



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Orizzonti Cosmologici e Inflazione dell’Universo

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureanda

Marisol Traforetti

Anno Accademico 2021/2022

*A mi madre y mi padre.
A mi hermana Elena.
A Pipas.*

Abstract

L'intento principale di questo elaborato è quello di studiare il fenomeno dell'espansione dell'Universo e le sue conseguenze, le quali sono talvolta oggetto di incomprendimento. A tale scopo si volgerà particolare attenzione alle rappresentazioni matematiche dello spazio-tempo e alle diverse nozioni di orizzonte cosmologico, soffermandosi soprattutto sulla soluzione del cosiddetto "problema dell'orizzonte" e sulla teoria dell'inflazione nell'Universo primordiale.

Indice

Introduzione	vii
1 Il Modello Cosmologico Standard	1
1.1 L'espansione dell'Universo	2
1.2 La metrica di Friedmann-Robertson-Walker	3
1.3 Le equazioni di Friedmann	3
1.4 Il redshift cosmologico	5
1.4.1 Redshift cosmologico ed effetto Doppler	5
2 Le strutture causali dell'universo	7
2.1 Cono luce del passato e concetto di causalità	7
2.2 Le diverse nozioni di orizzonte	8
2.2.1 Orizzonte degli eventi (EH: Event Horizon)	8
2.2.2 Orizzonte delle particelle (PH: Particle Horizon)	8
2.2.3 Orizzonti cosmologici nel modello di FRW	9
2.3 Sfera di Hubble	10
2.3.1 Raggio di Hubble e orizzonte delle particelle	10
2.3.2 Raggio di Hubble e orizzonte degli eventi	10
3 Diagrammi di Penrose	11
3.1 Costruzione di un diagramma di Penrose	12
3.2 Diagrammi di Penrose e orizzonti cosmologici	13
3.3 Lo spazio-tempo di Friedmann-Robertson-Walker	14
3.4 Lo spazio-tempo di de Sitter	15
4 Le conseguenze dell'espansione	17
4.1 Le relazioni causali e i diagrammi spazio-tempo	17
4.1.1 Velocità superluminali?	19
4.2 I problemi del modello cosmologico standard	20
4.2.1 La CMB e il problema dell'orizzonte	20
4.2.2 Il problema della piattezza	21
4.2.3 Il problema delle relitti cosmici	22
5 L'Universo Inflazionario	23
5.1 La teoria dell'inflazione	23
5.1.1 L'inflazione è un'espansione superluminale?	24
5.2 La soluzione ai problemi del modello cosmologico standard	24
5.2.1 Il problema dell'orizzonte	24
5.2.2 Il problema della piattezza	26

5.2.3	Il problema dei relitti cosmici	26
5.2.4	Quanta inflazione?	26
5.3	Diagramma conforme con fase inflazionaria	27
6	Conclusioni	29
	Bibliografia	31

Introduzione

Per secoli si è creduto che l'Universo fosse statico e infinito nello spazio e nel tempo. Nonostante il suo carattere dinamico avrebbe già potuto essere predetto da una rigorosa applicazione della teoria della gravitazione di Newton, la fede in un universo di questo tipo era così forte che persino lo stesso Einstein modificò la sua teoria della Relatività Generale per ottenere un universo statico, introducendo la cosiddetta costante cosmologica. Tuttavia, un universo statico e infinito comporta difficoltà non da poco, e.g. il paradosso sollevato da Olbers nel 1823. Questi afferma che, se la distribuzione di stelle è uniforme, in ogni direzione di osservazione il nostro sguardo finirebbe sulla superficie di una stella e dunque anche il cielo notturno dovrebbe apparirci luminoso. In realtà questo problema non sussiste se ammettiamo semplicemente che quanto noi osserviamo nell'universo non sia così da sempre: le stelle hanno vita finita e nascono e muoiono in tempi cosmici diversi. Se aggiungiamo a questo il fatto che l'Universo abbia avuto un inizio o che si espanda, allora, dato che la velocità della luce nel vuoto è finita, veniamo incontro inevitabilmente al fatto che la nostra conoscenza del Cosmo è limitata nello spazio e nel tempo. Per affrontare questa questione dal punto di vista fisico e matematico scegliamo di accettare la Relatività Generale come la miglior teoria della gravitazione attualmente nota. Partendo da questo presupposto, introdurremo la nostra immagine dell'Universo data dal modello cosmologico standard nei suoi aspetti principali (Capitolo 1) e vedremo come l'esistenza degli orizzonti cosmologici segni i confini della nostra conoscenza dell'Universo (Capitolo 2). Ci soffermeremo inoltre nel dare una corretta rappresentazione matematica dello spazio-tempo e delle sue proprietà globali per mezzo dei cosiddetti diagrammi di Penrose (Capitolo 3). Successivamente, illustreremo le conseguenze del fenomeno dell'espansione (Capitolo 4), chiarendo i comuni equivoci che ne derivano grazie ad una corretta lettura dei diagrammi spazio-tempo. Gran parte di questi equivoci vedremo che nasce principalmente da un'errata comprensione dei concetti quali orizzonte delle particelle, orizzonte degli eventi e sfera di Hubble e dal fatto che oggetti cosmici quali galassie o ammassi di galassie sufficientemente distanti possono muoversi a velocità superluminali. Infatti, non sono casi isolati quelli che erroneamente ritengono impossibile l'esistenza di tali oggetti o, se ne ammettono l'esistenza, ritengono che essi non siano osservabili. Infine, dopo aver illustrato i problemi del modello cosmologico standard che storicamente portarono a postulare una fase primordiale di espansione accelerata, si studieranno gli aspetti fondamentali della teoria dell'inflazione (Capitolo 5), volgendo particolare interesse alla soluzione di tali problemi e alla rappresentazione conforme del nostro Universo con fase inflazionaria.

Capitolo 1

Il Modello Cosmologico Standard

Uno spazio-tempo è in generale descritto da una coppia (\mathcal{M}, g) dove \mathcal{M} è una varietà riemanniana quadridimensionale in cui a ogni punto è associata la quaterna $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ e g è un tensore metrico che in Relatività Generale incorpora gli effetti gravitazionali al variare di x^μ . [1] La geometria di uno spazio-tempo, espressa localmente dalla distanza infinitesima $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, è collegata al suo contenuto di materia per mezzo delle **Equazioni di Einstein** ¹.

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

dove $G_{\mu\nu}$ è tensore di Einstein che misura la curvatura dello spazio-tempo, $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci, $R \equiv R^\rho_\rho$ lo scalare di Ricci, Λ la costante cosmologica e $T_{\mu\nu}$ il tensore energia-impulso. A parole, queste equazioni ci dicono che la distribuzione di materia ed energia dell'universo curva lo spazio-tempo e, allo stesso tempo, la geometria impone la dinamica delle particelle le quali seguiranno le geodetiche dello spazio-tempo. Tuttavia, per ottenere queste informazioni bisogna in generale risolvere un sistema di equazioni differenziali non lineari accoppiate fra loro e trovare delle soluzioni analitiche può essere quasi impossibile se non si riducono le variabili in gioco. A tale scopo, partendo dal *Principio Copernicano* secondo cui noi non occupiamo una posizione privilegiata nell'universo, nella cosmologia si assume la validità del cosiddetto **Principio Cosmologico** il quale postula che a un dato tempo cosmico l'universo appare omogeneo e isotropo a grandi distanze per *ogni* osservatore comovente. Ovviamente si tratta di un principio approssimato dato che localmente perde validità, ciò nonostante è ragionevole assumere che su scale dell'ordine $\sim 100 \text{ Mpc}$ l'universo appare uniforme in ogni direzione di osservazione. Una prova diretta della validità di questo principio è sicuramente lo studio della CMB ². Questi infatti ci porta a concludere che l'universo è isotropo attorno a noi e quindi, usando il Principio Copernicano, deve essere isotropo attorno a ogni altro osservatore comovente (allo stesso tempo cosmico) ³. Dal momento che è difficile testare direttamente l'omogeneità, si può dimostrare che la simmetria sferica in ogni punto implica l'omogeneità e che quindi lo spazio-tempo possa essere foliato in una famiglia continua di ipersuperfici di tipo spazio Σ_t massimamente simmetriche (omogenee e isotrope con curvatura costante) orientate nella direzione futura del tempo. [2]

¹nella trattazione verrà posto sempre $c \equiv 1$

²vedasi il Paragrafo 4.2.1

³Si potrebbe obiettare che noi non siamo affatto osservatori comoventi e questo si collega alla cosiddetta anisotropia di dipolo osservata nella CMB. Ciò nonostante, per ottenere un sistema di riposo preferenziale basta eseguire un opportuno *Lorentz Boost*.

1.1 L'espansione dell'Universo

Una delle grandi rivoluzioni intellettuali del '900 fu senz'altro la scoperta che l'Universo è in espansione. Hubble infatti scoprì che la velocità di recessione di una galassia è proporzionale alla distanza $\vec{v}_{rec} = H\vec{r}$ e, dal momento che il valore sperimentale della costante di proporzionalità H è positivo, dedusse che l'Universo si sta espandendo. La funzione che quantifica questa espansione è nota come fattore di scala $a(t)$ ed è funzione solo del tempo cosmico t per questioni di simmetria. Si può quindi introdurre un sistema di coordinate fittizio che segue l'espansione legato al sistema di coordinate fisico dalla seguente relazione

$$x_{fis}^i \equiv a(t)x^i \quad (1.2)$$

Differenziando la (1.2) rispetto al tempo si ottiene la velocità fisica di una particella come somma di due contributi di cui il secondo non è altro che la derivazione teorica della legge di Hubble

$$v_{fis}^i \equiv \frac{dx_{fis}^i}{dt} = \dot{x}^i = a(t)\frac{dx^i}{dt} + \frac{da}{dt}x^i \equiv v_{pec}^i + v_{rec}^i \quad (1.3)$$

dove $v_{rec}^i \equiv Hx_{fis}^i = \dot{a}x^i$ è la **velocità di recessione** e $v_{pec}^i \equiv a(t)\dot{x}^i$ è la **velocità peculiare**. Il parametro H è detto *costante di Hubble* ed è definito da

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{d \ln a}{dt} \quad (1.4)$$

Si noti che H ha le dimensioni dell'inverso di un tempo, perciò si definisce il suo inverso $t_H = H^{-1}$ come il *tempo di Hubble* e $d_H = H^{-1}$ come la *distanza di Hubble*. Si tengano a mente queste grandezze le quali definiscono la cosiddetta *scala di Hubble* che riprendemo nel seguito della trattazione.

Si precisa che la velocità di recessione è la velocità dello spazio-tempo stesso in espansione e rappresenta quello che viene anche detto *flusso di Hubble*, mentre la velocità peculiare è la velocità misurata da un osservatore comovente. Questi è un osservatore particolare poichè è solidale al flusso di Hubble e quindi segue l'espansione dell'Universo. In generale, sarà utile assumere l'esistenza di una famiglia di osservatori comoventi (o fondamentali) ognuno dei quali si muove lungo geodetiche di tipo tempo con quadrivelocità u^μ tale che $u_\mu u^\mu = -1$. Essi definiscono in ogni punto un sistema di riposo preferenziale dato che per costruzione le velocità peculiari sono ignorate. Inoltre, le loro linee di universo non si intersecano mai e sono ortogonali alle Σ_t .

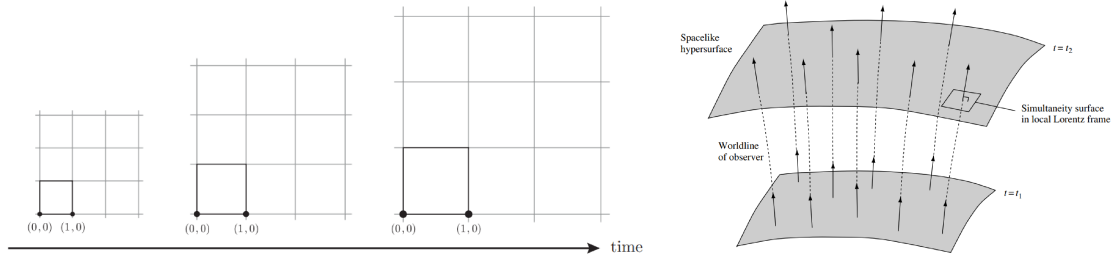


Figura 1.1: Si riporta a sinistra una rappresentazione schematica dell'evoluzione sistema di coordinate fisico e comovente (da [3]): due oggetti localmente fermi manterranno la stessa distanza comovente, nonostante la corrispondente distanza fisica aumenti nel tempo, dato che il sistema di coordinate fittizio segue l'espansione dello spazio-tempo. A destra, invece, si ha una rappresentazione dell'evoluzione delle ipersuperfici di tipo spazio e le linee di universo degli osservatori fondamentali ortogonali ad esse (da [2]).

1.2 La metrica di Friedmann-Robertson-Walker

La metrica per un universo omogeneo e isotropo in espansione è la *metrica di Friedmann-Robertson-Walker*⁴ ed è una buona approssimazione dello spazio-tempo che osserviamo (almeno dal rilascio della CMB). In coordinate sferiche comoventi (χ, θ, ϕ) si esprime

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(d\chi^2 + f_k^2(\chi)d\Omega^2) \quad \text{con} \quad f_k(\chi) = \begin{cases} \sinh\chi & k = -1 \\ \chi & k = 0 \\ \sin\chi & k = +1 \end{cases} \quad (1.5)$$

dove $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, k è la curvatura dello spazio-tempo e $0 < \chi < \infty$ se $k = 0, -1$ (spazio "aperto" e diffeomorfo a \mathbb{R}^3), mentre $0 < \chi < 2\pi$ se $k = +1$ (spazio "chiuso" e diffeomorfo a S^3). Risulta utile riscrivere la coordinata temporale t come $d\tau = dt/a(t)$ in modo da riscrivere la (1.5) come

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[-d\tau^2 + (d\chi^2 + f_k^2(\chi)d\Omega^2) \right] \quad (1.6)$$

Il vantaggio di usare il tempo conforme è che le linee di universo seguite dai fotoni nel piano $\chi - \tau$ sono le stesse che in uno spazio-tempo di Minkowski. Infatti, dato che i fotoni seguono geodetiche nulle, ponendo $ds^2 = 0$ e $d\Omega = 0$ (i.e. $\theta = \phi = \text{cost}$) nella (1.6) per ottenere la distanza comovente radiale risulta

$$ds^2 = a^2(\tau)(-d\tau^2 + d\chi^2) = 0 \implies \Delta\chi(\tau) = \pm\Delta\tau \quad (1.7)$$

dove il segno distingue fotoni in allontanamento o avvicinamento.

1.3 Le equazioni di Friedmann

Le proprietà di omogeneità implicano che per un osservatore comovente il tensore energia-impulso abbia la forma di un fluido perfetto [4] $T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}$ con densità di energia ρ , pressione P ed equazione di stato costante $w \equiv P/\rho$. Dalle equazioni di Einstein, usando quest'espressione di $T_{\mu\nu}$ e calcolando $G_{\mu\nu}$ dalla (1.5)⁵, si ricavano le **Equazioni di Friedmann**⁶ che determinano l'evoluzione del fattore di scala

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.9)$$

dove ρ e P sono da intendersi come somma di tutti contributi di materia e radiazione. Il contributo di Λ può essere assorbito in ρ e P definendo $\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}$ e $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$ (da cui $w_\Lambda = -1$).

Dalla componente zero della conservazione del tensore energia-impulso, invece, si ricava l'equazione di evoluzione della densità di energia del fluido cosmico che è data da

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + 3P) = 0 \quad (1.10)$$

⁴che talvolta useremo abbreviare in "metrica di FRW".

⁵Si rimanda alle *Baumann Lectures on Cosmology* [3] per i passaggi completi.

⁶Di solito si intende la prima delle (1.8) come equazione di Friedmann, mentre la seconda è detta equazione di Raychaudhuri.

da cui si può dimostrare che

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad \text{con} \quad w = \begin{cases} 0 & \text{materia} \\ 1/3 & \text{radiazione} \\ -1 & \Lambda \end{cases} \quad (1.11)$$

Usando questi risultati si può riscrivere la prima equazione di Friedmann come

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{k,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \quad (1.12)$$

dove si è definito il *parametro di densità* adimensionale $\Omega_{i,0} \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{crit,0}}$ di ogni contributo i al

fluido cosmico come la densità riscalata rispetto al suo valore critico $\rho_{crit,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ per ottenere

una geometria piatta ($k = 0$) e $\Omega_k \equiv -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}$.

Attualmente, si misurano i seguenti valori [3]

$$|\Omega_{k,0}| \leq 0.01 \quad \Omega_{r,0} = 9.4 \cdot 10^{-5} \quad \Omega_{m,0} = 0.32 \quad \Omega_{\Lambda,0} = 0.68 \quad (1.13)$$

dai quali si deduce che la costante cosmologica domina il contenuto di materia dell'universo attuale e continuerà a dominare anche in futuro, mentre il termine di curvatura è del tutto trascurabile, perciò i risultati ottenuti dalle equazioni di Friedmann ponendo $k = 0$ sono una buona approssimazione della realtà.

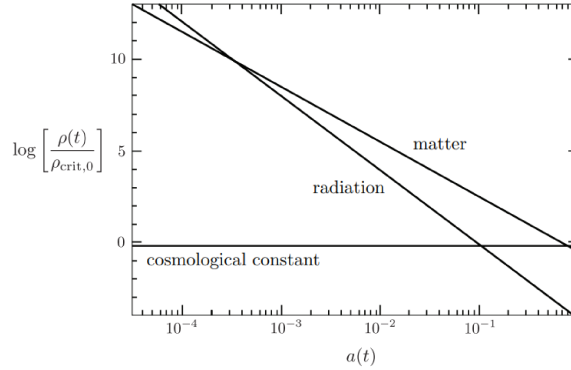


Figura 1.2: Evoluzione del parametro densità in funzione del fattore di scala che dipende dal tempo cosmico in scala logaritmica in modo da apprezzare l'andamento lineare per le diverse componenti: radiazione, materia e costante cosmologica (da [3]). Si noti che all'inizio l'universo era dominato dalla radiazione e dopo il punto di ascissa a_{eq} di "matter-radiation equality" è prevalsa la materia. Al contrario, attualmente e nel futuro l'universo sarà dominato dalla costante cosmologica.

Inoltre, dato che la Figura 1.2 indica che l'universo è stato dominato per gran parte della sua evoluzione da una sola componente, è utile riscrivere la (1.12) per il caso di un universo piatto con singola componente i come

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_i} a^{-\frac{3}{2}(1+w_i)} \quad (1.14)$$

che integrata porge la dipendenza dal tempo del fattore di scala per i vari contributi

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/3} & \text{materia} \\ t^{1/2} & \text{radiazione} \\ e^{Ht} & \Lambda \end{cases} \quad (1.15)$$

1.4 Il redshift cosmologico

Il redshift cosmologico è una diretta conseguenza dell'espansione dell'Universo durante la propagazione di un segnale luminoso da una sorgente S a un osservatore O . Supponiamo che S si trovi nella posizione $(\chi_e, \theta_e, \phi_e)$ ed emetta un fascio di luce al tempo t_e con lunghezza d'onda λ_e verso l'origine dove si trova O , che lo misura al tempo t_0 con lunghezza d'onda λ_0 .

In generale il **redshift** z è definito come la variazione relativa della lunghezza d'onda emessa da S e osservata da O

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} \quad (1.16)$$

o, alternativamente,

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{(-k^\mu u_\mu)_S}{(-k^\mu u_\mu)_O} \quad (1.17)$$

dove ν_e e ν_0 le frequenze di emissione e ricezione e, più formalmente, $u_\mu|_S$ e $u_\mu|_O$ sono le quadri-velocità di S e O e $k^\mu \equiv dx^\mu/ds$ i vettori tangenti alla geodetica nulla $x^\mu(s)$ con parametro affine s . Quest'ultima soddisfa quindi $k^\mu k_\mu = 0$ e $k^\mu \nabla_\mu k^\nu = 0$. Nel caso del redshift cosmologico nel modello di FRW risolvendo l'equazione della geodetica nulla risulta $k^\mu(t) = 1/a(t)(1, 1/a(t), 0, 0)$ perciò, ricordando che $u_\mu = (-1, 0, 0, 0)$, si ha $-u_\mu k^\mu(t) = 1/a(t)$ [5]. In altri termini questo significa che i fotoni perdono energia con l'espansione dell'Universo come $E = h\nu = p \propto 1/a$ e la lunghezza d'onda si dilata come $\lambda \propto a$. [3]

$$\text{Redshift cosmologico} \quad 1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (1.18)$$

Supponendo che S emetta un secondo fascio di luce dopo Δt_e ricevuto da O dopo Δt_0 , dal momento che la durata del segnale in tempo conforme $\Delta\tau$ è la medesima, se l'universo si espande $a(t_e) < a(t_0)$, il redshift può essere visto come un fenomeno di dilatazione temporale, $\lambda_0 = \Delta t_0 > \lambda_e = \Delta t_e$ ($\nu_0 < \nu_e$)⁷.

1.4.1 Redshift cosmologico ed effetto Doppler

Vogliamo ora chiarire il significato del redshift cosmologico in Relatività Generale in modo da confrontarlo con l'interpretazione di z in Relatività Speciale nell'ambito dell'effetto Doppler.

Ritorniamo alla sorgente S che emette un fascio di luce verso l'osservatore O nell'origine. Per ricavare un'espressione per la distanza comovente radiale tra la sorgente e l'osservatore, poniamo $ds^2 = 0$ dato che i fotoni viaggiano lungo le geodetiche nulle e $d\Omega = 0$ (ci interessa la distanza radiale) nella (1.5).

$$dt = a(t)d\chi \Rightarrow v_{pec} = a(t) \dot{\chi} = 1 \quad (1.19)$$

dove $\dot{\chi}$ è la velocità dei fotoni attraverso le coordinate comoventi. Si noti che la velocità peculiare dei fotoni è sempre pari a $c \equiv 1$. Integrando sulla durata di propagazione del segnale (dal tempo di emissione t_e al tempo di ricezione t_0) si ricava l'espressione cercata

$$\chi(t_0, t_e) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.20)$$

Differenziando la (1.18) rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a(t_0) \dot{a}(t)}{a(t)^2} \implies \frac{dt}{a(t)} = -\frac{dz}{H(z)} \quad \text{con} \quad H(z) = \frac{\dot{a}(z)}{a(z)} \quad e \quad a(t_0) \equiv 1 \quad (1.21)$$

⁷Con un ragionamento simile, se l'universo si contraesse potremmo parlare di *blueshift* ($\nu_0 > \nu_e$), mentre se fosse statico non ci sarebbe nessuno shift di frequenza ($\nu_0 = \nu_e$).

Perciò si può riscrivere la (1.20) in termini di osservabili come

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (1.22)$$

dove l'evoluzione di $H(z')$ dipende dal contenuto materia dell'universo. L'espressione (1.22) sottolinea il fatto che in Relatività Generale il redshift cosmologico è direttamente collegato alla misura di una distanza.

Sostituendo la (1.22) nella definizione di flusso di Hubble $H\vec{x}_{fis} = \dot{a}\vec{x}$, si ricava

$$v_{rec}(t, z) = \dot{a}(t) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (1.23)$$

z risulta collegato alla misura di una velocità di recessione e dipende dal tempo, dato che misura una distanza che in quanto tale è soggetta alla dilatazione dello spazio.

Nel caso della Relatività Speciale, invece, il concetto di redshift emerge dalla trattazione dell'effetto Doppler e, considerando S che parte dalla posizione di O e si allontana con velocità v , si può ricavare la definizione di redshift Doppler dalla stessa (1.17) (valida in generale) [5].

$$\text{Redshift Doppler} \quad 1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \quad (1.24)$$

Invertendo quest'espressione si ricava $v(z)$

$$v(z) = v_{pec}(z) = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 1 \quad (1.25)$$

In questo caso z è collegato alla misura di una velocità peculiare e non dipende dal tempo.

Oggi è chiaro che l'interpretazione corretta del redshift cosmologico è quella fornita dalla Relatività Generale, ma non lo è sempre stato in passato. Infatti, il redshift Doppler (1.25) e il redshift cosmologico (1.23) hanno la stessa approssimazione $z = v$ per $0 < z < 1$ e sono in accordo con la Legge di Hubble. Questo portò impropriamente a usare la (1.25) per convertire z in velocità e di fatto fu lo stesso Hubble a usare quest'idea per convertire il redshift in velocità, dato che misurava z piccoli. Solo quando è stata possibile l'effettuazione di osservazioni a $z \gg 1$ tanto da predire anche velocità superluminali, si è reso necessario cercare test sperimentali che fossero in grado di dimostrare quale fosse l'interpretazione corretta ⁸.

⁸e.g. si veda la relazione tra la grandezza e il redshift delle SNe-Ia note essere *standard candles* in [6].

Capitolo 2

Le strutture causali dell'universo

In questo capitolo presentiamo le strutture causali che caratterizzano uno spazio-tempo. In particolare, vedremo che il nostro spazio-tempo, descritto dalla metrica di Friedmann-Robertson-Walker, possiede diversi tipi di orizzonti cosmologici, dei quali investigheremo le condizioni di esistenza, proprietà e limitazioni che ne derivano nel modello cosmologico standard traendo spunto soprattutto dalle *Baumann Lectures on Cosmology* [3] e dall'articolo *Causal structures in inflation* di George F.R. Ellis e Jean-Philippe Uzan [7]. Vedremo che i coni luce definiscono le relazioni causali di un osservatore e che, indipendentemente dal fatto che l'Universo sia infinito o finito, dal momento che l'età dell'Universo e la velocità della luce sono quantità finite, ci sono eventi passati che non possiamo osservare adesso. Le particelle al limite della nostra visione costituiscono il cosiddetto orizzonte delle particelle. Allo stesso modo, vedremo che ci sono eventi futuri che non saremo mai in grado di vedere o influenzare, poichè sono al di fuori del nostro orizzonte degli eventi. Tralascieremo, invece, l'altrettanto affascinante panoramiana della fisica dei buchi neri nella quale gli orizzonti degli eventi sono strettamente legati alle singolarità dello spazio-tempo. Si sottolinea che l'orizzonte degli eventi non svolge alcun ruolo nelle osservazioni che possono essere fatte al tempo presente, mentre l'orizzonte delle particelle è un concetto chiave per determinare i limiti causali e osservativi di un osservatore. Introduciamo, inoltre, il raggio di Hubble come la distanza alla quale la velocità di recessione è pari alla velocità della luce e vedremo il suo legame con gli orizzonti cosmologici.

2.1 Cono luce del passato e concetto di causalità

Dati due eventi p e q nello spazio-tempo, q si dice *causalmente connesso* a p se esiste una geodetica di tipo tempo o di tipo luce $x^\mu(s)$ diretta nel futuro parametrizzata dal parametro affine $s < 0$ che congiunge q a p , tale che $x^\mu(0) = p$ ed esista un s_1 per cui $x^\mu(s_1) = q$. [7]

Per ogni evento p dello spazio-tempo si definisce il *cono luce del passato* $C^-(p)$ di p come l'ipersuperficie nulla che contiene l'insieme di eventi q che possono essere osservati da p per mezzo di radiazione elettromagnetica, ossia causalmente connessi a p con una geodetica nulla $x^\mu(s)$. E' importante che ogni geodetica lasci l'intorno di ogni punto $x^\mu(s)$ dello spazio-tempo e non vi rientri (*Strong Causality Condition* [5]) di modo che solo gli eventi sul cono luce del passato e al suo interno possono aver influenzato p .

Parametrizziamo $C^-(O)$ in termini di osservabili con gli angoli (θ, ϕ) di osservazione nel cielo e il redshift $z(t)$ che misura la distanza "lungo il cono luce" di O . La distanza comovente radiale di una sorgente S è espressa dalla stessa (1.20) che riportiamo di seguito o, in termini di osservabili,

dalla (1.22).

$$\chi_{LC}(t_0, t_e) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.1)$$

Chiaramente, osservatori diversi hanno coni luce diversi e il cono luce di ogni osservatore varia nel tempo. In modo del tutto analogo si può definire il cono luce del futuro $C^+(O)$ come l'ipersuperficie nulla che contiene l'insieme di eventi che possono risentire di ciò che accade in O .

2.2 Le diverse nozioni di orizzonte

Un orizzonte è in generale una barriera che delimita le relazioni causali e gli eventi osservabili per un osservatore in un dato tempo cosmico. Esistono diversi tipi di **orizzonti cosmologici** la cui esistenza dipende dalla struttura dello spazio-tempo e sono definiti relativamente alla direzione futura del tempo.

2.2.1 Orizzonte degli eventi (EH: Event Horizon)

Dato un osservatore O al tempo t_0 , l'orizzonte degli eventi è un'ipersuperficie $(t_0, \chi_{EH}(t_0), \theta, \phi)$ che rappresenta l'infinito futuro nullo e che racchiude tutti gli eventi che O sarà in grado di influenzare nella sua storia cosmica. Immaginando di porre un osservatore O' al tempo t_f nell'origine $\chi = 0$, dove $t_f = \infty$ (se l'universo si espande in eterno) o $t_f = t_+$ (se esiste una singolarità futura, detta *Big Crunch*, a $t_f = t_+$), l'orizzonte degli eventi rappresenta la massima distanza (comovente) dalla quale O' riceverà un segnale di luce emesso da O in $\chi = \chi_{EH}(t_0)$.

$$\chi_{EH}(t_0) := \chi(t_f, t_0) = \tau_f - \tau_0 = \int_{t_0}^{t_f} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.2)$$

dove τ_f rappresenta il tempo finale conforme che può essere finito anche se t_f è infinito e τ_0 è il tempo conforme corrispondente a t_0 . Tutti i fotoni con $\chi \leq \chi_{EH}(t_0)$ raggiungeranno O' in un tempo finito, mentre se $\chi > \chi_{EH}(t_0)$ non lo raggiungeranno mai.

2.2.2 Orizzonte delle particelle (PH: Particle Horizon)

Dato un osservatore O al tempo t_0 , l'orizzonte delle particelle è un'ipersuperficie $(t_0, \chi_{PH}(t_0), \theta, \phi)$ che al tempo t_0 racchiude le linee di universo delle particelle che intersecano il cono luce del passato di O e quindi possono essere osservate da O . Esso è determinato dall'intersezione tra il cono luce del passato di O con l'ipersuperficie di tipo spazio Σ_{t_i} , dove $t_i = 0$ per la singolarità del *Big Bang* (non consideriamo il caso $t_i \rightarrow -\infty$). Tralasciando le coordinate angolari e immaginando di porre un osservatore O' al tempo t_i , l'orizzonte delle particelle rappresenta la massima distanza comovente dalla quale O potrà ricevere segnali di tipo luce inviati da O' .

$$\chi_{PH}(t_0) := \chi(t_0, t_i) = \tau_0 - \tau_i = \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.3)$$

dove τ_i è il tempo iniziale conforme corrispondente a $t_i = 0$ e τ_0 il tempo conforme corrispondente a t_0 . I fotoni con distanza comovente $\chi \leq \chi_{PH}(t_0)$ sono già stati osservati da O entro il tempo t_0 , mentre quelli con $\chi > \chi_{PH}(t_0)$ non sono ancora stati ricevuti da O . In coordinate fisiche si ha che $d_{PH} = a(t)\chi_{PH}(t)$ e, dal momento che $a(t)$ è una funzione monotona crescente nel tempo (si ricordino i risultati (1.15)), sempre più particelle entreranno nell'orizzonte delle particelle di O . Chiaramente ogni osservatore ha il proprio orizzonte delle particelle e si può definire in un qualsiasi tempo della sua storia.

Orizzonte Visivo (VH: Visual Horizon)

Se il cono luce del passato dell'osservatore O interseca un'ipersuperficie Σ_{t_d} prima della quale il fluido cosmico è opaco al "messaggero" (ossia non è causalmente connesso a O), allora esiste un limite fisico costituito dalla superficie $\Sigma_{VH} := C^-(O) \cap \Sigma_{t_d}$ che delimita l'universo osservabile da O per mezzo di tale "messaggero". L'Universo non diventa opaco nelle stesse circostanze, perciò si avranno diversi orizzonti visivi, e.g per i fotoni si avrà $VH(\gamma)$, per i neutrini $VH(\nu)$ e per le onde gravitazionali $VH(GW)$ ¹. In particolare, consideriamo la cosiddetta superficie di ultimo *scattering* (o *Last Scattering Surface*) dei fotoni con la materia avvenuta al tempo $t_{LSS} \approx 380'000$ anni che contiene le linee di universo di tutte le particelle osservabili per mezzo della radiazione elettromagnetica. A causa dell'elevata temperatura, prima di t_{LSS} i fotoni sono estremamente energetici e urtano continuamente gli elettroni impedendo la formazione dell'idrogeno neutro rendendo il fluido cosmico opaco (per questo t_{LSS} è detto anche tempo della "ricombinazione" dell'idrogeno).

$$\chi_{VH}(t_0) = \chi(t_0, t_{LSS}) = \int_{t_{LSS}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.4)$$

Si noti che non vi sono termini divergenti nell'integrazione, perciò l'orizzonte visivo esiste sempre e rappresenta la massima distanza comovente dalla quale potremo mai ricevere fotoni.

Orizzonte delle particelle primordiale (PPH: Primordial Particle Horizon)

Si definisce orizzonte delle particelle primordiale l'orizzonte delle particelle per un osservatore al tempo t_{LSS} , i.e.

$$\chi_{PPH} = \chi(t_{LSS}, t_i) = \int_{t_i}^{t_{LSS}} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.5)$$

Particelle la cui distanza comovente $\chi > \chi_{PPH}$ non hanno potuto comunicare tra loro entro il tempo t_{LSS} .

Per costruzione $\chi_{VH}(t_0)$ è contenuto nell'orizzonte delle particelle e si può riscrivere $\chi_{PH}(t_0)$ in coordinate comoventi come

$$\chi_{PH}(t_0) = \chi_{PPH} + \chi_{VH}(t_0) \quad (2.6)$$

2.2.3 Orizzonti cosmologici nel modello di FRW

Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di $\chi_{EH}(t_0)$ e $\chi_{PH}(t_0)$ è che l'integrale converga. E.g. consideriamo nel modello di FRW un universo con $k = \Lambda = 0$ dominato da una singola componente, perciò, dalla (1.15), con fattore di scala $a(t) \propto t^{2/3(1+w_i)} = t^{-n}$ con $n = 3(1+w_i)/2$ e $w_i = 0, 1/3$. Osserviamo per quali valori di n gli integrali che definiscono l'orizzonte degli eventi e delle particelle comoventi convergono.

$$\begin{aligned} \int^{\infty} t^{-n} dt < \infty &\iff n > 1 \iff 1 + 3w < 0 \\ \int_0^{\infty} t^{-n} dt < \infty &\iff n < 1 \iff 1 + 3w > 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

I due tipi di orizzonti sono mutuamente esclusivi e, in particolare, nel caso della radiazione ($w = 1/3$) e della materia ($w = 0$), dato che esse soddisfano $1 + 3w > 0$ detta *Strong Energy Condition* (SEC), esiste χ_{PH} , ma non χ_{EH} .

¹Infatti, l'Universo rimane trasparente per neutrini fino a circa un secondo dal Big Bang, mentre per i gravitoni fino al tempo di Plank $t_{pl} = \sqrt{\hbar G/c^5} \approx 10^{-44}$ s.

2.3 Sfera di Hubble

Il raggio di Hubble (comovente) $(aH)^{-1}$ ($d_H \equiv H^{-1}$ in coordinate fisiche) è il raggio della sfera di Hubble e rappresenta la distanza comovente che possono percorrere le particelle in un tempo di espansione $t_H \equiv H^{-1}$ o, analogamente, definisce la distanza alla quale $v_{rec} = c = 1$. Esso stabilisce la connessione causale dell'osservatore in un dato istante (i.e. entro t_H) e non un limite causale, dato che non è stato usato il concetto di cono luce nella definizione di raggio di Hubble. Usando l'equazione di Friedmann nella forma (1.14), il raggio di Hubble in coordinate comoventi è espresso da

$$(aH)^{-1} = H_0^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3w)} \quad (2.8)$$

Nel caso della radiazione e della materia, le quali soddisfano la SEC, il raggio di Hubble cresce con l'espansione dell'Universo. Si tenga a mente questo risultato che riprenderemo trattando la fase inflazionaria dell'Universo.

2.3.1 Raggio di Hubble e orizzonte delle particelle

Vediamo che esiste una relazione tra l'orizzonte delle particelle e l'evoluzione del raggio di Hubble. Riprendiamo la (2.3) e la riscriviamo nel modo seguente

$$\chi_{PH}(t_0) = \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \stackrel{\dot{a}=\frac{da}{dt}}{=} \int_{a_i}^{a_0} \frac{da}{a \dot{a}} \stackrel{H=\frac{d \ln a}{dt}}{=} \int_{\ln a_i}^{\ln a_0} (aH)^{-1} d \ln a \quad (2.9)$$

Sostituendo l'integrando con (2.8) e risolvendo esplicitamente per $a_i \rightarrow 0$ (singolarità iniziale)

$$\chi_{PH}(t) = \frac{2H_0^{-1}}{1+3w} \left[a(t)^{\frac{1}{2}(1+3w)} - a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)} \right] \stackrel{a_i \rightarrow 0 \wedge SEC}{=} \frac{2H_0^{-1}}{1+3w} a(t)^{\frac{1}{2}(1+3w)} \quad (2.10)$$

$$\stackrel{(2.8)}{\implies} \chi_{PH}(t) = \frac{2}{1+3w} (aH)^{-1}(t) \quad (2.11)$$

Esiste dunque una relazione di proporzionalità diretta tra l'orizzonte delle particelle e il raggio di Hubble che ha portato a confondere i due concetti, dato che nel caso della radiazione e della materia ordinaria $\chi_{PH} \approx (aH)^{-1}$. In realtà, vediamo che fra orizzonte delle particelle χ_{PH} e raggio di Hubble $(aH)^{-1}$ esiste una differenza sostanziale.

Sia λ la distanza comovente tra due particelle nello spazio, allora se $\lambda \leq (aH)^{-1}$ le due particelle possono comunicare entro il tempo t_H , mentre se $\lambda > (aH)^{-1}$ non possono comunicare *adesso*, ma sono in contatto causale dato che $\chi_{PH} > (aH)^{-1}$. Al contrario, se $\lambda > \chi_{PH}(t_0)$ le due particelle non possono *mai* aver comunicato, i.e. i coni luce del passato delle due particelle non hanno ancora avuto abbastanza tempo per intersecarsi ed entrare in contatto causale.

2.3.2 Raggio di Hubble e orizzonte degli eventi

Consideriamo l'andamento del fatto di scala previsto dalla (1.15) nel caso della costante cosmologica Λ , i.e. $a(t) \propto e^{Ht}$, con $H = \text{cost}$. Riprendendo la definizione di orizzonte degli eventi comovente (2.2) si ha

$$\chi_{EH}(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-Ht} dt = \frac{e^{-Ht_0}}{H} = (aH)^{-1}(t_0) \quad (2.12)$$

perciò il raggio di Hubble tende asintoticamente all'orizzonte degli eventi in regime esponenziale.

Capitolo 3

Diagrammi di Penrose

Vogliamo ora studiare un'interessante rappresentazione introdotta da Penrose che semplifica lo studio delle proprietà globali di uno spazio-tempo e stabilisce una semplice relazione geometrica che determina l'esistenza dell'orizzonte delle particelle o degli eventi.

Nel caso di uno spazio-tempo descritto da una varietà non compatta (ad esempio lo spazio-tempo di Minkowski), la struttura globale, le proprietà asintotiche e le relazioni causali tra gli eventi al suo interno si possono descrivere sfruttando il fatto che lo spazio-tempo è invariante per trasformazioni conformi della metrica. A tale proposito ricordiamo la seguente definizione.

Definizione 3.0.1. Sia data una varietà differenziabile non compatta \mathcal{M} con metrica $g_{\mu\nu}$. Se esiste un'altra varietà differenziabile compatta \mathcal{M}' con frontiera \mathcal{J} e metrica $g'_{\mu\nu}$ tale per cui $g'_{\mu\nu} = W g_{\mu\nu}$ e W è una funzione che si annulla su \mathcal{J} , allora \mathcal{M} si dice *conforme* a \mathcal{M}' e l'"infinito" di \mathcal{M} è rappresentato da \mathcal{J} .

Si noti che \mathcal{M}' non è unicamente determinato, ma dipende dalla trasformazione conforme scelta. In questo modo si hanno due metriche non identiche (diverse proprietà topologiche), ma che condividono la stessa struttura causale e tutte le proprietà dello spazio-tempo preso in considerazione possono essere studiate guardando la regione "finita" all'interno di \mathcal{J} . Se inoltre lo spazio-tempo gode di simmetria sferica (com'è il caso degli spazi-tempo che studieremo), allora si possono ignorare le coordinate angolari e rappresentare \mathcal{M} in un piano bidimensionale in cui ogni punto rappresenta una sfera S^2 ponendo lungo l'asse delle ordinate la coordinata temporale e lungo l'asse delle ascisse la coordinata spaziale. Questo tipo di diagramma viene detto **Diagramma di Penrose** (o, meno frequentemente, di Carter-Penrose o semplicemente diagramma conforme).

In tale rappresentazione le geodetiche radiali seguite dai raggi di luce sono rappresentate da linee rette a $\pm\pi/2$. L'infinito conforme dello spazio-tempo originario può essere rappresentato da una linea singola o da un punto a seconda della parametrizzazione scelta, le singolarità dovute alla scelta delle coordinate ¹ da linee tratteggiate e le singolarità fisiche da una doppia linea.

In questo capitolo ci soffermeremo in particolare nella costruzione dei diagrammi di Penrose per lo spazio-tempo di Minkowski, di Friedmann-Robertson-Walker e di de Sitter. Si sottolinea che gran parte delle considerazioni seguenti sono tratte dal libro *The large scale structure of space-time* di S.W. Hawking e G.F.R Ellis [8].

¹Le singolarità "non fisiche" sono i punti in cui la metrica diventa singolare e possono essere eliminate effettuando dei cambi di coordinate, e.g. le singolarità dovute al sistema di coordinate polari sferiche. Le singolarità "fisiche" sono invece ineliminabili in quanto è la stessa curvatura dello spazio-tempo che diverge. Anche la temperatura e la densità divergono in prossimità di tali singolarità.

3.1 Costruzione di un diagramma di Penrose

Come esempio, consideriamo la costruzione del diagramma di Penrose dello spazio-tempo di Minkowski (\mathbb{R}^4, η) con $\eta = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ in coordinate (x^0, x^1, x^2, x^3) e curvatura costante e nulla. La metrica in coordinate polari sferiche (t, r, θ, ϕ) con $-\infty < t < \infty$, $0 < r < \infty$, $0 < \theta < \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$ si esprime nella seguente forma

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad \text{con} \quad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.1)$$

Introduciamo le coordinate "avanzate" e "ritardate" v e u con $-\infty < u \leq v < \infty$

$$\begin{cases} v = t + r \\ u = t - r \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} t = v + u \\ r = v - u \end{cases} \quad (3.2)$$

Mantenendo le coordinate angolari invariate e sostituendo v, u al posto di t, r in (3.1) si ottiene

$$ds^2 = -(dv^2 + du^2 + 2dvdu) + (dv^2 + du^2 - 2dvdu) + (v-u)^2 d\Omega^2 = -4dv du + (v-u)^2 d\Omega^2 \quad (3.3)$$

Le v, u hanno ancora dominio infinito perciò ci serve una nuova trasformazione che "mappi" queste coordinate in una regione "finita". A tale scopo, si possono definire V e U nel modo seguente con $-\pi/2 < U \leq V < +\pi/2$ e riscrivere l'elemento infinitesimo ds^2 .

$$\begin{cases} \tan V = v \\ \tan U = u \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad ds^2 = -4 \frac{dV dU}{\cos^2 V \cos^2 U} + (\tan V - \tan U)^2 d\Omega^2 \quad (3.4)$$

Usando le proprietà trigonometriche è possibile riscrivere la metrica in modo da renderla conforme a $d\tilde{s}^2$

$$ds^2 = \sec^2 V \sec^2 U d\tilde{s}^2 \quad \text{con} \quad d\tilde{s}^2 = -4dVdU + \sin^2(V-U) d\Omega^2 \quad (3.5)$$

La forma di $d\tilde{s}^2$ risulta più chiara se si definiscono delle nuove coordinate \tilde{t} e \tilde{r} e il loro legame con le coordinate iniziali t e r

$$\begin{cases} \tilde{t} = V + U \\ \tilde{r} = V - U \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} t = \tan(\tilde{t} + \tilde{r}) + \tan(\tilde{t} - \tilde{r}) \\ r = \tan(\tilde{t} + \tilde{r}) - \tan(\tilde{t} - \tilde{r}) \end{cases} \quad (3.6)$$

Sostituendo in (3.5) si ottiene

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{t}^2 + d\tilde{r}^2 + \sin^2 \tilde{r} d\Omega^2 \quad (3.7)$$

In questo modo abbiamo ottenuto una trasformazione conforme che "mappa" l'infinito dello spazio-tempo di Minkowski in una regione finita dello spazio-tempo descritto da $d\tilde{s}^2$ che è il cosiddetto universo statico di Einstein² con fattore $W(\tilde{t}, \tilde{r}) = \sec^2(\tilde{t} + \tilde{r}) \sec^2(\tilde{t} - \tilde{r})$. L'esatta regione è in questo caso definita dal seguente dominio delle coordinate

$$\begin{cases} -\pi < \tilde{t} + \tilde{r} < \pi \\ -\pi < \tilde{t} - \tilde{r} < \pi \\ \tilde{r} \geq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

²L'universo statico di Einstein è uno spazio-tempo statico e finito con distribuzione di materia uniforme e curvatura sferica. Esso è rappresentato dalla varietà $\mathbb{R}^1 \times S^3$ dove $-\infty < \tilde{t} < +\infty$ e \tilde{r}, θ, ϕ sono coordinate su S^3 con singolarità non fisiche in $\tilde{r} = 0, \pi$ e $\theta = 0, \pi$.

Sfruttando la simmetria rotazionale si sopprimono le coordinate angolari e si costruisce il diagramma di Penrose nel piano (\tilde{t}, \tilde{r}) in Figura 3.1. La rappresentazione conforme dell'infinito dello spazio-tempo di Minkowski è costituita da

- le ipersuperfici $\mathcal{J}^\pm = \{\tilde{t} = \pm(\pi - \tilde{r}), \tilde{r} \in [0, \pi]\}$: sono gli infiniti di tipo luce futuro e passato, i.e. le geodetiche di tipo luce iniziano in \mathcal{J}^- e terminano in \mathcal{J}^+ ;
- i punti $i^\pm : \tilde{t} = \pm\pi, \tilde{r} = 0$: sono gli infiniti di tipo tempo futuro e passato (corrispondono a $t = \pm\infty$), i.e. ogni geodetica di tipo tempo inizia in i^- e termina in i^+ ;
- il punto $i^0 : \tilde{t} = 0, \tilde{r} = \pi$: è l'infinito di tipo spazio (corrisponde a $r = \infty$) e le geodetiche di tipo spazio iniziano e terminano in i^0 .

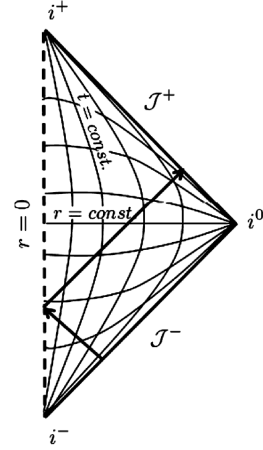


Figura 3.1: Diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di Minkowski (da [7]).

i^\pm e i^0 sono punti che si ottengono quando $\sin(\tilde{r}) = 0$, perciò non rappresentano sfere S^2 come gli altri a causa della scelta delle coordinate. Si noti che ogni superficie di Cauchy, definita da $t = cost$, è sezione orizzontale del diagramma conforme e interseca tutte le geodetiche di tipo tempo e luce. Useremo questo risultato di seguito.

3.2 Diagrammi di Penrose e orizzonti cosmologici

Consideriamo una famiglia di osservatori comoventi ognuno dei quali si muove lungo geodetiche di tipo tempo. Le superfici \mathcal{J}^+ e \mathcal{J}^- , introdotte in precedenza nel caso specifico dello spazio di Minkowski, rappresentano l'infinito nullo e sono collegate all'esistenza degli orizzonti cosmologici a seconda della loro natura.

Se \mathcal{J}^\pm sono superfici nulle, le geodetiche di tipo tempo si intersecano tutte nei vertici i^\pm e questo è il caso dello spazio-tempo di Minkowski in Figura 3.1. Se consideriamo osservatori comoventi, il cono luce del passato di ogni osservatore include l'intero spazio e non esistono né l'orizzonte degli eventi né delle particelle. Si osservi che l'ipersuperficie \mathcal{J}^+ è il cono luce del passato di i^+ e interseca tutte le linee di universo degli osservatori fondamentali, mentre \mathcal{J}^- è il cono luce del futuro del vertice i^- . Al contrario, se \mathcal{J}^\pm sono superfici di tipo spazio, le linee di universo degli

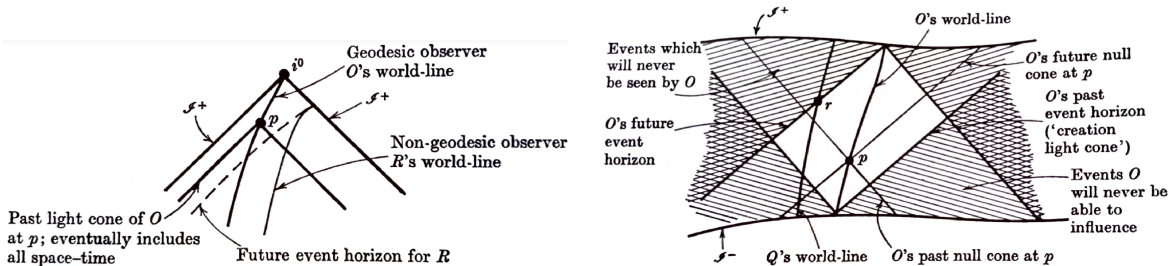


Figura 3.2: Si riporta da [8] a sinistra il caso di \mathcal{J}^+ nulla, perciò non esiste l'orizzonte degli eventi. Ciò nonostante, un osservatore che non si muove lungo geodetiche dello spazio-tempo (e.g. se ha accelerazione uniforme) potrebbe avere orizzonte degli eventi. A destra si ha il caso di \mathcal{J}^\pm di tipo spazio nel quale un osservatore fondamentale O possiede sia l'orizzonte degli eventi che l'orizzonte delle particelle.

osservatori fondamentali iniziano e terminano in punti diversi di \mathcal{J}^\pm ed esistono l'orizzonte degli eventi e delle particelle.

Supponiamo di essere in uno spazio che possiede entrambi gli orizzonti (Figura 3.2 a destra) e sia data una coppia di osservatori fondamentali O e Q e un evento p lungo la linea di universo di O . Il cono luce del passato di p non interseca tutte le altre linee di universo prima di arrivare a \mathcal{J}^- , perciò divide le particelle tra quelle visibili a O al tempo di p e quelle che non lo sono ancora (si ricordi che con il trascorrere del tempo sempre più particelle risultano visibili a O) o che non lo saranno mai. Il limite futuro dell'universo osservabile da O è rappresentato dall'intersezione fra il cono luce di creazione di O e \mathcal{J}^+ . Analogamente, il cono luce del futuro di p non include l'intero spazio perciò ci saranno eventi che non potranno risentire di O in tutta la sua storia cosmica o che potranno essere influenzati da O in un qualche tempo successivo a quello di p . Il massimo insieme di eventi che O può influenzare in tutta la sua storia cosmica è il cono luce del passato di O nel suo limite su \mathcal{J}^+ .

Supponiamo che il cono di luce del passato di p intersechi la linea di universo di Q in un evento s e che esista anche un evento r di Q che giace sull'orizzonte degli eventi di O . Ciò significa che l'osservatore O può osservare solo una parte finita della storia di Q in un tempo fisico infinito o meglio vedrà Q con un redshift che tende a infinito. Si noti che dal punto di vista di Q l'evento p è l'intersezione tra il cono di luce del futuro di s e la linea di universo di O ed esisterà anche un evento di O che giace sull'orizzonte degli eventi di Q , perciò si può ripetere un discorso analogo al precedente.

3.3 Lo spazio-tempo di Friedmann-Robertson-Walker

Mettiamo insieme quanto visto sino ad ora per studiare il diagramma conforme della metrica di Friedmann-Robertson-Walker nella forma (1.6) che riportiamo di seguito.

$$ds^2 = a(\tau)^2 \left[-d\tau^2 + (d\chi^2 + f_k^2(\chi) d\Omega^2) \right] \quad \text{con} \quad f_k(\chi) = \begin{cases} \sinh\chi & k = -1 \\ \chi & k = 0 \\ \sin\chi & k = +1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Il caso più semplice è quello con curvatura positiva $k = +1$ poichè la metrica è già conforme a (3.7) (identificando $\tau = \tilde{t}$ e $\chi = \tilde{r}$) con $W(\tau) = a^2(\tau)$. L'esatta regione dipende dal dominio di τ e quindi dal contenuto di materia.

Considerando invece sezioni spaziali euclidee ($k = 0$) lo spazio-tempo di FRW risulta conforme allo spazio-tempo di Minkowski (ponendo $\tau = t$ e $\chi = r$) e perciò si possono ripetere passaggi analoghi al Paragrafo 3.1 per trovare la regione conforme dell'universo statico di Einstein a seconda del dominio di τ .

Infine, nel caso di curvatura negativa $k = -1$ si può eseguire la seguente trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} \tilde{t} = \tan^{-1}(\tanh \frac{1}{2}(\tau + \chi)) + \tan^{-1}(\tanh \frac{1}{2}(\tau - \chi)) \\ \tilde{r} = \tan^{-1}(\tanh \frac{1}{2}(\tau + \chi)) - \tan^{-1}(\tanh \frac{1}{2}(\tau - \chi)) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} -\pi/2 \leq \tilde{t} + \tilde{r} \leq \pi/2 \\ -\pi/2 \leq \tilde{t} - \tilde{r} \leq \pi/2 \end{cases} \quad (3.10)$$

per ottenere la trasformazione conforme che "mappa" la metrica considerata in una regione dell'universo statico di Einstein. In particolare, se $\Lambda = 0$ e $P \geq 0$ lo spazio-tempo di FRW è conforme alla metà superiore (con $\tilde{t} \geq 0$) del diagramma in Figura 3.1 e vi è una singolarità fisica per $\tilde{t} = 0$.

In Figura 3.3 si riporta il diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di FRW nel caso $\Lambda = P = 0$.

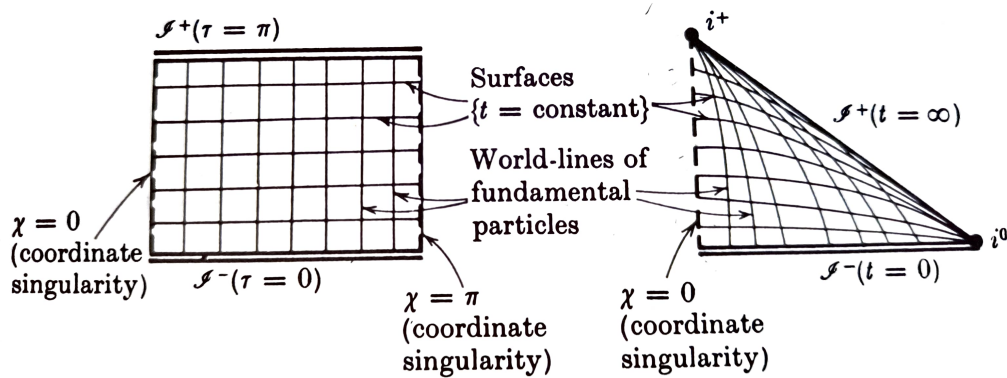


Figura 3.3: Diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di Friedmann-Robertson-Walker con $\Lambda = P = 0$ (da [8]). A sinistra con $k = +1$: si ha $0 < \tau < \pi$ e le ipersuperfici \mathcal{I}^- e \mathcal{I}^+ e rappresentano due singolarità fisiche (rispettivamente 'Big Bang' e 'Big Crunch'). \mathcal{I}^\pm sono di tipo spazio perciò vi è l'orizzonte delle particelle e degli eventi. A destra con $k = 0, -1$: vi è una singolarità fisica per $t = 0$ ('Big Bang') e \mathcal{I}^- è di tipo spazio, perciò esiste l'orizzonte delle particelle, mentre \mathcal{I}^+ è di tipo luce e non esiste l'orizzonte degli eventi.

3.4 Lo spazio-tempo di de Sitter

Lo spazio-tempo di de Sitter è uno spazio-tempo massimamente simmetrico a curvatura costante con scalare di Ricci strettamente positivo $R > 0$ e topologia $\mathbb{R}^1 \times S^3$. Esso può essere rappresentato da un iperboloido $\alpha^2 = -v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ immerso in \mathbb{R}^5 con metrica $ds^2 = -dv^2 + dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Scegliendo di parametrizzare l'iperboloido con le coordinate (t, χ, θ, ϕ) , cioè con sezioni sferiche, si può riscrivere l'elemento infinitesimo eseguendo la seguente trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} v = \alpha \sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \\ w = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \cos \chi \\ x = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \sin \chi \cos \theta \\ y = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \sin \chi \sin \theta \cos \phi \\ z = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \sin \chi \sin \theta \sin \phi \end{cases} \quad \text{con } -\infty < t < \infty, 0 \leq \chi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$$
(3.11)

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \cosh^2\left(\frac{t}{\alpha}\right) (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2)$$
(3.12)

Il fattore di scala risulta $a(t) \propto \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ e la parametrizzazione scelta ricopre l'intera varietà con singolarità non fisiche in $\chi = 0, \pi$ e $\theta = 0, \pi$. Fissata la coordinata temporale, si ha la metrica di S^3 che sono superfici di Cauchy a curvatura costante la cui distanza ha un minimo per $t \rightarrow 0$.

Per studiare l'"infinito" dello spazio-tempo di de Sitter si riscrive la coordinata temporale come

$$\tilde{t} = 2 \arctan e^{t/\alpha} \quad \text{con } 0 < \tilde{t} < \pi$$
(3.13)

$$ds^2 = \alpha^2 \cosh^2\left(\frac{\tilde{t}}{\alpha}\right) d\tilde{s}^2 \quad \text{con } d\tilde{s}^2 = -d\tilde{t}^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2$$
(3.14)

dove $d\tilde{s}^2$ ha la stessa forma di (3.7) (ponendo $\tilde{r} = \chi$). Lo spazio-tempo di de Sitter è conforme alla regione dell'universo statico di Einstein con fattore conforme $W = \alpha^2 \cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{\alpha}\right)$ definita dal dominio delle coordinate scelte. Ignorando le coordinate angolari per simmetria rotazionale, si ottiene il diagramma di Penrose in Figura 3.4 a sinistra. Si noti che in questo caso l'infinito futuro e passato è di tipo spazio perciò esistono sia l'orizzonte degli eventi che delle particelle per ogni osservatore comovente.

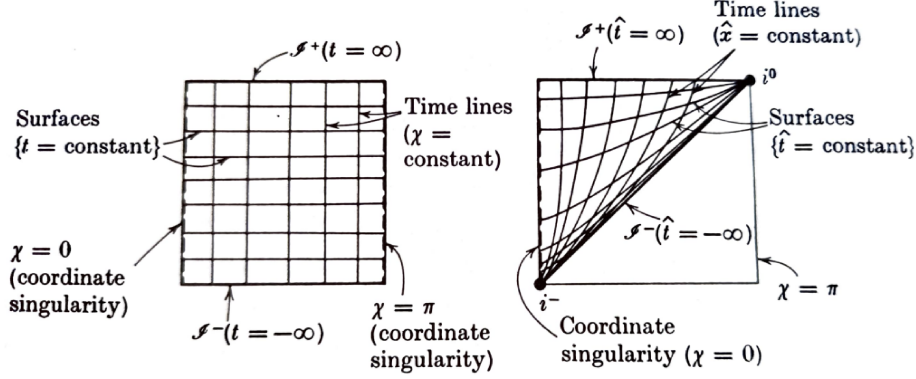


Figura 3.4: Diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di de Sitter a sinistra con sezioni sferiche e a destra con sezioni euclidee (da [8]).

Alternativamente, partendo dallo spazio-tempo di de Sitter con metrica $ds^2 = -dv^2 + dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, si può parametrizzare l'iperboloide con le coordinate $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, i.e. con sezioni a curvatura nulla

$$\hat{t} = \alpha \log \frac{v+w}{\alpha} \quad \hat{x} = \log \frac{\alpha x}{v+w} \quad \hat{y} = \log \frac{\alpha y}{v+w} \quad \hat{z} = \log \frac{\alpha z}{v+w} \quad (3.15)$$

da cui si ottiene l'elemento infinitesimo

$$ds^2 = -d\hat{t}^2 + e^{2\alpha^{-1}\hat{t}}(d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2 + d\hat{z}^2) \quad (3.16)$$

Il fattore di scala risulta $a(\hat{t}) \propto \exp(\alpha^{-1}\hat{t})$. Riscalando anche la coordinata temporale in modo da riportarla a un dominio finito e ignorando le coordinate angolari si ottiene il diagramma di Penrose in Figura 3.4 a destra. Si noti che il sistema di coordinate scelto non è completo dal momento che ricopre solo una metà triangolare del dominio precedente dato da (3.11) e (3.13). In questo caso vi è l'orizzonte degli eventi, ma χ_{PH} diverge perciò non vi è l'orizzonte delle particelle e vi è un inizio a $t = 0$ al contrario della trasformazione precedente.

Capitolo 4

Le conseguenze dell'espansione

Veniamo ora a uno degli aspetti più interessanti legati al fenomeno dell'espansione dell'Universo, i.e. le conseguenze che ne derivano. Vedremo in particolare le implicazioni più sensibili talvolta oggetto di fraintendimenti e dopodiché ci addentreremo nei principali aspetti insoddisfacenti della teoria del Big Bang caldo.

4.1 Le relazioni causali e i diagrammi spazio-tempo

Basandoci sulla cosmologia standard che descrive un universo omogeneo e isotropo in espansione (Capitolo 1), riassumiamo visivamente gli oggetti fisici definiti nel Capitolo 2 e le relazioni causali fra essi in un apposito ambiente matematico, detto *Diagramma spazio-tempo*. Questi ci permette di comprendere adeguatamente le implicazioni che ha l'espansione dell'Universo e di chiarire i comuni equivoci che ne derivano, i quali sono stati affrontati in modo particolare dai fisici Tamara M. Davis e Charles H. Lineweaver [6].

Confrontiamo i 3 pannelli in Figura 4.1. Si ricordi che il rapporto tra il tempo cosmico t e il tempo conforme τ e il rapporto tra la coordinata spaziale fisica D e quella conforme χ è il medesimo ed è pari al fattore di scala dell'universo. Si noti dunque il vantaggio che si ha nell'usare le coordinate conformi in entrambi gli assi cartesiani. Il terzo grafico mostra che i fasci di luce seguono le stesse linee di universo dello spazio-tempo di Minkowski, i.e. sono paralleli alle bisettrici a $\pm\pi/2$. Inoltre, le linee di universo delle particelle comoventi in coordinate comoventi sono rappresentate da delle linee verticali dato che, per costruzione, esse non hanno velocità peculiare e seguono semplicemente l'espansione dell'universo. Al contrario, nel primo pannello - che a priori potrebbe sembrare più intuitivo - si vede che sia le linee di universo delle particelle comoventi che le linee di universo dei fasci di luce aumentano la loro pendenza. Nel primo caso questo è dovuto all'espansione dell'universo e indica che con il passare del tempo le particelle non legate gravitazionalmente a noi si allontaneranno e, per la legge di Hubble, lo faranno sempre più velocemente. Nel secondo caso è dovuto al fatto che la velocità è composta dai due termini $v_{tot} = v_{pec} + v_{rec}$ in (1.3).

Gli orizzonti delle particelle e degli eventi e la sfera di Hubble, espressi rispettivamente dalla (2.3), dalla (2.2) e dalla (2.8), sono rappresentati in funzione del tempo e fissato un certo istante tutta l'informazione è contenuta in un punto che corrisponde una sfera S^2 attorno a noi. Ci soffermiamo in particolare alla loro rappresentazione in funzione del tempo conforme τ (terzo pannello).

L'orizzonte delle particelle è rappresentato a ogni istante dall'intersezione tra il cono nostro luce

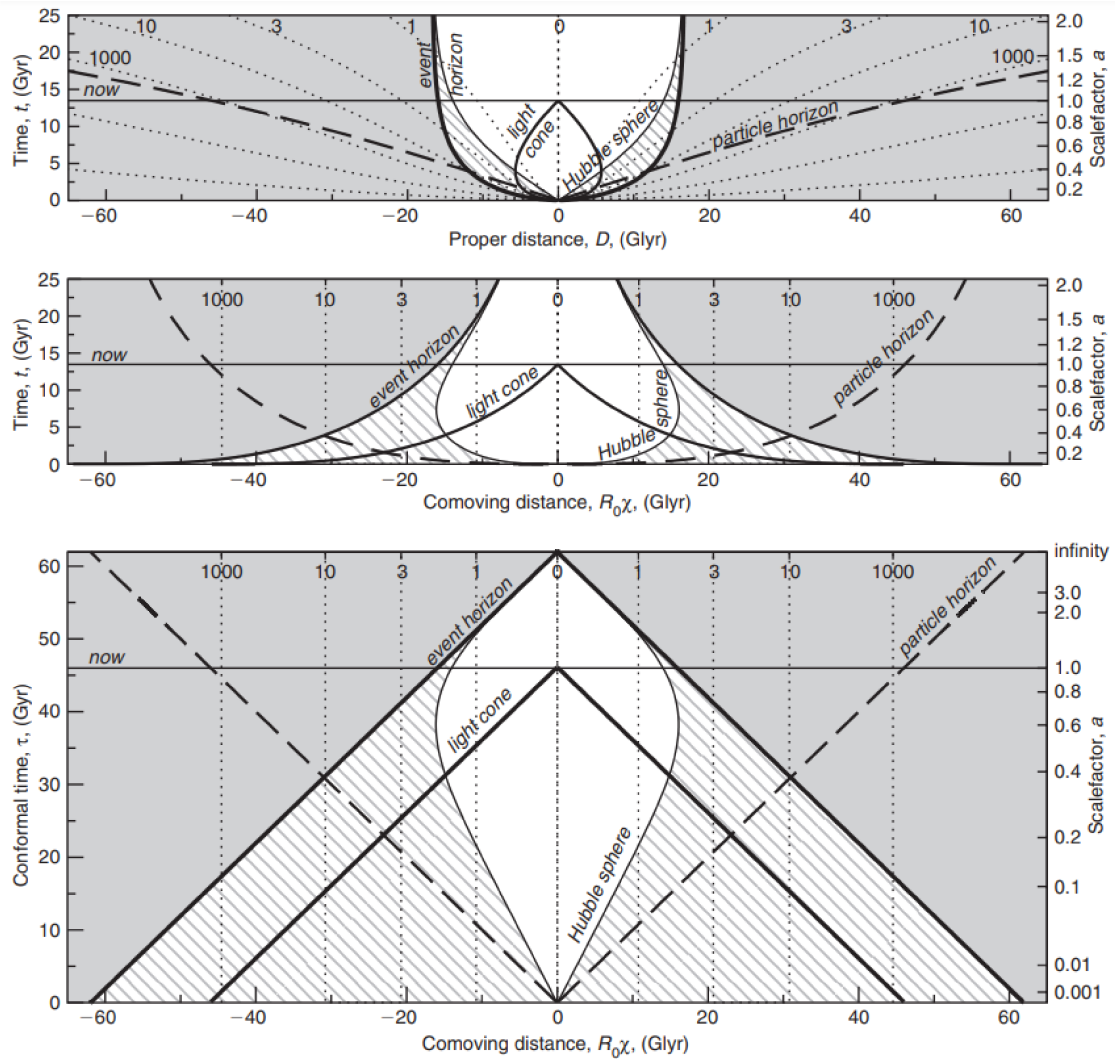


Figura 4.1: Si riporta il diagramma spazio-tempo del nostro universo tratto da [6], ottenuto usando la metrica di FRW (1.5) e i valori Λ CMB ($\Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$) con $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Non è compresa la fase inflazionaria dell'universo che discuteremo al capitolo successivo. Si riportano 3 pannelli diversi in cui vi è, in ordine, lungo l'asse delle ordinate e delle ascisse il tempo in funzione della distanza in coordinate fisiche, il tempo in coordinate fisiche in funzione della distanza comovente e, infine, il tempo in funzione della distanza in coordinate comoventi. Vi è inoltre un asse verticale alternativo riportante il fattore di scala normalizzato al suo valore attuale a/a_0 e un asse orizzontale alternativo con il redshift a cui misuriamo particelle a una data distanza da noi. La linea verticale centrale indica la nostra posizione, mentre le linee tratteggiate ai lati sono le linee di universo di particelle comoventi. Inoltre, sono rappresentati il nostro orizzonte degli eventi e delle particelle, la sfera di Hubble e il cono luce del passato rispetto al tempo attuale segnato da una riga orizzontale marcata con 'now'. Si noti il rapporto $\sim 3/1$ fra i grafici che riflette il rapporto fra il raggio dell'universo osservabile e l'età dell'universo $46 \text{ Glyr}/13.5 \text{ Gyr}$.

del futuro al tempo $t_i = 0$ (detto cono luce di creazione) e l'ipersuperficie Σ_{t_0} che è sezione orizzontale del grafico (con t_0 si intende il tempo attuale marcato con 'now' in Figura 4.1).¹ Il pannello centrale potrebbe trarre d'inganno mostrando il cono di luce tendere asintoticamente a t_i a cui corrisponderebbe un orizzonte delle particelle infinito, in realtà le coordinate comoventi hanno il vantaggio di mostrare che raggiunge una distanza finita (a circa 46 *Glyr* da noi che è il raggio dell'universo osservabile).

L'orizzonte degli eventi, invece, è rappresentato dal nostro cono luce del passato nel limite di $t_f \rightarrow +\infty$ (se l'universo si espande in eterno). Dalla Figura 4.1 si noti che le particelle comoventi con $z \sim 1.8$ stanno attraversando il nostro orizzonte degli eventi e sono gli oggetti più distanti ai quali possiamo inviare un segnale luminoso nel presente. Di conseguenza l'orizzonte degli eventi può essere molto minore dell'orizzonte delle particelle, dato che possiamo ancora osservare particelle che sono ormai fuori dal nostro orizzonte degli eventi ($z > 1.8$) grazie alla radiazione emessa in un qualche tempo passato.

Infine, notiamo che il raggio di Hubble tende asintoticamente all'orizzonte degli eventi nel futuro indicando il fatto che il comportamento futuro per il modello di FRW prevede un'espansione esponenziale con ($\Omega_M = 0, \Omega_\Lambda > 0$) (si ricordi quanto mostrato al Paragrafo 2.3.2). Ciò nonostante, bisogna tenere a mente che se l'espansione esponenziale termina (come vedremo nel caso dell'inflazione), gli oggetti che avevano lasciato la sfera di Hubble possono rientrarci, pertanto la sfera di Hubble non è un orizzonte vero e proprio.

4.1.1 Velocità superluminali?

Nella letteratura si trovano molti riferimenti erronei al fatto che non esistono oggetti superluminali o, se esistono, si dice che essi non sono osservabili. L'origine di questa credenza sta nel fatto che la sfera di Hubble viene chiamata impropriamente 'orizzonte' e nel fatto che ad oggetti sul nostro orizzonte corrisponda $z = \infty$. Nel Paragrafo 1.4.1 abbiamo confrontato le diverse interpretazioni di redshift nell'ambito della Relatività Generale e Speciale e abbiamo visto che se si tenta di applicare la Relatività Speciale (Equazione (1.25)) a $z = \infty$ corrisponde una velocità (peculiare) pari a c . Tuttavia, se accettiamo la validità della legge di Hubble e che l'interpretazione corretta del redshift cosmologico sia quella della Relatività Generale, dobbiamo ammettere l'esistenza di oggetti superluminali.

A questo punto sorge quindi un'altra questione ed è come sia possibile osservare velocità superluminali senza violare la Relatività Speciale. Dalla Figura 4.1 vediamo che i fotoni provenienti dalla nostra sfera di Hubble (attuale) hanno $z \sim 1.46$. Esistono però linee di universo di particelle che intersecano il nostro cono luce del passato e che osserviamo per definizione, ma la cui distanza non è necessariamente minore del raggio di Hubble. Per definizione gli oggetti con $z > 1.46$ recedono con velocità superluminali e noi osserviamo continuamente oggetti con $z > 1.46$!

Se consideriamo i fotoni emessi verso di noi da una particella che si allontana con velocità v_{rec} , allora essi avranno $v_{tot} = v_{rec} - c$, dato che $v_{pec} = c$ (si ricordi la (1.19)). I fotoni emessi dalle particelle oltre la nostra sfera di Hubble recedono con velocità maggiori della luce, dunque $v_{tot} = v_{rec} - c > 0$. Come possiamo però ricevere questi fotoni? Per rispondere a questa domanda bisogna ricordarsi che, durante l'evoluzione dell'universo dominato dalla materia e dalla radiazione, la sfera di Hubble si espande (H decresce) e può arrivare a comprendere fotoni che inizialmente recedevano da noi se si espande con una velocità $\dot{d}_H > v_{tot} = v_{rec} - c$. I fotoni si ritroveranno dunque in una regione con $v_{rec} < c$ e potranno raggiungerci entro il tempo t_H . La particella che ha emesso i fotoni, invece, sta ancora recedendo con $v_{rec} > c$ e si allontanerà per

¹Tradizionalmente, in realtà, a ogni tempo fissato l'orizzonte delle particelle è rappresentato dalla geodetica della particella comovente più distante, ma in realtà tutta l'informazione è racchiusa in un singolo punto e il resto della linea di universo può solo confondere.

sempre da noi. Questo implica che non vi sia alcuna violazione della Relatività Speciale. Essa postula che la velocità della luce nel vuoto sia costante in tutti i Sistemi di Riferimento *inerziali* e in questo caso non si riesce a trovare un Sistema di Riferimento inerziale globale, perciò le sue predizioni vengono meno ² e possiamo percepire galassie con $v_{rec} > c$ continuando a misurare localmente oggetti con $v_{pec} \leq c$.

4.2 I problemi del modello cosmologico standard

Nonostante il successo della teoria del Big Bang caldo, illustriamo di seguito i cosiddetti "problemi del modello cosmologico standard" che storicamente portarono a postulare un periodo di espansione accelerata primordiale (inflazione) che studieremo in dettaglio nel prossimo capitolo.

4.2.1 La CMB e il problema dell'orizzonte

La scoperta del fondo a microonde

Nel 1965 i fisici Arno Penzias e Robert Wilson del Bell Telephone Laboratories nel New Jersey si imbarcarono in un rumore insolito persistente nella banda delle microonde nelle operazioni di calibrazione di un'antenna per le comunicazioni satellitari. Nonostante avessero già sottratto il rumore dovuto all'elettronica e identificato tutte le altre possibili sorgenti di rumore, non riuscivano a capirne l'origine, dato che non proveniva dall'atmosfera (nessuna variazione rispetto alla direzione di osservazione) e nemmeno dal nostro sistema solare o dalla nostra galassia (nessuna modulazione con il trascorrere del tempo al variare della nostra posizione). In particolare, i due fisici osservarono che tale rumore poteva essere approssimato tramite lo spettro di un corpo nero alla temperatura di circa $3.5 K$, ma ne ignoravano il motivo. Una spiegazione teorica di questo fatto nello scenario del Big Bang caldo in realtà esisteva già: i fisici Robert Dicke e James Peebles dell'università di Princeton su suggerimento di George Gamow avevano predetto l'esistenza di un fondo cosmico di radiazione che a causa dell'espansione dell'Universo avremo dovuto osservare spostato verso il rosso sotto forma di radiazione a microonde (con spettro di un corpo nero alla temperatura di pochi kelvin). Quando Penzias e Wilson vennero a conoscenza delle ricerche del gruppo di Princeton, si resero conto di aver già trovato questa radiazione e questo gli valse il Premio Nobel nel 1978.

Cos'è la CMB?

La radiazione di fondo cosmico (CMB: *Cosmic Microwave Background*) è la radiazione elettromagnetica che permea tutto l'Universo sotto forma di spettro di un corpo nero alla temperatura di $T_0 = (2.72548 \pm 0.00057) K$ [9]. Dal momento che sappiamo che l'universo si raffredda espandendosi ($T \propto 1/a$), ogni atomo di idrogeno formato prima del processo di ricombinazione sarebbe stato immediatamente ionizzato dai fotoni altamente energetici. Questi, a causa delle continue interazioni, si trovavano quindi in equilibrio termico con il "mare" di nuclei ed elettroni che costituiva il fluido cosmico rendendo l'universo era opaco alla radiazione elettromagnetica. Con il disaccoppiamento (in inglese *decoupling*) dei fotoni dal plasma primordiale, il loro cammino medio divenne infinito permettendo loro di giungere fino a noi sotto forma di fondo a microonde mantenendo traccia dello spettro energetico che avevano nella superficie di ultimo *scattering*. Con dei calcoli accurati si può dimostrare che la CMB è stata "rilasciata" al tempo $t_{dec} = t_{LSS} \approx 380'000$ anni dalla singolarità iniziale quando l'universo aveva la temperatura di

²Di fatto la Relatività Generale è nata per predire il moto degli oggetti quando un Sistema di Riferimento inerziale globale non è accessibile.

$T_{dec} \approx 3000 K$ ³. Inoltre, la CMB è osservata a $z \sim 1100$ e al tempo di emissione, assumendo i parametri in Figura 4.1, i fotoni dalla CMB avevano $v_{rec} \approx 58.1c$, mentre attualmente hanno $v_{rec,0} = 3.2c$ [6].

La CMB di fatto delimita il nostro universo osservabile per mezzo della radiazione elettromagnetica (è quello che avevamo chiamato orizzonte visivo $VH(\gamma)$ al Paragrafo 2.2.2) ed è l'osservazione più importante a favore del modello del Big Bang caldo e del fatto che l'universo è isotropo e omogeneo attorno a noi.

Il problema dell'orizzonte

Lo studio della CMB dimostra che la radiazione cosmica di fondo è pressoché isotropa attorno a noi con anisotropie minori di una parte su 10^5 . In altre parole, osserviamo questa radiazione in equilibrio termico da tutte le direzioni. Il modello cosmologico standard impone queste proprietà di omogeneità e isotropia come condizioni iniziali, ma non ne spiega l'origine e nel tentativo di darne una spiegazione si giunge ad un apparente paradosso di natura causale noto come "Problema dell'Orizzonte". Infatti, in un universo dominato dalla materia ordinaria e dalla radiazione l'orizzonte visivo è dell'ordine dell'orizzonte delle particelle ed è molto maggiore dell'orizzonte delle particelle primordiale. Ciò significa che, presi due punti provenienti da direzioni opposte nel cielo, al tempo della ricombinazione dell'idrogeno essi non hanno avuto abbastanza tempo per entrare in contatto causale dato che i loro coni luce del passato non si intersecano (questo ragionamento vale in generale per ogni coppia di punti separati da più di un grado nel cielo). Questo risultato appare ancora più sorprendente se si stima il numero di celle iniziali causalmente disconnesse con lunghezza caratteristica di Planck $\ell_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35} m$ presenti oggi nell'universo osservabile come $N \sim \left(\frac{1+z_p}{\ell_{pl}H_0}\right)^3 \sim 10^{87}$ [11]. Com'è possibile che tutte queste celle ci appaiano oggi in equilibrio termodinamico con stessa densità e temperatura se la maggior parte di esse non ha avuto tempo di interagire?

4.2.2 Il problema della piattezza

La prima equazione di Friedmann (1.8) si può riscrivere il funzione del parametro adimensionale di densità $\Omega_i \equiv \rho_i/\rho_{crit}$ con $\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$ la densità critica necessaria affinché $k = 0$ nella prima equazione di (1.8) come

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad \text{con} \quad \Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2} \stackrel{(1.4)}{=} -\frac{k}{\dot{a}^2} \implies \Omega + \Omega_k = 1 \quad (4.1)$$

Dove $\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$ è il parametro di densità totale e $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G \rho_{crit}} = \frac{\Lambda}{3H^2}$. Dai valori sperimentali del parametro di densità attuale per ogni contributo al fluido cosmico riportati in (1.13) risulta che l'universo ha una geometria approssimativamente piatta. Combinando l'equazione di evoluzione del fluido cosmico (1.10) con la (4.1) si ottiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H^2}{2}\Omega(1+3w) \stackrel{\Omega=1-\Omega_k}{\implies} -2\frac{\ddot{a}}{H^2 a} \stackrel{(1.4)}{=} 2\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} = (1-\Omega_k)(1+3w) \quad (4.2)$$

³Si rimanda a [10] per i calcoli espliciti.

Differenziando l'espressione di Ω_k si ricava

$$d\Omega_k = -d\left(\frac{k}{\dot{a}}\right) = 2k \dot{a}^{-3} \ddot{a} dt \stackrel{(4.2)}{=} -\frac{k}{\dot{a} a} (1 - \Omega_k)(1 + 3w) dt$$

$$d\Omega_k \stackrel{\Omega_k = -k/\dot{a}^2}{=} \frac{\dot{a}}{a} \Omega_k (1 - \Omega_k)(1 + 3w) dt$$
(4.3)

Infine, ricordando la (1.4),

$$\frac{d\Omega_k}{d \ln a} = (1 + 3w)(1 - \Omega_k)\Omega_k$$
(4.4)

E' evidente che $\Omega_k = 0$ è un punto stazionario, ma non è stabile in quanto se $k \neq 0$ e $1 + 3w > 0$ (che è il caso della materia ordinaria e della radiazione) il termine di curvatura, per quanto piccolo nei primi istanti dell'universo, verrebbe amplificato dall'espansione portando ad un universo totalmente diverso [11]. Di conseguenza, il nostro universo può risultare approssimativamente piatto soltanto se era praticamente piatto all'inizio dell'espansione e il modo più semplice per avere $\Omega_k = 0$ è che $\Omega = 1 \Rightarrow \rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda = \rho_{crit}$. Tuttavia, questa condizione risulta molto restrittiva e il modello cosmologico standard non spiega questo risultato.

4.2.3 Il problema delle relitti cosmici

Infine, accenniamo ad un ultimo problema che riguarda l'"abbondanza" dei relitti cosmici, i.e. la quantità rimasta di una specie particellare dal Big Bang. Dai risultati (1.11), appare evidente che una qualsiasi quantità di materia non relativistica finirebbe presto per dominare rispetto alla materia relativistica. In particolare, dal momento che nell'universo primordiale a causa delle elevatissime temperature si ha l'unificazione delle 4 forze fondamentali (GUT: *Grand Unified Theories*), le teorie più moderne delle particelle prevedono l'esistenza e.g. del monopolio magnetico. Tale particella, data la sua massa estremamente elevata (di circa $10^{16} GeV$), finirebbe per diventare dominante con l'espansione dell'universo qualsiasi sia la sua quantità iniziale [10]. Ovviamente, sappiamo che oggi l'universo non è dominato da monopoli magnetici o altri relitti del Big Bang perciò le teorie che ne prevedono l'esistenza sono in contrasto con il modello cosmologico standard.

Capitolo 5

L'Universo Inflazionario

Per risolvere i problemi del modello cosmologico standard nel 1981 Alan Guth ipotizzò una fase primordiale di espansione accelerata, detta inflazione. Oltre a risolvere i problemi discussi nel capitolo precedente, si capì ben presto che questa nuova fase nell'evoluzione dell'universo aveva anche il pregio di fornire un meccanismo naturale e coerente per spiegare la formazione di strutture su larga scala collegando la generazione di fluttuazioni cosmiche alle fluttuazioni quantistiche. Si sottolinea che l'inflazione non altera i limiti osservativi precedentemente discussi in quanto avviene nell'universo primordiale a circa 10^{-34} sec dalla singolarità iniziale. Accenniamo brevemente al fatto che la teoria originaria proposta da Guth ("vecchia inflazione") non spiegava come tornare al modello del Big Bang caldo e fu presto sostituita dalla cosiddetta "nuova inflazione". In questa, il campo scalare che guida l'inflazione esce dalla condizione di falso vuoto portandosi attraverso la condizione di *slow-roll* al minimo del suo potenziale che corrisponde con la fine dell'inflazione. Ciò nonostante, questo modello supponeva ancora che l'universo fosse in sufficiente equilibrio termico prima dell'inizio dell'inflazione. Fu Andrei Linde a risolvere quest'ultimo problema formulando la cosiddetta "inflazione caotica", secondo la quale affinché l'inflazione avvenga basta che il potenziale $V(\phi)$ permetta le condizioni di *slow-roll*, mettendo definitivamente da parte le proprietà di omogeneità e isotropia che Linde vede solo come proprietà locali e che non sussistono su larga scala (cfr. [11]).

5.1 La teoria dell'inflazione

L'inflazione è stata postulata da Guth come una fase di espansione accelerata dell'universo primordiale, i.e. un periodo in cui l'evoluzione del fattore di scala è accelerata $\ddot{a} > 0$. Affinché questo accada, riprendendo l'equazione di Raychaudhuri (o equazione di accelerazione) (1.9), osserviamo che bisogna violare la SEC (o, analogamente, avere una pressione negativa) e questo può avvenire solo per la costante cosmologica Λ che soddisfa $w_\Lambda = -1$.

$$\ddot{a} > 0 \iff \rho + 3P < 0 \iff w \equiv \frac{P}{\rho} < -\frac{1}{3} \quad (5.1)$$

Partendo dall'equazione di Friedmann (1.8) e trascurando i primi due termini (che vengono diluiti dall'espansione) vediamo che la sola presenza di Λ fa sì che l'espansione sia esponenziale

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \implies a(t) = \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right) \quad (5.2)$$

Da questo risultato, si osserva il raggio di Hubble (fisico) $d_H \equiv H^{-1}$ rimane costante durante l'inflazione, mentre il raggio di Hubble comovente si contrae come $\propto \exp^{-Ht}$. Si ricordi dal Paragrafo 2.3.2 che il regime esponenziale del fattore di scala comporta che il raggio di Hubble tenda asintoticamente all'orizzonte degli eventi.

Alternativamente, dalla contrazione del raggio di Hubble comovente possiamo esprimere le condizioni che portano ad un'espansione accelerata per mezzo dei parametri ϵ e η

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad e \quad \eta \equiv \frac{d \ln \epsilon}{dN} = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} \quad \text{tali che} \quad \{\epsilon < 1; |\eta| < 1\} \quad (5.3)$$

dove ϵ indica che il parametro di Hubble varia debolmente ¹ e η indica che ϵ rimane piccolo abbastanza a lungo perchè continui l'inflazione. Senza addentrarci in troppi dettagli, accenniamo al fatto che queste condizioni possono essere riscritte utilizzando la quantizzazione di un campo scalare $\phi(t, \mathbf{x})$ detto *inflaton* a cui è associata densità di energia potenziale $V(\phi)$ e di energia cinetica in uno spazio-tempo di *quasi de Sitter* con rappresentazione euclidea. L'espansione accelerata avviene mentre il campo scalare si porta al minimo del suo potenziale attraverso le cosiddette condizioni di *slow-roll* per cui soddisfa $P \sim -\rho$ e risulta equivalente al contributo di una costante cosmologica. Una volta giunto al minimo, l'inflazione ha termine e l'energia del campo scalare decade nelle particelle del Modello Standard (processo di *reheating*) ritornando all'evoluzione del Big Bang caldo (cfr. [3]).

5.1.1 L'inflazione è un'espansione superluminale?

"The central assumption of any inflationary model is that the universe underwent a period of superluminal expansion early in its history before settling into a radiation-dominated evolution."

[12] Questo è solo uno dei tanti esempi nei quali si definisce impropriamente l'inflazione come un periodo di espansione superluminale. In realtà vediamo che questa affermazione è se non altro parzialmente errata (cfr. [6]), dato che anche durante l'inflazione non bisogna dimenticare che le particelle all'interno della nostra sfera di Hubble continuano a recedere con velocità subluminali per definizione! Il fatto che il raggio di Hubble comovente si contraiga durante l'inflazione comporta semplicemente che la sfera di Hubble comovente sia minore. Inoltre, la Legge di Hubble prevede un'espansione superluminale per tutte le particelle oltre la nostra sfera di Hubble anche durante l'evoluzione del Big Bang caldo. Si potrebbe parlare di espansione superluminale se e solo se tutte le distanze maggiori di una lunghezza di Planck l_{pl} stessero recedendo più veloci della luce, i.e. solo se la costante di Hubble fosse pari a $H = t_{pl}^{-1}$ con il raggio fisico di Hubble $d_H = H^{-1} = l_{pl}$, dato che la scala di Planck definisce il limite oltre il quale la gravità entra in regime quantistico e la fisica usata sino ad ora perde validità.

5.2 La soluzione ai problemi del modello cosmologico standard

5.2.1 Il problema dell'orizzonte

Si ricordi l'espressione del raggio di Hubble comovente data dalla (2.8). Avevamo visto che in un universo dominato dalla materia e dalla radiazione la sfera di Hubble (comovente) si espande, poichè la SEC viene rispettata. Durante l'inflazione, invece, dato che la SEC viene violata, la sfera di Hubble si contrae in modo da raggiungere $\chi_{PH} \gg (aH)^{-1}$. Vediamo come questa è la

¹Solo nel caso di inflazione perfetta con $\epsilon = 0$ si ha $H = \text{cost}$ e lo spazio-tempo è di *de Sitter*, ma dal momento che l'inflazione deve avere termine ϵ è piccolo ma diverso da zero. Ci si riferisce quindi all'inflazione come un periodo di *quasi de Sitter*.

chiave per evitare il problema dell'orizzonte [3].

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0 \iff 1 + 3w < 0 \quad (5.4)$$

Se la SEC è violata, allora l'integrale (2.9) è dominato dall'estremo inferiore ed esiste un tempo conforme infinito tra la singolarità iniziale e il rilascio della CMB. In questo caso, il tempo conforme $\tau = 0$ segnerebbe quindi la transizione tra la fase inflazionaria e l'evoluzione del Big Bang caldo e non la singolarità iniziale come in (2.11).

$$\tau_i = \frac{2H_0^{-1}}{1+3w} a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)} \xrightarrow{a_i \rightarrow 0 \wedge 1+3w < 0} -\infty \quad (5.5)$$

Grazie a questo meccanismo l'orizzonte delle particelle primordiale si espande permettendo ai coni luce del passato di due punti provenienti da direzioni opposte del cielo di intersecarsi e stabilire le condizioni di equilibrio termico osservate (si veda e.g. la Figura 5.1). L'orizzonte visivo, invece, rimane inalterato e i limiti osservativi sono gli stessi precedentemente discussi.

Riprendiamo il confronto fra il raggio di Hubble e l'orizzonte delle particelle del Paragrafo 2.3.1. Se una particella A , inizialmente in contatto causale con un'altra particella B e con distanza comoviente da B $\lambda_{AB} < (aH)^{-1}$, esce dalla sfera di Hubble di B durante l'inflazione, i.e. $\lambda_{AB} > (aH)^{-1}$, allora A e B non possono più comunicare finchè l'inflazione non termina. Al termine dell'inflazione, la sfera di Hubble di B ricomincia ad espandersi e potrà in un certo tempo futuro arrivare a ricomprendere la particella A , ma A e B manterranno per tutto il tempo il loro contatto causale! E' chiaro quindi che i due punti provenienti da direzioni opposte del cielo che vediamo rientrare nella nostra sfera di Hubble ci possono sembrare causalmente disconnessi solo se la fase inflazionaria è omessa, dato che entro la fine dell'inflazione si troveranno a una distanza comoviente maggiore del raggio di Hubble.

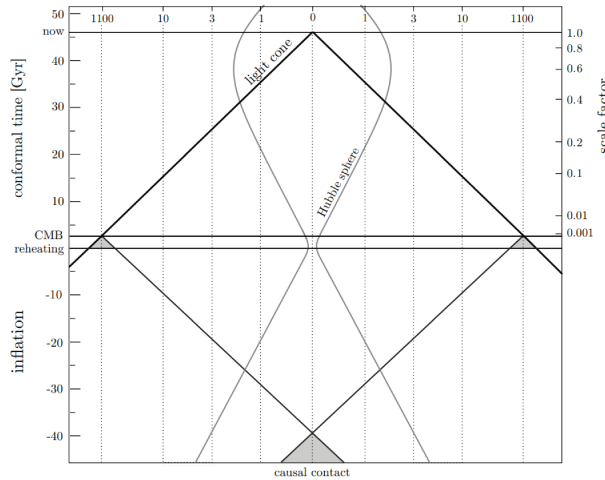


Figura 5.1: La soluzione dell'inflazione al problema dell'orizzonte (da [3]). Si riporta lungo l'asse delle ordinate il tempo conforme e lungo l'asse delle ascisse la distanza comoviente e , rispettivamente, nei due assi alternativi il fattore di scala dell'universo e il redshift cosmologico. Le linee verticali tratteggiate rappresentano le linee di universo degli osservatori fondamentali ed è in particolare segnato il cono luce del passato di un osservatore al tempo attuale marcato con 'now'. Si noti che la sfera di Hubble si contrae durante la fase inflazionaria. In questo modo i coni luce del passato di due punti della CMB (i due vertici lungo la linea orizzontale al tempo conforme della CMB) si intersecano (porzione scura in basso) e possono stabilire le condizioni di omogeneità e isotropia osservate. Inoltre, si osservi che l'asse dei tempi conforme ammette valori negativi e che in questo caso l'ipersuperficie al tempo $\tau = 0$ corrisponde alla fase di reheating, mentre la singolarità del Big Bang è rappresentata dall'ipersuperficie al tempo $\tau = -\infty$.

Si accenna infine al fatto che il raggio di Hubble svolge un ruolo importante nello studio della formazione di strutture durante l'inflazione in quanto permette di stabilire se una certa lunghezza

d'onda comovante è influenzata dall'espansione dello spazio-tempo a seconda se è *super-Hubble* o *sub-Hubble* (cfr. [7]).

5.2.2 Il problema della piatezza

Si ricordi che la geometria dell'universo attuale è approssimativamente piatta e affinché $\Omega_k = -\frac{k}{a^2} \rightarrow 0$ bisogna che \dot{a} decresca, cioè $\ddot{a} > 0$ che è quello che succede nel periodo dell'inflazione. Dalla (4.4) si deduce che il punto stazionario $\Omega_k = 0$ è un attrattore della dinamica solo se $-1 < w < -1/3$. Se l'attrazione verso $\Omega_k = 0$ è sufficiente da compensare il suo allontanamento da 0 quando $1 + 3w > 0$, allora il problema piatezza è risolto [11].

5.2.3 Il problema dei relitti cosmici

La teoria dell'inflazione ha infine il pregio di diluire ogni quantità di monopoli di magnetici e altri relitti cosmici presenti nell'universo primordiale, di modo che oggi non sono rilevabili.

5.2.4 Quanta inflazione?

Definiti i meccanismi e le condizioni che portano a questa fase primordiale di espansione accelerata ovviamente si vuole che essa duri abbastanza da risolvere i problemi del modello cosmologico standard. Siano t_i e t_f i tempi fisici dell'inizio e della fine dell'inflazione tali per cui $\epsilon(t_i) = \epsilon(t_f) \equiv 1$, a_i e a_f i fattori di scala e $H_i \approx H_e$ le costanti di Hubble.

Si definisce il "numero di e-volte" (*number of e-folds*) per quantificare la crescita del fattore di scala durante l'inflazione come

$$N \equiv \int_{t_i}^{t_f} H(t) dt = \int_{a_i}^{a_f} d \ln a = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right) \quad (5.6)$$

Vediamo che valori deve assumere N per risolvere il problema della piatezza e dell'orizzonte (cfr. [11], [2] e [3]). Supponiamo in entrambi i casi che l'inflazione avvenga nell'universo primordiale tra $t_i \approx 10^{-36}$ sec e $t_f = 10^{-34}$ sec e che in tale fase l'universo sia dominato dalla sola componente di radiazione ($a(t) \propto t^{1/2}$ dalla (1.15)). Riprendendo la (4.1) ciò significa che $|\Omega - 1| \propto (aH)^{-2} \propto t$ e quindi $|\Omega - 1| \lesssim 10^{-52}$ al tempo $t_f!$ ²

Nel caso del problema della piatezza, per riprodurre i dati sperimentali abbiamo bisogno che $|\Omega_k(t_f)| \lesssim 10^{-52}$ e $|\Omega_k(t_i)| \sim \mathcal{O}(1)$. Dal momento che $H \approx \text{cost}$ durante l'inflazione e ricordando che $\Omega_k \equiv -k/(aH)^2$, allora

$$\left| \frac{\Omega_k(t_f)}{\Omega_k(t_i)} \right| = \left(\frac{a_f}{a_i} \right)^{-2} = e^{-2N} \implies N > 60 \quad (5.7)$$

Per risolvere il problema dell'orizzonte, invece, abbiamo visto che l'universo osservabile deve essere contenuto nella sfera di Hubble all'inizio dell'inflazione³ per emergente dalla stessa regione causale, i.e. il raggio comovante dell'universo osservabile $(a_0 H_0)^{-1}$ deve soddisfare $(a_0 H_0)^{-1} < (a_i H_i)^{-1}$. Se l'universo è dominato dalla radiazione, dall'equazione di Friedmann nella forma (1.14) si ha che $H \propto a^{-2}$, perciò ricaviamo

$$\frac{a_0 H_0}{a_f H_f} \stackrel{H \propto a^{-2}}{\sim} \frac{a_0}{a_f} \left(\frac{a_f}{a_0} \right)^2 = \frac{a_f}{a_0} \propto \sqrt{\frac{t_f}{t_0}} \sim 10^{-26} \quad (5.8)$$

²Dove si è usato il tempo $t_0 \sim H_0^{-1} \sim 10^{-18}$ sec.

³Si ricordi che $\chi_{PH}(t) > (aH)^{-1}(t)$ e, avendo usato il raggio di Hubble come chiave per la soluzione del problema dell'orizzonte, non serve fare assunzioni su quanto accaduto in $t < t_i$.

$$(a_i H_i)^{-1} > (a_0 H_0)^{-1} \stackrel{(5.8)}{\sim} 10^{26} (a_f H_f)^{-1} \stackrel{H_i \approx H_e}{\approx} \frac{a_E}{a_0} > 10^{26} \implies N = \ln \left(\frac{a_E}{a_0} \right) > 60 \quad (5.9)$$

Abbiamo dunque dimostrato come la fase inflazionaria può risolvere sia il problema dell'orizzonte che quello della piattezza con approssimativamente lo stesso numero di e-volte $N > 60$.

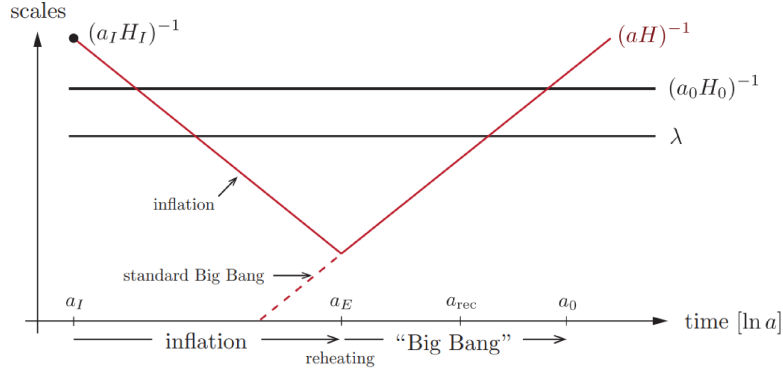


Figura 5.2: Evoluzione del raggio di Hubble comovente $(aH)^{-1}$ in funzione di $\ln a$ (da [3]). Sono in particolare segnati i fattori di scala corrispondenti all'inizio e alla fine dell'inflazione a_I e a_E , al rilascio della CMB a_{rec} e al tempo attuale a_0 . $(a_0 H_0)^{-1}$ segna il raggio comovente dell'universo osservabile al tempo attuale, mentre λ indica una generica distanza comovente di interesse. Il raggio di Hubble comovente si contrae durante l'inflazione portando $\lambda < (aH)^{-1}$ a $\lambda > (aH)^{-1}$ entro a_E , mentre si espande durante il modello del Big Bang standard portando di nuovo a $\lambda < (aH)^{-1}$.

5.3 Diagramma conforme con fase inflazionaria

Assumendo che il nostro universo abbia $k = \Lambda = 0$ (Figura 3.3 a destra), vediamo come inserire una fase di inflazione primordiale da t_i a t_f nel suo diagramma di Penrose [7].

Abbiamo visto che durante la fase inflazionaria il campo scalare si muove in condizioni di *slow-roll* in uno spazio-tempo di *quasi de Sitter*. In questo caso quindi lo spazio-tempo non è più massimamente simmetrico, ma vi è una trasformazione conforme "preferita" con una direzione del tempo ben definita in base al "background" di partenza. Partendo da quanto discusso al Paragrafo 3.4, questo significa che dovremo scegliere la parametrizzazione con sezioni a curvatura nulla e non con sezioni sferiche. Il fattore di scala risulta $a(\hat{t}) \propto \exp(\alpha^{-1}\hat{t}) = \exp(H\hat{t})$ con $\alpha = d_H = H^{-1} = \text{cost}$ nel caso dell'inflazione.

Concludiamo quindi che il nostro universo con fase inflazionaria primordiale è rappresentato dal diagramma di Penrose simile a quello in Figura 5.3.

Si ricordi che \mathcal{J}^\pm rappresentano l'infinito futuro e passato nullo, i^+ l'infinito futuro di tipo tempo e i^0 l'infinito di tipo spazio. L'ipersuperficie \mathcal{J}^- è di tipo spazio quindi vi è l'orizzonte delle particelle, mentre non esiste l'orizzonte degli eventi dato che le geodetiche di tipo tempo seguite dagli osservatori comoventi terminano tutte nello stesso punto i^+ .

Fissato t_0 il tempo attuale si ha l'ipersuperficie in cui ci troviamo attualmente e fissato

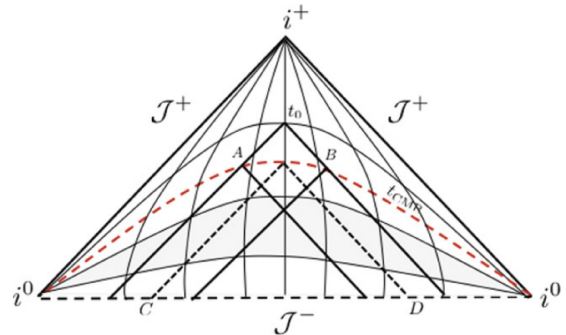


Figura 5.3: Diagramma di Penrose dello spazio-tempo di FRW con $k = 0$ con una fase inflazionaria intermedia (regione ombreggiata) tratto da [7].

t_{CMB} il tempo del rilascio della *CMB* si ha l'ipersuperficie di ultimo *scattering*. Dalla Figura osserviamo che il cono luce del passato per un osservatore O in t_0 interseca l'ipersuperficie a t_{CMB} in A e B , quindi AB è l'orizzonte visivo di O . Il cono luce del passato per O al tempo t_{CMB} interseca \mathcal{J}^- in C e D , quindi CD è l'orizzonte delle particelle primordiale di O . Perciò vediamo graficamente che l'inflazione mantiene l'orizzonte visivo di O inalterato, mentre espande l'orizzonte delle particelle primordiale cosicché i coni luce del passato di A e B abbiano sufficiente tempo per intersecarsi ed evitare il problema dell'orizzonte.

Capitolo 6

Conclusioni

Abbiamo quindi visto che la conoscenza dell'Universo che potremo mai ottenere è inevitabilmente limitata sia nello spazio che nel tempo dal fatto che l'età dell'Universo e la velocità della luce sono quantità finite. Sapendo che tutti gli eventi che osserviamo sono quelli la cui linea di universo interseca il nostro cono luce del passato, questo comporta l'esistenza dell'orizzonte delle particelle e dell'orizzonte degli eventi. Essi delimitano rispettivamente gli eventi da cui possiamo venire influenzati in un dato tempo cosmico e che possiamo a nostra volta influenzare in tutta la nostra storia cosmica e sono gli eventi causalmente connessi a noi. Grazie ai diagrammi di Penrose, abbiamo visto che l'esistenza stessa di tali orizzonti cosmologici è legata direttamente al fatto che l'infinito luce passato e/o futuro è rappresentato da ipersuperfici di tipo spazio, a patto di considerare solo famiglie di osservatori fondamentali. Vi è inoltre un limite fisico del nostro universo osservabile, detto orizzonte visivo, legato al cammino libero che possono percorrere i messaggeri scelti (radiazione elettromagnetica, neutrini, gravitoni, etc.). A diversi messaggeri corrispondono diversi tempi di disaccoppiamento dal plasma primordiale perciò essi ci permettono di conoscere la storia dell'Universo fino a tempi cosmici diversi. Tuttavia, nell'intento di "avvicinarsi" sempre più alla comprensione di quanto avvenuto nell'Universo al tempo zero, non bisogna dimenticare che la nostra teoria stessa della gravità ha un limite di validità oltre il quale urge la necessità di formulare una nuova teoria della gravità quantistica che sia in grado di conciliare la Relatività Generale con la Meccanica Quantistica.

Abbiamo altresì affrontato il complesso e articolato tema dell'espansione dell'Universo e le sue conseguenze nei suoi aspetti principali, studiando quelli che storicamente furono i problemi del modello cosmologico standard che portarono a modificare il modello dell'Universo introducendo una fase inflazionaria. In particolare, ricordiamo che l'accelerazione del fattore di scala ha permesso di risolvere il problema dell'orizzonte spiegando le condizioni di omogeneità e isotropia della radiazione cosmica di fondo e, inoltre, l'inflazione ha fornito un brillante meccanismo per la formazione delle strutture su larga scala (cfr. [3]).

Per trattare adeguatamente l'espansione dell'Universo e spiegare i dati sperimentali, abbiamo visto come interpretare correttamente i diagrammi spazio-tempo chiarendo alcuni dei comuni equivoci nei quali ci si può imbattere trattando tale fenomeno. E.g., nonostante la radicata credenza che non si possa oltrepassare la velocità della luce (come prevederebbe la Relatività Speciale), abbiamo visto che non vi è alcuna contraddizione nell'esistenza di oggetti superluminali, dato che al loro moto attraverso lo spazio bisogna sommare il moto dello spazio stesso in espansione. Pur ammettendo l'esistenza di tali oggetti, una delle conseguenze più difficili da accettare è indubbiamente il fatto che li possiamo anche osservare. A tale scopo, si è reso necessario comprendere il significato fisico della sfera di Hubble che delimita ciò che possiamo effettivamente

vedere entro un tempo di espansione t_H , separando gli oggetti subluminali al suo interno dagli oggetti che recedono con velocità superluminali. Dal fatto che l'evoluzione della sfera di Hubble dipende dalla particolare fase dell'universo, abbiamo quindi compreso come possiamo osservare i fotoni emessi da oggetti superluminali: se la sfera si espande con velocità superiore alla velocità di recessione di tali fotoni, questi ultimi possono venire inglobati dalla sfera di Hubble e raggiungerci. Questo non contraddice in alcun modo la Relatività Speciale dato che tutti gli osservatori continuano a osservare localmente oggetti con $v < c$ e fotoni con velocità pari a c .

Bibliografia

- [1] V. Barone, *Relatività. Principi e applicazioni*. Programma di mat. fisica elettronica, Bollati Boringhieri, 2004.
- [2] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [3] D. Baumann, “Cosmology (lecture notes).”
- [4] J. Ehlers, “Contributions to the relativistic mechanics of continuous media,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 25, no. 10, pp. 1225–1266, 1993.
- [5] G. F. R. Ellis, “Republication of: Relativistic cosmology,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 41, no. 10, pp. 581–660, 2009.
- [6] T. M. Davis and C. H. Lineweaver, “Expanding confusion: Common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe,” *Publications of the Astronomical Society of Australia*, vol. 21, no. 1, p. 97–109, 2004.
- [7] G. F. Ellis and J.-P. Uzan, “Causal structures in inflation,” *Comptes Rendus Physique*, vol. 16, no. 10, pp. 928–947, 2015.
- [8] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1973.
- [9] D. J. Fixsen, “THE TEMPERATURE OF THE COSMIC MICROWAVE BACKGROUND,” *The Astrophysical Journal*, vol. 707, pp. 916–920, nov 2009.
- [10] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, 2003.
- [11] J.-P. Uzan, “Inflation in the standard cosmological model,” *Comptes Rendus Physique*, vol. 16, no. 10, pp. 875–890, 2015.
- [12] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, and N. Turok, “Ekpyrotic universe: Colliding branes and the origin of the hot big bang,” *Phys. Rev. D*, vol. 64, p. 123522, Nov 2001.