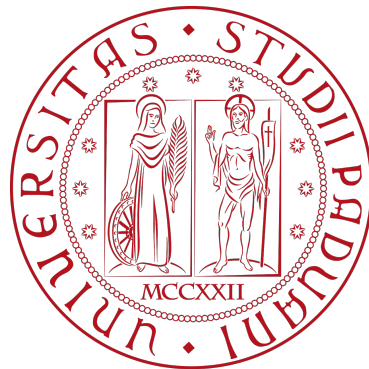


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Corso di Laurea Triennale in

INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE



Tesi Laurea Triennale

MODELLISTICA E CONTROLLO DEL SISTEMA
MECCANICO DI UN SOTTOMARINO

Relatore: Prof. ssa Valcher Maria Elena

Laureanda: Pegoraro Giulia
Matricola: 1222372

Anno Accademico 2021/2022
20 Luglio 2022

Sommario

Lo scopo di questo studio è quello di realizzare un modello del sistema dinamico del sottomarino, linearizzarlo attorno a una condizione di equilibrio e progettare in seguito un controllore stabilizzante che permetta il soddisfacimento di alcune specifiche di progetto. Le nozioni e gli strumenti utilizzati per la stesura di questa tesi appartengono ai corsi di Controlli Automatici e Sistemi e Modelli che usano inoltre, come supporto, l'ambiente di calcolo numerico e simulazione MATLAB. Il sistema sotto analisi è governato da equazioni differenziali del secondo ordine e si procederà come prima cosa a trovare dei parametri per mantenere un certo equilibrio, poi alla linearizzazione del sistema, successivamente alla valutazione della stabilità di esso e infine alla sintesi di un controllore stabilizzante. Verrà fatto uso di grafici e diagrammi ricavati tramite MATLAB.

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Introduzione alla storia del sottomarino	3
1.2	Concetti alla base della teoria del controllo	6
2	Descrizione del sistema in esame	8
2.1	Equazioni descrittive del sistema in esame	9
2.2	Modello di stato del sistema e sua linearizzazione attorno alla condizione di equilibrio	10
3	Stabilità del sistema linearizzato e grafico della risposta in frequenza	12
3.1	Studio della stabilità del modello di stato	12
3.2	Diagramma di Bode della risposta in frequenza	14
4	Sintesi di un controllore stabilizzante	16
4.1	Sintesi per tentativi	17
5	Conclusioni	21

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Introduzione alla storia del sottomarino

A partire dai tempi antichi, l'uomo ha sempre cercato di operare sott'acqua. Dai semplici sommergibili ai sottomarini nucleari, gli esseri umani hanno cercato un mezzo per rimanere al sicuro sott'acqua per ottenerne vantaggio in guerra, con conseguente sviluppo del sottomarino. Il sottomarino è un mezzo navale progettato per navigare in immersione (caratteristica che lo contraddistingue dal sommergibile che rimane in superficie); esso può essere impiegato per scopi militari, scientifici e di soccorso e ha caratteristiche che lo distinguono in base agli impieghi. Sembra che il primo progetto conosciuto di nave subacquea risalgia al 1472, anno in cui il veneziano Roberto Valturio pubblicava il "De Re Militari", libro in cui descriveva una macchina propulsiva costituita da due ruote azionate a braccia. Nel 1578 il matematico inglese William Bourne realizzava il primo prototipo di sottomarino, comprendendo che dovesse rispettare il principio idrostatico di Archimede, ovvero dovesse avere a parità di volume una massa superiore a quella dell'acqua. Il suo trattato in materia anticipava l'uso di zavorra e doppi fondi da allagare per immergersi, nonché descriveva un tubo tramite il quale l'aria poteva venire rigenerata all'interno. La struttura immaginata era composta da legno con dei giunti di cuoio a tenuta stagna ed un meccanismo a vite che permetteva di variarne il volume.

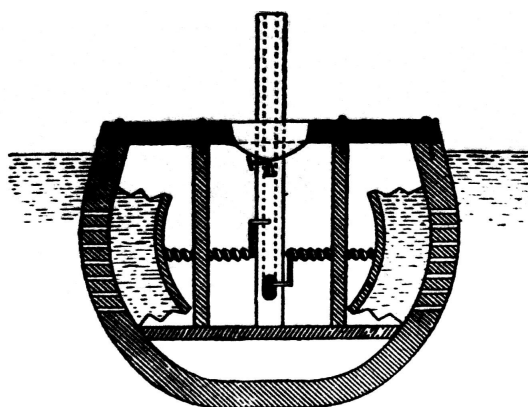


Figura 1.1: Il sottomarino di William Bourne

Successivamente Cornelius Van Drebbel, un olandese al servizio di Giacomo I d'Inghilterra, progettava e costruiva il primo sottomarino di successo nel 1620, azionato a remi; la natura precisa non è chiara, perché i suoi piani e disegni ingegneristici non sono sopravvissuti fino ai giorni nostri e si può solo immaginare come operasse. Alcune ricerche dicono assomigliasse a una campana trainata da una barca. Era un'imbarcazione di legno chiusa che poteva scendere sotto la superficie e riaffiorare a piacere in quanto usava una paratia di cuoio che poteva espandersi, essere pressata e fatta tornare nella posizione originale, espellendo l'acqua di zavorra. Il sottomarino veniva poi testato nel Tamigi nel 1628 e percorreva alcuni chilometri sott'acqua, emergendo a Greenwich: il primo viaggio subacqueo effettuato con successo nella storia.

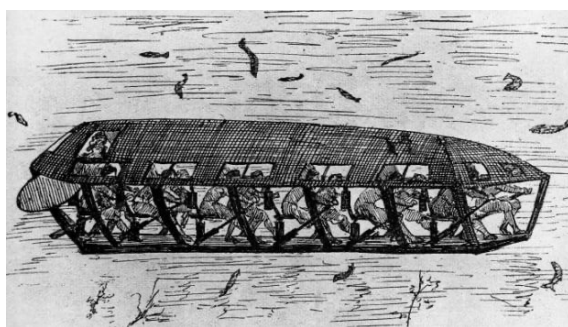


Figura 1.2: Il sottomarino di Cornelius Van Drebbel

Durante la Rivoluzione Americana, l'inventore laureato a Yale, David Bushnell, fornì ai coloni un'arma segreta sotto forma di un sottomarino sperimentale chiamato "Turtle" (dall'inglese "tartaruga"). Questa imbarcazione in legno per un solo uomo faceva affidamento a una manovella azionata manualmente e ad un pedale per la propulsione. Un serbatoio dell'acqua a pedale gli consentiva di immergersi e risalire in superficie e la zavorra di piombo lo teneva in posizione verticale nell'acqua. Se utilizzato correttamente, era in grado di avvicinarsi a una nave nemica inosservato e utilizzare una vite per piantare una mina piena di polvere da sparo. Nelle prime ore del mattino del 7 settembre 1776,

il soldato dell'esercito continentale, Ezra Lee, lanciò il primo attacco sottomarino della storia quando pilotò la tartaruga sotto la nave da guerra britannica HMS Eagle nel porto di New York. Lee aveva ricevuto solo un addestramento basilare tuttavia, e dopo aver fallito nel collegare una bomba a orologeria allo scafo della nave, interruppe la missione e fece esplodere la sua mina in mare aperto. Bushnell in seguito abbandonò il progetto del sottomarino dopo che anche molte altre missioni non riuscirono ad affondare una nave nemica, sebbene la sua invenzione gli valse il rispetto dei suoi compagni patrioti.

Negli anni a venire furono progettati e realizzati altri tipi di sottomarini con tecnologie sempre più evolute, si ricorda in particolare il "Nautilus" inventato nel 1801 dall'americano Robert Fulton, il primo a considerare un sottomarino dotato di motore, che superò vari collaudi con successo.

I sottomarini militari ebbero per la prima volta un impatto significativo nella prima guerra mondiale. Forze come gli U-Boot, che funzionavano come pratiche macchine da guerra, si basavano su nuove tattiche e tecnologie sottomarine come il sistema di alimentazione diesel-elettrico combinato sviluppato negli anni precedenti. Prima e durante la seconda guerra mondiale, il ruolo principale del sottomarino era la guerra antinavale. I sottomarini attaccavano in superficie usando i cannoni sul ponte o sommersi usando i siluri. Furono particolarmente efficaci nell'affondare il trasporto transatlantico dell'Alleanza in entrambe le guerre mondiali e nell'interrompere le rotte di rifornimento giapponesi e le operazioni navali nel Pacifico durante la seconda guerra mondiale.

I sottomarini moderni sono a forma di sigaro. Questo design, utilizzato anche nei primissimi sottomarini, è talvolta chiamato "scafo a goccia". Riduce la resistenza idrodinamica quando il sottomarino è sommerso, ma diminuisce le capacità di tenuta al mare e aumenta la resistenza in superficie. Poiché i limiti dei sistemi di propulsione dei primi sottomarini li costringevano a operare in superficie per la maggior parte del tempo, il design del loro scafo era un compromesso. A causa delle lente velocità in immersione di quei sottomarini, di solito, ben al di sotto di 10 kt (18 km/h), la maggiore resistenza aerodinamica per i viaggi sott'acqua era accettabile. Verso la fine della seconda guerra mondiale, quando la tecnologia consentì operazioni sommerse più veloci e più lunghe e una maggiore sorveglianza degli aerei costrinse i sottomarini a rimanere sommersi, i design dello scafo furono di nuovo a forma di lacrima per ridurre la resistenza e il rumore. L'USS Albacore (AGSS-569) era un sottomarino da ricerca unico che ha aperto la strada alla versione americana dello scafo a goccia (a volte indicato come "scafo Albacore") dei moderni sottomarini. I più recenti sottomarini realizzati sfruttano la propulsione nucleare ma, per il costo e l'ingombro elevato dei reattori nucleari, quelli di taglie minori usano tuttora la propulsione diesel-elettrica.



Figura 1.3: Un sottomarino nucleare moderno

1.2 Concetti alla base della teoria del controllo

Definizione di sistema e di modello di stato Con la parola “sistema” (o più precisamente “sistema dinamico”) si vuole evocare un oggetto che evolve nel tempo e le cui variabili descrittive, dette variabili di stato, se pur diverse, interagiscono tra loro; esso è influenzato da segnali esterni, detti ingressi, e produce come risultato dei segnali misurabili, detti uscite. Del sistema fisico in esame si cerca un modello matematico che costituisca, per il caso specifico che si intende analizzare, un ragionevole compromesso tra l’esigenza di modellare i fenomeni che lo interessano nel modo più preciso possibile ed il bisogno di disporre di un modello computazionalmente ragionevole. Il concetto di modello di stato è fondamentale per ottenere le conoscenze su un sistema affinché lo si possa controllare. Quest’ultimo si compone essenzialmente di tre elementi:

- Un insieme di equazioni differenziali del primo ordine, ognuna delle quali descrive le derivate temporali delle variabili di stato come combinazione lineare di tutte le variabili di stato e dell’ingresso. Tali equazioni illustrano il comportamento dinamico del sistema.
- Un’equazione che esprime il comportamento statico del sistema, ovvero, l’uscita in funzione del tempo come combinazione lineare di tutte le variabili di stato e dell’ingresso (sempre in funzione del tempo).
- Lo stato iniziale del sistema all’istante temporale t_0^- .

Ciò che lo rende importante è il fatto che, tramite nozioni matematiche, possa avere capacità di predire le uscite future dal sistema sollecitato da variabili di stato e ingressi diversi da quelli già osservati. Esistono due approcci per costruire un modello: il primo presuppone nota la struttura fisica e i parametri del sistema da modellare ed è ottenuto unendo le equazioni che dominano queste caratteristiche (anche detto modello a scatola bianca); il secondo prevede invece l’identificazione del sistema nel caso in cui quest’ultimo sia caratterizzato da struttura e parametri incogniti, il corrispondente modello è quindi legato a procedure sperimentali per la misura di ingressi e uscite che permettono di stimare le variabili descrittive (chiamato anche modello a scatola nera). I sistemi reali sono sempre causali, ovvero ad ogni causa che ha inizio ad un istante t , il sistema risponde con un effetto che non ha inizio prima di t . Come cause non si considerano solo gli ingressi ma anche le condizioni iniziali del sistema all’istante t_0^- che fungono da stato o memoria del sistema in quanto sintetizzano l’informazione sull’evoluzione passata del sistema (per $t < t_0$).

Definizione di stabilità di un modello di stato Dato un modello di stato lineare a tempo continuo definiamo due tipologie di stabilità: quella asintotica se, in assenza di ingresso di controllo, le evoluzioni libere dello stato convergono asintoticamente a zero per tutte le possibili condizioni iniziali e la stabilità BIBO (bounded input/bounded output) se, date condizioni iniziali nulle, il sistema risponde ad ogni ingresso causale limitato con un'uscita causale limitata. Un sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutti i suoi modi elementari sono convergenti o equivalentemente se le radici del polinomio caratteristico del sistema sono tutte a parte reale negativa; ed è invece BIBO stabile se e solo se tutti i modi elementari della risposta impulsiva sono convergenti o equivalentemente se la funzione di trasferimento ha tutti i poli a parte reale negativa. Essendo l'insieme dei poli della funzione di trasferimento $W(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ un sottoinsieme degli zeri di $d(s)$ (tenendo presente che $d(s)$ è il polinomio caratteristico della matrice di stato), si deduce che la stabilità asintotica implica sempre la stabilità BIBO ma non viceversa, la spiegazione di ciò deriva dalla presenza di eventuali cancellazioni tra $n(s)$ e $d(s)$.

Capitolo 2

Descrizione del sistema in esame

Il sistema che verrà studiato è raffigurato nell'immagine sottostante, si tratta di un sottomarino telecomandato da remoto (ROV, dall'inglese Remotely Operated Vehicle); è di interesse studiarne il moto in immersione ovvero il moto in profondità combinato con quello rettilineo e per fare ciò si adottano delle semplificazioni sul sistema fisico della realtà. Il modello del ROV si compone di un cilindro cavo in metallo cavo dotato di motori per la propulsione e il principio di funzionamento per l'immersione e la risalita si basa sul riempimento e lo svuotamento di acqua dei compartimenti stagni interni. Il piano sul quale dimensioniamo il modello ha due assi dimensionali: asse x trasversale e asse y verticale di pitch convenzionalmente rivolto verso il basso (anche chiamato asse di beccheggio, il moto oscillatorio che un'imbarcazione compie attorno al proprio asse trasversale per effetto del moto ondoso).

Dal momento che si sta considerando l'immersione di un sottomarino in un fluido, supposto essere acqua, c'è la necessità di considerare la spinta di Archimede (che noi indicheremo con la forza B , dovuta al principio fisico che prende appunto il nome di principio di Archimede ed enuncia che un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del liquido spostato; tale spinta ha la stessa direzione e lo stesso modulo della forza peso ma verso opposto. Le grandezze fisiche intrinseche che descrivono il sottomarino sono la massa M e il momento di inerzia J rispetto all'asse di pitch, mentre le forze che lo governano sono tre: F , F_L applicate dai motori e la spinta di galleggiamento B . Si indica con $z(t)$ la posizione del centro di massa del ROV, con $p(t)$ la posizione della prua del ROV e con $\theta(t)$ l'angolo di pitch rispetto al tempo t quindi, $p(t) = z(t) - b\sin\theta(t)$ (le convenzioni di segno rispetto al sistema di riferimento sono osservabili dalla figura).

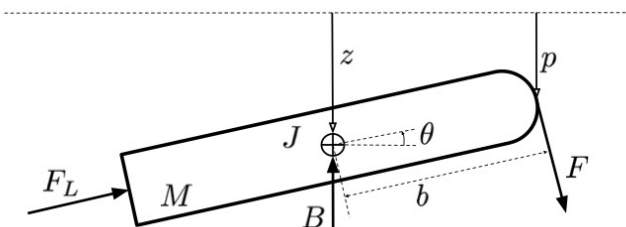


Figura 2.1: Il modello del ROV

I valori noti sono $M = 580 \text{ kg}$, $J = 560 \text{ Nms}^2$, $B = 20 \text{ N}$ e $b = 1.2 \text{ m}$ e ricorrono in tutto l'elaborato.



Figura 2.2: Immagine di un ROV

2.1 Equazioni descrittive del sistema in esame

Per descrivere il moto traslatorio in immersione del ROV è necessario utilizzare la seconda legge di Newton (nonché secondo principio della dinamica) che enuncia la proporzionalità della forza agente su un corpo rispetto alla sua accelerazione, ovvero $\vec{F}_{TOT} = M\vec{a}$.

La somma totale delle forze agenti sul corpo è data dalle componenti verticali delle varie forze, prese con segno positivo se rivolte verso il basso e con segno negativo altrimenti (è stato preso convenzionalmente l'asse y di riferimento verso il basso trattandosi di un'immersione in profondità). La prima equazione risultante è quindi:

$$M\ddot{z}(t) = F\cos(\theta(t)) - K_z\cos(\theta(t))\dot{z}(t) - F_L\sin(\theta(t)) - B \quad (2.1)$$

Per poter invece descrivere il moto rotatorio in profondità, dovuto alle oscillazioni sull'asse di pitch è utile la legge fondamentale della dinamica rotazionale che è l'equivalente della seconda legge di Newton con la differenza che la somma delle forze è sostituita dalla somma dei momenti, la massa dal momento di inerzia e l'accelerazione lineare da quella angolare. La seconda equazione risulta essere:

$$J\ddot{\theta}(t) = -K_r(\dot{\theta}(t)) - K_\theta\sin(\theta(t)) - Fb \quad (2.2)$$

Il momento della forza B è uguale a 0 essendo la distanza dal centro di massa al punto di applicazione della forza nulla. K_z , K_r e K_θ rappresentano i parametri del sistema legati a velocità e orientazione del ROV e valgono rispettivamente $133 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$, 168 Nms , 143 Nm . Si sottintende che le derivate presenti nelle due equazioni siano rispetto al tempo t .

Si cerca ora di determinare le forze F , F_L e la profondità z in funzione della spinta di galleggiamento B , ipotizzando le condizioni di equilibrio per mantenere un'inclinazione rispetto all'asse di pitch di $\bar{\theta} = \frac{\pi}{6}$. Affinché il sistema risulti in equilibrio basta imporre che $\ddot{z}(t) = \dot{z}(t) = \ddot{\theta}(t) = \dot{\theta}(t)$ siano simultaneamente uguali a zero, ovvero che la somma risultante delle forze applicate per entrambi i moti sia nulla. Per soddisfare la condizione appena descritta, l'equazione (2.1) deve essere:

$$\frac{F \cos(\theta(t))}{M} - \frac{F_L \sin(\theta(t))}{M} - \frac{B}{M} = 0 \quad (2.3)$$

e l'equazione (2.2):

$$\frac{K_\theta}{J} \sin(\theta(t)) - \frac{b}{J} F = 0 \quad (2.4)$$

Sostituendo $\theta = \frac{\pi}{6}$ ($\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$) nelle due equazioni appena ricavate si ha:

$$\begin{aligned} F \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{F_L}{2} - B &= 0 \\ -\frac{K_\theta}{2} - bF &= 0 \end{aligned}$$

Si trova immediatamente l'unica soluzione $F = -\frac{K_\theta}{2b}$ e $F_L = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{K_\theta}{b} - 2B$, mentre la quota z non compare in nessuna delle equazioni (2.3), (2.4), di conseguenza è possibile assumerla con valore arbitrario.

2.2 Modello di stato del sistema e sua linearizzazione attorno alla condizione di equilibrio

Si introducono le variabili di stato $x_1(t) = z(t)$, $x_2(t) = \theta(t)$, $x_3(t) = \dot{z}(t)$ e $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$, gli ingressi F e F_L e l'uscita del sistema $y = p(t) = z(t) - b \sin(\theta(t))$ (ricordando che $p(t)$ corrisponde alla posizione della prua del ROV), ottenendo il modello di stato non lineare del ROV:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{u_1(t)}{M} \cos(x_2(t)) - \frac{K_z}{M} \cos(x_2(t)) x_3(t) - \frac{u_2(t)}{M} \sin(x_2(t)) \\ \dot{x}_4(t) = -\frac{K_r}{J} x_4(t) - \frac{K_\theta}{J} \sin(x_2(t)) - \frac{b}{J} u_1(t) \\ y(t) = x_1(t) - b \sin(x_2(t)). \end{cases} \quad (2.5)$$

Se assumiamo che i due ingressi u_1 e u_2 siano entrambi nulli, i punti di equilibrio del sistema in corrispondenza a tali valori degli ingressi risultano essere quelli che assicurano che

$$\begin{cases} 0 = x_3 \\ 0 = x_4 \\ 0 = -\frac{K_z}{M} \cos(x_2) x_3 \\ 0 = -\frac{K_r}{J} x_4 - \frac{K_\theta}{J} \sin(x_2). \end{cases} \quad (2.6)$$

È immediato rendersi conto del fatto che tra tali punti di equilibrio ad ingresso costante c'è lo stato di coordinate $x_{eq1} = x_{eq2} = x_{eq3} = x_{eq4} = 0$. Se si assume che la variabile di stato $x_2(t)$, che corrisponde all'angolo di inclinazione sull'asse di pitch $\theta(t)$, sia molto piccola così che valgano le approssimazioni $\text{sen}(x_2(t)) \approx x_2(t)$ e $\text{cos}(x_2(t)) \approx 1$, il comportamento del precedente modello di stato (2.5) in un intorno del punto di equilibrio nullo (in corrispondenza ad ingressi nulli) risulta approssimabile dal seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{u_1(t)}{M} - \frac{K_z}{M}x_3(t) - \frac{u_2(t)}{M}x_2(t) \\ \dot{x}_4(t) = -\frac{K_r}{J}x_4(t) - \frac{K_\theta}{J}x_2(t) - \frac{b}{J}u_1(t) \\ y(t) = x_1(t) - bx_2(t). \end{cases} \quad (2.7)$$

Questo modello lineare è esprimibile nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove A e C sono le matrici dei coefficienti che pesano le variabili di stato, mentre B e D sono le matrici dei coefficienti che pesano gli ingressi (D contiene solo elementi nulli).

Specificatamente le matrici A, B, C sono le seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K_z}{M} & 0 \\ 0 & -\frac{K_\theta}{J} & 0 & -\frac{K_r}{J} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 \\ -\frac{b}{J} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad -b \quad 0 \quad 0].$$

Inserendo i valori numerici negli elementi delle matrici del sistema linearizzato si ottengono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.23 & 0 \\ 0 & -0.26 & 0 & -0.30 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0017 & 0 \\ -0.0021 & 0 \end{bmatrix}, C = [1.0 \quad -1.2 \quad 0 \quad 0] \quad (2.8)$$

Le variabili di stato $\Delta x(t)$ e gli ingressi $\Delta u(t)$ possono venire sostituiti rispettivamente da $x(t)$ e $u(t)$ in quanto i punti di equilibrio sono uguali a zero e la traslazione a partire dai punti originali sarà di conseguenza nulla.

Capitolo 3

Stabilità del sistema linearizzato e grafico della risposta in frequenza

3.1 Studio della stabilità del modello di stato

Per procedere con lo studio della stabilità BIBO del modello di stato è di nostro interesse calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ nel dominio di Laplace. Esistono due strade percorribili per poterla ricavare: la prima prevede di applicare la trasformata di Laplace alle varie equazioni ed effettuare delle sostituzioni tra esse, la seconda, che sarebbe anche quella più naturale, sfrutta la linearità della trasformata nelle matrici del modello linearizzato calcolate in precedenza.

Applichiamo la trasformata di Laplace al modello lineare, ottenendo:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) \end{cases} \quad (3.1)$$

da cui si ricava:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x(0) \quad (3.2)$$

e quindi:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B]U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0) \quad (3.3)$$

Ponendo lo stato iniziale a zero ($x(0) = 0$) si ottiene:

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (3.4)$$

e di conseguenza:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (3.5)$$

Da cui ricaviamo immediatamente la funzione di trasferimento:

$$G(s) := \frac{(s - 0.97)(s + 0.025)}{(s + 0.23)(s^2 + 0.3s + 0.26)}. \quad (3.6)$$

Ci si chiede se $G(s)$ sia BIBO stabile, ovvero se il denominatore della funzione di trasferimento $p(s) = (s+0.23)(s^2+0.3s+0.26)$ sia di Hurwitz (un polinomio in $\mathfrak{R}[s]$ le cui radici sono tutte a parte reale negativa viene detto polinomio di Hurwitz). In questo caso la condizione di Hurwitzianità è facile da verificare e non risulta necessario applicare il Criterio di Routh al polinomio. Si vede chiaramente che il primo termine moltiplicativo di $p(s)$ corrisponde ad uno zero reale negativo, mentre per il secondo termine moltiplicativo basta utilizzare la regola di Cartesio, valida solo per i polinomi di grado $n = 2$, che stabilisce che un polinomio è di Hurwitz se e solo se tutti i suoi coefficienti sono non nulli e di ugual segno. Si deduce quindi, da ciò che è appena stato verificato, che $G(s)$ è BIBO stabile.

È possibile osservare dalla risposta al gradino del grafico sottostante, ottenuta tramite comandi MATLAB che effettivamente c'è stabilità BIBO, in quanto a un ingresso limitato il sistema risponde con un'uscita forzata limitata.

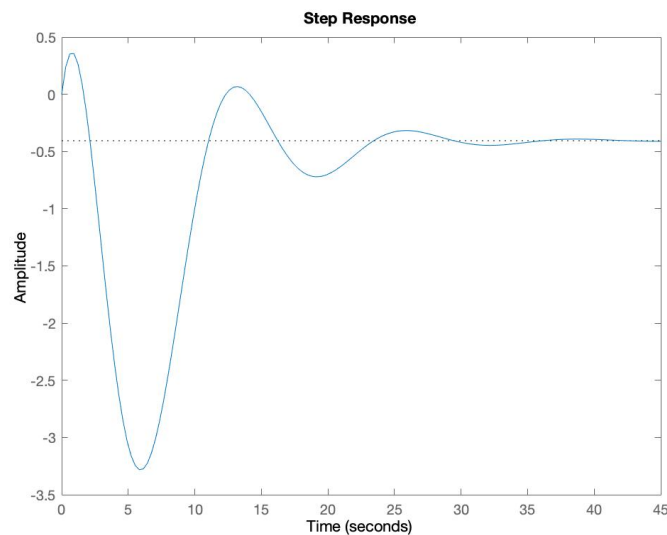


Figura 3.1: La risposta al gradino

Per sapere invece se il modello di stato è asintoticamente stabile si verifica se il polinomio caratteristico della matrice A trovata in precedenza (composta dai coefficienti che pesano le variabili di stato) $p(s) = s^2(s+0.23)(s+0.3)$ sia di Hurwitz. Si vede chiaramente che il primo termine moltiplicativo di $p(s)$ corrisponde ad uno zero doppio nell'origine, mentre gli altri due termini a due zeri semplici a parte reale negativa, perciò non c'è stabilità asintotica.

3.2 Diagramma di Bode della risposta in frequenza

Il diagramma di Bode è una delle rappresentazioni della risposta in frequenza di un sistema, definita come una funzione complessa a variabile reale ω :

$$G(j\omega) \triangleq \int_{0^-}^{+\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt.$$

È noto che, in ipotesi di BIBO stabilità, $G(j\omega) \equiv G(s)|_{s=j\omega}$. Per tracciare il diagramma di Bode bisogna rappresentare il diagramma delle ampiezze dei moduli, che riporta il logaritmo del modulo della risposta in frequenza in ordinata ($|G(j\omega)|_{dB} \triangleq 20 \log_{10} |G(j\omega)|$) e in ascissa il logaritmo della pulsazione, e il diagramma delle fasi che ha in ordinata l'argomento della risposta in frequenza in gradi e in ascissa anch'esso il logaritmo della pulsazione.

Si riconduce la funzione di trasferimento alla forma di Bode, che in questo caso è del tipo:

$$G(s) = K_B \frac{(1 - sT_1)(1 + sT_2)}{(1 + sT_3)(1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{(\omega_n)^2})},$$

dove $K_B \in \Re$ è il guadagno di Bode, T_1, T_2, T_3, T_4 sono costanti di tempo, ω_n prende il nome di pulsazione naturale e ξ di coefficiente di smorzamento.

$$G(s) = -\frac{4}{10} \frac{(1 - s\frac{100}{97})(1 + s\frac{1000}{25})}{(1 + s\frac{100}{23})(1 + s + s^2)} \approx -\frac{4}{10} \frac{(1 - s)(1 + 4 \cdot 10s)}{(1 + 4s)(1 + s + s^2)}. \quad (3.7)$$

Svolgendo i calcoli si trova che $K_B \approx -\frac{4}{10}$, $\omega_n \approx 10^0$ e $\xi \approx \frac{1}{2}$.

Si passa ora ad analizzare i vari termini che compongono la funzione di trasferimento:

- Il guadagno di Bode $K_B \approx -\frac{4}{10}$ fa mantenere costante il diagramma delle ampiezze a $20 \log_{10} |K_B| \approx -10dB$ e quello delle fasi a 180° ;
- Lo zero semplice stabile con costante di tempo T_1 alza il diagramma delle ampiezze di $20 \frac{dB}{dec}$ e quello delle fasi di 90° a partire dalla pulsazione di spezzamento $\omega_1 = \frac{1}{|T_1|} = 10^0$;
- Lo zero semplice instabile con costante di tempo T_2 alza il diagramma delle ampiezze di $20 \frac{dB}{dec}$ e abbassa quello delle fasi di 90° a partire dalla pulsazione di spezzamento $\omega_2 = \frac{1}{|T_2|}$;
- Il polo semplice stabile con costante di tempo T_3 abbassa il diagramma delle ampiezze di $20 \frac{dB}{dec}$ e quello delle fasi di 90° a partire dalla pulsazione di spezzamento $\omega_3 = \frac{1}{|T_3|}$;
- Il termine trinomio ha come radici una coppia di poli complessi coniugati stabili quindi abbassa il diagramma delle ampiezze di $40 \frac{dB}{dec}$ e quello delle fasi di 180° a partire dalla pulsazione di spezzamento ω_n .

A seguito dell'analisi dettagliata appena svolta si ottiene il diagramma di Bode sottostante, ottenuto tramite la piattaforma di calcolo numerico MATLAB:

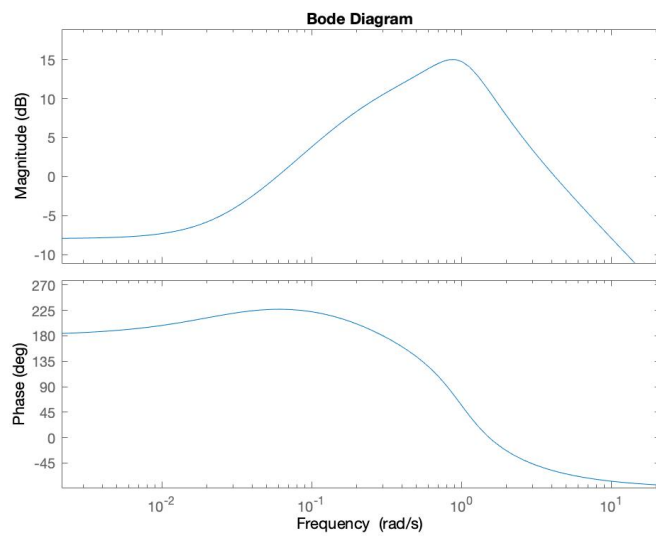


Figura 3.2: Il diagramma di Bode

Capitolo 4

Sintesi di un controllore stabilizzante

Si vuole progettare una struttura di controllo in retroazione negativa con lo scopo di portare il ROV da una quota iniziale a una desiderata, garantendo al contempo che il sistema rispetti alcune specifiche. Per poter applicare la sintesi per tentativi è necessario verificare che il sistema soddisfi alcune ipotesi preliminari, ovvero che sia descritto da una funzione di trasferimento $G(s) \in \mathfrak{R}(s)$ propria e con tutti i poli a parte reale negativa ad eccezione di un eventuale polo in 0 e non abbia zeri in 0. Queste ipotesi sono tutte soddisfatte dalla $G(s)$ ricavata in precedenza e si può applicare la sintesi per tentativi standard.

Lo schema generale del controllo in retroazione a cui facciamo riferimento è il seguente:

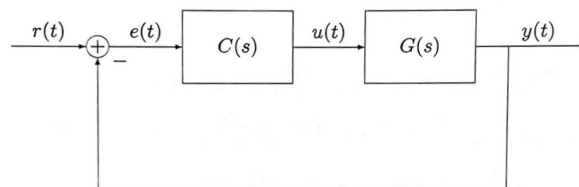


Figura 4.1: Schema di controllo in retroazione negativa

Il problema di controllo della quota del ROV si riduce fondamentalmente a un problema di regolazione in cui si vuole far portare e mantenere l'uscita $y(t)$ a un valore desiderato costante, a regime, imposto dall'ingresso del sistema complessivo $r(t)$, anch'esso costante. Il segnale differenziale $e(t) = r(t) - y(t)$ rappresenta l'errore che il sistema compie per far sì che il segnale di uscita $y(t)$ insegua $r(t)$ ed è l'ingresso del sistema ad anello aperto. Nel nostro studio specifico $y(t)$ corrisponde alla quota del ROV in ogni istante di tempo ed $r(t)$ alla quota a cui si vuole portare il ROV.

Con l'introduzione di un compensatore $C(s)$, descritto tramite una funzione di trasferimento razionale propria, si attribuisce allo schema di controllo in retroazione unitaria la funzione ad anello aperto $\tilde{G}(s) = C(s)G(s)$ che sostituisce la funzione iniziale $G(s)$, ragion

per cui la funzione di trasferimento ad anello chiuso è:

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}. \quad (4.1)$$

Riportiamo le specifiche di progetto richieste:

1. la funzione di trasferimento in catena chiusa $W(s)$ sia di tipo $k = 1$ con
2. $|e_{rp}^{(1)}| \leq e_{rp}^* = 0.7$
3. la risposta al gradino del sistema in catena chiusa si porti al 95% del valore finale in al più 100s
4. sovraelongazione percentuale massima pari al 5%, ovvero la quota finale del ROV abbia uno scostamento massimo di $\frac{1}{20}$ del valore di regime che vogliamo assuma.

4.1 Sintesi per tentativi

La sintesi per tentativi per progettare il compensatore $C(s)$ si compone di due fasi: la prima sintetizza un controllore $C'(s)$ per soddisfare le specifiche di regime sul comportamento dell'uscita, mentre la seconda sintetizza $C''(s)$ volto a soddisfare le specifiche sul comportamento della risposta al gradino nella fase transitoria. La combinazione delle due azioni correttive realizzerà il controllore cercato:

$$C(s) = C'(s)C''(s). \quad (4.2)$$

Il primo compensatore $C'(s)$ è atto a far sì che il sistema finale descritto da (4.1) abbia un errore a regime della risposta al gradino nullo. Si può procedere scrivendo $G(s)$ nella forma:

$$G(s) = \frac{K_B(G)}{s^\nu} G_1(s) \quad (4.3)$$

e dal momento che $G(s)$ non presenta poli nell'origine, quindi $\nu = 0$, bisogna progettare $C'(s) = \frac{K_B(C')}{s^{k-\nu}}$ per far sì che il sistema sia di tipo $k = 1$ (come d'altronde richiesto dalla specifica 1.) assumendo:

- $\text{sgn}(K_B(C')) = \text{sgn}(K_B(G))$ in modo da garantire che $K_B(C')K_B(G) > 0$;
- $|e_{rp}^{(1)}| = \frac{1}{|K_B(C')||K_B(G)|} \leq e_{rp}^* \Leftrightarrow |K_B(C')| \geq \frac{1}{|K_B(G)|e_{rp}^*} = k_{min}$ dove $|e_{rp}^*| = \frac{1}{|1+K_B(G)|} = 0.7$.

Si otterrà $C'(s) = -\frac{25}{7s}$. Alla fine della prima fase si ha:

$$C'(s)G(s) = \frac{K_B(C'G)}{s} G_1(s) = \frac{10(1-s)(1+4 \cdot 10s)}{7s(1+4s)(1+s+s^2)}. \quad (4.4)$$

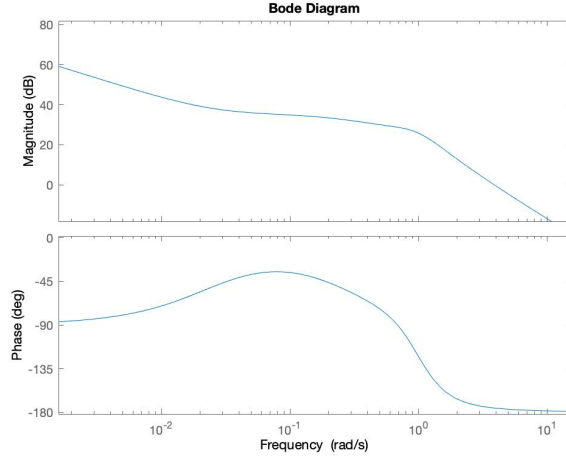


Figura 4.2: Diagramma di Bode di $C'(s)G(s)$

Introduciamo ora due parametri: la pulsazione di attraversamento del diagramma di Bode della funzione di trasferimento $C'(s)G(s)$, definita come l'unica pulsazione $\omega_A \geq 0$ (se esiste) per la quale $|C'(j\omega_A)G(j\omega_A)|_{dB} = 0$ (ovvero la pulsazione in cui il diagramma di Bode delle ampiezze attraversa l'asse delle ascisse) e il margine di fase, dato da $m_\psi \triangleq \arg C'(j\omega_A)G(j\omega_A) + 180^\circ$. Si ricavano i valori numerici $\omega_A \approx 10^1 \frac{rad}{s}$ e $m_\psi = -180^\circ + 180^\circ = 0^\circ$.

Per realizzare il compensatore $C''(s)$ dobbiamo innanzitutto definire gli obiettivi di controllo che mirano a quantificare la prontezza del sistema in catena chiusa. La specifica 3. rappresenta una richiesta sul tempo di assestamento al 5%, ossia è richiesto che $t_s \leq 100s$.

Se assumiamo che la funzione di trasferimento del sistema sia caratterizzata da due poli dominanti, una buona approssimazione di essa potrebbe essere data da un sistema del secondo ordine del tipo $G_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$ dove $0 < \delta < 1$ è lo smorzamento. Assunto ciò, tramite la relazione $s = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$, applicabile solo ai sistemi del secondo ordine, è possibile ricavare lo smorzamento $\delta \approx 0.7$. Affinché la condizione sul tempo di assestamento sia soddisfatta, la pulsazione di attraversamento della funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ deve soddisfare la relazione $\omega_A^* > \frac{3}{\delta t_s} \approx 0.0429 = 4.29 \cdot 10^{-2} \frac{rad}{s}$ e il relativo margine di fase sarà $m_\psi^* = 100\delta = 70^\circ$.

Il compensatore deve quindi decrementare di circa $M = 35dB$ il diagramma delle ampiezze e incrementare quello delle fasi approssimativamente di $\Phi = 110^\circ$ in corrispondenza della pulsazione ω_A^* , questa operazione può essere ottenuta ricorrendo all'introduzione di una rete a sella. Per progettare quest'ultima dobbiamo seguire due passi: il primo consiste nel progettare una rete anticipatrice del tipo $C_{ant} = \frac{1+sT}{1+s\alpha T}$ con $T > 0$ e $0 < \alpha < 1$ in modo tale da alzare in corrispondenza di ω_A^* la fase di almeno Φ° ; mentre il secondo prevede la realizzazione di una rete attenuatrice del tipo $C_{att} = \frac{1+s\alpha T'}{1+sT'}$ con $T' > 0$ e $0 < \alpha < 1$ sufficientemente a sinistra della rete anticipatrice da non alterare la fase in ω_A^* e con polo

e zero distanti in modo tale da abbassare il modulo di $M + \Delta$. Scelgo di inserire uno zero doppio stabile una decade prima della pulsazione ω_A^* , un polo stabile una decade dopo e un altro polo stabile 3 decadi prima dello zero.

La seconda azione correttiva, che combinata a $C'(s)$ realizza il compensatore della sintesi per tentativi, viene data dalla seguente rete a sella: $C''(s) = \frac{(1+2331s)^2}{(1+2.331s)(1+233100s)}$.

La funzione di trasferimento in catena aperta risulta essere:

$$C(s)G(s) = \frac{10}{7s} \frac{(1 + 2331s)^2}{(1 + 2.331s)(1 + 233100s)} \frac{(1 - s)(1 + 4 \cdot 10s)}{(1 + 4s)(1 + s + s^2)} \quad (4.5)$$

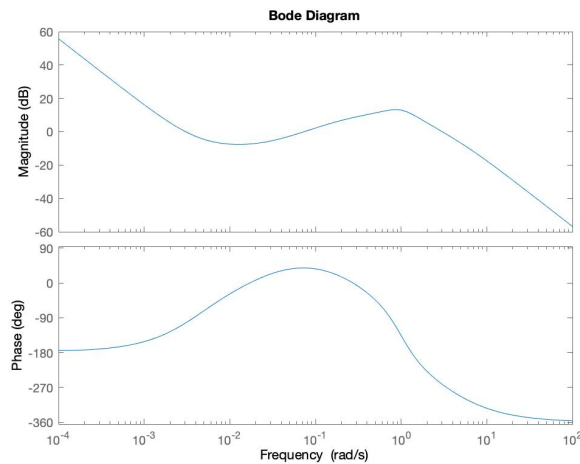


Figura 4.3: Diagramma di Bode di $C(s)G(s)$

La risposta al gradino della funzione in catena chiusa è riportata in figura (4.4), si nota che soddisfa le specifiche richieste: la sovraelongazione è del 2.52% e il tempo di assestamento al 5% è pari a 32.9s. Le oscillazioni nella fase di assestamento sono dovute alla presenza della coppia di poli complessi coniugati, per ridurle si potrebbe eventualmente a una cancellazione introducendo una coppia di zeri complessi coniugati.

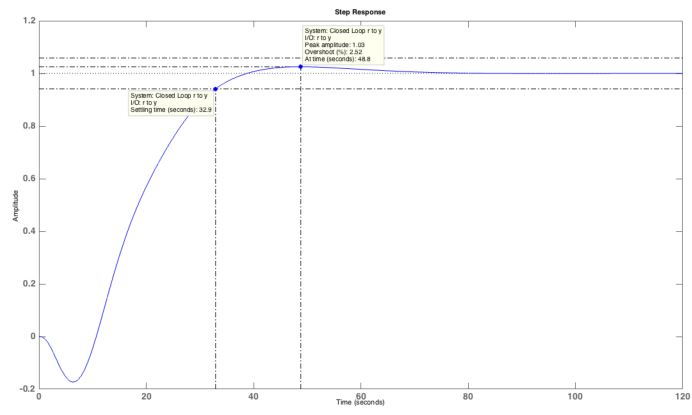


Figura 4.4: La risposta al gradino di $W(s)$

Capitolo 5

Conclusioni

Questa tesi aveva lo scopo di progettare un controllore che portasse e mantenesse il sistema di un sottomarino ROV a una certa quota stabilita, rispettando diverse specifiche. Lo si è realizzato per mezzo di un controllo in retroazione unitaria negativa e tramite la sintesi per tentativi.

È stato necessario ricorrere all'utilizzo dell'applicazione Control System Design di MATLAB per stabilire il compensatore che soddisfacesse tutte le specifiche del problema di controllo. Grazie ad essa si è in grado di modificare istantaneamente i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento in catena aperta e la risposta al gradino di quella in catena chiusa, posizionando a proprio piacimento zeri e poli. La sintesi per tentativi proposta per la soluzione del problema di controllo qui presentato non è l'unico modo per sintetizzare un compensatore utile a ottenere buone prestazioni in termini di risposta al gradino. Si è vista ad esempio durante il corso di Controlli Automatici la sintesi di controllori PID, chiamati così perché prevedono la combinazione lineare di tre azioni correttive: una proporzionale (P), una integrativa (I) e una derivativa (D), e descritti da una funzione di trasferimento del tipo:

$$C_{PID}(s) \triangleq K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} = \frac{K_i + K_p s + K_d s^2}{s}, K_p, K_i, K_d \in \mathfrak{R} \quad (5.1)$$

Vengono utilizzati con la stessa logica vista per la sintesi del controllore per tentativi ovvero, il polo nell'origine serve ad aumentare il tipo del sistema, tramite K_i è possibile sistemare l'errore di regime permanente mentre attraverso K_p e K_d si possono introdurre zeri reali negativi per regolare pulsazione di attraversamento e margine di fase. In base ai risultati che si vogliono ottenere con l'utilizzo dei controllori è possibile usarne delle semplificazioni.

Queste trattazioni più approfondite inerenti alla soluzione del problema sfortunatamente non trovano spazio in questa tesi.

È bene evidenziare che il problema qui trattato è stato reso poco realistico per via delle semplificazioni adottate sul sistema e che queste ultime hanno fatto sì che fosse più trattabile dal punto di vista di una tesi accademica che verte puramente ad approfondire la materia dei Controlli Automatici con un esempio specifico di controllo. La stesura di questo elaborato mi ha permesso di approfondire e apprendere più nel dettaglio diversi aspetti

e argomenti inerenti ai Controlli Automatici e all'uso dell'ambiente di calcolo MATLAB e la sua applicazione Control System Design.

Bibliografia

- [1] Mauro Bisiacco, M. Elena Valcher (2015) *Controlli Automatici*, Libreria Progetto.
- [2] Gianluigi Pillonetto, Mauro Bisiacco (2014) *Sistemi e Modelli*, Esculapio.
- [3] Pierluigi Zotto, Sergio Lo Russo, Paolo Sartori (2018) *Fisica Generale, Meccanica - Termodinamica*, La Dotta.
- [4] www.history.com/news/9-groundbreaking-early-submarines.
- [5] www.en.wikipedia.org/wiki/Submarines.