

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE STATISTICHE

Corso di Laurea:

STATISTICA E TECNOLOGIE INFORMATICHE



**VALUTAZIONE DI UNA CARTA DI CONTROLLO
CSEWMA PER VARIAZIONI CASUALI**

**VALUATION OF A CSEWMA CONTROL CHART
SUBJECT TO RANDOM SHIFT SIZES**

Relatore: Chiar.mo Prof. Guido Masarotto

Laureando: Nadia Fusina

Matricola: 553373 - STI

ANNO ACCADEMICO 2008-09

A tutti coloro che
mi hanno sostenuto

Indice

Introduzione	1
1 Carte per il controllo della qualità	3
1.1 Carta di controllo Shewhart	5
1.2 Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)	7
1.3 Carta di controllo combinata Shewhart-EWMA (CSEWMA)	9
2 CSEWMA e shift di ampiezza casuale	11
2.1 Introduzione	11
2.2 Assunzioni per la carta CSEWMA	12
2.3 Perdita totale attesa ed efficienza della carta	13
2.4 Calcolo dei parametri	15
2.4.1 Average Run Length (ARL)	15
2.4.2 Valori ottimi per i parametri λ e h di una carta EWMA	15
2.4.3 Valori ottimi per i parametri λ , h e k di una carta CSEWMA	16
3 Elaborazioni e risultati	19
3.1 Ambiente di lavoro	19
3.2 λ e h ottimi per la carta EWMA	20
3.3 λ , h e k ottimi per la carta CSEWMA	22
3.4 Funzione totale di perdita per le carte EWMA e CSEWMA .	24
3.5 Funzione di perdita percentuale	26

4	Discussione e conclusioni	29
4.1	Discussione dei risultati ottenuti	29
4.2	Conclusioni	32
A	Sorgente delle funzioni R utilizzate	33
A.1	csewma.crit	33
A.2	ewma.ottima	34
A.3	csewma.crit2	35
A.4	csewma.ottima	36
A.5	obbiettivo	37
	Bibliografia	39

Elenco delle figure

1.1	Esempio di una carta di controllo Shewhart	6
1.2	Disegno di una carta di controllo EWMA	8
4.1	Funzione di perdita percentuale per $\mu = 0$ e $\mu = 3$	31

Elenco delle tabelle

3.1	Configurazione del pc usato per le elaborazioni	19
3.2	Valori ottimi calcolati per il parametro λ della carta EWMA	20
3.3	Valori ottimi per il parametro h della carta EWMA	21
3.4	Valori ottimali per il parametro λ della carta CSEWMA . . .	22
3.5	Valori ottimi calcolati per il parametro h della carta CSEWMA	23
3.6	Valori ottimi per il parametro k della carta CSEWMA . . .	23
3.7	Funzione totale di perdita della carta EWMA	24
3.8	Funzione totale di perdita calcolata per la carta CSEWMA .	25
3.9	Funzione di perdita percentuale	27

Introduzione

Realizzare un prodotto di qualità significa soddisfare le esigenze e le aspettative del mercato e dei clienti, consumatori finali o altre aziende.

La norma ISO 9001 del 2000, che ha legato il concetto di processo a quello di miglioramento continuo, ha portato le aziende ad attivare studi e controlli dei propri processi per assicurare non più soltanto il mantenimento di determinati livelli di qualità, ma anche il loro miglioramento continuo.

Per applicare la suddetta norma, le aziende si sono affidate a strumenti statistici, come le carte per il controllo dei processi.

Tra le varie tipologie a disposizione, le carte di tipo EWMA hanno avuto una diffusione piuttosto ampia, grazie alla loro semplicità di interpretazione, alla velocità di implementazione e alla robustezza dimostrate.

Per rendere ancora più efficaci queste carte nel rilevare le anomalie dei processi, Lucas e Saccucci [5] hanno pensato di combinare una carta Shewhart con una carta EWMA (CSEWMA), in modo da unire i pregi delle due carte e limitarne i difetti.

L'oggetto di studio di questa tesi è riprendere la proposta di Chen e Chen [2] di studiare shift casuali applicati alle carte di controllo EWMA e applicarla ad una carta di tipo combinato Shewhart-EWMA, con lo scopo di provare un eventuale miglioramento delle prestazioni di questa carta rispetto a quella applicata singolarmente.

Capitolo 1

Carte per il controllo della qualità

La carta di controllo è uno strumento statistico che permette di mantenere sotto controllo le varie caratteristiche di un processo stocastico, nonché di individuare distorsioni naturali o sistematiche nel suo andamento.

Poichè la variabilità naturale, ovvero l'insieme di piccole cause inevitabili ed incontrollabili, è impossibile da eliminare, l'obiettivo della carta di controllo è quello di individuare nel processo della variabilità sistematica, risultato dell'azione di fattori ben definiti, sui quali si ha un certo grado di controllo, e di eliminarla.

Quando in un processo è presente la sola variabilità naturale, i dati del processo seguono una sola distribuzione di probabilità avente caratteristiche statistiche (media, varianza, ecc.) ben definite; in tale caso si dice che il processo è *sotto controllo* (o *in controllo*).

Se invece le variazioni nelle osservazioni non sono compatibili con un comportamento dovuto alle sole cause accidentali, si deve concludere che una o più cause sistematiche sono presenti e quindi che il processo è *fuori controllo*.

Lo strumento statistico che permette di accertare lo stato di un processo e

di valutarne la qualità, è la *carta di controllo*.

Poiché esistono varie tipologie di carte, per valutare la bontà di quella applicata al processo da monitorare, si deve tener conto di due requisiti:

- segnalazione quanto più rara possibile di un falso allarme;
- segnalazione tempestiva di un effettivo fuori controllo del processo.

Infatti, quanto prima una carta riesce a segnalare un'anomalia nel processo che non risulti essere poi un falso allarme, tanto più essa è efficace e adatta al processo che si deve monitorare.

Per stimare la rapidità di segnalazione delle anomalie e il numero di falsi allarmi, si utilizzano:

- *run length*, statistica che enumera i campioni da estrarre da un processo per avere un segnale d'allarme;
- *average run length (ARL)*, valore atteso della statistica *run length*, ovvero il numero medio di prove che sono necessarie perché la carta segnali un predefinito stato di fuori controllo.

Per poter rilevare il prima possibile un'anomalia nel processo, sarebbe utile che l'*average run length* assumesse un valore molto grande quando il processo è sotto controllo e uno decisamente più piccolo non appena avvenga un cambiamento, in modo da individuare tempestivamente il fuori controllo.

Nella realtà, però, i cambiamenti del valore dell'*ARL* sono spesso minimi, oppure il valore assunto inizialmente è già piccolo e quindi non molto diverso da quello di fuori controllo, quindi la carta segnalerà le anomalie con un certo ritardo, oppure non le segnalerà affatto.

Per correggere questa imprecisione sono state costruite diverse tipologie di carte di controllo che risultano essere efficienti per variazioni di processo rispettivamente grandi o piccole.

1.1 Carta di controllo Shewhart

La prima tipologia di carta di controllo ad essere stata inventata è la carta *Shewhart* (dal nome del suo scopritore).

Per costruire questo tipo di carta bisogna innanzitutto individuare e monitorare, con un campionamento a frequenza prestabilita, la caratteristica d'interesse del processo.

Con i dati raccolti, singolarmente od organizzati in gruppi, si costruiscono la statistica di controllo w :

$$w_t = g(\underline{x}_t)$$

con relativa media (μ_w) e varianza (σ_w^2), e i limiti di controllo *Lower Control Limit* (LCL) e *Upper Control Limit* (UCL):

$$ULC = \mu_w + k\sigma_w$$

$$LC = \mu_w$$

$$LCL = \mu_w - k\sigma_w$$

Esistono due approcci, in letteratura, per il calcolo di questi limiti.

Il primo, poco usato, presuppone di conoscere media e varianza del processo, che vengono direttamente sostituiti alle formule per il calcolo dei limiti.

Il secondo metodo invece è largamente più diffuso e si compone di due fasi:

1. monitoraggio iniziale del processo per raccogliere un numero n adeguato di osservazioni, tipicamente un centinaio è sufficiente se il tipo di processo lo consente, e con questi dati si stimano μ_w e σ_w ;
2. calcolo dei limiti di controllo per la carta Shewhart, sostituendo a μ_w e σ_w le loro stime.

In questo modo, non appena un valore osservato si posiziona oltre i limiti di controllo, possiamo dedurre che il processo è fuori controllo (salvo falsi allarmi).

La figura 1.1 mostra un esempio di questo disegno, dove *CL*, *central line*, indica la media campionaria calcolata dai dati, e *UCL* e *LCL* sono i limiti superiore e inferiore della carta.

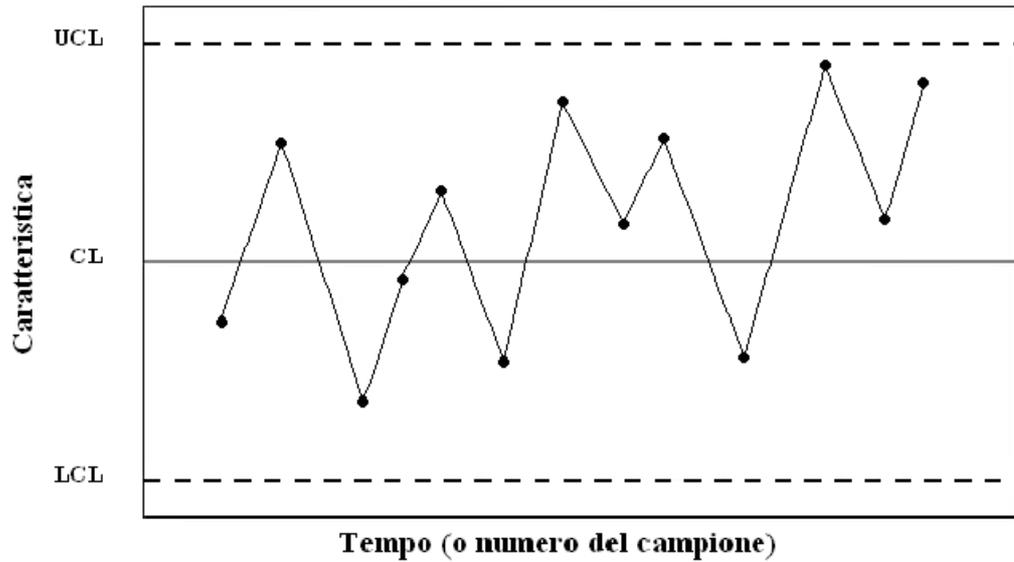


Figura 1.1: Esempio di una carta di controllo Shewhart

Poichè la statistica di controllo w si basa sull'ultimo campione estratto, questo tipo di carta viene definita “senza memoria” ed è adatta a segnalare cambiamenti grandi e repentini nel processo; nel caso di cambiamenti piccoli e gradualmente, invece, risulta poco efficace.

1.2 Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)

Per poter notare eventuali cambiamenti nella media del processo e, in modo specifico, piccoli salti di livello, per i quali le carte Shewhart sono poco affidabili, vengono creati altri tipi di carte di controllo definite “con memoria”.

Queste carte usano l’informazione proveniente dai campioni precedenti, in aggiunta a quella proveniente da quello corrente; la carta *EWMA*, ideata da Roberts nel 1959, ne è un esempio.

Essa si basa sulla statistica

$$z_t = (1 - \lambda)z_{t-1} + \lambda w_t \quad \text{con } \lambda \in (0, 1) \quad \text{e} \quad z_0 = \mu_w$$

che consiste in una media mobile ponderata delle osservazioni passate, dove viene assegnato a ciascun valore un peso, secondo una progressione geometrica decrescente (da cui il nome della carta).

w_t indica il processo in studio, con t che enumera i vari istanti di tempo, λ è una *costante di lisciamento* che determina il peso di ogni nuova osservazione nel calcolo di w_t , e il valore iniziale del processo, z_0 , coincide solitamente con μ_w , il livello medio fissato.

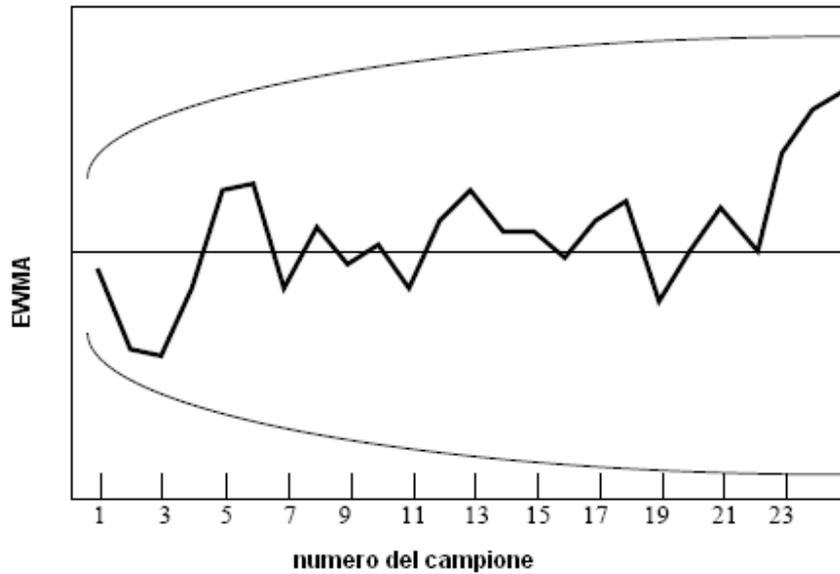


Figura 1.2: Disegno di una carta di controllo EWMA

Come si vede dal grafico 1.2, la carta è caratterizzata da una linea centrale, il valore medio della statistica EWMA, e da due limiti, superiore e inferiore:

$$ULC = \mu_w + h\sigma_w \sqrt{\lambda/(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]$$

$$LC = \mu_w$$

$$LCL = \mu_w - h\sigma_w \sqrt{\lambda/(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]$$

che convergono, per $i \rightarrow \infty$, rispettivamente a:

$$ULC = \mu_w + h\sigma_w \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

$$LCL = \mu_w - h\sigma_w \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

La scelta dei parametri λ e h è molto importante: si usano valori piccoli di λ se le variazioni della media che si vogliono individuare sono piccole, λ grandi per scostamenti elevati dalla media.

Solitamente, si fissa h ad un valore sufficientemente grande, in modo tale da evitare che la carta segnali un numero eccessivo di falsi allarmi.

In proposito, si osserva che h dipende dall'altro parametro: se λ è grande,

1.3. CARTA DI CONTROLLO COMBINATA SHEWHART-EWMA (CSEWMA)9

scegliamo un valore grande anche per h , viceversa, se λ è piccolo, optiamo per h piccolo.

Sono stati effettuati numerosi studi in proposito, Crowder [3] prima e Lucas e Saccucci [5] poi, hanno fornito delle tabelle dalle quali si ricavano valori di ARL dati i due parametri.

Poichè la carta EWMA è efficiente nel rilevare scostamenti piccoli dalla media, ma non reagisce velocemente come la carta Shewhart per i salti di livello elevato, può risultare utile combinare l'utilizzo delle due carte.

1.3 Carta di controllo combinata Shewhart-EWMA (CSEWMA)

Poichè è impossibile determinare a priori l'ampiezza degli scostamenti dalla media di un processo che si sta monitorando, l'utilizzo congiunto di una carta EWMA con una carta Shewhart permette di ottenere una protezione combinata per cambiamenti di dimensione sia grandi che piccoli [5].

Questo tipo di carta, studiata da Capizzi e Masarotto [1], segnala un allarme se $|w_t - \mu_w| > k\sigma_w$ o se $|z_t - \mu_w| \leq h\sigma_w\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$, dove

$$z_t = (1 - \lambda)z_{t-1} + \lambda w_t \quad \text{con} \quad \lambda \in (0, 1) \quad \text{e} \quad z_0 = \mu_w$$

è la statistica di controllo della carta EWMA e le costanti λ , h e k sono scelte per ottenere una performance adatta della run length.

Il processo controllato da questa carta combinata si definisce *sotto controllo* se l'average run length del momento iniziale, l' ARL_0 , è uguale all'ARL del processo calcolato quando si suppone che lo scostamento dalla media avvenga all'inizio del monitoraggio; viceversa, il processo è *fuori controllo*.

Per costruire questa tipologia di carta è necessario innanzitutto scegliere una combinazione adeguata dei parametri λ , h e k , per i valori di μ e σ del processo, in modo che l'ARL in controllo sia grande e diventi piccolo

quando il processo è fuori controllo.

In proposito, Capizzi e Masarotto [1] hanno costruito una tabella per vari valori dei parametri k , h e λ , per valutare le combinazioni che danno maggior efficienza alla carta, e sono giunti alla conclusione che, ad esempio, i valori $\lambda = 0.077$, $k = 3.201$ e $h = 2.863$ danno luogo ad una protezione soddisfacente contro variazioni sia grandi che piccole di un processo, in base alle assunzioni fatte.

Capitolo 2

CSEWMA e shift di ampiezza casuale

2.1 Introduzione

Le carte di controllo sono strumenti importanti per rilevare diverse entità di anomalie in un processo; in letteratura, esse vengono disegnate, solitamente, ponendo varie assunzioni, che si rifanno a condizioni ideali, presenti di rado nella realtà.

Chen e Chen [2], per primi, hanno proposto un nuovo tipo di misurazione del rendimento delle carte EWMA e CUSUM, per prendere in considerazione scostamenti dalla media del processo di dimensione variabile e di valutarne l'effetto sulla qualità del prodotto finale.

Il loro approccio consiste nel considerare le variazioni casuali dalla media, distribuite come una variabile casuale normale con media pari a μ e varianza σ , ed utilizzare una funzione di perdita di tipo quadratico, per dimostrare l'inadeguatezza di fissare a priori la dimensione dello scostamento.

L'obiettivo di questa tesi è quello di rifare quanto suggerito da Chen e Chen [2], espandendo i loro calcoli ad una carta di controllo combinata Shewhart-EWMA, e di valutare un eventuale miglioramento dei risultati.

2.2 Assunzioni per la carta CSEWMA

Sia X_i la i -esima osservazione del processo che stiamo monitorando.

Le X_i , con $i = 1, 2, 3, \dots$, sono osservazioni indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.) di una distribuzione normale di media μ_x e deviazione standard pari a σ_x , che, senza perdita di generalità, possiamo assumere rispettivamente pari a 0 e a 1.

Quando il processo è sotto controllo, la media del processo, μ_x , e la media della statistica Z_i , μ_z , coincidono e sono pari a T .

Appena però accade un cambiamento, la media si sposta dal valore obiettivo T di una certa quantità casuale S , ovvero

$$\mu_x = T + S$$

con S distribuito normalmente con media μ_s e varianza σ_s^2 , e con funzione di densità indicata da $g(s)$.

Infine, si assuma che la carta combinata abbia l' $ARL_0 = 500$ quando il processo è sotto controllo, come supposto anche da Chen e Chen [2], per poter fare agevolmente un confronto tra i risultati ottenuti.

Riassumendo, le assunzioni per costruire questa carta sono tre:

1. $ARL_0 = 500$;
2. $X_i \sim N(\mu_x, 1 | \mu_x = 0 + S)$;
3. $S \sim N(\mu_s, \sigma_s^2)$.

2.3 Perdita totale attesa ed efficienza della carta

Ogni qualvolta si utilizza una carta di controllo, ci si imbatte in un processo con caratteristiche diverse, soprattutto considerando il tipo di variazioni dalla media che la carta andrà a segnalare.

Dal momento che, anomalie di dimensione e tipo diverse causano differenti perdite di qualità nei prodotti, è opportuno valutare la relazione esistente tra la dimensione degli scostamenti dalla media del processo e l'impatto qualitativo sul prodotto finale.

In questa tesi, per restare in accordo con l'articolo di Chen e Chen [2], utilizzeremo la medesima funzione di perdita di tipo quadratico (Taguchi):

$$QL(X_i) = w(X_i - T)^2 \quad (2.1)$$

che permette di calcolare l'entità della perdita che si verifica ogni volta che decidiamo di produrre un lotto di prodotto.

Da questa formula (2.1), possiamo costruire la funzione di perdita di qualità attesa:

$$E(QL_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} QL(x) f(x|\mu_x = T + s, \sigma_x) dx \quad (2.2)$$

con s indicante il salto che ha subito la media del processo ed $f(\cdot)$ funzione di densità delle osservazioni.

Questa funzione (2.2) permette anche di valutare l'efficienza della carta di controllo, in quanto, tanto minore è la perdita di qualità dovuta ad un periodo di fuori controllo del processo, tanto maggiore è l'efficienza della carta nell'individuare rapidamente lo shift.

Definendo $RL_{l|s}$ la *run length* della carta di controllo per individuare un'anomalia, dati σ_x e l'ampiezza s dello shift, la perdita di qualità del processo durante un periodo di fuori controllo si può calcolare con:

$$QL_{l|s} = \sum_{i=1}^{RL_{l|s}} QL(X_i | \mu_x = T + s, \sigma_x), \quad (2.3)$$

che rappresenta una somma casuale di variabili casuali QL_s .

Grazie all'equazione di Wald, si può calcolare il valore atteso della 2.3:

$$\begin{aligned} E(QL_{l|s}) &= E(RL_{l|s})E[QL(X_i | \mu_x = T + s, \sigma_x)] \\ &= ARL_{l|s}E(QL_s), \end{aligned} \quad (2.4)$$

e da essa (2.4) possiamo ricavare la perdita totale attesa:

$$\begin{aligned} E(QL_l) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(QL_{l|s})g(s) \, ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} ARL_{l|s}E(QL_s)g(s) \, ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Questa equazione (2.5) è molto plausibile perchè, se il target della produzione è 0, ma la vera media del processo è s , allora la perdita che si verifica ogni volta che si produce un lotto è ws^2 .

Inoltre, lo schema impiega $ARL_{l|s}$ istanti di tempo, o campioni, per segnalare che la vera media del processo non è 0, quindi la perdita totale è data dalla perdita associata ad ogni lotto che viene prodotto con il processo fuori controllo, moltiplicata per il numero di lotti prodotti prima che esso venga segnalato.

2.4 Calcolo dei parametri

2.4.1 Average Run Length (ARL)

Per poter stimare la funzione totale di perdita, bisogna, innanzitutto, calcolare l'ARL per la carta combinata Shewhart-EWMA.

In proposito, Capizzi e Masarotto [1], per il loro articolo, hanno costruito un'apposita funzione in linguaggio R, *arlcsewma*, che, ricevuti in input i valori di λ , h , k , μ e σ , restituisce il valore stimato per l'ARL della carta combinata.

La funzione, nella sua definizione, include già un valore di default per k , μ e σ ,

$$k = Inf, \quad \mu = 0 \quad e \quad \sigma = 1,$$

perchè, lasciando invariati questi valori e passando alla funzione solo λ e h , si ottengono gli ARL per la carta EWMA.

Questa accortezza permette il confronto tra i valori degli ARL ottenuti, con quelli calcolati, ad esempio, da Lucas e Saccucci [5] per la suddetta carta, ed avere la certezza che, ottenendo i medesimi valori, la funzione scritta sia corretta.

2.4.2 Valori ottimi per i parametri λ e h di una carta EWMA

La necessità di calcolare i valori ottimi per i parametri della carta EWMA nasce dal proposito di voler confrontare la funzione totale di perdita della carta EWMA con quella della carta CSEWMA e valutare se effettivamente la carta combinata sia migliore.

Per calcolare praticamente i valori di λ e h , si può utilizzare la funzione

ewma.ottima [A.2], scritta appositamente in linguaggio R per questo scopo.

Essa richiede in input il valore dell'*ARL* in controllo, di μ e di σ , e restituisce λ e h ottimi per la combinazione dei tre parametri passati.

Per poter eseguire il calcolo, questa funzione richiama a sua volta un'altra funzione, *csewma.crit* [A.1], che calcola h , per una carta CSEWMA di parametri λ e k , in modo che l'*ARL* in controllo sia esattamente

$ARL_0 = 500$, ovvero quello richiesto dalle assunzioni [2.2] e dall'articolo di Chen e Chen [2].

2.4.3 Valori ottimi per i parametri λ , h e k di una carta CSEWMA

Gli ultimi parametri necessari, per poter calcolare la funzione totale di perdita per la carta EWMA e per la carta CSEWMA, sono i valori ottimi per la carta CSEWMA, λ , h e k , per diverse combinazioni di μ e σ .

Anche in questo caso, si può usare una funzione in linguaggio R scritta espressamente per questo scopo: *csewma.ottima* [A.4].

Questa funzione richiede gli stessi parametri di input della funzione *ewma.ottima*, per restituire i valori ottimi dei parametri λ , h e k , ma richiama al suo interno un'altra funzione particolare, *csewma.crit2* [A.3], che considera la parte EWMA e Shewhart della carta combinata come separate.

Definiamo:

- *RLSH*, run length dello schema Shewhart, ovvero il tempo che impiegherebbe la carta Shewhart a chiamare un allarme se fosse usata singolarmente;
- *RLEW*, run length per lo schema EWMA, se fosse usato da solo.

La funzione calcola, quindi, il minimo tra le due run length e restituisce un vettore (h, k) per cui l'*ARL* in controllo sia effettivamente quello richiesto, in modo da evitare che una delle due singole carte non segnali falsi allarmi con più frequenza rispetto all'altra.

Capitolo 3

Elaborazioni e risultati

3.1 Ambiente di lavoro

La scrittura e l'esecuzione delle funzioni citate nei capitoli [2.4] e [3] sono state fatte su un calcolatore con le caratteristiche riportate in tabella [3.1]. Il calcolo del valore di ciascun parametro, in seguito riportato, è durato in media 20 minuti.

Tabella 3.1: Configurazione del pc usato per le elaborazioni

Processore:	Intel Centrino 1.86GHz
RAM:	1.00 Gb
Sistema Operativo:	Ubuntu 8.04 LTS "The Hardy Heron" + Windows XP Home Edition SP3
Programmi:	R 2.7.1

3.2 λ e h ottimi per la carta EWMA

Dopo aver stabilito un vettore di elementi da elaborare rispettivamente per μ e per σ ,

$$\mu = 0, 0.5, 1, 3$$

$$\sigma = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4$$

applichiamo la funzione *ewma.optima* ad ogni combinazione dei parametri.

Il risultato dell'elaborazione è un insieme di valori ottimi per λ e per h (vedi tabelle [3.2] e [3.3]).

Tabella 3.2: Valori ottimi calcolati per il parametro λ della carta EWMA

	μ			
σ	0	0.5	1	3
0.5	0.01203358	0.01806546	0.05546232	0.6317356
1	0.02281907	0.02611526	0.03918463	0.4849075
1.5	0.03710280	0.03996776	0.04972272	0.3194312
2	0.05540959	0.05791292	0.06610687	0.2420756
2.5	0.07919463	0.08230210	0.09250553	0.2142047
3	0.11451450	0.11751300	0.12635770	0.2048548
3.5	0.14608240	0.14796840	0.15348900	0.2031634
4	0.16847250	0.16948580	0.17287480	0.2048933

Tabella 3.3: Valori ottimi per il parametro h della carta EWMA

	μ			
σ	0	0.5	1	3
0.5	2.058047	2.235679	2.647995	3.082614
1	2.331415	2.384429	2.533369	3.069076
1.5	2.514265	2.540222	2.613257	3.030662
2	2.647698	2.661411	2.701287	2.993287
2.5	2.752812	2.763353	2.794410	2.973854
3	2.847387	2.853470	2.870161	2.966322
3.5	2.901791	2.904476	2.912041	2.964897
4	2.930597	2.931758	2.935562	2.966354

3.3 λ , h e k ottimi per la carta CSEWMA

Concluso il calcolo dei parametri ottimali per la carta EWMA, si può iniziare il calcolo dei parametri λ , h e k ottimi per la carta CSEWMA.

Per poter confrontare i risultati delle due elaborazioni, anche per la funzione `csewma.ottima` definiamo gli stessi vettori μ e σ ,

$$\mu = 0, 0.5, 1, 3$$

$$\sigma = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4$$

ed eseguiamo la funzione per ogni coppia di valori.

L'elaborazione dei dati ha portato alla creazione di un insieme di valori ottimi per λ , h e k .

Tabella 3.4: Valori ottimali per il parametro λ della carta CSEWMA

	μ			
σ	0	0.5	1	3
0.5	0.01178265	0.01806209	0.05523473	0.42801190
1	0.02253892	0.02534160	0.03578678	0.27135050
1.5	0.03182020	0.03266947	0.03666927	0.09338230
2	0.03684928	0.03736102	0.03887054	0.05452051
2.5	0.04001809	0.04026319	0.04092192	0.04836513
3	0.04193971	0.04207668	0.04244813	0.04518945
3.5	0.04314449	0.04321318	0.04234900	0.04433008
4	0.04397565	0.04399709	0.04307278	0.04429683

Tabella 3.5: Valori ottimi calcolati per il parametro h della carta CSEWMA

	μ			
σ	0	0.5	1	3
0.5	2.059251	2.235774	2.647459	3.261091
1	2.328694	2.378162	2.516911	3.166108
1.5	2.481150	2.497083	2.549888	2.964737
2	2.561812	2.569587	2.592165	2.795303
2.5	2.611135	2.614962	2.625793	2.734261
3	2.642085	2.644208	2.650161	2.706541
3.5	2.661866	2.662990	2.661965	2.697345
4	2.675868	2.676561	2.674665	2.696899

Tabella 3.6: Valori ottimi per il parametro k della carta CSEWMA

	μ			
σ	0	0.5	1	3
0.5	4.056272	4.914111	4.578710	3.209577
1	4.388870	4.190152	3.937964	3.299104
1.5	3.857864	3.798055	3.714448	3.344387
2	3.660159	3.646165	3.608407	3.385638
2.5	3.575357	3.569419	3.552233	3.425996
3	3.528488	3.525596	3.517354	3.438072
3.5	3.501078	3.499590	3.486724	3.443975
4	3.482617	3.481411	3.470854	3.444368

3.4 Funzione totale di perdita per le carte EWMA e CSEWMA

Grazie all'esecuzione delle funzioni *ewma.ottima* e *csewma.ottima*, abbiamo ora a disposizione tutti i parametri per poter calcolare la perdita totale per le due carte di controllo.

Passando alla funzione *obbiettivo* [A.5] i parametri ottimi precedentemente calcolati per la carta EWMA, λ e h , oltre a μ e σ , otteniamo una tabella [3.7] che riporta, per ogni combinazione dei parametri, la funzione totale di perdita per la carta EWMA.

Procedendo nel medesimo modo, passiamo sempre alla funzione *obbiettivo* i parametri ottimali λ , h e k per la carta combinata Shewhart-EWMA, con i corrispondenti μ e σ , e calcoliamo nuovamente la funzione totale di perdita. Il risultato è mostrato in figura [3.8].

Tabella 3.7: Funzione totale di perdita della carta EWMA

	μ			
σ	0	0.5	1	3
0.5	115.70546	84.42646	40.55150	19.14259
1	74.67316	69.60117	57.27781	22.75503
1.5	60.66880	59.21905	55.24118	32.81457
2	54.45684	53.94843	52.49991	40.71331
2.5	51.64834	51.46626	50.91360	45.12013
3	50.33431	50.25746	50.02055	47.88389
3.5	49.81756	49.81141	49.79643	50.19840
4	50.19246	50.24579	50.41015	52.63448

3.4. FUNZIONE TOTALE DI PERDITA PER LE CARTE EWMA E CSEWMA25

Tabella 3.8: Funzione totale di perdita calcolata per la carta CSEWMA

	μ			
σ	0	0.5	1	3
0.5	116.03016	84.42841	40.54749	18.75466
1	74.62712	69.48513	56.87408	21.73402
1.5	59.83712	58.16729	53.55934	29.86499
2	51.97518	51.23865	49.14996	35.98173
2.5	47.34244	47.00155	46.02940	39.71304
3	44.84776	44.71499	44.34140	42.39588
3.5	43.97928	43.96827	43.94925	44.84483
4	44.42573	44.49064	44.69276	47.48726

3.5 Funzione di perdita percentuale

Già ad un primo sguardo, si coglie che i risultati riportati nei paragrafi precedenti sono positivi e confermano l'ipotesi di miglioramento dell'efficienza della carta di controllo combinata Shewhart-EWMA rispetto alla carta EWMA semplice.

Per sapere quanto vantaggio può avere un'azienda ad applicare la carta combinata per monitorare i propri processi, invece di utilizzare la carta EWMA singolarmente, costruiamo la funzione di perdita percentuale:

$$\text{Loss saving (\%)} = \frac{E'(QL_l) - E^*(QL_l)}{E'(QL_l)} 100\% \quad (3.1)$$

dove, $E'(QL_l)$ indica la funzione di perdita della carta EWMA e $E^*(QL_l)$ si riferisce alla funzione di perdita della carta CSEWMA.

Sostituendo alla formula i valori relativi alle funzioni di perdita delle due carte, differenziati per i diversi valori di μ e σ considerati, si ottiene questa tabella [3.9].

Tabella 3.9: Funzione di perdita percentuale

σ	μ			
	0	0.5	1	3
0.5	-0.28062284	-0.002304271	0.009900542	2.026516
1	0.06166309	0.166730493	0.704860709	4.486964
1.5	1.37085703	1.776050412	3.044537967	8.988616
2	4.55710863	5.022903505	6.380876922	11.621685
2.5	8.33696827	8.675034441	9.593110796	11.983751
3	10.90022124	11.028153750	11.353626695	11.461061
3.5	11.71933857	11.730541165	11.742179095	10.664823
4	11.48924484	11.453996695	11.341745537	9.779167

Capitolo 4

Discussione e conclusioni

4.1 Discussione dei risultati ottenuti

Come mostra la tabella [3.9], il guadagno percentuale che si ottiene utilizzando una carta di controllo combinata Shewhart-EWMA, al posto di una carta EWMA singola, è degno di nota.

Soprattutto per σ maggiori o uguali a 2, il miglioramento è consistente; questo significa che se, ad esempio, lo shift ha media 1 e deviazione standard 3σ , e si è controllato il processo con questa carta combinata, la perdita risulterà dell'11% in meno.

Dal punto di vista economico, questo è molto rilevante, specialmente se la ditta che decide di applicare questo metodo per il monitoraggio dei suoi processi è un'azienda di tipo farmaceutic, o metalmeccanico o qualsiasi altra fabbrica alla quale le materie prime incidono molto economicamente.

Dal punto di vista statistico, invece, questo miglioramento è tanto più importante se si ricordano le supposizioni fatte per costruire la carta.

La carta si basava sull'ipotesi che non si conoscesse la vera entità dello shift del processo, ma fosse noto che questo si distribuisse come una variabile casuale normale di media μ_s e deviazione standard σ_s .

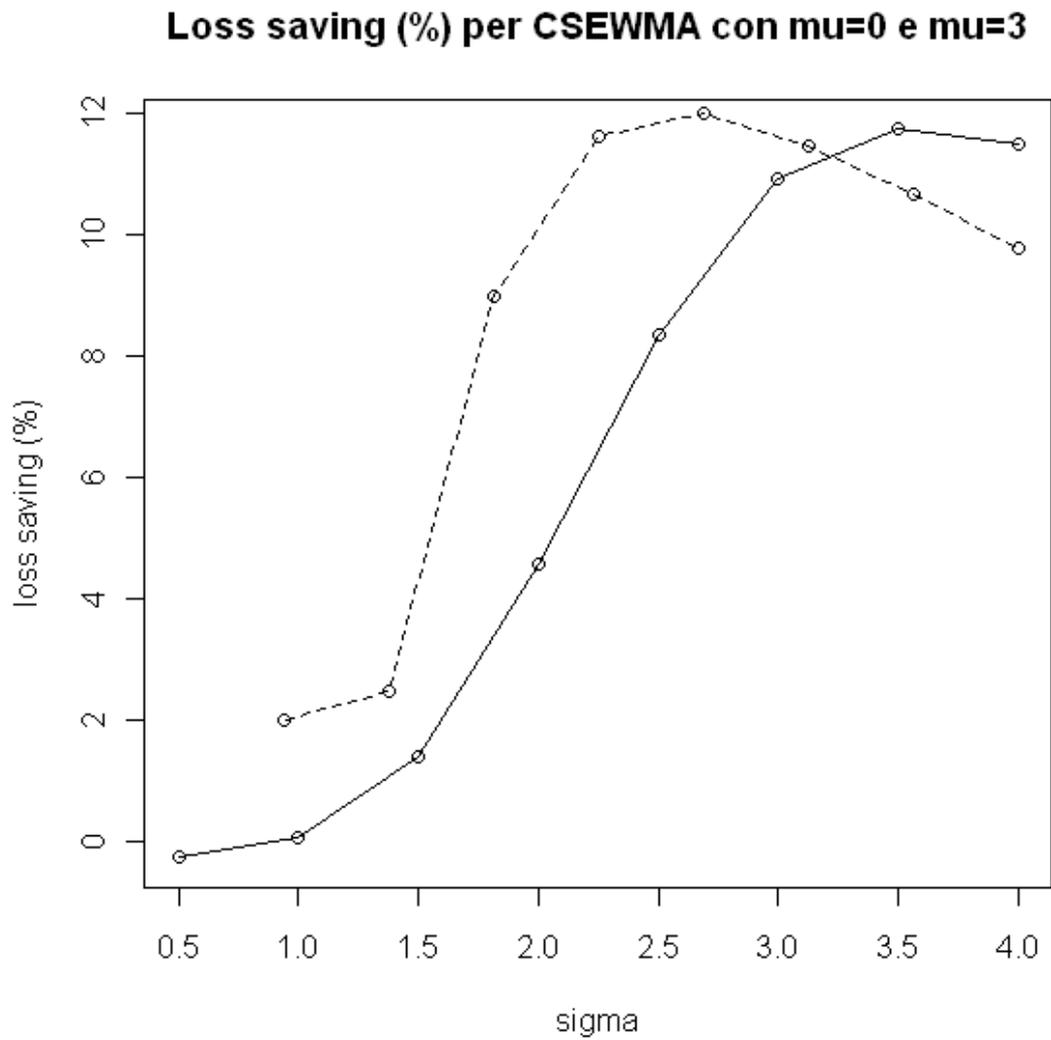
Il grafico [4.1] confronta la funzione di perdita percentuale per $\mu = 0$ (linea

continua) con quella per $\mu = 3$ (linea tratteggiata): le curve per i due valori di μ mostrano chiaramente che all'aumentare di σ , il valore della funzione di perdita percentuale aumenta in entrambi i casi.

Questo significa che non soltanto non ci serve conoscere l'entità dello shift, ma che nemmeno dobbiamo fare assunzioni sulla sua distribuzione.

Infatti, che la media del processo si discosti molto o poco dal target o che la sua varianza sia 3 o 3.5 volte σ , non è più un'informazione necessaria per poter applicare lo schema, perchè il guadagno che si ottiene applicandolo è uniforme, indipendentemente dall'anomalia che potrebbe affliggere il processo.

Inoltre, essendo le carte di controllo utilizzate non soltanto da statistici, ma anche e principalmente da persone con limitata conoscenza dell'argomento, il fatto di poter limitare il numero dei parametri da calcolare per costruire la carta è un vantaggio per aumentarne l'applicabilità e la diffusione su larga scala.

Figura 4.1: Funzione di perdita percentuale per $\mu = 0$ e $\mu = 3$

4.2 Conclusioni

L'implementazione della carta di controllo combinata Shewhart-EWMA con shift casuali, illustrata in questa tesi, può essere ancora migliorata e resa più efficiente, soprattutto se si considera il tempo medio di calcolo dei parametri ottimali, per costruire tabelle di riferimento.

Oltre a questo, si può ampliare il numero di valori di ogni tabella per i parametri della carta, λ , h e k , per avere dati più precisi e accurati sui miglioramenti apportati dall'applicazione di questa carta.

Nonostante ciò, i risultati positivi sono incoraggianti, tanto da meritare ulteriori approfondimenti, in modo da poter proporre un'alternativa valida agli strumenti statistici finora applicati al controllo della qualità di un processo stocastico.

Appendice A

Sorgente delle funzioni R utilizzate

Tutte le funzioni create e utilizzate in questa tesi si basano sulla funzione *arlcsewma* scritta in linguaggio R da Capizzi e Masarotto [1] per il loro articolo.

Combinandola con le altre funzioni sotto riportate, permette di ricostruire dati e risultati illustrati in questa tesi.

A.1 *csewma.crit*

```
csewma.crit <- function( arl0 , l , k ,  
                        inter = c(2*sqrt(.Machine$double.eps) , 5 ) ) {  
  uniroot( function(x) (arlcsewma( l , x , k ) - arl0 )  
          / arl0 , inter ,  
          tol = .Machine$double.eps^0.8 ) $root  
}
```

A.2 ewma.ottima

```
ewma.ottima <- function( arl0 , mu , sigma ) {  
  obj <- function( x ) {  
    h <- csewma.crit( arl0 , x , Inf )  
    u <- obbiettivo( x , h , Inf , mu , sigma )  
    cat( x , h , u , "\n" )  
    u  
  }  
  a <- optim( 0.1 , obj , method = "L" , lower = 0.001 ,  
            upper = 1 )  
  if ( a$convergence ) warning( "problem in optim" )  
  c( a$par , csewma.crit( arl0 , a$par , Inf ) )  
}
```

A.3 csewma.crit2

```
csewma.crit2 <- function( arl0 , R , l ,
                        inter = c(2*sqrt(.Machine$double.eps) , 5 ) ) {
  kfun <- function( h ) {
    arl.s <- max( 2 , R * arlcsewma( l , h ) )
    qnorm( 1 - 1 / (2 * arl.s) )
  }
  h <- uniroot( function( h ) (arlcsewma( l , h , kfun( h ) )
    - arl0 )/ arl0 , inter,
    tol = .Machine$double.eps^0.8 ) $root
  c( h , kfun( h ) )
}
```

A.4 csewma.ottima

```
csewma.ottima <- function( arl0 , mu , sigma ) {  
  obj <- function( x ) {  
    hk <- csewma.crit2( arl0 , x[2] , x[1] )  
    u <- obbiettivo( x[1] , hk[1] , hk[2] , mu , sigma )  
    cat( x , hk , u , "\n" )  
    u  
  }  
  a <- optim( c( 0.1 , 1 ) , obj , method = "L" ,  
            lower = c( 0.001 , 0.001 ) , upper = c( 1 , Inf ) )  
  if ( a$convergence ) warning( "problem in optim" )  
  c( a$par[1] , csewma.crit2( arl0 , a$par[2] , a$par[1] ) )  
}
```

A.5 obbiettivo

```
obbiettivo <- function( l , h , k , mu , sigma ) {  
  if ( sigma < sqrt(.Machine$double.eps) ) {  
    ( mu * mu + 1 ) * arlcsewma( l , h , k , mu )  
  } else {  
    f <- function( s ) {  
      ( s * s + 1 ) * sapply( s , function( x )  
        arlcsewma( l , h , k , x ) ) * dnorm( s , mu , sigma )  
    }  
    integrate( f , mu - 5 * sigma , mu + 5 * sigma ) $value  
  }  
}
```


Bibliografia

- [1] Capizzi, G. e Masarotto, G. (1998): “*Evaluation of the Run-Length Distribution for a Combined Shewhart-EWMA Control Chart*”, Working Paper Series, N. 21, Dicembre 2007, Dipartimento di Scienze Statistiche, Università di Padova.
- [2] Chen, A. e Chen, Y.K. (2007): “*Design of EWMA and CUSUM control charts subject to random shift sizes and quality impacts*”, IIE Transactions 39, 1127-1141
- [3] Crowder, S. (1987): “*A simple method for studying run-length distributions of Exponentially Weighted Moving Average charts*”, Technometrics, 29, 401-407
- [4] Montgomery, D.C. (1996): “*Introduction to Statistical Quality Control*”, terza edizione, McGraw-Hill
- [5] Lucas, J.M. e Saccucci, M.S. (1990): “*Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements*”, (con relative discussioni) Technometrics, 32, 1-29.
- [6] Wetherill, G. B. e Brown, D. W. (1991): “*Statistical Process Control, theory and practice*”, Chapman & Hall