Se la disequaglianza è verificata significa che il cammino secondario $\widehat{d}_{i,j}$ è vicino alla distanza $\widehat{d}_{i,j}$ a meno di un ϵ , e dunque l'arco che lega

i nodi i e j verosimilmente sarà composto da più di un passo. Nella realtà quindi l'arco è da considerarsi non esistente.

- Se invece la disequaglianza non è verificata, significa che il cammino alternativo si differenzia da quello presunto diretto per più della soglia. Dunque con buona probabilità l'arco è effettivamente presente nella rete.

Rimangono ancora due interrogativi:

1. come gestire il rumore che corrompe le misure di distanza sulla rete;
2. quali valori deve assumere la soglia di decisione ε .

La soglia di decisione ε assume un ruolo di fondamentale importanza al fine del corretto funzionamento dell'algoritmo. Infatti, ogni arco del grafo fortemente connesso viene analizzato, e in base alla costante ε , viene ritenuto esistente o viceversa scartato.

Assegnare alla soglia valori troppo bassi significherebbe non rispettare quasi mai la disequaglianza, e quindi decidere spesso per l'esistenza dell'arco. Questo porterebbe ad una potatura degli archi del grafo totalmente connesso troppo leggera, e dunque non veritiera.

Al contrario, assegnando a ε valori troppo elevati, la disequaglianza verrebbe molto spesso rispettata, producendo come effetto collaterale un grafo sparso non rispecchiante la realtà.

Per trovare una soglia ottima e non incorrere dunque in queste problematiche si calcolano le probabilità di False Alarm e di Miss Detection. Ovvero:

- la probabilità di False Alarm è la probabilità di considerare vero un arco dato che questo nella rete reale non esiste.
- La probabilità di Miss Detection è la probabilità di considerare fittizio un arco che nella realtà invece esiste.

Per gestire invece la presenza del rumore si è deciso di modellarlo principalmente con due soluzioni:

1. rumore gaussiano bianco;
2. rumore Gaussian Mixture.

6.1 Modello di rumore gaussiano bianco

Definizioni preliminari

Per permettere una maggior comprensione del testo si consideri la seguente notazione:

$\widehat{d}_{i,j}$ distanza misurata tra i nodi i e j

$\widehat{d}_{i,j}^-$ distanza misurata escludendo l'arco $i - j$ dal grafo

Queste distanze sono in realtà il risultato di una misura, dunque saranno composte dalla lunghezza effettiva, corrotta da rumore.

Questo perché le misurazioni introducono una componente di disturbo, che va a sporcare la distanza effettiva.

In questo caso il rumore viene modellato come gaussiano bianco e nei calcoli presentati si considera solamente il cammino minimo sulla rete rumorosa.

Si può dunque scrivere:

$$\widehat{d}_{i,j} = d_{i,j} + w_{i,j}$$

Con $d_{i,j}$ lunghezza effettiva del cammino, e $w_{i,j}$ rumore gaussiano bianco che sintetizza le imprecisioni di calcolo.

Allo stesso modo anche le distanze misurate senza considerare l'arco possono essere scomposte:

$$\widehat{d}_{i,j} = d_{i,j} + w_{i,j}$$

$\widehat{d}_{i,j}$ è una variabile aleatoria gaussiana con media $m_{i,j}$ e varianza $\sigma_{i,j}^2$

$\widehat{d}_{\bar{i},\bar{j}}$ è una variabile aleatoria gaussiana con media $m_{\bar{i},\bar{j}}$ e varianza $\sigma_{\bar{i},\bar{j}}^2$

Considerando la differenza tra queste due variabili:

$$D = \widehat{d}_{\bar{i},\bar{j}} - \widehat{d}_{i,j}$$

Essendo la differenza tra due variabili aleatorie normali, il risultato è ancora una variabile aleatoria gaussiana di parametri:

$$m_D = m_{\bar{i},\bar{j}} - m_{i,j}$$

$$\sigma_D^2 = \sigma_{\bar{i},\bar{j}}^2 + \sigma_{i,j}^2,$$

ovvero la media sarà data dalla differenza delle due medie, mentre la varianza globale sarà la somma delle varianze.

6.1.1 Calcolo delle probabilità

False Alarm

Come detto in precedenza uno dei parametri utili per la stima che si è interessati ad effettuare è il calcolo della probabilità di False Alarm.

Si tratta della probabilità di considerare vero un arco del grafo quando questo in realtà non esiste. In particolare quindi si cerca di stimare la probabilità di ritenere effettivo un collegamento elettrico tra due componenti della rete, dato che questo non è esistente.

Si procede con il calcolo della probabilità di False Alarm:

$$\begin{aligned}
 P_{FA} &= P[\text{CONSIDERARE VERO UN ARCO} \mid \text{NON ESISTE}] = \\
 &= P \left[\left| \widehat{d_{i,j}^-} - \widehat{d_{i,j}} \right| > \varepsilon \mid d_{i,j}^- = d_{i,j} \right] = \\
 &= P \left[\left| d_{i,j}^- + w_{i,j}^- - d_{i,j} - w_{i,j} \right| > \varepsilon \mid d_{i,j}^- = d_{i,j} \right] = \\
 &= P \left[\left| w_{i,j}^- - w_{i,j} \right| > \varepsilon \right] = \quad \left(\text{Si definisce } D = w_{i,j}^- - w_{i,j} \right) \\
 &= P[|D| > \varepsilon]
 \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

D risulta essere una v.a. normale con media $m_D = 0$ e varianza $\sigma_D^2 = \sigma_{i,j}^2 + \sigma_{i,j}^2$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow P[|D| > \varepsilon] &= P \left[\left| \frac{D}{\sigma_D} \right| > \frac{\varepsilon}{\sigma_D} \right] = 2Q \left(\frac{\varepsilon}{\sigma_D} \right) = \\
 &= 2Q \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma_{i,j}^2 + \sigma_{i,j}^2}} \right).
 \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Miss Detection

Il calcolo della probabilità di Miss Detection risulta essere complementare rispetto a quello appena visto per il caso di False Alarm.

Questa probabilità infatti risulta essere la probabilità di considerare fittizio un arco che nella realtà però esiste.

Nella stima della rete quindi è legata all'evento di presumere inesistente un collegamento diretto tra due nodi, che invece era effettivamente presente.

Procedendo con il calcolo della probabilità di Miss Detection:

$$\begin{aligned}
P_{MD} &= P[\text{CONSIDERARE FITTIZIO UN ARCO} \mid \text{ESISTE IN REALTA'}] = \\
&= P \left[\left| \widehat{d_{i,j}} - \widehat{d_{i,j}} \right| < \varepsilon \mid d_{i,j} \neq d_{i,j} \right] = \\
&= P \left[\left| d_{i,j} + w_{i,j} - d_{i,j} - w_{i,j} \right| < \varepsilon \mid d_{i,j} \neq d_{i,j} \right] =
\end{aligned} \tag{6.1.3}$$

$$(D = d_{i,j} + w_{i,j} - d_{i,j} - w_{i,j})$$

si tratta ancora di una variabile aleatoria gaussiana di parametri:

$$m_D = d_{i,j} - d_{i,j}$$

$$\sigma_D^2 = \sigma_{i,j}^2 + \sigma_{i,j}^2$$

Dato che la condizione è $d_{i,j} \neq d_{i,j}$ allora D non ha media nulla. Si ha dunque

$$\begin{aligned}
P_{MD} &= P[|D| < \varepsilon] = P[-\varepsilon < D < \varepsilon] = \\
&= P \left[\frac{-\varepsilon - m_D}{\sigma_D} < \frac{D - m_D}{\sigma_D} < \frac{\varepsilon - m_D}{\sigma_D} \right] \\
&= Q \left(\frac{m_D - \varepsilon}{\sigma_D} \right) - Q \left(\frac{m_D + \varepsilon}{\sigma_D} \right) = \\
&= Q \left(\frac{d_{i,j} - d_{i,j} - \varepsilon}{\sqrt{\sigma_{i,j}^2 + \sigma_{i,j}^2}} \right) - Q \left(\frac{d_{i,j} - d_{i,j} + \varepsilon}{\sqrt{\sigma_{i,j}^2 + \sigma_{i,j}^2}} \right).
\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

6.1.2 Calcolo della probabilità di identificare un cammino non ottimo

Nel calcolo delle probabilità di Miss Detection e False Alarm finora affrontate, si è trascurato un importante fattore.

Nella soluzione proposta infatti, non si tiene conto del fatto che il cammino minimo trovato sulla rete rumorosa non coincide sempre col cammino minimo calcolato utilizzando le distanze reali. Questo perché realizzazioni diverse di rumore su distanze molto vicine possono portare ad una scelta del cammino non ottimale.

Si veda ora come utilizzare questo concetto per trovare un modello più realistico.

Definizioni preliminari

Si consideri la seguente notazione:

X cammino minimo tra i nodi i e j escludendo l'arco diretto;

Y cammino alternativo che a causa rumore può essere confuso con quello ottimo.

Calcolando la probabilità di assumere il cammino Y come ottimo a discapito dell'effettivo cammino X :

S_1 e S_2 sono gli insiemi degli archi che costituiscono i cammini:

$$S_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \quad \text{legato ad } X$$

$$S_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_h\} \quad \text{legato ad } Y$$

ma questi insiemi di archi non è detto siano disgiunti, anzi, molto spesso può capitare che i due cammini X e Y presi in considerazione differiscano solo per qualche arco.

Un esempio di tale affermazione è riportato in Figura 6.1.

Si consideri allora:

$$S_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} = I \cup C_1$$

$$S_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_h\} = I \cup C_2$$

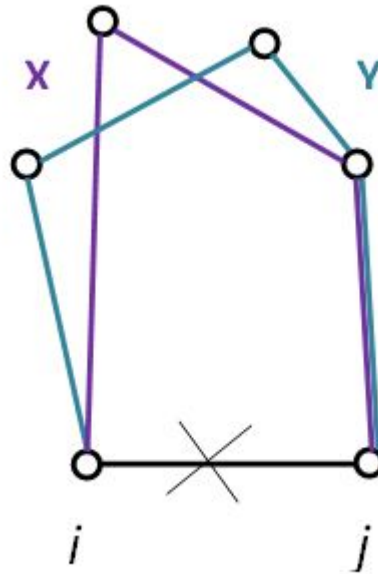


Figura 6.1: Esempio di cammini su grafo

dove sono chiamati I l'insieme intersezione, e C_1, C_2 gli insiemi disgiunti tra loro.

$$S_1 \cap S_2 = I \quad \text{Insieme di archi comuni}$$

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset \quad \text{Insiemi di archi disgiunti}$$

Si vuole calcolare la probabilità di confondere il cammino sub-ottimo Y con quello ottimo X dopo l'effetto del rumore.

In altre parole il calcolo della seguente probabilità:

$$\begin{aligned}
 P_e &= P[X > Y] = P \left[\sum_{S_1} x_i > \sum_{S_2} y_i \right] = \\
 &= P \left[\sum_I x_i + \sum_{C_1} x_i > \sum_I y_i + \sum_{C_2} y_i \right].
 \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

Essendo gli archi appartenenti a I, comuni ai due percorsi, allora per questi vale $x_i = y_i$ e dunque

$$\begin{aligned}
 P_e &= P \left[\sum_I x_i + \sum_{C_1} x_i > \sum_I y_i + \sum_{C_2} y_i \right] = \\
 &= P \left[\sum_I x_i + \sum_{C_1} x_i > \sum_I x_i + \sum_{C_2} y_i \right] = \\
 &= P \left[\sum_{C_1} x_i > \sum_{C_2} y_i \right].
 \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

Nota: gli insiemi C_1 e C_2 non è detto abbiano la stessa cardinalità, in quanto i cammini possono essere formati da un numero differente di passi.

Ogni arco (x_i o y_i) può essere considerato come una variabile aleatoria gaussiana con media pari alla effettiva lunghezza dell'arco non corrotta dal rumore, e varianza pari alla varianza del rumore stesso.

Si definiscono:

$$N_1 = \text{Cardinalità di } C_1$$

$$N_2 = \text{Cardinalità di } C_2$$

$$m_{C_1} = \sum_{C_1} m_{x_i}$$

$$m_{C_2} = \sum_{C_2} m_{y_i}.$$

In questo modo i cammini legati agli insiemi C_1 e C_2 possono essere modellati come variabili aleatorie gaussiane di parametri:

$$\begin{aligned} \text{Media} & \quad m_{C_1} \quad , \quad m_{C_2} \\ \text{Varianza} & \quad N_1 * \sigma_w^2 \quad , \quad N_2 * \sigma_w^2 \end{aligned}$$

dove la variabile σ_w^2 rappresenta la potenza del rumore con cui viene corrotto ogni singolo arco.

Riprendendo la probabilità, si ha

$$\begin{aligned} P_e &= P \left[\sum_{C_1} x_i > \sum_{C_2} y_i \right] = P \left[\sum_{C_1} x_i - \sum_{C_2} y_i > 0 \right] = \\ &= P [D > 0] = P \left[\frac{D - m_D}{\sigma_D} > \frac{m_D}{\sigma_D} \right] = \\ &= P \left[\frac{D - m_D}{\sigma_D} > \frac{m_{C_1} - m_{C_2}}{\sqrt{(N_1 + N_2)\sigma_w^2}} \right] = Q \left(\frac{m_{C_1} - m_{C_2}}{\sqrt{(N_1 + N_2)\sigma_w^2}} \right). \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

Come si può notare dunque, la probabilità di scegliere il cammino in realtà più lungo dipende da più parametri:

- i valori medi,
- N_1 e N_2 , cardinalità degli insiemi di archi disgiunti,
- la σ_w^2 , potenza del rumore .

6.1.3 Calcolo probabilità di False Alarm e Miss Detection sul cammino minimo

Definizioni preliminari

Si consideri la seguente notazione:

X_1 cammino minimo tra i nodi i e j escludendo l'arco diretto;

X_2 cammino alternativo che a causa rumore può essere confuso con quello ottimo;

$\widehat{d}_{i,j}$ distanza misurata tra i nodi i e j ;

$\widehat{d}_{i,j}^-$ distanza misurata escludendo l'arco $i j$ dal grafo.

Queste distanze sono in realtà il risultato di una misura, dunque saranno composte dalla lunghezza effettiva, corrotta da rumore.

Supponendo il rumore gaussiano bianco, si può scrivere:

$$\widehat{d}_{i,j} = d_{i,j} + w_{i,j}, \quad (6.1.8)$$

con $d_{i,j}$ lunghezza effettiva del cammino, e $w_{i,j}$ rumore gaussiano bianco che sintetizza le imprecisioni di calcolo.

Anche considerando il cammino minimo risulta interessante il calcolo delle probabilità di Miss Detection e False Alarm. Essendo il calcolo della probabilità di False Alarm indipendente dalle misure effettive (come visto in precedenza), nel caso del cammino minimo la formula che ne garantisce l'espressione rimane invariata. Ovvero:

$$P_{FA} = 2Q \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma_{i,j}^2 + \sigma_{i,j}^2}} \right). \quad (6.1.9)$$

Si calcoli ora invece la probabilità di Miss Detection considerando il cammino minimo.

Diversamente dal caso precedente sono necessarie ulteriori considerazioni.

$$\begin{aligned}
 P_{MD} &= P[\text{CONSIDERARE FITTIZIO UN ARCO} | \text{ESISTE IN REALTA}] = \\
 &= P \left[\left| \widehat{X}_{min} - \widehat{d}_{i,j} \right| < \varepsilon \mid d_{i,\bar{j}} \neq d_{i,j} \right]
 \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

dato che è stato definito:

$$\widehat{X}_{min} = \min \{ \widehat{X}_1, \widehat{X}_2 \} = \min \{ X_1 + W_1, X_2 + W_2 \}.$$

Riprendendo la probabilità si ottiene

$$\begin{aligned}
 &= P \left[\left| \min \{ X_1 + W_1, X_2 + W_2 \} - \widehat{d}_{i,j} \right| < \varepsilon \right] = \\
 &= P \left[\left| \min \{ X_1 + W_1, X_2 + W_2 \} - \widehat{d}_{i,j} \right| < \varepsilon \mid X_1 + W_1 > X_2 + W_2 \right] \times \\
 &\quad \times P [X_1 + W_1 > X_2 + W_2] + \\
 &+ P \left[\left| \min \{ X_1 + W_1, X_2 + W_2 \} - \widehat{d}_{i,j} \right| < \varepsilon \mid X_1 + W_1 < X_2 + W_2 \right] \times \\
 &\quad \times P [X_1 + W_1 < X_2 + W_2] = \\
 &= P \left[\left| X_2 + W_2 - \widehat{d}_{i,j} \right| < \varepsilon \mid W_2 < X_1 + W_1 - X_2 \right] P [X_1 + W_1 > X_2 + W_2] + \\
 &+ P \left[\left| X_1 + W_1 - \widehat{d}_{i,j} \right| < \varepsilon \mid W_1 < X_2 + W_2 - X_1 \right] P [X_1 + W_1 < X_2 + W_2].
 \end{aligned} \tag{6.1.11}$$

Dunque l'espressione globale per la P_{MD} è composta da più fattori:

- $P [X_1 + W_1 > X_2 + W_2]$ non è altro che la P_e prima calcolata,
- $P [X_1 + W_1 < X_2 + W_2]$ è la sua complementare $1 - P_e$,
- $P \left[\left| X_1 + W_1 - \widehat{d}_{i,j} \right| < \varepsilon \right]$ è la P_{MD} calcolata nel caso base,

- per l'ultimo fattore da stimare invece il calcolo non risulta immediato.

Osservando nel dettaglio:

$$\begin{aligned}
 & P \left[\left| X_2 + W_2 - \widehat{d}_{i,j} \right| < \varepsilon \mid W_2 < X_1 + W_1 - X_2 \right] = \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} P \left[\left| X_2 + W_2 - \widehat{d}_{i,j} \right| < \varepsilon \mid W_2 < X_1 + W_1 - X_2 \right] f_{w_1}(w_1) dw_1 = \\
 & = \int_{w_1} \int_{w_2=0}^{X_1 - X_2 + w_1} f_{w_2}(w_2) P \left[\left| X_2 + W_2 - \widehat{d}_{i,j} \right| < \varepsilon \right] f_{w_1}(w_1) dw_1 dw_2.
 \end{aligned}
 \tag{6.1.12}$$

6.1.4 Calcolo dell'albero minimo

Spesso la topologia della rete elettrica può essere associata ad una struttura ad albero, in cui le foglie sono rappresentate dagli utilizzatori finali. Questo accade frequentemente nelle zone a *bassa tensione*, (Low Voltage; 220 - 380 V), ovvero la parte della rete di distribuzione più vicina all'utente terminale.

Può essere utile dunque osservare la teoria che sta alla base del calcolo dell'albero di costo minimo partendo da un grafo completamente connesso.

Definizioni preliminari

- Grafo non orientato $G = (V, E)$
- Numero di vertici $n = |V|$
- Numero di archi $m = |E|$
- Funzione costo (distanza) associata all'arco e c_e

Presentazione del problema e modello di PLI

Una prima considerazione è legata alla risolubilità di tale problema. La ricerca dell'albero minimo su di un grafo infatti ha soluzione solo se il grafo G è connesso.

Un modello di programmazione lineare per lo *Shortest Spanning Tree*, (*SST*) è il seguente [18]:

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{se } e \text{ viene scelto nell'albero minimo} \\ 0 & \text{altrimenti .} \end{cases}$$

Si può dunque definire il modello:

$$\min \underbrace{\sum_{e \in E} c_e x_e}_{\text{costo totale albero}}$$

$$\underbrace{\sum_{e \in E} x_e}_{\text{n-1 lati scelti}} = n - 1$$

$$\underbrace{\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1}_{\text{condizione di eliminazione cicli}} \quad \forall S \subseteq V : S \neq \emptyset$$

$$x_e \geq 0 \text{ intero, } e \in E$$

L'idea quindi è quella di minimizzare il cammino che unisce tutti i nodi del grafo, cercando la soluzione più efficiente. Infatti minimizzare la distanza tra due elementi della rete di distribuzione elettrica comporta una riduzione delle perdite dovute alle linee.

Il tutto rispettando le due condizioni sopra riportate:

- Scegliere $n - 1$ archi in modo da collegare in modo univoco tutti i vertici;
- Considerare la condizione per l'eliminazione di eventuali cicli.

La soluzione dunque godrà delle seguenti caratteristiche:

1. Si tratta di un sottografo, dunque un sottoinsieme dei lati
2. E' connesso, dunque tocca tutti i nodi del grafo
3. E' aciclico

Algoritmi e soluzioni

Il modello visto consente di formulare una procedura per arrivare in modo efficiente alla soluzione ottima.

Tuttavia esistono metodologie di soluzione diverse che convergono allo stesso risultato.

Di seguito sono riportate due tra le principali soluzioni.

Ecco le caratteristiche fondamentali del primo algoritmo considerato:

- la soluzione viene costruita passo passo, aggiungendo un arco per volta;
- visto che lo scopo è quello di arrivare all'albero di costo minimo, si aggiungono i rami dal meno oneroso al più costoso;
- si evita l'inserimento di archi che creano ciclicità;
- la soluzione è completa quando tutti i nodi sono stati toccati o sono stati inseriti $n - 1$ archi.

Algoritmo di Kruskal

L'idea risolutiva che sta alla base di questo algoritmo è molto semplice, e in parte presentata nelle caratteristiche fondamentali sopra riportate.

Si parte ordinando gli archi in base al loro costo, inserendoli poi uno alla volta nella soluzione parziale stando attenti a non creare situazioni che portano alla ciclicità.

Nel caso di archi aventi lo stesso costo, è indifferente su quale candidato ricada la scelta.


```
begin
  ordinare i lati di G secondo costi crescenti , ottenendo:
    Lato[1].cost < Lato[2].cost < ..... < Lato[m].cost;
  k := 0;
  h := 0;
  for i := 1 to n do
    comp[i] := i;
  while (k < n-1) and (h < m) do
    begin
      h := h+1;
      i := Lato[h];
      j := Lato[h];
      C1 := comp[i];
      C2 := comp[j];
      if C1 != C2 then
        begin
          k := k+1;
          Albero[k] := Lato[h];
          for q := 1 to n do
            if comp[q] == C2 then
              comp [q] :=C1;
          end
        end
      end
    if k != n-1 then
      "grafo non connesso!!"
    end
end
```

L'algoritmo di Kruskal è di tipo greedy, cioè ad ogni iterazione effettua la scelta ritenuta migliore.

- Crea la soluzione aggiungendo un elemento per volta
- Non rimette mai in discussione le decisioni già prese

- Impiega un tempo polinomiale in funzione della dimensione del problema.

Più nel dettaglio la complessità computazionale dell'ordinamento richiesto al passo iniziale è $O(m \log n)$.

L'aggiornamento delle componenti richiede invece tempo $O(n)$ e viene ripetuto al massimo $n - 1$ volte.

La complessità totale quindi risulta $O(m \log n + n^2)$.

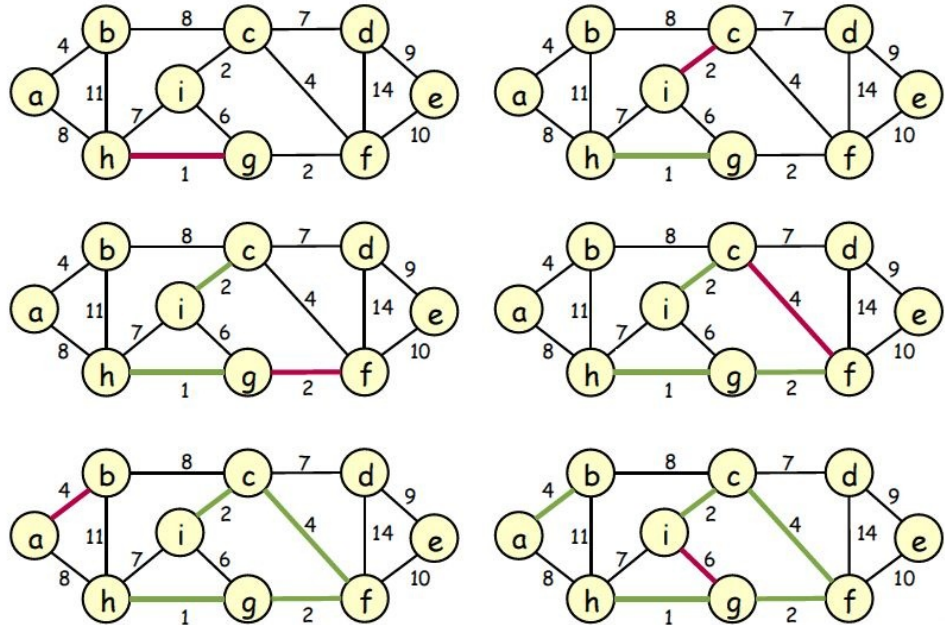


Figura 6.2: Esempio di risoluzione dell'algoritmo di Kruskal [19].

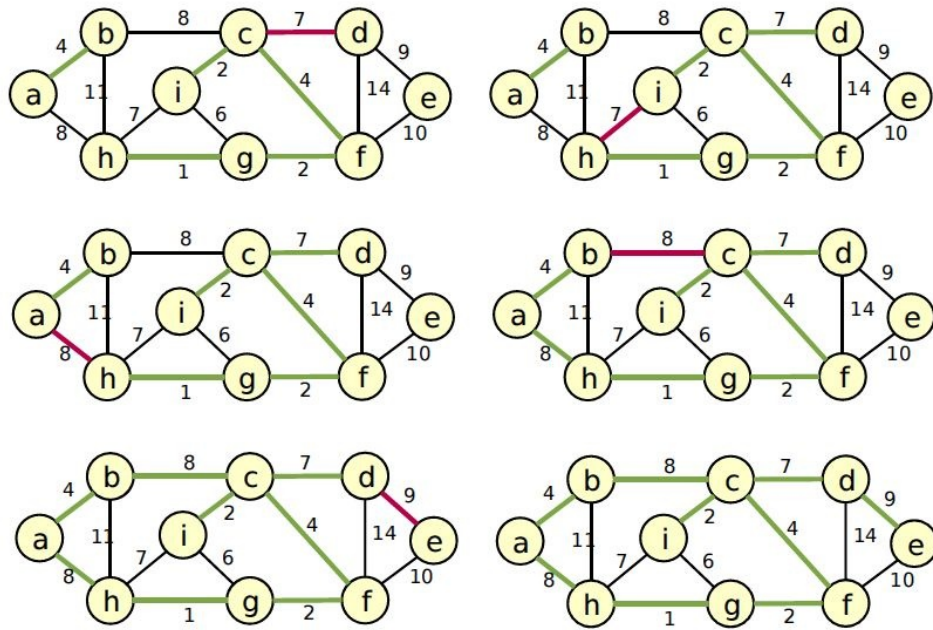


Figura 6.3: Esempio di risoluzione dell'algoritmo di Kruskal [19].

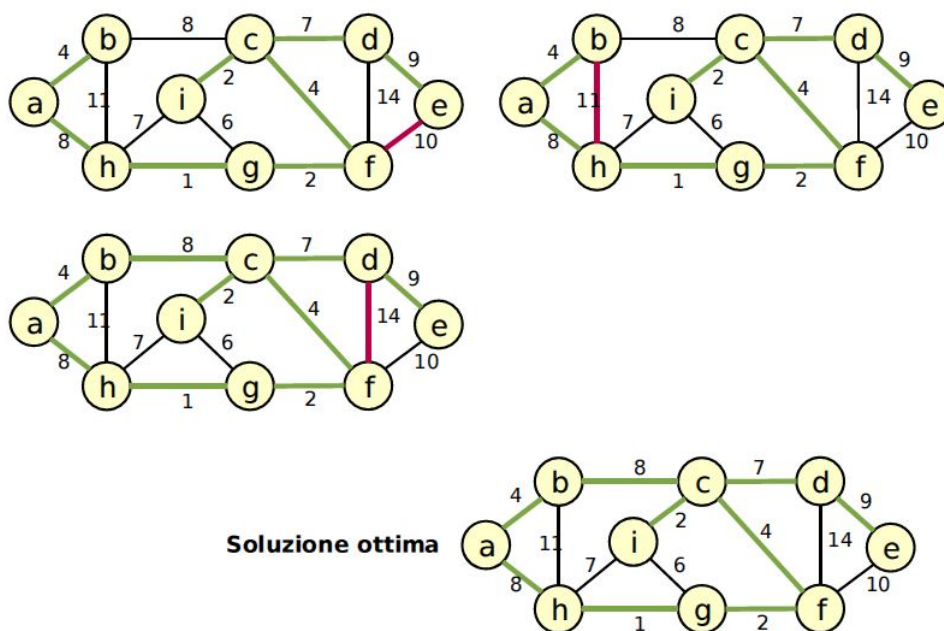


Figura 6.4: Esempio di risoluzione dell'algoritmo di Kruskal [19].

La realizzazione forse più naturale dell'algoritmo per il calcolo dell'albero minimo è quella di **Prim-Dijkstra** in cui si sceglie ad ogni iterazione la componente connessa S che contiene un vertice assegnato. In particolare:

- si inizializzano i parametri;
- si considera un vertice qualsiasi come radice dell'albero;
- si inseriscono tutti i vertici rimasti in una struttura dati appropriata (tipicamente una coda di priorità) e li si estrae in ordine crescente;
- si scorre quindi la lista delle adiacenze del vertice estratto considerando solo i vertici ancora all'interno della struttura ausiliaria;
- ognuno di questi viene elaborato;

- si conclude il ciclo aggiornando la distanza.

Si osservi ora il codice di tale algoritmo [18]:

```
flag [1] := 1;
pred [1] := 1;
for j := 2 to n do
  begin
    flag [j] := 0;
    L[j] := c[1, j];
    pred[j] := 1;
  end
for k := 1 to n - 1
  begin
    min := inf;
    for j := 2 to n do
      if (flag [j] == 0) and (L[j] < min) then
        begin
          min := L[j];
          h := j;
        end
      flag [h] := 1;
      for j := 2 to n do
        if (flag [j] == 0) and (c[h, j] < L[j]) then
          begin
            L[j] := c[h, j];
            pred [j] := h;
          end
        end
      end
    end
  end
end
```

Anche questo algoritmo fa parte della categoria degli algoritmi greedy.

Osservandone la complessità si possono svolgere le seguenti considerazioni:

l'inizializzazione al primo passo richiede tempo $O(n)$, gli alti passi interni invece richiedono ciascuno $O(n)$, e vengono eseguiti $n - 1$ volte. La complessità dell'intero algoritmo è quindi $O(n^2)$. Va detto che l'efficienza può essere migliorata nel caso di grafi sparsi.

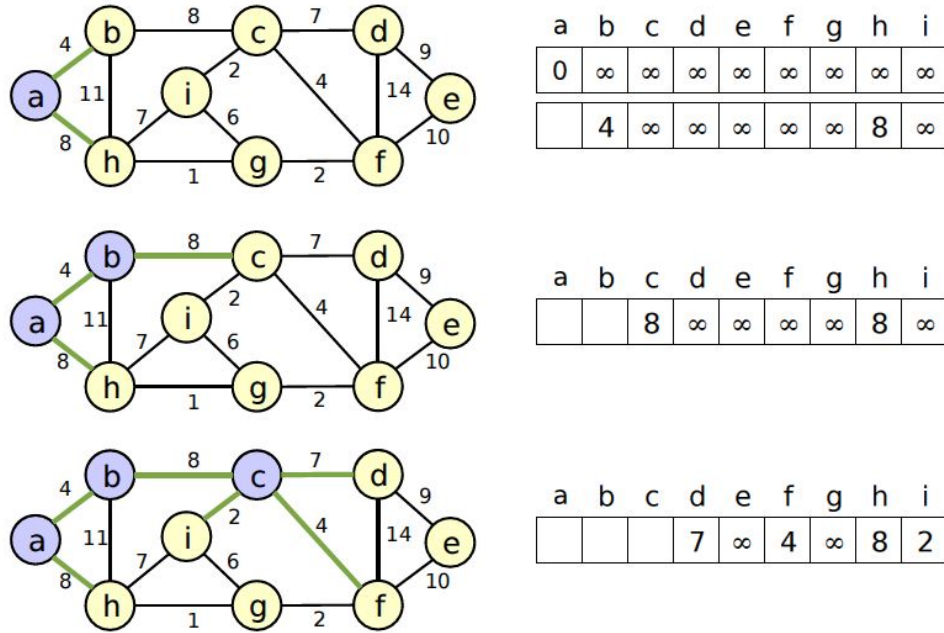


Figura 6.5: Esempio di risoluzione dell'algoritmo di Prim-Dijkstra [19].

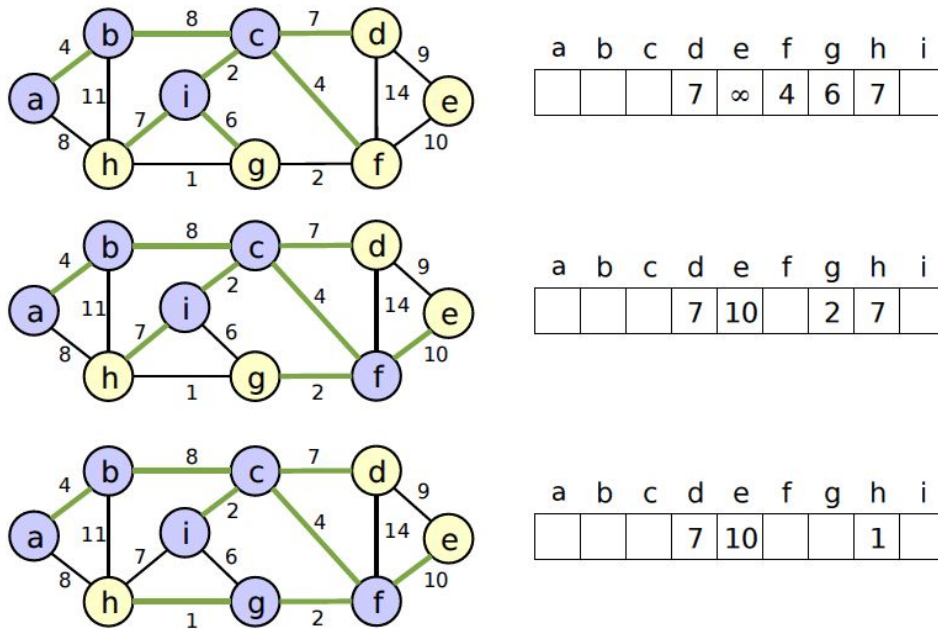


Figura 6.6: Esempio di risoluzione dell'algoritmo di Prim-Dijkstra [19].

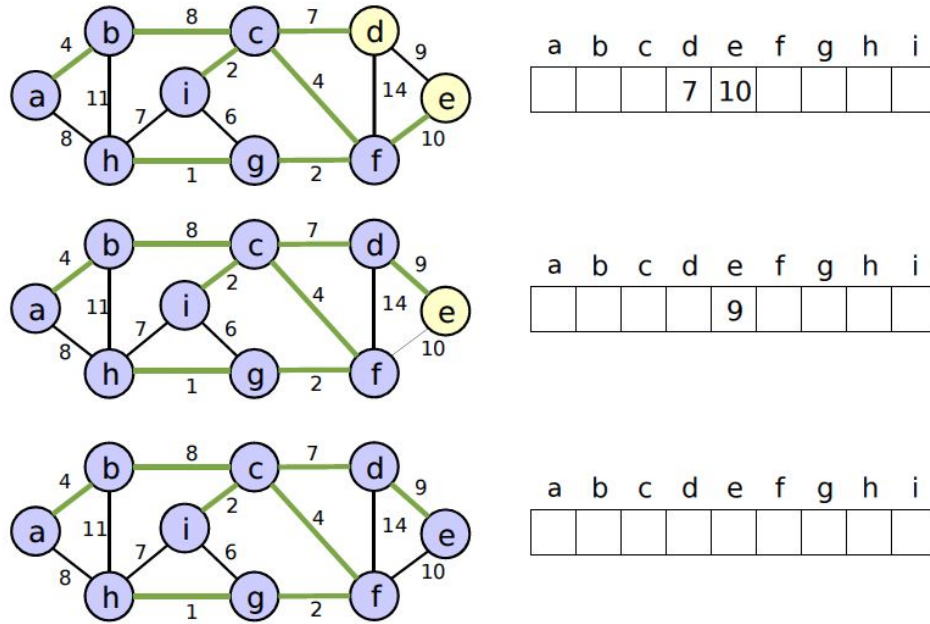


Figura 6.7: Esempio di risoluzione dell'algoritmo di Prim-Dijkstra [19].

6.1.5 Calcolo della probabilità di identificare correttamente l'albero ottimo

Si consideri ora il caso in cui le distanze non siano deterministiche, ma corrotte da rumore.

Definizioni preliminari

Si consideri la seguente notazione:

\hat{a}_i distanza misurata di un generico arco i .

Queste distanze sono in realtà il risultato di una misura, dunque saranno composte dalla lunghezza effettiva, corrotta da rumore.

Supponendo il rumore gaussiano bianco, si può scrivere:

$$\widehat{a}_i = a_i + w_i,$$

con a_i lunghezza effettiva del cammino, e w_i rumore gaussiano bianco che sintetizza le imprecisioni di calcolo.

Si calcoli anzitutto la probabilità di scegliere correttamente l'arco in una generica iterazione dell'algoritmo.

Definendo:

Ω^n insieme degli archi non ancora inseriti nell'albero minimo al passo n

$i = M$ arco corretto da scegliere

$$\begin{aligned} P_C &= P[\text{Scegliere correttamente prossimo arco}] = \\ &= P[\widehat{a}_M < \widehat{a}_i, \forall i \neq M, i \in \Omega^n] = \\ &= P[a_M + w_M < a_i + w_i, \forall i \neq M, i \in \Omega^n] = \\ &= \int \prod_{i \neq M, i \in \Omega^n} P[a_M + w_M < a_i + w_i | w_M] f_{w_M}(w_M) dw_M = \\ &= \int \prod_{i \neq M, i \in \Omega^n} P[w_i > a_M - a_i + w_M | w_M] f_{w_M}(w_M) dw_M = \\ &= \int f_{w_M}(w_M) \prod_{i \neq M, i \in \Omega^n} Q\left(\frac{a_M - a_i + w_M}{\sigma_w}\right) dw_M. \end{aligned} \tag{6.1.13}$$

Questa è l'espressione della probabilità di scelta corretta del singolo arco in una generica iterazione. Considerando invece ad ogni passo solamente due archi, quello corretto, e quello che con maggior verosimiglianza potrà essere confuso, si ottiene un'espressione più compatta.

Riducendosi al caso più semplice infatti, in cui si considera \widehat{a} arco appartenente all'albero minimo, mentre \widehat{b} arco che ad una generica iterazione può essere confuso con quello minimo, valgono le seguenti considerazioni:

$$\begin{aligned}
P_C &= P[\text{Scegliere correttamente prossimo arco}] = P[\hat{a} < \hat{b} \mid a < b] = \\
&= P[a + w_a < b + w_b \mid a < b] = P[w_a - w_b < b - a \mid a < b] = \\
&= P[w_a - w_b < b - a]
\end{aligned}
\tag{6.1.14}$$

ma la differenza tra due variabili aleatorie gaussiane a media nulla e varianza σ_w^2 è ancora una variabile aleatoria gaussiana chiamata D con media nulla e varianza data dalla somma delle due varianze.

$$\begin{aligned}
P_C &= P[D < b - a] = P\left[\frac{D}{\sqrt{2}\sigma_w} < \frac{b - a}{\sqrt{2}\sigma_w}\right] = \\
&= 1 - Q\left(\frac{b - a}{\sqrt{2}\sigma_w}\right).
\end{aligned}
\tag{6.1.15}$$

6.2 Modello di rumore Gaussian Mixture

Fino a questo momento il disturbo sulle misure di distanza è stato modellato come rumore gaussiano bianco.

Si ipotizza ora che invece la distribuzione del rumore sia di tipo Gaussian Mixture.

False Alarm

Si procede con il calcolo della probabilità di False Alarm:

$$\begin{aligned}
 P_{FA} &= P [\text{CONSIDERARE VERO UN ARCO} \mid \text{NON ESISTE}] = \\
 &= P \left[\left| \widehat{d}_{i,j} - \widehat{d}_{i,j} \right| > \varepsilon \mid d_{i,j} = d_{i,j} \right] = \\
 &= P \left[\left| d_{i,j} + w_{i,j} - d_{i,j} - w_{i,j} \right| > \varepsilon \mid d_{i,j} = d_{i,j} \right] = \\
 &= P \left[\left| w_{i,j} - w_{i,j} \right| > \varepsilon \right].
 \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Si tratta della differenza tra le realizzazioni di rumore presenti nel cammino diretto e quello alternativo. Questa volta il rumore viene considerato con un modello Gaussian Mixture. Si rappresenta il fenomeno osservato dunque attraverso una sommatoria di gaussiane mediata da valori di probabilità derivati da una variabile aleatoria.

- $w_{i,j}$ rappresenta il rumore che corrompe la misura dell'arco diretto che unisce i due nodi. Per quanto appena detto dunque il suo modello sarà di tipo Gaussian Mixture.
- $w_{i,j}$ invece, sarà composto dalla somma di N_P rumori, dove N_P rappresenta il numero di passi del cammino ottenuto senza considerare l'arco diretto.

Per quanto riguarda il modello del rumore Gaussian Mixture, si può descrivere tramite i seguenti parametri:

- K = numero di variabili aleatorie gaussiane considerate
- $n \in [1, \dots, K]$
- m_n media n-esima gaussiana considerata
- σ_n^2 varianza n-esima gaussiana considerata
- λ_n coefficienti che determinano i pesi delle varie gaussiane
- sotto le condizioni: $0 \leq \lambda_n \leq 1$ $\sum_{i=1}^K \lambda_n = 1$

Come detto $w_{\bar{i}, \bar{j}}$ rappresenta il rumore che corrompe il cammino alternativo. Essendo composto da N_P passi elementari, per ognuno di questi verrà introdotto un contributo distorsivo rappresentato mediante Gaussian Mixture. Si tratta quindi di una somma di Gaussian Mixture, che essendo composte da variabili aleatorie normali, danno luogo ancora una volta ad una Gaussian Mixture.

Infatti, ad ogni passo, la distribuzione del rumore sul cammino sarà data dalla distribuzione del passo precedente convoluta con il modello del rumore su un singolo arco. Si tratta dunque di svolgere una convoluzione con le K gaussiane, pesate per i rispettivi λ , che compongono la Gaussian Mixture. Nel dettaglio, il modello per $w_{\bar{i}, \bar{j}}$ dunque sarà dato da:

- $(K)^{N_P}$ gaussiane, visto che ad ogni passo ci sarà la convoluzione di ogni componente con tutte le altre K componenti;
- $h \in [1, \dots, (K)^{N_P}]$;
- m_h media h-esima gaussiana data dalla somma delle medie delle gaussiane considerate;
- σ_h^2 varianza h-esima gaussiana data dalla somma delle varianze delle gaussiane considerate;

- λ_h coefficienti che determinano i pesi delle varie gaussiane;
- sotto le condizioni: $0 \leq \lambda_h \leq 1$ $\sum_{h=1}^{(K)^{NP}} \lambda_h = 1$.

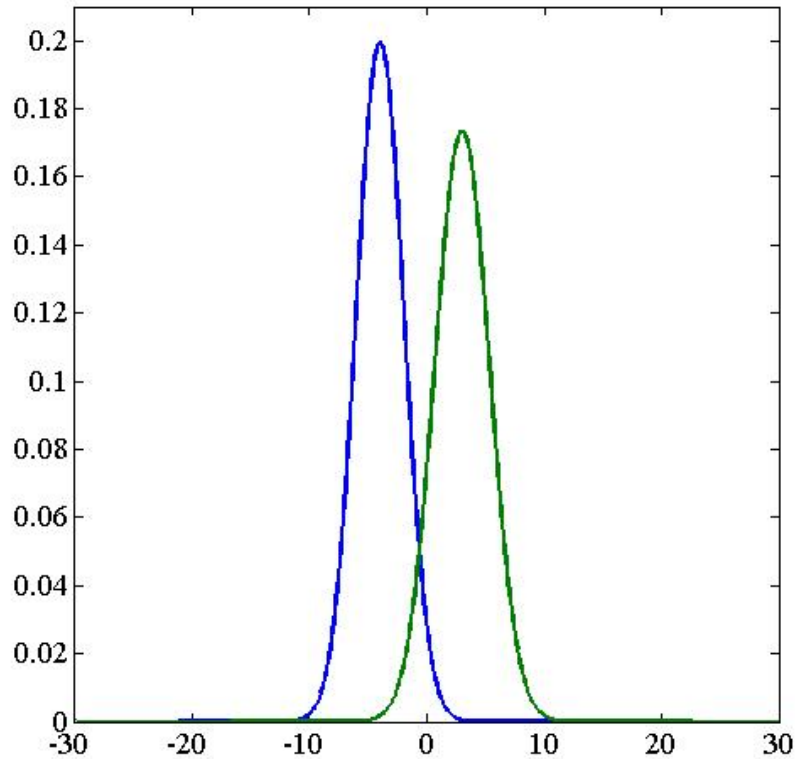


Figura 6.8: Modello del rumore sul singolo arco.

Per comprendere ulteriormente l'analisi svolta si osservi il seguente esempio. Il modello Gaussian Mixture per il rumore sarà composto da due variabili aleatorie normali visibili in Figura 6.8, i cui parametri sono riportati nella tabella sottostante:

| Gaussiana | λ | Media | Deviazione Standard |
|-----------|-----------|-------|---------------------|
| 1 | 0.35 | -4 | 2 |
| 2 | 0.65 | 3 | 2.3 |

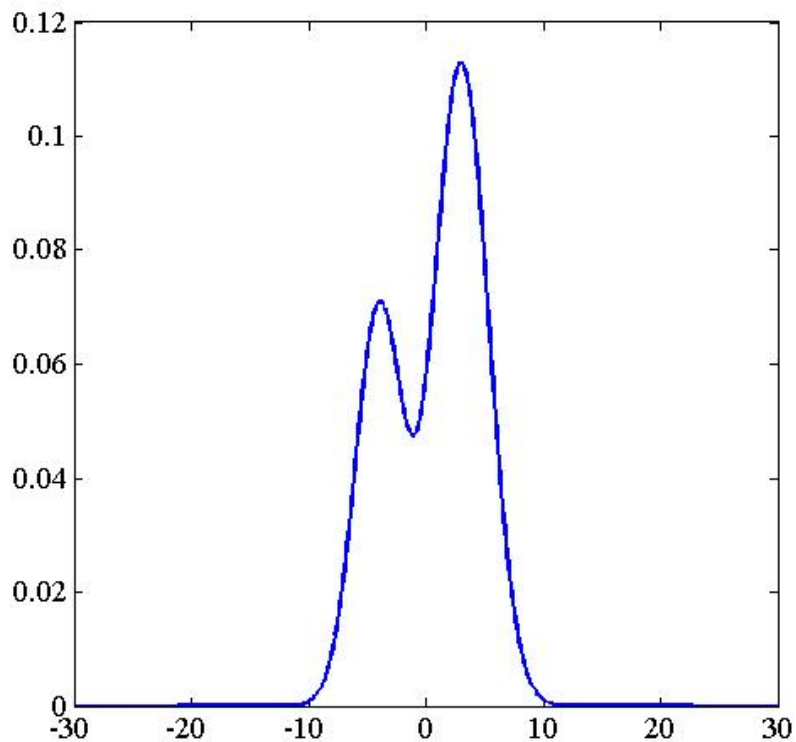


Figura 6.9: Distribuzione del rumore sul singolo arco.

In Figura 6.9, invece è riportata la distribuzione complessiva del rumore presente in un tratto di linea che unisce due sorgenti.

Il cammino alternativo sia composto da due passi ($N_P=2$), e quindi $w_{i,j}$ avrà una distribuzione data dalla somma di due Gaussian Mixture uguali. La distribuzione globale dunque, sarà data dalla convoluzione tra le due distribuzioni. Ma, essendo composte da variabili gaussiane, il risultato sarà ancora una serie di variabili aleatorie gaussiane pesate per nuovi coefficienti λ .

Dunque, la distribuzione del rumore su di un cammino di due passi nel caso appena visto ha la forma visibile in Figura 6.10.

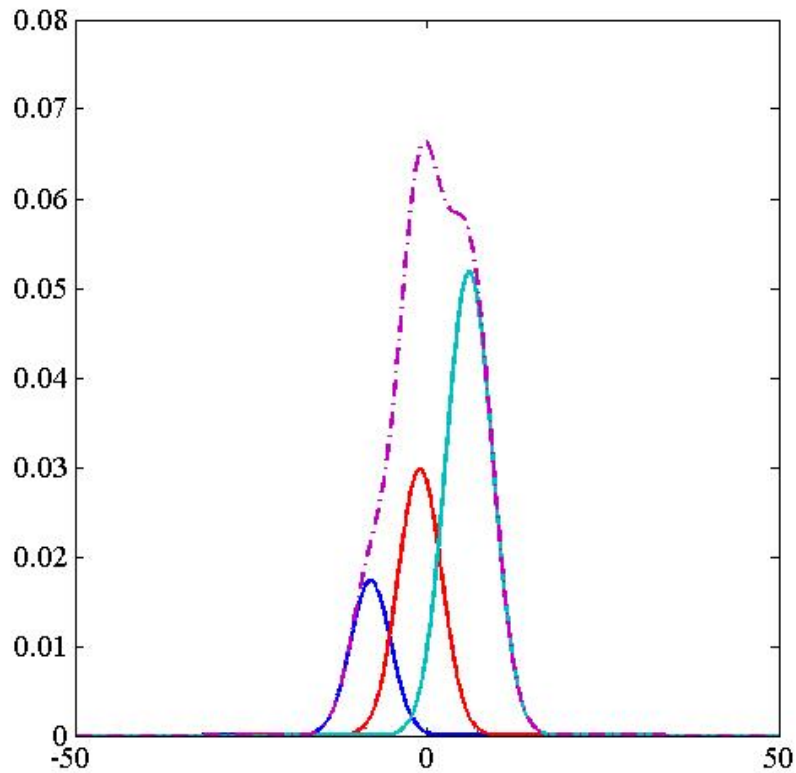


Figura 6.10: Distribuzione del rumore sul cammino alternativo

Ecco riportati nella tabella sottostante i parametri che la caratterizzano:

| Gaussiana | λ | Media | Deviazione Standard |
|-----------|-----------|-------|---------------------|
| 1 | 0.1225 | -8 | 2.8284 |
| 2 | 0.2275 | -1 | 3.0480 |
| 3 | 0.2275 | -1 | 3.0480 |
| 4 | 0.4225 | 6 | 3.2527 |

Il numero di gaussiane che si dovrebbero osservare in un cammino di due passi è, come visto in precedenza K^{N_P} che con $K = 2$ risulta $2^2 = 4$.

Tuttavia se si osserva il grafico per $w_{i,j}^-$ si nota come il numero di variabili normali sia solamente tre, a causa dei parametri che caratterizzano le gaussiane. Trattandosi di una convoluzione tra due Gaussian Mixture con gli stessi parametri, le combinazioni tra le varie variabili aleatorie che le costituiscono portano a questo risultato.

Il modello dunque sarà composto da tre variabili normali, di cui una riassumerà le due con gli stessi parametri, e dunque avrà una λ pari alla somma delle λ delle sue componenti.

| Gaussiana | λ | Media | Deviazione Standard |
|-----------|-----------|-------|---------------------|
| 1 | 0.1225 | -8 | 2.8284 |
| 2 | 0.4550 | -1 | 3.0480 |
| 3 | 0.4225 | 6 | 3.2527 |

Tornando al calcolo della probabilità di False Alarm, si riprende l'equazione, utilizzando l'analisi appena presentata per svolgere ulteriori considerazioni. La probabilità di considerare vero un arco in realtà non esistente vale:

$$P_{FA} = P \left[\left| w_{i,j}^- - w_{i,j} \right| > \varepsilon \right] \quad (6.2.2)$$

Si tratta dunque di descrivere correttamente la differenza $w_{i,j}^- - w_{i,j}$.

Per quanto visto le due variabili in gioco hanno ancora una volta una distribuzione di tipo Gaussian Mixture, anche se con parametri differenti. In particolare $w_{i,j}^-$ rappresenta il rumore sul cammino alternativo, e dunque il numero di variabili normali che caratterizzano la sua distribuzione è legato strettamente al numero di passi che compone il suo percorso.

Tuttavia si tratta ancora una volta di una somma tra due Gaussian Mixture, anche se una delle due possiede segno invertito.

Dunque anche in questo caso la distribuzione finale sarà data dalla convoluzione tra le due distribuzioni. Si ottiene così ancora una Gaussian Mixture, questa volta composta da K^{N_P+1} gaussiane.

Riprendendo l'esempio portato in precedenza, si osservi in Figura 6.11 il risultato dell'ulteriore convoluzione apportata, e ancora una volta si presti

attenzione ai parametri che caratterizzano le variabili aleatorie.

| Gaussiana | λ | Media | Deviazione Standard |
|-----------|-----------|-------|---------------------|
| 1 | 0.0429 | -4 | 3.4641 |
| 2 | 0.0796 | -11 | 3.6455 |
| 3 | 0.0796 | 3 | 3.6455 |
| 4 | 0.1479 | -4 | 3.8184 |
| 5 | 0.0796 | 3 | 3.6455 |
| 6 | 0.1479 | -4 | 3.8184 |
| 7 | 0.1479 | 10 | 3.8184 |
| 8 | 0.2746 | 3 | 3.9837 |

Anche questa volta il numero di variabili gaussiane non sembra esattamente quello che ci si aspettava, ma come per il caso precedente, osservando le medie e le varianze delle stesse variabili si intuisce la motivazione di tale risultato.

La P_{FA} dunque è data dalla probabilità che una Gaussian Mixture (G), composta da K^{N_P+1} gaussiane, risulti in modulo maggiore di ε .

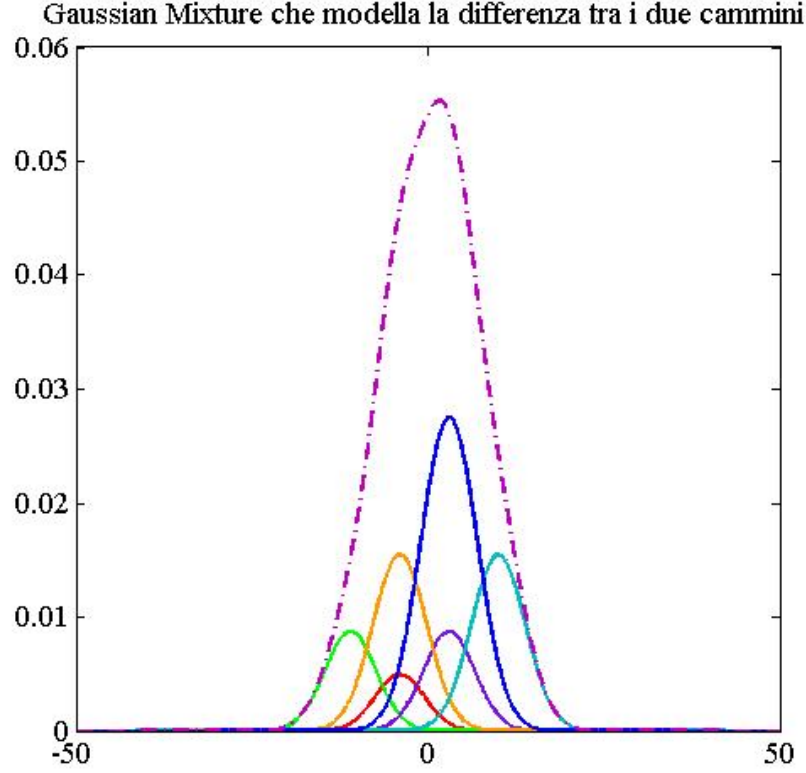


Figura 6.11: Distribuzione del rumore sulla differenza tra i cammini

$$\begin{aligned}
 P_{FA} &= P \left[\left| w_{i,j} - w_{i,j} \right| > \varepsilon \right] = P \left[|G| > \varepsilon \right] = \\
 &= \sum_n^{K^{N_P+1}} P \left[|G| > \varepsilon \mid \text{scelgo } n\text{-esima gauss} \right] P \left[n\text{-esima gaussiana} \right] = \\
 &= \sum_n^{K^{N_P+1}} P \left[|G| > \varepsilon \mid \text{scelgo } n\text{-esima gauss} \right] \lambda_n = \\
 &= \sum_n^{K^{N_P+1}} P \left[|G_n| > \varepsilon \right] \lambda_n = \quad G_n \text{ } n\text{-esima gaussiana} \\
 &= \sum_n^{K^{N_P+1}} P \left[-\varepsilon > G_n > \varepsilon \right] \lambda_n = \\
 &= \sum_n^{K^{N_P+1}} P \left[\frac{-\varepsilon - m_n}{\sigma_n} > \frac{G_n - m_n}{\sigma_n} > \frac{\varepsilon - m_n}{\sigma_n} \right] \lambda_n = \\
 &= \sum_n^{K^{N_P+1}} \left[Q \left(\frac{\varepsilon + m_n}{\sigma_n} \right) + Q \left(\frac{\varepsilon - m_n}{\sigma_n} \right) \right] \lambda_n
 \end{aligned}$$

(6.2.3)

Questo risultato è stato ottenuto condizionando sulla specifica realizzazione di rumore. In particolare l'espressione G_n rappresenta la scelta dell' n -esima variabile aleatoria gaussiana associata al modello Gaussian Mixture.

Miss Detection

Si passi ora al calcolo della probabilità di Miss Detection.

$$\begin{aligned}
 P_{MD} &= P[\text{CONSIDERARE FITTIZIO ARCO} \mid \text{ESISTE IN REALTA} \uparrow] = \\
 &= P\left[\left|\widehat{d_{\overline{i,j}}} - \widehat{d_{i,j}}\right| < \varepsilon \mid d_{\overline{i,j}} \neq d_{i,j}\right] = \\
 &= P\left[\left|d_{\overline{i,j}} + w_{\overline{i,j}} - d_{i,j} - w_{i,j}\right| < \varepsilon \mid d_{\overline{i,j}} \neq d_{i,j}\right]
 \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Come detto in precedenza il modello per il rumore è di tipo Gaussian Mixture, dunque come nel caso precedente $w_{i,j}$ rappresenta il rumore che corrompe la misura dell'arco diretto che unisce i due nodi.

Allo stesso modo $w_{\overline{i,j}}$ rappresenta il contributo distorsivo sul cammino alternativo.

Introducendo il risultato trovato nel calcolo della probabilità di False Alarm anche in questo caso, la differenza $w_{\overline{i,j}} - w_{i,j}$ ha ancora una volta distribuzione di tipo Gaussian Mixture, ed è composta da $(K)^{N_P+1}$ gaussiane.

Tuttavia nel calcolo della probabilità di Miss Detection compare un ulteriore fattore, ovvero la costante $d_{\overline{i,j}} - d_{i,j}$ che provoca una traslazione della distribuzione. Nel calcolo della P_{FA} questa differenza risultava nulla, e dunque non forniva alcun contributo.

Alla luce di queste nuove considerazioni, il calcolo risulta:

$$\begin{aligned}
P_{MD} &= P \left[\left| d_{i,j} + w_{i,j} - d_{i,j} - w_{i,j} \right| < \varepsilon \right] = \\
&= P \left[\left| G + d_{i,j} - d_{i,j} \right| < \varepsilon \right] = \\
&= \sum_n^{K^{N_P+1}} P \left[\left| G + d_{i,j} - d_{i,j} \right| < \varepsilon \mid n\text{-esima gauss} \right] P [n\text{-esima gauss}] = \\
&= \sum_n^{K^{N_P+1}} P \left[\left| G + d_{i,j} - d_{i,j} \right| < \varepsilon \mid n\text{-esima gauss} \right] \lambda_n = \\
&= \sum_n^{K^{N_P+1}} P \left[\left| G_n + d_{i,j} - d_{i,j} \right| < \varepsilon \right] \lambda_n = \\
&= \sum_n^{K^{N_P+1}} P \left[-\varepsilon > G_n + d_{i,j} - d_{i,j} < \varepsilon \right] \lambda_n = \\
&= \sum_n^{K^{N_P+1}} P \left[\frac{-\varepsilon - m_n - d_{i,j} + d_{i,j}}{\sigma_n} < \frac{G_n - m_n}{\sigma_n} < \frac{\varepsilon - m_n - d_{i,j} + d_{i,j}}{\sigma_n} \right] \lambda_n = \\
&= \sum_n^{K^{N_P+1}} \left[Q \left(\frac{-\varepsilon + m_n + d_{i,j} - d_{i,j}}{\sigma_n} \right) - Q \left(\frac{\varepsilon + m_n + d_{i,j} - d_{i,j}}{\sigma_n} \right) \right] \lambda_n.
\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Osservando il risultato si nota la dipendenza dalle distanze $d_{i,j}$ e $d_{i,j}$, che invece nel caso della probabilità di False Alarm non contribuivano in alcun modo.

Capitolo 7

Implementazione e risultati

Fino a questo momento è stata presentata l'idea concettuale da utilizzare per riuscire nell'intento di realizzare un buon mapping di una rete.

Come visto, l'algoritmo si basa pesantemente sulla corretta stima della soglia di decisione ε , ed è dunque necessario fornire un valore più realistico possibile per tale costante.

Risulta di interesse quindi analizzare le prestazioni del modello presentato, e valutarne i principali parametri.

L'implementazione dell'algoritmo per la stima della topologia di una Smart Grid è stata realizzata utilizzando Matlab, in quanto fornisce una comoda interfaccia basata sulle matrici utile per maneggiare grandi moli di dati come in questo caso.

Alla base della simulazione stanno alcuni punti chiave, in seguito descritti dettagliatamente:

- generazione di una rete tramite modello RT-nested-SmallWorld;
- simulazione delle operazioni di ranging;
- calcolo delle probabilità di False Alarm e Miss Detection con conseguente estrapolazione della soglia ottima ε .

7.1 Generazione di una rete tramite modello RT-nested-SmallWorld

Per la generazione della rete ci si focalizza in ambito Smart Micro Grid, ovvero Smart Grid per reti di distribuzione a bassa tensione (220 V), caratterizzanti la gran parte delle forniture residenziali e commerciali del territorio europeo e italiano.

Il modello riprodotto è quello presentato in precedenza, ovvero RT-nested-SmallWorld, in quanto fornisce un'ampia gamma di reti da poter utilizzare, e grazie alla sua struttura di tipo gerarchico facilita le operazioni di simulazione rendendole più celeri.

Inoltre permette di agire su molti parametri, adattandosi così alla particolare situazione da stimare. I principali utilizzati nelle simulazioni sono:

- il grado di connettività medio di ogni nodo;
- il numero dei cluster della rete;
- il numero di nodi del cluster;
- la statistica delle impedenze delle linee.

Sfruttando le analisi presentate e riportandole in codice Matlab, si ottiene così il modello della rete, facilmente esprimibile con un grafo parzialmente connesso.

I nodi del grafo rappresentano gli attori nella rete, ovvero le sorgenti locali, mentre gli archi descrivono le impedenze. Considerando le impedenze di linea proporzionali alle distanze che legano effettivamente i nodi, ecco che un percorso nel grafo esprime realmente un cammino sulla rete di distribuzione elettrica.

In questo modo si è ottenuto un modello realistico che descrive la topologia di una Smart Micro Grid, che verrà in seguito utilizzato come prototipo reale.

Nelle simulazioni effettuate si sono considerati cluster composti da una decina di nodi, con un grado medio di connettività pari a tre. Questo perché il settaggio di tali parametri con questi valori rappresenta molto bene piccole realtà ormai presenti nel nostro territorio.

7.2 Simulazione delle operazioni di ranging

Dopo la generazione della rete, si è in possesso di un grafo sparso che fornisce la rappresentazione topologica del sistema di distribuzione elettrica. Questo sarà il modello che si andrà a valutare, cercando di limitare al minimo gli errori di stima.

Tuttavia l'algoritmo di risoluzione presentato necessita come input iniziale di un grafo completamente connesso che rappresenta le misurazioni di distanza effettuate tra tutti i nodi con le operazioni di ranging.

Per ottenere come dato in ingresso il grafo completo, si aggiungono alla rete generata col modello RT-nested-SmallWorld gli archi non originariamente presenti tramite algoritmo di Dijkstra. In altre parole si popola la rete generata inizialmente con collegamenti diretti fittizi che in realtà rappresentano cammini non diretti.

Questi archi aggiunti al grafo originario riassumono i contributi dati dalle misure di ranging anche nel caso in cui le due sorgenti comunicanti non siano direttamente legate. Nel grafo totalmente connesso dunque, apparirà un collegamento diretto tra la sorgente A e la sorgente B, anche se queste si trovano dalla parte opposta della rete. Tuttavia, il valore dell'arco rappresenterà il percorso minimo lungo il grafo che lega B ad A, attraversando uno o più nodi intermedi.

In questo modo è stato creato un grafo completamente connesso, come quello fornito dall'esito di una operazione di ranging sulla rete. Ciò nonostante, la rete totalmente magliata così calcolata non fornisce ancora un buon modello per rappresentare l'esito di una serie di stime di distanza. Infatti, trattandosi di misurazioni effettuate su un canale elettrico si verificano errori ed imprecisioni di stima.

Per trattare queste imprecisioni ed inserirle correttamente nell'algoritmo, l'idea è quella di corrompere le distanze con rumore che può essere ad esempio considerato gaussiano bianco.

Dunque la matrice dei costi, ovvero rappresentante le lunghezze del grafo completamente connesso, verrà perturbata con il modello di rumore preso in considerazione.

7.3 Stima della soglia di decisione

L'obiettivo dell'algoritmo è quello di avvicinarsi il più possibile alla topologia della rete elettrica reale. Per fare ciò come si è visto è di fondamentale importanza stimare correttamente il parametro ε , soglia di decisione nel considerare vero o fittizio un collegamento.

Come input si considera la matrice corrotta dal rumore che rappresenta le misurazioni effettuate.

Partendo da questa si andranno a calcolare le probabilità di Miss Detection e False Alarm che permetteranno di ottenere una stima per la soglia cercata. Ovviamente a seconda del modello con cui si decide di trattare il rumore si utilizzeranno formulazioni diverse come visto in precedenza.

Oltre al calcolo in forma chiusa presentato precedentemente, nella parte simulativa le probabilità di Miss Detection e False Alarm sono state calcolate anche in modo frequentistico, ovvero come numero di casi favorevoli su numero di casi possibili.

Ad esempio la probabilità di False Alarm è data dalla probabilità di considerare vero un arco dato che non esiste. Dunque, la definizione che ne consegue osservando gli eventi:

P_{FA} = numero di volte in cui affermo che esiste ed invece era fittizio / numero di archi fittizi.

Il calcolo della probabilità svolto con questa metodologia permette di avere un utile riscontro nell'analisi in forma chiusa svolta precedentemente, e di

evidenziarne eventuali errori.

A livello di organizzazione del codice, per avere una buona stima del parametro vengono generate più reti, ognuna delle quali corrotta in modo indipendente dalla tipologia di rumore che si è deciso di utilizzare.

Su ognuna di queste poi verranno calcolate le due probabilità al variare della soglia di decisione.

Il fatto di generare più reti, e quindi mediare il valore calcolato su queste, permette di avere una casistica dei risultati non dipendente dalla singola realizzazione.

7.3.1 Modello di rumore gaussiano bianco

Una prima stima sul disturbo che interferisce con le misurazioni di distanza è quella di considerarlo gaussiano bianco. Per poter fornire un risultato più realistico si considerano poi potenze di rumore diverse.

La distribuzione considerata nelle seguenti simulazioni per la generazione delle impedenze di linea è Generalized Pareto.

In breve sono riportate le formule precedentemente ricavate per le due probabilità.

$$P_{FA} = 2Q \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma_{i,j}^2 + \sigma_{i,j}^2}} \right) \quad (7.3.1)$$

$$P_{MD} = Q \left(\frac{d_{i,j} - d_{i,j} - \varepsilon}{\sqrt{\sigma_{i,j}^2 + \sigma_{i,j}^2}} \right) - Q \left(\frac{d_{i,j} - d_{i,j} + \varepsilon}{\sqrt{\sigma_{i,j}^2 + \sigma_{i,j}^2}} \right). \quad (7.3.2)$$

In Figura 7.1 è riportato l'andamento delle probabilità di False Alarm e Miss Detection al variare della soglia di decisione ε . Il grafico è stato ottenuto fissando la potenza del rumore con cui si corrompe la matrice dei costi.

Come si può notare al variare della soglia ε le probabilità di Miss Detection

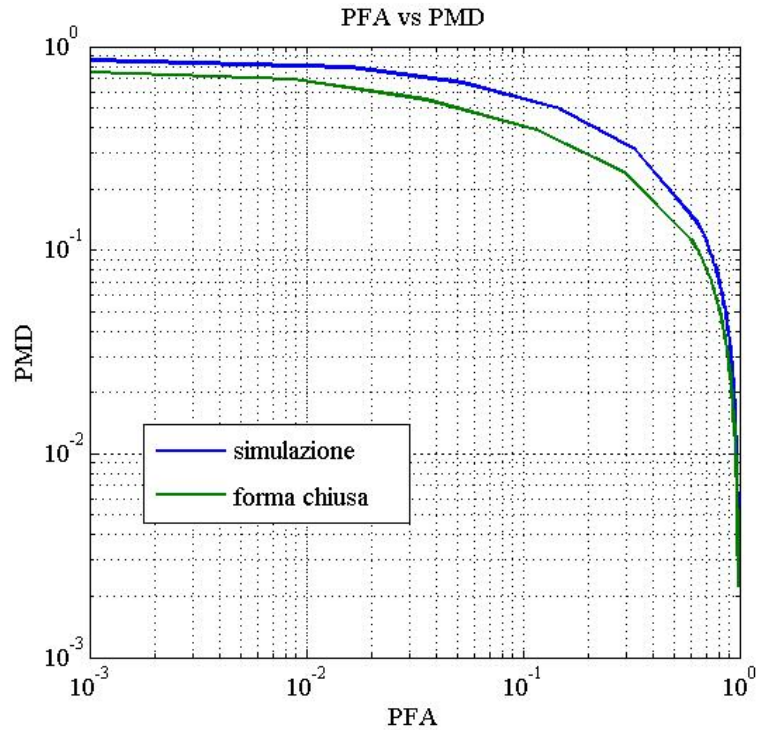


Figura 7.1: Andamento delle probabilità su scala logaritmica nel caso di rumore gaussiano bianco con $\sigma = 11$.

e False Alarm hanno comportamenti diametralmente opposti. Viste le definizioni di tali probabilità il risultato non sorprende più di tanto.

La soglia varia da zero, fino a tendere all'infinito, con un passo non regolare. Si è preferito infatti concentrare l'attenzione nella parte di curva in cui è più probabile trovare l' ε ottimo.

Per valori della soglia vicini allo zero, la probabilità di considerare vero un arco, dato che non esiste, assume valori prossimi all'unità. Infatti essendo ε piccolo, la differenza del modulo tra la lunghezza diretta e quella sul cammino alternativo sarà sempre maggiore della soglia. Questo porta ad affermare che dunque l'arco esista sempre, anche in tutti i casi in cui non è realmente presente.

Al contrario, per valori di ε tendenti all'infinito il modulo della differenza

tra le due lunghezze sarà sempre inferiore alla soglia, e dunque si deciderà per la falsità del collegamento. In questi punti infatti la P_{FA} assume valore nullo, mentre la P_{MD} assume valori prossimo ad uno.

Interessante risulta il confronto tra le due modalità di calcolo per queste probabilità:

- Il calcolo analitico, che servendosi solamente delle misurazioni e del calcolo del cammino secondario sulla rete rumorosa cerca di realizzare una buona stima.
- La definizione frequentistica di probabilità in cui contano il numero di eventi nei quali effettivamente si commette un errore.

Come si può notare dalla Figura 7.1 la curva calcolata nel secondo modo fornisce un bound superiore rispetto al calcolo in forma chiusa.

In questo caso tale fenomeno è ben marcato in quanto la potenza del rumore nell'esempio riportato è piuttosto elevata.

Per meglio analizzare l'epsilon che fornisce prestazioni migliori, l'andamento delle due probabilità è stato presentato in scala logaritmica.

Resta da definire una funzione per stabilire il criterio con cui scegliere la soglia di decisione ottima.

Sotto questo punto di vista non è facile trovare una metrica per la stima degli errori di topologia in un contesto token-ring. Due soluzioni proposte sono:

- Scegliere l' ε che minimizza la somma della P_{FA} e P_{MD}
- Scegliere come soglia quella che minimizza gli errori, a prescindere che siano dei Miss Detection o dei False Alarm

Adottando una soluzione del primo tipo, ovvero:

$$\varepsilon_{opt} = \varepsilon \quad \text{tale che} \quad \min P_{FA} + P_{MD} \quad (7.3.3)$$

Il risultato è quello visibile in Figura 7.2: Le rette verticale e orizzontale

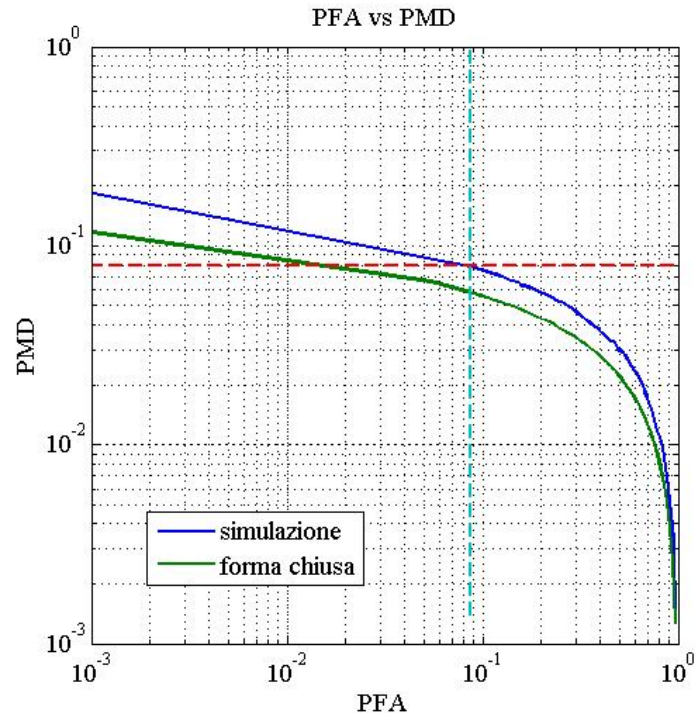


Figura 7.2: Soglia ottima nel caso di rumore gaussiano bianco con $\sigma = 3$.

riportano i valori di probabilità di False Alarm e Miss Detection corrispondenti al valore di epsilon ottimo, ovvero quello che minimizza la somma delle due probabilità.

Nelle Figure seguenti (7.3, 7.4), è riportato l'output grafico ottenuto corrompendo la rete con potenza di rumore superiore. Come si può notare, le due curve, sia quella calcolata in forma chiusa, sia quella stimata in modo frequentistico hanno un andamento simile, ma traslato verso l'alto.

In altre parole corrompendo la rete con una potenza distorsiva maggiore, e dunque, simulando un comportamento maggiormente rumoroso per la tecnica di ranging, i valori di P_{FA} e P_{MD} risulteranno superiori.

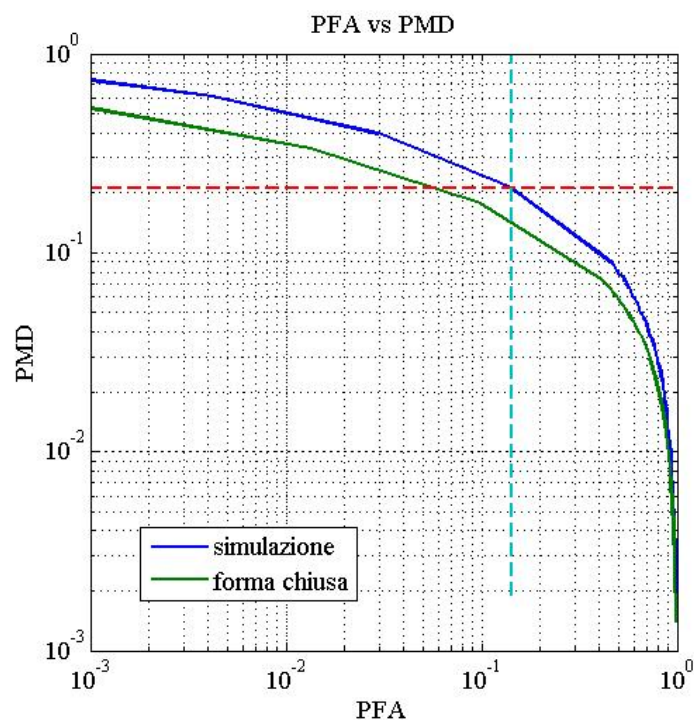


Figura 7.3: Soglia ottima nel caso di rumore gaussiano bianco con $\sigma = 7$.

Questo risultato non sorprende, infatti essendo la rete alterata da un rumore più potente, con maggior probabilità si rischierà di commettere errori di stima.

7.3.2 Caso cammino minimo

Come detto in precedenza il confronto tra il calcolo delle probabilità in forma chiusa, e la sua variante simulativa può essere molto produttivo.

In questo caso osservando i report grafici finora riportati si osserva come la tendenza delle due curve sia la stessa, ma la forma chiusa dista ancora dall'upper bound simulativo.

Per limare tale incoerenza corre in aiuto l'osservazione teorica svolta nel

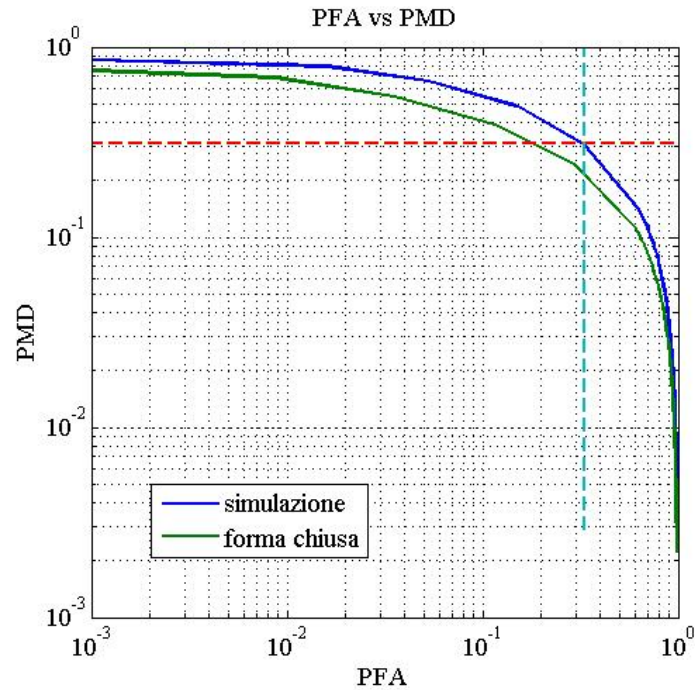


Figura 7.4: Soglia ottima nel caso di rumore gaussiano bianco con $\sigma = 11$.

precedente capitolo. Infatti fino a questo momento nel calcolo delle probabilità si è sempre stimato il cammino minimo sulla rete rumorosa, senza preoccuparsi che coincidesse col cammino minimo reale.

Il problema sta nel fatto che realizzazioni di rumore diverse su distanze vicine possono portare alla scelta del cammino non ottimale.

L'idea per sfruttare questa considerazione è quella di considerare non solo il cammino ottimo sulla rete rumorosa, ma anche il secondo cammino migliore.

La procedura nel dettaglio dunque sarà la seguente:

- calcolo del cammino minimo sulla rete corrotta dal rumore;
- calcolo del secondo cammino minimo ;
- calcolo delle probabilità per il primo percorso;

- calcolo delle probabilità per il secondo percorso;
- si pesano poi le P_{FA} e P_{MD} dei due casi per la probabilità di confondere un cammino con l'altro.

Sono riportate per comodità le formule il gioco per la stima in questo caso.

$$P_{FA} = 2 * Q \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma_{i,j}^2 + \sigma_{i,j}^2}} \right), \quad (7.3.4)$$

$$\begin{aligned} P_{MD} &= \\ &= P \left[\left| X_2 + W_2 - \widehat{d}_{i,j} \right| < \varepsilon \mid W_2 < X_1 + W_1 - X_2 \right] P [X_1 + W_1 > X_2 + W_2] + \\ &+ P \left[\left| X_1 + W_1 - \widehat{d}_{i,j} \right| < \varepsilon \mid W_1 < X_2 + W_2 - X_1 \right] P [X_1 + W_1 < X_2 + W_2]. \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

L'integrale espresso precedentemente per il calcolo della probabilità di Miss Detection durante l'esecuzione dell'algoritmo viene calcolato per via numerica.

La Figura 7.5 propone il confronto tra questa soluzione appena proposta e quella iniziale in cui si considerava solamente il cammino stimato migliore.

Come si può notare la curva si avvicina moltissimo alle prestazioni limite del caso frequentistico, dimostrando che effettivamente l'analisi teorica era corretta.

Il gap con la soluzione iniziale facilmente visibile è confermato anche dalla seguente considerazione. Trattando un modello di rete Smart Micro Grid, e dunque in realtà geograficamente limitate, le dimensioni dei collegamenti tra nodi adiacenti sono spesso molto simili, o comunque comparabili. Ecco che quindi l'evento di confondere un cammino minimo con uno leggermente più lungo non è così raro.

Anche questo grafico riporta il calcolo delle probabilità per una fissata potenza del rumore.

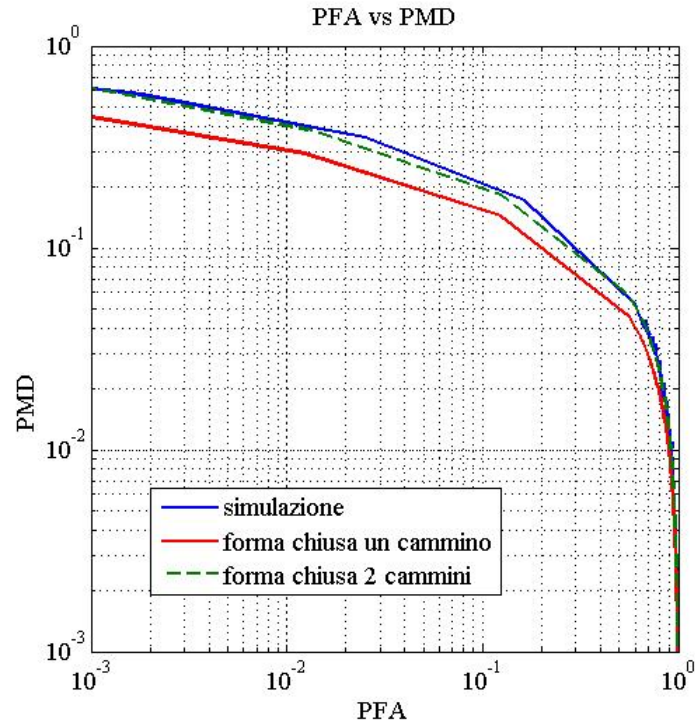


Figura 7.5: Andamento delle probabilità considerando due cammini nel caso di rumore gaussiano bianco con $\sigma = 6$.

7.3.3 Considerazioni sul numero di passi del cammino secondario

Tutte le considerazioni fin qui fatte risultano essere valide per una casistica piuttosto ampia. Tuttavia può essere utile analizzare come variano le prestazioni differenziando i vari casi a seconda del numero di passi che possiede il cammino non diretto.

Infatti la stima della soglia ottima potrebbe dipendere dalla lunghezza del cammino alternativo misurata in termini di hop, dato che ognuno di questi introduce un contributo di rumore.

Osservando le simulazioni effettuate modellando una Smart Micro Grid,

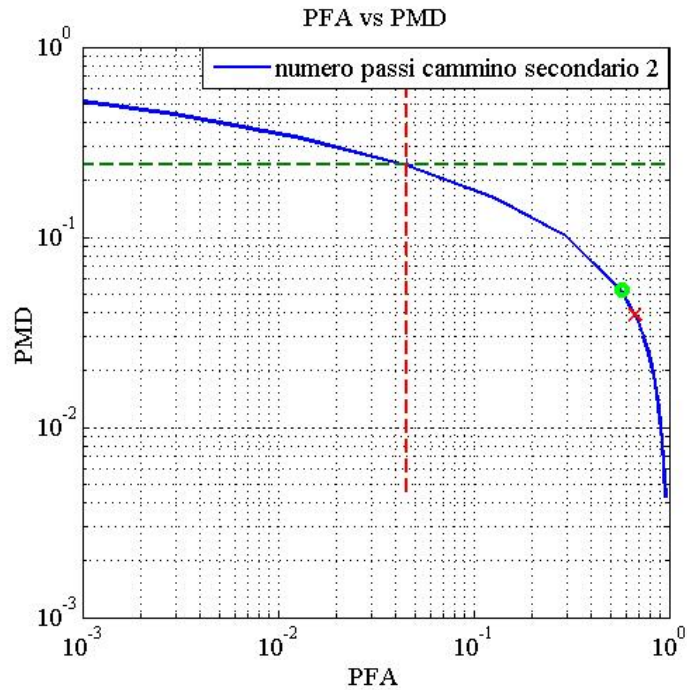


Figura 7.6: Andamento delle probabilità nel caso in cui il cammino alternativo sia composto da soli due passi. $\sigma = 6$.

spesso il cammino minimo è composto da due o tre passi, mentre più raramente attraversa quattro o più nodi.

Catalogando l'output proprio con questi tre eventi il risultato è quello visibile nelle Figure 7.6, 7.7, 7.8.

Per semplicità in questo caso viene riportata solamente la curva calcolata in modo frequentistico, sempre per una determinata potenza di rumore.

Si nota come ci sia un sostanziale peggioramento delle prestazioni in termini di errori commessi aumentando in numero di passi del cammino alternativo. Questo è dovuto al fatto che aumentando il numero dei passi, conseguentemente aumenta anche il numero di contributi di rumore gaussiano bianco sommati.

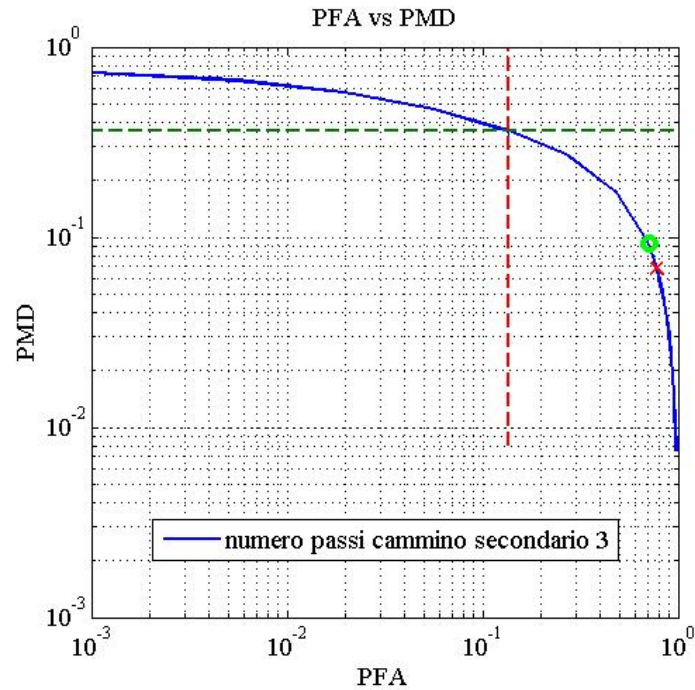


Figura 7.7: Andamento delle probabilità nel caso in cui il cammino alternativo sia composto da tre passi. $\sigma = 6$.

Osservando le curve sono stati inseriti alcuni marker in corrispondenza dello stesso valore della soglia ε . Questo per stimare se oltre ad esserci un peggioramento sulle prestazioni in termini di errore, ci fosse anche una dipendenza della soglia dal numero di passi.

Questa ipotesi come si nota trova riscontro positivo, e dunque scegliere l' ε ottimo a seconda del numero di passi del cammino alternativo risulta essere una soluzione che porta ad una migliore efficienza.

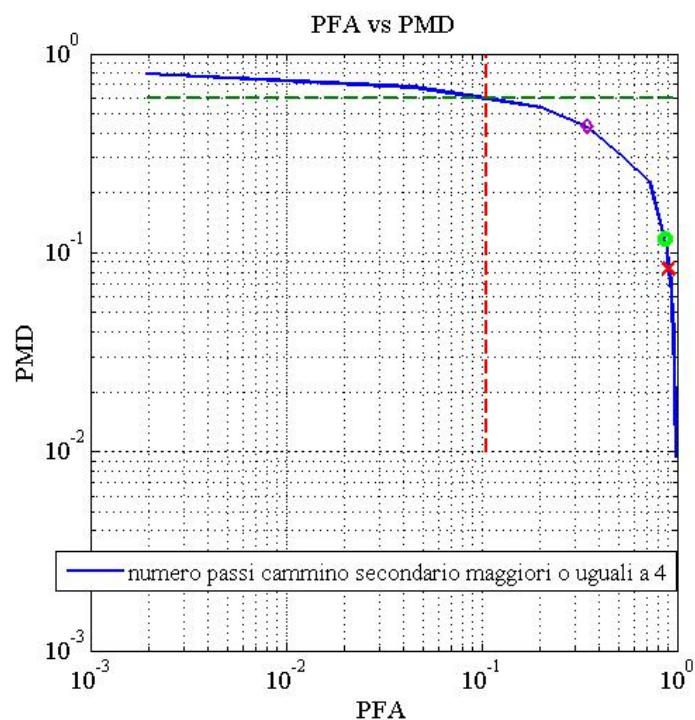


Figura 7.8: Andamento delle probabilità nel caso in cui il cammino alternativo sia composto da quattro o più passi. $\sigma = 6$.

7.3.4 Modello di rumore Gaussian Mixture

Anziché ipotizzare il rumore gaussiano bianco, si può pensare di descriverlo tramite un modello Gaussian Mixture.

Come visto in precedenza, il modello Gaussian Mixture può essere espresso tramite una sommatoria di gaussiane mediata da valori di probabilità derivati da una variabile aleatoria.

Osservando la distribuzione del rumore che corrompe le misurazioni durante le operazioni di ranging, sono stati stimati i parametri caratteristici di queste variabili.

Si è utilizzato il criterio di massima verosimiglianza (Maximum Likelihood, ML), in cui data una sequenza rappresentante il rumore si calcolano le medie e le varianze delle gaussiane tali che massimizzino la probabilità di avere ef-

fettivamente quella realizzazione. In particolare la sequenza viene generata con una simulazione che riprende fedelmente la realtà.

A partire da questo nuovo modello di rumore dunque si procede nelle operazioni di stima della soglia ottima. L'algoritmo si comporta allo stesso modo del caso gaussiano bianco, a differenza del passaggio in cui si va a corrompere la rete col disturbo generato.

La distribuzione considerata per la generazione delle impedenze di linea è Generalized Pareto.

Il passo successivo è quello del calcolo delle probabilità di Miss Detection e False Alarm, per il quale sono riportate brevemente le equazioni determinate nel paragrafo 6.2.

$$P_{FA} = \sum_n^{K^{N_P+1}} \left[Q \left(\frac{\varepsilon + m_n}{\sigma_n} \right) + Q \left(\frac{\varepsilon - m_n}{\sigma_n} \right) \right] \lambda_n, \quad (7.3.6)$$

mentre per la probabilità di Miss Detection si ha

$$P_{MD} = \sum_n^{K^{N_P+1}} \left[Q \left(\frac{-\varepsilon + m_n + d_{i,j} - d_{i,j}}{\sigma_n} \right) - Q \left(\frac{\varepsilon + m_n + d_{i,j} - d_{i,j}}{\sigma_n} \right) \right] \lambda_n. \quad (7.3.7)$$

Le simulazioni effettuate sono state realizzate modificando il numero di variabili normali che compongono la Gaussian Mixture. Questo per osservare se si verificano variazioni della soglia di decisione, e per provare a stimare il numero di componenti più adatto.

I parametri che modellano il rumore con un numero K pari a due gaussiane, sono riportati nella tabella sottostante:

| Gaussiana | λ | Media | Deviazione Standard |
|-----------|-----------|---------|---------------------|
| 1 | 0.9852 | -2.2380 | 10.6386 |
| 2 | 0.0148 | 14.4156 | 8.4291 |

In Figura 7.9 è riportato l'andamento delle probabilità di Miss Detection e

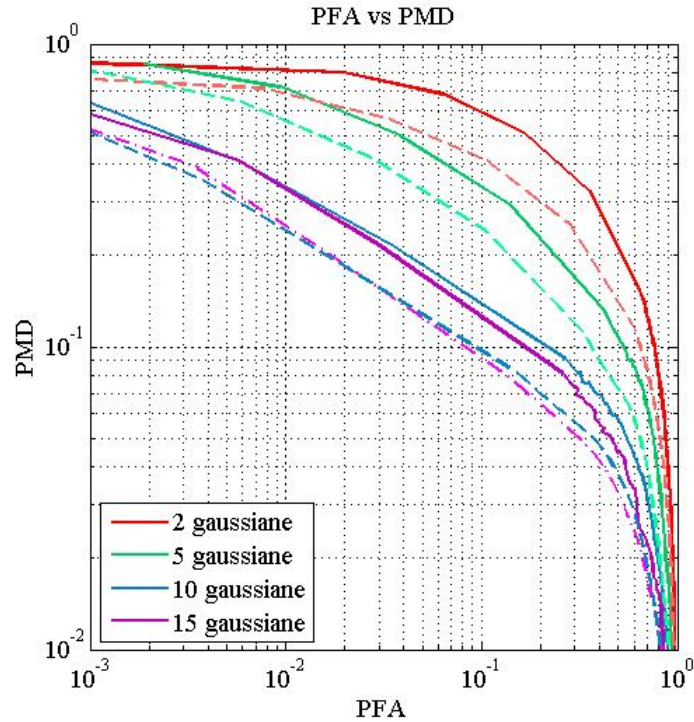


Figura 7.9: Calcolo delle probabilità con rumore Gaussian Mixture. La linea continua rappresenta il calcolo ottenuto in modo frequentistico, mentre quella tratteggiata il calcolo in forma chiusa.

False Alarm applicando come modello di rumore quello appena descritto. In particolare si può notare come vari l'andamento delle curve con l'aumentare del numero di gaussiane che descrivono il rumore. Utilizzando un modello Gaussian Mixture composto da poche componenti normali il numero di errori commessi risulta maggiore, mentre le probabilità di FA e MD diminuiscono affinando il modello che descrive il rumore.

Dal grafico si può dedurre che già con una decina di gaussiane si ottengono buone prestazioni, ed è quindi poco consigliabile aumentare ancora il numero di componenti. Questo infatti produrrebbe qualche miglioramento in termini di errori commessi, ma a discapito di una maggiore onerosità delle operazioni da svolgere.

Anche in questo caso le probabilità sono stimate sia in forma chiusa, che in modo frequentistico, e come per il caso gaussiano, la differenza che si nota è dovuta al fatto di considerare un solo cammino sulla rete rumorosa.

Nella seguente tabella sono riportati i parametri della Gaussian Mixture nel

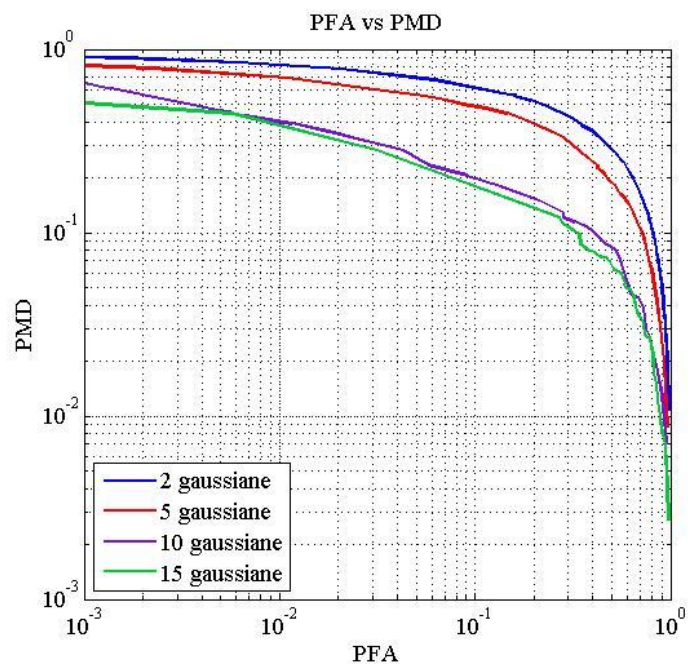


Figura 7.10: Calcolo delle probabilità con rumore Gaussian Mixture e diversa distribuzione delle impedenze.

caso in cui il rumore sia modellato con dieci variabili aleatorie gaussiane.

| Gaussiana | λ | Media | Deviazione Standard |
|-----------|-----------|---------|---------------------|
| 1 | 0.2838 | -6.5533 | 0.6612 |
| 2 | 0.0149 | 14.3787 | 8.5451 |
| 3 | 0.1584 | -1.2889 | 0.0328 |
| 4 | 0.2401 | -0.6901 | 0.3909 |
| 5 | 0.0213 | -5.5187 | 7.6698 |
| 6 | 0.2220 | 1.0704 | 2.2579 |
| 7 | 0.0113 | 5.9092 | 0.5687 |
| 8 | 0.0458 | -3.5466 | 0.0336 |
| 9 | 0.0018 | -0.6415 | 2.2537 |
| 10 | 0.0008 | 0.2447 | 3.0460 |

Nella Figura 7.10 è riportato l'andamento delle probabilità di FA e MD considerando una diversa distribuzione per le impedenze di linea, ovvero Gamma.

In questo caso è stato riportato solamente l'andamento delle curve calcolate in modo frequentistico. Questo per sottolineare ancora meglio che già con dieci gaussiane si ottengono prestazioni ottime, ed è quindi poco conveniente aumentarne ancora la numerosità.

7.4 Conclusioni

Questo lavoro fornisce un metodo risolutivo per ottenere una stima dell'effettiva topologia di una rete di distribuzione elettrica.

Analizzando i risultati precedentemente riportati si può notare come le prestazioni dell'algoritmo siano molto buone, garantendo basse probabilità di errore e dunque una stima molto affine alla realtà.

Interessante risulta il raffronto tra le varie casistiche presentate, e le importanti differenze che emergono nel confronto tra il caso gaussiano bianco e il modello Gaussian Mixture.

La scelta della soglia ottima da utilizzare nella realizzazione pratica di tale operazione dipende dunque da molteplici fattori. La potenza del rumore ad esempio influisce pesantemente sulle prestazioni dell'algoritmo.

Inoltre potrebbe avere senso utilizzare una metrica per la stima dell' ε ottimo diversa da quelle presentate, che in alcune particolari applicazioni non consideri con lo stesso peso gli errori di False Alarm e Miss Detection.

Come detto questo risultato è parte di un contesto più ampio, ovvero la gestione efficiente di una rete, che coinvolge molte altre considerazioni e problematiche.

Bibliografia

- [1] “ecomagination,” <http://ge.ecomagination.com/smartgrid>.
- [2] “Smart grid diagram,” <http://smartgrid.ieee.org/smart-grid-framework-diagram>.
- [3] T. Nelson and G. J. FitzPatrick, “Nist role in the interoperable smart grid,” *IEEE Power and Energy General Meeting*, pp. 25–29, 2010.
- [4] P. Tenti, D. Trombetti, A. Costabeber, and P. Mattavelli, “Distribution loss minimization by token ring control of power electronic interfaces in residential micro-grids,” *IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*, pp. 2377–2381, July 2010.
- [5] A. Costabeber, T. Erseghe, S. Tomasin, P. Tenti, and P. Mattavelli, “Optimization of micro-grid operation by dynamic grid mapping and token ring control,” *IEEE international conference on Power Electronics and Applications*, pp. 1–10, Sept. 2011.
- [6] D. Forner, T. Erseghe, S. Tomasin, and P. Tenti, “On efficient use of local sources in smart grids with power quality constraints,” *IEEE international conference on Smart Grid Communications*, pp. 255–260, Oct. 2010.
- [7] Z. Wang, A. Scaglione, and S. Galli, “Power line communications and the smart grid,” *First IEEE International Conference*, pp. 303–308, Oct. 2010.

-
- [8] D. J. Watts and S. H. Strogatz, "Collective dynamic of small-world networks," *Nature*, vol. 393, pp. 393–440, 1998.
- [9] Z. Wang, A. Scaglione, and R. Thomas, "Generating statistically correct random topologies for testing smart grid communication and control networks," *IEEE transaction on Smart Grid*, vol. 1, no. 1, pp. 28–39, June 2010.
- [10] H. Frank, "Shortest path in probabilistic graph," *Operation Research*, no. 4, June 1968.
- [11] R. P. Loui, "Optimal paths in graphs with stochastic or multidimensional weights," *Communications of the ACM*, vol. 26, no. 9.
- [12] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis, "An analysis of stochastic shortest path problem," *Mathematics of Operations Research*, vol. 16, pp. 580–595, 1991.
- [13] G. H. Polychronopoulos and J. N. Tsitsiklis, "Stochastic shortest path problems with recourse," *Networks*, vol. 27, pp. 133–143, 1996.
- [14] I. Murthy and S. Sarkar, "Stochastic shortest path problems with piecewise-linear concave utility function," *Journal of Management Sciences*, vol. 44, no. 11.
- [15] D. D. M. L. Rasteiro and A. J. B. Anjo, "Optimal path in probabilistic networks," *Journal of Mathematical Sciences*, pp. 974–987, Oct. 2004.
- [16] L. Deng and M. D. F. Wong, "An exact algorithm for the statistical shortest path problem," in *Conference on Design Automation, Asia and South Pacific*, Jan. 2006, pp. 965–970.
- [17] L. K. Hwang, "Stochastic Shortest Path Algorithm based on Lagrangian Relaxation," Master's thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2010.

-
- [18] M. Fischetti, *Lezioni di Ricerca Operativa*. Padova: Libreria Progetto, 1999.
- [19] “Algoritmi e strutture dati - algoritmi su grafi: Mst e cammini minimi,” <http://www.cs.unicam.it/merelli/algoritmi08/algo-su-grafi.pdf>.
- [20] N. Benvenuto, R. Corvaja, T. Erseghe, and N. Laurenti, *Communication Systems*. John Wiley and Sons, 2007.
- [21] M. Guarnieri and G. Malesani, *Elementi di Elettrotecnica - Reti Elettriche*. Padova: Progetto, 2002.
- [22] (2002) The IEEE website. [Online]. Available: <http://www.ieee.org/>
- [23] “Smart grid conceptual model,” <http://www.sgiclearinghouse.org/ConceptualModel>.
- [24] “Scrivere la tesi di laurea con Latex,” <http://www.guit.sssup.it/guitmeeting/2005/articoli/mori.pdf>.