



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCATRONICA

DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI INDUSTRIALI

Tesi di Laurea Triennale

**ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI DI UN ALBERO ASSIALSIMMETRICO SOGGETTO A
TRAZIONE INDEBOLITO DA UN INTAGLIO A U CIRCONFERENZIALE**

RELATORE: Ing. Michele Zappalorto

CORRELATORE: Ing. Marco Salviato

LAUREANDO: Fabio Arzenton

ANNO ACCADEMICO: 2011/2012

Indice

Sommario.....	3
1. La fatica	4
1.1 Definizione di fatica e curva di Wohler.....	4
1.2 Parametri che influenzano la resistenza a fatica.....	6
1.3 Il fattore teorico di concentrazione delle tensioni K_f	8
1.4 Relazione tra K_f e K_t	8
1.5 Differenza tra K_{tn} e K_{tg}	9
2. Analisi agli elementi finiti con spiegazione della prima geometria.....	11
2.1 Geometria dell'albero intagliato in Ansys.....	12
3. Geometrie e risultati.....	16
3.1 Prima geometria: Rapporto $D/d=2$ e $r/d=0,075$	16
3.2 Seconda geometria: Rapporto $D/d=2$ e $r/d=0,133$	24
3.3 Terza geometria: Rapporto $D/d=2$ e $r/d=0,15$	25
3.4 Quarta geometria: Rapporto $D/d=1,2$ e $r/d=0,075$	26
3.5 Quinta geometria: Rapporto $D/d=1,2$ e $r/d=0,077$	27
3.6 Sesta geometria: Rapporto $D/d=1,2$ e $r/d=0,07$	28
3.7 Settima geometria: Rapporto $D/d=1,5$ e $r/d=0,208$	29
3.8 Ottava geometria: Rapporto $D/d=1,5$ e $r/d=0,125$	30
3.9 Nona geometria: Rapporto $D/d=1,5$ e $r/d=0,15$	31
3.10 Decima geometria: Rapporto $D/d=1,3$ e $r/d=0,1$	32
3.11 Undicesima geometria: Rapporto $D/d=1,3$ e $r/d=0,06$	33
3.12 Dodicesima geometria: Rapporto $D/d=1,3$ e $r/d=0,12$	34

4. Creager-Paris (1967)	36
4.1 Prima geometria: Rapporto $D/d=2$ e $r/d=0,075$	38
4.2 Seconda geometria: Rapporto $D/d=2$ e $r/d=0,133$	39
4.3 Terza geometria: Rapporto $D/d=2$ e $r/d=0,15$	40
4.4 Quarta geometria: Rapporto $D/d=1,2$ e $r/d=0,075$	41
4.5 Quinta geometria: Rapporto $D/d=1,2$ e $r/d=0,077$	42
4.6 Sesta geometria: Rapporto $D/d=1,2$ e $r/d=0,07$	43
4.7 Settima geometria: Rapporto $D/d=1,5$ e $r/d=0,208$	44
4.8 Ottava geometria: Rapporto $D/d=1,5$ e $r/d=0,125$	45
4.9 Nona geometria: Rapporto $D/d=1,5$ e $r/d=0,15$	46
4.10 Decima geometria: Rapporto $D/d=1,3$ e $r/d=0,1$	47
4.11 Undicesima geometria: Rapporto $D/d=1,3$ e $r/d=0,06$	48
4.12 Dodicesima geometria: Rapporto $D/d=1,3$ e $r/d=0,12$	49
5. Conclusioni	50
6. Bibliografia	51
7. Chart del manuale di Peterson	52

Sommario

In questo elaborato viene trattato lo studio sulle sollecitazioni di un albero assialsimmetrico soggetto a trazione indebolito da un intaglio a U circonferenziale. Verrà verificata la fedeltà del parametro K_{tn} ricavato dal libro Peterson's Stress Concentration Factors di Walter D. Pilkey, e la possibilità di applicare al nostro caso di studio la formula di Creager-Paris (1967), per le tensioni σ_x e σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio, ricavata nel caso bidimensionale.

L'elaborato è articolato in varie "fasi": sono inizialmente ripresi il concetto di struttura soggetta a fatica, i parametri e i relativi fattori che ne influenzano la resistenza. Quindi sono introdotti i metodi che si possono utilizzare per lo studio di questo fenomeno riservando particolare attenzione al metodo agli elementi finiti e più precisamente al software di calcolo Ansys, che verrà utilizzato nell'elaborato, in quanto molto accurato rispetto agli altri. Nella fase successiva viene descritta la geometria di studio da fornire al software descrivendo in modo puntuale la procedura che consente di ottenere i risultati utili per comprovare la nostra tesi: viene riportata l'immagine della distribuzione della tensione principale e successivamente i valori numerici ricavati. Studieremo per vari rapporti geometrici 3 casi in modo d'aver una verifica più ampia. Nell'ultima fase vengono comparati i risultati con quelli trovati da Creager-Paris sulle tensioni σ_x e σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio verificando, tramite un confronto mediante dei grafici, quanto questi si discostino dai valori ricavati dai due ricercatori.

1.La Fatica

1.1.Definizione di fatica e curva di Wohler

La fatica è un fenomeno per cui un materiale sottoposto a carichi variabili nel tempo si danneggia fino ad arrivare a rottura, nonostante la tensione applicata sia inferiore a quella di rottura o di snervamento statico del materiale.

I primi studi che riguardo la fatica vennero compiuti alla fine del secolo XIX, in seguito a una serie di rotture "inspiegabili" di assi ferroviari progettati per resistere a carichi (statici) ben superiori a quelli in cui invece avveniva la loro rottura improvvisa in esercizio. August Wöhler intuì che il fenomeno era dovuto alla natura ciclica del carico cui l'assale era sottoposto e ne studiò gli effetti mettendo in relazione l'ampiezza massima del ciclo di sollecitazione con il numero di cicli che il pezzo sopportava prima della rottura: ne ricavò una curva su base statistica chiamata diagramma (o curva) di Wöhler che costituisce tutt'oggi lo strumento base per la progettazione di componenti meccanici sollecitati a fatica.

Per la costruzione di tale curva si sottopone un elevato numero di provini allo stesso carico, essi non si romperanno tutti dopo lo stesso numero di cicli, avendo così una dispersione dei risultati. Successivamente si ripete la stessa serie di esperimenti a diversi valori della sigma alternata σ_A e si annota per ogni distribuzione il valore medio del numero di cicli prima di rottura.

La curva che congiunge tutti i valori medi ad ogni σ_A è la curva di Wöhler al 50% di probabilità di rottura (*Figura 1*). Questo significa che il 50% dei provini se sottoposti ad un ciclo di carico di ampiezza σ_A , si rompono prima di raggiungere il numero di cicli delimitato dalla curva di Wöhler. Naturalmente, si possono costruire curve al 20%, al 10% o a qualsivoglia probabilità, congiungendo anziché i punti dei valori medi quelli che corrispondono a tale valore di probabilità.

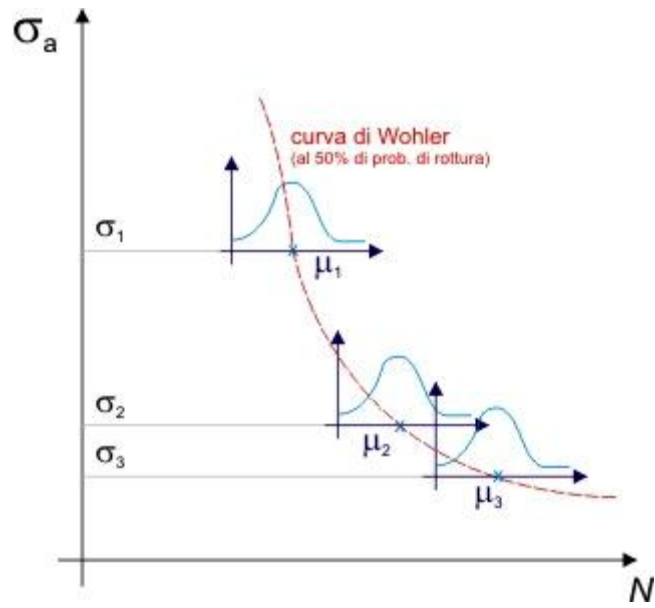


Figura 1

Da questi diagrammi si evidenzia l'esistenza di un limite inferiore di sforzo massimo al di sotto del quale il materiale non si rompe per effetto di fatica nemmeno per un numero elevato (idealmente infinito) di cicli. Questo valore dello sforzo è detto limite di fatica del materiale (vedi Figura 2).

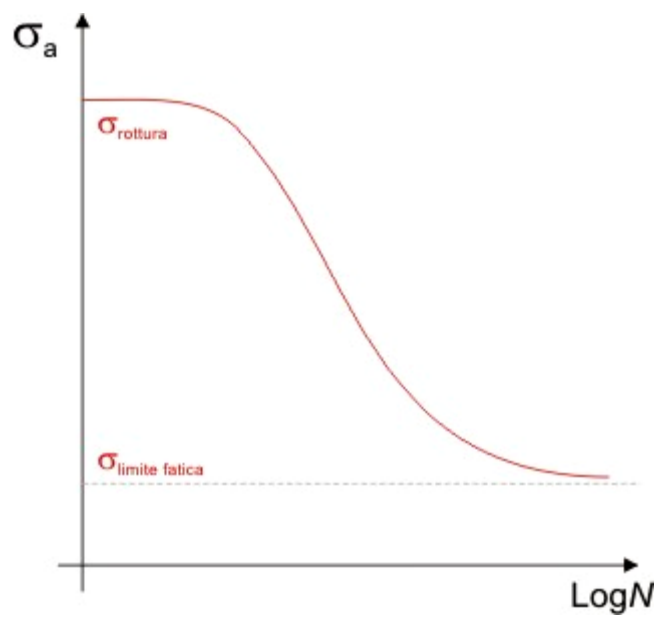


Figura 2

1.2. Parametri che influenzano la resistenza a fatica

I parametri che influenzano la resistenza e la rottura a fatica di un componente si possono dividere in interni e esterni.

Tra i parametri interni si ricorda:

- tipo di sollecitazione a cui è soggetto il componente;
- ambiente e temperatura;
- modalità di variazione di carico;
- storia di carico;
- effetto della tensione media;

mentre tra i parametri esterni abbiamo:

- il materiale che lo costituisce;
- le dimensioni assolute;
- la finitura superficiale;
- la presenza di trattamenti superficiali;
- geometria del componente.

I fattori principali, ricavati dai parametri precedentemente elencati, che portano da una tensione di rottura a fatica σ_A ad una minore σ_A^* , sono il fattore K_L , che riguarda la finitura superficiale; il fattore K_d , legato alle dimensioni assolute, e il fattore K_f , fattore di riduzione della resistenza a fatica. Questi fattori influiscono su σ_A^* secondo la formula:

$$\sigma_A^* = \frac{\sigma_A}{K_L \cdot K_d \cdot K_f}$$

Nella nostra trattazione si volgerà una maggiore attenzione a K_t , in particolare all'effetto dovuto all'intaglio a U. Infatti la presenza di spalle, scanalature, fori, filettature, intagli in una struttura portano ad una diversa distribuzione delle tensioni, le quali saranno concentrate su questi effetti. Un esempio è quello riportato nella *Figura 3*, che presenta una piastra soggetta a trazione.

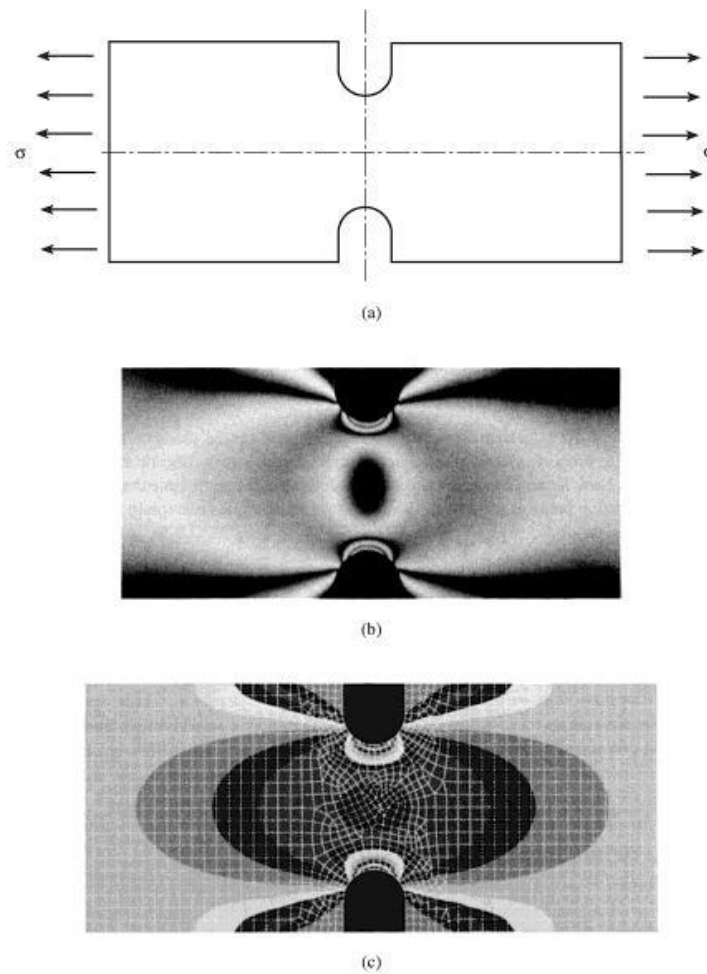


Figure 1.3 Tension bar with notches: (a) specimen; (b) photoelastic fringe photograph (Doz. Dr.-Ing. habil. K. Fethke, Universität Rostock); (c) finite element solution (Guy Nerad, University of Virginia).

Figura 3

1.3. Il fattore teorico di concentrazione delle tensioni K_t

Il parametro K_f è definito, come il rapporto tra il limite di fatica del materiale base e il limite di fatica del componente intagliato

$$K_f = \frac{\sigma_{A\infty}^{mat. base}}{\sigma_{A\infty}^{comp. int.}} \approx \frac{\sigma_A^{mat. base}}{\sigma_A^{comp. int.}}$$

1.4. Relazione tra K_f e K_t

K_f è un fattore sperimentale ricavabile facilmente dalla conoscenza del fattore teorico di concentrazioni delle tensioni K_t e dalla sensibilità all'intaglio, completa o parziale.

Nel caso di una configurazione di completa sensibilità all'intaglio, che si ha quando il raggio all'apice dell'intaglio ρ è $> 2\text{mm}$, abbiamo $K_f = K_t$

In una configurazione di parziale sensibilità all'intaglio ($\rho < 2\text{mm}$) si ha $K_f = 1 + q(K_t - 1)$, dove q è definito come indice di sensibilità all'intaglio e dipende solo dalla geometria e dal materiale del componente; esso è calcolato secondo la formula del Peterson:

$$q = \frac{1}{1 + \frac{a}{\rho}}$$

con a parametro legato alla microstruttura del materiale

Tale indice q varia tra 0 e 1 ed è $q=1$ se si ha una completa sensibilità all'intaglio.

1.5.Differenza tra K_{tn} e K_{tg}

K_t è definito come il rapporto della massima tensione su un'altra tensione di riferimento solitamente una tensione nominale σ_{nom} ; tra le possibili scelte di σ_{nom} si può prendere una tensione nominale riguardo alla sezione lorda σ_g o alla sezione netta σ_n . Avremo quindi due K_t : un K_t lordo, riferito alla tensione lorda, o K_t netto, riferito a una tensione netta. Per capire la differenza tra i due coefficienti prendiamo come esempio una piastra soggetta a una forza di trazione F (Figura 4).

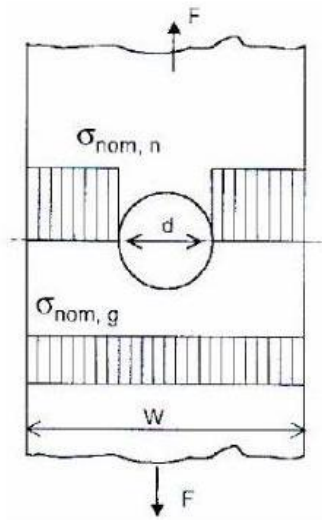


Figura 4

Dal punto di vista tensoriale le tensioni si ripartiranno uniformemente su tutta la sezione con un valore $\sigma = F/A = F/wt$, con w larghezza e t spessore della piastra.

Se effettuiamo un foro di diametro d al centro della piastra avremo che i punti distanti dal foro non risentiranno della variazione geometrica e saranno quindi soggetti a una tensione nominale lorda $\sigma_g = F/A$. In prossimità del foro invece avremo una tensione diversa, una tensione nominale "fittizia" netta $\sigma_n = F/(w-d)t$ come è possibile vedere nella Figura 5.

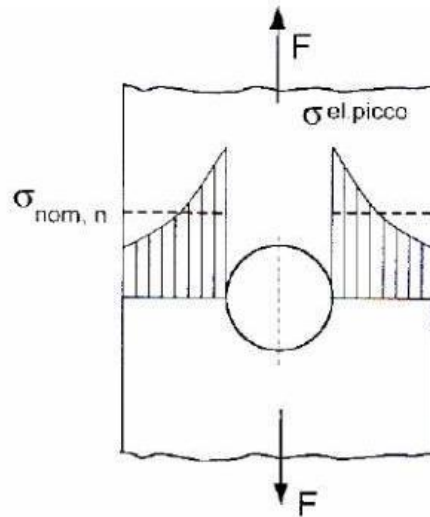


Figura 5

Avremo quindi tensioni molto elevate in corrispondenza del foro e tensioni decrescenti con l'aumentare della distanza dal foro. La tensione massima, che si ha in prossimità del foro è detta tensione del picco elastico ed è denotata σ_{pel} .

Si può quindi definire un K_{tn} e un K_{tg} dipendentemente dalla σ_{nom} usata (se netta o lorda).

$$K_t = \frac{\sigma_{el, \text{picco}}}{\sigma_{nom}}$$

sottolineando che i fattori K_t non dipendono dal materiale ma solo dalla geometria e dalle condizioni di carico.

2. Analisi agli elementi finiti con spiegazione della prima geometria

Lo studio della resistenza a fatica di strutture complesse viene effettuato mediante metodi numerici quali:

- Metodo delle differenze finite (metodo semplice che permette di risolvere numericamente equazioni differenziali);
- Metodo dei volumi finiti (utile nell'integrazione di equazioni differenziali alle derivate parziali);
- Metodo delle celle (consente di scrivere in forma algebrica il sistema di equazioni che mi determinerà la soluzione);
- Metodo degli elementi finiti (consente di risolvere equazioni differenziali alle derivate parziali approssimandole a equazioni algebriche).

Quest'ultimo è il metodo utilizzato da gran parte dei codici di calcolo e in grado di risolvere sistemi di diversa natura. Il metodo prevede la discretizzazione dell'oggetto in esame in tanti elementi finiti di forma semplice (triangoli o rettangoli in 2d, esaedri o tetraedri in 3d) e per ciascuno di essi il calcolatore imposta un'equazione matriciale che permette di determinare forze, tensioni, spostamenti e deformazioni.

L'utilizzo di questo metodo richiede maggior attenzione nei seguenti casi:

- con i solidi gli elementi finitesimi di forma triangolare, che portano un errore maggiore rispetto a quelli a forma rettangolare;
- nella definizione del numero di nodi, elementi che hanno un numero di nodi maggiore sono più accurati di altri con un numero minore;
- nella scelta della mesh, le tensioni e le deformazioni dipendono molto dalla forma della mesh effettuata, se questa è costituita da elementi di grandi dimensioni e distorti i risultati sono affetti da un errore maggiore.

Per far fronte alle difficoltà sopra elencate si cerca quindi di realizzare mesh composte da elementi regolari aventi dimensioni via via minori con l'avvicinarsi della zona d'interesse ed eventualmente di utilizzare diverse mesh al fine di trovare quella ottimale.

Uno dei software utilizzati per l'analisi agli elementi finiti, che utilizza il Metodo degli elementi finiti, è Ansys e proprio tramite questo software andremo a studiare il pezzo considerato.

L'analisi si suddivide in tre aree:

- pre-processing, dove si costruisce il modello a elementi finiti
- processing, in cui si ha la risoluzione del problema agli elementi finiti
- post-processing, dove si visualizza e studia la soluzione

In particolare il pre-processing si articola:

- nella scelta del tipo di analisi da effettuare (analisi statica/dinamica/termica, lineare o non lineare, ecc.);
- nella scelta del tipo di elementi finiti (per problemi piani o tridimensionali, ad es. tipo asta/trave/lastra/piastra/guscio/tridimensionale, ecc.);
- nella definizione dei parametri che caratterizzano il comportamento costitutivo dei materiali;
- nella definizione del reticolo di nodi della discretizzazione (mesh);
- nell'applicazione delle condizioni di vincolo e di carico.

2.1 Geometria dell'albero intagliato in Ansys

L'analisi di un albero assialsimmetrico con un intaglio a U circonferenziale si può eseguire sfruttando il fatto che esso è ottenuto dalla rotazione attorno a un asse di una piastra con intagli a U opposti (vedi *Figura 6* e *Figura 7*).

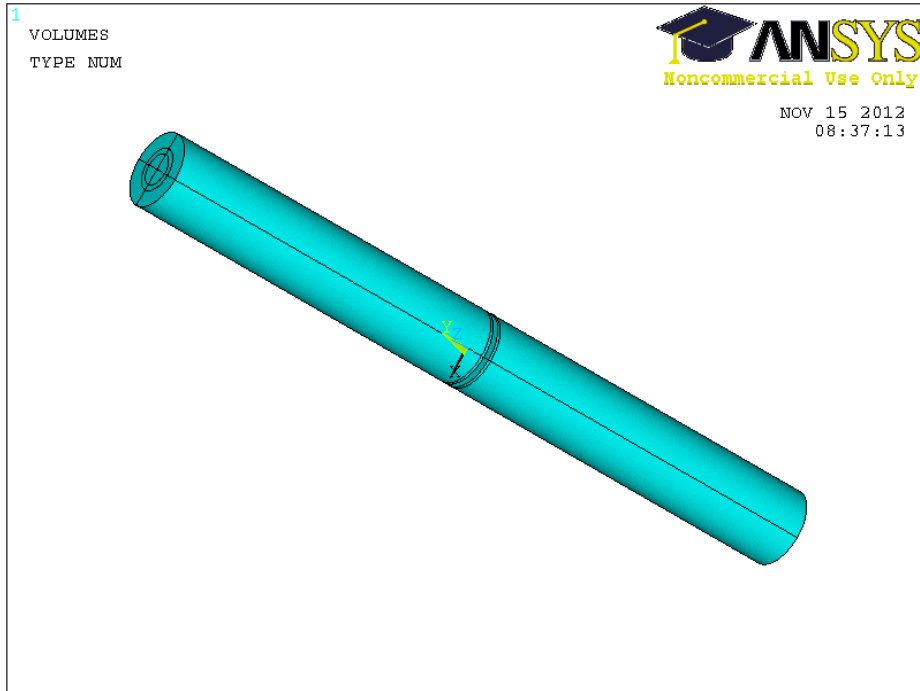


Figura 6

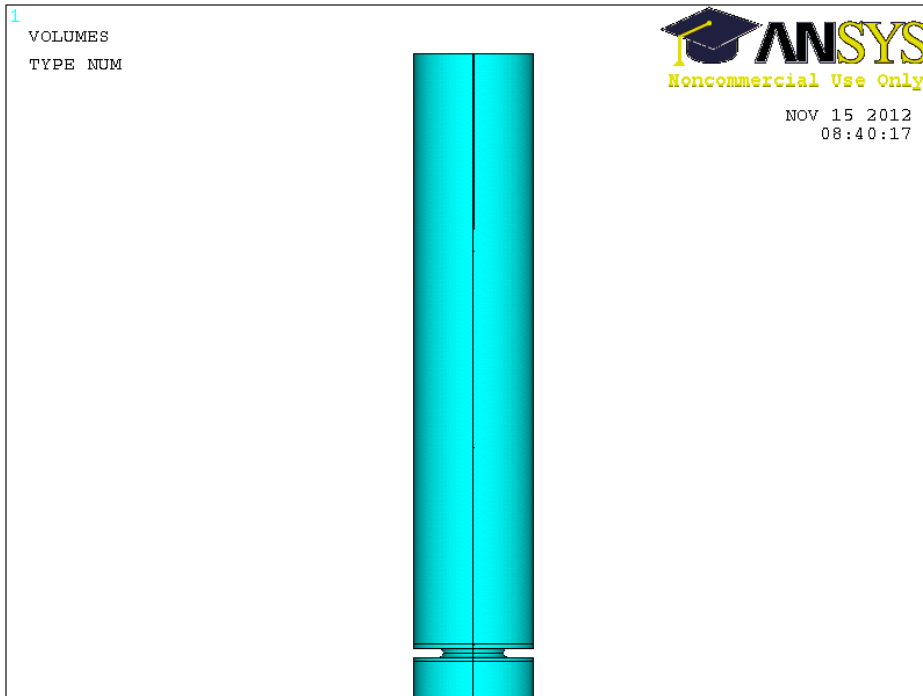


Figura 7

Sfruttando le simmetrie assiali della piastra possiamo analizzare solo un quarto della piastra, della quale riportiamo un esempio nella *Figura 8*.

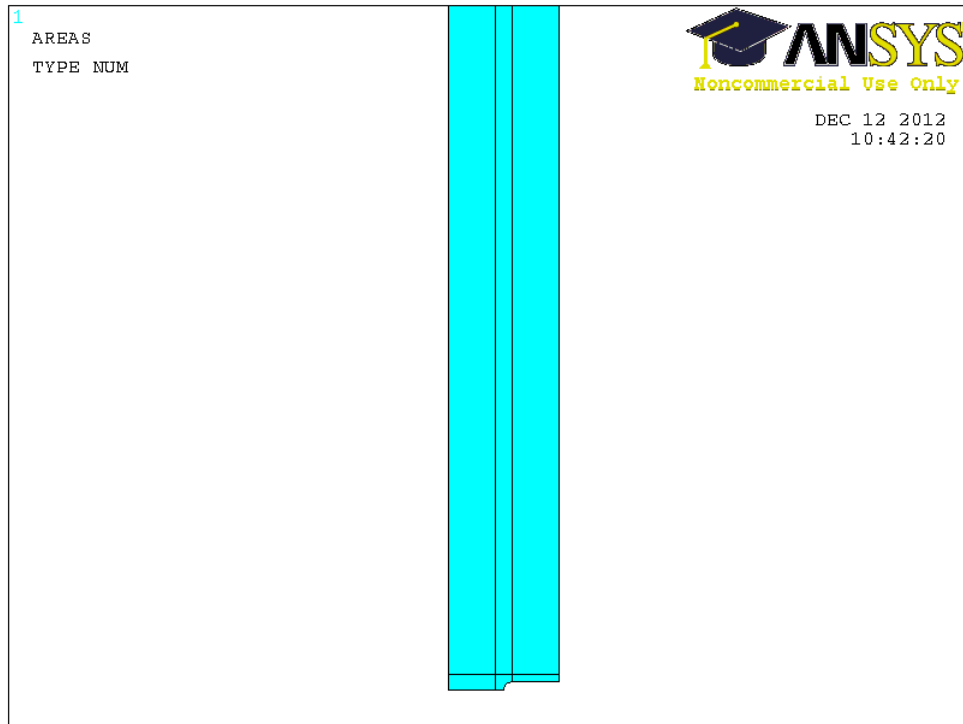


Figura 8

Dopo aver costruito la geometria dell'oggetto di studio ne effettueremo la mesh, ovvero la sua suddivisione in una moltitudine di elementi finiti i quali saranno in un numero maggiore più ci avvicineremo all'intaglio.

Imponiamo i vincoli e i carichi ed infine, dopo aver lanciato la soluzione, calcoleremo le misure d'interesse.

In particolare nell'elaborato studieremo 3 casi per 4 differenti valori di D/d, soggetti a una tensione di trazione di 100MPa, riassunti per comodità nella seguente tabella:

geometrie	D (mm)	d (mm)	r (mm)	r/d
1	40	20	1,5	0,075
2	30	15	2	0,133333
3	20	10	1,5	0,15
geometrie	D (mm)	d (mm)	r (mm)	r/d
4	48	40	3	0,075
5	54	45	3,5	0,077778
6	60	50	3,5	0,07
geometrie	D (mm)	d (mm)	r (mm)	r/d
7	72	48	10	0,208333
8	24	16	2	0,125
9	30	20	3	0,15
geometrie	D (mm)	d (mm)	r (mm)	r/d
10	39	30	3	0,1
11	52	40	2,4	0,06
12	26	20	2,4	0,12

3.Geometrie e risultati

Per quanto riguarda lo studio delle geometrie esplicheremo i vari passaggi in modo dettagliato della prima geometria, mentre per le altre, visualizzeremo solo i risultati ottenuti e le relative immagini della tensione principale in prossimità dell'apice dell'intaglio.

3.1.Prima geometria: Rapporto $D/d=2$ e $r/d=0,075$

Dopo aver definito la geometria e le proprietà dell'elemento da studiare, questo sarà discretizzato in elementi finiti (mesh del pezzo) in cui ciascun elemento è caratterizzato da un certo numero di nodi.

Il calcolatore ricaverà in ogni nodo le forze e gli spostamenti, dai quali ricaverà la deformazione e da questa, tramite le leggi di Hooke generalizzate, calcolerà le tensioni.

Per ricavare con elevata accuratezza le tensioni, si cercherà di aver un numero molto grande di elementi finiti in prossimità della variazione geometrica e più ci si allontana se ne prenderà un numero minore. La mesh in vicinanza dell'intaglio della prima geometria è riportata nella *Figura 9*.

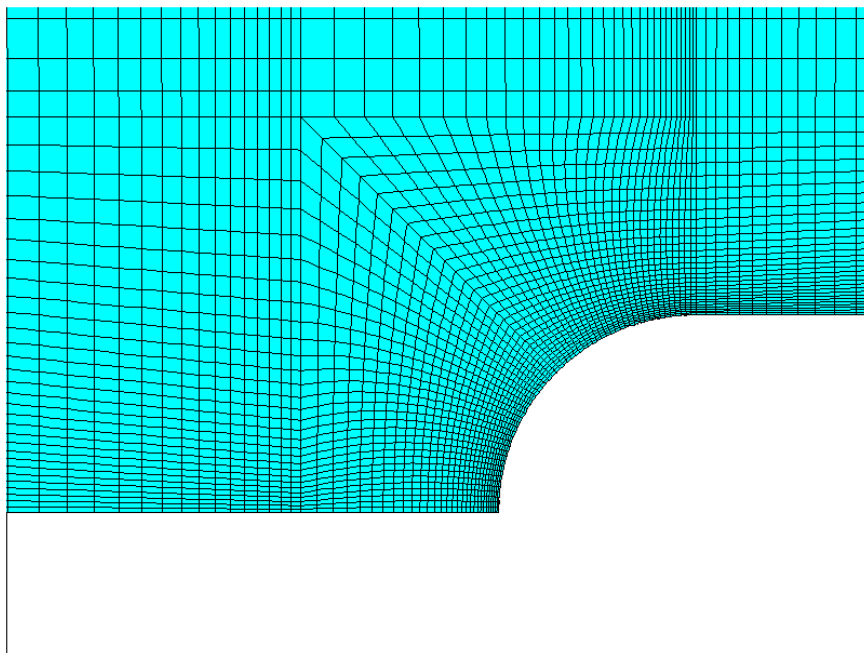


Figura 9

Descriviamo ora il listato per la costruzione del pezzo in Ansys.

Inizialmente definiamo le caratteristiche meccaniche e la geometria del pezzo:

Preprocessor -> *modeling* -> *create* -> *keypoint* -> *in active cs* -> inseriamo le coordinate in mm dei punti chiave (0,0; 1,0; 3,0; ...) e do ok;

per collegare i *keypoints*: *create* -> *lines* -> *lines* -> *straight line*-> clicco sui *keypoints* che saranno gli estremi della mia linea e do ok;

per creare il semiarco dell'intaglio: *create* -> *arcs* -> *by end KPs & rad* -> clicco sui punti estremi dell'arco e do ok; poi devo dare il punto centro dell'arco quindi clicco su questo e do ok; infine inserisco la lunghezza del raggio e do ok;

per creare le aree racchiuse dalle linee precedentemente tracciate: *create* -> *areas* -> *arbitrary* -> *by lines* -> seleziono le linee che mi racchiuderanno l'area e do ok.

Definiamo il tipo di elemento e le sue proprietà: avendo una barra d'acciaio con intaglio a U ottenuta dalla rotazione lungo l'asse y della sezione studiata ho:

element type -> *add/edit/delete* -> *solid* -> *quad 8node 82* e dopo averlo selezionato vado su *option* -> *K3: axisymmetric* e chiudo la finestra;

material props -> *material models* -> *structural* -> *linear* -> *elastic* -> *isotropic* e inserisco in E 206000 (modulo di Young degli acciai in MPa) e su ν 0.3 (coefficiente di Poisson in Pa).

Ora definiamo la mesh:

meshing -> *size cntrls* -> *manualsize* -> *lines* -> *picked lines* seleziono la linea da suddividere e do ok, poi inserisco il numero delle divisioni della linea e spacing ratio 30, si cerca sempre di avere un numero di suddivisione delle linee maggiore in prossimità del punto di studio (quindi in prossimità dell'intaglio), e do ok;

dopo aver suddiviso tutte le linee o faccio una *mesh free* (fatta automaticamente dal programma ma poco precisa) o una *mesh mapped*, scegliamo la seconda.

La funzione *mesh mapped* utilizza tre o quattro lati quindi, nell'area che ne ha 5, concateno 2 linee così da aver un totale di 4 linee, mediante il comando *meshing -> concatenate -> lines ->* clicco sulle linee da concatenare (quelle più distanti dall'intaglio) e do ok;

per eseguire la mesh faccio *mesh -> areas -> mapped -> 3 or 4 sided ->* clicco all'interno dell'area da "meshare" e do ok.

Otterremo un tipo di mesh intorno all'intaglio come quello in *Figura 10*.

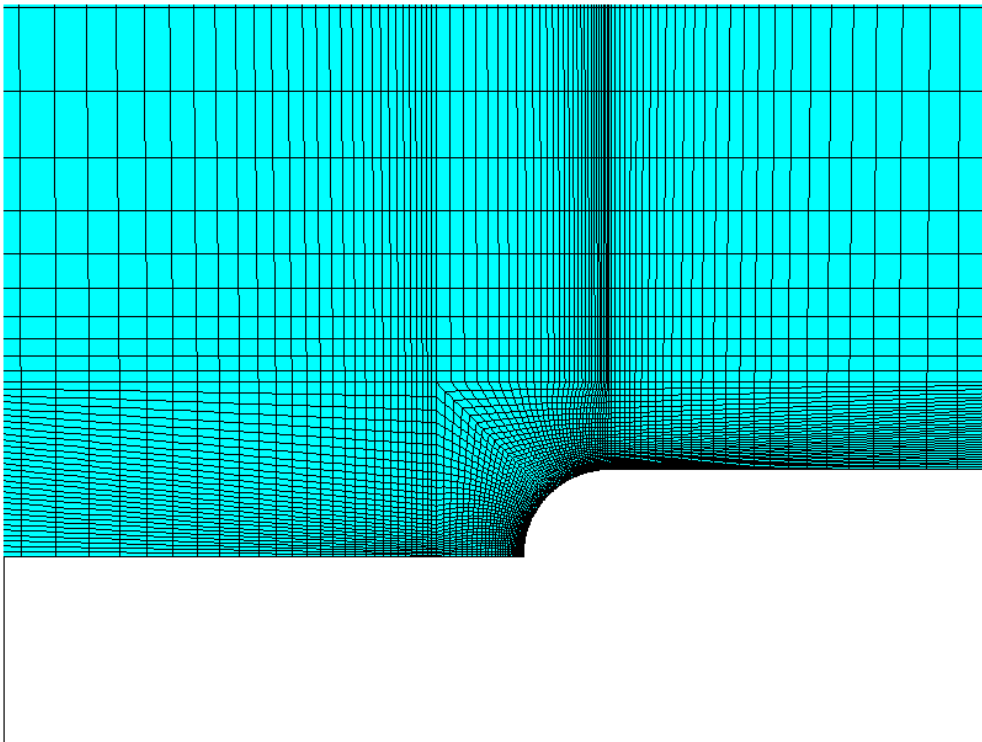


Figura 10

Definiamo i vincoli e i carichi a cui è soggetta la struttura:

Inizialmente impongo le condizioni di simmetria:

loads -> define loads -> structural -> displacement -> symmetry b.c. -> on lines e clicco sulle linee soggette a simmetria strutturale e do ok.

Impongo il carico:

loads -> define loads -> apply -> structural -> pressure -> on lines e seleziono le linee soggette al carico do ok e inserisco il valore del carico (valore negativo perché viene considerata come una pressione quindi una forza di trazione avrà segno negativo).

Mandiamo in risoluzione il problema studiato

solution -> solve -> current ls -> ok.

Risolta la struttura geometrica ora possiamo ricavare varie informazioni e misure, nel nostro caso ricaviamo:

- le tensioni, le quali per esser visualizzate facciamo: *plot results -> contour plot -> nodal solu -> stress -> component 1 st Principal stress* da cui possiamo ricavare K_{tg} e K_{tn} (Figura 11).

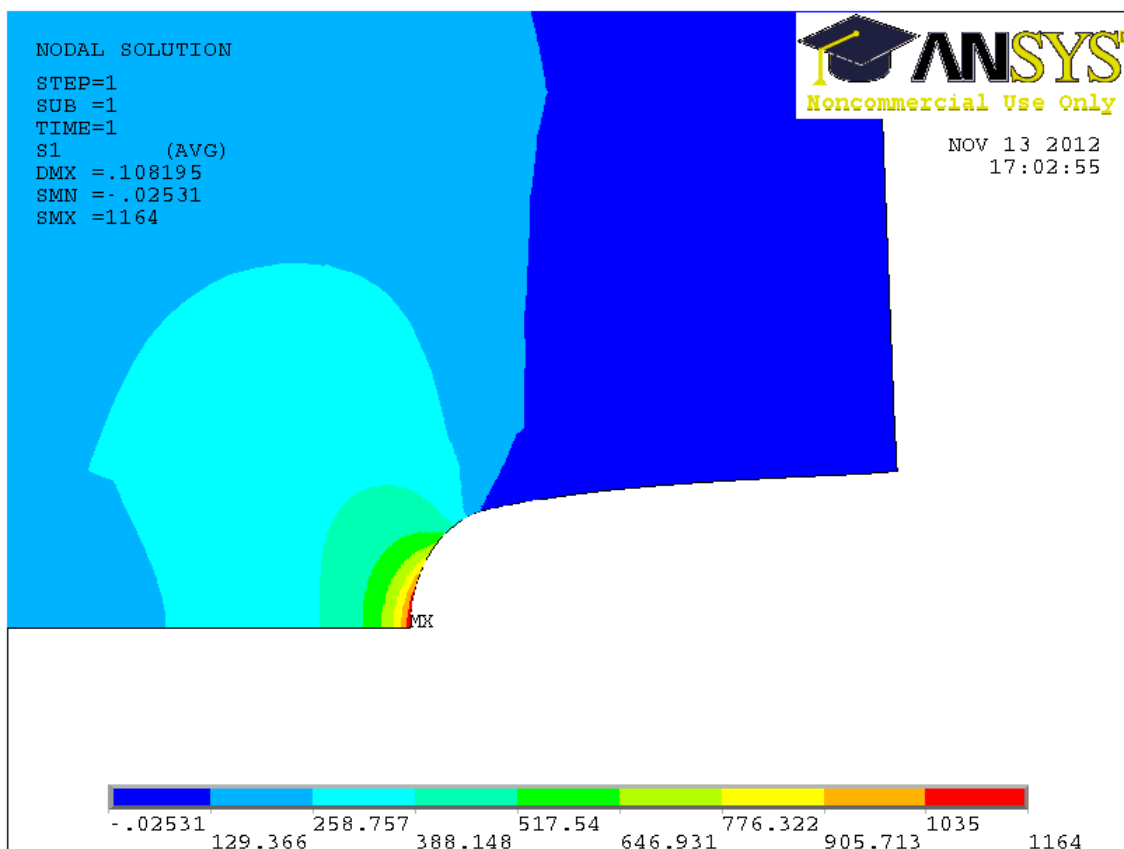


Figura 11

- l'andamento delle tensioni lungo la linea che parte dall'apice dell'intaglio;

per il quale devo creare un percorso (sarà la bisettrice dell'intaglio) *path operations* -> *define path* -> *by nodes* e seleziono i nodi della mia linea e do ok dando un nome al percorso scelto;

per visualizzare il percorso *map onto path* -> do il nome del percorso -> *stress* -> *Y component* (per visualizzare la tensione σ_y) e do ok;

plot path item -> *on graph* do il nome del percorso e do ok. A titolo d'esempio la distribuzione della tensione della prima geometria è riportata nella *Figura 12*

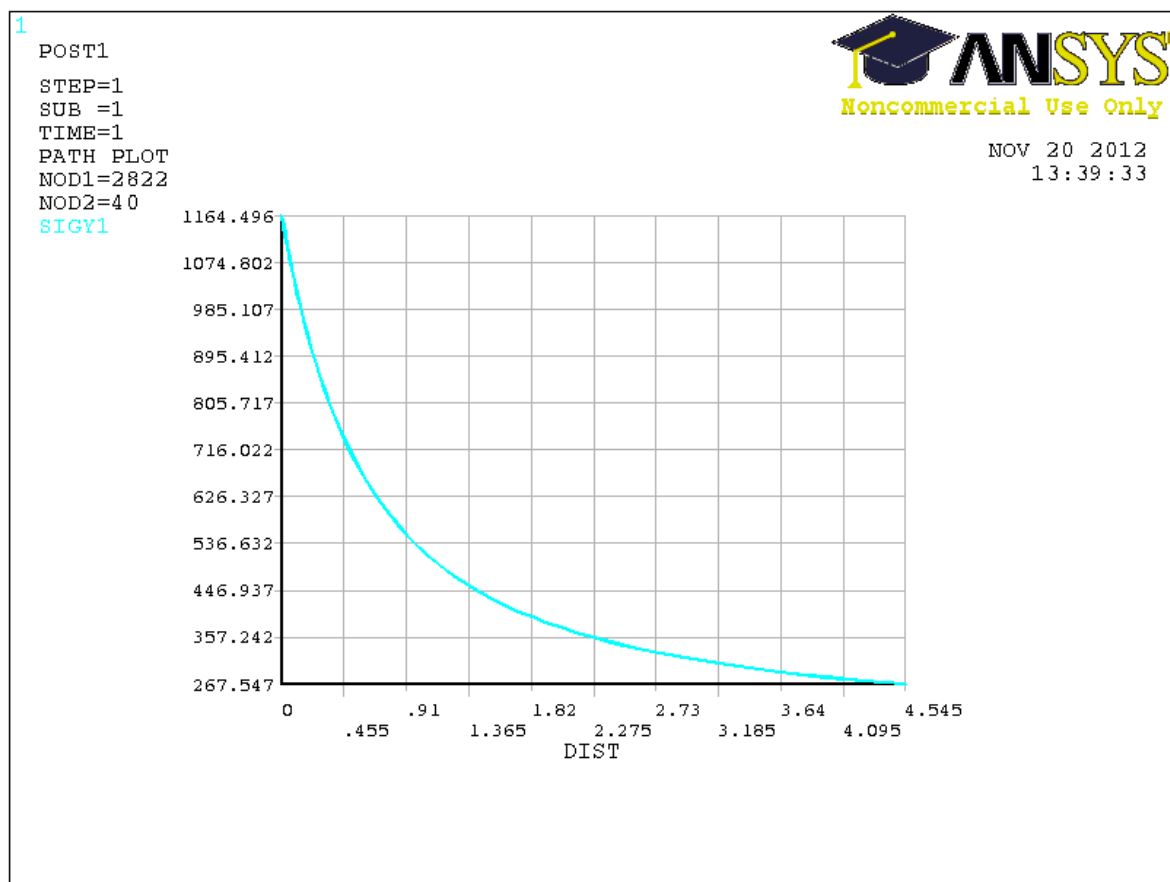


Figura 12

Come si può vedere dalla figura la tensione ha un andamento esponenziale decrescente avendo come massima tensione quella in prossimità del picco. Si ha quindi, com'era da aspettarsi, che il punto critico di un albero con intaglio a U sia proprio l'apice dell'intaglio.

Nel caso studiato abbiamo come principali risultati:

$$\sigma_{\text{pel}}: 1164,496 \text{ MPa}$$

$$K_{\text{tn}}: 2,91$$

$$K_{\text{tg}}: 11,6449$$

Se volessi listare i valori del path basta fare *plot path item -> list path items*, do il nome del percorso e do ok.

Riportiamo come esempio il listato riguardo alla tensione σ_y della prima geometria. La prima colonna è la distanza dal punto selezionato mentre la seconda è la tensione.

S	SIGY1
0	1164,5
1,26E-02	1145,8
2,63E-02	1126,3
4,11E-02	1105,8
5,71E-02	1084,5
7,44E-02	1062,4
9,32E-02	1039,4
0,11347	1015,6
0,13546	991,04
0,15927	965,83
0,18505	939,99
0,21295	913,6
0,24316	886,74
0,27587	859,51
0,31128	831,99
0,34962	804,3
0,39113	776,54
0,43606	748,81
0,48471	721,23

0,53738	693,91
0,59441	666,95
0,65614	640,45
0,72298	614,52
0,79534	589,24
0,87367	564,68
0,95849	540,91
1,0503	518
1,1497	495,99
1,2573	474,91
1,3739	454,78
1,5	435,7
1,5715	425,95
1,6489	416,06
1,7327	406,13
1,8234	396,19
1,9216	386,29
2,0279	376,45
2,143	366,71
2,2676	357,1
2,4025	347,66
2,5486	338,4
2,7067	329,36
2,8779	320,57
3,0633	312,04
3,2639	303,8
3,4812	295,87
3,7164	288,26
3,971	281
4,2467	274,09
4,5452	267,55

Ora riportiamo la *Figura 13* che descrive come varia la tensione principale lungo la bisettrice dell'intaglio (percorrendo il path definito) partendo dall'apice di questo.

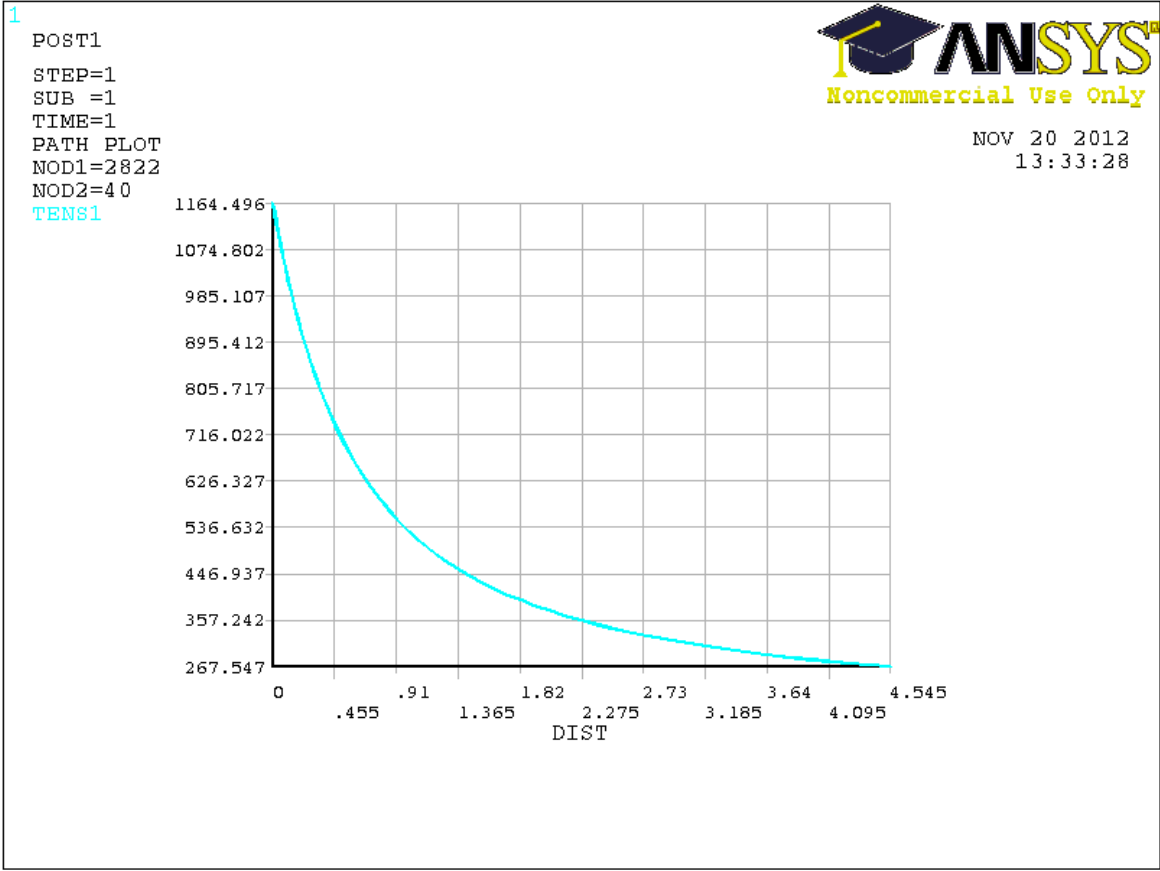


Figura 13

3.2. Seconda geometria: Rapporto $D/d=2$ e $r/d=0,133$

Visualizziamo la distribuzione della tensione principale in prossimità dell'intaglio nella *Figura 14*

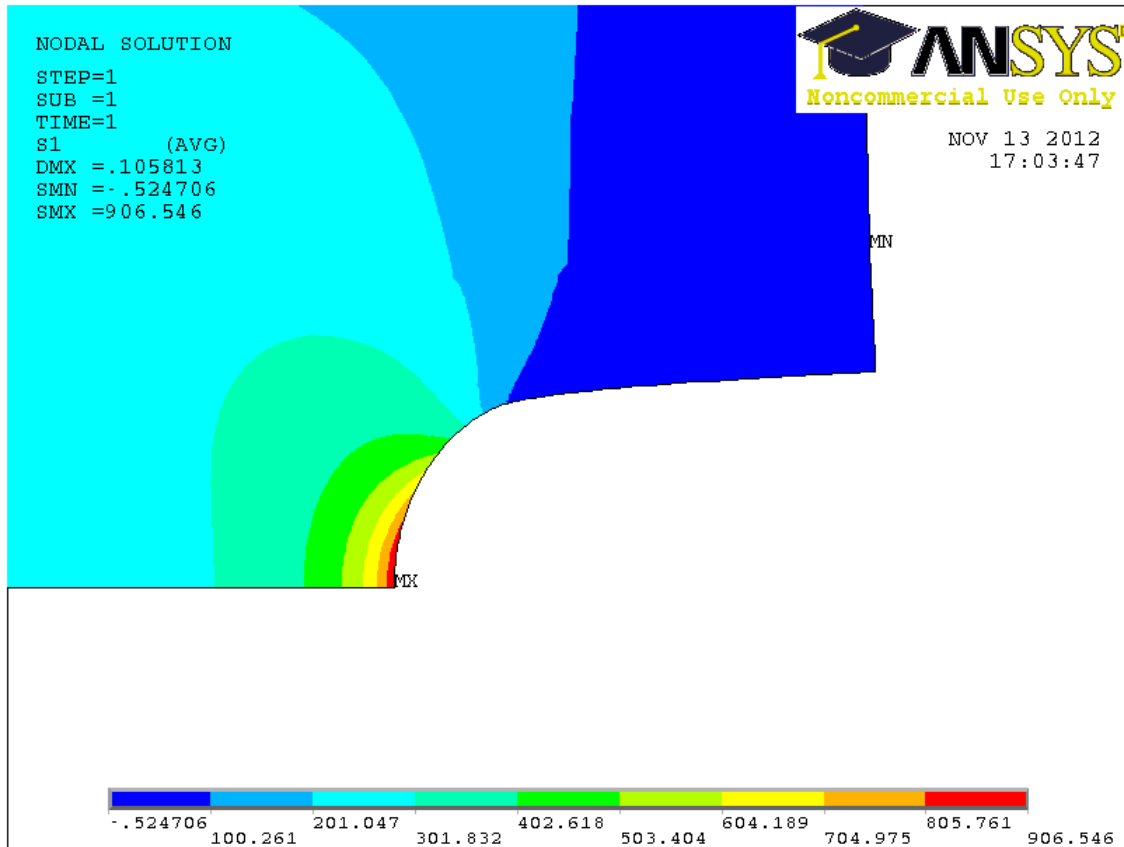


Figura 14

Nel caso studiato abbiamo come principali risultati:

$$\sigma_{peI}: 906,546 \text{ MPa}$$

$$K_{tn}: 2,2663$$

$$K_{tg}: 9,0654$$

3.3.Terza geometria: Rapporto D/d=2 e r/d=0,15

Visualizziamo la distribuzione della tensione principale in prossimità dell'intaglio del caso studiato nella *Figura 15*

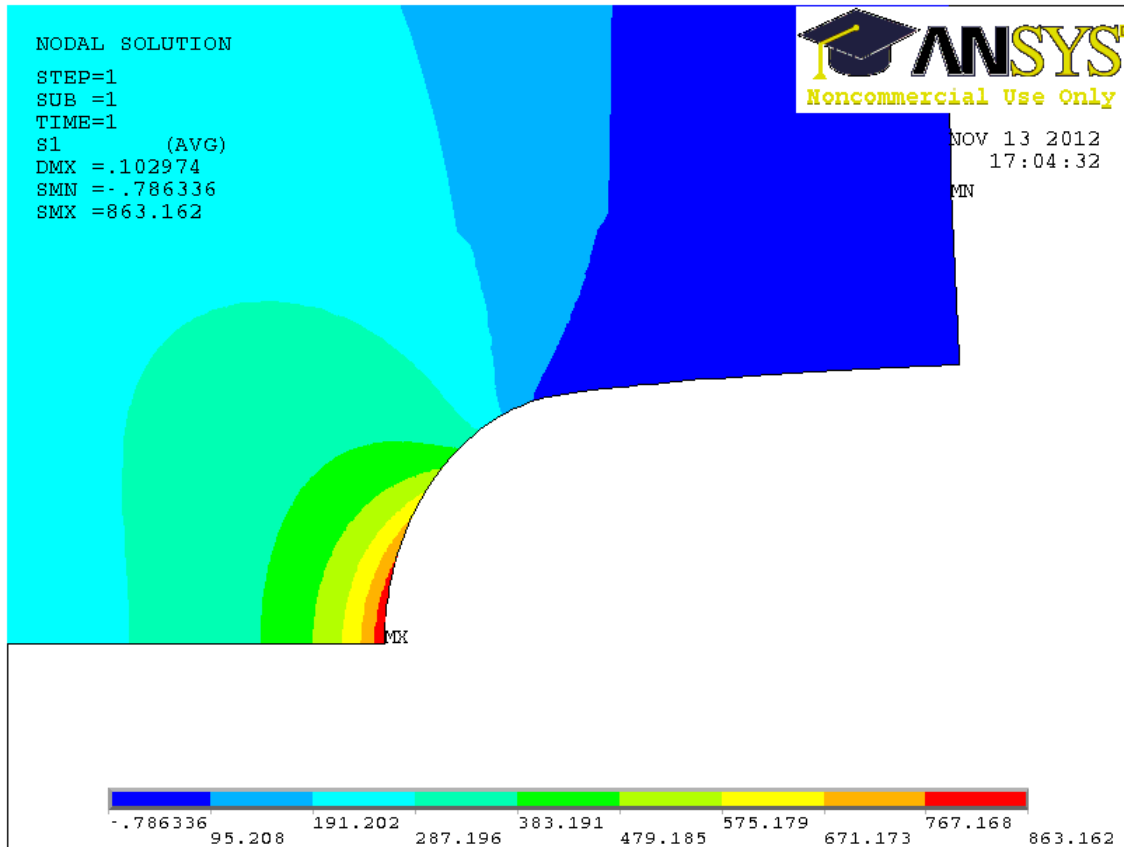


Figura 15

Nel caso studiato abbiamo come principali risultati:

$$\sigma_{pe1}: 863,162 \text{ MPa}$$

$$K_{tn}: 2,1579$$

$$K_{tg}: 8,6316$$

3.4.Quarta geometria: Rapporto D/d=1,2 e r/d=0,075

Visualizziamo la distribuzione della tensione principale in prossimità dell'intaglio del caso studiato nella *Figura 16*

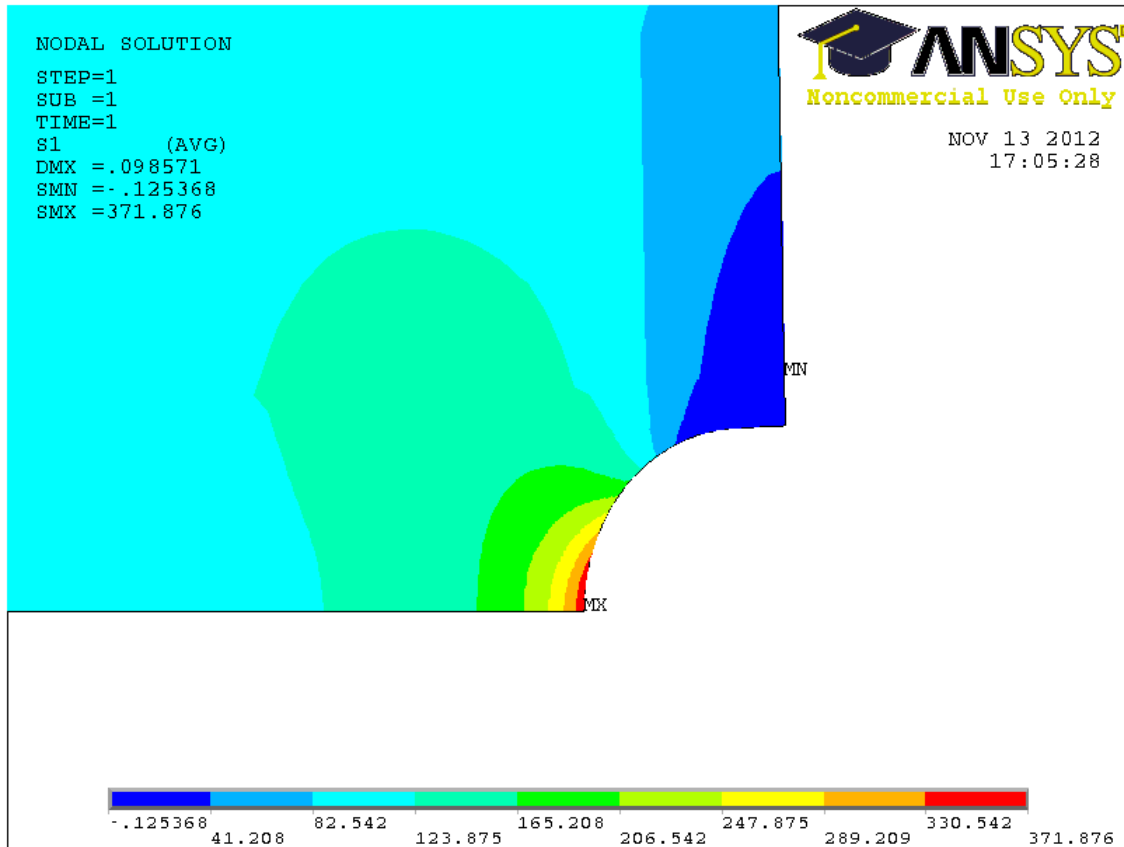


Figura 16

Nel caso studiato abbiamo come principali risultati:

$$\sigma_{pe1}: 371,876 \text{ MPa}$$

$$K_{tn}: 2,5824$$

$$K_{tg}: 3,7187$$

3.5.Quinta geometria: Rapporto D/d=1,2 e r/d=0,077

Visualizziamo la distribuzione della tensione principale in prossimità dell'intaglio del caso studiato nella *Figura 17*

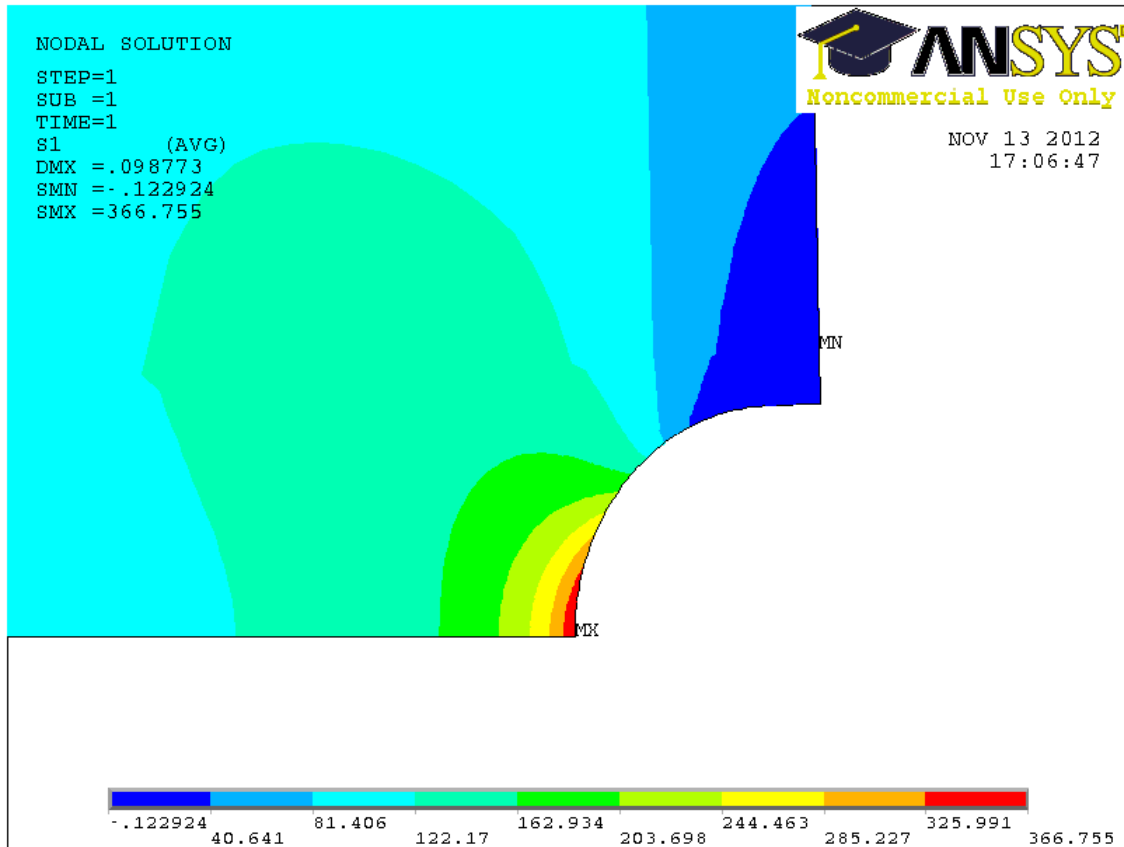


Figura 17

Nel caso studiato abbiamo come principali risultati:

$$\sigma_{\text{pel}}: 366,755\text{MPa}$$

$$K_{\text{tn}}: 2,5469$$

$$K_{\text{tg}}: 3,6675$$

3.6.Sesta geometria: Rapporto D/d=1,2 e r/d=0,07

Visualizziamo la distribuzione della tensione principale in prossimità dell'intaglio del caso studiato nella *Figura 18*

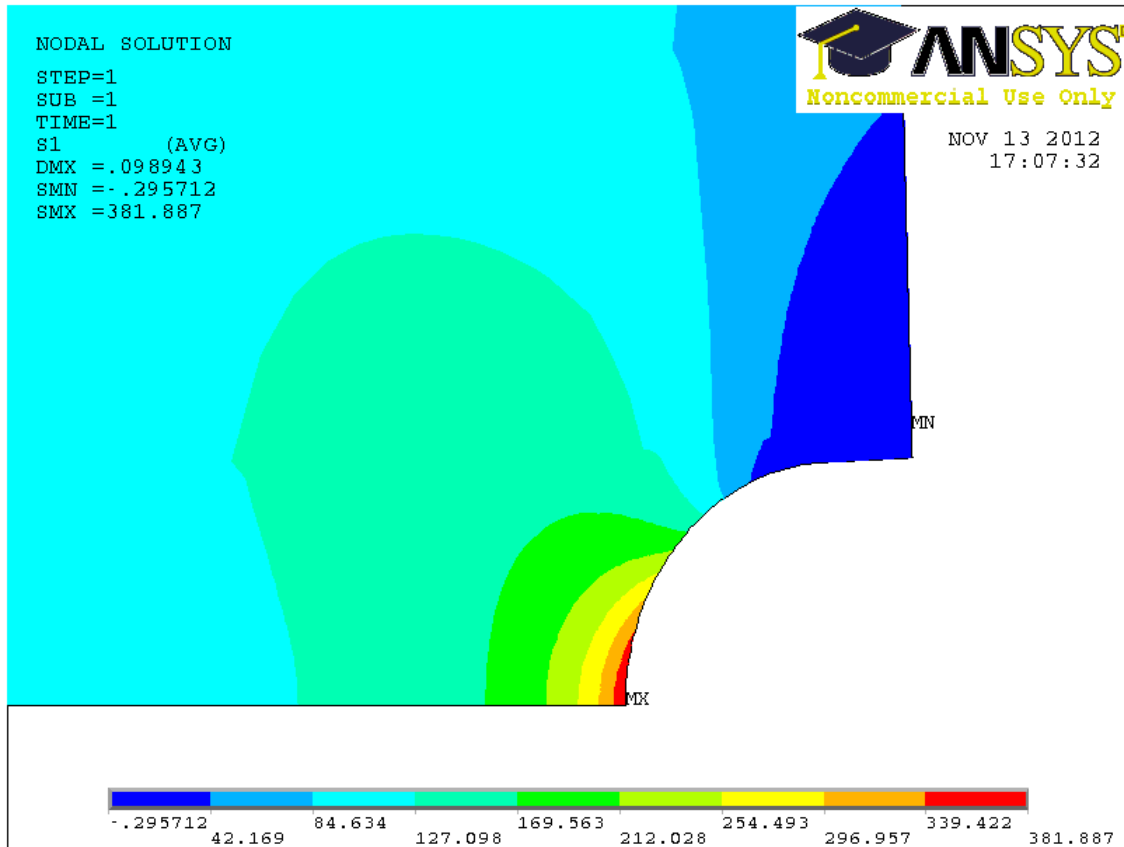


Figura 18

Nel caso studiato abbiamo come principali risultati:

$$\sigma_{pe1}: 381,887 \text{ MPa}$$

$$K_{tn}: 2,6519$$

$$K_{tg}: 3,8188$$

3.7. Settima geometria: Rapporto $D/d=1,5$ e $r/d=0,208$

Visualizziamo la distribuzione della tensione principale in prossimità dell'intaglio del caso studiato nella *Figura 19*

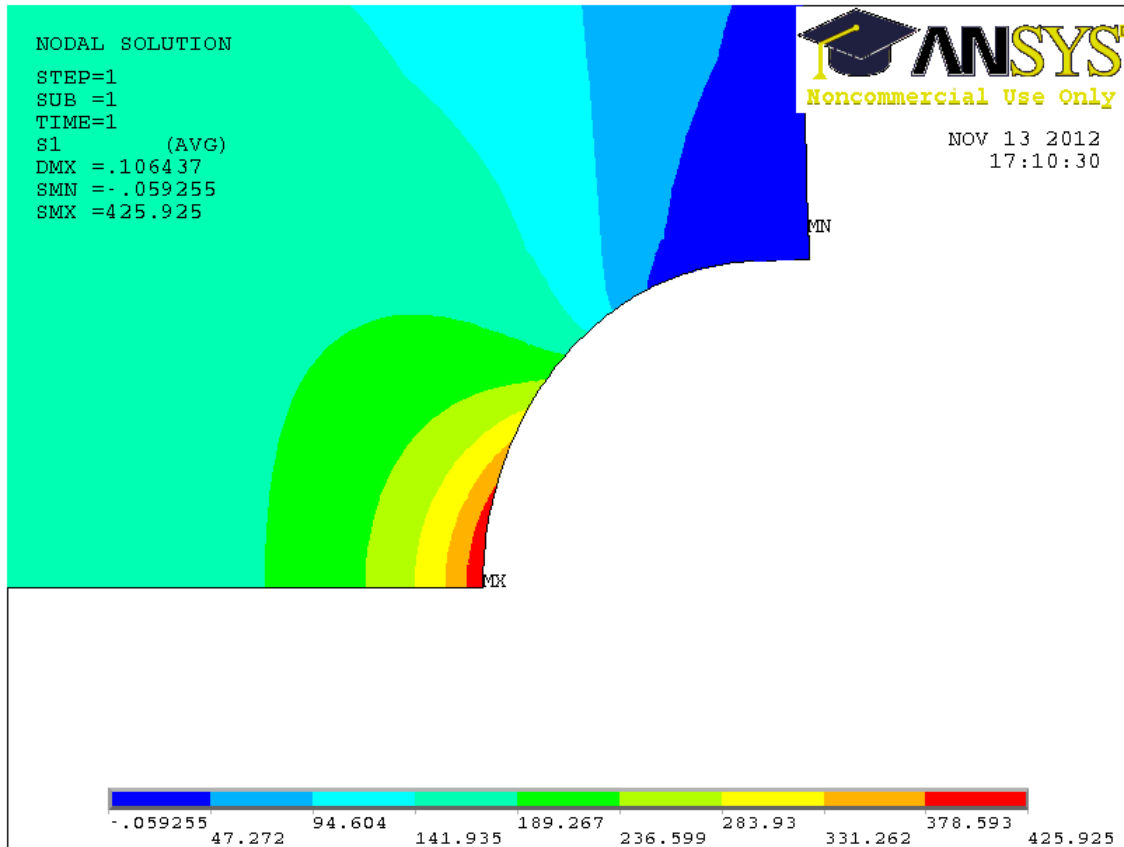


Figura 19

Nel caso studiato abbiamo come principali risultati:

$$\sigma_{pe1}: 425,925 \text{ MPa}$$

$$K_{tn}: 1,893$$

$$K_{tg}: 4,2592$$

3.8.Ottava geometria: Rapporto D/d=1,5 e r/d=0,125

Visualizziamo la distribuzione della tensione principale in prossimità dell'intaglio del caso studiato nella *Figura 20*

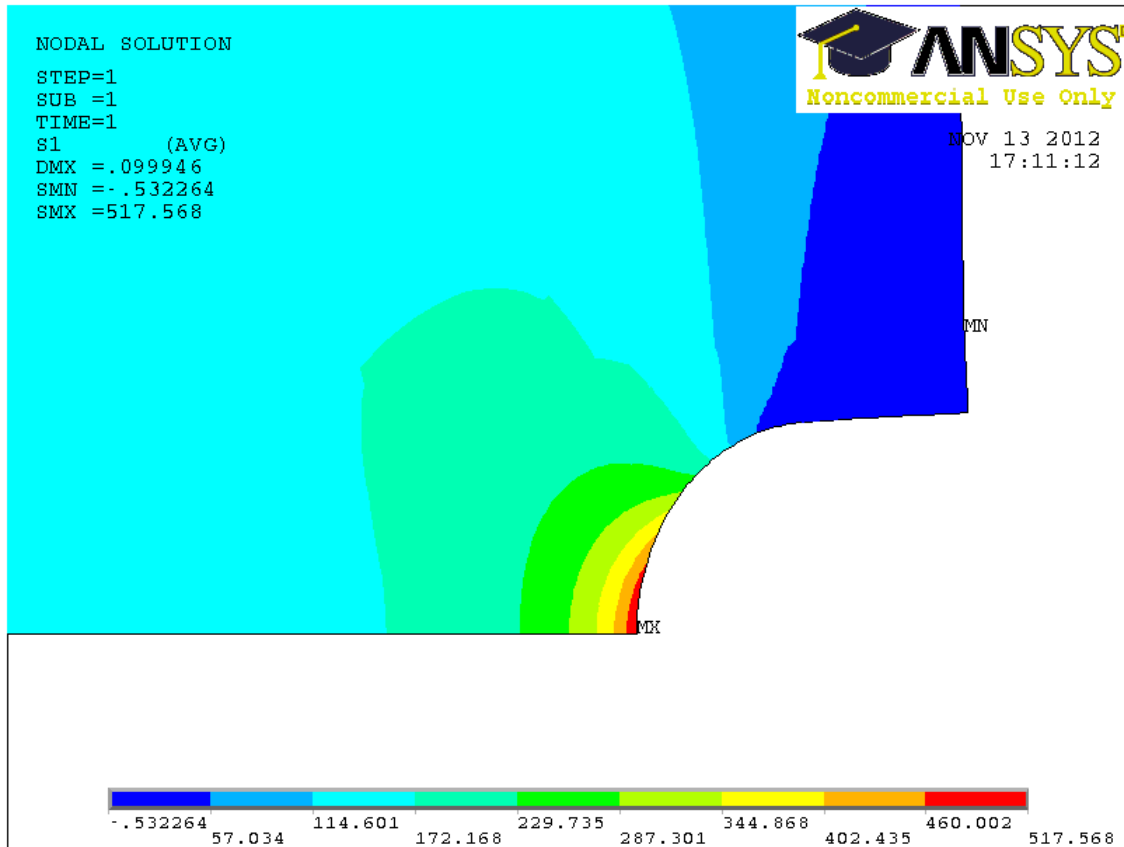


Figura 20

Nel caso studiato abbiamo come principali risultati:

$$\sigma_{pe1}: 517,568 \text{ MPa}$$

$$K_{tn}: 2,3$$

$$K_{tg}: 5,1756$$

3.9.Nona geometria: Rapporto D/d=1,5 e r/d=0,15

Visualizziamo la distribuzione della tensione principale in prossimità dell'intaglio del caso studiato nella *Figura 21*

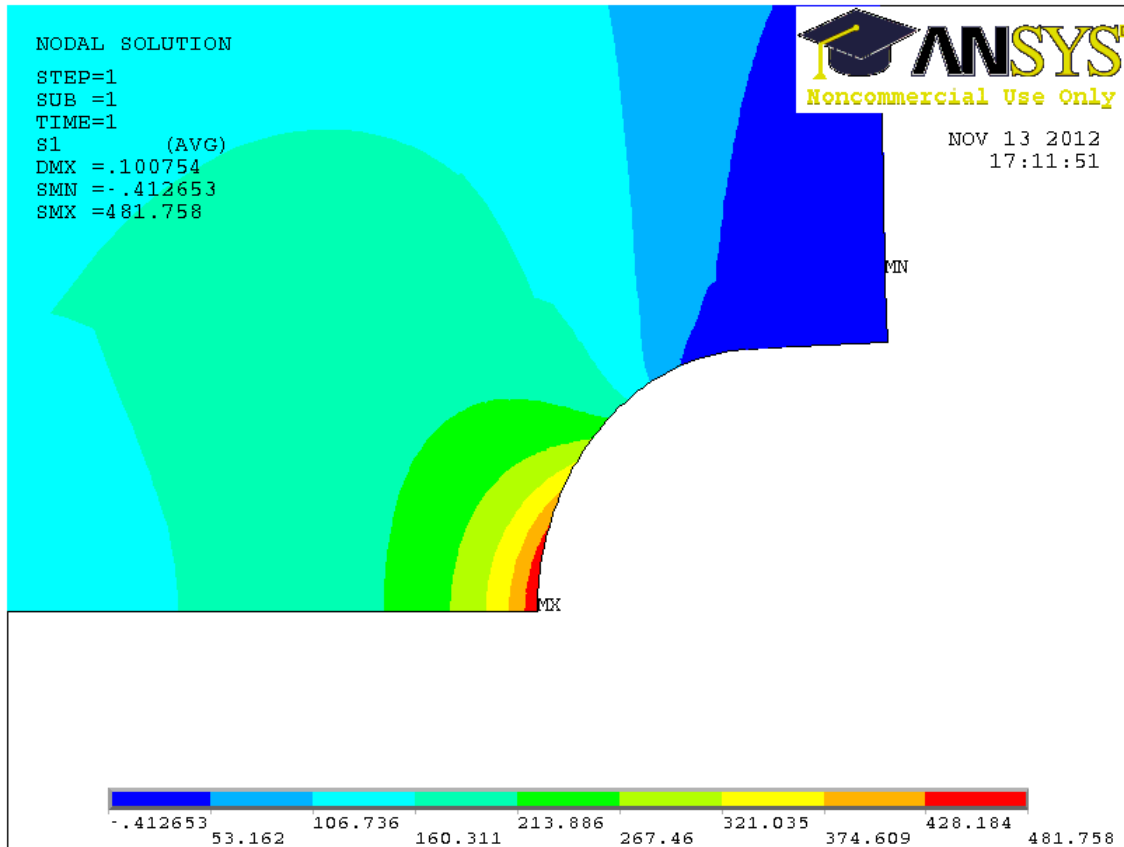


Figura 21

Nel caso studiato abbiamo come principali risultati:

$$\sigma_{peI}: 481,758 \text{ MPa}$$

$$K_{tn}: 2,1411$$

$$K_{tg}: 4,8175$$

3.10.Decima geometria: Rapporto D/d=1,3 e r/d=0,1

Visualizziamo la distribuzione della tensione principale in prossimità dell'intaglio del caso studiato nella *Figura 22*

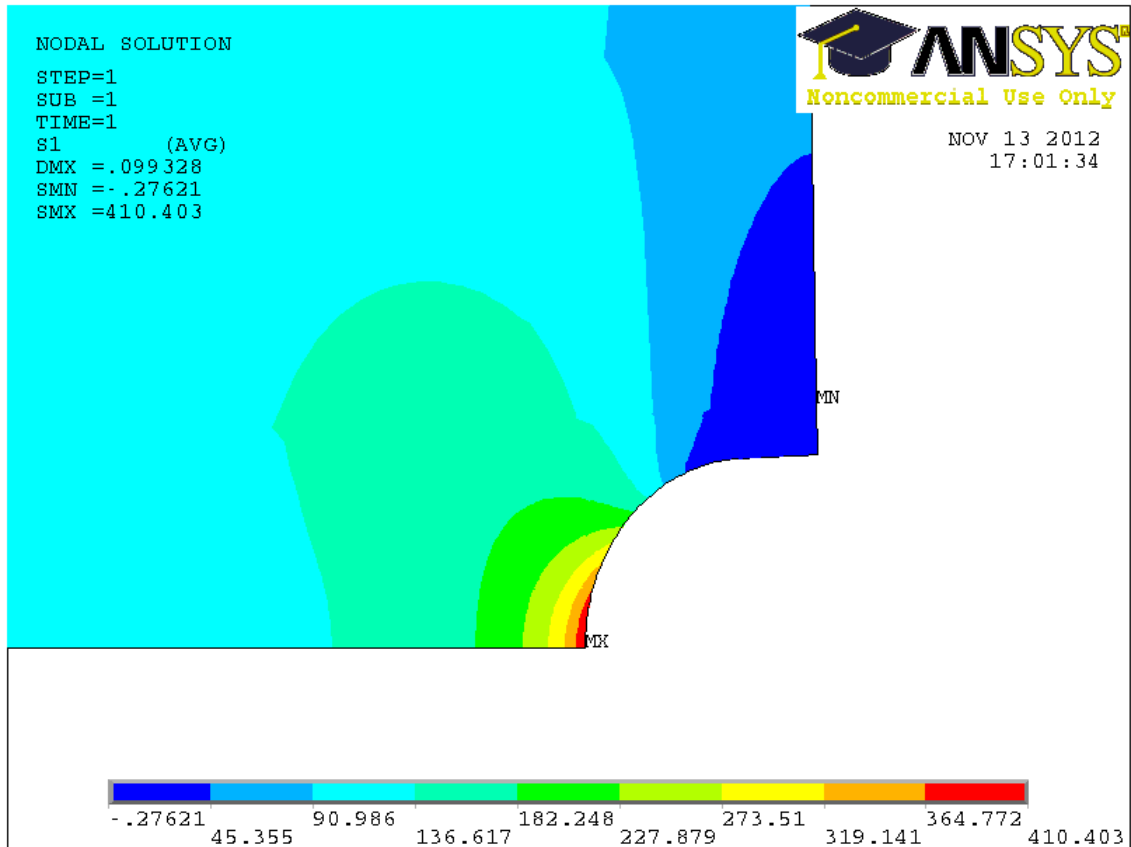


Figura 22

Nel caso studiato abbiamo come principali risultati:

$$\sigma_{pe1}: 410,403 \text{ MPa}$$

$$K_{tn}: 2,4284$$

$$K_{tg}: 4,104$$

3.11.Undicesima geometria: Rapporto D/d=1,3 e r/d=0,06

Visualizziamo la distribuzione della tensione principale in prossimità dell'intaglio del caso studiato nella *Figura 23*

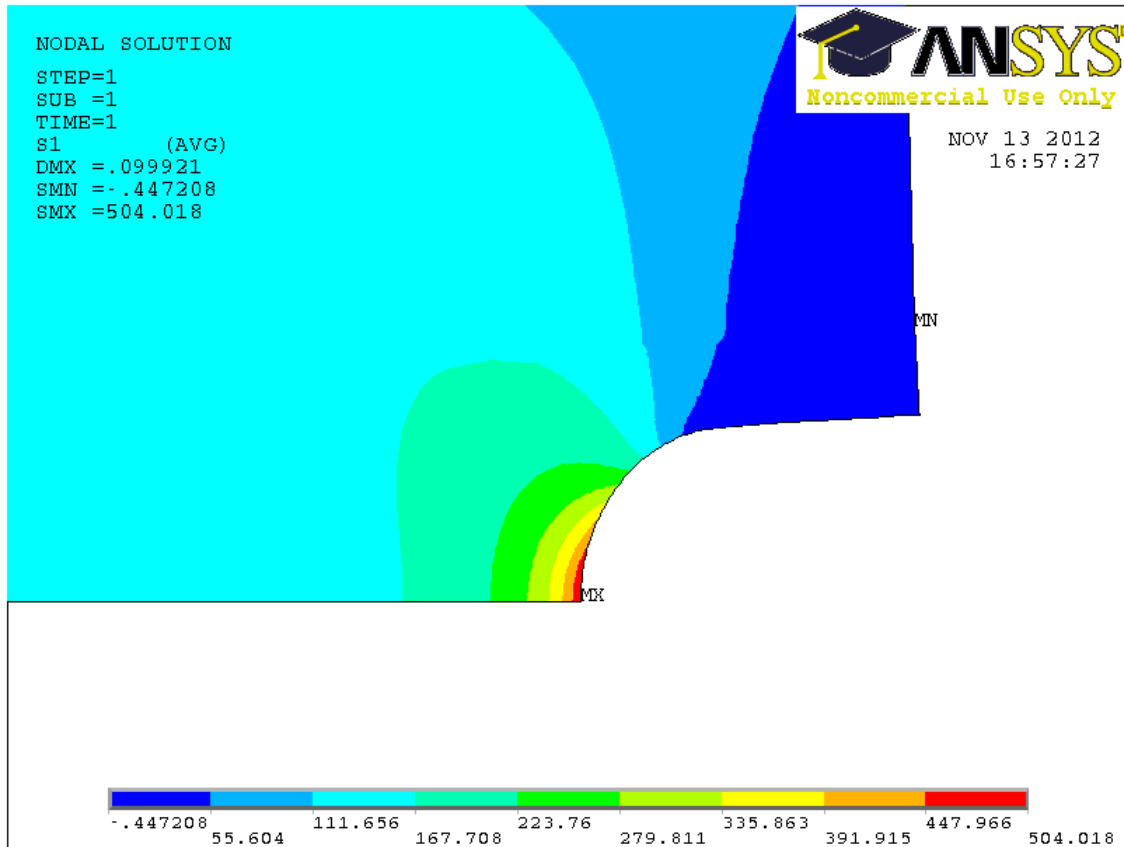


Figura 23

Nel caso studiato abbiamo come principali risultati:

$$\sigma_{peI}: 504,018 \text{ MPa}$$

$$K_{tn}: 2,9823$$

$$K_{tg}: 5,0401$$

3.12. Dodicesima geometria: Rapporto D/d=1,3 e r/d=0,12

Visualizziamo la distribuzione della tensione principale in prossimità dell'intaglio del caso studiato nella *Figura 24*

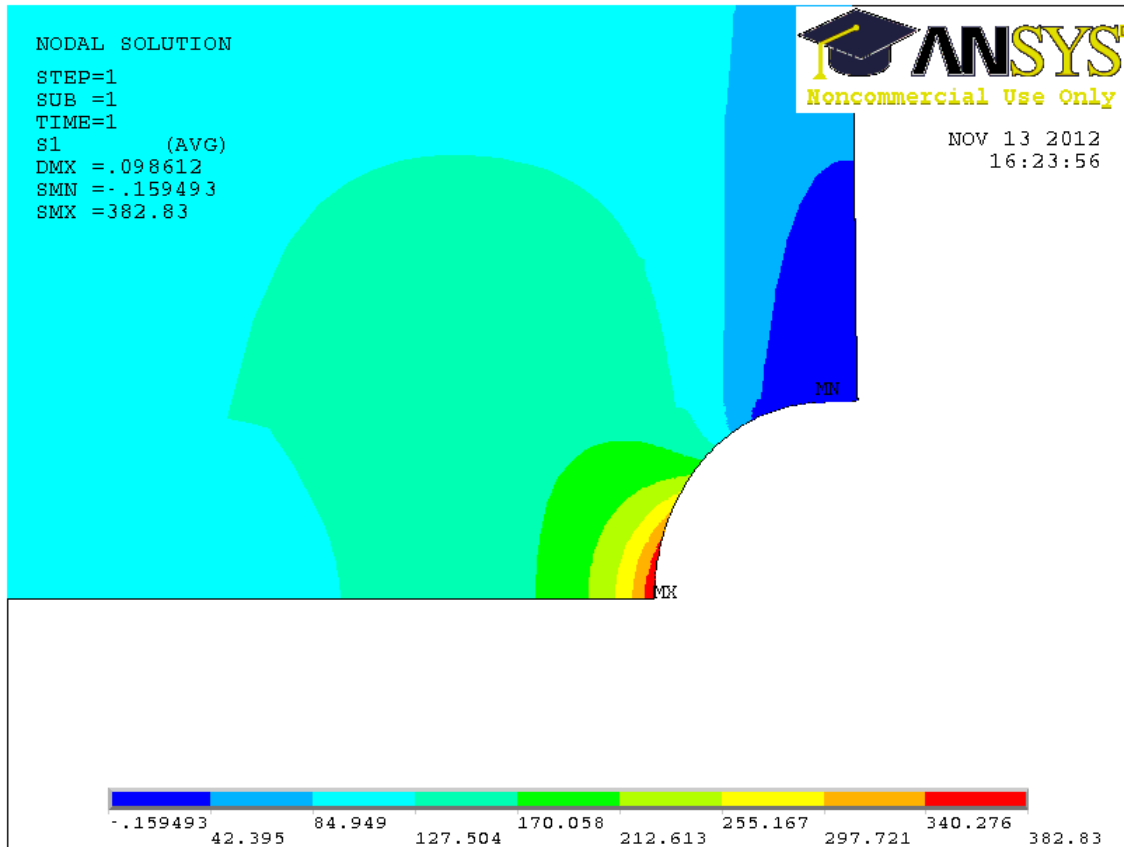


Figura 24

Nel caso studiato abbiamo come principali risultati:

$$\sigma_{\text{pel}}: 382,83 \text{ MPa}$$

$$K_{\text{tn}}: 2,2652$$

$$K_{\text{tg}}: 3,8283$$

Riportiamo nella tabella sottostante i parametri descrittivi e quelli trovati mediante lo studio precedente relativi a tutte le geometrie studiate, affiancando i K_{tn} ricavati dalla chart del Peterson (riportata a fine elaborato) valutandone l'errore percentuale tra K_{tn} riguardanti FEM e quelli del manuale.

geometrie	D (mm)	d (mm)	r (mm)	r/d	σ_{max} (MPa)	K_{tg}	K_{tn}	$K_{tnPeterson}$	errore% su K_{tn}
1	40	20	1,5	0,075	1164,5	11,645	2,91	3,01	3,32%
2	30	15	2	0,13333	906,546	9,06546	2,26637	2,37	4,37%
3	20	10	1,5	0,15	863,162	8,63162	2,15791	2,245	3,88%
geometrie	D (mm)	d (mm)	r (mm)	r/d	σ_{max} (MPa)	K_{tg}	K_{tn}	$K_{tnPeterson}$	errore% su K_{tn}
4	48	40	3	0,075	371,876	3,71876	2,58247	2,635	1,99%
5	54	45	3,5	0,07778	366,755	3,66755	2,54691	2,6	2,04%
6	60	50	3,5	0,07	381,887	3,81887	2,65199	2,695	1,60%
geometrie	D (mm)	d (mm)	r (mm)	r/d	σ_{max} (MPa)	K_{tg}	K_{tn}	$K_{tnPeterson}$	errore% su K_{tn}
7	72	48	10	0,20833	425,925	4,25925	1,893	1,905	0,63%
8	24	16	2	0,125	517,568	5,17568	2,3003	2,34	1,70%
9	30	20	3	0,15	481,758	4,81758	2,14115	2,16	0,87%
geometrie	D (mm)	d (mm)	r (mm)	r/d	σ_{max} (MPa)	K_{tg}	K_{tn}	$K_{tnPeterson}$	errore% su K_{tn}
10	39	30	3	0,1	410,403	4,10403	2,42842	2,475	1,88%
11	52	40	2,4	0,06	504,018	5,04018	2,98236	3	0,59%
12	26	20	2,4	0,12	382,83	3,8283	2,26527	2,275	0,43%

Come si può vedere l'errore massimo percentuale è del 4,37% , che avviene nel caso $D/d=2$, quindi possiamo considerare i due valori di K_{tn} abbastanza uguali. Negli altri casi, $D/d=1,2$ $D/d=1,5$ $D/d=1,3$, invece, i valori sono molto uguali se non per un errore max percentuale di circa 2% e quindi possiamo considerare la stima di K_{tn} del Peterson molto accurata.

4.Creager-Paris (1967)

Creager e Paris (1967) analizzarono la distribuzione delle tensioni intorno all'estremità di una cricca di lunghezza $2a$ (in *Figura 25*, un esempio relativo a una piastra criccata) usando il sistema di riferimento di coordinate polari r, θ con l'origine posto ad una distanza di $\rho/2$ dall'apice, dove ρ è il raggio di curvatura della cricca.

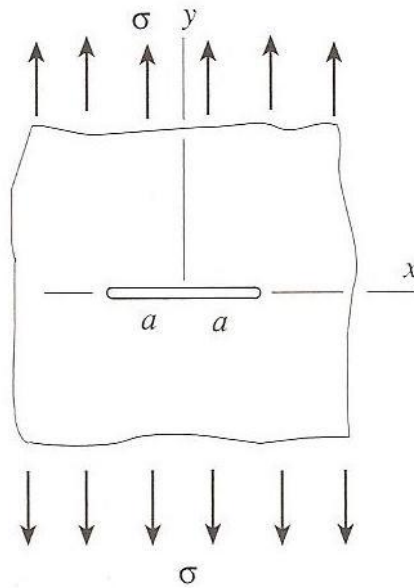


Figura 25

Il sistema di riferimento delle coordinate è riportato sotto nella *Figura 26*.

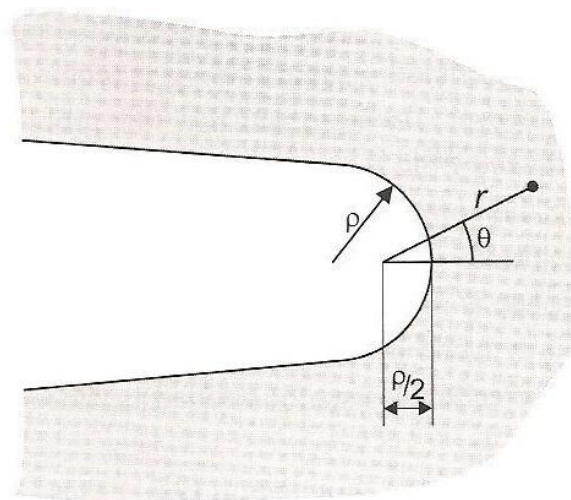


Figura 26

Le tensioni σ_y σ_x ζ_{xy} in prossimità dell'estremità si possono esprimere come una serie di termine esponenziali rispetto alla distanza radiale. Trascurando i termini di ordine superiore a 2 abbiamo che le tensioni possono essere approssimate, per una frattura di modo I (ossia soggetta a un carico ortogonale alla cricca), a:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \theta/2 (1 - \sin \theta/2 \sin 3\theta/2) - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{\rho}{2r}\right) \cos 3\theta/2,$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \theta/2 (1 + \sin \theta/2 \sin 3\theta/2) + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{\rho}{2r}\right) \cos 3\theta/2,$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \theta/2 \cos \theta/2 \cos 3\theta/2 - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{\rho}{2r}\right) \sin 3\theta/2.$$

dove K_I è il fattore di intensificazione delle tensioni di modo I, funzione di σ_{max} e ρ :

$$K_I = \sigma_{max}(\pi\rho/2)^{1/2}$$

In prossimità dell'apice della cricca ossia a $r=\rho/2$ e $\theta=0$, abbiamo che σ_y avrà il valore massimo, mentre σ_x e ζ_{xy} saranno nulle. Sostituendo quindi $r=\rho/2$ e $\theta=0$ nell'equazione precedente otteniamo:

$$\sigma_y = 2K_I/\sqrt{2\pi\rho/2}$$

$$\sigma_x = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$

A seguire sono riportati i grafici delle dodici geometrie relativi al confronto delle tensioni σ_y e σ_x ricavate dal metodo degli elementi finiti e le rispettive calcolate tramite la formula di Creager-Paris (1967).

4.1. Prima geometria: Rapporto $D/d=2$ e $r/d=0,075$

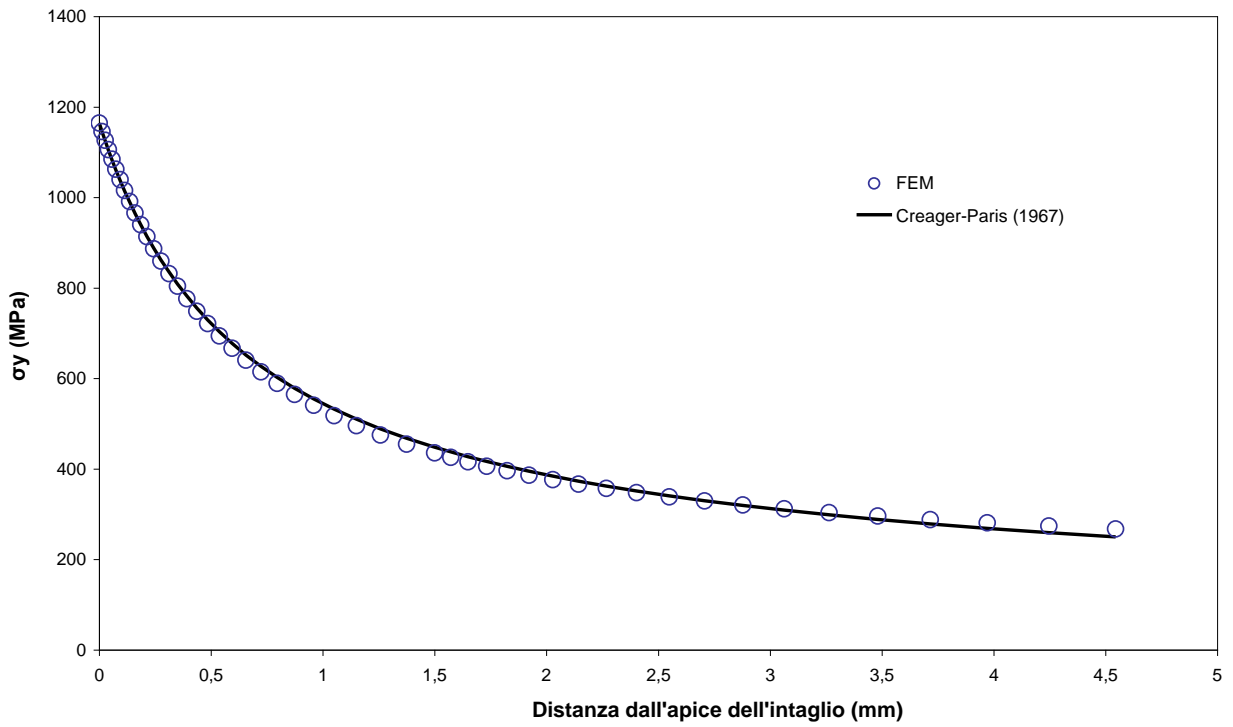


Figura 27

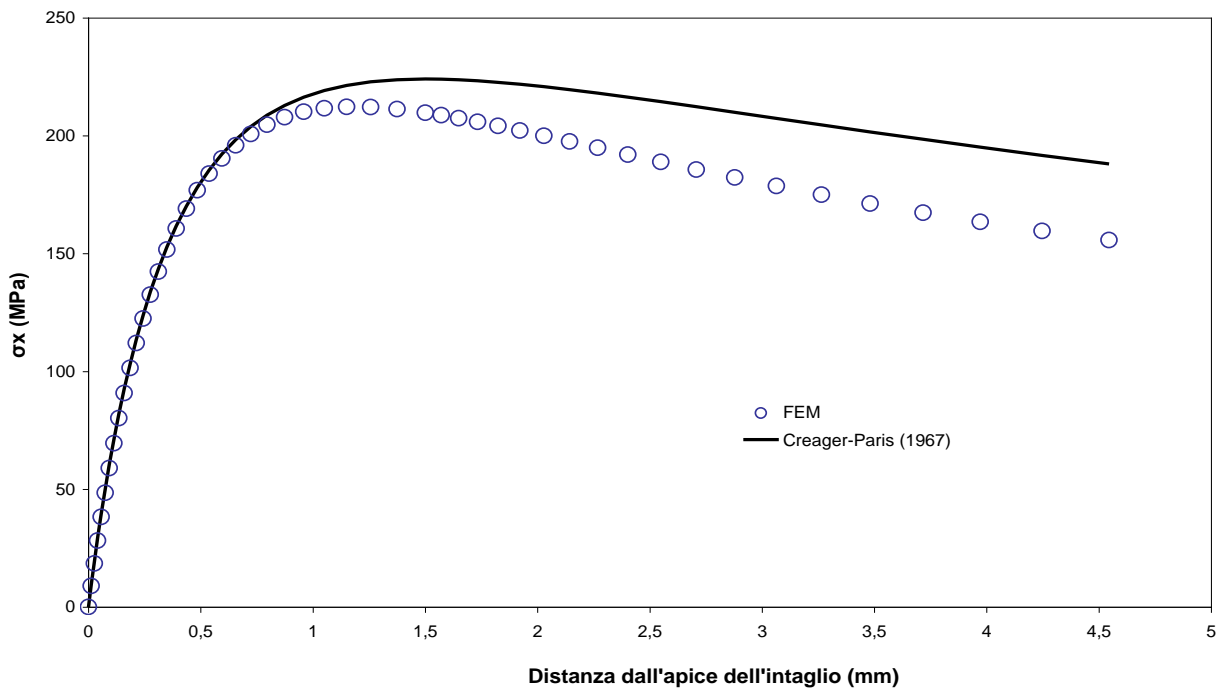


Figura 28

4.2. Seconda geometria: Rapporto $D/d=2$ e $r/d=0,133$

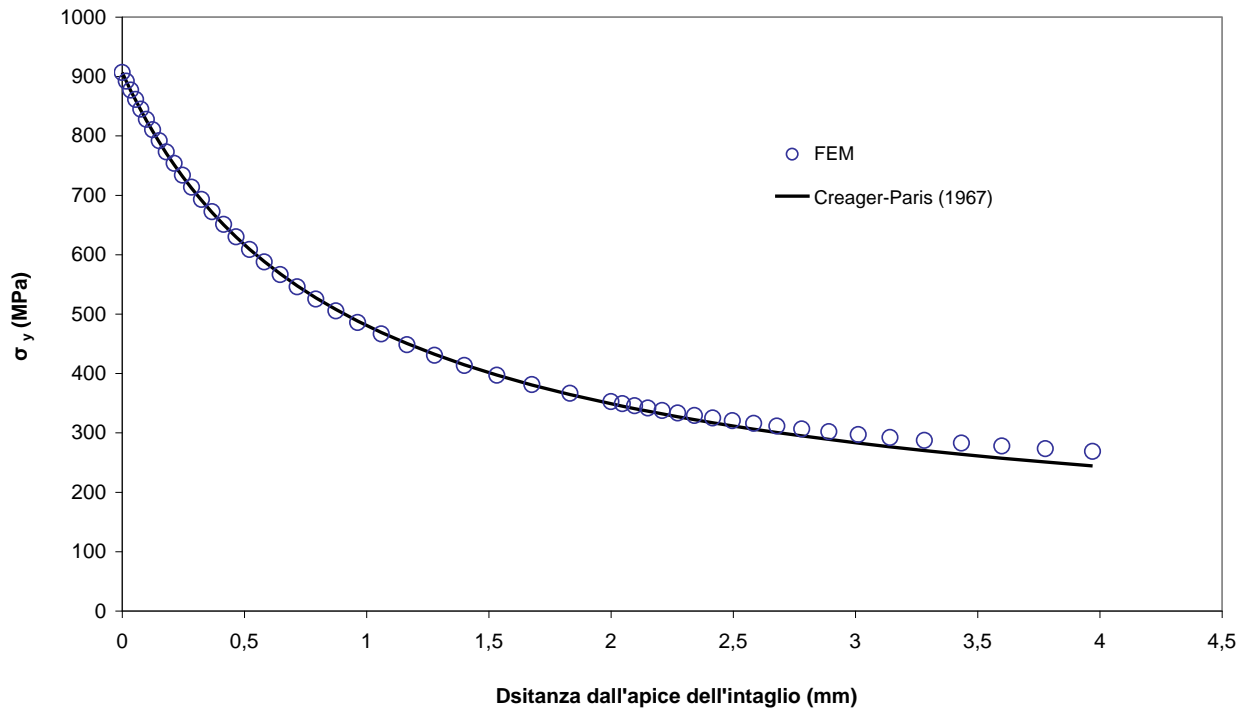


Figura 29

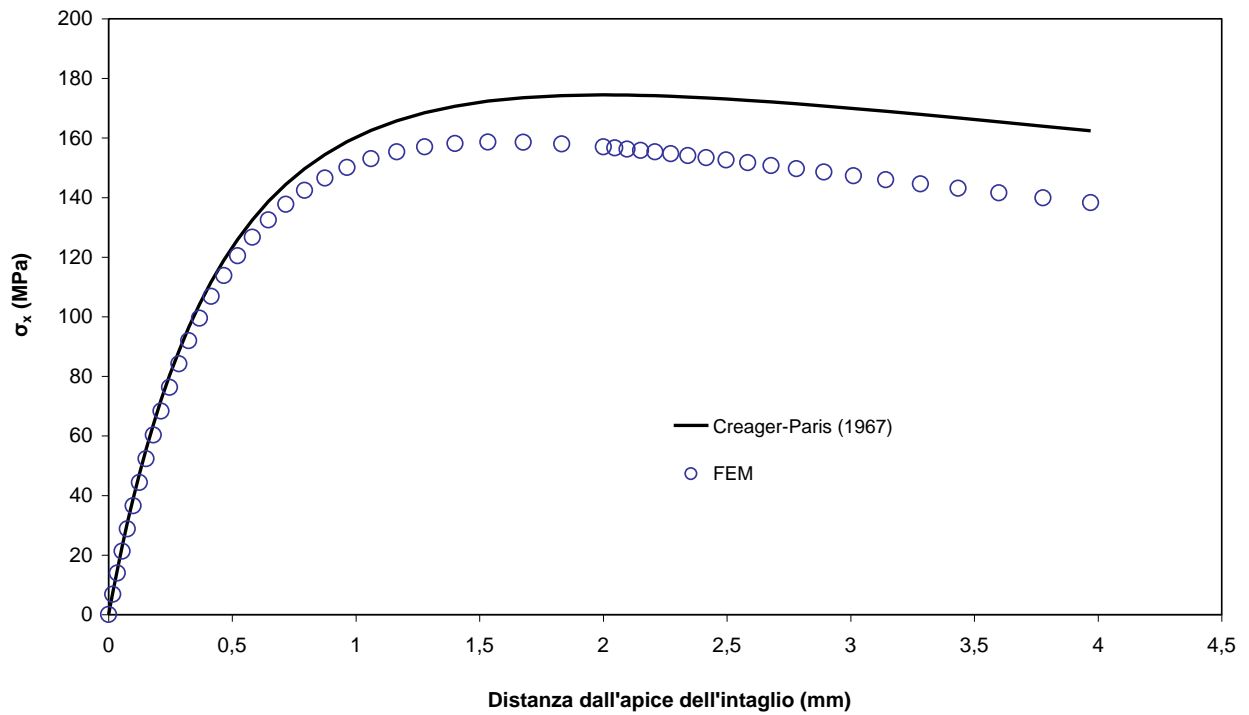


Figura 30

4.3. Terza geometria: Rapporto $D/d=2$ e $r/d=0,15$

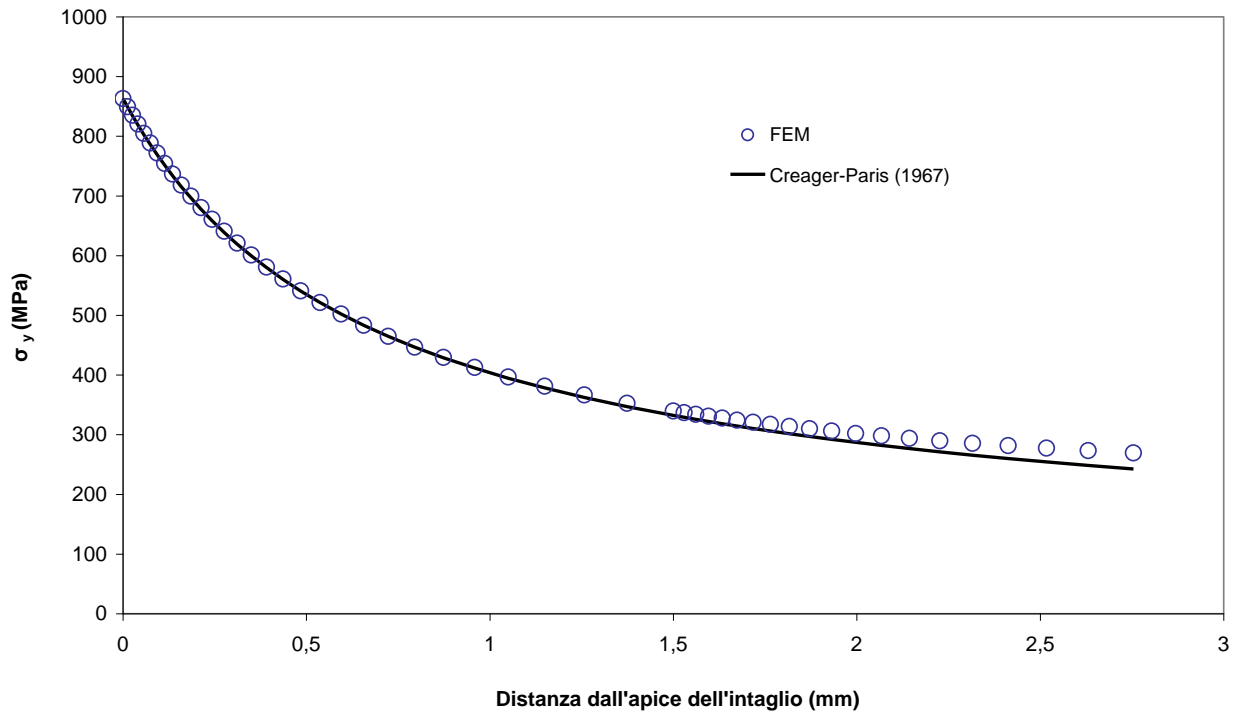


Figura 31

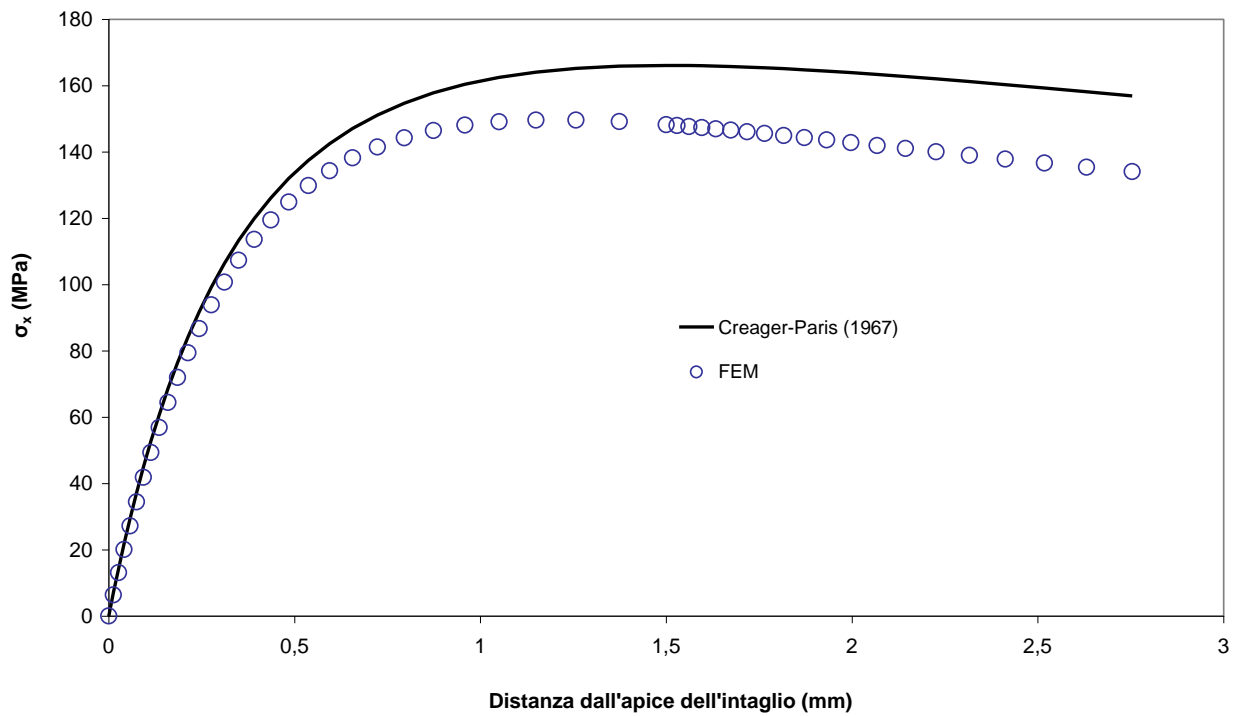


Figura 32

4.4. Quarta geometria: Rapporto $D/d=1,2$ e $r/d=0,075$

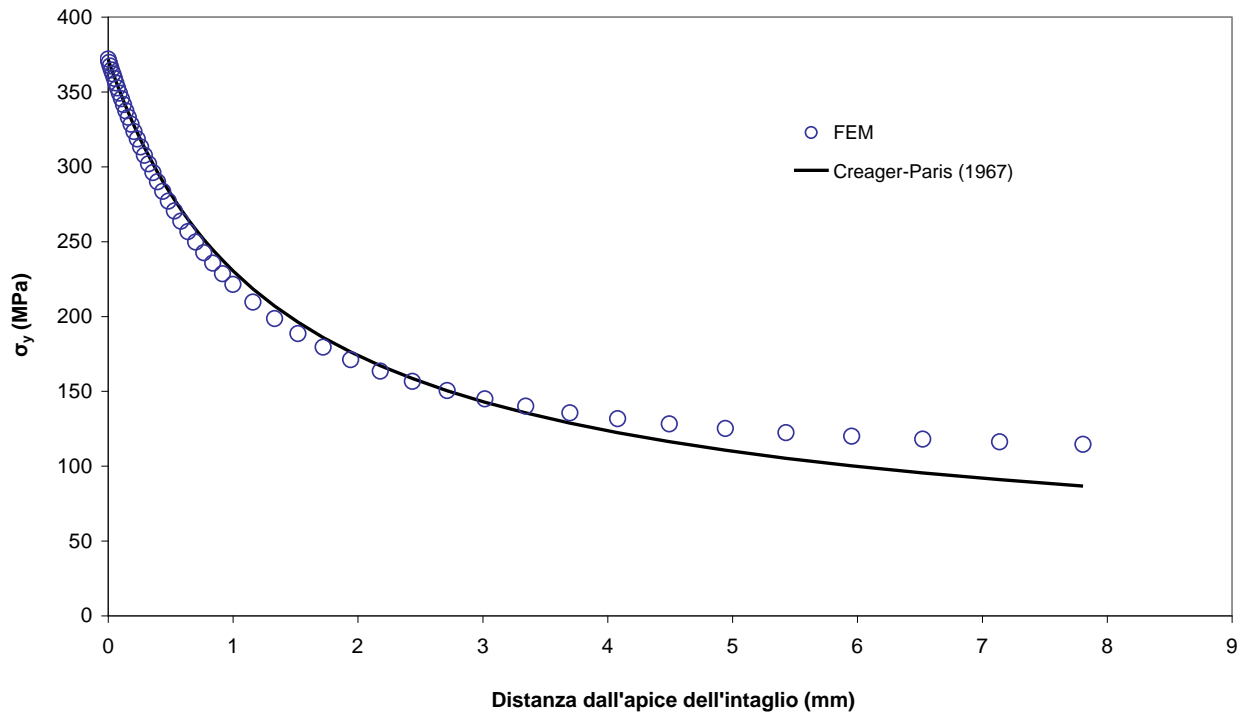


Figura 33

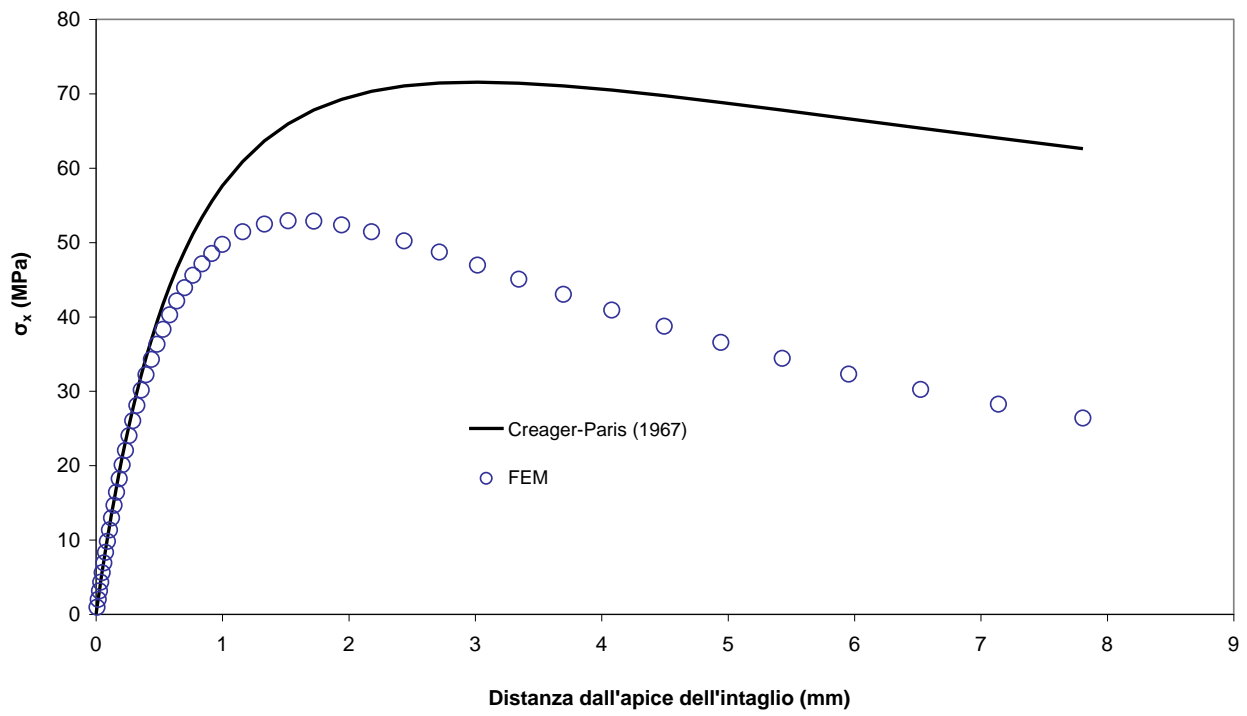


Figura 34

4.5. Quinta geometria: Rapporto $D/d=1,2$ e $r/d=0,077$

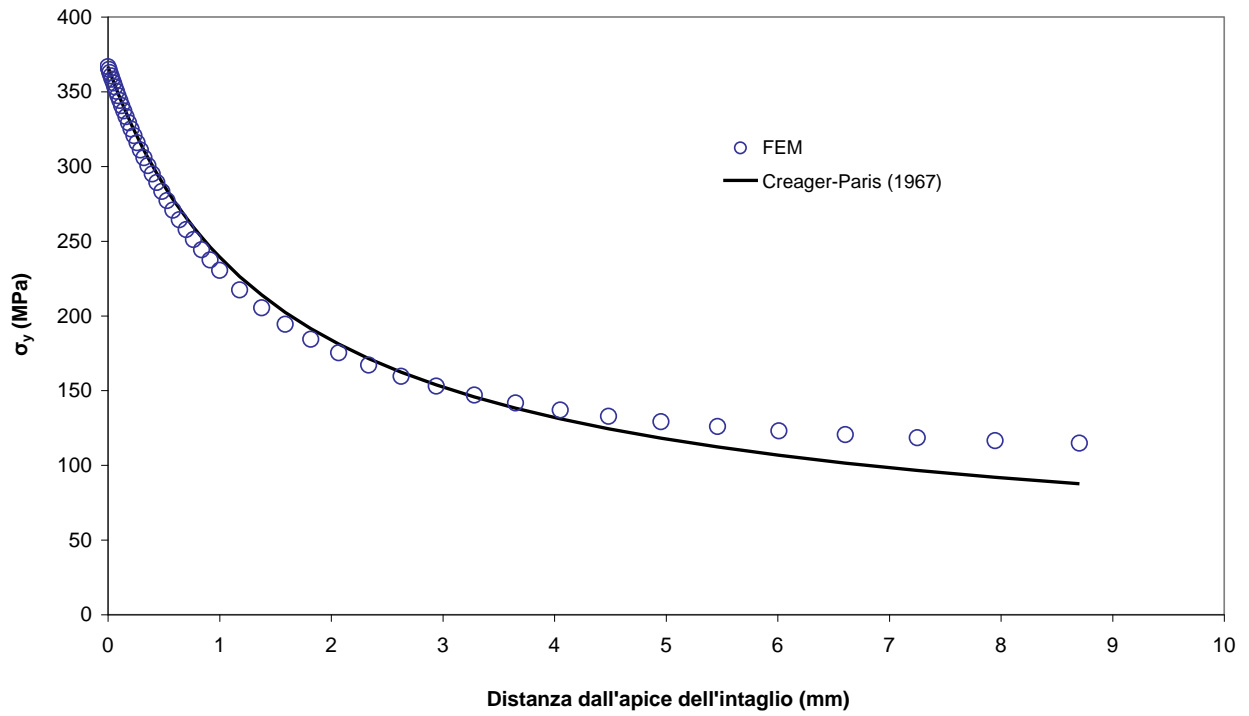


Figura 35

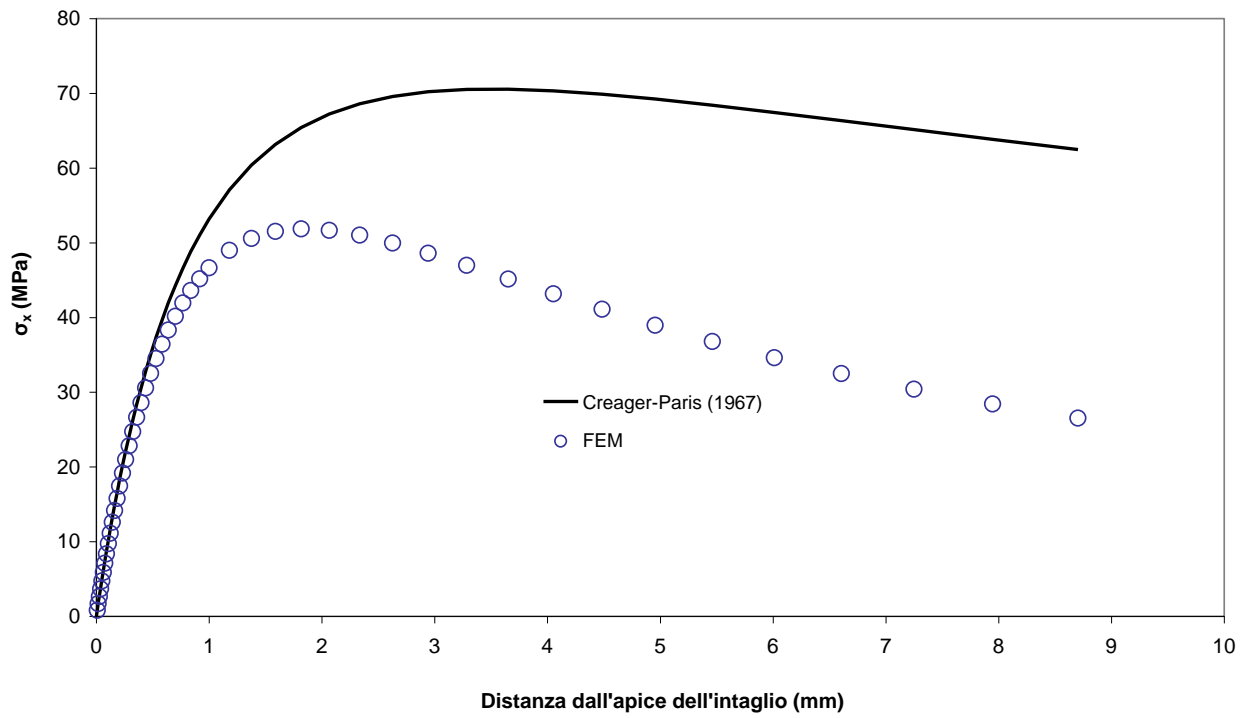


Figura 36

4.6.Sesta geometria: Rapporto $D/d=1,2$ e $r/d=0,07$

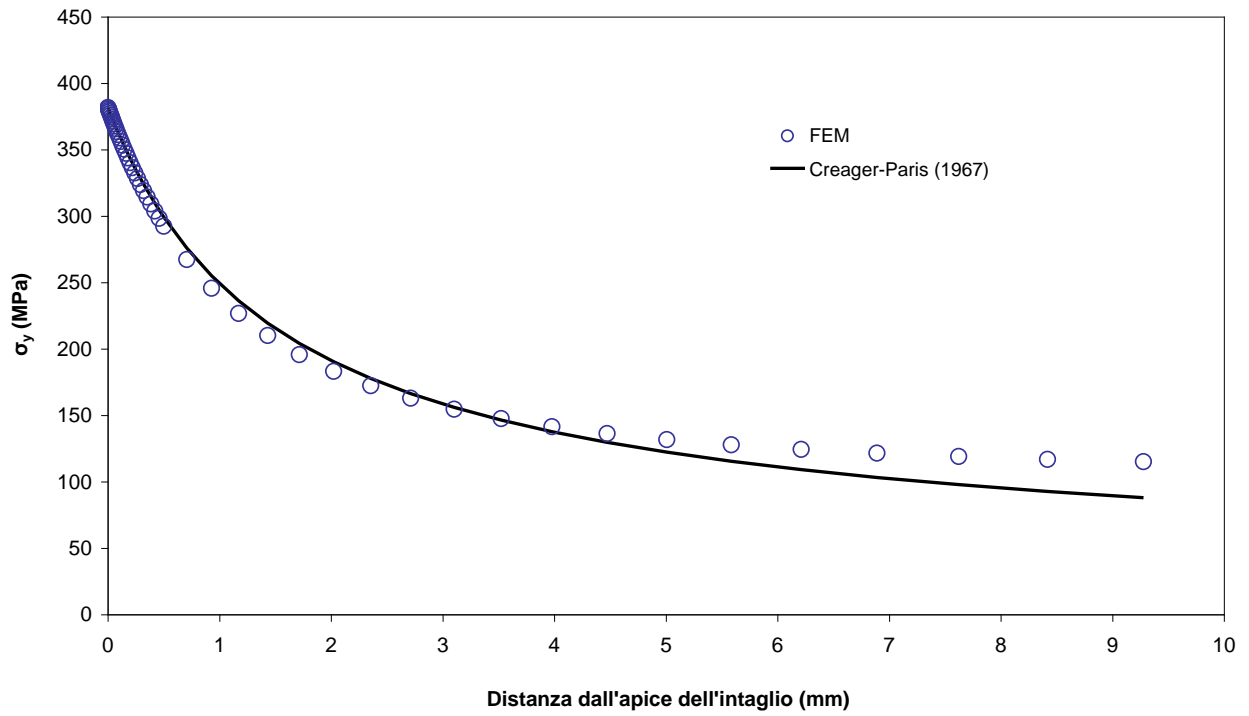


Figura 37

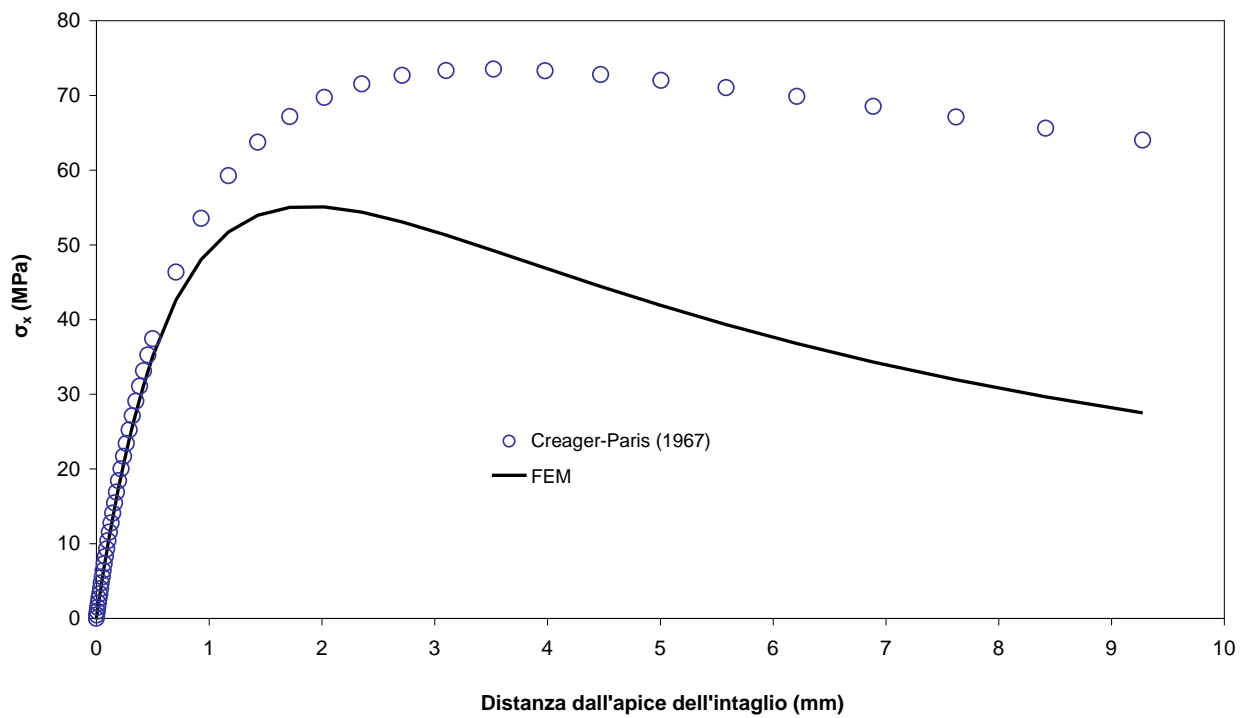


Figura 38

4.7. Settima geometria: Rapporto $D/d=1,5$ e $r/d=0,208$

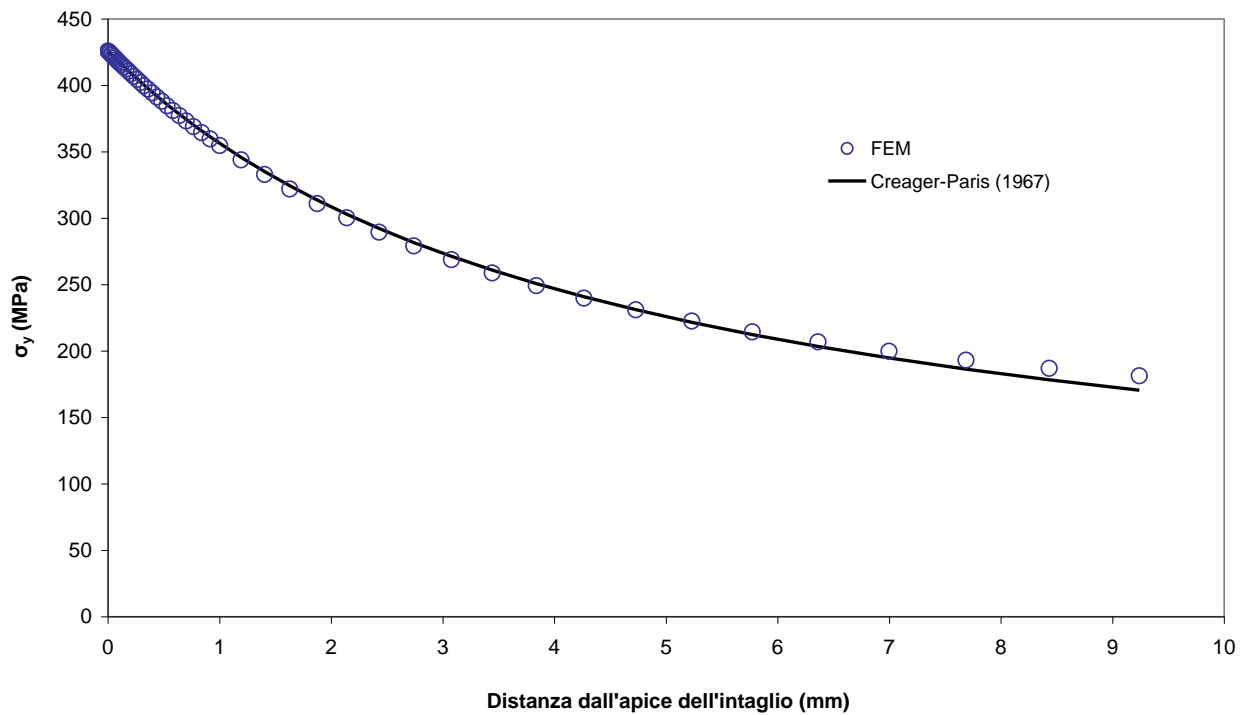


Figura 39

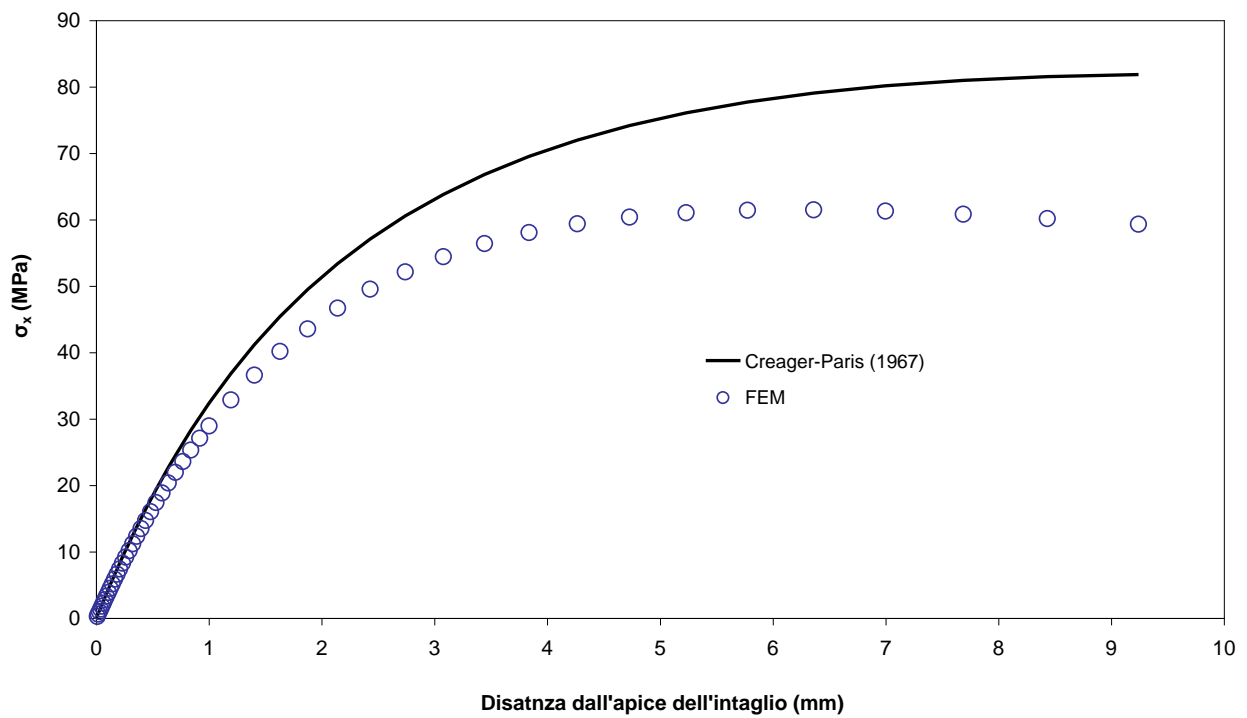


Figura 40

4.8. Ottava geometria: Rapporto $D/d=1,5$ e $r/d=0,125$

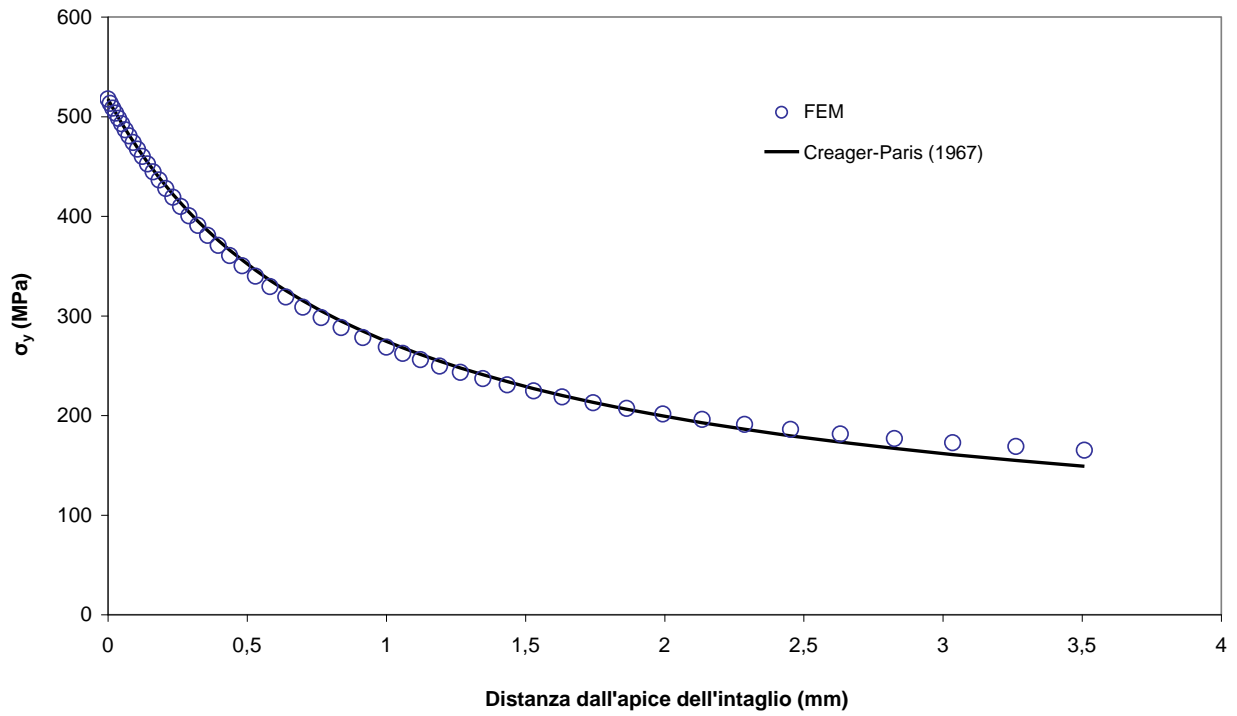


Figura 41

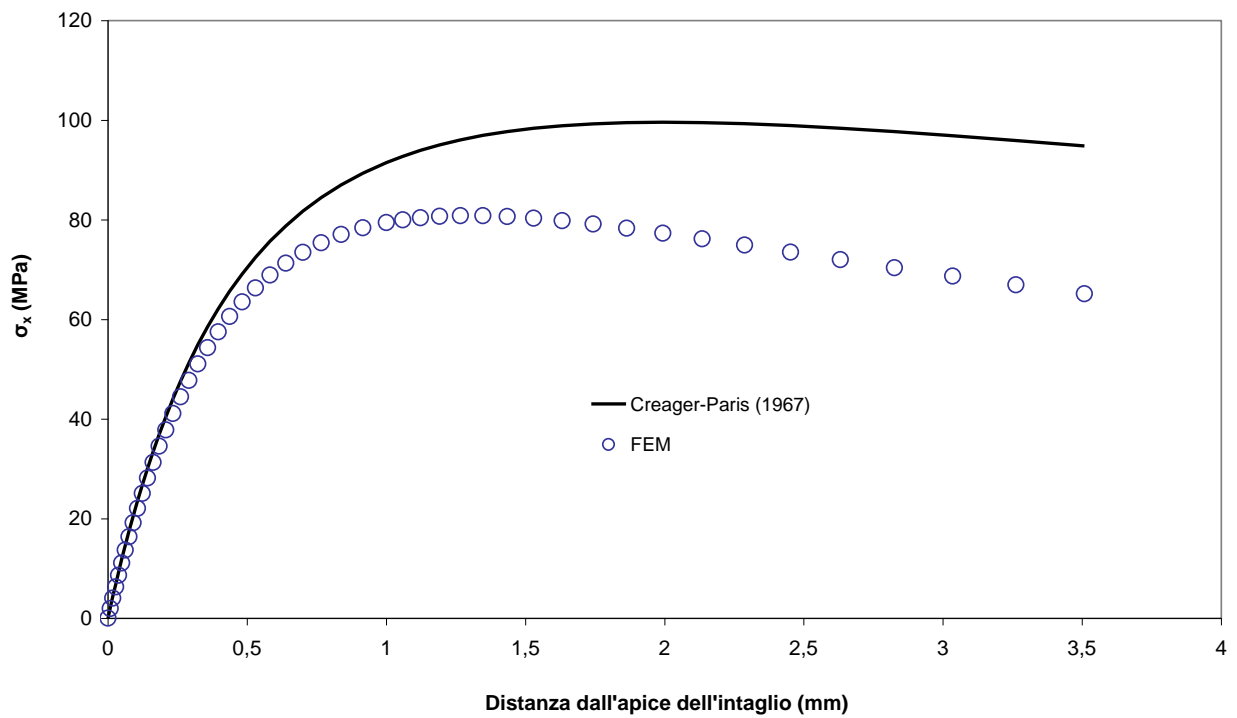


Figura 42

4.9. Nona geometria: Rapporto $D/d=1,5$ e $r/d=0,15$

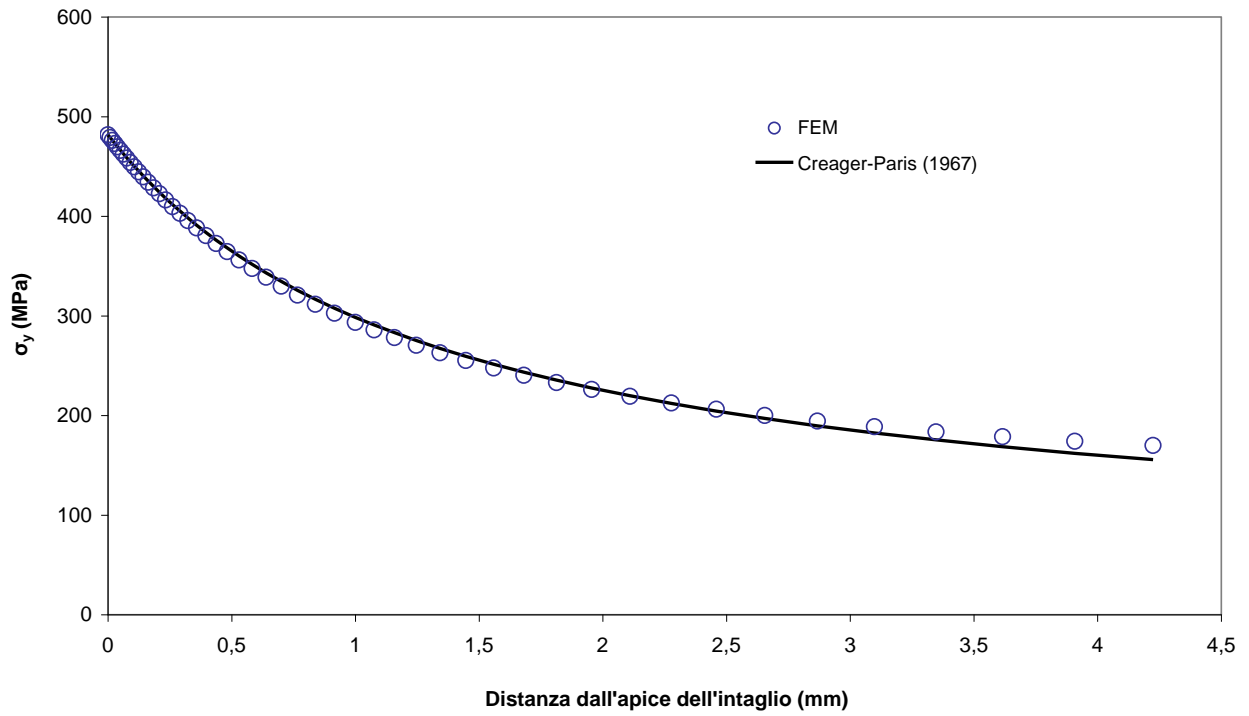


Figura 43

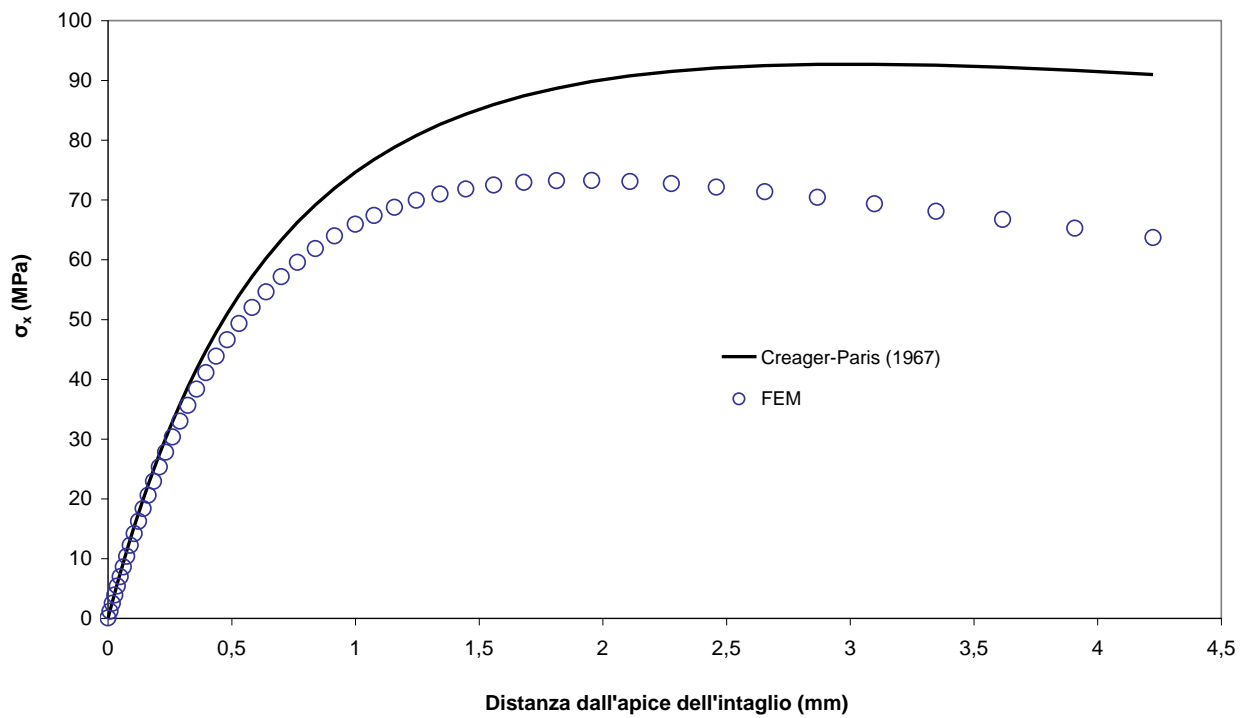


Figura 44

4.10. Decima geometria: Rapporto $D/d=1,3$ e $r/d=0,1$

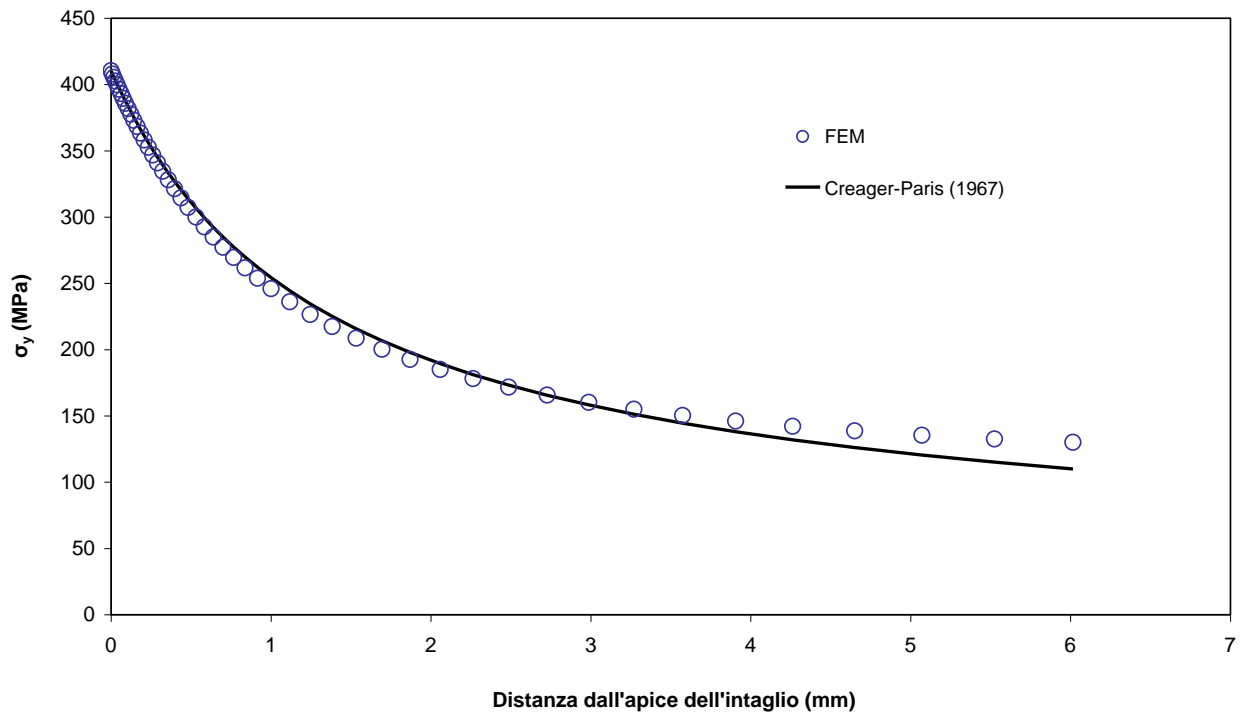


Figura 45

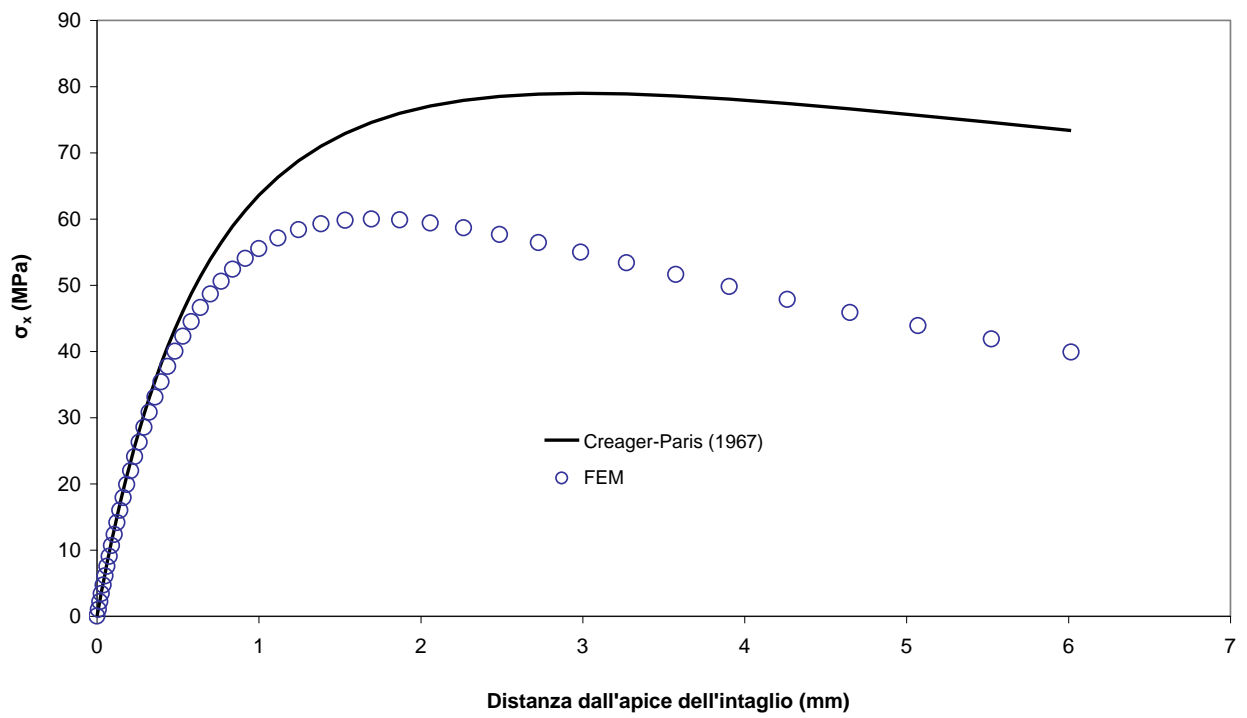


Figura 46

4.11. Undicesima geometria: Rapporto $D/d=1,3$ e $r/d=0,06$

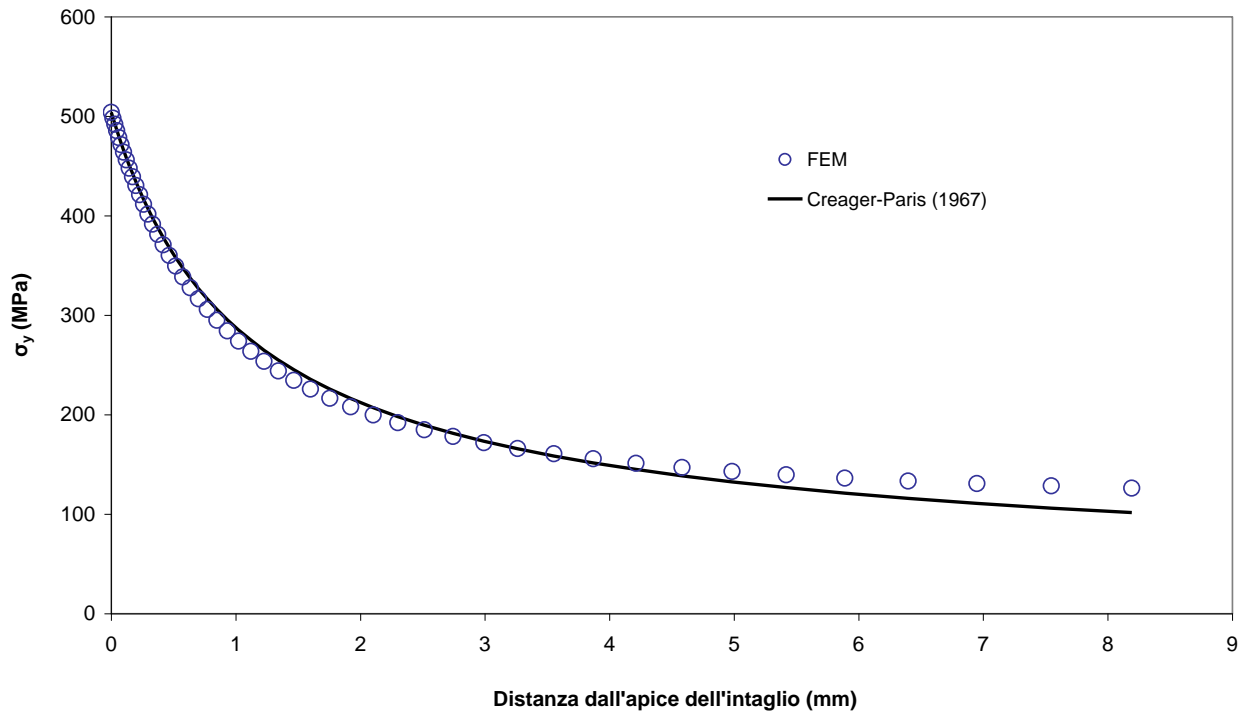


Figura 47

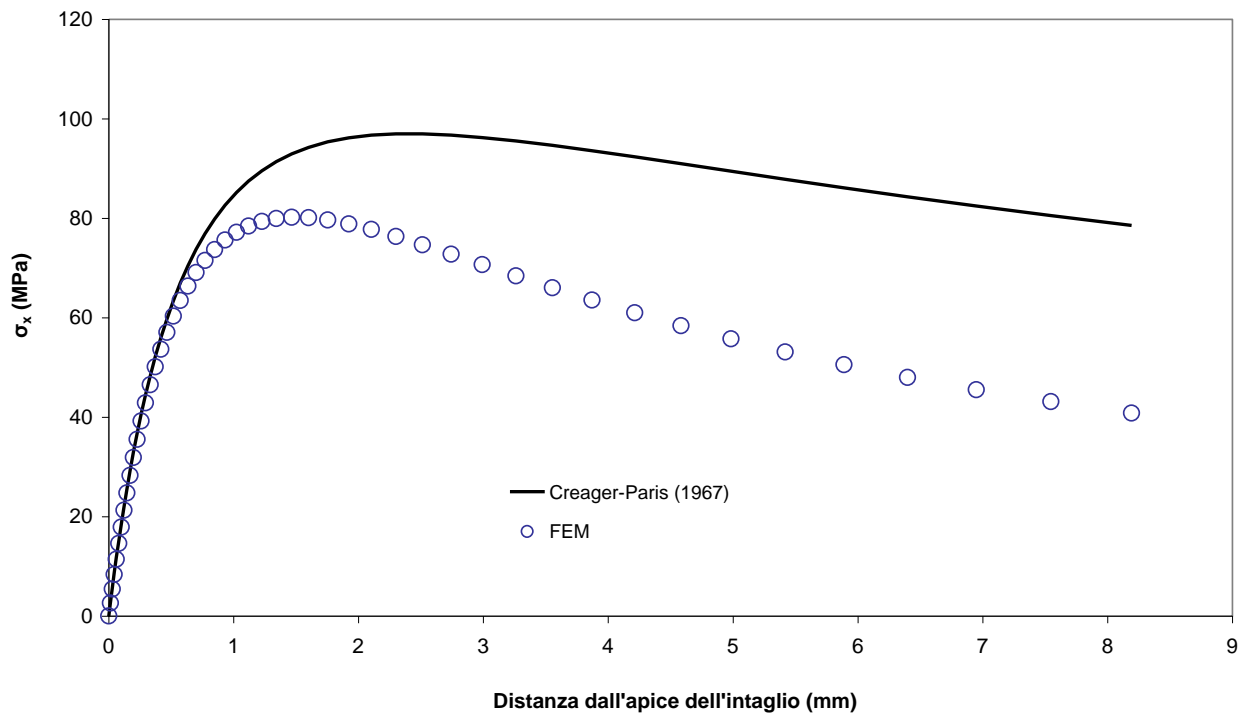


Figura 48

4.12. Dodicesima geometria: Rapporto $D/d=1,3$ e $r/d=0,12$

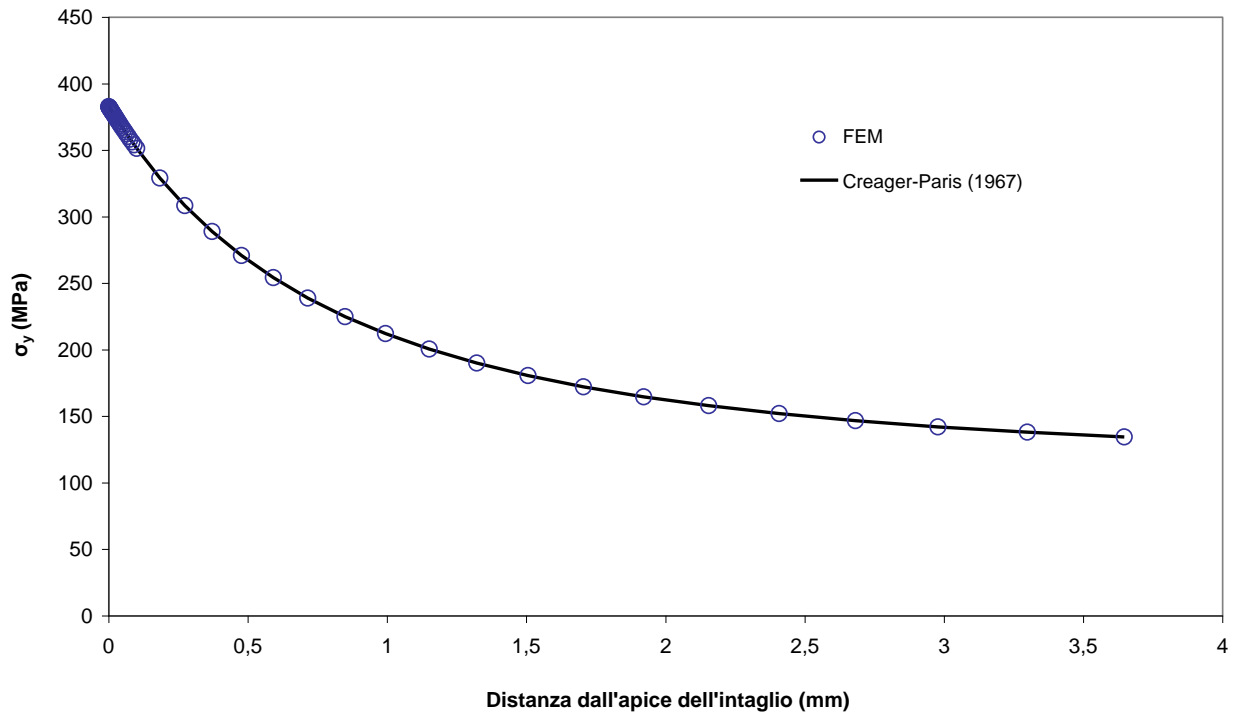


Figura 49

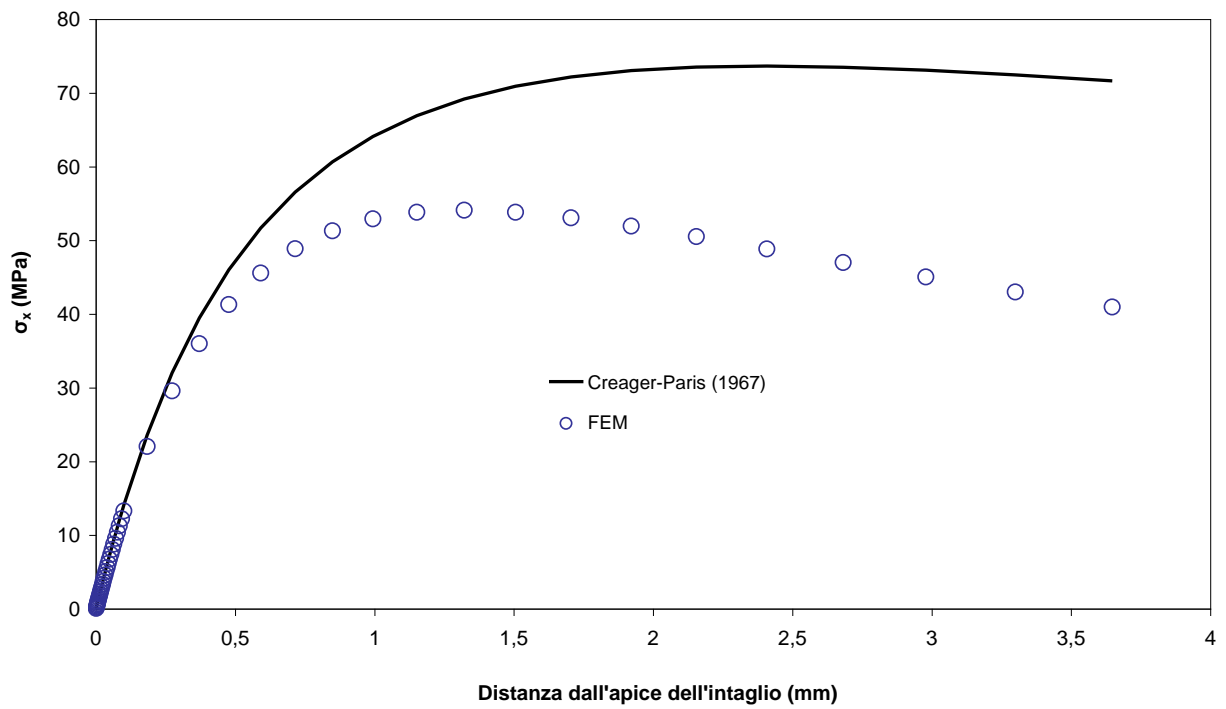


Figura 50

5. Conclusioni

Tramite il software di calcolo Ansys si sono ricavati i valori delle tensioni principali per poi calcolare i fattori di concentrazione delle tensioni teorici netti; successivamente, dipendentemente dalla geometria del caso studiato, si sono trovati i rispettivi fattori dalla chart del Peterson. Riportando tutto in una tabella riassuntiva, relativa al confronto dei K_{tn} (pag 35), si può vedere che l'errore massimo percentuale riscontrato nei casi studiati è pari a 4,37% , che quindi possiamo considerare i due valori di K_{tn} abbastanza uguali. Invece negli altri casi, l'errore è minore, infatti si arriva a un errore minimo percentuale del 0,43% , possiamo quindi concludere che la stima di K_{tn} del Peterson risulta molto accurata.

Per quanto riguarda l'efficienza nel calcolo delle tensioni σ_x e σ_y nel caso tridimensionale dell'albero intagliato, si è verificato che le equazioni messe a punto da Creager-Paris nel caso bidimensionale di una piastra con cricca, costituiscono un ottimo modello di calcolo della tensione picco. Nell'elaborato è stato dimostrato che applicando le citate equazioni e partendo dall'apice dell'intaglio l' approssimazione è ottima per piccole distanze, mentre all'aumentare della distanza l'affidabilità diminuisce. Ciò è dimostrato graficamente dalle curve delle tensioni riportate precedentemente. Il raffronto dei vari grafici evidenzia che le due curve tendono a discostarsi (l'errore va aumentando). Più precisamente tali approssimazioni risultano più fedeli per quanto riguarda la tensione σ_y mentre tendono ad esser poco applicabili nel caso dello studio della tensione σ_x .

E' quindi dimostrato che nel caso dello studio di un elemento tridimensionale è possibile utilizzare le formule di Creager-Paris in prossimità dell'apice dell'intaglio; aumentando la distanza da quest'ultimo le stesse formule possono essere adottate nello studio della tensione σ_y in quanto attendibili, a differenza invece di quanto avviene nel caso della tensione σ_x .

6.Bibliografia

Lazzarin P., Fondamenti di Costruzioni di Macchine.

Michael Janssen, Jan Zuidema and Russell Wanhill, Fracture Mechanics second edition.

Walter D. Pilkey, Peterson's Stress Concentration Factors second edition.

Zappalorto M., Introduzione al Metodo degli Elementi Finiti, appunti forniti agli studenti.

http://it.wikipedia.org/wiki/Analisi_agli_elementi_finiti.

<http://it.wikipedia.org/wiki/Fatica>

http://it.wikipedia.org/wiki/Meccanica_della_frattura.

7. Chart del manuale di Peterson

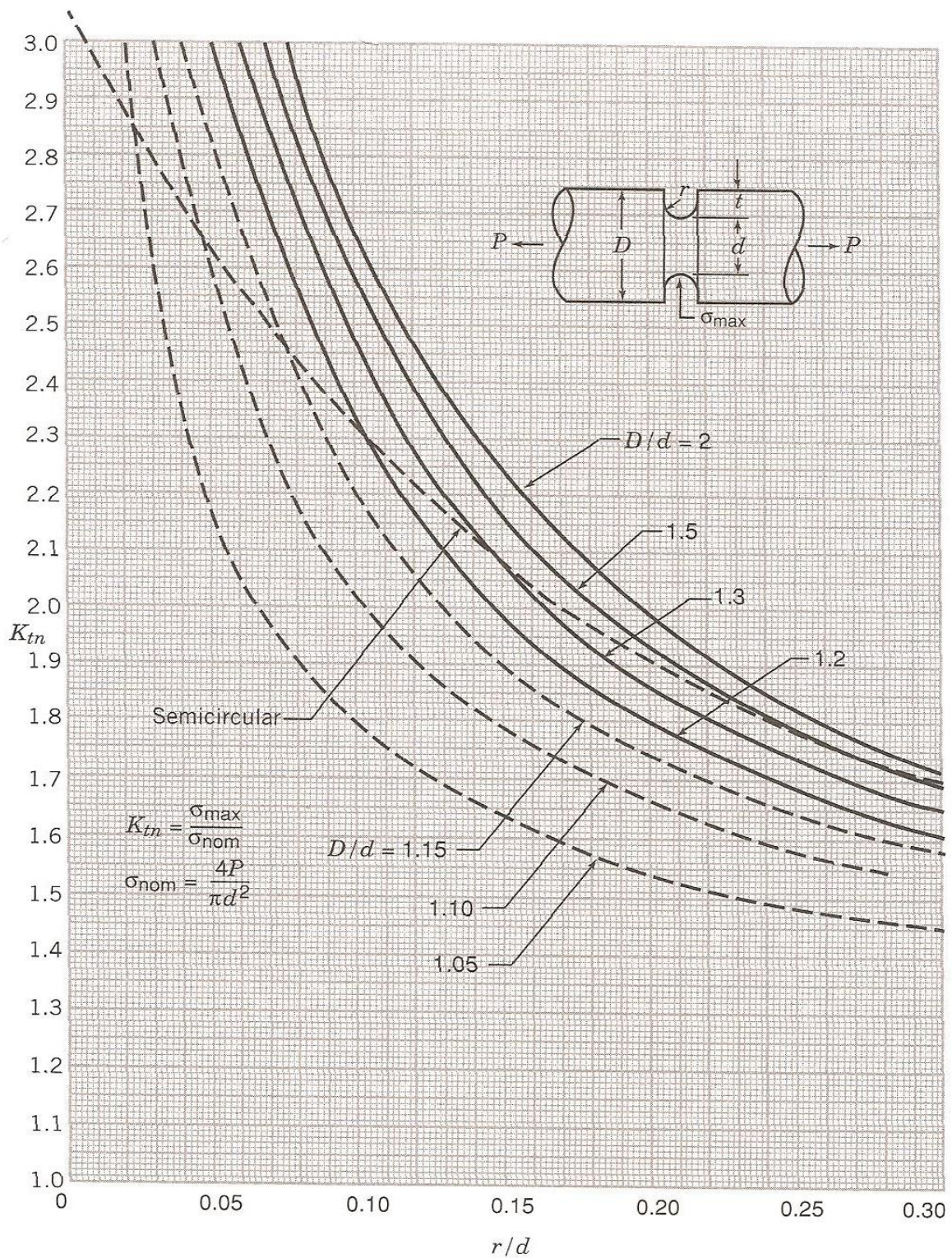


Chart 2.19 Stress concentration factors K_{tn} for a tension bar of circular cross section with a U-shaped groove. Values are approximate.

Chart del manuale Peterson relativa a un albero assialsimmetrico soggetto a trazione indebolito da un intaglio a U circonferenziale.