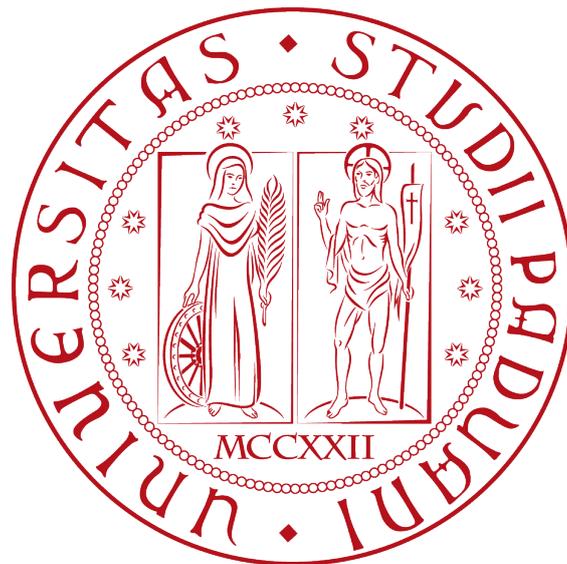


Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
“GALILEO GALILEI”

CORSO DI LAUREA IN ASTRONOMIA



Confronto tra le misure di masse
planetarie ottenute con tecniche differenti

LAUREANDA
Giulia Lovati
MATRICOLA
1096100

RELATORE
Giampaolo Piotto
CORRELATORE
Valerio Nascimbeni

ANNO ACCADEMICO 2016/2017

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Velocità radiali	2
1.2	Transiti	5
1.3	Transit Timing Variations	7
2	Selezione dei candidati per l'analisi	13
2.1	Catalogo utilizzato	13
2.2	Criteri di selezione dei candidati	14
2.2.1	Prima selezione	14
2.2.2	Seconda selezione	14
3	Analisi dei sistemi notevoli	17
3.1	Pianeti con massa misurata sia con le RV che con i TTV	17
3.1.1	K2-19	21
3.1.2	Kepler-18	22
3.1.3	Kepler-25	23
3.1.4	Kepler-37	25
3.1.5	Kepler-48	26
3.1.6	Kepler-56	26
3.1.7	Kepler-89	28
3.1.8	Kepler-289	29
3.1.9	WASP-47	30
3.2	Pianeti con massa misurata con una sola tecnica e con un metodo combinato	32
3.2.1	Kepler-9	32
3.2.2	Kepler-19	33
3.3	Sistemi di pianeti vicini alla risonanza con Flag TTV=0	34
4	Conclusioni	49
4.1	Sviluppi futuri	50

Elenco delle figure

1.1	Orbita kepleriana tridimensionale con i relativi parametri. Il piano di riferimento è tangente alla sfera celeste.	3
1.2	Esempi di curve della velocità radiale al variare di e e ω . Le ellissi in basso a sinistra mostrano come viene vista l'orbita, mentre la linea tratteggiata indica la velocità del sistema. Le stelle che presentano queste curve della velocità radiale sono rispettivamente HD 73256 ^[5] , HD 142022 ^[6] , e HD 4113 ^[7]	4
1.3	In alto vediamo una rappresentazione schematica di un transito; i numeri cerchiati indicano i contatti tra i bordi del pianeta con quelli della stella negli istanti di inizio e fine dell'eclissi primaria. In basso possiamo vedere la curva di luce risultante in funzione del tempo. L'immagine è tratta da Winn (2009) ^[8]	7
1.4	Variazione dell'istante del transito di KOI-872b. Grafico realizzato da Nesvorný et al. (2012) ^[9]	8
1.5	<i>Grafico in alto</i> : gli istanti intermedi dei transiti di un esopianeta con la retta che fitta i minimi quadrati. <i>Grafico in basso</i> : i residui del fit che forniscono il diagramma (O-C). Agol & Fabrycky 2017 ^[10]	9
3.1	Masse dei pianeti misurate con le diverse tecniche. Sull'asse delle ordinate è impostata una scala logaritmica. Le barre d'errore di due misure che visivamente sembrano ampie uguali, a seconda della posizione, possono quindi coprire intervalli di massa più o meno estesi.	18
3.2	Massa in funzione del raggio e del periodo dei pianeti extrasolari individuati con le RV (in rosso), con i TTV (in blu) o con un'analisi combinata di RV+TTV (in verde). La figura è stata presa dall'articolo di Mills e Mazeh (2017) ^[31]	20
3.3	Misure delle masse dei pianeti del sistema K2-19.	21
3.4	Misure delle masse dei pianeti del sistema Kepler-18.	22
3.5	Entrambi i grafici riportano le misure della massa dei pianeti del sistema Kepler-25. Nel grafico in alto sono riportati anche i limiti superiori alla massa dei due pianeti forniti da Steffen et al. 2012 ^[35]	24
3.6	Misure della massa di Kepler-37 d.	25

3.7	Misure della massa dei pianeti del sistema Kepler-48.	26
3.8	Misure della massa dei pianeti del sistema Kepler-56.	27
3.9	Misure della massa dei pianeti del sistema Kepler-89.	28
3.10	Misure della massa dei pianeti del sistema Kepler-289.	30
3.11	Entrambi i grafici riportano le misure della massa dei pianeti del sistema WASP-47, ma con diverse scale verticali per una migliore visualizzazione.	31
3.12	Misure delle masse dei pianeti del sistema Kepler-9.	33
3.13	Misure delle masse di Kepler-19.	34
3.14	Ampiezza del segnale TTV atteso su un pianeta nettuniano di periodo orbitale pari a 4.8878^d da parte di un perturbatore esterno posto a un dato periodo orbitale e di massa pari a 30, 10, 1 M_{\oplus} (linea blu, linea rossa e linea nera). La scala verticale è logaritmica; le principali risonanze orbitali sono indicate dalle linee verticali.	35
3.15	O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-20 b e Kepler-20 c. È stata selezionata solo una parte dei dati (fino al giorno 800) perché altrimenti le misure erano talmente numerose da apparire confuse. La seconda parte (dal giorno 800 in poi) non si differenzia in modo particolare dalla prima.	39
3.16	O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-20 c e Kepler-20 f. . .	39
3.17	O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-37 b e Kepler-37 c. . .	40
3.18	O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-62 b e Kepler-62 d. . .	40
3.19	O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-68 b e Kepler-68 c. . .	42
3.20	O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-92 b e Kepler-92 c. . .	42
3.21	Diagrammi degli O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-92 b (KOI-285.01, in alto) e Kepler-92 c. (KOI-285.02, in basso) realizzati da Xie (2014) ^[51]	43
3.22	O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-100 b e Kepler-100 c. . .	43
3.23	O-C in funzione del tempo per il pianeta Kepler-101 b	45
3.24	O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-102 c e Kepler-102 d. . .	45
3.25	O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-102 d e Kepler-102 e. . .	46
3.26	O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-102 e e Kepler-102 f. . .	46
3.27	O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-131 b e Kepler-131 c. . .	48
3.28	O-C in funzione del tempo per il pianeta Kepler-406 b	48
4.1	Campo visivo della missione Kepler in coordinate galattiche. In evidenza i sistemi interessanti per osservazioni e analisi future individuate nel corso del presente studio.	51

- 4.2 Regione ottimale di osservabilità CHEOPS (*in arancione*), campi di vista dei 32 telescopi “normali” della missione PLATO (*in azzurro*) e della missione Kepler (*in rosa*). I punti gialli rappresentano i sistemi interessanti per osservazioni future individuati in questo studio. . . . 53

Elenco delle tabelle

2.1	I 66 pianeti selezionati per la prima analisi.	15
2.2	I 42 pianeti selezionati per la seconda analisi.	16
3.1	Misure delle masse dei pianeti che possiedono una sola misura di massa per ogni tecnica.	19
3.2	Misure delle masse dei pianeti che possiedono più di una misura di massa planetaria con almeno una delle due tecniche.	19
3.3	Misure delle masse dei pianeti che possiedono una misura della massa calcolata o con le <i>RV</i> o con i <i>TTV</i> e un'altra misura utilizzando le due tecniche assieme. Dato che le due misure ottenute con il metodo combinato per Kepler-9 b e c non risultano compatibili tra di loro, abbiamo calcolato la differenza <i>RV-TTV</i> rispetto ad entrambe.	32
3.4	Sistemi di pianeti vicini alla risonanza con i relativi periodi orbitali, la risonanza a cui più si avvicinano, il vero rapporto tra i periodi e il possibile super-periodo.	37
4.1	Sistemi planetari interessanti per studi futuri con le relative coordinate equatoriali.	51

Abstract

Grazie alle tecniche delle velocità radiali (RV) e dei TTV (Transit Timing Variation) è possibile sia scoprire nuovi pianeti extrasolari che misurarne la massa. Le due tecniche però tendono a rivelare due popolazioni di pianeti di densità diversa: a parità di raggio, i pianeti caratterizzati con le RV risultano più massicci rispetto a quelli la cui massa è stata misurata con i TTV. Questo potrebbe essere dovuto ad un errore sistematico legato ad una delle due tecniche di analisi, oppure ad un effetto di selezione osservativa legato alla diversa sensibilità dei due metodi in funzione dei parametri planetari. Abbiamo verificato che nella maggior parte dei sistemi con masse misurate sia da RV che da TTV i valori pubblicati sono consistenti entro i margini di errore. Questo risultato suggerisce che l'effetto sia legato a un effetto di selezione. Per 3 dei 21 pianeti analizzati, Kepler-56 b, Kepler-89 d e Kepler 289 c, ci sono delle inconsistenze significative che richiederanno un'analisi approfondita successiva, anche con nuove osservazioni.

1 Introduzione

Un esopianeta è un pianeta che orbita attorno ad una qualsiasi stella diversa dal Sole. L'osservazione diretta di uno di questi, soprattutto alle lunghezze d'onda dell'ottico, è estremamente difficile dato che presentano una luminosità milioni di volte inferiore a quella della stella che li ospita; inoltre la separazione angolare dalla stella, che varia a seconda della distanza di osservazione, può essere al massimo di qualche arcosecondo. Per questo motivo è più semplice individuarli con metodi indiretti che siano ad esempio basati sulla perturbazione dinamica della stella ospite. Grazie ad uno di questi metodi, nel 1992, si riuscì ad individuare il primo sistema planetario orbitante attorno ad una pulsar. Si trattava di PSR B1257+12, una pulsar situata nella costellazione della Vergine. Gli astronomi Aleksander Wolszczan e Dale Frail osservarono un'insolita variazione del suo periodo di pulsazione, mentre normalmente da questo tipo di stelle si ricevono impulsi radio estremamente regolari. L'anomalia derivava dal fatto che la stella, oltre al moto di rotazione attorno al suo asse, presentava anche un moto di rivoluzione attorno al centro di massa del sistema che formava con i suoi pianeti e questo ne permise la rivelazione.

La prima individuazione non ambigua di un pianeta extrasolare, attorno ad una stella di sequenza principale, *51 Pegasi*, si ebbe nel 1995. Il pianeta, scoperto da Michel Mayor e Didier Queloz con la tecnica delle velocità radiali, presentava una massa paragonabile a quella di Giove e un semiasse maggiore dell'orbita di 0.05 U.A.. Questa scoperta, oltre ad avviare un nuovo settore della ricerca astronomica, evidenziò il fatto, confermato dalle successive rivelazioni di pianeti extrasolari, che molte delle caratteristiche estrapolate dalla configurazione del nostro Sistema Solare non erano applicabili agli altri sistemi. Infatti circa un terzo dei pianeti ad ora individuati mostra un'eccentricità dell'orbita piuttosto elevata, $e \geq 0.3^1$; molti presentano una massa comparabile a quella di Giove e distanza dalla propria stella inferiore a quella tra Mercurio ed il Sole (0.39 U.A.), come nel caso appena citato di *51 Pegasi B b*; altri si trovano a distanze molto grandi, maggiori di 100 U.A.; altri ancora hanno orbite molto inclinate rispetto al piano equatoriale della stella ospite o orbite retrograde.

È dunque interessante studiare la formazione e le caratteristiche di questi nuovi sistemi planetari, così da poter ampliare le nostre conoscenze oltre a quello che è il nostro Sistema Solare e comprendere come configurazioni tanto diverse siano possibili. Una delle proprietà fisiche di cui è importante avere una stima è la *massa* dei pianeti extrasolari. Questa, accompagnata da una misura del raggio, porta ad una stima della densità del pianeta, informazione molto utile se si vuole poi stimarne

¹Per confronto, si ricorda che il valore di eccentricità maggiore nel nostro Sistema Solare è pari a 0.2, ed è quello dell'orbita di Mercurio.

la composizione. Di seguito tratteremo tre delle principali tecniche che permettono di scoprire nuovi pianeti e, in alcuni casi, di calcolarne la massa.

1.1 Velocità radiali

Il moto di un pianeta attorno ad una stella provoca un movimento riflesso della stella attorno al baricentro del sistema. Questo produce una perturbazione periodica della velocità radiale, ossia la componente della velocità della stella lungo la linea di vista. Una misura istantanea di questa velocità è data dal piccolo e periodico spostamento Doppler delle righe dello spettro stellare. Lo spostamento Doppler misurato però include anche altri contributi come quelli dati dal movimento dell'osservatore attorno al baricentro del Sistema Solare, dalla rotazione della Terra, dalla rotazione della stella e da perturbazioni della sua atmosfera, oppure effetti relativistici come il redshift gravitazionale. Sarà quindi necessario rimuovere questi contributi ed effettuare il calcolo delle velocità radiali considerando un sistema di riferimento in quiete o che si muove con velocità rettilinea uniforme, come ad esempio quello del baricentro del Sistema Solare.

Le prime surveys di velocità radiali² vennero fatte prima di tutto per caratterizzare la funzione di massa di alcune nane brune cercandole come compagne binarie di stelle di sequenza principale con masse al di sotto di una massa solare. Fu così che si arrivò alla scoperta del pianeta orbitante attorno a *51 Pegasi* (Mayor & Queloz (1995)^[4]). Dopo di questo vennero scoperti molti altri pianeti con questa tecnica, dapprima attorno a stelle sempre di sequenza principale, poi la ricerca venne estesa anche ad altri tipi stellari. Ad oggi, con questa tecnica, ne sono stati scoperti all'incirca 650.

Entrambi i corpi di un sistema stella-pianeta si muovono lungo una traiettoria ellittica avente uno dei due fuochi coincidente con il centro di massa. L'ellisse si può descrivere in coordinate polari:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad (1.1.1)$$

Oppure in coordinate cartesiane:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.1.2)$$

dove a è il semiasse maggiore, b il semiasse minore, e l'eccentricità:

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (1.1.3)$$

²Come ad esempio quelle di Campbell et al. (1988)^[1], Marcy & Moore (1989)^[2] e Marcy & Benitz (1989)^[3]

Il semiasse maggiore a e l'eccentricità e sono due dei sette parametri che descrivono un'orbita kepleriana tridimensionale, vedi Figura 1.1. Gli altri parametri sono i , Ω , ω , P , t_p . I tre angoli i , Ω , ω rappresentano la proiezione della vera orbita rispetto alla direzione di vista: i è l'inclinazione dell'orbita rispetto al piano di riferimento, Ω la longitudine del nodo ascendente misurata sul piano di riferimento, e ω è l'argomento del pericentro, ossia l'angolo tra il vettore che punta al pericentro, il punto dell'orbita più vicino al fuoco occupato dal centro di massa, e il vettore che punta al nodo ascendente.

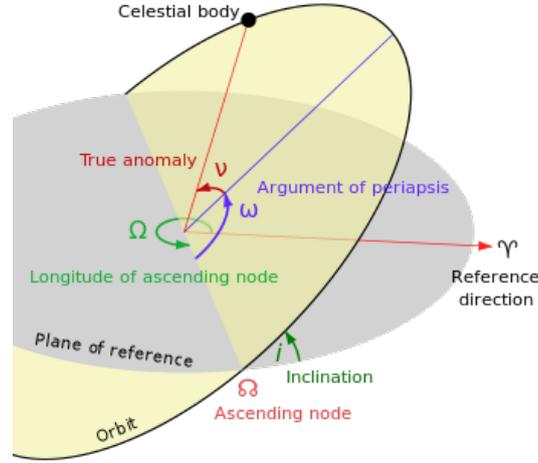


Figura 1.1: Orbita kepleriana tridimensionale con i relativi parametri. Il piano di riferimento è tangente alla sfera celeste.

P rappresenta invece il periodo dell'orbita ed è possibile ricavarne il valore applicando la terza legge di Keplero nella sua forma generale:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (1.1.4)$$

dove G e M sono rispettivamente la costante di gravitazione universale e la massa del corpo attorno a cui orbita l'oggetto considerato. M e a assumono valori diversi a seconda dell'orbita in considerazione. Infine t_p rappresenta l'istante del passaggio al pericentro.

Siccome si assume che il pianeta sia invisibile, ciò che si andrà a misurare sarà il moto della stella. Il periodo orbitale della stella attorno al baricentro del sistema sarà dato da:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM'} a_*^3 \quad (1.1.5)$$

dove a_* è il semiasse maggiore dell'orbita stellare, mentre M' è data dall'equazione:

$$M' \equiv \frac{M_p^3}{M_* + M_p} \quad (1.1.6)$$

Dove M_\star e M_p rappresentano la massa della stella e del pianeta rispettivamente.

Con la misura della velocità radiale della stella non si possono ottenere informazioni su tutti gli elementi orbitali. Ad esempio l'inclinazione i non è accessibile conoscendo la sola velocità lungo la linea di vista.

Chiamiamo z la coordinata della stella lungo la linea di vista.

$$z = r(t) \sin i \sin(\omega + \nu) \quad (1.1.7)$$

Dove ν rappresenta l'*anomalia vera*, ossia l'angolo tra la direzione del pericentro e la posizione corrente del pianeta misurata dal fuoco con il baricentro del sistema, vedi Figura 1.1.

La velocità lungo la linea di vista sarà

$$v_r = \dot{z} = \sin i [\dot{r} \sin(\omega + \nu) + r \dot{\nu} \cos(\omega + \nu)] \quad (1.1.8)$$

Che con alcune sostituzioni algebriche per r e \dot{r} diventa:

$$v_r = K [\cos(\omega + \nu) + e \cos(\omega)] \quad (1.1.9)$$

Dove la semiampiezza della velocità radiale K è data da:

$$K \equiv \frac{2\pi}{P} \frac{a_\star \sin i}{(1 - e^2)^{1/2}} \quad (1.1.10)$$

v_r varia tra i due limiti dell'orbita $K(1 + e \cos \omega)$ e $K(-1 + e \cos \omega)$ e la forma della sua curva è determinata quindi da e e ω , come si può vedere in Figura 1.2. La combinazione di questi ultimi due parametri, assieme a P , vincola anche il valore di $a_\star \sin i$, ma né a_\star né $\sin i$ possono essere determinati separatamente.

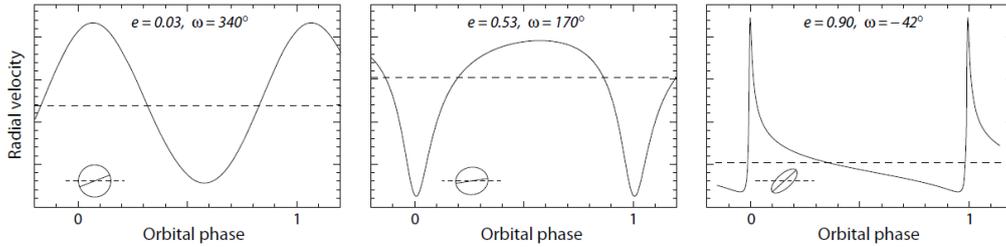


Figura 1.2: Esempi di curve della velocità radiale al variare di e e ω . Le ellissi in basso a sinistra mostrano come viene vista l'orbita, mentre la linea tratteggiata indica la velocità del sistema. Le stelle che presentano queste curve della velocità radiale sono rispettivamente HD 73256^[5], HD 142022^[6], e HD 4113^[7].

Sostituendo (1.1.5) e (1.1.6) all'interno dell'espressione di K si ottiene:

$$K^2 = \frac{G}{1 - e^2} \frac{1}{a_\star \sin i} \frac{M_p^3 (\sin i)^3}{(M_\star + M_p)^2} \quad (1.1.11)$$

Avendo determinato $a_\star \sin i$ come detto precedentemente, segue che la misura delle velocità radiali fornisce un valore per la *funzione di massa* \mathcal{M} , ossia la funzione M' modificata da una dipendenza dall'angolo di inclinazione dell'orbita:

$$\mathcal{M} \equiv \frac{M_p^3 (\sin i)^3}{(M_\star + M_p)^2} \quad (1.1.12)$$

Se $M_p \ll M_\star$:

$$\mathcal{M} \simeq \frac{M_p^3 (\sin i)^3}{M_\star^2}$$

Se riusciamo ad ottenere una stima di M_\star grazie al tipo spettrale e alla classe di luminosità della stella, allora possiamo determinare anche $M_p (\sin i)$. Pertanto la massa del pianeta, calcolata con la tecnica delle velocità radiali, rimane incerta per un fattore $\sin i$. Quindi un basso valore di K potrebbe indicare sia un pianeta di piccola massa, sia un pianeta di massa significativamente maggiore ma con un'orbita poco inclinata, cioè vista praticamente di faccia. La stima più attendibile della massa del pianeta la avremo per orbite viste di taglio, in cui $\sin i \simeq 1$. Questa è anche una delle condizioni favorevoli al verificarsi di un transito planetario, fenomeno che vedremo in dettaglio nel prossimo paragrafo.

1.2 Transiti

Il fenomeno del transito planetario si verifica quando abbiamo un allineamento geometrico adeguato tra osservatore, stella e pianeta. Se l'orbita del pianeta ha un'inclinazione tale da permettergli di transitare davanti alla sua stella ($i \simeq 90^\circ$), provocando la cosiddetta *eclissi primaria*, la luce di quest'ultima viene attenuata di una frazione rilevabile producendo un effetto che si ripete dopo ogni periodo. Il primo transito identificato, di un pianeta precedentemente scoperto con le velocità radiali, risale al 1999, mentre il primo pianeta scoperto direttamente con la tecnica dei transiti risale al 2003.

La probabilità di osservare un transito per una qualsiasi stella data, vista da una direzione casuale in un istante casuale, è estremamente piccola. Questa dipende da una quantità importante per ciascun transito, ossia il *parametro di impatto* b , pari alla distanza proiettata tra il centro del pianeta e il centro del disco stellare:

$$b = \frac{a}{R_\star} \cos i \quad (1.2.1)$$

Perché un transito avvenga dovremo avere $|b| \leq 1$, infatti l'inclinazione minima perché il fenomeno si verifichi è data da $\cos i_{min} = \left(\frac{R_\star}{a}\right)$; avremo invece dei transiti radenti per $a \cos i = (R_\star \pm R_p)$.

La probabilità che un pianeta con un'orbita circolare sia allineato favorevolmente per un transito è:

$$p = \frac{R_{\star}}{a} \simeq 0.005 \left(\frac{R_{\star}}{R_{\odot}} \right) \left(\frac{a}{1\text{U.A.}} \right)^{-1}$$

Data dall'angolo solido coperto dall'ombra del pianeta sulla sfera celeste centrata sulla stella ospite. Nei casi reali risulta che il transito avviene solo per $i \simeq 90^\circ$ e p è molto piccola. Se dovessimo osservare il transito di un pianeta come la Terra, avremo una probabilità $p \simeq 0.5\%$ che questo si verifichi. Inoltre anche se la probabilità di avere un transito non dipende dalla distanza della stella dall'osservatore, la corrispondente precisione fotometrica decresce man mano che la distanza aumenta e con essa la magnitudine apparente.

Anche l'effetto prodotto da un transito è piuttosto piccolo: un pianeta con raggio paragonabile a quello di Giove, $R_p \sim R_J$, che transita davanti ad una stella di $1R_{\odot}$ produce una riduzione di flusso di $\frac{\Delta F}{F} \simeq 1.1\%$, all'incirca 0.01 mag. Per pianeti con raggio simile a quello della Terra o di Marte, $\Delta F \simeq 8.4$ p.p.m. e $3 \cdot 10^{-5}$ rispettivamente. Con osservazioni da Terra si riescono ad individuare transiti in cui la riduzione di flusso relativa sia almeno $\frac{\Delta F}{F} \simeq 0.1\%$, rivelando anche pianeti della massa di Nettuno attorno a stelle luminose abbastanza per poter poi applicare la tecnica delle velocità radiali come conferma. Studi fatti con telescopi spaziali arrivano a scoprire transiti di profondità dell'ordine di 100 p.p.m. ampliando l'intervallo di massa dei pianeti individuabili.

Ogni transito è visualizzabile come una *curva di luce*, vedi Figura 1.3 in basso, che rappresenta il flusso ricevuto dalla stella ospite in funzione del tempo. Quindi avremo una diminuzione del flusso durante l'eclissi primaria, un leggero aumento quando il pianeta, dopo il transito, passa nella zona dell'orbita in cui lo vediamo illuminato dalla luce della stella, e una successiva diminuzione, molto meno marcata del transito, durante l'eclissi secondaria.

La forma della curva di luce che rappresenta un certo transito è determinata principalmente e schematicamente da quattro parametri osservabili:

- il periodo di rivoluzione del pianeta P .
- la profondità del transito ΔF .
- l'intervallo tra il primo e il quarto contatto t_T .
- l'intervallo tra il secondo e il terzo contatto t_F .

I quattro contatti sono rappresentati in Figura 1.3. Il primo contatto **(1)** indica il momento in cui vediamo il pianeta tangente alla sfera luminosa della stella nell'istante di entrata, il secondo **(2)** invece indica il contatto finale tra il bordo della

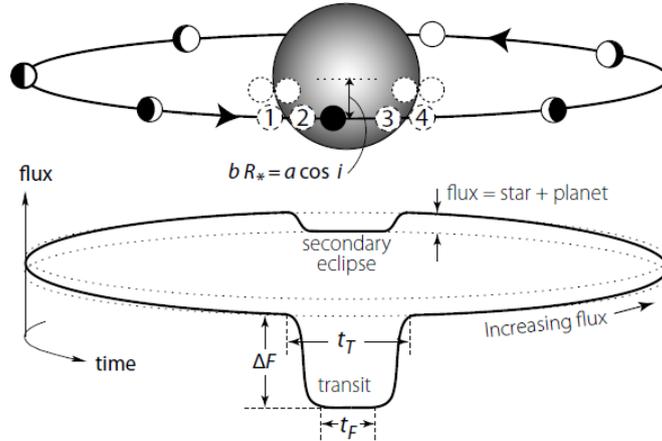


Figura 1.3: In alto vediamo una rappresentazione schematica di un transito; i numeri cerchiati indicano i contatti tra i bordi del pianeta con quelli della stella negli istanti di inizio e fine dell'eclissi primaria. In basso possiamo vedere la curva di luce risultante in funzione del tempo. L'immagine è tratta da Winn (2009)^[8].

stella e il pianeta quando quest'ultimo è entrato completamente nel disco luminoso, mentre il terzo (3) e il quarto (4) sono gli analoghi nel momento di uscita del pianeta.

La profondità del transito dipende dal rapporto delle aree dei dischi proiettati della stella e del pianeta e ha equazione:

$$\Delta F \simeq \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^2$$

Grazie a questa è quindi possibile derivare il raggio del pianeta R_p se il raggio della stella R_* è noto, ad esempio dalla classificazione spettrale.

1.3 Transit Timing Variations

La situazione diventa più complessa quando si ha a che fare con *sistemi multipli*, dove abbiamo più di un pianeta che orbita attorno alla stessa stella ospite. In questo caso l'attrazione gravitazionale tra pianeti produce delle perturbazioni sulle orbite, che smettono di essere kepleriane. Se uno o più pianeti del sistema transitano davanti alla stella potremo misurare delle variazioni della periodicità dei transiti dovute a queste perturbazioni, vedi Figura 1.4. Su questo si basano la teoria e le osservazioni dei *Transit Timing Variations (TTV)*.

Si tratta quindi di risalire, dalle perturbazioni osservate su un corpo noto, all'oggetto che le causa e riuscire a derivarne massa e parametri orbitali. Un metodo

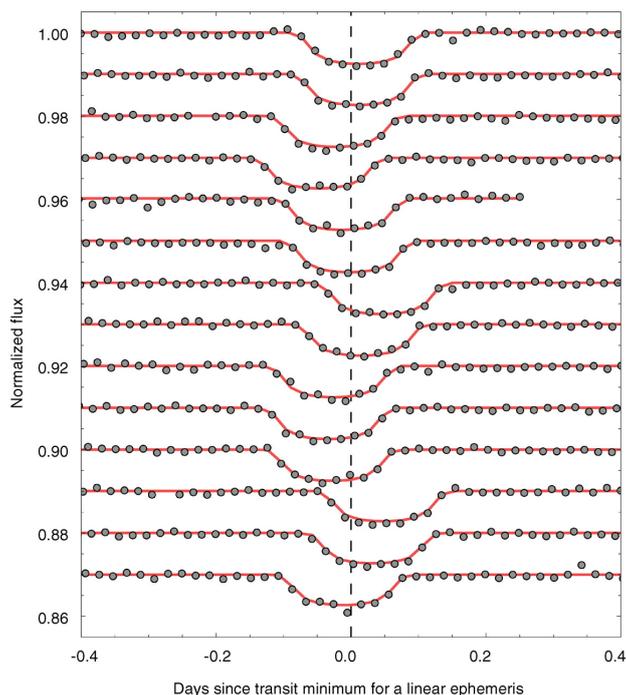


Figura 1.4: Variazione dell'istante del transito di KOI-872b. Grafico realizzato da Nesvorný et al. (2012)^[9]

simile venne utilizzato anche nel nostro Sistema Solare. Nel 1846 i matematici Urbain Le Verrier e John Couch Adams riuscirono a scoprire Nettuno prima che questo venisse osservato direttamente, grazie ai loro calcoli sulle perturbazioni che mostrava l'orbita di Urano. Allo stesso modo, ora, dalle variazioni dell'istante in cui dovrebbe avvenire un certo transito, possiamo dedurre delle informazioni sul pianeta che le provoca, anche se questo non transita a sua volta davanti alla stella ospite. Non abbiamo perciò limitazioni dettate dall'inclinazione dell'orbita, come invece accade sia per la tecnica delle velocità radiali sia, in particolare, per quella dei transiti.

Le deviazioni dal modello di orbita kepleriana riguardano soprattutto delle modifiche del semiasse maggiore a , dell'eccentricità e e della longitudine del pericentro ω .

Possiamo definire un effemeride C , dove C sta per "calculated", perché basata su un modello a periodo costante, P :

$$C = T_0 + P \times E \quad (1.3.1)$$

dove E è l'epoca che è sempre un numero intero, T_0 il momento del transito con $E = 0$. Il momento del transito osservato si indica invece con O . Le variazioni saranno quindi date dai valori $O - C$ che possono essere poi riportati in un grafico (Figura 1.5 in basso).

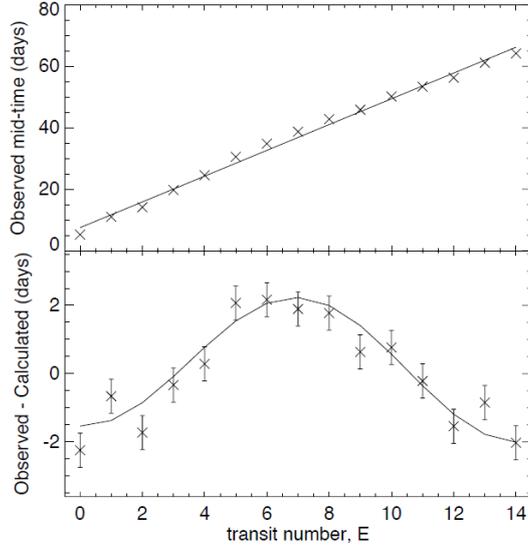


Figura 1.5: *Grafico in alto:* gli istanti intermedi dei transiti di un esopianeta con la retta che fitta i minimi quadrati. *Grafico in basso:* i residui del fit che forniscono il diagramma (O-C). Agol & Fabrycky 2017^[10]

Consideriamo ora il caso in cui i pianeti si trovano in *risonanza orbitale*, ossia quando il rapporto tra i loro periodi orbitali è commensurabile, ovvero esprimibile come frazione di numeri interi piccoli. Un esempio di questo fenomeno è rappresentato da tre satelliti di Giove: Io, Europa e Ganimede si trovano in risonanza 1 : 2 : 4.

Dato che l'interazione gravitazionale tra pianeti avviene con un tempo scala pari a quello orbitale, le ampiezze dei TTV saranno proporzionali al periodo di ogni pianeta. Ognuno di questi subirà un'accelerazione o una decelerazione che non dipenderà dalla massa del pianeta stesso, ma dalla massa dell'altro pianeta, o degli altri pianeti, del sistema.

La trattazione che mostreremo segue la trattazione di Agol & Fabrycky (2017)^[10].

In un sistema formato da due pianeti possiamo scrivere gli $O - C$ come:

$$\delta t_1 = P_1 \frac{m_2}{M_\star} f_{12}(\alpha_{12}, \theta_{12}) \quad (1.3.2)$$

$$\delta t_2 = P_2 \frac{m_1}{M_\star} f_{21}(\alpha_{21}, \theta_{21}) \quad (1.3.3)$$

dove m_1 e m_2 sono le masse dei due pianeti e f_{ij} descrive le perturbazioni del pianeta j sul pianeta i e dipende dal rapporto dei semiassi maggiori $\alpha_{ij} = \min\left(\frac{a_i}{a_j}, \frac{a_j}{a_i}\right)$ e dalle coordinate orbitali dei due pianeti, rappresentate da θ_{ij} . Quindi dai TTV si può ottenere una stima del rapporto tra la massa del pianeta e quella della stella

$\frac{m_i}{M_\star}$. Inoltre, se entrambi i pianeti transitano, dalla curva di luce possiamo ricavare il rapporto relativo ai raggi, $\frac{r_i}{R_\star}$, e dunque anche entrambi i rapporti delle densità $\frac{\rho_i}{\rho_\star}$ e da questi le singole densità ρ_1 e ρ_2 .

Se al sistema aggiungiamo altri pianeti, il cui rapporto di massa rispetto alla stella sia sufficientemente piccolo e nessuno di questi sia in risonanza orbitale con un altro, allora il TTV può essere approssimato ad una combinazione lineare delle perturbazioni dovute a tutte le componenti. Quindi nel caso di N pianeti avremo:

$$\delta t_i = P_i \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{M_\star} f_{ij}(\alpha_{ij}, \theta_{ij}) \quad (1.3.4)$$

con $i = 1, \dots, N$.

Vogliamo ora evidenziare il collegamento tra l'ampiezza dei TTV e la variazione di energia potenziale nel caso in cui siano coinvolti due pianeti. Grazie alla terza legge di Keplero sappiamo che $a \propto P^{3/2}$, quindi una variazione infinitesima del semiasse maggiore porterà ad una variazione infinitesima del periodo: $\delta a_i = \frac{3}{2} a_i \frac{\delta P_i}{P_i}$ con $i = 1, 2$. Dato che l'energia potenziale gravitazionale di ciascun pianeta $E_i = -\frac{GM_\star m_i}{2a_i}$ dipende anch'essa dal semiasse maggiore a_i , subirà una variazione infinitesima di $\delta E_1 = \frac{GM_\star m_1}{2a_1^2} \delta a_1$ per il primo pianeta e $\delta E_2 = \frac{GM_\star m_2}{2a_2^2} \delta a_2$ per il secondo. Ma perchè l'energia totale del sistema si conservi, la variazione di energia del secondo pianeta sarà anche pari a $\delta E_2 = -\frac{GM_\star m_1}{2a_1^2} \delta a_1$. Grazie all'uguaglianza di queste ultime due equazioni si può ottenere il rapporto tra le variazioni infinitesime del semiasse maggiore dei due pianeti $\frac{\delta a_2}{\delta a_1}$, e da questo, grazie ancora alla terza legge di Keplero, il rapporto tra le variazioni del periodo:

$$\delta P_2 = -\delta P_1 \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{5/3} \quad (1.3.5)$$

Da questa equazione si può passare al rapporto tra le variazioni temporali dell'istante del transito δt_i togliendo un fattore $\frac{P_2}{P_1}$:

$$\delta t_2 = -\delta t_1 \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{2/3} \quad (1.3.6)$$

Da ciò si può dedurre che le curve dei TTV dei due pianeti risulteranno *anticorrelate* e le ampiezze saranno determinate dal rapporto dei periodi e delle masse. Nel caso in cui i due pianeti abbiano massa uguale, allora sarà l'ampiezza dei TTV del pianeta più esterno ad essere più grande, anche perché il suo raggio orbitale dovrà cambiare di più affinché la variazione della sua energia sia uguale alla variazione relativa al pianeta più interno. L'anticorrelazione evidenzia quindi l'interazione dinamica tra i due pianeti.

Quando il sistema si trova vicino alla risonanza, una combinazione di variazioni di a e e porta ad avere dei cicli di TTV il cui periodo, detto *super-periodo* P_{TTV} ,

dipende dalla separazione dalla risonanza. La variazione dei TTV è principalmente dovuta ad una sola risonanza, quella a cui il sistema è più vicino. L'interazione costringe i due pianeti ad avere uno specifico rapporto tra i periodi, facendo sì che i periodi oscillino sempre vicini a questo rapporto.

Quando due pianeti si trovano vicino alla risonanza il rapporto tra i loro periodi $\frac{P_2}{P_1}$ si avvicina al rapporto tra due numeri interi piccoli $\frac{j}{k}$; allora il periodo dei TTV previsto sarà:

$$P_{TTV} = \frac{1}{\left| \frac{j}{P_2} - \frac{k}{P_1} \right|} \quad (1.3.7)$$

Il valore $|j - k|$ dà l'*ordine della risonanza*. Le risonanze di primo ordine, come 1:2, 2:3, 3:4, sono le più forti in termini di interazione dinamica.

Quando entrambi i pianeti transitano è possibile misurare i TTV di entrambi e osservare la variazione di fase relativa dei due transiti.

Quando transita un solo pianeta l'interpretazione delle osservazioni è più complicata. I TTV misurati danno un segnale sinusoidale che non identifica in modo univoco il tipo di risonanza in cui si trova il sistema. In questo caso si fa più fatica a calcolare i parametri del pianeta perturbante. Inoltre, in alcuni casi, si può avere una variazione apparente di periodo orbitale anche se non è un altro pianeta a causarla. Per esempio se in un sistema abbiamo un corpo massivo molto vicino alla stella ospite, questo può causarne un movimento significativo rispetto al baricentro del sistema e ciò provoca una variazione del momento del transito di un pianeta più esterno. L'effetto è evidente quando il pianeta orbita attorno ad un sistema binario di due stelle, come ad esempio Kepler-16 b (Doyle et al. (2011)^[11]).

Quando per uno stesso sistema disponiamo di misure fatte sia con la tecnica delle velocità radiali, sia con i TTV, allora, oltre a poterne determinare le dimensioni assolute, possiamo ottenere il valore della massa dei pianeti in entrambi i modi e poi farne un confronto.

2 Selezione dei candidati per l'analisi

Vogliamo ora selezionare quei pianeti che presentano una misura della massa calcolata sia con la tecnica delle velocità radiali sia con i TTV, così da poter poi fare un confronto tra i valori ottenuti con i due metodi.

2.1 Catalogo utilizzato

L'archivio che è stato utilizzato per la selezione è il *NASA Exoplanet Archive*¹, un catalogo astronomico online contenente informazioni su esopianeti e stelle ospiti. Il catalogo è stato creato dalla *NASA* e viene costantemente sviluppato ed aggiornato da un team di astronomi del *NASA Exoplanet Science Institute (NExScI)*.

I dati che vengono messi a disposizione riguardano sia i parametri stellari, come coordinate astronomiche, magnitudini e temperature; ma anche quelli riguardanti la scoperta e la caratterizzazione dei vari pianeti extrasolari, come le curve delle velocità radiali, le curve di luce, le immagini e gli spettri. Questi dati vengono forniti sia da missioni spaziali come *Kepler* e *CoRoT*, sia da survey realizzate da telescopi terrestri, come la *Transatlantic Exoplanet Survey (TrES)*, la *XO project* o *SuperWASP*. Inoltre è sempre possibile risalire agli articoli in letteratura in cui sono state riportate le diverse informazioni, o in cui sono state calcolate quantità come la massa e il raggio. Ogni pianeta ha una sua scheda in cui vengono riportate anche più misure per uno stesso parametro, ognuna con il relativo articolo di riferimento.

Oltre ai pianeti confermati, nell'archivio si possono trovare anche tutti i candidati *Kepler* e i falsi positivi. Le stelle attorno alle quali potrebbero orbitare dei candidati *Kepler* vengono denominate *KOI (Kepler Object of Interest)*. Queste mostrano un oscuramento periodico che potrebbe indicare la presenza di un nuovo pianeta, ma dato che questa potrebbe non essere l'unica spiegazione della diminuzione del flusso stellare è necessario che i candidati vengano confermati. Dopo l'eventuale verifica la stella verrà indicata con il nome *Kepler* seguito da un numero intero, i suoi pianeti invece con il nome della stella seguito da una lettera minuscola seguendo l'ordine di scoperta. I candidati che invece non passano la verifica entrano a far parte del database dei falsi positivi. Nella maggior parte si tratta di binarie ad eclissi che contaminano il flusso luminoso di una terza stella.

È possibile accedere ai dati anche tramite tabelle interattive, filtrandoli e sistemandoli a piacimento.

¹<https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>

Il catalogo utilizzato per la presente analisi è stato scaricato in data 13/10/2017.

2.2 Criteri di selezione dei candidati

2.2.1 Prima selezione

Per una prima analisi sono stati selezionati solo i pianeti con determinate caratteristiche. I filtri che sono stati impostati nel catalogo sono i seguenti:

- $M_p > 0$: il pianeta deve possedere almeno una misura della sua massa.
- $FlagTTV = 1$: indica che il pianeta mostra TTV, in caso contrario il parametro sarebbe posto uguale a zero.
- $Optical\ Magnitude[mag] < 14$: corrisponde ad un limite superiore alla magnitudine della stella ospite. Questo limite viene imposto per far sì che le eventuali misure della velocità radiale possano essere sufficientemente precise.

Così facendo vengono selezionati quei pianeti che manifestano TTV noti e che potrebbero avere una misura delle velocità radiali adeguata. La tabella dei pianeti selezionati riporterà per ognuno di questi una sola misura della massa, sia in masse gioviane che terrestri, ma senza specificare la tecnica con cui è stata ricavata. Bisognerà quindi accedere alla scheda completa di ogni singolo pianeta per poter verificare se sono state fatte anche altre misure di questo parametro e per poter poi accedere ad ogni relativo articolo al fine di determinare la tecnica che ha permesso di ricavare tale valore. I 66 pianeti selezionati in questo modo sono riportati nella Tabella 2.1.

2.2.2 Seconda selezione

È stata poi fatta una seconda selezione al fine di identificare i sistemi *Kepler* e *K2* vicini alla risonanza orbitale ma di cui non è ancora nota la presenza di un segnale TTV, o di cui è nota ma per un qualche motivo non è stata indicata nel catalogo. Questi vengono esclusi dalla prima selezione perché appartengono ancora alla categoria $FlagTTV = 0$ ma potrebbero essere comunque interessanti per ricerche future: verificando con ulteriori indagini se questi pianeti mostrano TTV sarà poi possibile condurre su di essi la stessa analisi fatta sui pianeti del primo campione. I filtri impostati sono:

- $M_p > 0$
- $FlagTTV = 0$

I 66 pianeti selezionati per la prima analisi

HAT-P-13 b	Kepler-56 c	Kepler-227 b
K2-19 b	Kepler-60 b	Kepler-277 c
K2-19 c	Kepler-60 c	Kepler-279 c
K2-19 d	Kepler-60 d	Kepler-279 d
Kepler-9 b	Kepler-79 b	Kepler-289 b
Kepler-9 c	Kepler-79 c	Kepler-289 c
Kepler-10 c	Kepler-79 d	Kepler-289 d
Kepler-16 b	Kepler-79 e	Kepler-338 e
Kepler-18 b	Kepler-89 c	Kepler-350 c
Kepler-18 c	Kepler-89 d	Kepler-350 d
Kepler-18 d	Kepler-89 e	Kepler-396 b
Kepler-19 b	Kepler-103 b	Kepler 396 c
Kepler-23 b	Kepler-103 c	Kepler-412 b
Kepler-23 c	Kepler-114 c	Kepler-414 b
Kepler-25 b	Kepler-114 d	Kepler-414 c
Kepler-25 c	Kepler-128 b	Kepler-419 b
Kepler-36 b	Kepler-128 c	KOI-13 b
Kepler-36 c	Kepler-138 b	KOI-142 b
Kepler-37 d	Kepler-138 c	WASP-43 b
Kepler-48 b	Kepler-138 d	WASP-47 b
Kepler-48 c	Kepler-145 b	WASP-47 d
Kepler-56 b	Kepler-145 c	WASP-47 e

Tabella 2.1: I 66 pianeti selezionati per la prima analisi.

- *Optical Magnitude*[mag] < 14
- *Number of Planets in System* > 1

L'ultimo filtro è stato aggiunto perché per fare misure affidabili di massa con i TTV dobbiamo conoscere l'ordine di risonanza e quindi avere a disposizione più pianeti di uno stesso sistema per confrontarne i periodi. Inoltre dobbiamo vedere i transiti di tutti i pianeti coinvolti così da poter analizzare le differenze $O - C$ di ciascuno di questi e metterle a confronto quando due corpi si trovano vicino alla risonanza.

Della tabella di pianeti risultante si selezionano ulteriormente solo quei sistemi che potrebbero avere dei componenti in risonanza orbitale. Per verificare questo bisogna vedere se il rapporto tra i periodi dei vari pianeti di un dato sistema si avvicina al rapporto di due numeri interi piccoli. A volte però è stato necessario anche visualizzare la pagina del catalogo relativa ad un certo sistema in quanto la selezione precedente esclude i pianeti di cui non è stata ancora stimata la massa ma che potrebbero comunque trovarsi vicino alla risonanza orbitale con altri pianeti che invece compaiono nel campione. Per accorgersi di questo si può guardare la voce *Number of Planets in System* e controllare se il numero che riporta coincide con quello dei pianeti del sistema mostrati nella tabella dopo la selezione. Se invece il numero di pianeti del sistema è maggiore di quelli selezionati è opportuno andare a controllare se i pianeti esclusi possono comunque essere interessanti per la nostra analisi.

Facendo questo lavoro sono stati selezionati i 42 pianeti presenti nella Tabella 2.2.

Pianeta	Periodo	Pianeta	Periodo	Pianeta	Periodo
K2-32 b	8.992	Kepler-37 b	13.368	Kepler-100 b	6.887
K2-32 c	20.660 ± 0.002	Kepler-37 c	21.302	Kepler-100 c	12.816
K2-32 d	31.715 ± 0.002	Kepler-37 d	39.792	Kepler-100 d	35,333
K2-38 b	4.016 ± 0.001	Kepler-37 e	51.196	Kepler-101 b	3.488
K2-38 c	10.561 ± 0.001	Kepler-62 b	5.715	Kepler-101 c	6.030
Kepler-19 b	9.287	Kepler-62 c	12.442	Kepler-102 b	5.287
Kepler-19 c	$28.731^{+0.012}_{-0.005}$	Kepler-62 d	18.164	Kepler-102 c	7.071
Kepler-19 d	$62.95^{+0.04}_{-0.30}$	Kepler-62 e	122.387 ± 0.001	Kepler-102 d	10.312
Kepler-20 b	3.696	Kepler-62 f	267.291 ± 0.005	Kepler-102 e	16.146
Kepler-20 c	10.854	Kepler-68 b	5.399	Kepler-102 f	27.454
Kepler-20 d	77.611	Kepler-68 c	9.605	Kepler-131 b	16.092
Kepler-20 e	6.099	Kepler-68 d	625 ± 16	Kepler-131 c	25.517
Kepler-20 f	19.578	Kepler-92 b	13.749	Kepler-406 b	2.426
Kepler-20 g	$34.940^{+0.038}_{-0.035}$	Kepler-92 c	26.723	Kepler-406 c	4.623

Tabella 2.2: I 42 pianeti selezionati per la seconda analisi.

3 Analisi dei sistemi notevoli

3.1 Pianeti con massa misurata sia con le RV che con i TTV

Passiamo ora ad analizzare i pianeti del primo campione per cui sono state ottenute misure della massa con entrambe le tecniche separatamente. Questi sono riportati in Tabella 3.1 e in Tabella 3.2. Per ciascun pianeta vengono indicate le varie misure delle masse trovate in letteratura, con il collegamento al relativo articolo.

Nella prima tabella possiamo vedere i pianeti per i quali è stata fatta una misura indipendente della massa con entrambe le tecniche. In questo caso è possibile calcolare immediatamente la differenza tra le due misure, $RV-TTV$, in termini della deviazione standard σ , calcolata tramite l'equazione (3.1.1), così da verificare se esse sono statisticamente compatibili.

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (3.1.1)$$

σ_1 e σ_2 rappresentano gli errori delle due misure che si vanno a confrontare. Quando una delle misure mostrava un errore asimmetrico, è stato utilizzato l'errore che più si avvicinava all'altra misura per calcolare il σ : ad esempio, dovendo confrontare due misure come $28.5_{-5.0}^{+5.4}$ e 44 ± 12 , è stato scelto come σ_1 l'errore superiore della prima misura, ossia 5.4, dato che 28.5 è inferiore a 44, mentre σ_2 è necessariamente pari a 12, visto che l'errore in questo caso è simmetrico.

Come si può vedere nel Grafico 3.1, la compatibilità tra le diverse misure è legata visivamente alla sovrapposizione delle barre d'errore.

Chiamiamo t il coefficiente che moltiplica σ nelle differenze $RV-TTV$, riportate nelle Tabelle 3.1 e 3.2. Possiamo avere diverse possibilità:

- se $t < 1$ il valore più probabile di almeno una delle due misure si troverà all'interno delle barre d'errore dell'altra.
- se $t < 1.41$ solo una parte delle barre d'errore sarà sovrapposta.
- se $t > 1.41$ non vi sarà alcun punto in comune.

Ma a questi valori della massa in realtà possiamo associare una distribuzione normale, quindi la probabilità che una misura sia ancora corretta al di fuori di più di un σ è non nulla. Dalla Tabella 3.1 vediamo che la maggior parte delle misure rimane all'interno di un intervallo di confidenza di 2σ . Possiamo quindi ritenerle ancora compatibili. Vi sono solo alcuni casi, come Kepler-56 b e Kepler-289 c, che

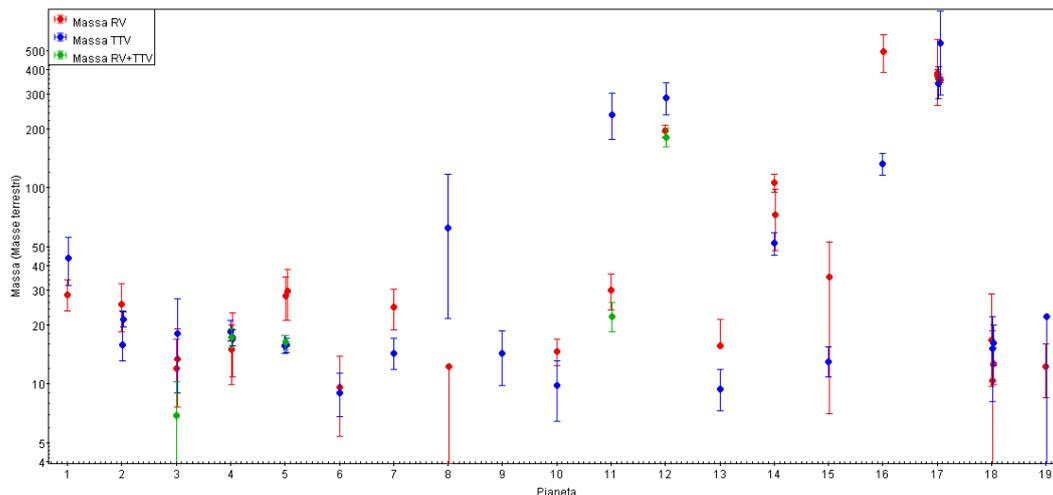


Figura 3.1: Masse dei pianeti misurate con le diverse tecniche. Sull’asse delle ordinate è impostata una scala logaritmica. Le barre d’errore di due misure che visivamente sembrano ampie uguali, a seconda della posizione, possono quindi coprire intervalli di massa più o meno estesi.

esamineremo meglio successivamente, in cui la differenza in termini di σ è piuttosto elevata per ritenere le misure ancora compatibili.

Nella Tabella 3.2 sono stati riportati invece i pianeti per i quali si dispone di più misure della massa ottenute con una o ciascuna tecnica. Quando le misure ricavate con lo stesso metodo risultano compatibili entro 2σ è stata calcolata la media pesata di queste, con il relativo errore, così da poter fare poi il confronto con il valore calcolato con l’altro metodo. È stato utilizzato il simbolo * quando si disponeva di un’unica misura per una certa tecnica e non era quindi necessario calcolare una media.

Anche in questo caso è stata calcolata la differenza *RV-TTV* in termini di σ e si può vedere che solo nel caso di Kepler-89 d troviamo un valore che supera ampiamente i 2σ , mentre tutte le altre misure risultano compatibili.

Un lavoro analogo è stato fatto in un articolo di Mills e Mazeh (2017)^[31]. Questi si proponevano di analizzare la questione delle discrepanze tra le masse trovate con la due tecniche a parità di raggio e di periodo, vedi Figura 3.2. Infatti, ad esempio, per uno stesso valore del raggio planetario, con le velocità radiali si tende ad identificare pianeti di massa maggiore rispetto a quelli trovati con i TTV. Per quanto riguarda il periodo invece con le RV vengono identificati più pianeti con bassi valori di P .

Questa discrepanza però potrebbe essere semplicemente legata alla diversa sensibilità dei due metodi in funzione dei parametri planetari. Infatti se guardiamo l’espressione della semi-ampiezza della velocità radiale K (1.1.10), quantità che costituisce l’osservabile con questa tecnica, possiamo notare che questa cala all’aumentare di P , il che rende i pianeti con periodi lunghi più difficili da individuare.

Pianeta	Massa RV (M_{\oplus})	Massa TTV (M_{\oplus})	RV-TTV
K2-19 b	$28.5^{+5.4}_{-5.0}$ ^[12]	44 ± 12 ^[13]	-1.2σ
Kepler-25 b	9.60 ± 4.20 ^[14]	$9.0^{+2.4}_{-2.2}$ ^[15]	0.1σ
Kepler-25 c	24.60 ± 5.70 ^[14]	$14.3^{+2.7}_{-2.5}$ ^[15]	1.6σ
Kepler-37 d	$12.2^{+0}_{-12.2}$ ^[14]	$62.5^{+55.4}_{-40.8}$ ^[15]	-1.2σ
Kepler-48 b	3.94 ± 2.10 ^[14]	$14.3^{+4.3}_{-4.5}$ ^[15]	-2.1σ
Kepler-48 c	14.61 ± 2.30 ^[14]	$9.8^{+3.3}_{-3.4}$ ^[15]	1.2σ
Kepler-56 b	30.0 ± 6.2 ^[16]	236^{+68}_{-60} ^[15]	-3.4σ
Kepler-56 c	195 ± 14 ^[16]	$286.8^{+56.9}_{-51.7}$ ^[15]	-1.7σ
Kepler-89 c	$15.6^{+5.7}_{-15.6}$ ^[17]	$9.40^{+2.40}_{-2.10}$ ^[18]	0.4σ
Kepler-89 e	35^{+18}_{-28} ^[17]	$13.0^{+2.5}_{-2.1}$ ^[18]	0.8σ
Kepler-289 b	165^{+0}_{-165} ^[19]	7.3 ± 6.8 ^[20]	1.0σ
Kepler-289 c	493 ± 108 ^[19]	132 ± 17 ^[20]	3.3σ
Kepler-289 d	448^{+0}_{-448} ^[19]	4.0 ± 0.9 ^[20]	1.0σ
WASP-47 e	12.2 ± 3.7 ^[21]	22^{+0}_{-22} ^[22]	-0.4σ

Tabella 3.1: Misure delle masse dei pianeti che possiedono una sola misura di massa per ogni tecnica.

Pianeta	Massa RV (M_{\oplus})	Media RV	Massa TTV (M_{\oplus})	Media TTV	RV-TTV
K2-19 c	25.6 ± 7.1 ^[12]	*	$15.9^{+7.7}_{-2.8}$ ^[13] 21.4 ± 1.9 ^[23]	21.1 ± 1.8	0.6σ
Kepler-18 b	12 ± 5 ^[24] 13.4 ± 5.8 ^[24]	12.6 ± 3.8	18 ± 9 ^[24]	*	-0.6σ
Kepler-18 c	15 ± 5 ^[24] 16.9 ± 6.1 ^[24]	15.8 ± 3.9	$18.4^{+2.7}_{-1.9}$ ^[15] 17.3 ± 1.7 ^[24]	17.8 ± 1.3	-0.5σ
Kepler-18 d	28 ± 7 ^[24] 29.9 ± 8.8 ^[24]	28.7 ± 5.5	$15.7^{+2.0}_{-1.4}$ ^[15] 15.8 ± 1.3 ^[24]	15.8 ± 1.1	2.3σ
Kepler-89 d	106 ± 11 ^[17] 73 ± 25 ^[25]	101 ± 10	$52.1^{+6.9}_{-7.1}$ ^[18]	*	4.0σ
WASP-47 b	383^{+190}_{-120} ^[26] 370 ± 29 ^[21] 359 ± 19 ^[28] 362 ± 16 ^[29] 356 ± 12 ^[30]	363.7 ± 8.2	341^{+73}_{-55} ^[22] 549 ± 252 ^[27]	357 ± 70	0.1σ
WASP-47 d	17^{+12}_{-7} ^[26] 10.4 ± 8.4 ^[21] 12.8 ± 2.7 ^[30]	13.0 ± 2.4	15.2 ± 7.0 ^[22] 16.1 ± 3.8 ^[27]	15.9 ± 3.3	-0.7σ

Tabella 3.2: Misure delle masse dei pianeti che possiedono più di una misura di massa planetaria con almeno una delle due tecniche.

Un ragionamento analogo si può fare per i pianeti di massa elevata: questi produrranno una perturbazione maggiore della stella ospite rispetto a quelli aventi lo stesso raggio ma densità minore. Infatti, se andiamo a vedere anche l'Eq. (1.1.11), possiamo notare la forte dipendenza del K da M_p . La sensibilità dei TTV invece è più uniforme, e a parità di raggio riesce ad individuare un intervallo di masse più grande delle RV.

La discrepanza potrebbe essere legata anche ad un possibile errore sistematico di una delle due tecniche, ma le simulazioni Monte Carlo condotte nell'articolo di Steffen et al. 2015^[32] sembrano confermare l'ipotesi che sia la diversa sensibilità delle RV e dei TTV a condurre alla rilevazione di pianeti con densità e periodi differenti.

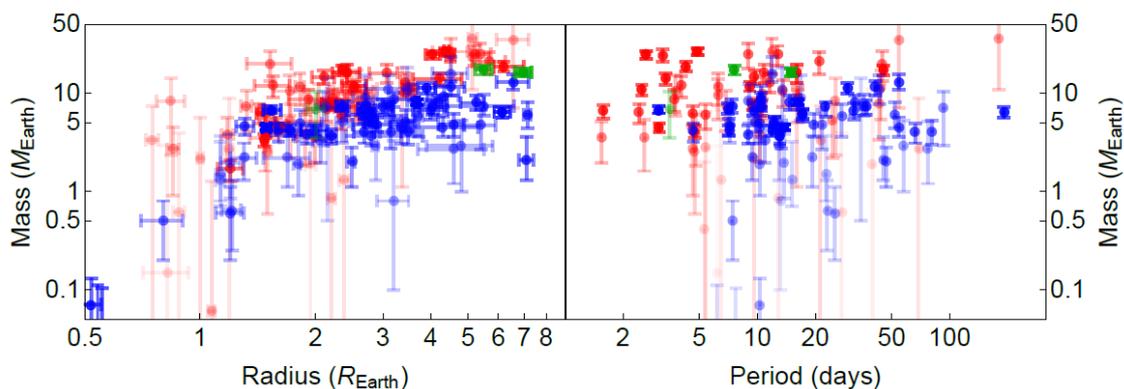


Figura 3.2: Massa in funzione del raggio e del periodo dei pianeti extrasolari individuati con le RV (in rosso), con i TTV (in blu) o con un'analisi combinata di RV+TTV (in verde). La figura è stata presa dall'articolo di Mills e Mazeh (2017)^[31]

Un altro modo per verificare che nessuno dei due metodi sia affetto da un errore sistematico è quello di andare a studiare i pianeti per i quali sono disponibili misure della massa calcolate sia con le RV che con i TTV, come ad esempio quelli del campione che abbiamo selezionato. Nel loro articolo, Mills e Mazeh riportano alcuni dei pianeti che compaiono anche nel nostro campione, ossia Kepler-18 b,c e d, Kepler-89 d e e, K2-19 b e c e WASP-47 b e d. Alcune misure della massa che vengono citate in questo lavoro non compaiono nel catalogo *NASA Exoplanet Archive*, questo perché alcuni articoli presentano più di una misura della massa per uno stesso pianeta e sul catalogo ne viene indicata solo una, oppure perché un certo articolo non è ancora stato aggiunto in archivio. Queste misure sono poi state aggiunte anche nelle nostre tabelle, così da poter fare un'analisi più completa. Mills e Mazeh osservano poi che l'insieme di differenze $RV-TTV$ sia positive che negative non sembra rivelare un effetto sistematico di una delle due tecniche rispetto all'altra.

Ora analizzeremo tutti i sistemi del nostro campione in modo più approfondito, così da poter vedere se quest'ultima affermazione vale anche nel nostro caso oppure

se, disponendo di un insieme di pianeti più grande, si possa evidenziare un effetto sistematico.

3.1.1 K2-19

La stella ospite K2-19 è una nana di tipo G e due dei pianeti che vi orbitano attorno (b e c) si trovano vicino alla risonanza 2:3 che aumenta di ordini di grandezza l'effetto osservabile dei TTV (Dai et al. (2016)^[12]).

Questo sistema di pianeti è stato aggiunto alla nostra analisi grazie all'articolo di Mills e Mazeh perché sul catalogo della NASA non sono ancora stati aggiunti i valori della massa trovati da Dai et al. (2016)^[12] con le velocità radiali e da Barros et al. (2015)^[13] con i TTV, quindi è stato inizialmente escluso dalla nostra selezione a causa del filtro $M > 0$. Nell'articolo di Dai (2016)^[12] troviamo citato anche il lavoro di Narita et al. (2015)^[23] in cui viene calcolata la massa del pianeta c con i TTV.

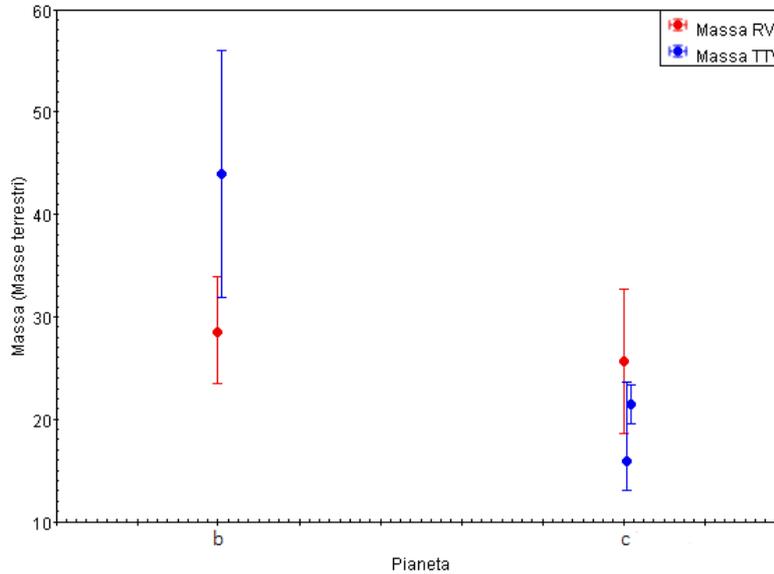


Figura 3.3: Misure delle masse dei pianeti del sistema K2-19.

Come si può vedere dal Grafico 3.3 entrambi i pianeti del sistema presentano misure compatibili, con una differenza $RV-TTV$ di -1.2σ per K2-19 b e di 0.6σ per K2-19 c. Notiamo anche che il segno della differenza è diverso per i due pianeti quindi, in questo caso, non c'è una tecnica che dia in entrambi i casi un valore maggiore rispetto all'altra.

Un altro aspetto interessante di questo sistema è che K2-19 b, con il suo raggio di $7.74 \pm 0.39R_{\oplus}$, viene definito un *super-Neptune*. Pianeti di questo intervallo dimensionale sembrano essere poco frequenti nell'insieme di quelli transitanti, riportati dal

NASA Exoplanet Archive. Inoltre si tratta dell'unico sistema, finora scoperto, in cui abbiamo una risonanza tra un pianeta interno, delle dimensioni di un *super-Neptune*, grande 1.7 volte quello più esterno, che ha dimensioni nettuniane ($4.86^{+0.62}_{-0.44} R_{\oplus}$). Ciò non accade nella maggior parte dei casi in cui abbiamo una risonanza 2:3 di pianeti scoperti da *Kepler* (Ciardi et al. (2013)^[33]). Nelle risonanze 2:1 e 3:2 è più comune trovare un pianeta esterno più massivo di quello interno. Inoltre, solitamente, i pianeti con $R \geq 3 R_{\oplus}$ si trovano più facilmente in risonanze 2:1, piuttosto che 3:2 (Narita et al. (2015)^[23]).

3.1.2 Kepler-18

Kepler-18 è una stella di tipo spettrale G simile al Sole, attorno alla quale orbitano tre pianeti transitanti. I transiti sono stati rilevati da *Kepler* e in seguito i pianeti sono stati confermati grazie ai TTV, alle velocità radiali, alle osservazioni del telescopio spaziale *Spitzer* e alle analisi statistiche sulla probabilità di falsi positivi (Cochran et al. (2011)^[24]).

I due pianeti più esterni, Kepler-18 c ($R = 5.49 \pm 0.26 R_{\oplus}$) e Kepler-18 d ($R = 6.98 \pm 0.33 R_{\oplus}$), sono dei pianeti con massa simile a quella di Nettuno, ma densità minore, che si trovano vicino alla risonanza 2:1. Il pianeta più interno, Kepler-18 b ($R = 2.00 \pm 0.10 R_{\oplus}$), invece ha le dimensioni di una super-Earth (Cochran et al. (2011)^[24]). Il sistema è, per quanto riguarda i due pianeti esterni, simile a quello di Kepler-9.

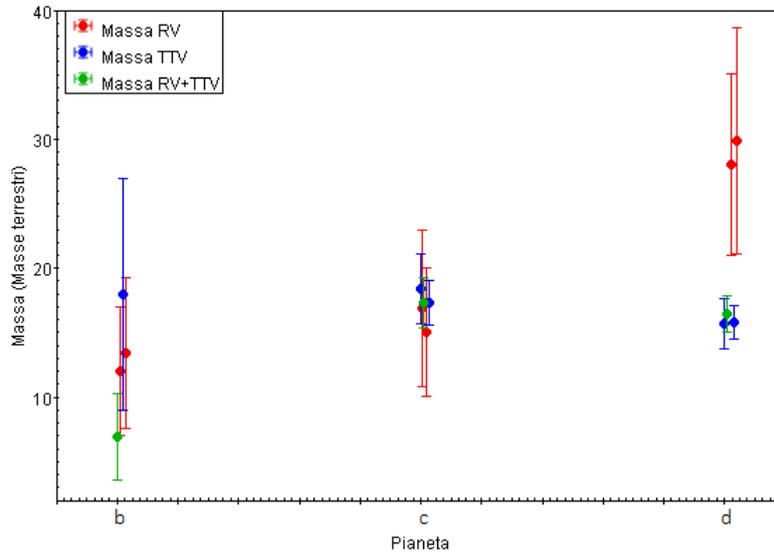


Figura 3.4: Misure delle masse dei pianeti del sistema Kepler-18.

Nell'articolo di Cochran et al. (2011)^[24] vengono calcolate le masse dei tre pianeti via RV, TTV e con un modello combinato. Con le velocità radiali vengono ottenuti due valori della massa, uno utilizzando solo i dati RV forniti dallo spettrografo Keck HIRES, il periodo orbitale dei pianeti e il t_0 , uno tramite una simulazione Monte Carlo basata su catena di Markov (MCMC) dei dati forniti da Yi et al. (2001)^[34]. I valori calcolati con il modello combinato RV+TTV sono pari a $6.9 \pm 3.4 M_{\oplus}$, $17.3 \pm 1.9 M_{\oplus}$ e $16.4 \pm 1.4 M_{\oplus}$ rispettivamente per i tre pianeti e sono indicati in verde in Figura 3.4.

In letteratura è presente anche un altro articolo, ossia quello di Hadden et al. 2014^[15], che riporta un altro valore delle masse di Kepler-18 c e Kepler-18 d ottenuto con i TTV.

Tutte le misure relative a questo sistema riportate in Tabella 3.2 risultano essere compatibili. In particolare Kepler-18 d e Kepler-18 c mostrano delle differenze RV - TTV molto basse, mentre quella relativa a Kepler-18 d supera di poco i 2σ , ma rimane comunque accettabile. Mentre per i primi due pianeti il valore di massa più alto è dato dai TTV, per Kepler-18 d risulta il contrario.

Come si può notare in Figura 3.4 anche le misure ottenute dal metodo combinato RV+TTV risultano compatibili con le altre, anche se per Kepler-18 b tale misura risulta essere minore di tutte le altre, e per Kepler-18 d questa è in ottimo accordo con le misure ottenute con i TTV, ma sempre distante circa 2σ da quelle relative alle RV.

3.1.3 Kepler-25

Il sistema ospita due pianeti transitanti, Kepler-25 b e Kepler-25 c, di raggi $2.71 \pm 0.05 R_{\oplus}$ e $5.20 \pm 0.09 R_{\oplus}$ rispettivamente, e un terzo pianeta più esterno, non transitante, scoperto grazie alle velocità radiali, Kepler-25 d, di raggio non noto (Marcy et al. (2014)^[14]). L'interazione gravitazionale tra i pianeti più interni, vicini alla risonanza 2:1, è resa evidente dalla presenza di TTV anticorrelati.

La stella ospite è un target non usuale per la tecnica delle velocità radiali. Infatti essa è caratterizzata da una rotazione veloce che produce un elevato allargamento Doppler delle righe, inoltre la sua alta temperatura superficiale, $T_{eff} = 6270K$, fa sì che le righe di assorbimento metalliche siano poche e deboli. È stata comunque inclusa nei KOI grazie alla sua luminosità, $K_p = 10.7$, che rende possibile la sua osservazione con un'alta risoluzione spettrale.

Le misure delle masse ottenute con le velocità radiali da Marcy et al. (2014)^[14] e con i TTV da Hadden et al. (2014)^[15] sono compatibili, come si può vedere dalla differenza RV - TTV in Tabella 3.1. È presente anche un'altra misura fatta con i TTV da Steffen et al. (2012)^[35]. In quest'ultimo articolo viene calcolato un limite superiore di $4036 M_{\oplus}$ per Kepler-25 b e di $1322 M_{\oplus}$ per Kepler-25 c, riportati in alto

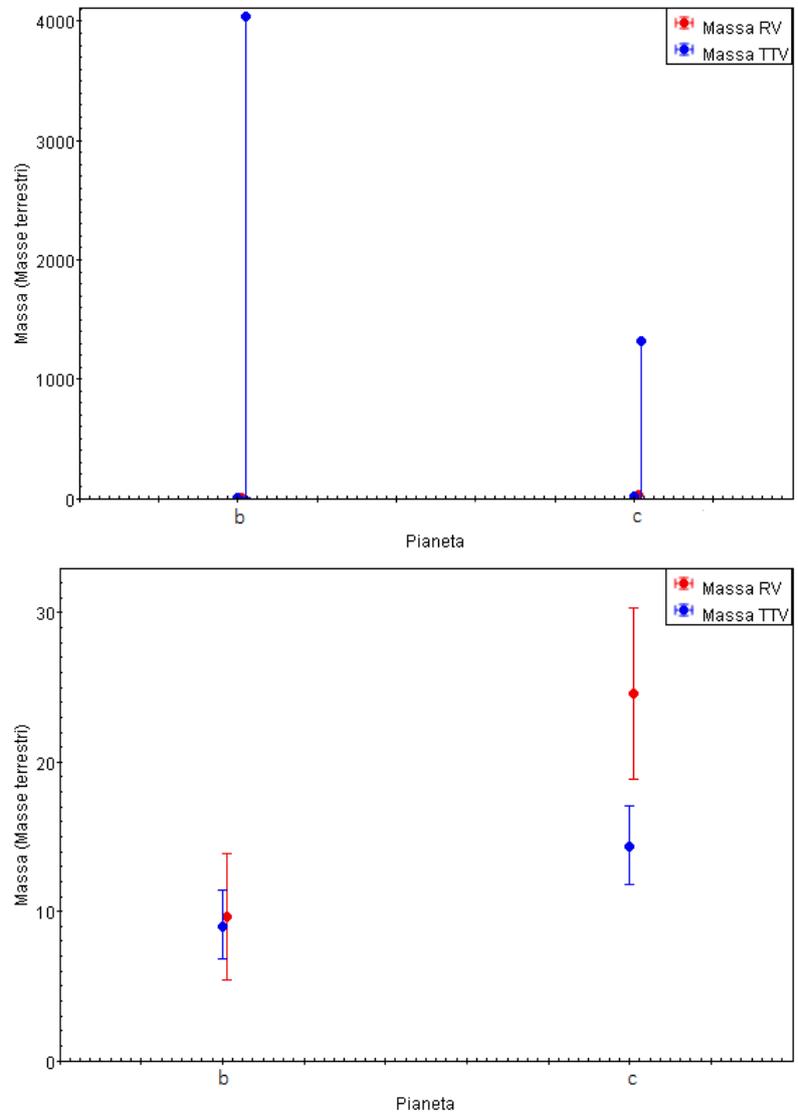


Figura 3.5: Entrambi i grafici riportano le misure della massa dei pianeti del sistema Kepler-25. Nel grafico in alto sono riportati anche i limiti superiori alla massa dei due pianeti forniti da Steffen et al. 2012^[35].

in Figura 3.5. Dato che si tratta di limiti superiori rimangono comunque compatibili con le altre misure, ma sono troppo elevati per fornire indicazioni utili nel confronto.

3.1.4 Kepler-37

Il sistema ospita quattro pianeti transitanti, ma solo di Kepler-37 d abbiamo una misura della massa sia con le RV che con i TTV.

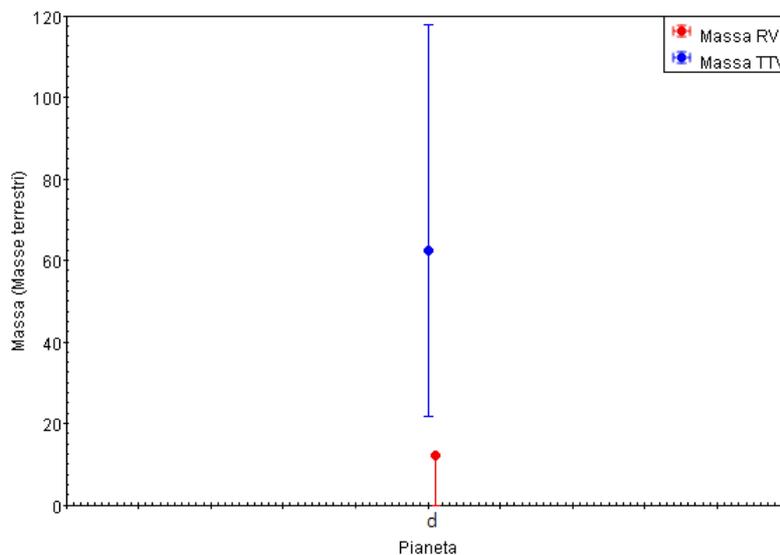


Figura 3.6: Misure della massa di Kepler-37 d.

Il valore della massa ottenuto con le velocità radiali da Marcy et al (2014)^[14] è, in realtà, un limite superiore. Questo perché l'ampiezza delle RV misurata da *Keck-HIRES* è al di sotto di 1ms^{-1} , insufficiente per calcolare la massa con precisione. È stata scelta allora la percentuale del 95% della distribuzione MCMC come limite superiore.

Nell'articolo di Hadden et al. 2014^[15] viene riportato un valore della massa, ottenuto con i TTV, che supera il limite superiore trovato con le velocità radiali. Le due misure sono comunque compatibili, dato che la loro differenza rimane al di sotto dei 2σ . Ciò accade perché l'incertezza della misura dei TTV è piuttosto elevata, e marginalmente compatibile con zero: se calcoliamo l'errore percentuale dato dalla barra di errore inferiore, ossia quello che più si avvicina alla misura data dalle RV, questo risulta del 65%.

3.1.5 Kepler-48

Kepler-48 è una stella K0 di sequenza principale, con rotazione abbastanza lenta, attorno alla quale sono stati individuati quattro pianeti, di cui tre transitanti (Marcy et al (2014)^[14]).

I due pianeti più interni, Kepler-48 b e Kepler-48 c, di raggio $1.88 \pm 0.10 R_{\oplus}$ e $2.71 \pm 0.14 R_{\oplus}$ rispettivamente, si trovano vicino alla risonanza 2:1 e infatti mostrano TTV.

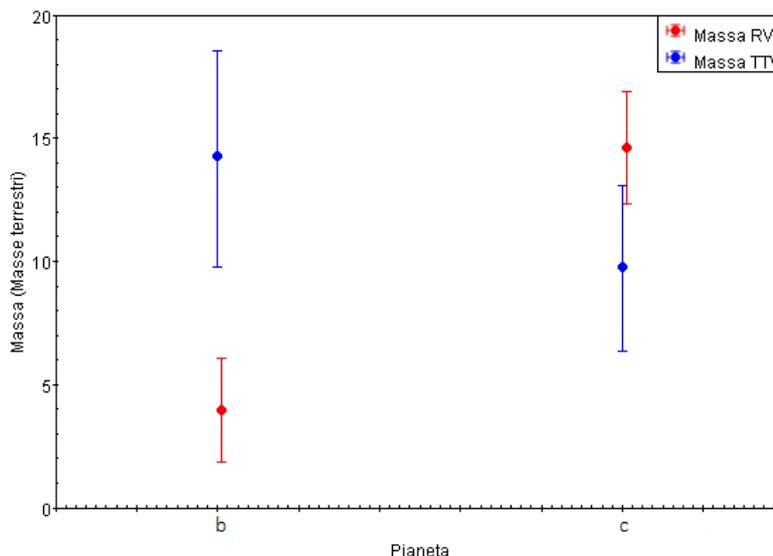


Figura 3.7: Misure della massa dei pianeti del sistema Kepler-48.

Le misure delle masse ottenute con le RV e con i TTV di Kepler-48 b mostrano una differenza $RV-TTV$ di -2.1σ . Possiamo comunque considerarle compatibili, e ciò è confermato anche dal limite superiore alla massa fornito dall'articolo di Steffen et al. (2013)^[36] e ottenuto grazie ai TTV, di $17.2 M_{\oplus}$, che non esclude nessuno dei due valori.

Kepler-48 c mostra una compatibilità delle misure migliore e, in questo caso, il valore maggiore è quello fornito dalle RV, mentre per Kepler-48 b si ha il contrario. Il limite superiore presente nell'articolo di Steffen è di $10.1 M_{\oplus}$ e si colloca tra le due misure. Bisogna comunque tener conto che per calcolare questi limiti sono stati utilizzati i TTV ed è forse per questo motivo che risultano in migliore accordo con le altre misure fatte con questa tecnica.

3.1.6 Kepler-56

I target della missione *Kepler* sono, per la maggior parte, stelle non ancora evolute, vicine alla Sequenza Principale, così da aumentare la probabilità di rivelazione di

pianeti simili alla Terra. Kepler-56, al contrario, è una gigante rossa ospitante due pianeti transitanti e coplanari e un terzo pianeta più massivo e distante, scoperto tramite RV (Huber et al. (2013)^[37]). Il piano in cui si muovono i primi due pianeti, Kepler-56 b e Kepler-56 c, di raggio $6.51^{+0.29}_{-0.28} R_{\oplus}$ e $9.80 \pm 0.46 R_{\oplus}$ rispettivamente, è inclinato di circa 40° rispetto al piano equatoriale della stella.

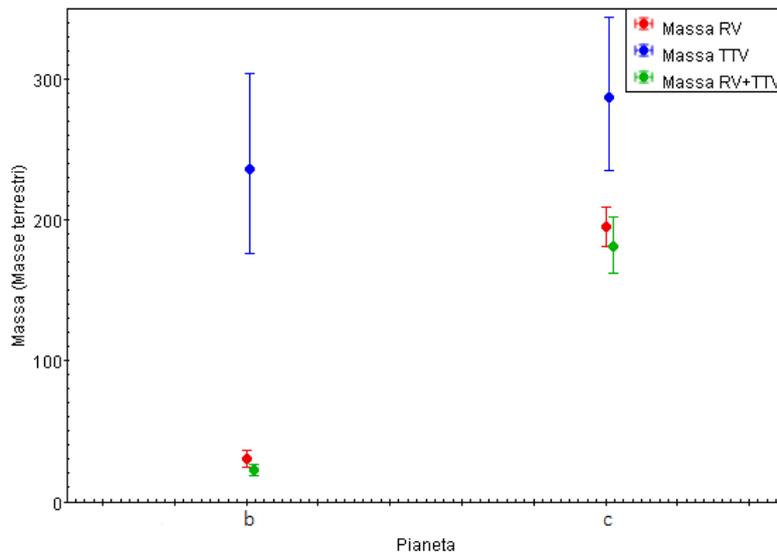


Figura 3.8: Misure della massa dei pianeti del sistema Kepler-56.

Kepler-56 b e Kepler-56 c, trovandosi vicino alla risonanza 2:1, interagiscono gravitazionalmente in modo evidente, mostrando dei TTV. Grazie a questi è stato possibile, per Hadden et al. 2014^[15], calcolare un valore della loro massa. Questi valori presentano incertezze piuttosto ampie e per entrambi i pianeti risultano maggiori dei valori della massa ottenuti con le velocità radiali da Otor et al. 2016^[16] e utilizzando sia RV che TTV da Huber et al. (2013)^[37], come si può vedere in Figura 3.8. In entrambi i casi le misure ottenute con il metodo combinato sono in ottimo accordo con quelle ottenute con le sole RV.

Per quanto riguarda Kepler-56 c le misure derivate da RV e TTV singolarmente si possono considerare compatibili. Invece, nel caso di Kepler-56 b, la differenza $RV - TTV$ supera in modulo i 3σ . Dato che il valore ottenuto con le RV è più preciso e si trova in accordo con il valore ottenuto utilizzando sia RV che TTV, possiamo ipotizzare che la sorgente della discrepanza sia un problema nell'analisi dei TTV, ma sarebbe necessaria un'analisi ulteriore.

3.1.7 Kepler-89

Si tratta di un sistema multiplo dinamicamente molto compatto e vicino alla propria stella. Sono stati scoperti quattro pianeti transitanti e due di questi sono in una configurazione tale da poter originare una “planet-planet eclipse (PPE)” (Masuda et al. (2013)^[18]). Durante il loro transito doppio, infatti, uno dei due pianeti copre una porzione dell’altro.

Di tre pianeti di questo sistema è stata calcolata la massa sia con le velocità radiali, da Weiss et al. (2013)^[17], sia con i TTV, da Masuda et al. (2013)^[18], come si può vedere in Figura 3.9.

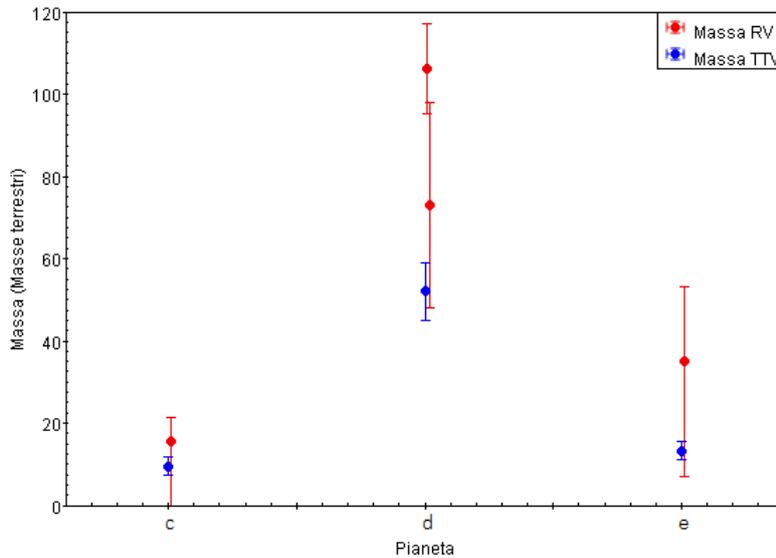


Figura 3.9: Misure della massa dei pianeti del sistema Kepler-89.

Le misure di massa di Kepler-89 c e di Kepler-89 e mostrano una compatibilità ottima, nonostante il debole segnale RV che producono questi due pianeti.

Per quanto riguarda Kepler-89 d, invece, disponiamo anche di un’altra misura di massa ottenuta con le velocità radiali da Hirano et al. (2012)^[25], anche se l’archivio Nasa ritiene che l’RV best-fit value sia quello calcolato da Weiss. Per ottenere la compatibilità è stata calcolata la media pesata, riportata in Tabella 3.2, delle misure relative alle RV. La differenza finale $RV-TTV$ ha un valore piuttosto alto, 4.0σ .

I TTV di Kepler-89 c e Kepler-89 e sono determinati principalmente da Kepler-89 d, che è il pianeta più massiccio del sistema, mentre i TTV di quest’ultimo sono determinati da entrambi i suoi vicini. Nell’articolo di Masuda et al. (2013)^[18] vengono condotte delle simulazioni utilizzando i valori della massa ottenuti con le velocità radiali. Assumendo che sia vero il valore della massa di Kepler-89 d ricavato nell’articolo di Weiss et al. (2013)^[17], ossia $106 \pm 11 M_{\oplus}$, secondo la simulazione

questo produrrebbero un segnale TTV di Kepler-89 c più grande di quello osservato. Inoltre non è solo l'assunzione sulla massa a dare problemi, in questo caso, ma anche l'assunzione sulle eccentricità dei pianeti c e d: non si riescono a trovare due valori di e_c e e_d che spieghino entrambi i TTV.

La situazione migliora se per la simulazione si assume per vera la massa calcolata da Hirano et al. (2012)^[25], $73 \pm 25 M_{\oplus}$, rendendo evidente il fatto che i TTV favoriscono una massa di Kepler-89 d più piccola di quella dell'RV best-fit value.

Nell'articolo di Masuda viene anche ammesso che in realtà il segnale RV prodotto da Kepler-89 d è stato identificato con grande precisione dallo spettrografo Keck-HIRES, a differenza di quello degli altri due pianeti che risulta più incerto. È stato quindi fatto un'ulteriore calcolo per ottenere l'ampiezza della velocità radiale utilizzando i parametri ottenuti con i TTV. Ciò che ne risulta è un'ampiezza delle RV minore rispetto a quella ottenuta da Weiss et al. (2013)^[17].

La discrepanza rimane dunque irrisolta. Sarebbe necessario un ulteriore studio del sistema con ciascuna delle due tecniche.

3.1.8 Kepler-289

Il sistema Kepler-289 ospita tre pianeti transitanti, Kepler-289 b, Kepler-289 c e Kepler-289 d i cui periodi orbitali sono rispettivamente 34.55, 125.85 e 66.06 giorni, mentre i raggi sono di $2.15 \pm 0.10 R_{\oplus}$, $11.59 \pm 0.10 R_{\oplus}$ e $2.68 \pm 0.17 R_{\oplus}$ (Schmitt et al. (2014)^[20]). Il rapporto tra i periodi del pianeta più esterno rispetto all'intermedio e dell'intermedio rispetto al più interno è sempre di 1.91, quindi prossimi alla risonanza 1:2:4, e infatti Kepler-289 c e Kepler-289 d mostrano dei TTV anticorrelati con un superperiodo pari a $P_{TTV} = 1325 \pm 5$ giorni. È quindi possibile calcolarne la massa come viene fatto nell'articolo di Schmitt et al. (2014)^[20].

Di Kepler-289 c abbiamo anche una misura della massa ottenuta con le velocità radiali da Santerne et al. (2016)^[19]. Questa però differisce dalla prima misura di 3.3σ , come si può vedere in Tabella 3.1 e in Figura 3.10. Nell'articolo di Santerne viene riportato questo problema e vengono proposti tre motivi che potrebbero spiegare tale differenza:

1. la massa della stella Kepler-289 risulta più grande di 3.7σ rispetto al valore adottato da Schmitt et al. (2014)^[20];
2. la stella è molto attiva e ciò potrebbe influenzare sia le velocità radiali che i transiti;
3. per il calcolo della massa con le RV è stata assunta un'orbita circolare, e, seppure anche nell'articolo di Schmitt venisse riportata un'eccentricità piuttosto bassa, questo potrebbe essere una fonte di errore sistematico.

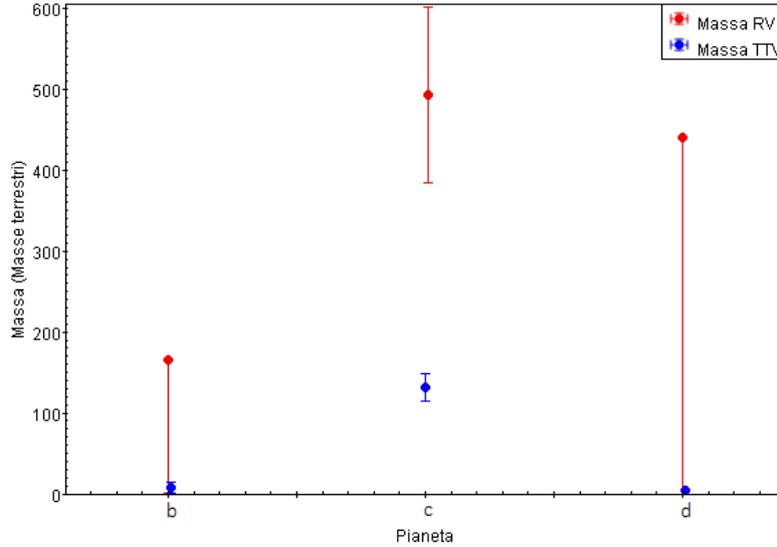


Figura 3.10: Misure della massa dei pianeti del sistema Kepler-289.

Per Kepler-289 b e d nell'articolo di Santerne et al. (2016)^[19] viene indicato solo un limite superiore alle masse, come si può vedere in Figura 3.10, compatibile con le misure ottenute grazie ai TTV, anche se piuttosto alto rispetto a queste.

3.1.9 WASP-47

WASP-47 è una stella di tipo spettrale G9, attorno alla quale sono stati scoperti quattro pianeti. Questo sistema ospita un Hot-Jupiter di periodo 4.16 giorni, WASP-47 b, un pianeta delle dimensioni di Nettuno e periodo 9 giorni, WASP-47 d, ed un pianeta di raggio $R \sim 1.8 R_{\oplus}$ e periodo 0.8 giorni, WASP-47 e, tutti e tre transitanti (Almenara et al. (2016)^[26]). Il quarto pianeta ha un periodo maggiore rispetto agli altri, $P \sim 570$ giorni, e non transita.

Come si può vedere in Tabella 3.2, WASP-47 b e WASP-47 c sono i pianeti di cui abbiamo più misure con entrambe le tecniche. Le misure delle masse ottenute con le velocità radiali sono state fatte da Almenara et al. (2016)^[26] con i dati forniti dagli spettrografi CORALIE e PFS, da Dai et al. (2015)^[21] con il Planet Finder Spectrograph sul telescopio Magellano/Clay da 6.5 m, da Sinukoff et al. (2017)^[30] con Keck-HIRES. Per WASP-47 b disponiamo anche di altri due valori ottenuti con le RV da Neveu-VanMalle et al. (2016)^[28] e da Hellier et al. (2012)^[29] utilizzando, in entrambi i casi, i dati forniti dallo spettrografo CORALIE. I due pianeti inoltre mostrano curve TTV anticorrelate con un super-periodo di circa 52.67 giorni, è stato quindi possibile osservarli con K2, che ha una base osservativa temporale di 69 giorni, e calcolarne la massa come è stato fatto da Becker et al. (2015)^[22].

Inoltre disponiamo di un altro valore della massa di entrambi i pianeti ottenuto con i TTV da Weiss et al. (2017)^[27]. Sono state poi calcolate le medie pesate dei valori ottenuti con le singole tecniche, per poter poi calcolare la differenza $RV-TTV$. La compatibilità, in entrambi i casi, risulta ottimale.

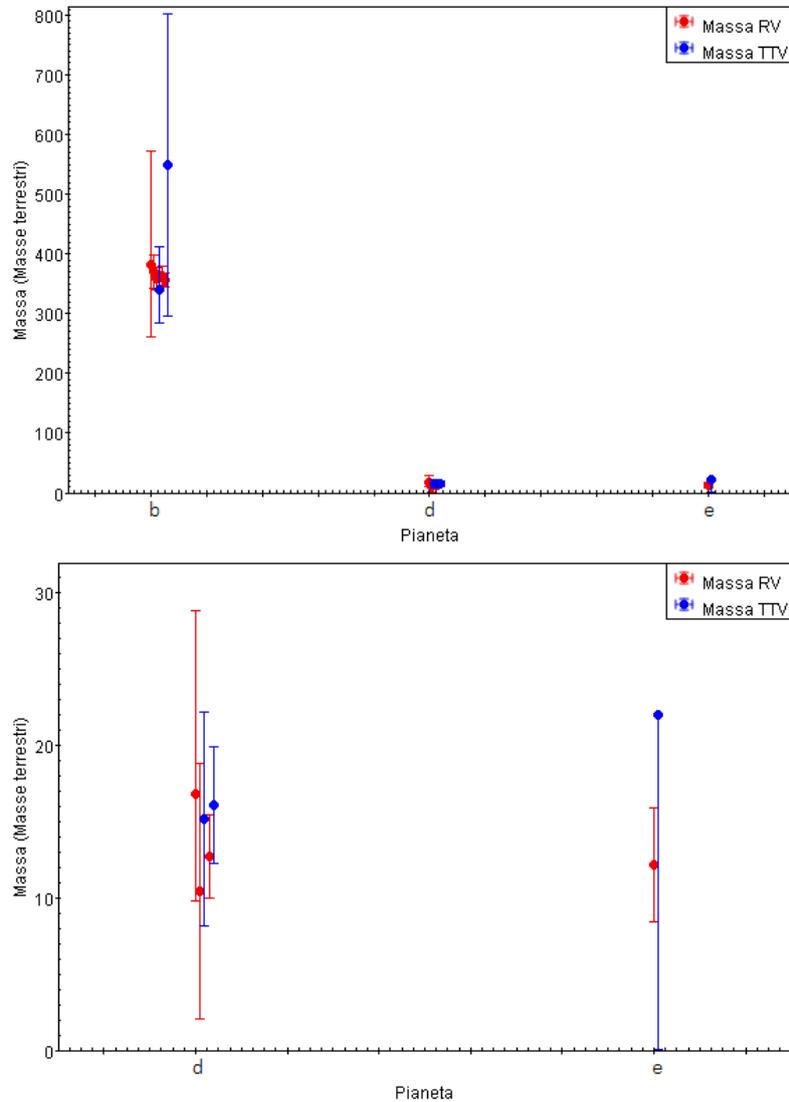


Figura 3.11: Entrambi i grafici riportano le misure della massa dei pianeti del sistema WASP-47, ma con diverse scale verticali per una migliore visualizzazione.

WASP-47 e è stato aggiunto successivamente al campione perché sul catalogo risulta segnato con $Flag\ TTV=0$, e quindi veniva escluso dalla prima selezione, mentre negli articoli che studiano il sistema viene menzionato e la sua massa viene calcolata sia con le RV da Dai et al. (2015)^[21], sia con i TTV da Becker et al. (2015)

[22]. La misura ottenuta con i TTV è in realtà un limite superiore, con un livello di confidenza del 95%. La misura ottenuta con le velocità radiali sta al di sotto di questo limite superiore e quindi possiamo ritenere le due misure compatibili.

3.2 Pianeti con massa misurata con una sola tecnica e con un metodo combinato

Nel nostro campione sono presenti tre pianeti, riportati in Tabella 3.3, per i quali non abbiamo una misura della massa ottenuta sia con le RV, che con i TTV separatamente. Per questi disponiamo di un valore ottenuto con una delle due tecniche singolarmente e di un altro ottenuto usandole entrambe. Abbiamo ritenuto opportuno analizzare questi sistemi separatamente.

Pianeta	Massa RV (M_{\oplus})	Massa TTV (M_{\oplus})	Massa RV+TTV (M_{\oplus})	Differenza
Kepler-9 b		2175_{-170}^{+128} ^[15]	80.1 ± 4.1 ^[38]	12.3σ
			43.5 ± 0.6 ^[39]	12.5σ
Kepler-9 c		$509.7_{-40.4}^{+30.6}$ ^[15]	54.3 ± 4.1 ^[38]	11.2σ
			29.9 ± 0.6 ^[39]	11.9σ
Kepler-19 b	$20.3_{-20.3}^{+0}$ ^[40]		$8.4_{-1.5}^{+1.6}$ ^[41]	0.6σ

Tabella 3.3: Misure delle masse dei pianeti che possiedono una misura della massa calcolata o con le RV o con i TTV e un'altra misura utilizzando le due tecniche assieme. Dato che le due misure ottenute con il metodo combinato per Kepler-9 b e c non risultano compatibili tra di loro, abbiamo calcolato la differenza RV - TTV rispetto ad entrambe.

3.2.1 Kepler-9

Kepler-9 è una stella simile al Sole che ospita due pianeti vicini alla risonanza 2:1, ossia Kepler-9 b e Kepler-9 c, di raggio $9.4 \pm 0.8 R_{\oplus}$ e $9.2 \pm 0.8 R_{\oplus}$ rispettivamente (Holman et al. (2010)^[38]).

Questo sistema presenta le misure di massa più incompatibili di tutto il campione considerato, infatti la differenza in termini di σ tra le misure ottenute con i TTV e quelle ottenute con il metodo combinato, per i due pianeti considerati, è di circa 12 e 11 σ rispettivamente. Le misure delle masse ottenute con i TTV da Hadden et al. (2014)^[15] hanno dei valori particolarmente elevati, come si può vedere nella Tabella 3.1, rispetto a quelli ottenuti da Holman et al. (2010)^[38]. In parte questo potrebbe essere dovuto all'assunzione di eccentricità nulla fatta nell'articolo, che porta ad una sovrastima del valore della massa quando l'orbita presenta un'eccentricità maggiore di zero. In effetti nell'articolo di Holman et al. (2010)^[38] viene riportata un'eccentricità di 0.15 per Kepler 19 b e di 0.13 per Kepler 19 c. Holman, nel suo lavoro,

afferma che, anche basandosi solo sui TTV, si possa escludere per Kepler-9 b una massa superiore a $4 M_J$, ove M_J è la massa di Giove, mentre il valore calcolato da Hadden supera le $6 M_J$.

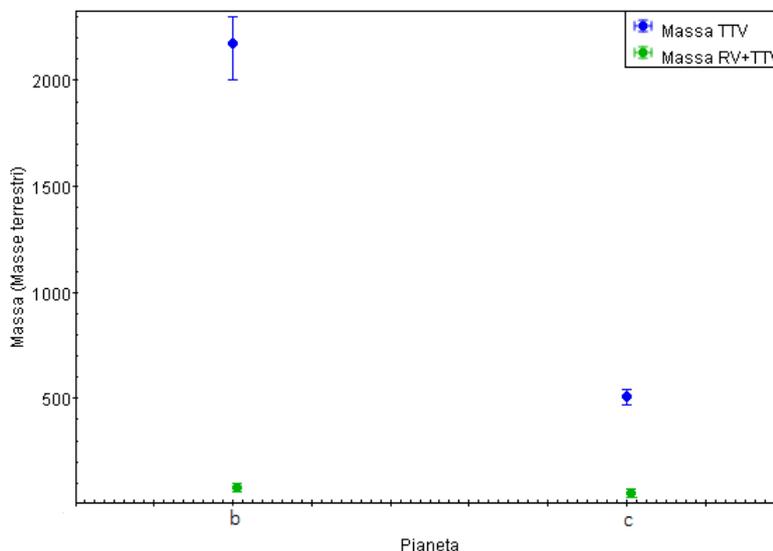


Figura 3.12: Misure delle masse dei pianeti del sistema Kepler-9.

È presente anche un altro articolo, Borsato et al. (2014)^[39], che tratta di questo sistema. In questo lavoro viene presentato TRADES, TRAnsits and Dynamics of Exoplanetary Systems, un software che simultaneamente interpola i dati ottenuti dalle velocità radiali e dai transiti osservati e simula le possibili configurazioni fisiche e dinamiche del sistema planetario, determinandone i parametri anche partendo da dati poco precisi. Ma, nel caso di questo sistema, gli $O-C$ simulati differiscono rispetto a quelli osservati e riportati da Mazeh et al. (2013)^[42] e le masse così calcolate risultano di $43.541 \pm 0.636 M_{\oplus}$ per Kepler-9 b e di $29.875 \pm 0.636 M_{\oplus}$ per Kepler-9 c, circa la metà dei valori ottenuti da Holman et al. (2010)^[38].

Il sistema necessiterebbe di osservazioni ulteriori al fine di comprendere l'origine della discrepanza e raggiungere una stima della massa più sicura.

3.2.2 Kepler-19

Il sistema presenta un pianeta transitante di periodo 9.3 giorni e raggio $2.2 R_{\oplus}$, Kepler-19 b, e due pianeti Nettuniani non transitanti, Kepler-19 c e Kepler-19 d, scoperti grazie ai TTV mostrati dal primo e alle RV rispettivamente.

Per Kepler-19 b disponiamo sia di una misura della massa ottenuta con le RV da Ballard et al. (2011)^[40] con lo spettrografo Keck HIRES, che è in realtà un limite superiore con un livello di confidenza di 3σ , sia di una misura ottenuta recentemente

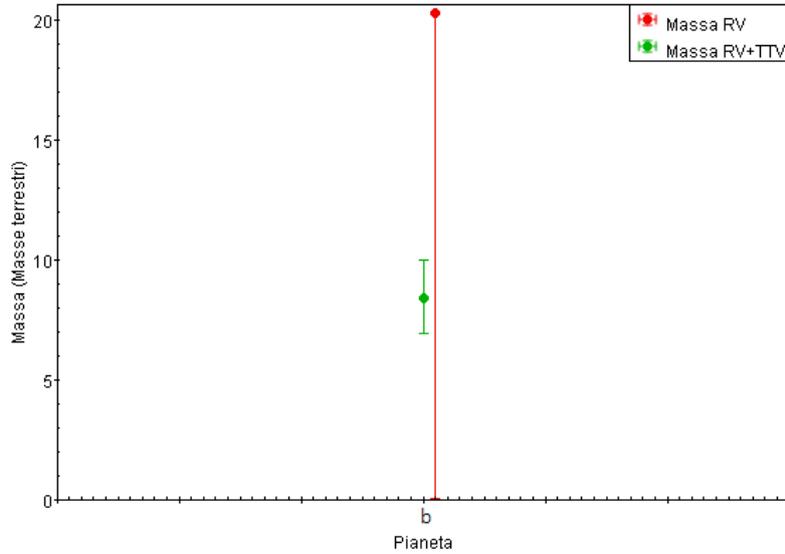


Figura 3.13: Misure delle masse di Kepler-19.

utilizzando RV e TTV assieme da Malavolta et al. (2017)^[41]. Nell'ultimo caso le misure delle velocità radiali sono state ottenute con lo spettrografo HARPS-N. Le misure in questo caso sono compatibili, con una differenza in termini di σ di 0.6σ .

3.3 Sistemi di pianeti vicini alla risonanza con Flag TTV=0

Analizziamo ora i pianeti del secondo campione e selezioniamo le coppie, riportate in Tabella 3.4, che si trovano vicine alle risonanze più evidenti. Come possiamo vedere in Figura 3.14 l'intensità del segnale TTV dipende fortemente dall'ordine della risonanza tra il pianeta considerato, che in questo caso ha un periodo di 4.8878 giorni, e il pianeta perturbatore, nonché dalla massa di quest'ultimo. Come già specificato nella parte introduttiva, sono le risonanze di primo ordine (1:2, 3:2, ...) a causare le perturbazioni più evidenti. Si può inoltre notare che i picchi non si trovano esattamente in corrispondenza del rapporto di risonanza preciso, ma sono spostati rispetto ad esso di una frazione pari a qualche percento.

Alcuni sistemi presentano più di una possibile risonanza tra i pianeti che li compongono. Quando ciò accade uno stesso pianeta può comparire più volte in Tabella 3.4, in modo da evidenziare tutte le possibilità che si possono verificare.

Per ogni coppia di pianeti è stato calcolato il super-periodo P_{TTV} grazie all'Equazione (1.3.7). Bisogna comunque tener conto del fatto che la stima così ottenuta

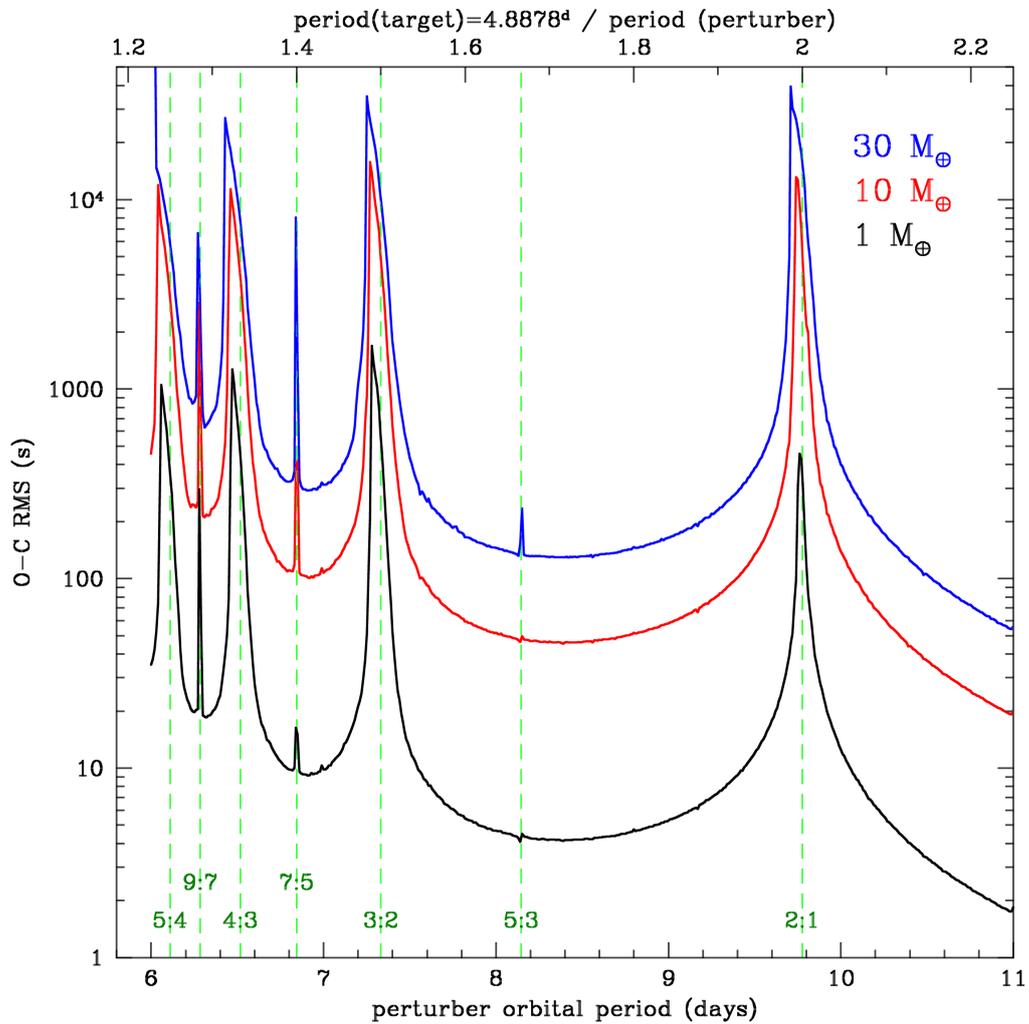


Figura 3.14: Ampiezza del segnale TTV atteso su un pianeta nettuniano di periodo orbitale pari a 4.8878^d da parte di un perturbatore esterno posto a un dato periodo orbitale e di massa pari a 30, 10, 1 M_{\oplus} (linea blu, linea rossa e linea nera). La scala verticale è logaritmica; le principali risonanze orbitali sono indicate dalle linee verticali.

risulta una prima approssimazione dato che anche i periodi dei due pianeti dipendono anch'essi dalla periodicità dei TTV.

Per verificare la presenza o meno di curve TTV anticorrelate tra le coppie di pianeti selezionati ci siamo serviti delle misurazioni degli $O-C$ presenti nei cataloghi forniti da Mazeh et al. (2013)^[43] e da Holczer et al. (2016)^[44]. Per avere accesso a questi dati abbiamo utilizzato *VizieR*¹, un servizio on-line che permette di accedere ai cataloghi astronomici pubblicati, gestito dal *Centre de Données astronomiques de Strasbourg*.

Non tutti i pianeti hanno delle misure di $O-C$, questo anche perché non tutti gli oggetti selezionati transitano e non è quindi possibile misurare un TTV. Anche i pianeti non transitanti scoperti tramite TTV di pianeti transitanti vengono segnati con *Flag TTV=0* perché non possono mostrare essi stessi dei TTV.

Quando invece erano disponibili le misure di $O-C$ è stato fatto un plot di queste in funzione del tempo.

Di seguito analizzeremo i singoli sistemi mostrando anche i relativi grafici.

K2-32 I pianeti b, c e d di questo sistema si trovano vicini alla risonanza 1:2:3. Purtroppo i due cataloghi utilizzati riportano solo misurazioni per pianeti *Kepler*, quindi non è stato possibile realizzare un plot. Gli articoli pubblicati che parlano di questo sistema non nominano un'analisi degli $O-C$ già eseguita. Inoltre i super-periodi delle due possibili risonanze sono problematici per la missione K2, data la sua baseline di 69 giorni: come si può vedere in Tabella 3.4 il super-periodo di b e c è al limite della baseline, mentre quello di c e d è molto superiore. Sarebbe quindi necessaria un'analisi ulteriore degli $O-C$ di questo sistema con nuovi dati.

Kepler-19 Il pianeta Kepler-19 b era già stato analizzato precedentemente in quanto presenta una misura della massa ottenuta con le velocità radiali e una ottenuta utilizzando RV e TTV assieme; è stato aggiunto anche a questo campione per poterlo confrontare con gli altri due pianeti del suo sistema che ne provocano il TTV. Ma, come abbiamo già visto nel paragrafo 3.2.2, Kepler-19 c e Kepler-19 d non transitano quindi non è possibile misurare dei TTV.

Kepler-20 Per il pianeta Kepler-20 e non sono presenti le misure degli $O-C$ quindi sono stati plottati solo i grafici relativi alla risonanza 1:3 tra Kepler-20 b e Kepler-20 c, vedi Figura 3.15, e a quella 1:2 tra Kepler-20 c e Kepler-20 f, vedi Figura 3.16. In entrambi i grafici non riconosciamo un andamento particolare e questo viene confermato negli articoli di Gautier et al. (2012)^[45] e di Buchhave et al. (2016)^[46]. Anche secondo gli autori di questi lavori i pianeti del sistema non mostrano TTV

¹<http://vizier.u-strasbg.fr/viz-bin/VizieR>

Pianeta	Periodo (giorni)	Possibile risonanza	Rapporto tra i periodi	P_{TTV}
K2-32 b	8.99	1 : 2 = 0.5	0.44	69.30
K2-32 c	20.66			
K2-32 c	20.66	2 : 3 = 0.67	0.65	451.83
K2-32 d	31.72			
Kepler-19 b	9.29	1 : 3 = 0.33	0.32	306.70
Kepler-19 c	28.73			
Kepler-19 c	28.73	1 : 2 = 0.5	0.46	329.56
Kepler-19 d	62.95			
Kepler-20 b	3.70	1 : 2 = 0.5	0.61	17.43
Kepler-20 e	6.10			
Kepler-20 e	6.10	2 : 3 = 0.67	0.56	17.41
Kepler-20 c	10.85			
Kepler-20 c	10.85	1 : 2 = 0.5	0.55	99.77
Kepler-20 f	19.58			
Kepler-37 b	13.37	2 : 3 = 0.67	0.63	113.83
Kepler-37 c	21.30			
Kepler-62 b	5.71	1 : 2 = 0.5	0.46	70.28
Kepler-62 c	12.44			
Kepler-62 c	12.44	2 : 3 = 0.67	0.69	226.68
Kepler-62 d	18.16			
Kepler-68 b	5.40	1 : 2 = 0.50	0.56	43.48
Kepler-68 c	9.61			
Kepler-92 b	13.75	1 : 2 = 0.50	0.51	474.08
Kepler-92 c	26.72			
Kepler-100 b	6.89	1 : 2 = 0.50	0.54	92.11
Kepler-100 c	12.82			
Kepler-101 b	3.49	1 : 2 = 0.50	0.58	22.23
Kepler-101 c	6.03			
Kepler-102 b	5.29	1 : 2 = 0.50	0.51	202.0
Kepler-102 d	10.31			
Kepler-102 c	7.07	3 : 4 = 0.75	0.68	27.51
Kepler-102 d	10.31			
Kepler-102 d	10.31	2 : 3 = 0.67	0.64	122.75
Kepler-102 e	16.15			
Kepler-102 e	16.15	3 : 5 = 0.6	0.59	277.07
Kepler-102 f	27.45			
Kepler-131 b	16.09	3 : 5 = 0.6	0.63	105.56
Kepler-131 c	25.52			
Kepler-406 b	2.43	1 : 2 = 0.50	0.52	48.98
Kepler-406 c	4.62			

Tabella 3.4: Sistemi di pianeti vicini alla risonanza con i relativi periodi orbitali, la risonanza a cui più si avvicinano, il vero rapporto tra i periodi e il possibile super-periodo.

coerenti. Non sarà quindi possibile, a meno di osservazioni più precise da condurre in futuro, calcolare la massa di questi pianeti tramite i TTV.

Kepler-37 Il sistema è già stato trattato in parte nel Paragrafo 3.1.4, dato che Kepler-37 d possiede una misura della massa ottenuta con le RV e una con i TTV. Per vedere se anche gli altri pianeti del sistema mostrano delle variazioni regolari dei TTV abbiamo realizzato un plot degli $O-C$ in funzione del tempo di Kepler-37 b e Kepler-37 c, vicini alla risonanza 2:3, riportato in Figura 3.17. Dal grafico non riusciamo ad individuare un andamento coerente. Inoltre, per Kepler-37 b non disponiamo di misure per tutto l'arco temporale in cui sono stati misurati gli $O-C$ di Kepler-37 c. In ogni caso, dato il P_{TTV} calcolato per questa risonanza, se ci fosse un andamento regolare e anticorrelato dovrebbe essere visibile anche in questa porzione ristretta. Nell'articolo di Van Eyelen & Albrecht (2015)^[47], in cui viene menzionato questo sistema, si cercano nuovi TTV non ancora individuati per condurre un'analisi delle eccentricità. Kepler 37, però, non viene elencato tra i sistemi per cui vengono trovati nuovi TTV. Neanche nei lavori di Marcy et al. (2014)^[14] e di Holczer et al. (2016)^[48] vengono nominate delle novità sui TTV di questo sistema.

In questo sistema è presente un altro pianeta, Kepler 37 e, che viene segnato sul catalogo con $Flag\ TTV=1$ perché è stato scoperto grazie ai TTV mostrati da Kepler-37 d e, essendo anch'esso un pianeta transitante, disponiamo anche dell'ampiezza dei suoi TTV riportata da Hadden & Lithwick (2014)^[15]. Nell'articolo, però, non viene calcolata la sua massa, come invece viene fatto per Kepler-37 d. Potrebbe essere interessante calcolarla e ottenere delle misure delle velocità radiali così da poter confrontare i risultati ottenuti con le due tecniche anche per questo pianeta.

Kepler-62 Il sistema ospita cinque pianeti scoperti, di cui due in zona abitabile con raggi di 1.4 e 1.6 R_{\oplus} , ossia Kepler-62 e e Kepler-62 f (Borucki et al. (2013)^[49]). Questi ultimi due pianeti però non sembrano avere periodi in rapporto di risonanza e sono molti distanti dai pianeti più interni, tanto che possiamo escludere che potrebbero causarne dei TTV regolari. I pianeti più interni, Kepler-62 b, Kepler-62 c e Kepler-62 d, sono vicini alla risonanza 1:2:3. Per Kepler-62 c non sono disponibili le misure degli $O-C$ tramite VizieR, quindi abbiamo realizzato il plot tra Kepler-62 b e Kepler-62 d, riportato in Figura 3.18. Non sembra esserci un andamento coerente e anticorrelato. Neppure quando presi singolarmente i due pianeti sembrano mostrare un andamento che potrebbe indicare un possibile TTV dovuto a Kepler-62 c.

Gli articoli presenti in letteratura che trattano di questo sistema non nominano dei possibili TTV.

Kepler-68 È una stella di tipo G attorno alla quale orbitano due pianeti transiti, Kepler-68 b e Kepler-68 c, vicini alla risonanza 1:2, e un terzo pianeta, non

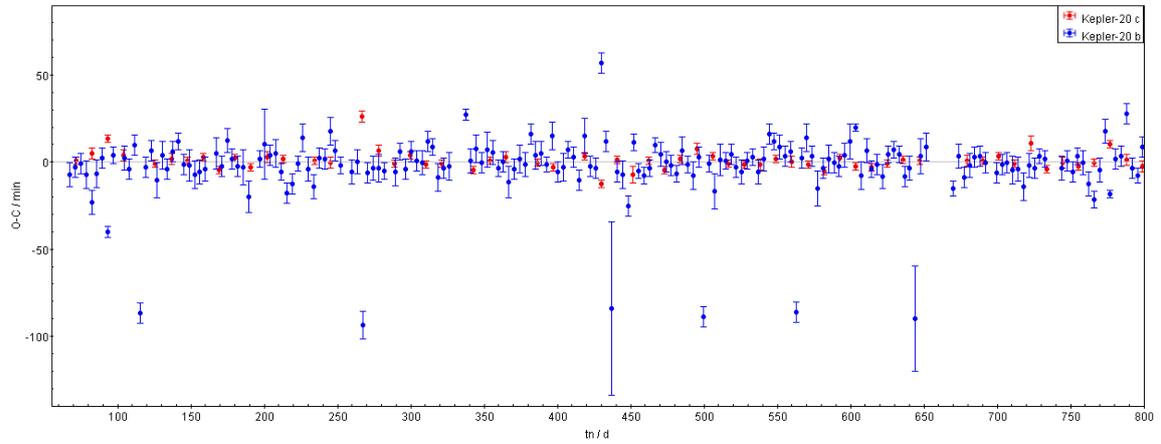


Figura 3.15: O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-20 b e Kepler-20 c. È stata selezionata solo una parte dei dati (fino al giorno 800) perché altrimenti le misure erano talmente numerose da apparire confuse. La seconda parte (dal giorno 800 in poi) non si differenzia in modo particolare dalla prima.

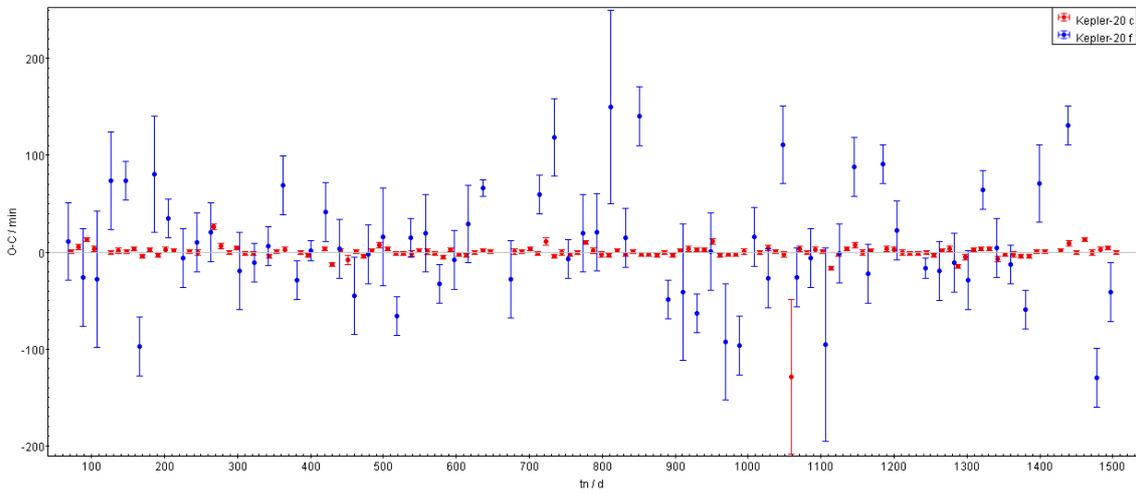


Figura 3.16: O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-20 c e Kepler-20 f.

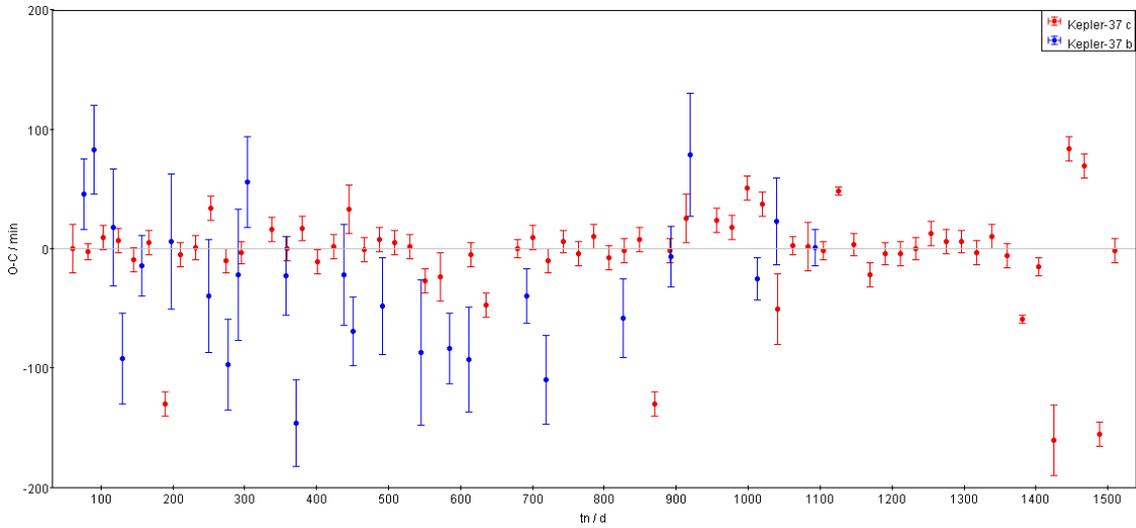


Figura 3.17: O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-37 b e Kepler-37 c.

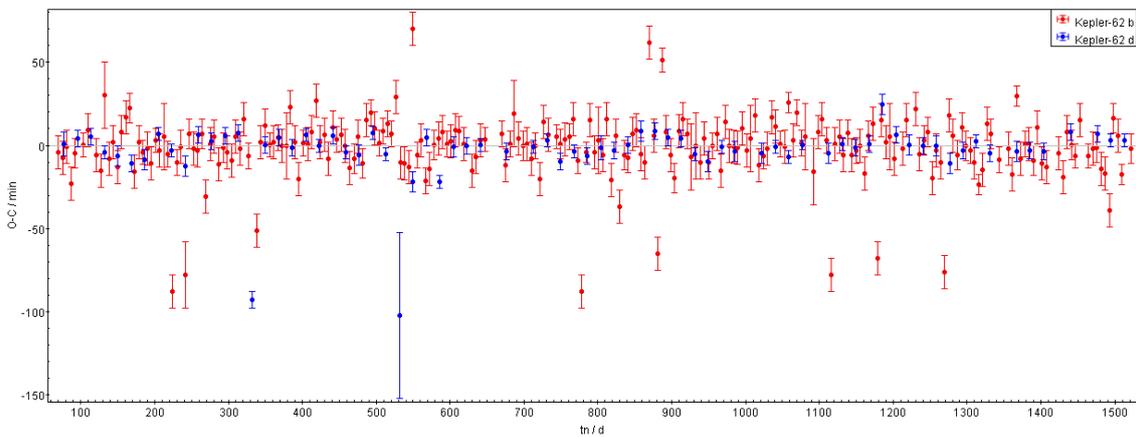


Figura 3.18: O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-62 b e Kepler-62 d.

transitante, Kepler-68 d (Marcy et al. (2014)^[14]). Dal diagramma degli $O-C$, riportato in Figura 3.19, non si nota un andamento dei TTV evidente. Le misure di Kepler-68 b, in particolare, rimangono praticamente sempre sovrapposte alla retta $O - C = 0$. Nell'articolo di Gilliland et al. (2013)^[50] viene discusso questo diagramma e si conclude che sia nelle predizioni, sia nelle osservazioni, i TTV di questi due pianeti rimangono marginali e non è perciò necessario portare avanti un'ulteriore analisi.

Kepler-92 Kepler-92 b e Kepler-92 c sono due pianeti transitanti vicini alla risonanza 1:2 (Van Eyelen & Albrecht (2015)^[47]). Dal plot realizzato su questa coppia di pianeti (Figura 3.20) non si riesce a distinguere con esattezza un andamento coerente e anticorrelato. In letteratura però è presente un articolo, quello di Xie (2014)^[51], in cui vengono riportati sia i dati TTV, sia i valori delle masse dei due pianeti calcolate con questo metodo, che risultano essere $64.3 \pm 13.9 M_{\oplus}$ e $6.1 \pm 1.8 M_{\oplus}$ rispettivamente.

In questo caso quindi i due pianeti andrebbero segnati sul catalogo con $FlagTTV = 1$. Probabilmente l'andamento periodico dei TTV non è così evidente nel nostro plot perché questo è stato realizzato con dati osservativi diversi rispetto a quelli con cui Xie (2014)^[51] ha realizzato i suoi plot (Figura 3.21).

Nell'articolo di Xie viene inoltre aggiunto che, essendo questo sistema sufficientemente luminoso, con una magnitudine *Kepler* inferiore a 12, sarebbe un soggetto ideale per osservazioni future. In particolare, se venissero fatte delle misurazioni delle velocità radiali, sarebbe possibile ottenere un altro valore della massa da confrontare con quello già ottenuto con i TTV.

Kepler-100 Questo sistema ospita tre pianeti validati grazie alle velocità radiali (Van Eyelen & Albrecht (2015)^[47]). I due pianeti più interni, Kepler-100 b e Kepler-100 c, si trovano vicini alla risonanza 1:2. Secondo Van Eyelen & Albrecht (2015)^[47] essi mostrano un accenno di TTV ma l'analisi non viene poi inclusa nel lavoro. Negli altri lavori riguardanti questo sistema non compare un'analisi dei TTV. Anche dal plot riportato in Figura 3.22 non si riesce a distinguere un andamento regolare. Questo potrebbe anche essere dovuto all'influenza del terzo pianeta del sistema, Kepler-100 d.

Delle ulteriori misurazioni potrebbe essere utili per verificare se l'accenno di TTV notato da Van Eyelen & Albrecht (2015)^[47] esiste realmente oppure no.

Kepler-101 Il sistema ospita due pianeti: un hot super-Neptune, Kepler-101 b, e un pianeta delle dimensioni della Terra, Kepler-101 c (Bonomo et al. (2014)^[52]). Questi si trovano vicino alla risonanza 1:2, ma le misure degli $O-C$ di Kepler-101 c non sono presenti su VizieR. Il plot è stato fatto con i soli dati relativi a Kepler-101

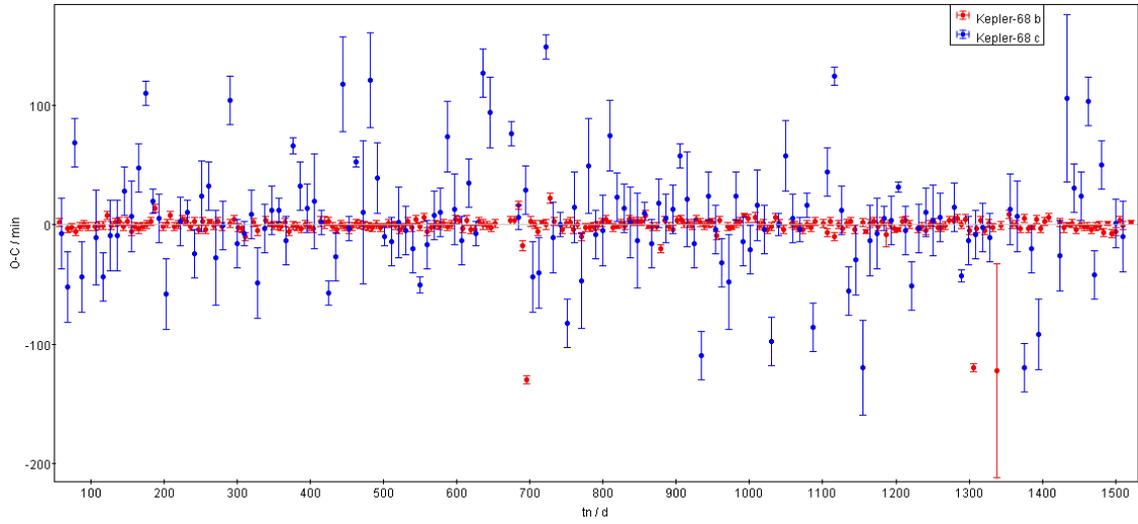


Figura 3.19: O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-68 b e Kepler-68 c.

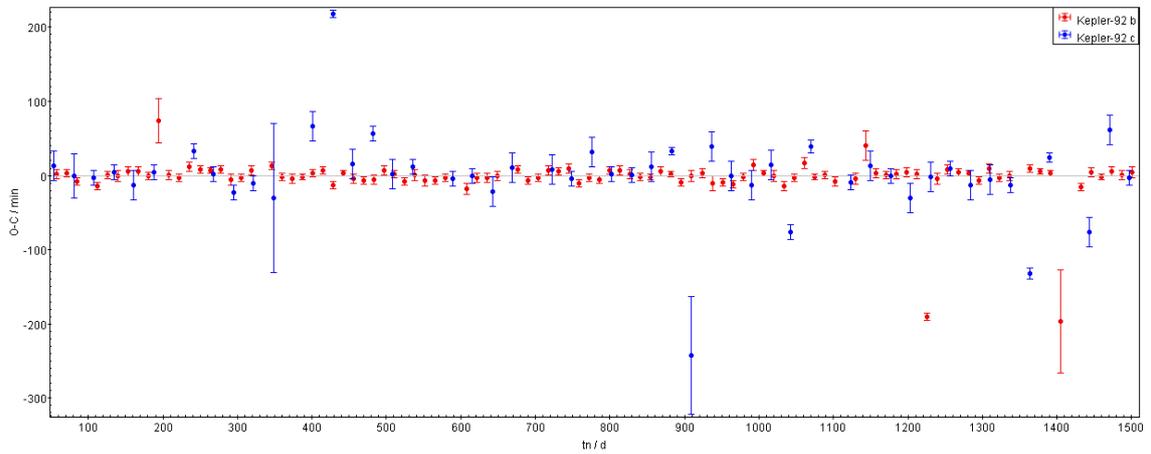


Figura 3.20: O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-92 b e Kepler-92 c.

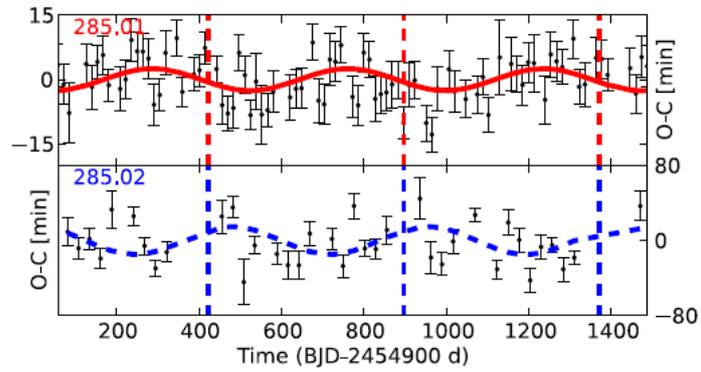


Figura 3.21: Diagrammi degli O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-92 b (KOI-285.01, in alto) e Kepler-92 c. (KOI-285.02, in basso) realizzati da Xie (2014)^[51]

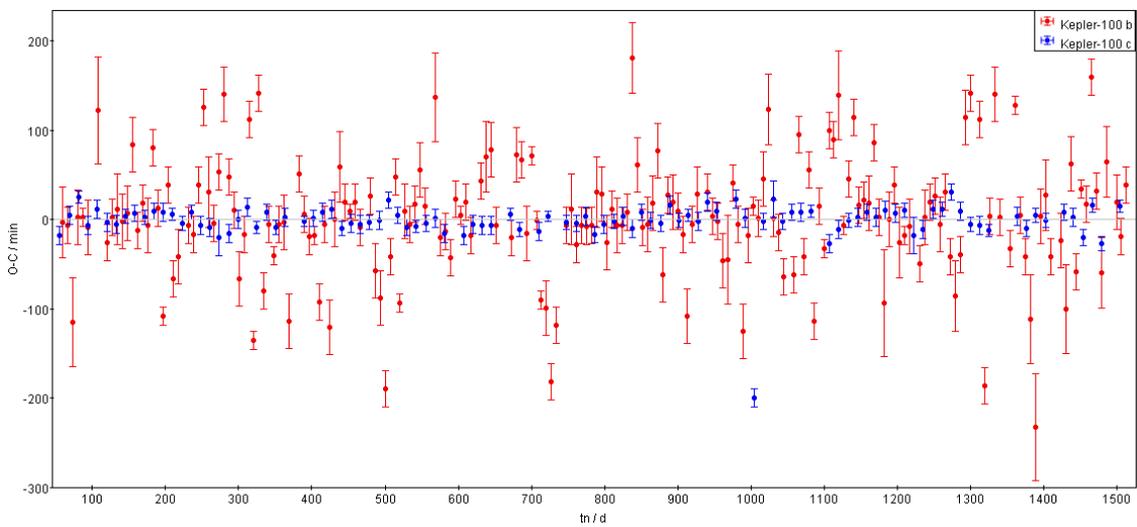


Figura 3.22: O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-100 b e Kepler-100 c.

b per vedere se era possibile riconoscere comunque un andamento coerente. Come si può vedere in Figura 3.23 le misure sembrano distribuite in modo irregolare attorno alla retta $O - C = 0$.

Nell'articolo di Bonomo et al. (2014)^[52], in cui il sistema viene caratterizzato grazie alle misure delle RV ottenute con HARPS-N, viene fatto un commento utile per la nostra analisi: «The Kepler-101 planets, however, are not in an MMR², and so this seems an unlikely formation scenario. On the other hand, the inner planet is close enough to the host star that it is likely that its orbit is influenced by a tidal interaction. Therefore, it is possible that the two planets did migrate inward in a 3:2 MMR but that the inner planet has since migrated farther inwards as a result of tidal effects (Delisle & Laskar (2014)^[53])». Il fatto che il sistema non sia abbastanza vicino alla risonanza rappresenta una possibile spiegazione del perché esso non mostra TTV.

Kepler-102 Come possiamo vedere in Tabella 3.4, per questo sistema abbiamo molte possibili risonanze. Per il pianeta Kepler-102 b non abbiamo delle misure degli $O-C$ quindi non è stato possibile includerlo nei plot. Abbiamo perciò realizzato i diagrammi delle coppie Kepler-102 c e Kepler-102 d, Figura 3.24, Kepler-102 d e Kepler-102 e, Figura 3.25, Kepler-102 e e Kepler-102 f, Figura 3.26.

Queste sono anche le coppie di pianeti, menzionate nell'articolo di Hadden & Lithwick (2014)^[15], di cui vengono effettivamente calcolate le ampiezze dei TTV. Per Kepler-102 d viene anche calcolato un valore della massa di $2.6_{-1.1}^{+1.3} M_{\oplus}$ che può essere confrontato con in valore $3.80 \pm 1.8 M_{\oplus}$ ottenuto con le RV da Marcy et al. (2014)^[14]. La differenza $RV-TTV$ risulta 0.5σ , quindi le due misure sono compatibili. L'esclusione di questo pianeta dalla prima analisi è stata appunto dettata dal filtro $Flag\ TTV=0$, nonostante esso mostrasse dei TTV.

Sarebbe quindi interessante calcolare i valori delle masse degli altri pianeti del sistema menzionati da Hadden & Lithwick tramite i TTV e verificarne la compatibilità rispetto ai valori ottenuti con le RV.

Kepler-131 I due pianeti Kepler-131 b e Kepler-131 c si trovano vicini alla risonanza 1:2. In Figura 3.27 è rappresentato l'andamento degli $O-C$ dei due pianeti. Le misure relative a Kepler-131 b sono, per la maggior parte, sovrapposte alla retta $O - C = 0$; quelle relative a Kepler-131 c non mostrano un andamento regolare. Dato che anche in letteratura non vengono menzionati eventuali TTV per questo sistema, possiamo concludere che non sia necessaria un'analisi ulteriore.

Kepler-406 Kepler-406 ospita due pianeti transitanti di periodo 2.43 e 4.62 giorni (Marcy et al. (2014)^[14]). Dato che il rapporto tra questi ultimi due valori si avvicina

²Mean Motion Resonance

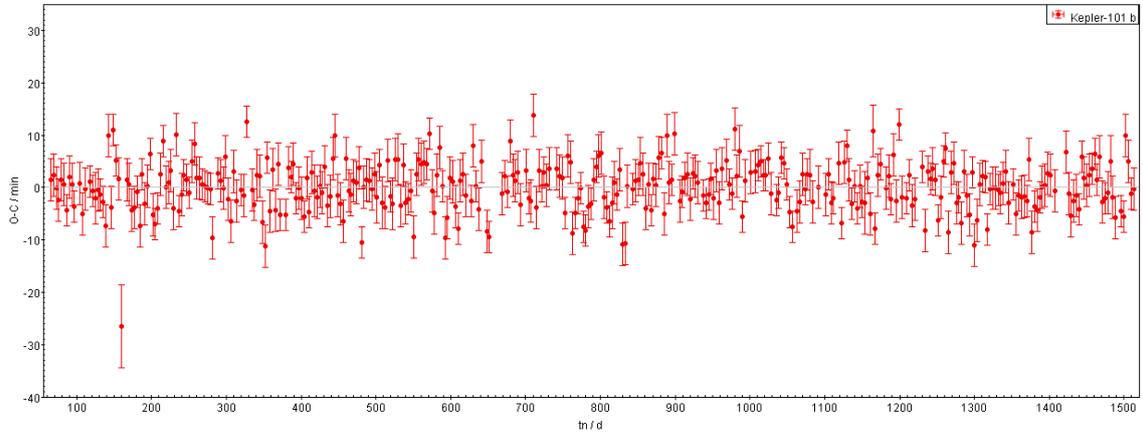


Figura 3.23: O-C in funzione del tempo per il pianeta Kepler-101 b

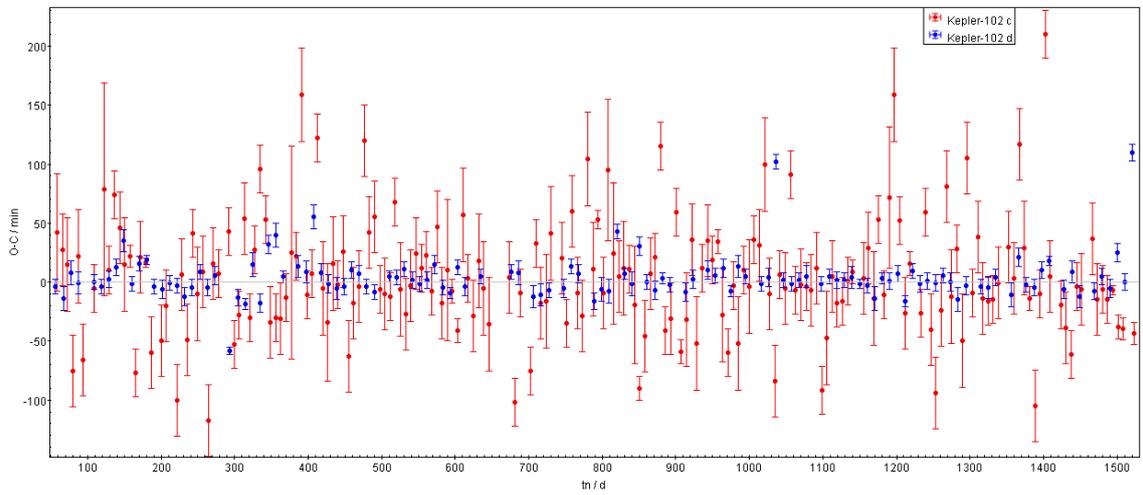


Figura 3.24: O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-102 c e Kepler-102 d.

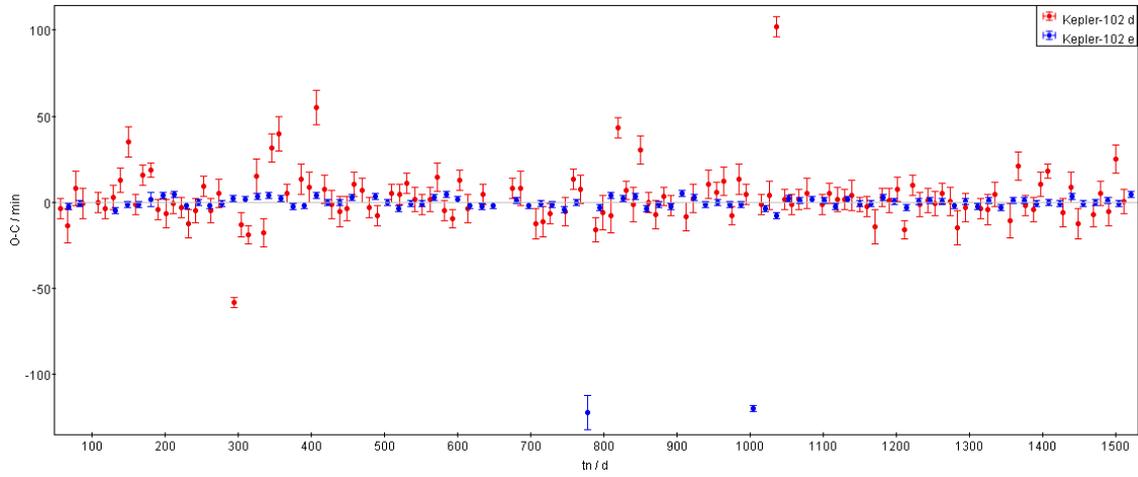


Figura 3.25: O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-102 d e Kepler-102 e.

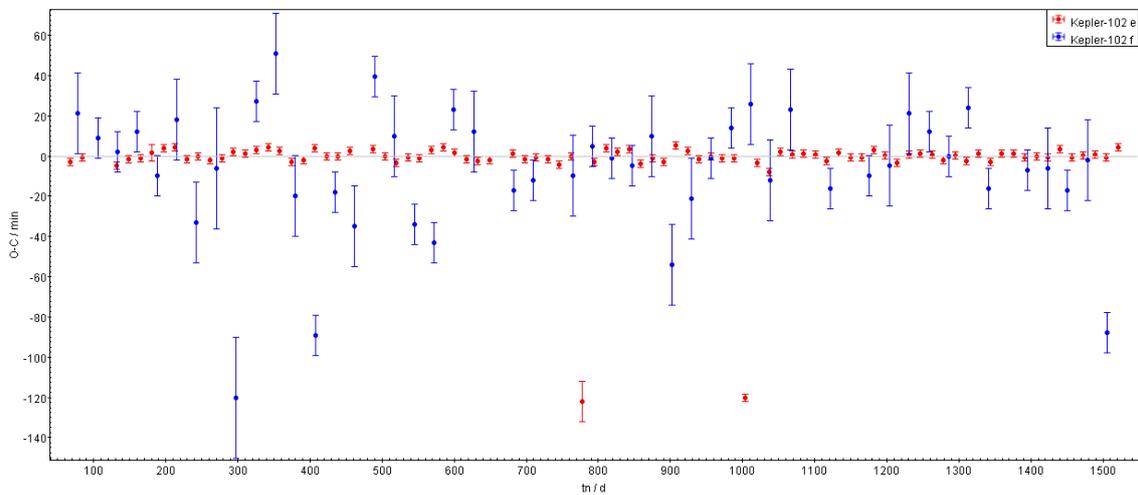


Figura 3.26: O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-102 e e Kepler-102 f.

a 1:2 abbiamo cercato le misure degli $O-C$ su VizieR, così da vedere se la vicinanza alla risonanza provocava dei TTV evidenti. Solo Kepler-406 b ha delle misure degli $O-C$, quindi abbiamo realizzato un plot con un solo pianeta, vedi Figura 3.28. Dato il periodo molto breve, disponiamo di un numero di misure molto grande, rispetto ad altri sistemi già visti. Per questo motivo è stata selezionata solo una parte dell'intervallo sull'asse x , affinché le misure non risultassero troppo schiacciate. Il super-periodo è di circa 49 giorni, quindi se ci fosse un andamento particolare dei dati dovrebbe essere identificabile anche in questa porzione più ristretta, ma non sembra esserci. In letteratura non si trovano informazioni su possibili TTV di questo sistema.

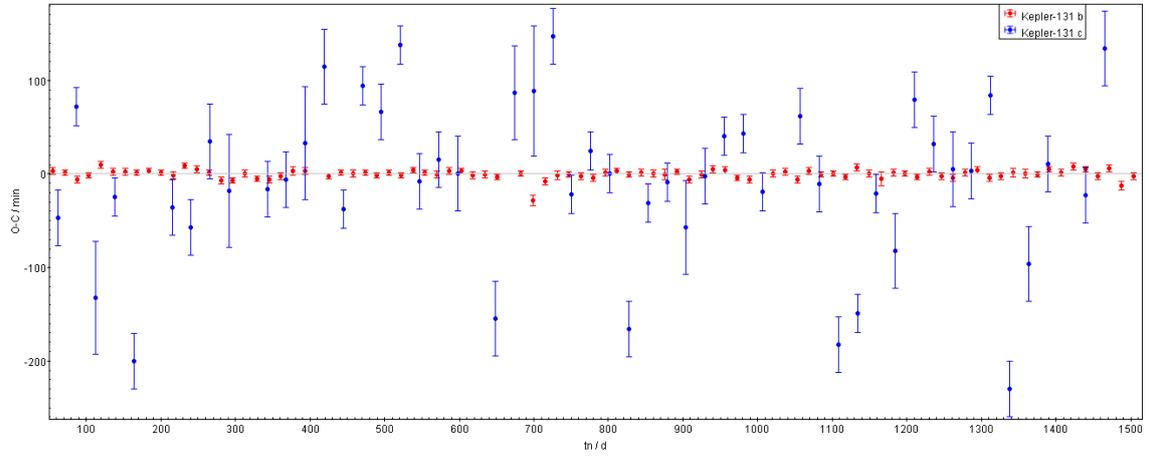


Figura 3.27: O-C in funzione del tempo per i pianeti Kepler-131 b e Kepler-131 c.

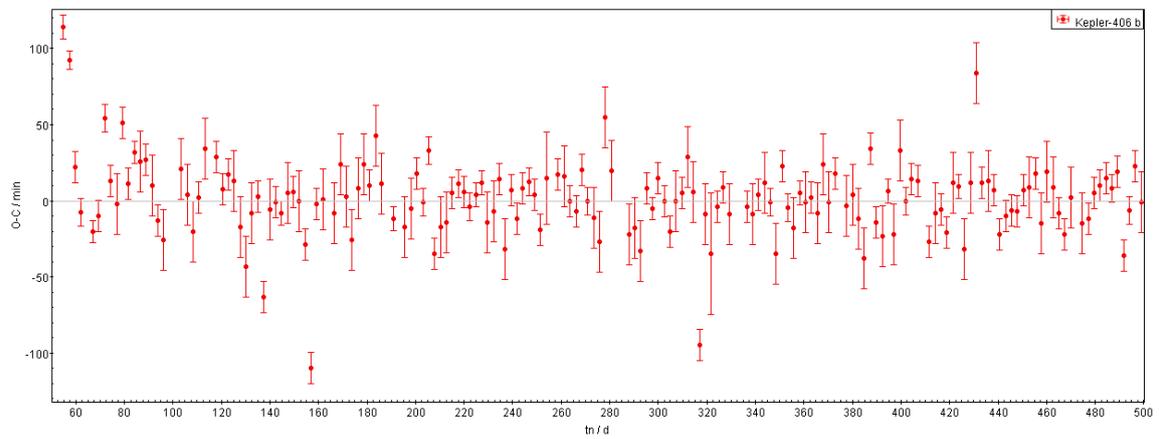


Figura 3.28: O-C in funzione del tempo per il pianeta Kepler-406 b

4 Conclusioni

In questo lavoro abbiamo cercato di capire se il fatto che, a parità di raggio, le velocità radiali tendano a misurare pianeti di massa maggiore rispetto a quelli scoperti tramite TTV, sia riconducibile ad un errore sistematico di una delle due tecniche o se ciò sia semplicemente dovuto agli effetti di selezione osservativa.

Per fare questo abbiamo selezionato 66 esopianeti che avessero almeno una misura della massa riportata in letteratura, che mostrassero TTV e che orbitassero attorno a stelle sufficientemente luminose, in modo da consentire misure adeguate di RV.

Per ogni valore della massa di ciascuno di questi pianeti, riportato nel catalogo *NASA Exoplanet Archive*, siamo andati a consultare il relativo articolo, così da identificare la tecnica con cui era stato ricavato. Abbiamo quindi selezionato quei pianeti che avessero almeno una misura della massa calcolata tramite RV e almeno una ottenuta grazie ai TTV. Con quest'ultima selezione abbiamo ottenuto un campione di ventuno pianeti, riportati nelle Tabelle 3.1 e 3.2, appartenenti a nove sistemi multipli.

Abbiamo poi calcolato, per ogni pianeta, la differenza *RV-TTV* tra i valori delle masse ottenute con le due tecniche in rapporto alla deviazione standard σ , così da poter verificare la compatibilità statistica. Nella maggior parte dei casi questa differenza rimane al di sotto dei 2σ e possiamo pertanto ritenere le misure compatibili. Si può inoltre notare che non è sempre la stessa tecnica a dare i valori maggiori. Le differenze sono sia negative che positive, e questo non rivela nessun bias sistematico evidente di una tecnica rispetto all'altra.

Sono stati analizzati anche quei pianeti che presentavano una misura della massa ottenuta o con le velocità radiali, o con i TTV, e un'altra ottenuta utilizzando entrambe le tecniche assieme nel contesto di un'analisi globale. In questo caso abbiamo un pianeta, Kepler-19 b, per cui le due misure sono compatibili, e un sistema planetario, Kepler-9, che ospita due pianeti per i quali le differenze di massa sono invece significative, a livello $> 11\sigma$ (le misure più alte sono quelle ottenute da TTV). Per questo sistema, e per tutti gli altri che mostrano misure non compatibili, sono necessari degli studi e delle osservazioni ulteriori, al fine di identificare l'origine della discrepanza.

Successivamente ci siamo concentrati sui pianeti che sul catalogo venivano indicati con *Flag TTV* = 0. In particolare ci siamo accorti di un pianeta, WASP-47 e, che, pur avendo una misura della massa calcolata con i TTV, era stato inizialmente escluso dalla prima analisi perché contrassegnato erroneamente con *Flag TTV* = 0. Abbiamo dunque deciso di cercare quei sistemi vicini alla risonanza orbitale di cui non è ancora nota la presenza di un segnale TTV, o di cui è nota ma per un qualche motivo non è stata indicata nel catalogo. Abbiamo deciso di concentrarci sui pianeti

Kepler e *K2*, contrassegnati con $Flag\ TTV=0$, che avessero almeno una misura della massa, una magnitudine apparente della stella ospite sufficiente per misure accurate di RV ($V < 14$) e appartenenti a sistemi multipli. Tra questi abbiamo cercato le coppie di pianeti vicine alle risonanze che rendono più evidenti i TTV. Così facendo abbiamo selezionato le venti coppie presenti in Tabella 3.4. Quando fosse possibile, ossia quando su VizieR erano disponibili le misure degli $O-C$ del pianeta, sono stati realizzati dei plot in modo da visualizzare se era presente una modulazione periodica del periodo orbitale. Inoltre è stata fatta una ricerca in letteratura per verificare che non vi fossero articoli che menzionassero o riportassero l'analisi dei TTV dei pianeti selezionati.

Nella maggior parte dei casi non sono emersi dei TTV coerenti e sono stati trovati in letteratura degli articoli che avevano già analizzato ed escluso questa possibilità. Ad ogni modo la ricerca non è stata vana, dato che sono stati trovati sei pianeti per cui sono disponibili in letteratura delle misure TTV: Kepler-92 b, Kepler-92 c, Kepler-102 c, Kepler-102 d, Kepler-102 e e Kepler-102 f. Nel caso di Kepler-102 d è stato anche possibile fare già un confronto tra la massa ottenuta con i TTV, riportata nell'articolo di Hadden & Lithwick (2014)^[15] e quella calcolata grazie alle RV da Marcy et al. (2014)^[14], e queste sono risultate compatibili.

Possiamo concludere che, dalla nostra analisi, non è emerso un errore sistematico di una delle due tecniche rispetto all'altra nella determinazione delle masse planetarie. Infatti, nella maggior parte dei casi le misure ottenute con le velocità radiali risultano compatibili con quelle ricavate dai TTV. Inoltre, considerando individualmente i pianeti, non emerge la stessa differenziazione dei valori delle masse che si può vedere in Figura 3.2. Le differenze $RV-TTV$ risultano sia positive che negative e ciò indica che non è sempre la stessa tecnica a dare sistematicamente i valori di massa maggiori. È più probabile, perciò, che sia la diversa sensibilità delle due tecniche a portare alla scoperta di due popolazioni di pianeti di densità diversa.

4.1 Sviluppi futuri

In futuro sarà interessante approfondire lo studio dei sistemi in cui la discrepanza tra i valori della massa ottenuti con le due tecniche al momento risulta maggiore. Questi sono riportati in Tabella 4.1 assieme a K2-32, Kepler-92 e Kepler-100, tre dei sistemi contrassegnati sul catalogo con $Flag\ TTV=0$ che necessiterebbero di ulteriori osservazioni.

In Figura 4.1 vediamo il campo visivo della missione *Kepler*, con le relative coordinate galattiche, e in evidenza i pianeti Kepler della Tabella 4.1.

Sistema	Ascensione retta	Declinazione
K2-32	$16^h 49^m 42.26^s$	$-19^d 32^m 34.2^s$
Kepler-9	$19^h 02^m 17.76^s$	$+38^d 24^m 03.2^s$
Kepler-37	$18^h 56^m 14.32^s$	$+44^d 31^m 05.3^s$
Kepler-56	$19^h 35^m 02.00^s$	$+41^d 52^m 18.7^s$
Kepler-89	$19^h 49^m 19.93^s$	$+41^d 53^m 28.0^s$
Kepler-92	$19^h 16^m 20.65^s$	$+41^d 33^m 46.6^s$
Kepler-100	$19^h 25^m 32.63^s$	$+41^d 59^m 25.0^s$
Kepler-289	$19^h 49^m 51.68^s$	$+42^d 52^m 58.3^s$

Tabella 4.1: Sistemi planetari interessanti per studi futuri con le relative coordinate equatoriali.

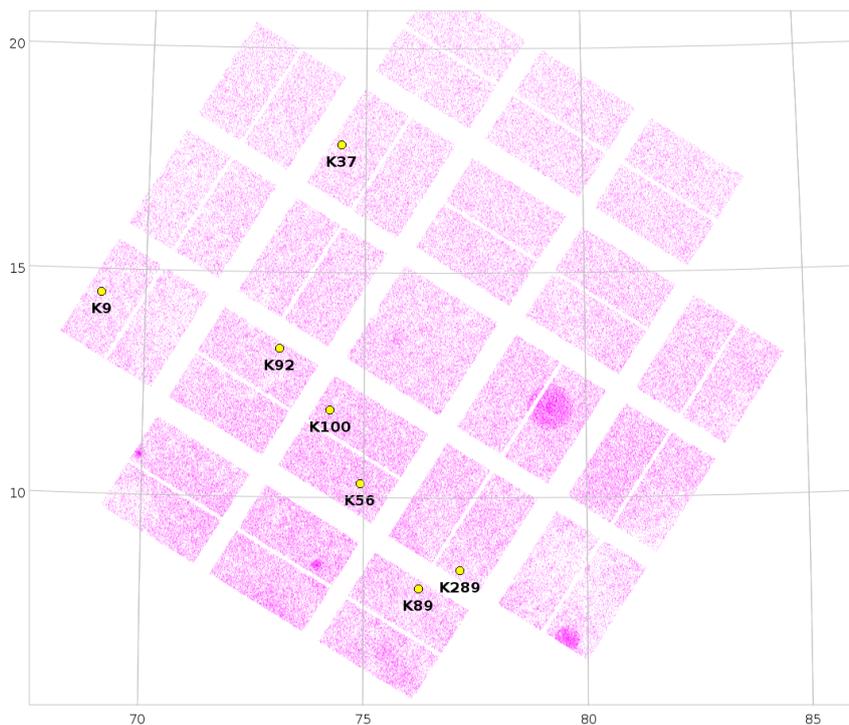


Figura 4.1: Campo visivo della missione Kepler in coordinate galattiche. In evidenza i sistemi interessanti per osservazioni e analisi future individuate nel corso del presente studio.

Per approfondire lo studio di questi sistemi sarà necessario ottenere altri dati osservativi con le future missioni spaziali. Elenchiamo di seguito quelle che si concentreranno sullo studio dei pianeti extrasolari.

CHEOPS (CHAracterizing ExOPlanet Satellite) È una missione dell'*ESA*, l'Agenzia Spaziale Europea, il cui obiettivo principale è quello di caratterizzare pianeti transitanti già scoperti, orbitanti attorno a stelle brillanti, grazie alla fotometria ad alta precisione. In questo modo *CHEOPS* riuscirà a misurare la densità di pianeti di piccole dimensioni, come super-Terre e pianeti nettuniani, e trovare dei target adatti, in questo intervallo di massa e raggio, per studi futuri delle loro atmosfere planetarie. Il lancio è previsto per l'anno 2018.

TESS (Transiting Exoplanet Survey Satellite) Si tratta di una missione della NASA, il cui lancio è previsto per Marzo 2018 (non più tardi di Giugno 2018). Osserverà, in termini statistici, stelle 30-100 volte più brillanti di quelle osservate dal satellite *Kepler*; in questo modo i pianeti TESS saranno più facili da caratterizzare con le osservazioni successive di *James Webb Space Telescope (JWST)* o di altri telescopi.

JWST (James Webb Space Telescope) Il telescopio spaziale *James Webb* è un progetto congiunto di NASA, ESA e CSA (Canadian Space Agency). Opererà nell'infrarosso con uno specchio primario di diametro 6.5 metri. Il lancio è previsto per la primavera del 2019. La missione consentirà ricerche molto avanzate in diversi settori dell'astronomia, dell'astrofisica e della cosmologia. Tra questi si occuperà anche dell'osservazione di pianeti extrasolari e lo studio delle loro atmosfere.

PLATO (PLANetary Transits and Oscillations of stars) Missione dell'*ESA* che si occuperà della rivelazione e la caratterizzazione di esopianeti di tipo terrestre grazie al monitoraggio fotometrico di stelle brillanti di tipo solare. Si concentrerà in particolare sui pianeti in zona abitabile. Osserverà alle lunghezze d'onda dell'ottico con 26 telescopi a grande campo: 24 di questi raccoglieranno immagini ogni 25 secondi, mentre 2 ogni 2.5 s e in due bande fotometriche diverse, grazie a delle *fast-cameras*. Il lancio è previsto per il 2026.

Al fine di verificare se sarà possibile l'osservazione futura dei sistemi indicati in Tabella 4.1, questi sono stati messi in evidenza in un plot (Figura 4.2) della volta celeste, in coordinate galattiche, ove sono presenti i campi di vista di *PLATO* e la regione ottimale di osservabilità di *CHEOPS*.

Possiamo vedere che i pianeti Kepler si trovano in un area di cielo che verrà osservata da *PLATO*, mentre K2-32 ricade nel campo di entrambe le missioni. I

pianeti Kepler inoltre si trovano in un'area, vicina al Polo Nord eclittico, che verrà monitorata con una base osservativa fino ad un anno anche dalla missione *TESS*, mentre la zona in cui si trova K2-32 verrà monitorata da *TESS* al massimo per 27 giorni. Sarà quindi possibile riosservare i sistemi selezionati e ottenere nuovi dati.

Non è da escludere che alcuni di questi sistemi possano essere monitorati con osservazioni fotometriche e di RV da Terra.

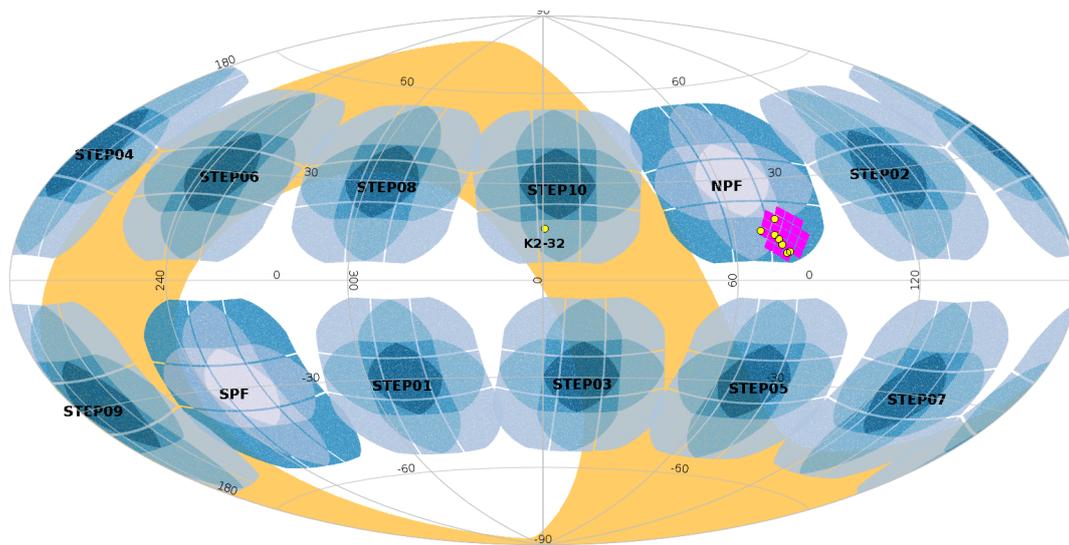


Figura 4.2: Regione ottimale di osservabilità CHEOPS (*in arancione*), campi di vista dei 32 telescopi “normali” della missione PLATO (*in azzurro*) e della missione Kepler (*in rosa*). I punti gialli rappresentano i sistemi interessanti per osservazioni future individuati in questo studio.

Ulteriori osservazioni e studi dei sistemi in cui le masse calcolate con le diverse tecniche non risultano compatibili potrebbero portare alla comprensione di queste discrepanze e, forse, confermare ulteriormente l'efficienza di entrambe le tecniche nella caratterizzazione delle masse di pianeti extrasolari.

Bibliografia

- [1] B. Campbell, G. A. H. Walker e S. Yang. «A search for substellar companions to solar-type stars». In: *Astrophysical Journal* 331 (ago. 1988), pp. 902–921. DOI: [10.1086/166608](https://doi.org/10.1086/166608).
- [2] G. W. Marcy e D. Moore. «The extremely low mass companion to Gliese 623». In: *Astrophysical Journal* 341 (giu. 1989), pp. 961–967. DOI: [10.1086/167555](https://doi.org/10.1086/167555).
- [3] G. W. Marcy e K. J. Benitz. «A search for substellar companions to low-mass stars». In: *Astrophysical Journal* 344 (set. 1989), pp. 441–453. DOI: [10.1086/167812](https://doi.org/10.1086/167812).
- [4] M. Mayor e D. Queloz. «A Jupiter-mass companion to a solar-type star». In: *Nature* 378 (nov. 1995), pp. 355–359. DOI: [10.1038/378355a0](https://doi.org/10.1038/378355a0).
- [5] S. Udry et al. «The CORALIE survey for southern extra-solar planets. X. A Hot Jupiter orbiting HD 73256». In: *Astronomy and Astrophysics* 407 (ago. 2003), pp. 679–684. DOI: [10.1051/0004-6361:20030815](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20030815). eprint: [astro-ph/0304248](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0304248).
- [6] A. Eggenberger et al. «The CORALIE survey for southern extrasolar planets. XIV. HD 142022 b: a long-period planetary companion in a wide binary». In: *Astronomy and Astrophysics* 447 (mar. 2006), pp. 1159–1163. DOI: [10.1051/0004-6361:20053720](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20053720). eprint: [astro-ph/0510561](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0510561).
- [7] O. Tamuz et al. «The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XV. Discovery of two eccentric planets orbiting <ASTROBJ>HD 4113</ASTROBJ> and <ASTROBJ>HD 156846</ASTROBJ>». In: *Astronomy and Astrophysics* 480 (mar. 2008), pp. L33–L36. DOI: [10.1051/0004-6361:20078737](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20078737). arXiv: [0710.5028](https://arxiv.org/abs/0710.5028).
- [8] J. N. Winn. «Measuring accurate transit parameters». In: *Transiting Planets*. A cura di F. Pont, D. Sasselov e M. J. Holman. Vol. 253. IAU Symposium. Feb. 2009, pp. 99–109. DOI: [10.1017/S174392130802629X](https://doi.org/10.1017/S174392130802629X). arXiv: [0807.4929](https://arxiv.org/abs/0807.4929).
- [9] D. Nesvorný et al. «The Detection and Characterization of a Nontransiting Planet by Transit Timing Variations». In: *Science* 336 (giu. 2012), p. 1133. DOI: [10.1126/science.1221141](https://doi.org/10.1126/science.1221141). arXiv: [1208.0942](https://arxiv.org/abs/1208.0942) [[astro-ph.EP](https://arxiv.org/abs/1208.0942)].

- [10] E. Agol e D. Fabrycky. «Transit Timing and Duration Variations for the Discovery and Characterization of Exoplanets». In: *ArXiv e-prints* (giu. 2017). arXiv: [1706.09849](#) [[astro-ph.EP](#)].
- [11] L. R. Doyle et al. «Kepler-16: A Transiting Circumbinary Planet». In: *Science* 333 (set. 2011), p. 1602. DOI: [10.1126/science.1210923](#). arXiv: [1109.3432](#) [[astro-ph.EP](#)].
- [12] F. Dai et al. «Doppler Monitoring of Five K2 Transiting Planetary Systems». In: *The Astrophysical Journal* 823, 115 (giu. 2016), p. 115. DOI: [10.3847/0004-637X/823/2/115](#). arXiv: [1604.01413](#) [[astro-ph.EP](#)].
- [13] S. C. C. Barros et al. «Photodynamical mass determination of the multiplanetary system K2-19». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 454 (dic. 2015), pp. 4267–4276. DOI: [10.1093/mnras/stv2271](#). arXiv: [1510.01047](#) [[astro-ph.EP](#)].
- [14] G. W. Marcy et al. «Masses, Radii, and Orbits of Small Kepler Planets: The Transition from Gaseous to Rocky Planets». In: *The Astrophysical Journal Supplement* 210, 20 (feb. 2014), p. 20. DOI: [10.1088/0067-0049/210/2/20](#). arXiv: [1401.4195](#) [[astro-ph.EP](#)].
- [15] S. Hadden e Y. Lithwick. «Densities and Eccentricities of 139 Kepler Planets from Transit Time Variations». In: *The Astrophysical Journal* 787, 80 (mag. 2014), p. 80. DOI: [10.1088/0004-637X/787/1/80](#). arXiv: [1310.7942](#) [[astro-ph.EP](#)].
- [16] O. J. Otor et al. «The Orbit and Mass of the Third Planet in the Kepler-56 System». In: *The Astronomical Journal* 152, 165 (dic. 2016), p. 165. DOI: [10.3847/0004-6256/152/6/165](#). arXiv: [1608.03627](#) [[astro-ph.EP](#)].
- [17] L. M. Weiss et al. «The Mass of KOI-94d and a Relation for Planet Radius, Mass, and Incident Flux». In: *The Astrophysical Journal* 768, 14 (mag. 2013), p. 14. DOI: [10.1088/0004-637X/768/1/14](#). arXiv: [1303.2150](#) [[astro-ph.EP](#)].
- [18] K. Masuda et al. «Characterization of the KOI-94 System with Transit Timing Variation Analysis: Implication for the Planet-Planet Eclipse». In: *The Astrophysical Journal* 778, 185 (dic. 2013), p. 185. DOI: [10.1088/0004-637X/778/2/185](#). arXiv: [1310.5771](#) [[astro-ph.EP](#)].
- [19] A. Santerne et al. «SOPHIE velocimetry of Kepler transit candidates. XVII. The physical properties of giant exoplanets within 400 days of period». In: *Astronomy & Astrophysics* 587, A64 (mar. 2016), A64. DOI: [10.1051/0004-6361/201527329](#). arXiv: [1511.00643](#) [[astro-ph.EP](#)].

- [20] J. R. Schmitt et al. «Planet Hunters. VII. Discovery of a New Low-mass, Low-density Planet (PH3 C) Orbiting Kepler-289 with Mass Measurements of Two Additional Planets (PH3 B and D)». In: *The Astrophysical Journal* 795, 167 (nov. 2014), p. 167. DOI: [10.1088/0004-637X/795/2/167](https://doi.org/10.1088/0004-637X/795/2/167). arXiv: [1410.8114](https://arxiv.org/abs/1410.8114) [[astro-ph.EP](#)].
- [21] F. Dai et al. «Doppler Monitoring of the WASP-47 Multiplanet System». In: *The Astrophysical Journal Letters* 813, L9 (nov. 2015), p. L9. DOI: [10.1088/2041-8205/813/1/L9](https://doi.org/10.1088/2041-8205/813/1/L9). arXiv: [1510.03811](https://arxiv.org/abs/1510.03811) [[astro-ph.EP](#)].
- [22] J. C. Becker et al. «WASP-47: A Hot Jupiter System with Two Additional Planets Discovered by K2». In: *The Astrophysical Journal Letters* 812, L18 (ott. 2015), p. L18. DOI: [10.1088/2041-8205/812/2/L18](https://doi.org/10.1088/2041-8205/812/2/L18). arXiv: [1508.02411](https://arxiv.org/abs/1508.02411) [[astro-ph.EP](#)].
- [23] N. Narita et al. «Characterization of the K2-19 Multiple-transiting Planetary System via High-dispersion Spectroscopy, AO Imaging, and Transit Timing Variations». In: *The Astrophysical Journal* 815, 47 (dic. 2015), p. 47. DOI: [10.1088/0004-637X/815/1/47](https://doi.org/10.1088/0004-637X/815/1/47). arXiv: [1510.01060](https://arxiv.org/abs/1510.01060) [[astro-ph.EP](#)].
- [24] W. D. Cochran et al. «Kepler-18b, c, and d: A System of Three Planets Confirmed by Transit Timing Variations, Light Curve Validation, Warm-Spitzer Photometry, and Radial Velocity Measurements». In: *The Astrophysical Journal Supplement* 197, 7 (nov. 2011), p. 7. DOI: [10.1088/0067-0049/197/1/7](https://doi.org/10.1088/0067-0049/197/1/7). arXiv: [1110.0820](https://arxiv.org/abs/1110.0820) [[astro-ph.EP](#)].
- [25] T. Hirano et al. «Planet-Planet Eclipse and the Rossiter-McLaughlin Effect of a Multiple Transiting System: Joint Analysis of the Subaru Spectroscopy and the Kepler Photometry». In: *The Astrophysical Journal Letters* 759, L36 (nov. 2012), p. L36. DOI: [10.1088/2041-8205/759/2/L36](https://doi.org/10.1088/2041-8205/759/2/L36). arXiv: [1209.4362](https://arxiv.org/abs/1209.4362) [[astro-ph.EP](#)].
- [26] J. M. Almenara et al. «Absolute densities, masses, and radii of the WASP-47 system determined dynamically». In: *Astronomy & Astrophysics* 595, L5 (ott. 2016), p. L5. DOI: [10.1051/0004-6361/201629770](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201629770). arXiv: [1610.09533](https://arxiv.org/abs/1610.09533) [[astro-ph.EP](#)].
- [27] L. M. Weiss et al. «Mass and Eccentricity Constraints in the WASP-47 Planetary System from a Simultaneous Analysis of Radial Velocities & Transit Timing Variations». In: *ArXiv e-prints* (dic. 2016). arXiv: [1612.04856](https://arxiv.org/abs/1612.04856) [[astro-ph.EP](#)].
- [28] M. Neveu-VanMalle et al. «Hot Jupiters with relatives: discovery of additional planets in orbit around WASP-41 and WASP-47». In: *Astronomy & Astrophysics* 586, A93 (feb. 2016), A93. DOI: [10.1051/0004-6361/201526965](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201526965). arXiv: [1509.07750](https://arxiv.org/abs/1509.07750) [[astro-ph.EP](#)].

- [29] C. Hellier et al. «Seven transiting hot Jupiters from WASP-South, Euler and TRAPPIST: WASP-47b, WASP-55b, WASP-61b, WASP-62b, WASP-63b, WASP-66b and WASP-67b». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 426 (ott. 2012), pp. 739–750. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.21780.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21780.x). arXiv: [1204.5095](https://arxiv.org/abs/1204.5095) [astro-ph.EP].
- [30] E. Sinukoff et al. «Mass Constraints of the WASP-47 Planetary System from Radial Velocities». In: *The Astronomical Journal* 153, 70 (feb. 2017), p. 70. DOI: [10.3847/1538-3881/153/2/70](https://doi.org/10.3847/1538-3881/153/2/70). arXiv: [1612.04851](https://arxiv.org/abs/1612.04851) [astro-ph.EP].
- [31] S. M. Mills e T. Mazeh. «The Planetary Mass-Radius Relation and Its Dependence on Orbital Period as Measured by Transit Timing Variations and Radial Velocities». In: *The Astrophysical Journal Letters* 839, L8 (apr. 2017), p. L8. DOI: [10.3847/2041-8213/aa67eb](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa67eb). arXiv: [1703.07790](https://arxiv.org/abs/1703.07790) [astro-ph.EP].
- [32] J. H. Steffen. «Sensitivity bias in the mass-radius distribution from transit timing variations and radial velocity measurements». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 457 (apr. 2016), pp. 4384–4392. DOI: [10.1093/mnras/stw241](https://doi.org/10.1093/mnras/stw241). arXiv: [1510.04750](https://arxiv.org/abs/1510.04750) [astro-ph.EP].
- [33] D. R. Ciardi et al. «On the Relative Sizes of Planets within Kepler Multiple-candidate Systems». In: *The Astrophysical Journal* 763, 41 (gen. 2013), p. 41. DOI: [10.1088/0004-637X/763/1/41](https://doi.org/10.1088/0004-637X/763/1/41). arXiv: [1212.1859](https://arxiv.org/abs/1212.1859) [astro-ph.EP].
- [34] S. Yi et al. «Toward Better Age Estimates for Stellar Populations: The Y² Isochrones for Solar Mixture». In: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 136 (ott. 2001), pp. 417–437. DOI: [10.1086/321795](https://doi.org/10.1086/321795). eprint: [astro-ph/0104292](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0104292).
- [35] J. H. Steffen et al. «Transit timing observations from Kepler - III. Confirmation of four multiple planet systems by a Fourier-domain study of anti-correlated transit timing variations». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 421 (apr. 2012), pp. 2342–2354. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.20467.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20467.x). arXiv: [1201.5412](https://arxiv.org/abs/1201.5412) [astro-ph.EP].
- [36] J. H. Steffen et al. «Transit timing observations from Kepler - VII. Confirmation of 27 planets in 13 multiplanet systems via transit timing variations and orbital stability». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 428 (gen. 2013), pp. 1077–1087. DOI: [10.1093/mnras/sts090](https://doi.org/10.1093/mnras/sts090). arXiv: [1208.3499](https://arxiv.org/abs/1208.3499) [astro-ph.EP].
- [37] D. Huber et al. «Stellar Spin-Orbit Misalignment in a Multiplanet System». In: *Science* 342 (ott. 2013), pp. 331–334. DOI: [10.1126/science.1242066](https://doi.org/10.1126/science.1242066). arXiv: [1310.4503](https://arxiv.org/abs/1310.4503) [astro-ph.EP].

- [38] M. J. Holman et al. «Kepler-9: A System of Multiple Planets Transiting a Sun-Like Star, Confirmed by Timing Variations». In: *Science* 330 (ott. 2010), p. 51. DOI: [10.1126/science.1195778](https://doi.org/10.1126/science.1195778).
- [39] L. Borsato et al. «TRADES: A new software to derive orbital parameters from observed transit times and radial velocities. Revisiting Kepler-11 and Kepler-9». In: *Astronomy & Astrophysics* 571, A38 (nov. 2014), A38. DOI: [10.1051/0004-6361/201424080](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201424080). arXiv: [1408.2844](https://arxiv.org/abs/1408.2844) [astro-ph.EP].
- [40] S. Ballard et al. «The Kepler-19 System: A Transiting 2.2 R_{\oplus} Planet and a Second Planet Detected via Transit Timing Variations». In: *The Astrophysical Journal* 743, 200 (dic. 2011), p. 200. DOI: [10.1088/0004-637X/743/2/200](https://doi.org/10.1088/0004-637X/743/2/200). arXiv: [1109.1561](https://arxiv.org/abs/1109.1561) [astro-ph.EP].
- [41] L. Malavolta et al. «The Kepler-19 System: A Thick-envelope Super-Earth with Two Neptune-mass Companions Characterized Using Radial Velocities and Transit Timing Variations». In: *The Astronomical Journal* 153, 224 (mag. 2017), p. 224. DOI: [10.3847/1538-3881/aa6897](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa6897). arXiv: [1703.06885](https://arxiv.org/abs/1703.06885) [astro-ph.EP].
- [42] T. Mazeh et al. «Transit Timing Observations from Kepler. VIII. Catalog of Transit Timing Measurements of the First Twelve Quarters». In: *The Astrophysical Journal Supplement* 208, 16 (ott. 2013), p. 16. DOI: [10.1088/0067-0049/208/2/16](https://doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/16). arXiv: [1301.5499](https://arxiv.org/abs/1301.5499) [astro-ph.EP].
- [43] T. Mazeh et al. «VizieR Online Data Catalog: Kepler transit timing observations. VIII. (Mazeh+, 2013)». In: *VizieR Online Data Catalog* 220 (ott. 2013).
- [44] T. Holczer et al. «VizieR Online Data Catalog: Kepler TTVs. IX. The full long-cadence data set (Holczer+, 2016)». In: *VizieR Online Data Catalog* 222 (ott. 2016).
- [45] T. N. Gautier III et al. «Kepler-20: A Sun-like Star with Three Sub-Neptune Exoplanets and Two Earth-size Candidates». In: *The Astrophysical Journal* 749, 15 (apr. 2012), p. 15. DOI: [10.1088/0004-637X/749/1/15](https://doi.org/10.1088/0004-637X/749/1/15). arXiv: [1112.4514](https://arxiv.org/abs/1112.4514) [astro-ph.EP].
- [46] L. A. Buchhave et al. «A 1.9 Earth Radius Rocky Planet and the Discovery of a Non-transiting Planet in the Kepler-20 System». In: *The Astronomical Journal* 152, 160 (dic. 2016), p. 160. DOI: [10.3847/0004-6256/152/6/160](https://doi.org/10.3847/0004-6256/152/6/160). arXiv: [1608.06836](https://arxiv.org/abs/1608.06836) [astro-ph.EP].
- [47] V. Van Eylen e S. Albrecht. «Eccentricity from Transit Photometry: Small Planets in Kepler Multi-planet Systems Have Low Eccentricities». In: *The Astrophysical Journal* 808, 126 (ago. 2015), p. 126. DOI: [10.1088/0004-637X/808/2/126](https://doi.org/10.1088/0004-637X/808/2/126). arXiv: [1505.02814](https://arxiv.org/abs/1505.02814) [astro-ph.EP].

- [48] T. Holczer et al. «Transit Timing Observations from Kepler. IX. Catalog of the Full Long-cadence Data Set». In: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 225, 9 (lug. 2016), p. 9. DOI: [10.3847/0067-0049/225/1/9](https://doi.org/10.3847/0067-0049/225/1/9). arXiv: [1606.01744](https://arxiv.org/abs/1606.01744) [[astro-ph.EP](#)].
- [49] W. J. Borucki et al. «Kepler-62: A Five-Planet System with Planets of 1.4 and 1.6 Earth Radii in the Habitable Zone». In: *Science* 340 (mag. 2013), pp. 587–590. DOI: [10.1126/science.1234702](https://doi.org/10.1126/science.1234702). arXiv: [1304.7387](https://arxiv.org/abs/1304.7387) [[astro-ph.EP](#)].
- [50] R. L. Gilliland et al. «Kepler-68: Three Planets, One with a Density between that of Earth and Ice Giants». In: *The Astrophysical Journal* 766, 40 (mar. 2013), p. 40. DOI: [10.1088/0004-637X/766/1/40](https://doi.org/10.1088/0004-637X/766/1/40). arXiv: [1302.2596](https://arxiv.org/abs/1302.2596) [[astro-ph.EP](#)].
- [51] J.-W. Xie. «Transit Timing Variation of Near-resonance Planetary Pairs. II. Confirmation of 30 Planets in 15 Multiple-planet Systems». In: *The Astrophysical Journal Supplement* 210, 25 (feb. 2014), p. 25. DOI: [10.1088/0067-0049/210/2/25](https://doi.org/10.1088/0067-0049/210/2/25). arXiv: [1309.2329](https://arxiv.org/abs/1309.2329) [[astro-ph.EP](#)].
- [52] A. S. Bonomo et al. «Characterization of the planetary system Kepler-101 with HARPS-N. A hot super-Neptune with an Earth-sized low-mass companion». In: *Astronomy & Astrophysics* 572, A2 (dic. 2014), A2. DOI: [10.1051/0004-6361/201424617](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201424617). arXiv: [1409.4592](https://arxiv.org/abs/1409.4592) [[astro-ph.EP](#)].
- [53] J.-B. Delisle e J. Laskar. «Tidal dissipation and the formation of Kepler near-resonant planets». In: *Astronomy & Astrophysics* 570, L7 (ott. 2014), p. L7. DOI: [10.1051/0004-6361/201424227](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201424227). arXiv: [1406.0694](https://arxiv.org/abs/1406.0694) [[astro-ph.EP](#)].