

Università degli Studi di Padova

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria dell'Informazione

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Metodi numerici per la risoluzione delle equazioni di Maxwell tramite FDTD

Laureando:
Federico Cauduro
Matricola 574697

Relatore:
Ch.mo Prof. Carlo G. Someda

Anno Accademico 2009–2010

*Ai miei genitori Luigi e Giuliana,
le persone da cui ho imparato di più.*

Se tu hai una mela, e io ho una mela, e ce le scambiamo, allora tu ed io abbiamo sempre una mela per uno. Ma se tu hai un'idea, ed io ho un'idea, e ce le scambiamo, allora abbiamo entrambi due idee.

GEORGE BERNARD SHAW

Ringraziamenti

Prima di tutto voglio ringraziare chi ha reso possibile la realizzazione della mia tesina. Un grazie particolare al prof. Carlo G. Someda che mi ha seguito durante tutta la stesura e si è sempre dimostrato disponibile e pronto ad aiutarmi in caso di difficoltà. Grazie anche a Giovanni Vadalà per avermi fornito parte del materiale di cui avevo bisogno, ad Enrico Albertini per essersi sempre messo a disposizione quando ho avuto problemi con la formattazione del testo e a tutti coloro che nel corso della mia vita mi hanno insegnato qualcosa.

Devo ringraziare anche molte altre persone, che mi hanno aiutato psicologicamente ed economicamente nei miei studi. Primi fra tutti i miei genitori, per tutto il supporto che mi hanno sempre dato e per avermi offerto la possibilità di compiere il mio percorso di studi, opportunità che loro purtroppo non hanno avuto. Forse non è un caso che il giorno della mia laurea coincida anche con il loro 25esimo anniversario di nozze.

Ringrazio anche Chiara per essermi stata vicina, a modo suo, in questo anno che, tra periodi felici ed infelici, mi ha portato alla laurea. A lei anche un augurio affinché possa al più presto raggiungere tutti gli obiettivi che si è prefissata.

Grazie anche ai parenti che oggi gioiscono con me e anche a quelli che non possono gioire perché sono venuti a mancare.

Non posso dimenticare nemmeno gli amici del mio quartiere che mi conoscono da quando ero bambino : Diego, Marco, i due Luca, Massimiliano, Alessandro, Enrico, Davide e tutti gli altri. E grazie ai miei coinquilini Enrico, Mattia, Federico ed Alberto per avermi supportato e sopportato, con loro negli ultimi due anni ho condiviso molte cose, in particolare la fatica sui libri, ma anche momenti di festa e gioia, come oggi.

Indice

Introduzione	xi
1 Il metodo FDTD	1
1.1 Analisi generale del problema	1
1.2 Passaggio dalle equazioni di Maxwell vettoriali ad un sistema di equazioni alle differenze finite	2
1.3 Discretizzazione spaziale e temporale	3
1.4 Il sistema di equazioni alle differenze finite	4
1.5 Tipi alternativi di discretizzazione spaziale	7
1.6 Analisi dei punti forti e dei punti deboli del metodo	8
1.6.1 Punti forti	8
1.6.2 Punti deboli	9
2 Il problema delle condizioni al contorno	11
2.1 Le absorbing boundary conditions	11
2.2 Mur e l'equazione di D'Alambert	13
2.3 Il Perfectly Matched Layer	15
2.3.1 Punti deboli del Perfectly Matched Layer	17
3 Conclusioni	19

Introduzione

Perchè si studia ancora l'elettromagnetismo?

Lo studio dei campi elettromagnetici è sempre stato al centro dell'attenzione delle comunità scientifiche e dei governi che, su di esso, hanno investito molte risorse economiche ed umane, dato che la comprensione dei fenomeni elettromagnetici e la realizzazione di strumenti ad essi connessi è stata fondamentale per la difesa delle nazioni, in particolare durante gli anni della seconda guerra mondiale.

Per rendere l'idea di quanto sia stato investito negli studi sull'elettromagnetismo basta sottolineare che, a differenza di quanto comunemente si ritiene, il progetto più dispendioso nella storia degli eserciti militari, non fu la realizzazione della bomba atomica, ma quella del progetto radar, che risultò ben tre volte più costosa.

Ai giorni nostri gli studi legati a questo ambito hanno intrapreso innumerevoli nuove vie riuscendo ad influenzare profondamente la vita quotidiana di chiunque. Grazie ad una miriade di ricerche e di studi fatti in questo campo, molti oggetti, quali ad esempio telefoni cellulari, forni a microonde e modem, hanno invaso le nostre case e sono diventati simboli di progresso tecnologico e di benessere.

Gli studi relativi all'elettromagnetismo, a ben centoquaranta anni dalla redazione delle equazioni di Maxwell, riescono ancora a stupire e cambiare il mondo.

Cenni storici

Ora è necessario fare un rapido excursus sulle tecniche adottate, durante lo scorso secolo, per ottenere risultati sempre più precisi nella risoluzione delle equazioni dell'elettromagnetismo. Le equazioni di Maxwell, un estremo condensato delle conoscenze

riguardo i campi elettrico e magnetico, furono formulate attorno al 1870 e vengono ritenute tutt'oggi uno dei più grandi traguardi della scienza del diciannovesimo secolo.

Prima degli anni sessanta la soluzione delle equazioni di Maxwell veniva affrontata attraverso l'utilizzo di strumenti matematici analitici quali forme chiuse e serie numeriche. I risultati, che venivano ottenuti grazie all'utilizzo di calcolatori meccanici, dalla scarsa capacità di calcolo, risultavano per forza di cose poco precisi.

Fu grazie all'avvento degli elaboratori elettronici e dei primi linguaggi di programmazione che, dopo gli anni sessanta, si ebbero svariate innovazioni nelle tecniche di risoluzione delle equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza. Tuttavia i nuovi metodi, tra cui ad esempio quello delle equazioni integrali, rivelarono molto presto diversi punti deboli e si cercarono dunque nuove strade che portassero a risultati più soddisfacenti.

Nel 1966 Kane Yee riuscì ad intravedere una nuova via di risoluzione: essa prevedeva l'utilizzo di equazioni alle differenze parziali per la soluzione delle equazioni del rotore in regioni che venivano prima suddivise da una griglia regolare. Negli anni settanta ed ottanta ci si rese conto delle grandi potenzialità del metodo proposto da Yee, tanto che esso venne ripreso, studiato e reso completo da svariati studiosi e resta tutt'oggi un validissimo strumento per lo studio dei campi elettromagnetici.

Capitolo 1

Il metodo FDTD

Le soluzioni delle equazioni di Maxwell nel dominio del tempo sono in genere sconosciute, se escludiamo un insieme limitato di casi, ovvero volumi sferici o cilindrici; in queste situazioni la risoluzione è possibile mediante metodi analitici abbastanza semplici, come ad esempio la separazione delle variabili.

Quando si ha a che fare con volumi più complessi invece, la ricerca della soluzione risulta molto più laboriosa, ed è necessario affrontare il problema con approcci differenti.

Con questo elaborato si cercherà di spiegare come sia possibile ottenere dei risultati soddisfacenti utilizzando il *Finite-Difference Time-Domain Method*, comunemente indicato con l'acronimo FDTD.

1.1 Analisi generale del problema

La tecnica FDTD è particolarmente indicata per lo studio del campo elettromagnetico in regioni contenenti degli ostacoli, nelle quali si vogliono studiare fenomeni di diffrazione. Essa risulta molto valida anche in altri ambiti, ad esempio per analizzare la propagazione del campo elettromagnetico all'interno di guide d'onda, oppure per capire come esso viene perturbato da antenne di vario genere.

Una volta selezionata la regione di interesse del problema, scelte le opportune sorgenti note di campo ed applicato correttamente l'algoritmo proposto da Yee [2], il teorema di unicità assicurerà che la soluzione a cui si è giunti è l'unica possibile per quel problema, all'interno del dominio spazio-temporale selezionato.

Saranno in seguito delle condizioni al contorno (si usa, ormai da circa quindici anni, solo il *Perfectly Matched Layer* proposto inizialmente da Berenger [6],[7]) ad offrire

la possibilità di sfruttare il teorema di equivalenza e le condizioni di radiazione di Sommerfeld per estendere, con approssimazione pienamente soddisfacente, i risultati ottenuti ad un dominio infinito, risolvendo in maniera completa il problema in esame.

Per quanto riguarda gli studi in campo FDTD, è facile notare, contrariamente a quanto ci si può aspettare, che la ricerca di condizioni al contorno ottime è stata molto più laboriosa ed intensa di quella dell'algoritmo di risoluzione del problema.

Tale algoritmo è stato scoperto nell'ormai lontano 1966 ed in seguito ha subito solamente delle lievi miglierie, che non l'hanno modificato in modo molto significativo. Per quanto riguarda la questione delle condizioni al contorno invece si sono visti notevoli sviluppi e miglioramenti, in varie direzioni nel corso dei decenni, che hanno portato a risultati di una precisione molto elevata.

I progressi ottenuti sono stati talmente notevoli che ormai l'accuratezza dei risultati non è più limitata dalla tecnica di analisi del problema, ma piuttosto dall'impossibilità di rappresentare in modo perfetto gli ostacoli contenuti nello spazio di interesse e dalla limitata potenza di calcolo che si ha a disposizione¹.

Dopo queste considerazioni di carattere generale sulla natura del problema, è giunto il momento di spiegare l'algoritmo in modo dettagliato, per passare successivamente anche all'analisi ed alla risoluzione del problema delle condizioni al contorno.

1.2 Passaggio dalle equazioni di Maxwell vettoriali ad un sistema di equazioni alle differenze finite

Ricordando che le equazioni di Maxwell in un mezzo lineare ed isotropo sono date da:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma E + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.1b)$$

e assumendo che i parametri ϵ, μ, σ siano tutti indipendenti dal tempo, si va ora a scomporre il campo elettrico e quello magnetico nelle varie componenti parallele ad una terna arbitraria di assi x, y, z ortogonali.

¹La potenza di calcolo limitata è sempre stata un problema per questo algoritmo, tanto che esso non fu preso in considerazione per vari anni dopo la sua nascita, in quanto richiedeva calcolatori dalle prestazioni troppo elevate per l'epoca. Venne rivisto e studiato solo circa un decennio dopo, quando il notevole sviluppo dei computer permise di ottenere dei risultati per lo meno accettabili.

Così facendo si passa dalle due equazioni vettoriali (1.1) ad un sistema di sei equazioni alle derivate parziali, che sono le seguenti:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (1.2a)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (1.2b)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (1.2c)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad (1.3a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (1.3b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (1.3c)$$

A partire da queste equazioni, grazie ad una *discretizzazione spazio temporale*, si avranno a disposizione le sei equazioni alle differenze finite, che stanno alla base del *Finite-Difference Time-Domain Method*, e grazie ad esse sarà possibile risolvere le equazioni di Maxwell in un gran numero di casi.

1.3 Discretizzazione spaziale e temporale

Il primo passo da fare, per utilizzare l'algoritmo FDTD, è individuare la regione interessata dal problema, dividerla in parallelepipedi aventi dimensioni $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ e successivamente scegliere gli istanti in cui si andrà a valutare il campo elettromagnetico. Si effettua quindi, come anticipato, una *discretizzazione spazio-temporale*.

Prima di imporre delle condizioni sulle dimensioni dei passi spaziali e temporali è bene notare che, per comodità, non è errato scegliere una griglia costituita da cubi anziché da parallelepipedi, dunque d'ora in avanti si assumerà sempre che $\Delta x = \Delta y = \Delta z$.

Oltre a questa caratteristica, scelta per mantenere la geometria del problema il più semplice possibile, la discretizzazione deve garantire due requisiti fondamentali: precisione e stabilità di calcolo.

I risultati accurati sono ottenuti attraverso un'opportuna selezione delle dimensioni delle celle della griglia, con ciò intendendo che esse devono essere piccole frazioni della minima lunghezza d'onda presente nel problema in esame, ovvero:

$$\Delta x < \lambda_{min}/10 \quad (1.4)$$

Affinchè sia assicurata anche la stabilità computazionale, invece, il campo non deve subire variazioni significative lungo un incremento spaziale, nell'arco di un quanto temporale. Questa richiesta viene soddisfatta, nel caso tridimensionale, se:

$$c\Delta t < \left(\frac{3}{\Delta x} \right)^{-1/2} \quad (1.5)$$

Fatte queste premesse, è possibile addentrarsi nel vero e proprio cuore del metodo FDTD, ovvero il passaggio dal sistema di sei equazioni alle derivate parziali prima ottenuto a quello composto da altrettante equazioni alle differenze finite, discretizzate in maniera opportuna.

1.4 Il sistema di equazioni alle differenze finite

Analizzato accuratamente il problema e determinate le condizioni di stabilità della soluzione, si possono determinare la lunghezza dello spigolo dei cubi costituenti la griglia e la durata di un quanto temporale.

A questo punto si deve sfruttare il reticolo costruito e la quantizzazione temporale per lavorare sulle equazioni (1.2) ed (1.3), trasformandole in un sistema equivalente, che permetta ad un elaboratore il calcolo di tutte le componenti di campo, sia durante le fasi transitorie, sia quando esso si è stabilizzato.

Si assuma, d'ora in avanti, la convenzione che un punto della griglia sia individuato da una terna di numeri interi:

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) \quad (1.6)$$

e che ogni funzione spazio temporale sia rappresentata come:

$$F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = F^n(i, j, k) \quad (1.7)$$

con n anch'esso intero.

Allora per quanto riguarda una derivata spaziale di suddetta funzione sarà valida l'espressione:

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} = \frac{F^n(i + 1/2, j, k) - F^n(i - 1/2, j, k)}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (1.8)$$

mentre quando si tratterà con la derivata temporale si avrà la seguente espressione:

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial t} = \frac{F^{n+1/2}(i, j, k) - F^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (1.9)$$

Al fine di ottenere la precisione dell'equazione (1.8), e di realizzare tutte le derivate delle equazioni (1.2) e (1.3), è necessario posizionare i componenti del campo elettromagnetico come mostrato in figura e calcolare a step temporali alterni, una volta il campo elettrico e una volta quello magnetico.

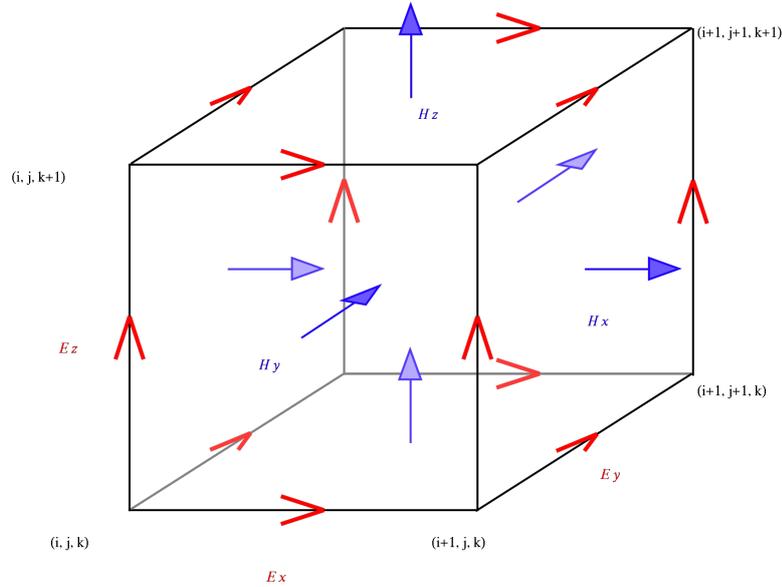


Figura 1.1: Posizione dei varie componenti di campo. I componenti di campo elettrico sono nei punti mediani degli spigoli, mentre quelli di campo magnetico nel centro delle facce.

Tramite passaggi matematici relativamente semplici ed osservazioni sulla particolare geometria del problema si ottiene, per quanto riguarda il campo magnetico, il seguente sistema di equazioni, ciascuna relativa ad una componente:

$$\begin{aligned}
H_x^{n+1/2} \left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) &= H_x^{n-1/2} \left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})\Delta x} \cdot \left[E_y^n \left(i, j + \frac{1}{2}, k + 1 \right) - E_y^n \left(i, j + \frac{1}{2}, k \right) + \right. \\
&\quad \left. + E_z^n \left(i, j, k + \frac{1}{2} \right) - E_z^n \left(i, j + 1, k + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (1.10a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_y^{n+1/2} \left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) &= H_y^{n-1/2} \left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})\Delta y} \cdot \left[E_z^n \left(i + 1, j, k + \frac{1}{2} \right) - E_z^n \left(i, j, k + \frac{1}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j, k \right) - E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j, k + 1 \right) \right] \quad (1.10b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_z^{n+1/2} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) &= H_z^{n-1/2} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)\Delta z} \cdot \left[E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j + 1, k \right) - E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j, k \right) + \right. \\
&\quad \left. + E_y^n \left(i, j + \frac{1}{2}, k \right) - E_y^n \left(i + 1, j + \frac{1}{2}, k \right) \right] \quad (1.10c)
\end{aligned}$$

Mentre con tecnica analoga, per il campo elettrico si ottiene un sistema che è il seguente:

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j, k \right) &= \left[1 - \frac{\sigma \left(i + \frac{1}{2}, j, k \right) \Delta t}{\epsilon \left(i + \frac{1}{2}, j, k \right)} \right] E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j, k \right) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\epsilon \left(i + \frac{1}{2}, j, k \right) \Delta x} \cdot \left[H_z^{n+1/2} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) - H_z^{n+1/2} \left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k \right) + \right. \\
&\quad \left. + H_y \left(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2} \right) - H_y \left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (1.11a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_y^{n+1} \left(i, j + \frac{1}{2}, k \right) &= \left[1 - \frac{\sigma \left(i, j + \frac{1}{2}, k \right) \Delta t}{\epsilon \left(i, j + \frac{1}{2}, k \right)} \right] E_y^n \left(i, j + \frac{1}{2}, k \right) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\epsilon \left(i, j + \frac{1}{2}, k \right) \Delta y} \cdot \left[H_x^{n+1/2} \left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) - H_x^{n+1/2} \left(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + H_z \left(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) - H_z \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) \right] \quad (1.11b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1} \left(i, j, k + \frac{1}{2} \right) &= \left[1 - \frac{\sigma \left(i, j, k + \frac{1}{2} \right) \Delta t}{\epsilon \left(i, j, k + \frac{1}{2} \right)} \right] E_z^n \left(i, j, k + \frac{1}{2} \right) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\epsilon \left(i, j, k + \frac{1}{2} \right) \Delta z} \cdot \left[H_y^{n+1/2} \left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) - H_y^{n+1/2} \left(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + H_x \left(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) - H_x \left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (1.11c)
\end{aligned}$$

Grazie alle sei precedenti equazioni sarà possibile analizzare, passo dopo passo, l'evolversi del campo elettromagnetico in ogni punto del volume scelto, basandosi semplicemente sui valori assunti negli istanti precedenti e sulle componenti del campo delle celle adiacenti.

Dalle equazioni (1.10) e (1.11) è facile notare che, affinché l'algoritmo possa funzionare correttamente, sono necessari ben undici parametri e molti calcoli per ogni cella della griglia, ad ogni istante temporale. Proprio questa è la principale limitazione dell'algoritmo; la mole di calcoli da svolgere ha fatto sì che la tecnica FDTD, scoperta nel 1966, sia stata sfruttata appieno solamente negli ultimi anni.

1.5 Tipi alternativi di discretizzazione spaziale

Come è già stato affermato nel corso della trattazione, la tecnica FDTD risulta molto flessibile ed essa può essere applicata in maniera efficace in svariati ambiti. Grazie a questa sua caratteristica, nel corso degli ultimi anni, i settori in cui il *Finite-Difference Time-Domain Method* ha trovato impiego si sono moltiplicati.

Dato che la buona riuscita del metodo dipende per la maggior parte della capacità di rappresentare in maniera fedele e rigorosa lo spazio, è sorta, come logica conseguenza, la necessità di adattare l'algoritmo a domini spaziali sempre più differenti tra loro.

Sono state studiate delle tecniche risolutive alternative a quella proposta da Yee per la discretizzazione spaziale e talvolta i risultati ottenuti, sia per problemi in due che in tre dimensioni, si sono dimostrati interessanti, in quanto più fedeli di quelli che si sarebbero ricavati utilizzando la classica griglia cartesiana.

Nell'ambito del 2D i risultati più interessanti si sono raggiunti sostituendo le celle quadrate, con griglie costituite da esagoni regolari. La struttura esagonale, oltre a prestarsi bene alla rappresentazione di problemi con geometrie particolari, offre anche il vantaggio di far diminuire notevolmente la anisotropia della velocità di fase.

Per motivazioni del tutto analoghe, quando si trattano problemi in 3D, a volte è risultato opportuno sostituire i cubi proposti da Yee con degli ottaedri troncati.

E' importante sottolineare che, nonostante la geometria della discretizzazione spaziale possa essere di volta in volta adattata al problema in esame, le condizioni necessarie alla stabilità e alla precisione di calcolo restano invece immutate.

1.6 Analisi dei punti forti e dei punti deboli del metodo

Visto il grande numero di tecniche esistenti per la risoluzione delle equazioni di Maxwell, e dato che non ne esiste una sempre privilegiata rispetto alle altre, è facile intuire che per ogni tipologia di problema bisogna selezionare in modo accurato la strada migliore che porta alla risoluzione. Per poter fare una scelta consapevole è necessario conoscere i punti forti e quelli deboli di ogni strategia risolutiva. Qui di seguito vengono evidenziati quelli del *Finite-Difference Time-Domain Method*.

1.6.1 Punti forti

- Il metodo con cui il campo viene modellato è relativamente semplice e risulta dunque abbastanza intuitivo; le equazioni dei sistemi (1.10) e (1.11), pur presentandosi ostiche, non contengono calcoli molto complessi.
- La tecnica FDTD è molto accurata e robusta: si conoscono bene tutte le possibili fonti di errore ed è dunque nelle facoltà di chi vuole utilizzarla porre dei bounds ad esso, in modo da avere dei modelli molto accurati per una grande varietà di problemi.

- Trattandosi di un metodo nel dominio del tempo è possibile ottenere soluzioni per sistemi a banda larga con una singola simulazione, non serve dunque effettuare ripetute prove a varie frequenze.
- Dato che campo elettrico e magnetico vengono calcolati istante per istante è possibile seguire passo passo la loro evoluzione nel tempo, prima di giungere ad una situazione di stazionarietà.
- Grazie alla suddivisione dello spazio in piccoli cubi è possibile specificare per ognuno di essi le caratteristiche del materiale che lo costituisce, in modo da avere una riproduzione fedele dello spazio di interesse del problema. Ovviamente più piccole sono le celle, più i risultati ottenuti saranno precisi, il tutto a scapito di costi computazionali ovviamente non indifferenti.

1.6.2 Punti deboli

- L'accuratezza dei risultati, ottenuta da discretizzazioni spazio-temporali molto fitte, va a scapito di costi computazionali elevatissimi e di simulazioni che possono risultare molto dispendiose in termini di tempo. Non è quindi possibile ottenere simulazioni precise facendo lavorare il calcolatore per poco tempo.
- Dovendo discretizzare nello spazio, la rappresentazione degli oggetti contenuti nella regione di interesse del problema introduce errori sistematici che causano imprecisione nei risultati.
- Dato che la condizione di stabilità richiede che una cella della griglia sia grande al massimo un decimo della lunghezza d'onda, per avere costi computazionali accettabili, è necessario trattare domini spaziali molto ridotti. Nel caso in cui si voglia studiare la diffrazione causata da oggetti di dimensioni abbastanza grandi, l'FDTD risulta non appropriato ed è necessario ricorrere ad altre tecniche.
- Poiché l'FDTD calcola i campi elettrico e magnetico in tutti i punti del dominio computazionale, quest'ultimo deve necessariamente avere dimensioni finite. Per questo motivo è indispensabile utilizzare delle condizioni al contorno, in modo che sia possibile estendere, commettendo errori non trascurabili, i risultati ad un dominio infinito.

Capitolo 2

Il problema delle condizioni al contorno

Riprendendo l'ultima affermazione del capitolo precedente, è facile rendersi conto che molti fenomeni di interazioni tra onde elettromagnetiche avvengono in regioni aperte, per le quali il dominio in cui va effettuato lo studio del campo è illimitato in almeno una delle dimensioni dello spazio. Ovviamente nessun calcolatore dispone di una capacità illimitata di calcolo e proprio per questo motivo, quando si ha a che fare con il metodo FDTD, è necessario definire una regione spaziale finita sulla quale risolvere le equazioni di Maxwell.

Data questa limitazione, nasce un nuovo problema: adattare delle condizioni al contorno, per poter estendere, in modo opportuno, ovvero con ottima precisione, i risultati ottenuti ad un dominio infinito.

Tutt'oggi esistono due tipologie di condizioni al contorno: le RBCs o *Radiation Boundary Conditions* e le ABCs o *Absorbing Boundary Conditions*. Delle due classi di soluzioni verrà analizzata solamente la seconda, in quanto essa risulta di gran lunga la più utilizzata con il *Finite-Difference Time-Domain Method*.

2.1 Le absorbing boundary conditions

Prima di iniziare con una rapida panoramica della storia delle *absorbing boundary conditions* è opportuno spiegare di che cosa si tratta nel nostro caso specifico.

Per poter estendere ad un dominio infinito le soluzioni che ci fornisce l'algoritmo di Yee, è indispensabile la conoscenza del campo elettrico e di quello magnetico sulla superficie esterna della regione in esame.

Osservando Figura 1.1 è facile notare che, per conoscere il valore delle varie componenti del campo magnetico sulla superficie esterna del dominio di interesse del problema, sarebbe necessario sapere con esattezza il suo valore in alcuni punti esterni alla cella; ciò è evidentemente impossibile.

Il problema della determinazione delle ABCs sta proprio nella ricerca di equazioni che forniscano una stima, il più fedele possibile, del valore di queste componenti ignote del campo, sfruttando la conoscenza di quelle interne al dominio computazionale, che sono invece conosciute.

Nel corso degli anni settanta ed ottanta, cioè non appena le teorie di Yee vennero riviste e sfruttate per la risoluzione di problemi di elettromagnetismo, si svilupparono varie correnti di pensiero che, sfruttando basi teoriche diverse, si lanciarono alla ricerca di appropriate condizioni al contorno per il metodo FDTD.

Il primo filone che riuscì ad ottenere risultati soddisfacenti cercò di dare una risposta al problema attraverso l'*equazione d'onda di d'Alambert*. Questo gruppo era formato da tre persone: B.Engquist, A.Madja e G.Mur. I primi due riuscirono a costruire delle basi teoriche, che vennero successivamente adattate al metodo FDTD da Gerrit Mur, nel 1981.

In parallelo a questa prima linea di pensiero se ne sviluppò una seconda, portata avanti da un gruppo, a capo del quale stava Z.P.Liao. Questo team attraverso l'*extrapolation in space and time*, nel 1984 ottenne dei risultati aventi una precisione simile a quelli di Mur. Nonostante la strada intrapresa fosse completamente diversa, i risultati non registravano miglioramenti significativi.

Furono necessari altri nove anni affinché avvenisse una vera e propria rivoluzione, grazie alla quale si registrò un incremento della precisione delle condizioni al contorno di addirittura quattro ordini di grandezza.

Fu il fisico francese Jean-Pierre Berenger, nel 1994 a stravolgere le teorie fino ad allora adottate grazie al suo *Perfectly Matched Layer*, noto anche come PML. A differenza di tutti gli altri Berenger pensò alla superficie esterna del dominio computazionale come ad una parete con coefficiente di riflessione nullo a tutte le frequenze e per qualsiasi polarizzazione delle onde incidenti (per avere un'idea a livello fisico di che cosa si tratti

è sufficiente paragonare le pareti del dominio computazionale d'interesse a quelle di una camera anecoica).

E' opportuno ora spiegare in maniera analitica le soluzioni al problema delle condizioni al contorno citate, in quanto sono quelle che hanno rivestito, e continuano a rivestire, un ruolo centrale nella soluzione di problemi di elettromagnetismo.

2.2 Mur e l'equazione di D'Alambert

Come è stato anticipato, i primi studi per la ricerca di condizioni al contorno adatte al *Finite-Difference Time-Domain Method* furono affrontati da Engquist e Madja. La coppia incentrò la propria teoria sulla risoluzione dell'equazione di d'Alambert, che ricordiamo essere:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

Dovendo calcolare le tre componenti di campo elettrico E_x , E_y ed E_z , essi sfruttarono l'equazione (2.1) per ognuna di esse.

Venga assunto ora, senza alcuna perdita di generalità, che la regione di interesse del problema sia collocata nel semispazio delle x negative. Verrà mostrato come vanno calcolate le condizioni al contorno per il piano $x=0$.

Un'onda piana, che viaggia nella direzione decrescente dell'asse x ha un'espressione del tipo:

$$W = Re \left(\psi \left(t + (c^{-2} - s_y^2 - s_z^2)^{1/2} x + s_y y + s_z z \right) \right) \quad (2.2)$$

dove s_x , s_y ed s_z sono le componenti inverse della velocità e vale che $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = c^{-2}$.

Per questo tipo d'onda la condizione al contorno

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{W}{c \partial t} \left(1 - c^2 s_y^2 - c^2 s_z^2 \right)^{1/2} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.3)$$

permetterà di determinare, per valori fissati di s_y ed s_z , l'espressione di un'onda W , che viene assorbita sulla superficie esterna $x = 0$.

Non conoscendo l'angolo di incidenza dell'onda così determinata, è necessario per forza di cose fare un'approssimazione, variabile a seconda che ci si arresti al primo, oppure al secondo ordine.

Nel caso in cui la precisione richiesta per la risoluzione del problema sia bassa, è possibile accontentarsi di un troncamento al primo ordine, per il quale sarà valida l'approssimazione:

$$(1 - (cs_y)^2 - (cs_z)^2)^{1/2} = 1 + O((cs_y)^2 + (cs_z)^2) \quad (2.4)$$

che modifica la (2.3), facendola diventare la seguente equazione:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{c \partial t} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.5)$$

Questa espressione risulta spesso inadatta in quanto, come anticipato, permette di raggiungere una precisione spesso non sufficiente. Per superare il problema è necessario servirsi di un troncamento del secondo ordine.

Tale approssimazione si ottiene ricordando che:

$$(1 - (cs_y)^2 - (cs_z)^2)^{1/2} = 1 - \frac{((cs_y)^2 + (cs_z)^2)}{2} + O((cs_y)^2 + (cs_z)^2)^2 \quad (2.6)$$

Utilizzando la (2.6) per riscrivere la (2.3) si giunge al risultato finale ottenuto dalla coppia Engquist-Madja, rappresentato dall'equazione:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.7)$$

A partire da questo traguardo, nel 1981, Gerrit Mur, costruì le sue equazioni, adattate alla discretizzazione spazio-temporale dell'FDTD.

Se in un problema tridimensionale si effettua un'approssimazione di primo grado, date ancora per vere le condizioni premesse, si ottiene, per la componente E_z nel piano $x = 0$, la seguente espressione:

$$\begin{aligned} E_z^{n+1/2} \left(0, j, k + \frac{1}{2} \right) &= E_z^n \left(1, j, k + \frac{1}{2} \right) + \\ &+ \frac{c\Delta t - \Delta}{c\Delta t + \Delta} \left(E_z^{n+1} \left(1, j, k + \frac{1}{2} \right) - E_z^n \left(0, j, k + \frac{1}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Del tutto simili a questa saranno le formulazioni delle varie componenti nelle altre facce delimitanti la regione di interesse nel problema.

La soluzione di Mur rappresenta la prima valida risposta al problema delle condizioni al contorno per metodi che sfruttano una griglia spaziale al fine di risolvere le equazioni di Maxwell.

Nonostante questa tecnica risulti ormai superata, a causa della sua insufficiente precisione, va sottolineato il fatto che essa rimase per più di un decennio la maggiormente utilizzata e venne scalzata solamente del Perfectly Matched Layer nel 1994. Ancora oggi, in casi abbastanza rari, ovvero se si ha a che fare con problemi che non richiedono per la soluzione una precisione molto elevata, viene impiegata la tecnica di Mur in quanto essa è la più semplice e la meno dispendiosa in termini di potenza di calcolo da impiegare.

2.3 Il Perfectly Matched Layer

I risultati ottenuti per quanto riguarda le condizioni al contorno per FDTD da Mur, Liao e tutti gli altri studiosi che pubblicarono i loro risultati prima del 1994 davano la possibilità di ottenere dei coefficienti di riflessione compresi tra -35 e -45dB. Per raggiungere l'obiettivo di avere un range dinamico di 70dB erano necessarie però delle *Absorbing Boundary Conditions* molto più accurate, che permettessero addirittura di ricavare degli indici di riflessione di ben tre ordini di grandezza inferiori.

Tale traguardo, che poteva al tempo sembrare molto difficile da raggiungere, fu conseguito da Jean-Pierre Berenger, il quale pensò ad una soluzione del tutto innovativa e rivoluzionaria rispetto a quelle precedentemente proposte, che battezzò con il nome di *Perfectly Matched Layer*.

Il PML è un sottile strato di materiale assorbente, che viene virtualmente posto ai bordi del reticolo che divide il dominio computazionale. Quando un'onda attraversa il margine della regione di interesse del problema non subisce riflessione e viene attenuata secondo un decadimento esponenziale all'interno del perfectly matched layer. Anche nel caso in cui vi sia una riflessione totale al di fuori del dominio computazionale, dopo essere rientrata nella griglia l'onda elettromagnetica avrà attraversato per due volte il PML. Essa risulterà perciò attenuata in maniera talmente forte che la sua potenza sarà di diversi (in genere tra 6 ed 8) ordini di grandezza inferiore a quella che originariamente era l'onda incidente. La tecnica utilizzata da Berenger, nota come *split-field* PML¹, venne presto rimpiazzata dall' *uniaxial* PML (o UPML).

¹La tecnica consisteva, come suggerisce il nome, nel dividere ciascuna delle espressioni dei sistemi

Data la complessità dell'analisi di entrambi i metodi e la difficoltà dei calcoli da affrontare vengono riportati in seguito solamente i risultati più interessanti ottenuti grazie allo split-field ed all'uniaxial PML.

Lo split field permette di esprimere in maniera semplice il coefficiente di riflessione in funzione dell'angolo di incidenza:

$$R(\theta) = e^{-2\sigma_w \eta d \cos\theta} \quad (2.9)$$

dove η è l'impedenza d'onda caratteristica del PML, d è il suo spessore e σ_w la conducibilità lungo una delle direzioni dello spazio. Dall'espressione (2.9) si può facilmente dedurre un risultato importante, ovvero la non dipendenza dell'indice di riflessione dalla frequenza.

La tecnica dell'uniaxial PML permette invece di ottenere delle espressioni relativamente semplici per quanto riguarda le componenti del campo elettrico e del campo magnetico appena esterne al dominio computazionale, e grazie ad esse rende possibile il calcolo del valore del campo proprio nei bordi.

Fatte le stesse supposizioni utilizzate per le condizioni al contorno di Mur si ottiene per il campo elettrico:

$$E_x^{n+1}\left(\frac{1}{2}, j, k\right) = \left(\frac{2\epsilon\kappa_z - \sigma_z \Delta t}{2\epsilon\kappa_z + \sigma_z \Delta t}\right) E_x^n\left(\frac{1}{2}, j, k\right) + \left[\frac{1}{2\epsilon\kappa_z + \sigma_z \Delta t}\right] \left[\left(2\epsilon\kappa_x + \sigma_x \Delta t\right) D_x^{n+1}\left(\frac{1}{2}, j, k\right) - \left(2\epsilon\kappa_x - \sigma_x \Delta t\right) D_x^n\left(\frac{1}{2}, j, k\right) \right] \quad (2.10)$$

e per il campo magnetico:

$$H_x^{n+1/2}\left(0, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2\epsilon\kappa_y - \sigma_y \Delta t}{2\epsilon\kappa_y + \sigma_y \Delta t}\right) B_x^{n-1/2}\left(0, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) + \left[\frac{1}{2\epsilon\kappa_y + \sigma_y \Delta t}\right] \left[\frac{E_z^n\left(0, j + 1, k + \frac{1}{2}\right) - E_z^n\left(0, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta y} - \frac{E_y^n\left(0, j + \frac{1}{2}, k + 1\right) - E_y^n\left(0, j + \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta z} \right] \quad (2.11)$$

Per concludere è importante riassumere i vantaggi che il PML ha dato nella soluzione al problema delle condizioni al contorno con FDTD. In primo luogo grazie ad esso è stato

(1.2) ed (1.3) in due ulteriori equazioni, ottenendo così un sistema a dodici equazioni

possibile diminuire il coefficiente di riflessione ai bordi del dominio computazionale di circa 3000 volte rispetto a quanto avveniva in precedenza, in secondo luogo il coefficiente di riflessione è stato reso indipendente dalla frequenza.

2.3.1 Punti deboli del Perfectly Matched Layer

Dopo quanto detto riguardo agli innumerevoli vantaggi che si ricavano dall'utilizzo del *Perfectly Matched Layer* per la determinazione delle condizioni al contorno è necessario analizzare anche i punti deboli di questa tecnica. Le principali falle che si riscontrano a livello teorico applicando il PML al *Finite-Difference Time-Domain Method* sono due, ma come si vedrà esse sono risolvibili adottando degli opportuni accorgimenti.

- Il PML consente di avere un indice di riflessione nullo solamente nel caso in cui si risolva l'equazione d'onda vera e propria. Non appena viene effettuata la discretizzazione spazio-temporale richiesta dall' FDTD la perfezione analitica delle soluzioni viene persa, dato che quella che si risolve è un'equazione approssimata. Questa limitazione può essere resa trascurabile in due modi.

E' possibile effettuare una discretizzazione molto fitta, in modo tale da rendere l'equazione approssimata il più possibile simile a quella originale. In via alternativa si può scegliere di lavorare sullo spessore dello strato di materiale assorbente. In entrambi i casi si riescono ad ottenere coefficienti di riflessione molto prossimi allo zero.

- Nel PML il coefficiente di riflessione dipende sempre dall'angolo d'incidenza dell'onda elettromagnetica, come è mostrato dall'equazione (2.9). Questo fatto ovviamente implica che, quando si ha a che fare con onde incidenti con angoli θ prossimi a 90° , il suddetto coefficiente di riflessione assume valori prossimi ad uno.

In realtà quando si affronta in maniera pratica un qualsiasi problema con l'FDTD, dato che è possibile scegliere arbitrariamente il dominio computazionale, anche questo limite teorico risulta facilmente superabile. Una scelta appropriata della posizione delle sorgenti di campo permette quasi sempre di ottenere angoli di incidenza non superiori ai 50° .

Capitolo 3

Conclusioni

Possibili evoluzioni future

La prima cosa che ci si può chiedere, dopo aver affrontato un argomento che è stato approfondito da innumerevoli studiosi per più di quarant'anni e sul quale ormai si fanno quasi duemila pubblicazioni l'anno, è se sia o meno possibile apportarvi delle migliorie, o comunque se sarà possibile che altri lo migliorino. Penso che al momento, a parte utilizzare il metodo in ambiti ancora poco sondati e quindi fare dei semplici test, non sia possibile effettuare progressi a livello teorico che porterebbero anche a miglioramenti nella pratica, perché le pubblicazioni passate mostrano la possibilità di ottenere dei risultati con una precisione che va di gran lunga oltre quella ottenibile con i mezzi tecnologici a disposizione oggi.

Si può dunque affermare, con poche possibilità di errore, che il miglioramento dell'FDTD dipenderà, per diversi anni, non tanto dagli eventuali progressi che si avranno in ambito teorico, ma dall'incremento della potenza di calcolo a disposizione e dalla possibilità di visualizzare i risultati con mezzi che li rendano il più fedeli possibile¹.

D'altra parte, data la rapida evoluzione che si è registrata nell'incremento della potenza di computer e delle schede grafiche, è possibile teorizzare che gli ottimi risultati teorici ottenuti saranno sempre più supportati da una tecnologia all'altezza del compito richiesto. Il gap presente tra la teoria ed i riscontri pratici si sta, col passare del tempo, assottigliando sempre di più.

¹Dato che l'FDTD studia il campo elettromagnetico nel dominio del tempo, è molto significativo poter rappresentare la sua evoluzione temporale tramite un'animazione a colori che dia un'idea dell'intensità del campo in ogni punto ed in ogni istante.

Discretizzazione temporale non uniforme

Visto che dopo la discretizzazione spaziale pensata da Yee, ne sono state proposte altre che hanno reso l'FDTD più versatile e più affidabile in alcuni casi particolari, può essere interessante chiedersi se sia possibile apportare delle migliorie anche al modo di dividere il tempo in quanti.

L'unica tecnica fino ad ora adottata consiste nel suddividere l'intervallo temporale in cui si vuole studiare l'evoluzione del campo elettromagnetico in intervalli uniformi.

Se si considerano problemi in cui il campo subisce in determinati istanti delle brusche variazioni e in altri rimane pressoché costante è facile ipotizzare che la quantizzazione temporale uniforme possa non essere la soluzione migliore, in quanto essa impiega in condizioni totalmente differenti sempre la stessa quantità di risorse. In questo caso particolare sarebbe più utile avere degli intervalli molto brevi quando il campo sta variando in fretta, e degli step più dilatati quando esso subisce delle variazioni meno veloci.

Fatte queste considerazioni può risultare interessante suddividere l'intervallo temporale non servendosi di una funzione costante, ma sfruttandone una a gradini.

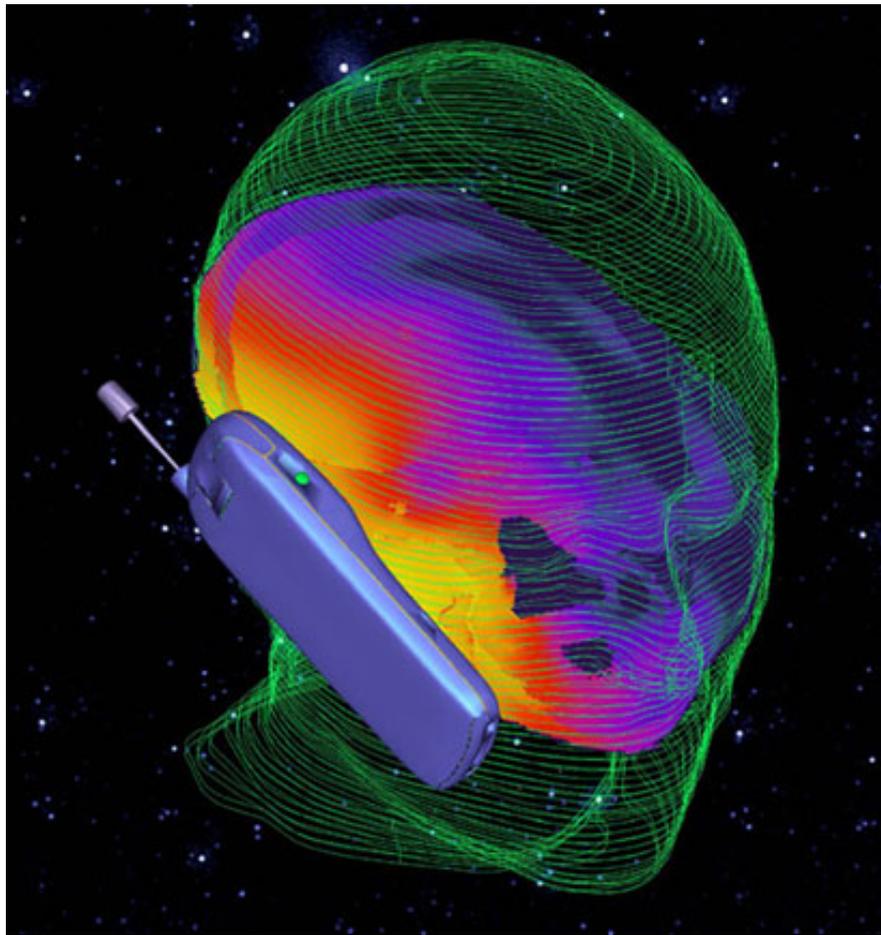
L'esigenza di avere dei quanti temporali di dimensioni variabili fa nascere la necessità di fare alcune scelte sulle dimensioni degli spigoli della griglia. La condizione di stabilità computazionale data dall'equazione (1.5) viene, nel caso in esame, modificata in:

$$c\Delta t_{min} < \left(\frac{3}{\Delta x} \right)^{-1/2} \quad (3.1)$$

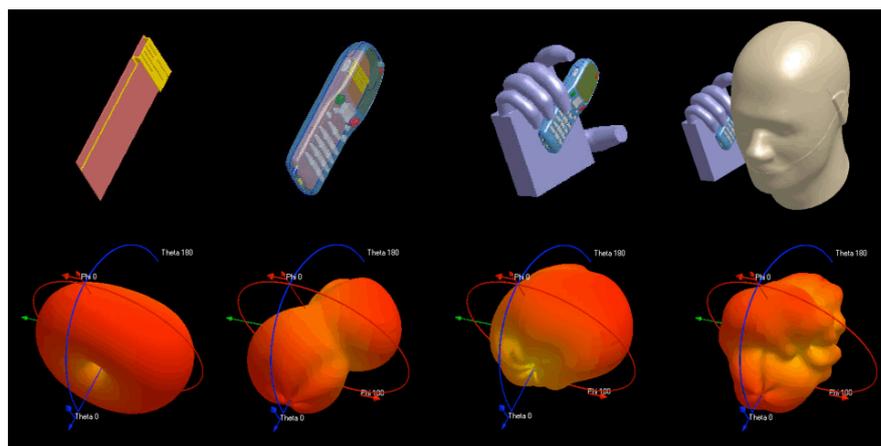
da questa espressione si deduce facilmente che i cubi costituenti la griglia avranno la lunghezza dello spigolo che dipende solamente dalla durata del minimo quanto temporale.

Risulta subito ovvio che questa prima soluzione può causare un impiego non ottimizzato delle risorse di calcolo a disposizione, in quanto quando si opera con step temporali aventi durata maggiore di Δt_{min} , si utilizzano celle fin troppo piccole. Dato che la soluzione proposta prevedeva che gli intervalli fossero pensati in modo da garantire la precisione desiderata in ogni istante, è bene calcolare la dimensione Δx degli spigoli per ogni valore scelto di Δt .

In questo modo il metodo di quantizzazione temporale non uniforme assicura non solo di raggiungere l'obiettivo a cui si aveva mirato, ma anche di farlo sfruttando al meglio la potenza di calcolo.



(a) Modellizzazione tramite FDTD della radiazione elettromagnetica emessa da un telefono cellulare all'interno di una testa umana



(b) Modellizzazione tramite FDTD della radiazione elettromagnetica di un telefono cellulare in situazioni diverse

Figura 3.1: Risultati grafici di studi sulla telefonia mobile, grazie all'utilizzo del Finite Difference Time Domain Method

Bibliografia

- [1] Taflove, Allen; Agnes, Susan (2000), *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, Artech House, Boston.
- [2] K. S. Yee, *Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media*, IEEE Trans. Antenna Propagat., vol. AP-14, pp.302-307, Mag. 1966.
- [3] A. Taflove, M.E. Brodwin, *Numerical Solution of Steady-State Electromagnetic Scattering Problems Using the Time-Dependent Maxwell's Equations*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-23, pp. 623-630, Ago. 1975.
- [4] G. Mur, *Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations*, IEEE Trans. Electromagnetic Compatib., vol. EMC-23, pp.377-382, Nov.1981.
- [5] Z. P. Liao, H. L. Wong, B. P. Yang, Y. F. Yuan, *A transmitting boundary for transient wave analysis*, Scientia Sinica (series A), pp.1063-1076, Ott.1984.
- [6] J. P. Berenger, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J. Comput. Phys., vol.114, no.1, pp. 185-200, 1994.
- [7] D. S. Katz, E. T. Thiele, A. Taflove, *Validation and Extention to Three Dimensions of the Berenger PML Absorbing Boundary Condition for FD-TD Meshes*, IEEE Microwave Guided Wave Lett., Vol 4, NO. 8, Ago.1994.
- [8] S. G. Johnson, *Notes on perfectly matched layers for the courses 18.369 and 18.336 at MIT*, online all'indirizzo <http://www-math.mit.edu/~stevenj/18.369/pml.pdf>, Ago. 2007.