Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA GALILEO GALILEI
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Note sulla storia del concetto di simmetria e sulla sua applicazione alla cristallografia

Candidato:
Camilla Niero
Matricola 1005562

Relatore:
Prof. Giulio Peruzzi

Anno Accademico 2014-2015

A Nicola Casarin, un grande vicino di banco che, senza saperlo, ha cambiato drasticamente la mia vita, per sempre.

Sommario

La presente tesi ripercorre brevemente l'evoluzione del concetto di simmetria analizzandone il significato attribuitogli nel corso dei secoli, ne tratta alcune applicazioni alla scienza della natura e, in particolare, alla cristallografia.

Il primo capitolo espone un quadro generale del significato della simmetria presso gli Antichi i quali attribuivano proprietà numeriche ed estetiche alle figure naturali e geometriche che manifestavano regolarità.

Il secondo capitolo si focalizza sui lavori di Perrault e Whewell, entrambi promotori di un nuovo concetto di simmetria che si differenziasse da quello ereditato dalla tradizione precedente.

Il terzo capitolo è incentrato sugli sviluppi in senso matematico della simmetria tramite l'introduzione dei gruppi di simmetria e delle classi di equivalenza. Tale evoluzione del concetto permise, tra l'altro, l'applicazione della simmetria alla classificazione dei cristalli.

Il quarto capitolo ripercorre i passaggi fondamentali che hanno permesso alla simmetria di assumere una funzione metodologica nella scienza grazie a una conclusione tratta da Curie.

Il quinto capitolo tratta per sommi capi gli sviluppi della simmetria nell'ambito della meccanica analitica, dando alcuni spunti relativi alle applicazioni della simmetria nella fisica del XX secolo.

Il sesto capitolo prende in considerazione la cristallografia in quanto primo esempio dell'applicazione della teoria classica della simmetria alla caratterizzazione e alla classificazione degli oggetti.

Indice

1 Concetto di simmetria presso gli Antichi **9**
1.1 Greci 9
1.2 Romani 11

2 La simmetria dei "Moderni" **13**
2.1 Simmetria e uguaglianza 13
2.2 Claude Perrault 13
2.3 William Whewell 14

3 Sviluppi in senso matematico della simmetria **15**
3.1 Simmetria e sostituibilità 15
3.2 Operazioni che scambiano tra loro le parti 16
3.3 Gruppo di simmetria 16
3.4 Classi di equivalenza 18

4 Simmetria e descrizione fisica **19**
4.1 Principio di ragion sufficiente 19
4.2 Principio di Curie 21

5 Simmetria nelle teorie scientifiche **25**
5.1 Meccanica analitica 25
5.2 Relatività 27
5.3 Fisica quantistica 29

6 Cristallografia **33**
6.1 Prime osservazioni 34
6.2 Modelli della struttura dei cristalli 36
6.3 Teoria della simmetria 39
6.4 Le 32 classi di simmetria 39
6.5 I reticoli di Bravais 39
6.6 I gruppi spaziali 41
6.7 Studio sistematico 41
6.8 Cristallografia nel XX secolo 47

7 Conclusioni **49**

Bibliografia **53**

Capitolo 1

Concetto di simmetria presso gli Antichi

Con l'appellativo "Antichi" si fa riferimento agli antichi Greci e Romani. La concezione della simmetria per questi popoli si basava sulle connotazioni di ripetizione e armonia, entrambe legate principalmente all'ambito artistico.

1.1 Greci

Il termine "simmetria" fece la sua comparsa per la prima volta tra il VI e il V secolo a.C. in Grecia nella forma $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$. Tale parola, composta da $\sigma\upsilon\nu$ e $\mu\epsilon\tau\rho o\nu$, che significano rispettivamente "con, insieme" e "misura", indica che originariamente l'idea soggiacente al concetto di simmetria era legata a una relazione di commisurazione numerica.

Il mondo antico riteneva che due grandezze omogenee fossero commensurabili tra loro quando queste avessero un sottomultiplo comune. Ciò significa, nello specifico, che il loro rapporto è un numero razionale, esprimibile quindi tramite una frazione la quale può essere, in particolare, un numero intero. In questo senso, erano ritenuti simmetrici tra loro oggetti per i quali fosse possibile individuare una misura comune, contenuta in ciascuno un numero intero di volte.
È proprio la commisurazione numerica di cui parla Euclide nell'apertura del decimo libro degli Elementi che fornisce un primo significato di $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$: "Commensurabili ($\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\alpha$) si chiamano le grandezze che sono misurate da una stessa misura, incommensurabili ($\alpha\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\alpha$) quelle grandezze, delle quali non si trova alcuna misura comune".[1]
L'esempio più classico dell'applicazione di tale definizione fa riferimento alla geometria: la diagonale del quadrato non è commensurabile con il lato dello stesso, infatti il rapporto tra le due lunghezze differisce per un fattore $\sqrt{2}$ il quale non è un numero razionale.

Nella cultura greca la simmetria non è associata alla sola geometria, dal momento in cui ha un significato affine a quello di proporzione, è strettamente legata anche all'ambito artistico.

[1] [1, p. 17]

L'architettura classica fa ampiamente uso di disposizioni simmetriche nelle piante di edifici, nei fregi e nelle colonne ma è nell'arte statuaria che il "rapporto di ragione di parti proporzionate" assume maggior visibilità.
I canoni di proporzione dello scultore greco Policleto prevedevano che la grandezza complessiva e quella di ogni singola parte fossero tra loro commensurabili, il che significa, ad esempio, che la testa di una statua dovesse essere contenuta un numero intero di volte all'interno del corpo.

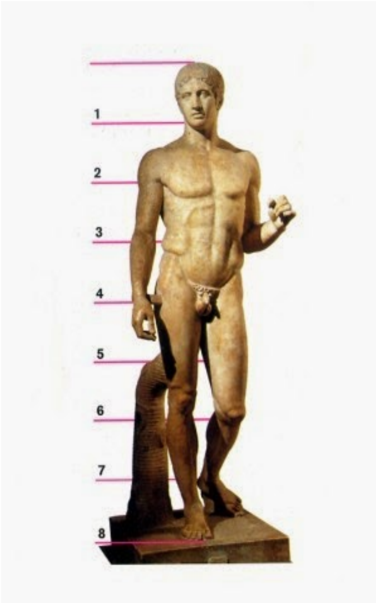


Figura 1.1: *Scultura del Doriforo di Policleto con evidenziate le proporzioni.*

Nell'Antica Grecia, però, la simmetria non venne concepita solamente come una proprietà geometrica delle figure regolari e dei corpi, difatti venne estesa a svariati campi di applicazione tra i quali la musica, gli organismi, la cosmologia e le prime osservazioni scientifiche.
I Pitagorici, membri di una scuola che ebbe origine nel sud Italia tra il 530 e il 500 a.C. circa, studiarono le simmetrie e le armonie in matematica e negli strumenti musicali che vennero attribuite parimenti all'assetto dei pianeti. Nelle loro teorie, difatti, il cosmo era concepito tramite l'unione di proporzione e $\alpha\rho\mu o\nu\iota\alpha$ (armonia) in un'unità fondata su rapporti numerici semplici, dove geometria e musica erano intimamente connesse.
Tra gli scritti classici, il *Timeo* platonico è uno di quelli che sottolinea come la simmetria, intesa prima di tutto come proporzione delle parti, dovesse essere la base di qualsiasi processo di formazione, sia questo correlato agli elementi naturali, agli esseri viventi o al sistema astronomico. Vale la pena notare che la nozione di simmetria emblematicamente espressa nel *Timeo* aveva motivazioni più mistiche che realmente descrittive.

La simmetria, intesa come proporzione, commisurazione, proprietà geometrica delle figure regolari e dei corpi è stata applicata, come già osservato, agli ambiti più disparati nella Grecia antica ma, nonostante questo, aveva una natura prevalentemente spaziale. Coerentemente con ciò, le principali applicazioni furono correlate alla geometria e all'arte.

1.2 Romani

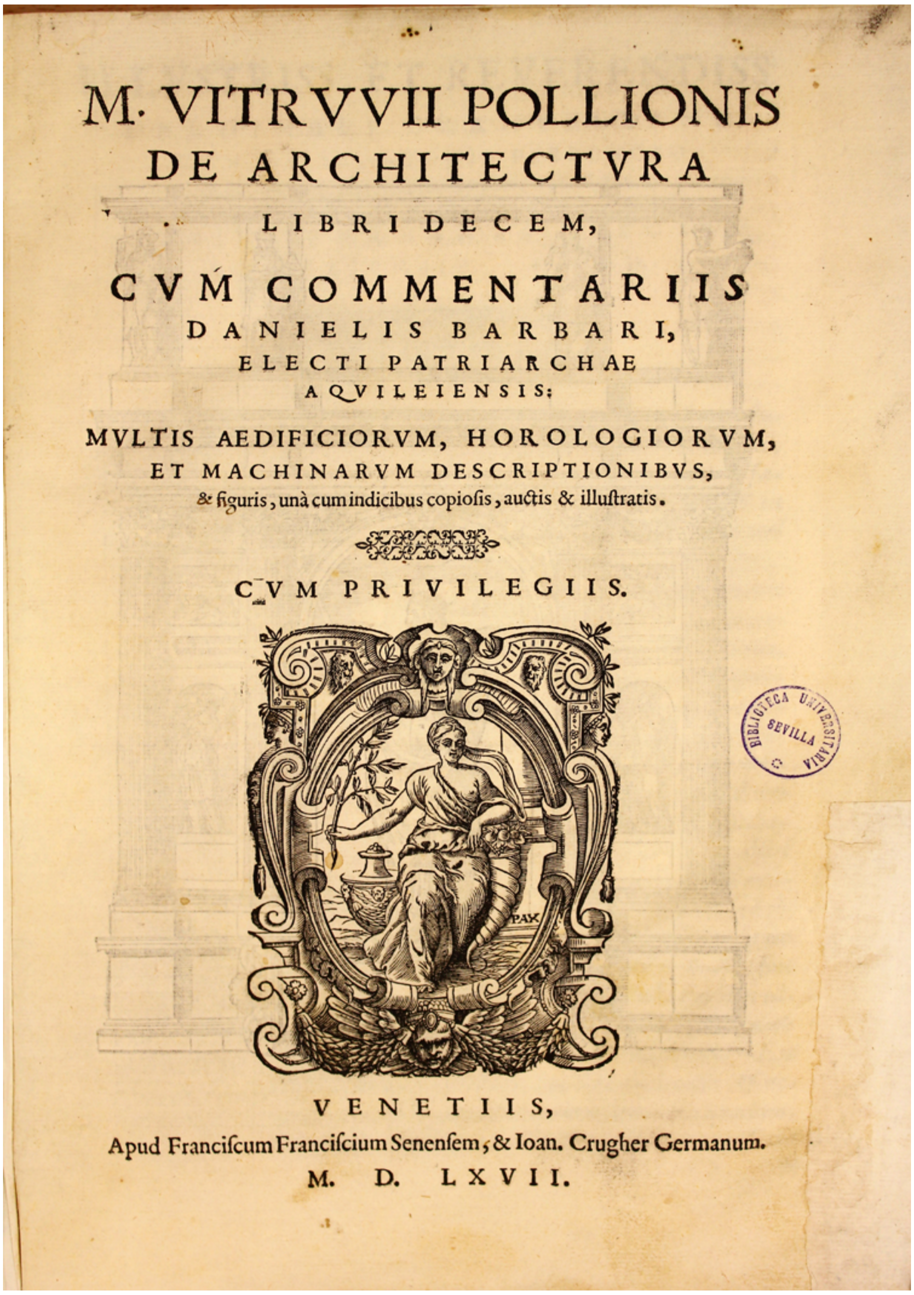
Dato lo stretto legame tra Greci e Romani non è un caso che il mondo latino abbia acquisito la nozione di simmetria attraverso un trattato di architettura.

Fu Vitruvio a introdurre nel suo *De Architectura*, datato intorno al 27 a.C., la parola *symmetria*, in ragione dell'accordo armonico esistente tra le singole parti e l'intera figura.[2] Tale accordo tra le parti e l'intero verte ancora una volta sull'esistenza di una misura comune, una sorta di sottomultiplo, il quale prende il nome di *modulus*.

Il mondo latino insiste maggiormente del mondo greco sull'aspetto di unità poiché la simmetria è vista come la proprietà di un tutto, una composizione di elementi la cui interezza è basata sul rapporto di commensurabilità tra le singole parti che la compongono. L'esempio più lampante di questo concetto è rappresentato dall'uomo il quale è concepito come un'unica entità armonica di parti più piccole in stretto rapporto numerico tra loro: "[. . .] il palmo misura quattro volte il pollice, il piede sedici volte, il cubito ventiquattro volte e la figura nel suo insieme novantasei volte; dell'intera figura, il volto e il palmo rappresentano un decimo, la testa un ottavo, il piede un sesto, il cubito e il petto un quarto[. . .]".[3]

[2] Esiste ancora oggi un'incertezza sulla data di estensione del *De Architectura*: gli studiosi più accreditati la collocano nel decennio 35-25 a.C.

[3] [1, p. 21]



M. VITRVVII POLLIONIS
DE ARCHITECTVRA
LIBRI DECEM,
CVM COMMENTARIIS
DANIELIS BARBARI,
ELECTI PATRIARCHAE
AQVILEIENSIS:
MVLTIS AEDIFICIORVM, HOROLOGIORVM,
ET MACHINARVM DESCRIPTIONIBVS,
& figuris, unà cum indicibus copiosis, auctis & illustratis.

CVM PRIVILEGIIS.

VENETIIS,
Apud Franciscum Franciscium Senensem, & Ioan. Crugher Germanum.
M. D. LXVII.

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA SEVILLA

Capitolo 2

La simmetria dei "Moderni"

Affinché la definizione di simmetria perdesse la sua limitazione a mera armonia, dettata dalla ripetizione di moduli costituenti l'elemento princiale o dalle belle proporzioni, si dovette arrivare al Seicento e alla sua descrizione in termini di uguaglianza.

2.1 Simmetria e uguaglianza

La ripetizione di un elemento sempre uguale, il *modulus* definito da Vitruvio, conferisce senza dubbio regolarità al tutto.

Ogni unità fondamentale, reiterata, dà luogo a configurazioni finali identiche tra loro, si pensi all'accostamento di sezioni di fregi, al susseguirsi di colonne dello stesso ordine architettonico o alle decorazioni geometriche. Isolando le singole unità costituenti si riconosce chiaramente che ognuna è uguale alle altre.
La nozione "moderna" di simmetria è fondata proprio sull'identificazione della corrispondenza tra parti, ossia sull'uguaglianza.

2.2 Claude Perrault

Nella seconda metà del XVII secolo la Francia fu teatro di un aspro dibattito che interessò gli ambienti artistico e letterario e vide scontrarsi tra loro gli Antichi e i Moderni.
Questi ultimi spalleggiavano la produzione artistica dell'epoca, esortando i contemporanei a prendere le distanze dal mondo classico, fino ad allora preso a modello, poiché, pur riconoscendone la grandezza, era un punto di partenza e non di arrivo. D'altro canto, gli Antichi, sostenitori dell'epoca classica, erano convinti che Greci e Romani avessero già raggiunto la perfezione negli ambiti in discussione e non rimanesse che emularli.

Nel medesimo periodo storico, il medico e architetto francese Claude Perrault osservò che "simmetria in francese non significa quello che simmetria significa in greco e in latino, o quello che Vitruvio intende con simmetria".[1]
Se nella Grecia e Roma antiche la simmetria era strettamente correlata al semplice

[1] [1, p. 13]

"rapporto di ragione di parti proporzionate", presso i suoi contemporanei era in vigore una concezione che per la prima volta si discostava dal solo significato estetico. La simmetria intesa come proporzione venne soppiantata da una nozione "moderna" fondata sul rapporto di uguaglianza e sulla somiglianza.
Per Perrault, infatti, la simmetria consiste in un "rapporto di uguaglianza tra parti opposte [...] il rapporto che le parti destre hanno con le sinistre, le alte con le basse, le frontali con le posteriori, riguardo alla grandezza, alla figura, all'altezza, al numero, alla situazione; e in generale riguardo a tutto ciò che le può rendere simili le une alle altre".[2]
Il salto logico dei Moderni prese forma nel momento in cui si distinsero la semplice ripetizione dalla somiglianza tra le parti.

Le mani, se considerate per sé stesse, sono uguali tra loro però non sono riproducibili tramite moduli ripetuti. La metà di destra del corpo umano è dunque in rapporto di uguaglianza con la sinistra ma si rende necessaria l'introduzione di un elemento esterno per metterle in relazione: l'asse o il piano di simmetria. Il concetto di simmetria identificato nel XVII secolo prevedeva che all'uguaglianza tra due parti visibilmente corrispondenti, quali sono le mani, venisse associata una componente di disuguaglianza cioè l'asse di simmetria. La regolarità non è più dovuta solamente all'accostamento di parti uguali ma a un'ordinamento antitetico reso possibile grazie al connubio di queste e di un elemento intermedio che introduce una dissonanza.
Nel Seicento, quindi, si riconobbe che fossero simmetriche anche le disposizioni che si corrispondono specularmente rispetto a un asse o a un piano di riflessione.

La nozione "moderna" di simmetria, caratterizzata dall'unione di parti uguali ed elementi dissonanti rispetto ai quali le prime sono contrapposte, venne sintetizzato da Hegel (1770-1831) nella seguente affermazione: "All'uguaglianza si associa una disuguaglianza, e la vuota identità è interrotta dall'irruzione della differenza. Compare così la simmetria".[3]

2.3 William Whewell

William Whewell (1794-1866) fu uno scienziato inglese dai vasti interessi che diede ingenti contributi alla filosofia della scienza.

Nella sua opera *The Philosophy of the Inductive Sciences*, pubblicata nel 1847, trattò il tema della funzione dell'idea di simmetria, intesa nel significato "moderno", già delineato nell'ambito della scienza della natura nella prima metà dell'Ottocento. Era idea di Whewell che fosse questa la simmetria operante come "idea" nella scienza e "non quell'indefinito attributo di forme che appartiene al dominio delle belle arti". [4]

Secondo lo scienziato inglese, però, non era lecito parlare di simmetria per qualsiasi ripetizione e corrispondenza di parti. Erano simmetriche solo specifiche disposizioni di queste, ripetute e corrispondenti, che dessero "una fondamentale idea di regolarità, completezza e semplicità complessa".[5]

[2] [1, p. 14]
[3] [1, p. 23]
[4] [1, p. 28]
[5] [1, p. 42]

Capitolo 3

Sviluppi in senso matematico della simmetria

Il concetto di simmetria necessitò di compiere un ulteriore progresso nell'evoluzione del suo significato prima di diventare un settore della matematica. Dapprima legato alla ripetizione passò poi all'uguaglianza nella formulazione data dal Perrault e dunque alla sostituzione tra le parti. È solo attraverso l'identificazione della simmetria con la sostituibilità che si gettarono le basi per uno sviluppo in senso matematico il quale permise, poi, l'ingresso della simmetria in molte discipline scientifiche.

3.1 Simmetria e sostituibilità

Tramite la semplice considerazione del significato della nozione di simmetria in vigore presso gli antichi Greci e Romani fu possibile mettere in relazione la simmetria con l'uguaglianza, e quest'associazione permise poi a Perrault di ottenere una nuova definizione in ragione di "rapporto d'uguaglianza tra parti contrapposte".
È proprio l'identificazione della simmetria con la ripetizione e l'uguaglianza di elementi formanti una composizione che porta a concludere che una ripetizione possa derivare solo dalla giustapposizione di parti uguali tra loro. Chiaramente, gli elementi che abbiano in comune tutte le proprietà rilevanti possono essere sostituiti senza alterare ciò di cui fanno parte. La naturale evoluzione della simmetria intesa come uguaglianza è dunque la sua definizione in termini di inter-sostituibilità tra le diverse unità.

Nel 1783 Kant (1724-1804), in riferimento alle figure dello spazio ordinario, scrisse: "Quando due cose sono perfettamente identiche [...] deve anche seguirne che l'una possa essere posta in luogo dell'altra in tutti i casi e in tutte le relazioni, senza che questa sostituzione causi la minima differenza conoscibile".[1]

In seguito alla definizione elaborata da Perrault fu possibile inserire tra le figure simmetriche anche quelle che sono date dalla riproduzione speculare di un soggetto, come le mani. A tal proposito, però, si sollevò il problema di definire un tipo di sostituzione che permettesse a due figure specchiate di sovrapporsi.

[1] [1, p. 43]

3.2 Operazioni che scambiano tra loro le parti

Nello spazio euclideo ordinario (isotropo e omogeneo) la sostituibilità tra due figure è associata alla sovrapponibilità di queste, ossia alla congruenza nel linguaggio matematico, ma due figure tra loro speculari, per quanto siano identiche in forma e grandezza se considerate per se stesse, non sono direttamente sovrapponibili tramite un movimento rigido.

Per tentare di risolvere il dilemma rappresentato dall'esistenza di corpi o figure riflesse, Kant attribuì l'impossibilità della loro sovrapposizione all'esistenza di differenze intrinseche. Secondo il filosofo tedesco le regioni occupate da due figure con le medesime forme e grandezze, che però non sono sovrapponibili, differiscono nell'orientamento dello spazio "assoluto".

Il principale problema attinente alla sostituzione di figure speculari può essere eluso se i movimenti permessi per sostituire le parti non sono necessariamente limitati allo spazio ordinario. In questo caso la congruenza può infatti essere estesa, anche se in modo improprio, alla sovrapposizione ottenuta per mezzo di operazioni di riflessione. Con questa generalizzazione allora le mani destra e sinistra diventano congruenti perché il riflesso specchiato della figura di una delle due è sovrapponibile alla figura dell'altra. Riassumendo, le operazioni permesse per scambiare tra loro le parti nello spazio euclideo esteso comprendevano le traslazioni, le rotazioni e le riflessioni.

Per poter definire simmetriche due figure c'è dunque bisogno che le parti di cui si compongono siano tra loro congruenti e, per provarne la sovrapponibilità, che siano tra loro inter-scambiabili per mezzo di traslazioni, rotazioni, riflessioni o di una qualsiasi combinazione tra queste. La simmetria di una configurazione, quindi, può essere definita nei termini di invarianza dell'intera disposizione sotto tutte e sole le operazioni di sostituzione tra parti uguali o corrispondenti, le quali prendono il nome di operazioni di simmetria.

Ciascuna delle azioni che permettono la sostituzione di una parte di una composizione simmetrica con un'altra ad essa congruente dà luogo a un determinato tipo di simmetria. Qualora l'operazione di sostituzione fosse una traslazione si tratterebbe di simmetria traslazionale, in caso di figure specchiate di simmetria di riflessione e in presenza di rotazioni di simmetria rotazionale.

3.3 Gruppo di simmetria

Con la generalizzazione del concetto di congruenza e la determinazione delle operazioni che permettono lo scambio tra le parti si precisa in modo definitivo il rapporto tra simmetria e uguaglianza.

Le composizioni costituite da sezioni inter-scambiabili tra loro sono invarianti per sostituzioni di parti effettuate tramite le operazioni di simmetria, ma una relazione di uguaglianza, per essere tale, deve soddisfare alcuni requisiti.

Perché una relazione sia di uguaglianza si devono verificare contemporaneamente queste richieste:

1. ogni elemento dev'essere uguale a se stesso;
2. se l'elemento A è uguale all'elemento B, l'elemento B è a sua volta uguale all'elemento A;
3. se l'elemento A è uguale all'elemento B e l'elemento B è uguale all'elemento C allora segue che l'elemento A è uguale anche all'elemento C.

Queste proprietà sono comunemente note nel linguaggio matematico come proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva e una relazione che le soddisfi tutte e tre prende il nome di relazione di equivalenza.
La relazione di uguaglianza, pertanto, è un esempio di relazione di equivalenza.

Siccome l'uguaglianza è una relazione di equivalenza e la simmetria di una configurazione è definita parimenti in termini di uguaglianza o d'invarianza in seguito all'applicazione di operazioni di simmetria, segue che una figura, per essere simmetrica, debba vedere verificate le tre proprietà che caratterizzano le relazioni di equivalenza.
Analizzando punto per punto le proprietà delle relazioni di uguaglianza, applicate allo scambio tra parti che compongono una figura simmetrica si ricava che:

1. affinché valga la riflessività, la famiglia delle operazioni di scambio deve possedere un'operazione che permetta di cambiare ogni parte con se stessa;
2. se un elemento A può essere scambiato con B, perché valga la simmetria, è necessario che esista l'operazione inversa che permetta di scambiare B con A;
3. allo scopo di vedere verificata la transitività che caratterizza le relazioni di uguaglianza, deve esistere una terza operazione, chiamata prodotto, che permetta di trasformare in modo diretto l'elemento A nell'elemento C.

Riassumendo, le operazioni di simmetria devono possedere l'identità, l'inversa e il prodotto e il risultato di tutte queste operazioni dev'essere ancora un'operazione della famiglia.

Queste stesse condizioni sono quelle che una famiglia di operazioni deve possedere per essere definita un gruppo. Si conclude quindi che le operazioni di simmetria di una figura formano il gruppo di simmetria della figura stessa.
Dal caso particolare di figure che sono disposizioni simmetriche di parti uguali nello spazio si ottiene un risultato matematico generale ossia che le operazioni di simmetria di una configurazione formino un gruppo; risultato dimostrato nell'ambito della teoria dei gruppi di trasformazione nella seconda metà dell'Ottocento.

Essenzialmente, il legame tra simmetria e uguaglianza ha valore in quanto relazione di equivalenza: le operazioni di simmetria di una figura scambiano tra loro elementi equivalenti.
La stretta connessione tra simmetria, equivalenza e gruppo porta a considerare la simmetria come tutto ciò che rientra nella definizione di "invariante rispetto a un gruppo di trasformazioni", facendo qui riferimento al gruppo di simmetria definito dalle operazioni che permettono lo scambio tra le parti.

3.4 Classi di equivalenza

Il concetto di simmetria entrato in uso nella scienza si basa sulle definizioni gruppale e di invarianza le quali sono state delineate a partire dalle connotazioni di uguaglianza, equivalenza e sostituibilità tra gli elementi. Nella fattispecie, per quanto riguarda l'equivalenza, si può considerare l'equipollenza delle singole parti che si corrispondono e che appartengono alla stessa configurazione o esaminare le trasformazioni che lasciano invariata l'intera configurazione; spostando l'attenzione sulla struttura principale invece che sulle sue costituenti.
Il secondo punto di vista focalizza maggiormente sulla relazione di equivalenza che sussiste tra la figura di partenza e quelle in cui questa viene trasformata dalle operazioni di simmetria; a partire da questo si può ampliare nuovamente il significato attribuito al termine simmetria.

Un teorema matematico enuncia che a ciascuna relazione di equivalenza definita su un insieme di elementi corrisponde una partizione in classi dell'insieme. Ciò significa che, per ciascun insieme I non vuoto dotato di una relazione di equivalenza, preso un suo elemento x, è possibile definire un sottoinsieme costituito da tutti gli elementi di I in relazione con x. Tale sottoinsieme prende il nome di classe di equivalenza.
Applicando quanto detto agli elementi di un insieme che sono legati dalla relazione di equivalenza ‶essere sostituibili l'uno con l'altro attraverso le operazioni di un gruppo di simmetria″, si verifica che questi appartengono tutti allo stesso sottoinsieme e costituiscono una classe di equivalenza.
Per fare un esempio, si prenda l'insieme delle figure della geometria euclidea e se ne consideri la classe della partizione dell'insieme originario costituita dai quadrati. Il gruppo di simmetria del quadrato è composto dalle operazioni che sono rotazioni di angoli uguali e multipli interi di 90 gradi intorno al centro della figura. Sotto l'azione di questo gruppo, il quadrato è trasformato in altri quadrati ad esso equivalenti.

Le proprietà che restano invariate sono quelle intrinseche che caratterizzano la figura del quadrato in generale quindi, il concetto di simmetria interviene dove si parli di classi di oggetti e pertanto è di portata universale.
Proprio per questo motivo il concetto di simmetria ha trovato largo impiego in ambito scientifico.

Capitolo 4

Simmetria e descrizione fisica

Le argomentazioni basate su situazioni di simmetria venivano spesso utilizzate da filosofi e scienziati per dare spiegazione di alcuni fenomeni fisici già nell'antica Grecia. Tali argomenti vennero poi formalizzati da Leibniz, sul finire del Seicento, nel principio di ragion sufficiente, che servì da base per le speculazioni successive. Verso la fine del XIX secolo il fisico francese Pierre Curie elaborò una teoria, discendente dal suddetto principio, che conciliasse le considerazioni di simmetria con i fenomeni fisici.

4.1 Principio di ragion sufficiente

Il principio di ragione sufficiente, così definito da Leibniz alla fine del XVII secolo, prevede che "nulla accade senza che ci sia una ragione sufficiente perché sia così e non altrimenti".[1] Tale conclusione tratta dal matematico e filosofo tedesco fu la prima formulazione chiara delle argomentazioni fondate sulla simmetria, già note nell'antichità.

Anassimandro, che visse in Asia Minore tra il 611 e il 545 a.C., in una considerazione riportata da Aristotele, sostenne che la terra, ritenuta avere la forma di un disco, mantenesse la sua posizione a causa dell'indifferenza. I moti verso l'alto o verso il basso e lungo una qualsiasi direzione trasversale erano tutti ugualmente inappropriati per la terra che è collocata nel centro dell'universo e indifferentemente collegata a ogni punto estremale.[2] Siccome le direzioni dello spazio si equivalgono, sono cioè indifferenti, non v'è ragione affinché si verifichi uno spostamento della terra lungo una di esse, dunque, questa deve rimanere ferma come diretta conseguenza della simmetria rotazionale.

Si prenda come altro esempio una bilancia a bracci uguali alla quale viene applicato pari peso su entrambi i piatti. Il primo postulato di Archimede, matematico e fisico siracusano che visse tra il 287 e il 212 a.C., esposto nel trattato sull'equilibrio dei piani, enuncia che ‟pesi uguali applicati ad uguali distanze sono in equilibrio″.[3]
Pertanto l'asta deve rimanere in assetto orizzontale e non pendere né da un lato né dall'altro del fulcro.

[1] [1, p. 64]
[2] [2, p. 6]
[3] [2, p. 15]

Ciò che accomuna entrambi gli esempi proposti e già noti a Leibniz è l'aver tratto delle conclusioni tramite l'applicazione di argomentazioni basate sulla simmetria delle situazioni. Siccome non vi è motivo alcuno secondo il quale uno dei due sistemi debba tendere verso una direzione piuttosto che lungo un'altra, viene mantenuta la simmetria iniziale. Si può allora facilmente constatare che il principio di ragion sufficiente è perfettamente adattabile alle situazioni in cui nell'antichità si faceva ricorso ad argomenti di simmetria. Per quanto riguarda la staticità della terra proposta da Anassimandro, dalle sue congetture deve seguire necessariamente che, dal momento in cui il contesto iniziale è di equilibrio, anche lo stato finale dovrà mantenere quell'assetto giacché ciascuna direzione è equivalente a qualsiasi altra. "La terra rimane ferma perché non c'è ragione per cui ciò che si trova al centro e in uguale relazione con gli estremi debba muoversi in una direzione piuttosto che in un'altra".[4]
Analogamente, la bilancia a due bracci, caratterizzata da una spiccata simmetria bilaterale, ovvero di tipo destra-sinistra, rimarrà in equilibrio perché non vi è alcuna ragione che faccia sbilanciare l'asta dal momento in cui l'approntamento del sistema è identico per entrambi i piatti.

Il principio di Leibniz può essere guardato come fondamento intuitivo e giustificazione delle considerazioni di simmetria, le quali sono dei ragionamenti che permettono di trarre delle conclusioni basandosi sulle simmetrie di un sistema.
Gli argomenti di simmetria introdotti nell'antica Grecia per dare spiegazione di situazioni simmetriche di equilibrio, esprimibili in termini di indifferenza tra soluzioni equivalenti, vennero a tutti gli effetti legittimati dal principio di ragion sufficiente.

Nella scienza, le considerazioni di simmetria sono utilizzate frequentemente sia nei casi statici, come quelli appena citati, che in quelli dinamici.
Nel caso della bilancia e dell'argomentazione di Anassimandro circa la staticità della terra, siccome non vi sono ragioni secondo le quali lo stato delle cose debba essere alterato, permane la condizione di quiete iniziale.
Se lo stato iniziale fosse di moto non si verificherebbero variazioni sostanziali nella formulazione delle considerazioni di simmetria, si pensi, ad esempio, al principio d'inerzia che costituisce il fondamento della meccanica newtoniana. Un corpo, se non soggetto a forze, permane in stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Lo stato di indifferenza che caratterizza una situazione di simmetria come quelle discusse porta a concludere, tramite il principio di ragion sufficiente, che non avviene nulla in grado di rompere la simmetria iniziale.
La bilancia non si sposta dall'equilibrio se alle sue estremità sono applicati pari pesi, la terra è impossibilitata a muoversi per non rompere la simmetria sferica e un corpo, se non è soggetto a forze, continua a muoversi di moto rettilineo uniforme.
Si può dunque concludere che il principio di ragion sufficiente in situazioni di simmetria può essere riscritto nella forma ˝un'asimmetria non può nascere dal nulla˝.[5]

Nonostante le considerazioni di simmetria possano essere rintracciate in ogni periodo storico nella descrizione del mondo fisico, fu il francese Pierre Curie a darne una formulazione esplicita in un principio che prese il suo nome.

[4] [1, p. 64]
[5] [1, p. 67]

4.2 Principio di Curie

Verso la fine dell'Ottocento Pierre Curie, pioniere nei campi della cristallografia, del magnetismo, della piezoelettricità e della radioattività, condusse degli studi relativi ai mezzi cristallini. Fu proprio in quel frangente che intuì l'interesse che avrebbe avuto l'introduzione delle considerazioni di simmetria, già familiari in ambito cristallografico, nella comprensione dei fenomeni fisici.

Il fisico francese arguì, dall'analisi delle proprietà termiche, magnetiche ed elettriche dei cristalli, che ci dovesse essere un collegamento tra la struttura regolare del mezzo materiale in cui avevano luogo i fenomeni e le sue caratteristiche di simmetria. Scoprì inoltre che un corpo posto all'interno di un campo elettrico o di un campo magnetico gode delle proprietà tipiche dei corpi anisotropi e può, sotto molti punti di vista, essere paragonato ai cristalli. Queste deduzioni portarono dunque Curie a interrogarsi sul rapporto esistente tra le proprietà fisiche e quelle di simmetria, sia nel caso in cui fossero applicate ai cristalli che a qualsiasi sistema fisico.
Egli si accorse che i fisici utilizzavano spesso le condizioni di simmetria ma, generalmente, trascuravano di definire la simmetria in un fenomeno, perché, molto spesso, le condizioni di simmetria sono semplici e pressoché evidenti a priori.[6]

Queste e altre considerazioni furono materia di una serie di lavori ai quali Curie si dedicò, tra il 1884 e il 1895, con l'idea principale di estendere i risultati della ‶teoria cristallografica della simmetria″ allo studio dei fenomeni fisici in generale.

Le conclusioni alle quali giunse Curie vennero raccolte in modo sistematico nella sua opera *Sur la symétrie dans les phénomènes physiques* e i punti nevralgici possono essere ricondotti a due enunciati:

- se un fenomeno fisico ha luogo è perché è stata rotta la simmetria iniziale e ci si attende che il risultato sia in egual misura o maggiormente simmetrico a ciò che lo ha generato;
- "la simmetria delle cause è da ricercarsi negli effetti" ma il reciproco non vale.[7]

La prima affermazione intende porre l'attenzione su ciò che causa i fenomeni. Affinché certe cause producano determinati effetti, gli elementi di simmetria delle cause devono essere rintracciabili negli effetti prodotti e ciò di cui abbisogna il fenomeno per manifestarsi è l'assenza di determinati elementi di simmetria.[8] In breve, è la dissimmetria che crea il fenomeno.
Questo asserto, in un certo senso, discende dal principio di ragion sufficiente ed è accresciuto dalla considerazione di simmetria che lega gli effetti di un fenomeno alle cause, asimmetriche, che lo hanno generato. Dal momento in cui la simmetria caratteristica di un fenomeno è quella massima compatibile con lo stesso, si verifica che solo certi elementi di simmetria possono coesistere con determinati fenomeni ma non sono necessari. Ciò che è indispensabile è l'assenza di alcuni elementi di simmetria dal momento in cui è la dissimmetria a creare il fenomeno.[9]

[6] [3, p. 119]
[7] [1, p. 68]
[8] [3, p. 119]
[9] [3, pp. 126-127]

Il secondo enunciato, noto come "principio di Curie", stabilisce che le simmetrie presenti nelle cause dei fenomeni siano riscontrabili negli effetti ossia, se un sistema presenta inizialmente alcune simmetrie, queste devono essere rispettate anche dopo il manifestarsi del fenomeno. Una formulazione analoga può essere data in termini di dissimmetria: siccome specifici effetti rivelano una certa dissimmetria, questa dev'essere rintracciabile nelle cause che li hanno scatenati. L'affermazione reciproca non ha invece fondamento poiché gli effetti prodotti possono essere più simmetrici delle cause.[10]

Il "principio di Curie", per poter essere applicato con esito positivo, deve soddisfare svariate condizioni, tra le quali quelle di validità della descrizione causale.
Siccome da determinate cause seguono sempre certi effetti, per poter applicare le considerazioni di simmetria ai fenomeni fisici c'è l'assoluta necessità di conoscere la causa completa per ogni effetto e determinare correttamente la simmetria che caratterizza i sistemi presi in esame.
Se le condizioni di applicabilità sono soddisfatte, il principio di Curie fornisce una specie di regola di selezione per i fenomeni che si possono verificare garantendo, però, solo una condizione necessaria per l'esistenza degli stessi. In sostanza, una determinata situazione può evolvere solo quando siano rispettate le condizioni di simmetria del sistema.
Se si considera un sistema per il quale si è in possesso di una valida e completa descrizione causale, è possibile stabilire se, in determinate situazioni, un dato fenomeno possa o meno verificarsi sulla base di considerazioni legate alla simmetria delle cause.

Applicando il principio di Curie, è possibile sfruttare le considerazioni di simmetria secondo la funzione metodologica offerta:

- una volta valida la descrizione causale di un fenomeno, è possibile restringere il campo degli effetti verificabili ai soli aventi un grado di simmetria maggiore o tutt'al più uguale a quello delle cause;

- se le condizioni di validità del principio di Curie sono soddisfatte, la violazione dello stesso può comportare la modifica della teoria fisica nell'ambito considerato;

- nei casi in cui la descrizione causale di un avvenimento suscettibile di studio sia determinata in tutti i suoi aspetti, le condizioni di simmetria sono sia sufficienti che necessarie e dunque è possibile determinare con esattezza il fenomeno.

Nella sua meticolosa descrizione del possibile uso della simmetria nelle scienze, Curie non tralasciò né la definizione degli elementi caratteristici delle simmetrie, né la suddivisione in gruppi a seconda delle caratteristiche di regolarità degli oggetti o dei sistemi. Il fisico francese illustrò, inoltre, moteplici esempi di fenomeni fisici a sostegno delle sue conclusioni, principalmente inerenti l'elettromagnetismo classico.

L'asserto "le simmetria delle cause si devono ritrovare negli effetti" considera la simmetria in termini di principio di ragion sufficiente. Infatti, non c'è motivo perché le simmetrie delle cause non debbano ritrovarsi negli effetti o, in alternativa, un'asimmetria negli effetti dev'essere per forza di cose rintracciabile nelle cause.

Il principio che deve il suo nome al fisico francese, enunciato in relazione al rapporto esistente tra le cause e gli effetti, presenta una debolezza perché, tra le varie condizioni di

[10] [3, p. 127]

validità che devono essere rispettate affinché sia applicabile, richiede l'esatta conoscenza della descrizione causale.
Le difficoltà che si riscontrano per mezzo della descrizione causale possono essere appianate ricorrendo a una nuova formulazione del principio di Curie, del tutto equivalente all'originale, ma che si esprime in termini di problemi e soluzioni.

Al posto di "le simmetrie delle cause si devono ritrovare negli effetti" si ottiene "le simmetrie dei problemi si ritrovano nelle soluzioni".[11]
Per comprendere meglio cosa s'intende per problemi e soluzioni basta riflettere sull'ambito di applicazione: le scienze. Gli scienziati, che indagano il mondo fisico e non solo, sono soliti impostare i problemi in linguaggio matematico sotto forma di equazioni da risolvere. Sfruttando questa considerazione, si ottiene che "le simmetrie delle equazioni si ritrovano nelle soluzioni".[12] Ciò che legava cause ed effetti può essere ora sostituito dal nesso funzionale che connette un'equazione alle sue soluzioni.

Il connubio tra problemi (o equazioni) e soluzioni permette di mettere in luce un altro aspetto della funzione metodologica delle considerazioni di simmetria.
Per simmetrie dei problemi s'intendono tutte e sole le trasformazioni che li lasciano invariati nei loro parametri rilevanti rispetto al contesto considerato. Ciò significa che un problema è simmetrico se rimane invariato sotto operazioni che lo trasformano in un problema equivalente, ossia immutato nei suoi tratti salienti.
Un problema che può essere tramutato in uno ad esso equivalente deve per forza di cose avere delle soluzioni anch'esse indipendenti dai parametri irrilevanti, derivanti dal modo in cui è formulato il quesito iniziale.
A questo punto, a partire dalle simmetrie dei problemi è possibile innanzitutto ricavare dei vincoli sulla natura delle soluzioni, le quali devono rispettare le condizioni di simmetria, ma anche semplificare le equazioni attraverso cui sono posti i problemi, trasformandole in altre equivalenti e di più facile risoluzione.

Nella pratica scientifica, da Curie in poi, la riduzione dei problemi in altri equivalenti ma più facilmente risolvibili divenne una stategia ampiamente diffusa e sempre più rilevante.

[11] [1, p. 70]
[12] [1, p. 70]

Capitolo 5

Simmetria nelle teorie scientifiche

L'applicazione della simmetria alle teorie matematiche e fisiche è dovuta principalmente alla coesistenza di due fattori: la definizione gruppale e il principio di Curie.

La definizione gruppale della simmetria poggia saldamente sull'idea di invarianza rispetto a un gruppo di trasformazioni. Originariamente questa formulazione era legata principalmente all'aspetto spaziale delle figure e il gruppo in questione era quello definito dalle operazioni di simmetria che permettono lo scambio tra parti equivalenti. Ben presto, però, l'invarianza rispetto a un gruppo di trasformazioni fece il suo ingresso anche nell'algebra in relazione al problema della risoluzione delle equazioni di grado superiore al quarto a partire dalla nozione di "gruppo di sostituzioni" delle soluzioni di un'equazione. La nozione di simmetria, da allora, assunse un carattere di generalità perché rendeva possibile la classificazione di oggetti fondata su proprietà obiettive, sulla base delle suddivisioni in classi di equivalenza.

Grazie alla formalizzazione del principio di Curie la simmetria venne disgiunta dall'applicazione limitata a oggetti tangibili o a figure. Asserendo che "la simmetria dei problemi o delle equazioni dev'essere ritrovata nelle soluzioni", il fisico francese permise l'estensione dell'uso del principio di ragion sufficiente e delle considerazioni di simmetria anche al mondo astratto della matematica. I problemi, trascritti in forma matematica tramite l'uso di espressioni ed equazioni, potevano ora far uso delle argomentazioni di simmetria per essere semplificati e ricondotti ad altri equivalenti di più facile risoluzione.

Con la definizione gruppale prima e il principio di Curie poi, la simmetria entrò a pieno diritto a far parte del linguaggio tecnico; il suo impiego nell'indagine scientifica venne pienamente giustificato e quindi non esitò a diffondersi. I campi di applicazione più fertili da questo punto di vista furono la meccanica analitica, la relatività e la fisica quantistica.

5.1 Meccanica analitica

Dal momento in cui l'oggettività della simmetria era stata legittimata dalla definizione gruppale risultò naturale per matematici e fisici estenderla a oggetti astratti quali le configurazioni senza immediato riscontro intuitivo, tra cui le forme algebriche e le equazioni.

Se le trasformazioni di simmetria che scambiano tra loro parti equivalenti di una figura sono facilmente ravvisabili, non si può dire lo stesso dei gruppi di trasformazione che definiscono la simmetria di relazioni matematiche, equazioni ed espressioni. Per raggruppare tutti gli enti astratti con un unico nome ci si riferisce a questi con l'appellativo "relazioni tra grandezze". La "simmetria di una relazione tra grandezze" consiste nell'invarianza della forma astratta della relazione quando le grandezze che vi compaiono sono sottoposte all'azione di un determinato gruppo di trasformazioni. Nell'applicazione delle trasformazioni variano le grandezze che descrivono il problema in esame ma il modo in cui queste sono collegate tra loro rimane immutato.

Le prime relazioni alle quali vennero applicate le considerazioni di simmetria furono le equazioni del moto. Queste leggi sono solite descrivere l'evoluzione temporale di un sistema fisico e la loro completa integrazione consente di risolvere sotto ogni aspetto il problema dinamico ma non sempre la soluzione è di facile determinazione.

Storicamente le prime proprietà d'invarianza delle espressioni matematiche con rilevante significato fisico cominciarono ad essere indagate esplicitamente in seguito all'introduzione di un approccio trasformazionale al problema del moto. Il primo a interessarsi alla possibilità di operare trasformazioni delle variabili che lasciassero invariate nella forma le equazioni di partenza fu G.L. Lagrange (1736-1813). Il matematico e astronomo, italiano di nascita, pose le fondamenta della trattazione analitica della meccanica nella sua opera intitolata *Mécanique Analytique*, pubblicata nel 1788. Egli propose di rappresentare un sistema di particelle tramite un insieme di coordinate generalizzate q_i alle quali venivano associate le rispettive velocità $\dot{q}_i$. Con questo approccio la traiettoria del sistema non veniva studiata a partire dalle forze agenti su di esso, come avveniva nel caso newtoniano, e svincolava il problema dinamico dalla scelta di uno specifico sistema di variabili fissato a priori. La potenza del metodo trasformazionale proposto dall'italo-francese era immensa. Nelle parole dello stesso Lagrange: "è forse uno dei principali vantaggi del nostro metodo il fatto che si possano esprimere le equazioni di ogni problema nella forma più semplice possibile per ogni insieme di variabili, e che ci consenta di vedere in anticipo quale tipo di variabili sia più conveniente usare per facilitare al massimo l'integrazione".[1]
Siccome era sempre possibile operare la scelta delle variabili che meglio si confacevano al problema in esame, era di fatto stabilito un metodo generale che conducesse alla semplificazione del problema dinamico al fine di integrarlo completamente.

La descrizione lagrangiana, particolarmente efficace nel caratterizzare il moto di un insieme di punti materiali soggetti a vincoli, venne successivamente perfezionata e generalizzata dalla formulazione hamiltoniana.
Quest'ultima, introdotta da W.R. Hamilton (1805-1865) nel 1833, facilitò ulteriormente la semplificazione del problema dinamico di partenza. L'approccio seguito dalla meccanica hamiltoniana si basa sull'utilizzo di un sistema di coordinate dette canoniche, in cui le coordinate generalizzate q_i della meccanica lagrangiana vengono affiancate, anziché dalle velocità generalizzate $\dot{q}_i$, dai momenti coniugati p_i.

C.G. Jacobi (1804-1851) sfruttò quanto formulato da Hamilton per sviluppare una nuova procedura che permettesse di giungere alla completa soluzione delle equazioni del moto. Tale processo si avvaleva principalmente della trasformazione graduale del proble-

[1] [1, p. 117]

ma originale in altri che fossero equivalenti ma più facilmente risolvibili tramite l'applicazione delle trasformazioni delle variabili che lasciano invariate le equazioni hamiltoniane. La teoria della trasformazione canonica offerta da Jacobi, sebbene fosse introdotta col solo scopo di fungere da strumento per la soluzione dei problemi dinamici, servì da guida per lo studio generale delle teorie fisiche basato sulle proprietà di trasformazione.

L'introduzione di considerazioni trasformazionali nella meccanica classica del XIX secolo diede impulso agli studi basati sulle proprietà di invarianza di equazioni matematiche con importante significato fisico che si svilupparono a partire dalla seconda metà dell'Ottocento ad opera di Helmholtz, Lie e Poincaré. In questi anni l'evoluzione di un sistema dinamico era concepita come il dispiegamento continuo di una trasformazione canonica.

Non tutte le funzioni che appaiono nel formalismo della fisica classica rappresentano reali proprietà fisiche. Le funzioni $1/2\,mv^2$, mv ed mg rappresentano qualitativamente e operazionalmente delle proprietà fisiche osservabili; le lagrangiane e le hamiltoniane di un sistema non sono espressioni rappresentative di grandezze misurabili, sono invece ausiliarie.
Le simmetrie riscontrabili nelle funzioni ausiliarie non sono osservabili direttamente in natura e prendono il nome di simmetrie funzionali o analitiche. Eventuali simmetrie presenti nelle lagrangiane o nelle hamiltoniane, ad esempio, non implicano necessariamente delle proprietà fisiche conservate.
La lagrangiana di un sistema di punti soggetti a forze di attrito può essere invariante sotto rotazioni degli assi coordinati, ciò nonostante il momento angolare può non essere conservato. Non è universalmente vero, quindi, che "le simmetrie implicano delle leggi di conservazione".[2] Quanto esposto circa le funzioni ausiliarie indica che la deduzione delle leggi di conservazione dalle simmetrie analitiche ha validità limitata, sono cioè applicabili solo ai casi in cui valga il "principio di Noether". Tali casi sono quelli per i quali le leggi di conservazione possono essere viste come conseguenze di simmetrie, ad esempio, le leggi di conservazione del momento angolare, dell'impulso o dell'energia seguono da simmetrie spazio-temporali delle equazioni dinamiche.

Nel modo di procedere applicato fino a questo punto le simmetrie sono conseguenze delle leggi fisiche: si parte dalle equazioni da risolvere e se ne studiano le proprietà di simmetria per ottenerne una semplificazione o, se possibile, la risoluzione.

5.2 Relatività

Fu merito degli sviluppi della meccanica analitica se vennero incluse sempre con maggiore frequenza le considerazioni basate sulle nozioni di trasformazione, invarianza e dunque di simmetria nella fisica del XX secolo. Nei primi anni del Novecento, matematici del calibro di Klein, Hilbert, Weyl e Noether fecero uso della matematica soggiacente la teoria dei gruppi al fine di studiare svariate teorie fisiche.

Accanto alla possibilità di ricercare le proprietà di simmetria nelle leggi già formulate si presentò anche un modo di procedere alternativo, chiamato inverso. Questo postulava che alcune simmetrie avessero reale significato fisico e a partire da ciò si cercavano le equazioni dinamiche che rispettassero tali proprietà. Il modo di procedere alternativo

[2] [2, p. 23]

attribuisce dunque specifiche proprietà di simmetria alle leggi e ai fenomeni; i principi sul quale si basa vengono detti "di simmetria"o "di invarianza". Tali principi postulano determinate simmetrie delle leggi fisiche e ciò che ne motiva l'assunzione è da attribuire a diverse cause: alcune sono dettate da considerazioni con fondamento sperimentale, altre da considerazioni che sono conseguenze logiche di determinati sviluppi teorici e, infine, da considerazioni di simmetria fondate sul principio di ragion sufficiente.

Il primo principio d'invarianza esplicitamente formulato come tale fu il principio di relatività ristretta enunciato da A. Einstein (1879 - 1955) nel 1905 il quale postula l'invarianza delle equazioni delle leggi fisiche per cambiamenti di sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Ciò che rende principio d'invarianza il principio di relatività ristretta è l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento, dal momento in cui non ne esiste uno privilegiato, per l'enunciazione delle leggi fisiche in quanto ciò si traduce fondamentalmente nell'invarianza di tali leggi rispetto alle trasformazioni che operano il passaggio da un sistema a un altro. Tale enunciato poggia su due principi fondamentali: la natura relativa di ciascun moto e la costanza della velocità della luce.
È noto sin dai tempi degli antichi greci che il moto di un corpo è definibile solo in rapporto a un altro; ad esempio il moto della terra è riferito al sole o alle stelle fisse e il moto di un carro è rapportato al suolo. In fisica, il corpo a cui gli eventi vengono comparati a livello spaziale prende il nome di sistema di coordinate. Affinché le leggi della meccanica siano valide c'è bisogno che lo stato di moto del sistema di coordinate sia di tipo inerziale, e non arbitrario; un sistema di coordinate che si muova di moto rettilineo uniforme relativamente a un sistema inerziale è inerziale a sua volta e dunque lo stato di moto di un sistema inerziale può essere determinato in più modi. Il principio di relatività ristretta generalizza tale definizione fino a farle includere qualunque tipo di evento fisico, in modo tale che ogni legge universale di natura valida in un sistema di coordinate S non perda di validità in un altro sistema S' che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto a S.
Il secondo principio che rientra nella formulazione della relatività ristretta enuncia la costanza della velocità della luce nel vuoto. Nello spazio, in assenza di materia, la luce ha una velocità di propagazione sempre definita, totalmente indipendente dallo stato di moto dell'osservatore o della sorgente luminosa. A condurre a questa conclusione fu il crescente successo della teoria elettromagnetica e, tra le tante, la prova sperimentale di Michelson-Morley (1887) che evidenziò l'assenza di un sistema di riferimento privilegiato, l'etere, il solo entro il quale la velocità della luce avrebbe assunto il valore costante c. Fu grazie a queste motivazioni che la costanza della luce per tutti i sistemi inerziali dovette essere elevata al rango di principio.
Entrambi i principi menzionati furono fortemente suffragati dall'esperienza ma, affinché la relatività ristretta fornisse una valida descrizione della meccanica classica, fu necessario apportare delle modifiche ai concetti di spazio e di tempo. Gli eventi che fino ad allora erano stati ritenuti essere simultanei vennero smentiti, il tempo perse il suo carattere assoluto e venne fatto rientrare nelle coordinate "spaziali". [3] La sola descrizione adeguata divenne quella quadridimensionale, basata sulle tre coordinate spaziali e sulla coordinata temporale. Mentre nella meccanica classica lo spazio e il tempo sono trattati come entità sostanzialmente distinte, la relatività ristretta introduce il concetto di spaziotempo, in cui

[3] [4, p. 72]

essi sono indissolubilmente legati in uno spazio quadridimensionale, denominato spazio di Minkowski.
Siccome la relatività ristretta è un principio di invarianza, deve valere la definizione gruppale e il gruppo di trasformazioni rispetto alle quali la forma delle equazioni rimane invariata è quello di Lorentz. Le trasformazioni di Lorentz sono lineari nelle tre coordinate spaziali x, y, z (o, equivalentemente, x_1, x_2, x_3) e nella coordinata temporale t (o x_4). Sono caratterizzate dall'invarianza dell'espressione $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$, ottenuta dalle differenze dx, dy, dz, dt delle coordinate di due eventi infinitamente vicini. Avvalendosi delle trasformazioni di Lorentz, il principio di relatività ristretta si può esprimere anche dicendo che le leggi di natura non cambiano la propria forma nel passaggio da un sistema inerziale a un altro, sempre della classe dei sistemi inerziali.

Wigner (1902-1995), matematico e fisico, nel 1967 scrisse che il significato e la validità generale dei principi di simmetria venne riconosciuta solo da Einstein il quale segnò un'inversione di tendenza perché postulò le invarianze delle leggi fisiche in modo generale tramite principi invece di ricavarle, come conseguenze, dalle equazioni del moto.

5.3 Fisica quantistica

A partire dall'innovazione introdotta da Einstein, lo sfruttamento delle teorie di simmetria, fondate su principi di invarianza e formulate per mezzo degli strumenti matematici forniti dalla teoria dei gruppi di trasformazione, fu il passo decisivo per lo sviluppo della fisica contemporanea.

Le prime forme di simmetria a essere state postulate per mezzo di principi di invarianza furono quelle dello spazio-tempo, presenti nel pensiero scientifico già da alcuni secoli. Prima dei principi di relatività (ristretta e generale), le leggi della meccanica erano invarianti per cambi di sistemi di riferimento mentre non valeva lo stesso per le equazioni che descrivevano l'elettromagnetismo.
Le trasformazioni attraverso le quali si poteva operare il passaggio da un sistema a un altro si esaurivano con le rotazioni spaziali, le traslazioni spazio-temporali e le trasformazioni di velocità uniforme proposte da Galilei. Ciascun tipo di trasformazione così come l'insieme di queste costituisce un gruppo, pertanto, fu possibile innalzare a principi di simmetria tutti quelli che postulano l'invarianza delle leggi fisiche rispetto a questi.
Le simmetrie spazio-temporali hanno la caratteristica di essere tutte interpretabili in termini geometrici, da qui la loro dicitura di "simmetrie geometriche", poiché sono rintracciabili nelle simmetrie della struttura attribuita al mondo fisico. L'invarianza per traslazioni spaziali riflette l'omogeneità dello spazio, caratteristica secondo la quale ciascun punto equivale agli altri; l'invarianza per rotazioni spaziali si traduce nell'equivalenza di ogni direzione, la quale comporta l'isotropia dello spazio fisico e l'invarianza per traslazioni temporali, con la sua equivalenza degli istanti temporali, segue dall'uniformità del tempo.
L'invarianza dei sistemi di riferimento nei confronti delle trasformazioni di velocità che collegano sistemi in moto relativo rettilineo tra loro merita un discorso a parte. Originariamente si consideravano le traformazioni delle velocità di Galileo ma dalla teoria della relatività ristretta, affinché anche le equazioni di Maxwell per l'elettromagnetismo

fossero invarianti, fu necessario un ampliamento della teoria. Dal 1905 le trasformazioni di velocità assunsero l'aspetto di rotazioni dello spazio quadridimensionale, lo spazio pseudo-euclideo introdotto nel 1908 da Minkowski.
Un'importante caratteristica delle simmetrie spazio-temporali è la loro validità per tutte le leggi di natura in quanto sono strettamente connesse con la struttura spazio-temporale in cui hanno luogo gli eventi fisici.

L'introduzione della teoria dei gruppi nella fisica quantistica ad opera di Weyl e Wigner nella seconda metà degli anni Venti del Novecento rappresentò un secondo punto di svolta nella storia delle simmetrie fisiche, dopo quella segnata da Einstein con la formulazione del principio di relatività ristretta.
Effettivamente, l'approccio inverso all'uso della simmetria si rivelò essere uno strumento molto utile nella descrizione del mondo atomico e subatomico, dalla meccanica quantistica alle successive teorie quantistiche e relativistiche dei campi, elaborate per rappresentare le particelle elementari e le loro relazioni.
Nel corso delle indagini relative al mondo microscopico vennero postulate altre simmetrie, meno generali di quelle dello spazio-tempo, introdotte nelle teorie fisiche per dare spiegazione di determinati fenomeni, sulla base di analogie esistenti con situazioni di simmetria già note. Siccome si tratta di simmetrie valide unicamente per specifiche interazioni è uso chiamarle "simmetrie dinamiche", secondo la denominazione proposta da Wigner.
Nell'ambito della fisica atomica e subatomica la presenza di un gruppo di simmetria comporta conseguenze dirette e particolarmente rilevanti a causa della peculiarità della descrizione quantistica di stati e operatori. In ambito quantistico, infatti, gli stati di un sistema sono descritti da onde, le operazioni di simmetria sono rappresentate da operatori che corrispondono alle grandezze fisiche misurabili e si ragiona in termini di probabilità; dunque, molte delle proprietà dei sistemi microscopici possono essere interpretate come conseguenze dell'esistenza di gruppi di simmetria.

La prima simmetria dinamica a essere stata introdotta nella fisica microscopica e a essere stata trattata con le tecniche della teoria dei gruppi in contesto quantistico è la simmetria di scambio formulata dal fisico tedesco W.K. Heisemberg nel 1926. Egli scoprì che un insieme costituito da un certo numero di particelle quantistiche dello stesso tipo, definite identiche, era invariante per la trasformazione del gruppo di scambio. In altre parole, lo stato ottenuto attraverso lo scambio di alcune particelle identiche tra loro è lo stesso che si aveva prima della permutazione degli elementi costituenti il sistema.

La formulazione quantistica offrì la possibilità di introdurre nuovi principi di invarianza fisica da un lato riscoprendo alcune simmetrie già presenti anche in ambito prequantistico e dall'altro trovandone delle altre senza precedenti storici, come si è verificato nel caso della simmetria di scambio.
Fanno parte del primo raggruppamento la simmetria di parità, o di riflessione spaziale, e quella di inversione temporale; entrambe scoperte da Wigner. La simmetria di parità venne introdotta nella fisica quantistica nel 1927, in merito alla spiegazione di importanti risultati spettroscopici basata sulle simmetrie di permutazione, rotazione e riflessione e sulla trattazione della teoria dei gruppi. La simmetria di inversione temporale, invece, fece il suo ingresso in un articolo del 1932.
Assieme a questi due principi di simmetria comparve anche la nuovissima simmetria particella-antiparticella, nota anche con il nome di coniugazione di carica che apparve per

la prima volta in un articolo di Dirac pubblicato nel 1931. Questa simmetria di nuova generazione, come molte altre ancora, non aveva nella maniera più assoluta precedenti nella storia della fisica.
Tra le simmetrie senza precedenti storici s'incontrano anche le cosiddette "simmetrie interne", chimate così in quanto non riguardano proprietà di natura spazio-temporale, ma piuttosto le caratteristiche della struttura interna degli enti microscopici. Lo sviluppo concettuale delle simmetrie interne si può dividere in tre filoni:

1. l'individuazione di famiglie di particelle con pari massa e la loro interpretazione in termini di indistinguibilità;

2. l'estensione alle simmetrie interne del principio dell'invarianza di gauge che consiste nel rendere locale la simmetria di cui gode una teoria fisica, richiedendo che le trasformazioni del gruppo di simmetria agiscano in modo indipendente in ogni punto dello spazio-tempo;

3. l'introduzione, avvenuta negli anni Sessanta, della teoria di rottura spontanea della simmetria per descrivere le situazioni in cui la simmetria dell'equazione dinamica non è rispettata dalla soluzione corrispondente allo stato fondamentale.

Analizzando in breve le applicazioni di ciascun settore appena individuato si trova che la simmetria di spin isotopico o isospin discende dalla prima categoria, appartiene al secondo raggruppamento l'invarianza di fase delle funzioni d'onda che descrivono gli stati quantistici e al terzo la previsione dell'esistenza di particelle quali i bosoni di Goldstone e il meccanismo di Higgs.

Capitolo 6

Cristallografia

La cristallografia è la scienza che si occupa dello studio dei cristalli, in particolare, ne analizza la formazione, la crescita, la struttura microscopica, l'aspetto macroscopico e le proprietà fisiche. In tempi più recenti ha inoltre sviluppato delle tecniche adatte alla determinazione della struttura della materia su scale atomica e molecolare.

Ciò che viene chiamato col nome di cristallo identifica una porzione di un mezzo cristallino limitato da delle facce piane formatesi spontaneamente.

(a) *Cristalli di quarzo raccolti nel Parco Nazionale della cascate di Augrabies, nella regione settentrionale del Sudafrica.*

(b) *Campione di selenite illuminato da raggi ultravioletti che gli conferiscono un colore bluastro.*[1]

Secondo la definizione di G. Friedel (1865-1933), mineralogista francese, un mezzo cristallino è omogeneo, anisotropo e gode di proprietà vettoriali discontinue.[2] In effetti, ciò che caratterizza un mezzo cristallizzato omogeneo è il fatto che è limitato e si sfalda seguendo dei piani dalle direzioni determinate.
La materia è definita omogenea quando le sue diverse parti non possono essere distinte per nessuna delle sue proprietà, siano esse scalari come la densità, o vettoriali quali la conducibilità calorifica. Altrimenti detto, se si isolasse un solido di dimensioni sensibili e di configurazione qualunque, tutti i solidi simili e paralleli ad esso, estratti dallo stesso campione, sono identici dai punti di vista chimico e fisico. Tale definizione ha come limite

[2] Si noti come la definizione di Friedel di mezzo cristallino non implichi alcuna teoria della struttura e dunque non si può concludere che il mezzo materiale possieda necessariamente una struttura reticolare; ciò non contraddice dunque la scoperta dei cosiddetti cristalli liquidi, definiti come liquidi anisotropi.

la precisione dei mezzi d'investigazione a disposizione e dunque un mezzo può essere o meno omogeneo a seconda dell'approssimazione richiesta. Una roccia sarà omogenea in rapporto alle proprietà che sono valutabili su dei campioni relativamente voluminosi e non lo sarà più se si andranno ad analizzare dei tagli sottili al microscopio.
Si dice invece che un mezzo è anisotropo quando le proprietà vettoriali non sono le stesse lungo ciascuna direzione anche se un simile mezzo non palesa necessariamente la sua anisotropia per tutte le sue proprietà.

La cristallografia ricevette grande impulso in seguito alla definizione gruppale della simmetria, riassunta nell'asserto "è simmetrico ciò che è invariante sotto gruppi di trasformazione". Il legame esistente tra simmetria ed equivalenza e la possibilità di suddividere un insieme di oggetti in classi sulla base della definizione gruppale divenne essenziale per la classificazione sistematica delle configurazioni con evidenti proprietà di regolarità.
Tale disciplina scientifica fu inoltre di grande supporto per lo sviluppo della cosiddetta ˝teoria della simmetria˝dal momento in cui i loro sviluppi furono pressoché paralleli.

6.1 Prime osservazioni

Le prime nozioni di simmetria, sviluppatesi già in tempi antichi, sono quasi sicuramente riconducibili all'osservazione di piante, animali e minerali che manifestano evidenti proprietà di regolarità, alcuni esempi:

- la simmetria traslazionale è evidente nella disposizione delle foglie di alcune piante attorno allo stelo o di alcuni animali come le scolopendre;
- la simmetria rotazionale è riconoscibile nelle corolle dei fiori o nella disposizione delle braccia nelle stelle marine;
- la simmetria bilaterale è visibile nella figura umana.

Probabilmente furono proprio le osservazioni della natura a incrementare la dimestichezza degli artisti con questi tipi di simmetria tant'è che ne fecero ampio uso sia nell'architettura che nell'arte decorativa. Le piante, le colonne, le decorazioni dei capitelli, i fregi che adornano tutto il perimetro dei templi classici delle epoche greca e romana e l'arte decorativa islamica sono solo alcuni degli esempi di applicazione delle simmetrie traslazionale, bilaterale e rotazionale.

Anche le forme geometriche regolari ebbero un ruolo di spicco sin dai tempi più remoti, tanto nell'arte quanto nelle scienze. I poligoni e i poliedri regolari erano alla base di molti mosaici e di altrettante decorazioni ma assunsero anche grande importanza nelle teorie più disparate per tentare di dare spiegazione del mondo grazie alle idee di perfezione e armonia che richiamavano.

Per quanto riguarda il campo scientifico, l'osservazione e lo studio delle forme regolari naturali portò Pappo Alessandrino, nel periodo tardo ellenistico, a interrogarsi sulla motivazione che porta le api a costruire le cellette dei favi con forma esagonale. Tale quesito venne impostato e risolto come un problema di minimo solo tra i secoli XVII e XVIII.

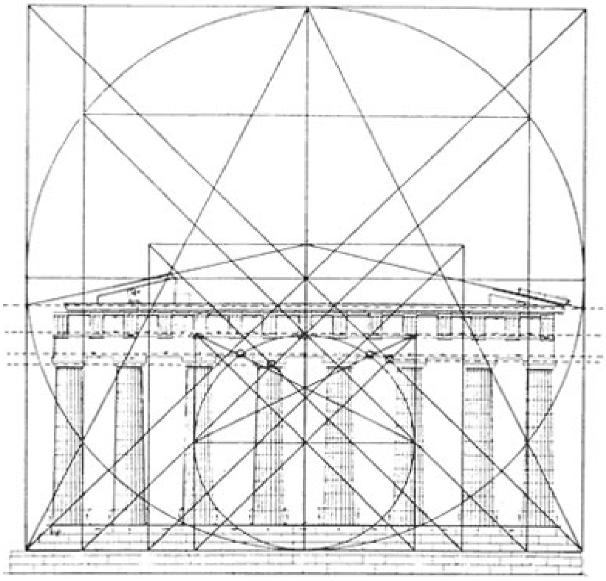


Figura 6.1: *Ricostruzione del Partenone nella quale sono evidenzati possibili schemi di simmetria.*

(a) *Farfalla della specie Papilio macahon.*

(b) *Vinca major, nota come pervinca.*

(c) *Foglia di Robinia pseudocacia.*

(d) *Uno dei mosaici della Alhambra.*

Fino al XVII secolo gli schemi di classificazione dei cristalli facevano uso di virtù talismaniche e curative invece di prendere in considerazione le forme o altre caratteristiche più oggettive. Le cronache di quegli anni riportano svariati dibattiti relativi alle origini di cristalli e fossili, i quali non erano distinti tra loro. Prima di avere una suddivisione meno fantasiosa dei cristalli si dovette arrivare al XVIII secolo quando il botanico C. Linneo (1707-1778) tentò di estendere lo schema di classificazione che ebbe successo nella catalogazione delle piante al regno minerale.

Per la prima volta, agli inizi del Settecento, Keplero (1571-1630) intuì che i cristalli avessero una struttura modulare che potesse essere rappresentata dall'aggregazione di sfere o blocchi di costruzione poliedrica. Tale posizione venne difesa e sostenuta nuovamente anche da R. Hooke (1635-1703) e N. Stenone (1638-1686) qualche anno più tardi.

L'idea proposta da Keplero, Hooke e Stenone venne ripresa e verificata nei primi anni del XIX secolo nel lavoro di R.J. Haüy (1743-1822). Una leggenda, sebbene sia tuttora molto dibattuta, narra che l'abate francese fece cadere accidentalmente un campione di calcite, appartenente a un amico, il quale si ruppe in piccoli pezzi, con suo grande sgomento. L'ingegno, però, trasformò il disastro in trionfo: Haüy notò che tutti i frammenti del cristallo avevano la stessa forma ossia erano tutti dei romboedri perfetti o dei raggruppamenti di tale solido. Questa osservazione gli suggerì che tutti i cristalli dovessero essere conglomerati di blocchi, distinguibili solo attraverso la visione al microscopio, le cui forme sono specifiche del tipo di cristallo. Il mineralogista e religioso francese dimostrò inoltre come gli stessi blocchi potessero essere utilizzati per costruire forme differenti. In questo modo fu in grado di giustificare come mai i cristalli della stessa sostanza potessero avere talvolta forme diverse.
Si può però notare che non tutti i poliedri possono manifestarsi come forma valida per costituire i cristalli. Haüy si accorse che la teoria dei blocchi costituenti aveva delle implicazioni sulla simmetria dei cristalli dal momento in cui la forma complessiva non può avere una simmetria che risulti impossibile da realizzare con i suoi modelli di parti costituenti.
Solo dopo gli studi condotti da Haüy divenne evidente che la regolarità della forma esterna dei cristalli suggeriva ci fosse uno schema regolare anche all'interno. Questo generò un grande accordo nella ricerca dei sistemi di punti regolari e delle loro simmetrie.

6.2 Modelli della struttura dei cristalli

L'introduzione dell'uso di modelli, che permettessero di rappresentare la struttura dei cristalli, è finalizzata alla semplificazione dell'interpretazione del loro schema ed è di grande aiuto nella comprensione del ruolo da essi giocato nella determinazione delle proprietà dei mezzi cristallini. I tre principali modelli, tutti proposti da Keplero agli inizi del Seicento e utilizzati ancora oggi, si basano sulla disposizione di un numero limitato di unità discrete di diverso tipo. I moduli utilizzati sono le sfere, i poliedri in grado di riempire lo spazio tramite la giustapposizione degli stessi e i punti di un grafico.

Il primo modello si basa su pacchetti di sfere, venne introdotto da Keplero nel 1611 in occasione della stesura di un saggio dedicato ai fiocchi di neve. In tale componimento l'astronomo e matematico tedesco tentò di spiegare le forme esagonali dei fiocchi di neve assumendo che questi fossero costituiti da particelle sferiche disposte in modo planare. Purtroppo non giunse a nessuna conclusione definitiva a riguardo ma fornì ugualmente svariate idee sulla geometria della struttura dei cristalli.

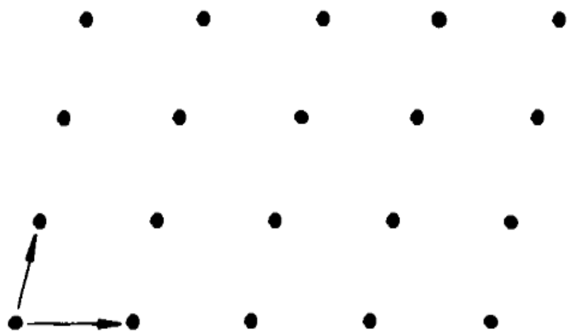
Nello stesso saggio relativo ai fiocchi di neve, Keplero propose di utilizzare dei poliedri capaci di riempire lo spazio come elementi base del nuovo modello. Questa teoria basata sul riempimento degli spazi delle strutture cristalline fu avviata, in tempi più moderni, da Haüy ma ci volle il cristallografo russo E.S. Fedorov, nel 1885, prima che si giungesse a una risposta, sebbene parziale, per la domanda "quali sono le possibili forme di poliedri in grado di occupare lo spazio?". Egli dimostrò che esistono esattamente 5 poliedri convessi in grado di riempire lo spazio quando vengono giustapposti faccia a faccia in strutture parallele. Il problema più generale di trovare tutti i possibili poliedri in grado di soddisfare la richiesta non solo è complesso, ma potrebbe anche essere irrisolvibile a causa dell'assenza di un algoritmo.

L'ultimo modello è costituito da un numero finito o infinito di punti collegati tra loro da linee, non necessariamente rette. Tale configurazione è detta grafico e nei casi trattati dalla cristallografia classica questi hanno delle evidenti proprietà di regolarità.

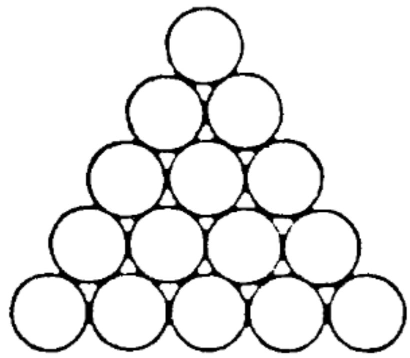
I tre modelli appena discussi sono tutti validi per la semplificazione della struttura dei cristalli, la scelta di uno a discapito degli altri va fatta a seconda del contesto; ciò che li accomuna è la loro interpretazione in termini di schemi di punti, siano essi i centri delle sfere, i centroidi (baricentri) dei poliedri o i nodi dei grafici. Considerando solo i punti si ottengono dei modelli per le strutture dei cristalli molto più astratti. In queste schematizzazioni, senza scendere troppo nel dettaglio, è facile verificare che i sistemi con cui si lavora nella cristallografia classica sono molto regolari; per esempio, nel più semplice, i punti sono solitamente disposti in file e in piani identicamente spaziati. Tali matrici sono chiamate reticoli, introdotti per la prima volta attorno al 1825; i loro punti sono messi in relazione da spostamenti detti traslazioni le quali sono indicate da frecce.

Dal momento in cui un sistema regolare in tre dimensioni è periodico se ha tre direzioni di traslazione indipendenti ed esistono delle restrizioni connesse alla simmetria dei cristalli, il numero dei possibili tipi di simmetria ammessi dai sistemi regolari è finito.[3] Questa conclusione permette dunque di classificare ed enumerare le simmetrie possibili per i cristalli.

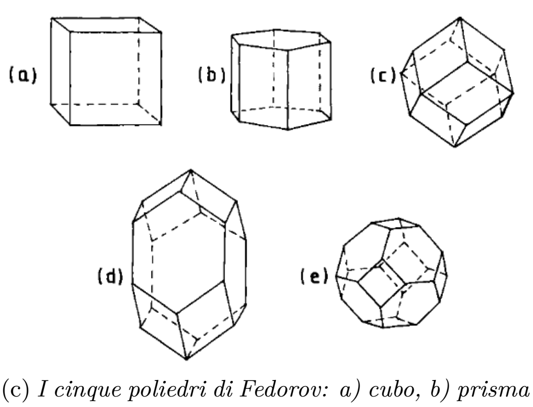
[3] Le restrizioni relative alle simmetrie dei cristalli vennero scoperte da Haüy nel 1822 e tale risultato è anche noto con il nome di *restrizione cristallografica*.



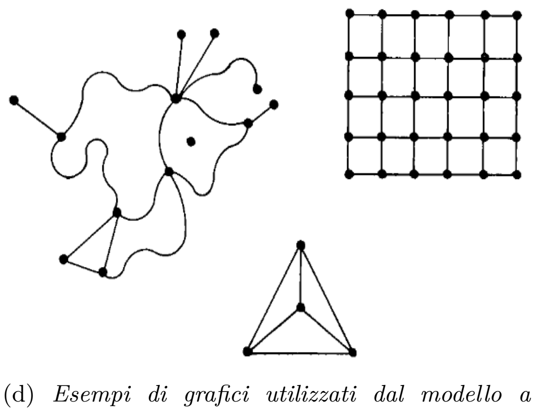
(a) *Esempio di reticolo.*



(b) *Modello basato sull'accostmento di sfere, suggerito da Keplero per schematizzare la struttura interna dei fiocchi di neve.*



(c) *I cinque poliedri di Fedorov: a) cubo, b) prisma esagonale, c) dodecaedro rombico, d) dodecaedro allungato, e) ottaedro troncato.*



(d) *Esempi di grafici utilizzati dal modello a "rete".*

6.3 Teoria della simmetria

A partire dalla seconda metà del XIX secolo il mondo scientifico rinforzò notevolmente il suo interesse nei confronti della simmetria in seguito alla definizione gruppale di quest'ultima.

La funzione classificatoria, che offriva la nuova formulazione, venne accolta in modo particolarmente positivo, specialmente dai cristallografi, i quali, avevano ora a disposizione un criterio oggettivo che permettesse loro di catalogare in modo sistematico tutte le possibili configurazioni simmetriche presentate dai cristalli. La popolarità della simmetria crebbe dunque a tal punto da diventare l'oggetto di una nuova teoria, la cosiddetta ‟teoria della simmetria″.

La cristallografia e la teoria della simmetria si svilupparono in gran parte in parallelo. Infatti, se la teoria della simmetria deve la sua origine alle classificazioni della cristallografia, quest'ultima non è altro che la teoria generale della simmetria in un mezzo limitato con costituzione periodica. [4] Nonostante la base teorica sia stata costruita sulle osservazioni cristallografiche, la teoria della simmetria è applicabile a qualsiasi configurazione simmetrica.

6.4 Le 32 classi di simmetria

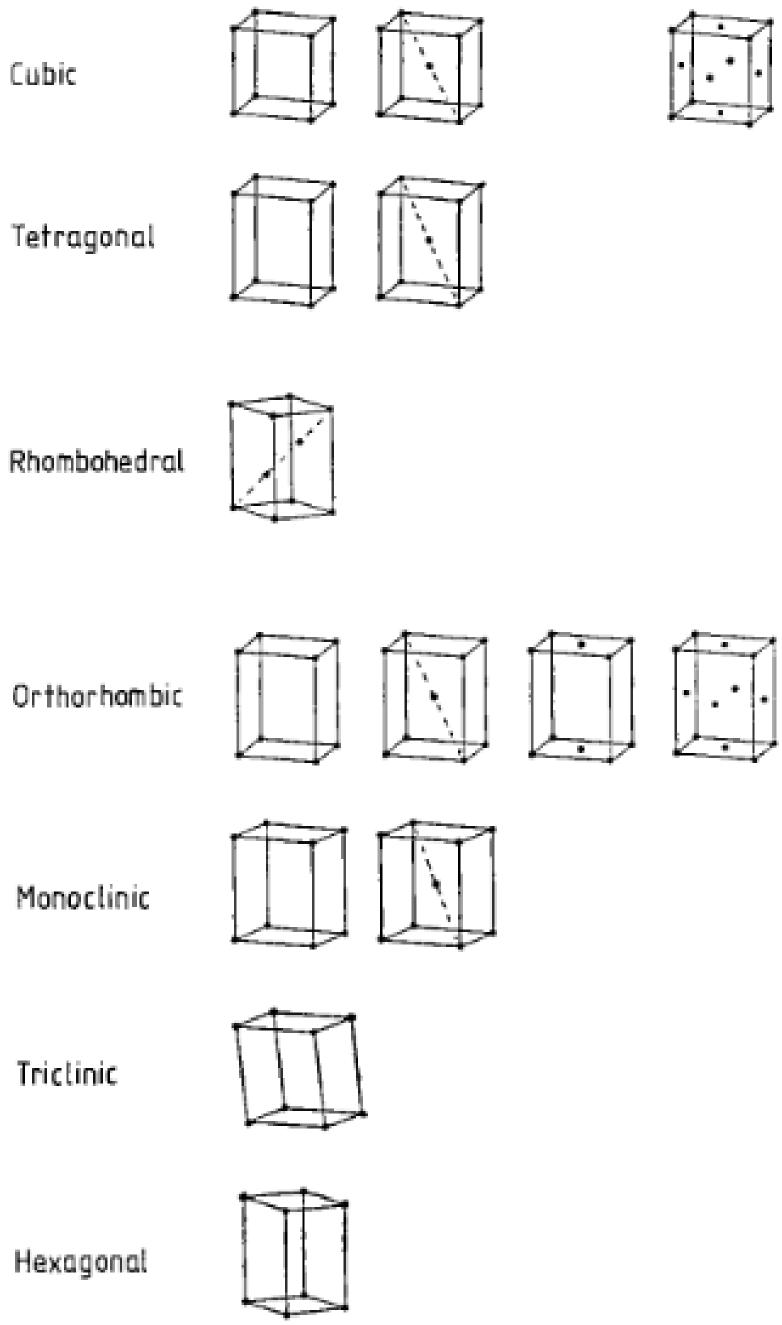
Le prime classificazioni vennero eseguite basandosi sulla loro morfologia. Le proprietà direttamente osservabili degli oggetti quali il profilo, la forma visibile o la disposizione delle parti nel caso di figure composte, permisero un primo raggruppamento e fornirono un primo criterio di suddivisione.

Tali proprietà morfologiche permisero a J.F. Hessel di identificare 32 classi di simmetria nel 1830 a partire dall'esame delle possibili simmetrie di rotazione e di riflessione dei cristalli, compatibili con le leggi cristallografiche allora note. Con gli sviluppi successivi della cristallografia le 32 classi di simmetria vennero interpretate come i 32 gruppi finiti delle rotazioni che lasciano invariata la struttura reticolare interna dei cristalli.

6.5 I reticoli di Bravais

Un reticolo tridimensionale è un gruppo generato da tre traslazioni lineari indipendenti. Esistono 5 tipi di reticolo nel piano e 14 reticoli spaziali in tre dimensioni. Questi ultimi, enumerati correttamente per la prima volta dallo scienziato francese A. Bravais, nel 1850 circa, sono tutt'ora noti con il nome ‟reticoli di Bravais″.

[4] [1, p. 52]



(a) *I 14 reticoli di Bravais nello spazio, distribuiti nei 7 sistemi di cristalli possibili.*

6.6 I gruppi spaziali

In seguito alla classificazione delle categorie di cristalli secondo il solo criterio dell'aspetto esteriore, gli scienziati indagarono le relazioni che legavano la morfologia alla struttura interna, giungendo così alla definizione delle simmetrie strutturali.

I cristalli sono costituiti da atomi o da ioni i quali hanno una disposizione regolare all'interno di reticoli spaziali, quindi, la superficie esterna è caratterizzata da simmetrie di rotazione, di riflessione e da combinazioni di queste che lasciano invariata la struttura reticolare.

Ciascun reticolo, poi, è dotato a sua volta di una propria simmetria, quella traslazionale. Con questa ulteriore proprietà della struttura interna della materia la suddivisione dei cristalli arrivava a 230 classi di simmetria, risultato raggiunto in modo indipendente dal russo E.S. Fedorov nel 1890, dal tedesco A. Schönflies nel 1891 e dall'inglese W. Barlow nel 1894.

I reticoli vennero classificati correttamente in sette gruppi da Bravais nel 1850, in accordo con le loro simmetrie. Il lavoro di quest'ultimo spinse C. Jordan (1838-1922) a studiare le orbite dei gruppi di moto. Con il termine ‶moto″ il matematico francese si riferiva alle isometrie che preservano l'orientazione: le rotazioni, le traslazioni e le rototraslazioni. Nello studio, pubblicato nel 1868 Jordan non numerò nessun gruppo, fu L. Sohncke (1842-1897) a farlo, nel 1879.

Solo dopo si capì che andavano incluse nel gruppo anche le riflessioni, le glissoriflessioni (combinazioni di traslazioni con riflessioni) e le rotoriflessioni.

Le 230 classi si ottennero dall'esame delle possibili combinazioni indipendenti dei 14 reticoli di Bravais con le simmetrie di rotazione e di riflessione dei cristalli. È altresì possibile dare una spiegazione matematica di tale numero di raggruppamenti: sono i 230 modi indipendenti che permettono di combinare le operazioni di rotazione, riflessione e traslazione per trasformare oggetti geometrici tridimensionali in sé stessi.

La parte classica della teoria cristallografica si conclude dunque intorno al 1890, in seguito alla definizione dei 230 gruppi.

6.7 Studio sistematico

L'inizio dell'indagine dei cristalli fu quasi esclusivamente qualitativo, infatti, le prime suddivisioni operate avvenivano principalmente secondo un approccio più descrittivo che rigoroso.

Le nozioni utilizzate per catalogare gli oggetti durante questa prima fase dell'indagine si basavano sui concetti di operazione di ricoprimento, di elementi di simmetria e classe di simmetria.

Con l'espressione ‶operazioni di ricoprimento″ ci si riferiva alle azioni che portavano una figura a coincidere con sé stessa, ‶ricoprendo″ la posizione di partenza. Qualora tra le operazioni possibili non fossero incluse le riflessioni e si avesse a che fare solo con rotazioni e traslazioni, si parlava di movimenti. Ciò che a livello intuitivo venne definito operazione di ricoprimento, venne riconosciuto poi come trasformazione di simmetria nel linguaggio matematico.

Gli elementi geometrici che permettevano di effettuare le operazioni di simmetria assunsero il nome di elementi di simmetria. Fanno parte di questo insieme le linee e i piani di riflessione, i punti di inversione, gli assi e i punti di rotazione e gli assi di traslazione. Ad esempio, l'immaginario piano verticale che divide a metà una bilancia a due bracci è l'elemento di simmetria di tale oggetto; riflessioni rispetto a tale piano scambiano la parte destra con la sinistra senza che la figura ne sia modificata in modo percepibile.
L'insieme degli elementi di simmetria di una figura, infine, prende il nome di classe di simmetria.

Le classificazioni delle figure simmetriche del piano e dello spazio euclideo che si possono ottenere tramite le nozioni appena elencate costituiscono il nucleo della teoria classica della simmetria, quello che si è sviluppato in parallelo con la cristallografia.
Il modo di procedere alla classificazione era piuttosto semplice: si cominciavano a considerare dapprima le figure con il minor numero di simmetrie, raggruppandole per tipo di regolarità, e si proseguiva aumentando progressivamente il numero di elementi. La catalogazione delle figure, a partire dalle simmetrie più semplici e immediate e procedendo poi con quelle maggiormente complesse e meno evidenti, permise di individuare le varie classi di simmetria in due e tre dimensioni per figure finite e infinite, con simmetrie continue o discrete.

Limitando l'analisi alle sole simmetrie discrete, ossia alle simmetrie descrivibili nei termini di invarianza rispetto a spostamenti finiti, s'incontrano due tipi di figure, quelle finite e quelle infinite.

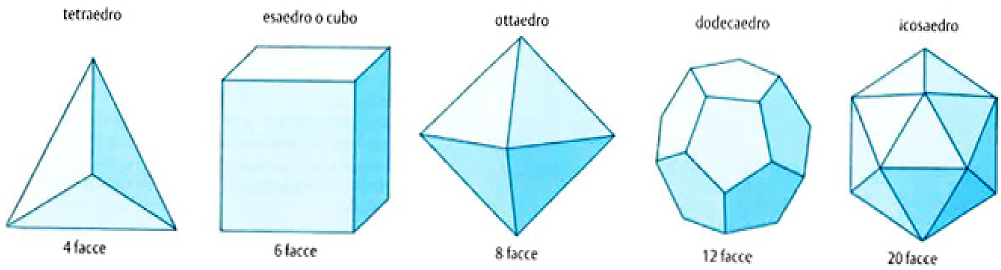
Simmetrie delle figure finite

Le figure finite ammettono come possibili operazioni di simmetria solo rotazioni pure attorno a un punto centrale oppure rotazioni combinate con riflessioni e per queste caratteristiche sono note anche come simmetrie centrali o puntuali. Le simmetrie centrali sono completamente catalogate all'interno di tre gruppi:

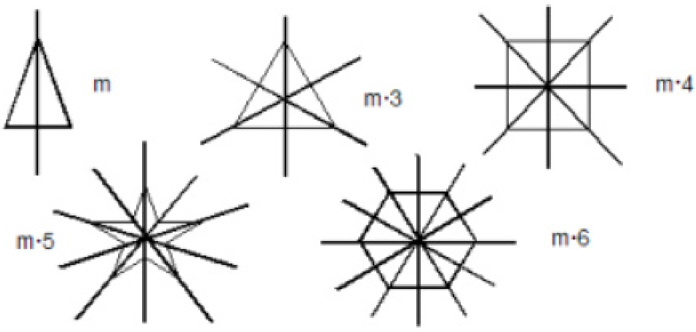
- ciclici;
- diedrici;
- endosferici.

I gruppi ciclici, nel caso di figure piane, descrivono le simmetrie di pura rotazione e hanno dunque come elementi le iterazioni di una rotazione elementare di angolo $\alpha = 360°/n$ che dipende dall'ordine della corrispondente simmetria ciclica. I poligoni regolari sono un tipico esempio della manifestazione della simmetria ciclica all'interno della categoria delle figure geometriche. Il triangolo equilatero, esempio di ordine tre, è portato a ricoprire la propria posizione iniziale attraverso l'iterazione di rotazioni di angolo $\alpha = 360°/3 = 120°$ attorno al punto centrale della figura; il quadrato, figura arrecante una simmetria ciclica di ordine quattro è trasformata in sé stessa da rotazioni di angolo $\alpha = 360°/4 = 90°$, e così via.
I gruppi diedrici sono costituiti dalle combinazioni di rotazioni cicliche con le riflessioni rispetto ad assi che formano tra loro angoli $\beta = \alpha/2 = 180°/n$. La natura offre innumerevoli esempi di questa simmetria: le stelle marine e la disposizione dei petali di molti

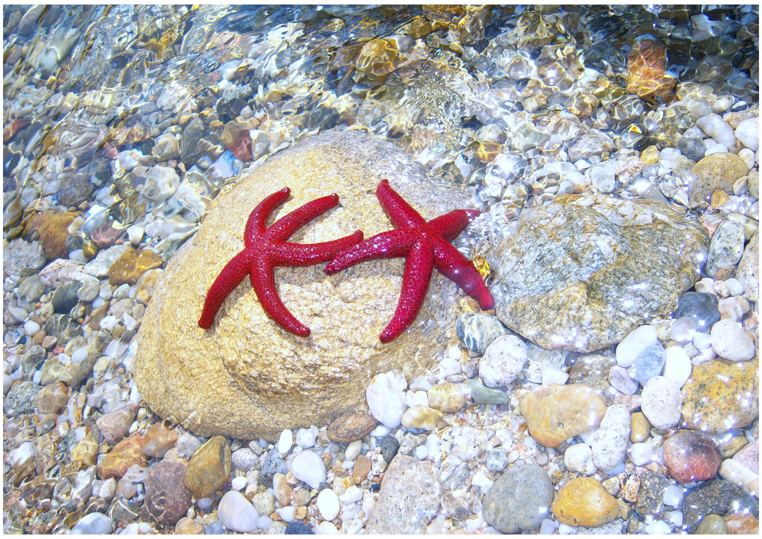
fiori sono casi di simmetria diedrica di ordine cinque e i cristalli di neve sono una varietà di ordine sei.
I gruppi endosferici vennero introdotti considerando le tre dimensioni spaziali invece delle due delle figure piane. Questi gruppi descrivono le simmetrie dei poliedri regolari e cioè il gruppo di simmetria del tetraedro, del cubo e dell'ottaedro, del dodecaedro e dell'icosaedro.



(a) *Poliedri.*



(b) *Esempi di assi del piano.*



(a) *Stelle marine.*

(b) *Fiocco di neve fotografato con un macro spinto dal fotografo russo Andrew Osokin utilizzando una fotocamera digitale reflex Nikon D80 e Nikon D90 con lenti 60mm o 90mm macro.*

Simmetrie delle figure infinite

Per le figure infinite il numero di simmetrie permesse aumenta dal momento in cui oltre alle rotazioni e alle riflessioni possono esserci anche traslazioni. È ivi possibile distinguere tre gruppi i quali risentono, nella loro definizione, delle applicazioni classiche delle diverse forme della simmetria traslazionale all'arte ornamentale:

- gruppi degli ornamenti a fascia;
- gruppi ornamentali;
- gruppi spaziali.

I gruppi degli ornamenti a fascia sono in tutto 7 e li si ottiene tramite traslazioni discrete lungo una sola direzione.
I gruppi ornamentali si ricavano nuovamente da traslazioni discrete ma questa volta in due direzioni. In totale sono 17 e sono, propriamente, i gruppi di invarianza per i reticoli piani.
I gruppi spaziali, invece, permettono di definire traslazioni discrete nello spazio tridimensionale, sono in tutto 230 e permettono di descrivere i reticoli spaziali.

La teoria classica della simmetria comprende un'enorme varietà di forme naturali, geometriche o appartenenti all'arte le quali hanno tutte la caratteristica di essere rintracciabili facilmente nell'esperienza quotidiana. Dal momento in cui le prime classificazioni avevano scopo puramente descrittivo, la teoria della simmetra era ancora confinata all'aspetto figurativo. Siccome una figura può essere ricoperta da un'altra solo nel caso in cui la seconda abbia la stessa forma e grandezza si ha che le operazioni di ricoprimento devono essere delle isometrie dal momento in cui solo queste non ne alterano le grandezze. Poiché le isometrie sono trasfomazioni che lasciano invariata la struttura metrica dello spazio euclideo, le proprietà di simmetria e la conseguente teoria sono strettamente legate alla geometria di tale spazio, da qui l'aggettivo classica.

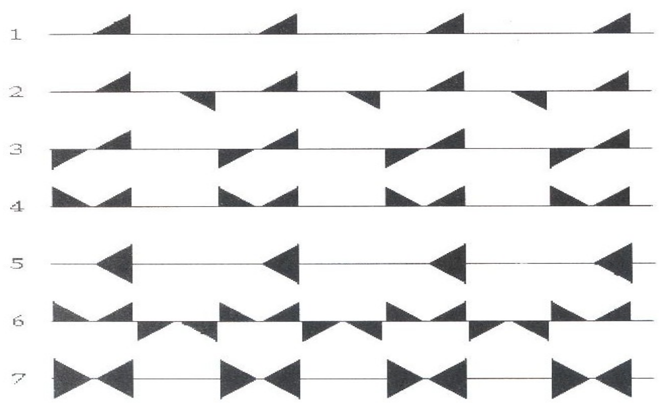


Figura 6.2: *I 7 gruppi degli ornamenti a fascia.*

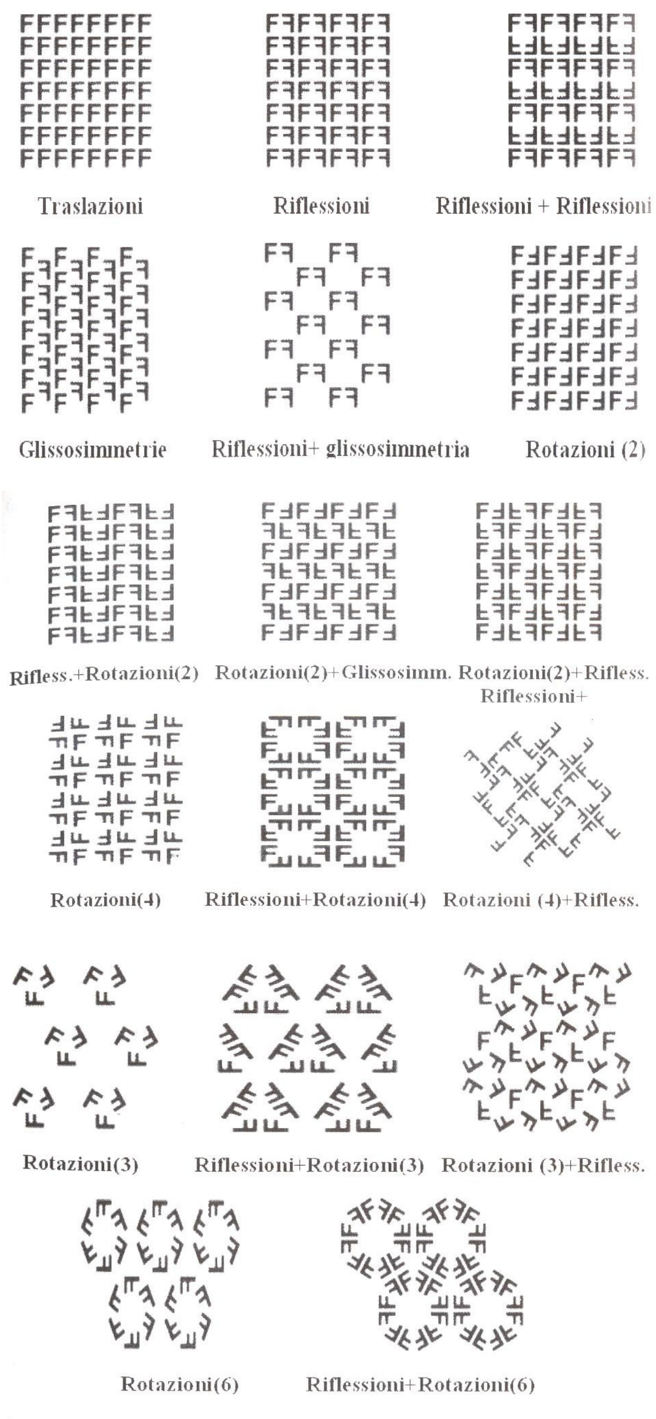


Figura 6.3: *I 17 gruppi ornamentali.*

6.8 Cristallografia nel XX secolo

La parte classica della teoria cristallografica si concluse intorno al 1890, come già accennato, in seguito alla definizione dei 230 gruppi ma ciò non significa che i cristalli smisero di essere indagati dagli scienziati del settore.

La scoperta della diffrazione dei raggi x da parte dei cristalli, fatta dal fisico tedesco M. von Laue (1879-1960) nel 1912 segnò una svolta epocale per la fisica del XX secolo e per l'indagine delle strutture molecolari e atomiche della materia. Tale scoperta sensazionale diede la certezza che la struttura interna dei cristalli fosse regolare, esattamente come appariva dall'aspetto esterno e permise di definire tali oggetti in base a questa caratteristica; non solo, dopo tale avvenimento il modello basato sullo schema di ripetizione divenne una pietra miliare per la teoria dei cristalli.

Il successo della diffrazione dei raggi x sbloccò lo studio della materia solida e fece sì che, negli anni successivi alla sua introduzione tra le tecniche d'indagine, la cristallografia potesse ramificarsi in un gran numero di sottospecialità e i suoi strumenti divenissero importanti in innumerevoli campi della conoscenza scientifica.
Discipline quali la medicina, la mineralogia, la cristallografia stessa, la fisica, la chimica, la biologia, la scienza dei materiali e molte altre mutarono profondamente grazie alla disponibilità e al potere delle tecniche cristallografiche.

Capitolo 7

Conclusioni

Il concetto di simmetria ha origini antiche e ha subito numerosi mutamenti nel significato nel corso dei secoli.

Introdotto dai Greci tra il VI e il V secolo a.C. in ambito geometrico per esprimere la commisurabilità di oggetti, venne poi applicato all'ambito artistico con il significato di proporzione. Il suo ingresso nelle scienze è legato all'evoluzione del termine in uso nel campo figurativo. Data una figura composta, sostituendo tra loro le parti uguali che la costituiscono si ottiene l'equivalenza tra la composizione con le parti scambiate e la figura originale, ricavata tramite la ripetizione di un modulo. Da ciò si ricava che, per come è usata la simmetria in riferimento alle figure, il significato del concetto è analogo a quello di equivalenza. È in tal senso che la scienza ha assunto e utilizzato la simmetria fino al XVI secolo circa, come principio d'indifferenza tra alternative equivalenti, tradotto da Leibniz nel principio di ragion sufficiente sul finire del Seicento.

Nella seconda metà del XVII secolo Claude Perrault fece compiere un ulteriore passo al significato di simmetria riconoscendo che era attribuibile una certa regolarità anche alle figure specchiate oltre a quelle in cui è presente la ripetizione di elementi base accostati gli uni agli altri o a parti tra loro proporzionate. Questa definizione ‶moderna″ permise dunque di distinguere la semplice ripetizione dalla somiglianza tra le parti.

L'intimo legame tra simmetria, uguaglianza e indifferenza ha permesso un nuovo progresso, ancora una volta scaturito dall'ambito figurativo: sono definite simmetriche le figure composte che rimangono la stesse prima e dopo lo scambio tra le parti che la costituiscono. La sostituibilità tra le parti di una figura comporta dunque la definizione di tutte le operazioni che permettono l'inter-sostituibilità; le caratteristiche necessarie sono quelle che definiscono una relazione di equivalenza. Le proprietà richieste, l'esistenza delle operazioni identità, inversa e composta, danno luogo a un gruppo; il gruppo di simmetria della figura stessa.
Il risvolto gruppale assunto dalla simmetria permise, innanzitutto, di definire come simmetrico tutto ciò che fosse invariante sotto a un gruppo di trasformazioni, anche se prevaleva ancora l'applicazione alle forme visibili riferendosi alle trasformazioni che lasciavano invariate le figure, e, in secondo luogo, di creare delle partizioni di un insieme sulla base delle relazioni esistenti tra gli elementi.

La definizione matematica rigorosa della simmetria sulla base del significato gruppale attribuitole fu di fondamentale importanza nelle scienze perché permise l'applicazione sistematica di tale concetto ai vari campi d'indagine e diede grande impulso a discipline quali la cristallografia. Lo studio e la catalogazione metodica di tutte le possibili conformazioni dei cristalli fu il primo utilizzo delle partizioni in classi di equivalenza e, parallelamente a questo, si sviluppò una vera e propria teoria della simmetria.

Un'ulteriore evoluzione che mutò profondamente l'uso del concetto di simmetria nelle scienze venne fornito da Curie il quale, dedicandosi all'analisi delle proprietà fisiche dei mezzi cristallini e al manifestarsi dei fenomeni al loro interno, arrivò a definire lo stretto legame tra la simmetria delle cause e degli effetti che derivano da esse.
Il principio enunciato dal fisico francese, riassunto nell'asserto "la simmetria delle cause è da ricercarsi negli effetti", permise una successiva elaborazione fisico-matematica che lo condusse alla sostituzione di cause ed effetti con il binomio problemi-soluzioni. Il principio di Curie assunse dunque una connotazione più vicina alla realtà e agli strumenti che gli scienziati hanno per descriverla, abbandonando definitivamente l'aspetto figurativo. Si rese di fatto possibile limitare le soluzioni di un problema alle sole che presentassero un grado di simmetria superiore o uguale a quello delle equazioni che descrivono il problema di partenza. Non solo, la funzione metodologica offerta dall'enunciato permise anche la determinazione precisa di fenomeni la cui descrizione causale è determinabile in tutti i suoi aspetti e fu altresì possibile ricusare delle teorie fisiche qualora se ne verificasse la violazione. Inoltre, se "la simmetria dei problemi va ritrovata nelle soluzioni", significa che le equazioni che descrivono le situazioni iniziali devono essere invarianti rispetto alle operazioni che trasformano il problema originale in un altro ad esso equivalente, ossia sostanzialmente immutato; un problema che presenta delle differenze solo nei parametri non rilevanti dello stesso.

Molti matematici operanti nel XX secolo applicarono il principio, espresso in termini di simmetria delle equazioni che descrivono i problemi e delle soluzioni, al problema del moto il quale presentava da sempre una grande sfida dal punto di vista computazionale dal momento in cui capitavano casi in cui non fosse totalmente integrabile.
L'unione del principio di Curie con le tecniche che consentono di operare la scelta più appropriata delle variabili all'occorrenza lasciando invariate nella forma le equazioni, indagate dapprima da Lagrange e in seguito da Hamilton e da Jacobi, permisero di sviluppare una procedura atta a semplificare il problema di origine attraverso la sua trasformazione graduale in problemi ad esso equivalenti ma di più semplice risoluzione.

La teoria einsteiniana della relatività comportò una nuova rivoluzione nella concezione della simmetria nelle scienze poiché fino al 1905, anno in cui lo scienziato annunciò il principio di relatività ristretta, le simmetrie delle equazioni dinamiche erano considerate alla stregua di strumenti di risoluzione di equazioni date.

La grande rivoluzione introdotta dal cosiddetto metodo inverso s'inserì nel contesto degli sviluppi della meccanica analitica, i quali diedero impulso all'introduzione e all'utilizzazione nella fisica di considerazioni fondate sulle nozioni di trasformazione, di invarianza e quindi di simmetria. Le simmetrie e le proprietà ad esse connesse divennero quindi il punto di partenza per formulare le leggi. Ciò fu possibile grazie a considerazioni di simmetria fondate sul principio di ragion sufficiente, su risultati sperimentali e su conseguenze logiche di determinati sviluppi teorici.
Quello della relatività ristretta fu il primo principio di invarianza della storia della scienza

a essere stato postulato come tale.

I principi di invarianza furono una conquista del XX secolo e vennero applicati spesso negli sviluppi della meccanica quantistica. Le simmetrie assunsero un ruolo fondamentale nell'indagine del mondo microscopico e nell'elaborazione delle teorie poiché vennero sfruttate per la definizione di una serie di nuovi principi di invarianza, tra i quali ve ne sono alcuni che non erano mai stati considerati fino ad allora perché strettamente legati al comportamento atomico della materia.

Sicuramente la simmetria ha grandi applicazioni nella scienza ma ci sono alcuni aspetti epistemologici ancora dibattuti al giorno d'oggi. In ambito scientifico la validità oggettiva della simmetria è accettata, a livello filosofico, in realtà, il dibattito è ancora aperto: la simmetria è nelle leggi o nella natura?
Una prima risposta a questa domanda è fornita dalla posizione realista, la quale ha fondamento più antico. L'abbondanza di caratteristiche di simmetria che si trovano in natura ha lasciato intendere agli scienziati susseguitisi nel corso dei secoli che le forme naturali tendano ad assumere la disposizione con la maggior simmetria permessa dalle circostanze, reali, della sua esistenza. Le forme di vita più semplici godono di massima simmetria iniziale e mano a mano che queste si complicano diversificandosi al dispiegarsi del processo evolutivo, riducono sempre più il proprio grado di simmetria. Si pensi, ad esempio, alle forme di vita elementari che vivono immerse in acqua per le quali la forza di gravità non ha alcuna rilevanza, in questo caso la simmetria sferica ne costituisce l'aspetto più probabile; per quanto riguarda l'uomo, invece, date le condizioni naturali alle quali si è adattato, la massima simmetria possibile è quella bilaterale.
Da queste osservazioni parrebbe dunque che la natura assuma un comportamento efficiente poiché tra tutte le soluzioni possibili sceglie quelle simmetriche perché sono, in genere, quelle più semplici. Ma sorge un dubbio, com'è possibile venire a conoscenza di tali simmetrie, intrinseche nella natura?
D'altro canto, con l'introduzione e l'acquisita importanza dei principi d'invarianza nella descrizione del mondo fisico, si va affermando che le simmetrie risiedano nelle leggi di natura. Questa posizione sembrerebbe aggirare il problema che l'approccio realistico lascia in sospeso perché se prima non era chiaro come fosse possibile determinare le simmetrie insite nella natura, ora sono parte viva delle teorie. La soluzione, però, è solo apparente considerato che questa visione del concetto di simmetria apre una discussione relativa alla necessità di fornire una prova del fatto che effettivamente il mondo fisico sia rappresentabile attraverso tali teorie; fatto non banale.
Ciascuna delle interpretazioni più accreditate, pertanto, mostra ancora oggi delle falle logiche non superate.

Bibliografia

[1] E. Castellani, *Simmetria e natura. Dalle armonie delle figure alle invarianze delle leggi.* Bari: Editori Laterza, prima ed., gennaio 2000.

[2] M.G. Doncel, A. Hermann, L. Michel, A. Pais (a cura di), *A critical study of symmetry in physics from Galilei to Newton in Symmetries in Physics (1600-1980): proceedings of the 1st International Meeting on the History of Scientific Ideas held at Sant Feliu de Guíxols, Catalonia, Spain (september 20-26)*, ch. From Galileo to Newton. 1983.

[3] P. Curie, *Sur la symétrie dans les phénomènes physiques*, ch. Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique, pp. 118–141.

[4] A. Einstein, *Pensieri, idee, opinioni*, ch. Scienza, pp. 39–105. Roma: Newton Compton editori, quarta ed., maggio 2010.

[5] M. Senechal, *Crystalline symmetries: an informal mathematical introduction.* Adam Hilger, 1990.

[6] P. Curie, *Sur la symétrie dans les phénomènes physiques*, vol. Oeuvres de Pierre Curie, ch. Sur la symétrie, pp. 78–113. Paris, Quai des Grands-Augustins, 55: Gauthier-Villars, 1908. Publiées par les soins de la Société Française de Physyque.

[7] P. Curie, *Sur la symétrie dans les phénomènes physiques*, vol. Oeuvres de Pierre Curie, ch. Les répétitions et la symétrie, pp. 114–117. Paris, Quai des Grands-Augustins, 55: Gauthier-Villars, 1908. Publiées par les soins de la Société Française de Physyque.

[8] P. Curie, *Sur la symétrie dans les phénomènes physiques*, vol. Oeuvres de Pierre Curie, ch. Remarques sur la cristallographie à propos des éléments de cristallographie phisique de M. Ch. Soret, pp. 145–152. Paris, Quai des Grands-Augustins, 55: Gauthier-Villars, 1908. Publiées par les soins de la Société Française de Physyque.

[9] H. Bouasse, *Cours de physique VI: étude des symmétries*, pp. 1–7/143–144. rue Soufflot, 15: Imprimerie Ch. Delagrave, 1909.

[10] E. Brading, Katherine e Castellani, "Symmetry and Symmetry Breaking, The Stanford Encyclopedia of Philosophy," Spring 2013. `http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/symmetry-breaking/`.