

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile e Ambientale - DICEA

*Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile*

**Simone Bortolami**

**PROPAGAZIONE DI FLUSSI GRANULARI E  
IMPATTO SULLE STRUTTURE  
ANALIZZATI MEDIANTE APPROCCIO MPM**

A.A. 2015-2016

Relatore: Prof. Ing. Simonetta Cola

Correlatore: Ing. Francesca Ceccato



# SOMMARIO

<b>Introduzione</b> .....	1
<b>Capitolo 1: Stato dell'arte</b> .....	3
1.1 Tipi di modelli numerici per le grandi deformazioni .....	3
1.1.1 Metodi discreti (DEM) .....	3
1.1.2 Metodi agli elementi finiti (FEM) .....	6
1.1.3 Metodi Meshless .....	9
1.1.4 Metodi mesh-based particle .....	10
1.2 Reologia e modelli costitutivi del materiale.....	12
1.2.1 Algoritmo di contatto .....	19
1.3 Modellazione per il run-up e run-out.....	20
1.4 Modellazione dell'impatto contro le strutture .....	24
<b>Capitolo 2: MPM, breve introduzione del metodo</b> .....	27
2.1 Sviluppo del metodo MPM.....	27
2.1.1 Software MPM utilizzato (Anura3D) .....	29
2.2 Funzionamento del metodo MPM .....	30
2.3 Algoritmo di contatto .....	32
2.4 Modello costitutivo .....	33
2.4.1 Il criterio di rottura di Mohr-Coulomb .....	33
2.5 Comparazione con gli altri metodi numerici .....	35
2.5.1 Differenze tra MPM, SPH, DEM.....	35
2.5.2 Efficienza computazionale del MPM .....	36
<b>Capitolo 3: Simulazione MPM di propagazione granulare e fenomeno di run-up</b> .....	39
3.1 Introduzione e obiettivo.....	39
3.2 Descrizione test MPM .....	39
3.2.1 Geometria.....	40
3.2.2 Materiali e parametri di input .....	41
3.2.3 Condizioni di vincolo e di carico .....	42
3.2.4 Mesh.....	42
3.3 Risultati.....	43
3.3.1 Analisi parametrica.....	43
3.3.2 Influenza del coefficiente di attrito di base $\mu$ .....	44
3.3.3 Influenza dell'angolo di attrito interno $\phi_i$ .....	46
3.3.4 Influenza della coesione .....	47

3.3.5	Influenza del modulo di Young e del coefficiente di Poisson .....	48
3.4	Confronto dei risultati con il test sperimentale (Mancarella e Hungr, 2010) .....	48
3.4.1	Confronto step per step modello MPM – prova in laboratorio, inclinazione barriera 33° .....	48
3.4.2	Avanzamento del fronte vs Tempo, Velocità del fronte vs Tempo .....	51
3.4.3	Confronto ad inclinazione della barriera di 7°,33°, 61° del deposito finale e del massimo run up .....	53
3.5	Conclusioni.....	59
<b>Capitolo 4: Simulazione MPM dell’impatto del flusso granulare contro un ostacolo .....</b>		<b>63</b>
4.1	Introduzione e obiettivo .....	63
4.2	Descrizione test MPM.....	63
4.2.1	Geometria.....	63
4.2.2	Materiali e parametri.....	64
4.2.3	Condizioni di vincolo e di carico .....	65
4.2.4	Mesh e discretizzazione .....	66
4.3	Risultati .....	66
4.3.1	Influenza del coefficiente di attrito di base .....	66
4.3.2	Innesco.....	67
4.3.3	Evoluzione temporale dell’evento di impatto .....	68
4.3.4	Analisi delle tensioni durante l’impatto .....	70
4.3.5	Deposito finale.....	72
4.4	Confronto risultati con il test sperimentale (Jiang et al., 2015) .....	73
4.4.1	Reazione orizzontale vs Tempo .....	73
4.4.2	Valori della reazione totale sulla parete di ritenuta .....	75
4.5	Conclusioni.....	76
<b>Conclusioni e sviluppi futuri .....</b>		<b>79</b>
<b>Appendice A: Propagazione delle onde granulari .....</b>		<b>83</b>
A.1	Teoria analitica di Faug.....	83
A.2	Simulazione numerica dell’onda granulare.....	84
A.3	Risultati.....	86
A.4	Conclusioni .....	86
<b>Appendice B: Reologia <math>\mu(I)</math>.....</b>		<b>89</b>
<b>Riferimenti bibliografici .....</b>		<b>99</b>

# INDICE DELLE FIGURE

Figura 1: Figura sinistra: Distacco del materiale e flusso in scorrimento su superficie planare .....	1
Figura 2: Figura destra: Barriera terminale presso Charles Creek, Vancouver .....	1
Figura 3: Convenzioni dei vettori delle forze di contatto nei primi DEM e rappresentazione delle particelle e le direzioni di contatto, Cundall (1979) .....	4
Figura 4: Descrizione delle forze di contatto normali e tangenziali tra le particelle in CFD-DEM Tsuji et al. (1993) e percorso del flusso in una simulazione, Tsuji et al. (1992).....	5
Figura 5: Simulazione DEM di flusso granulare attraverso un restringimento con particelle sferiche a granulometria variabile .....	6
Figura 6: Configurazione iniziale (a), configurazione deformata con mesh Lagrangiana (b) e con mesh Euleriana (c).....	8
Figura 7: Simulazione del crollo di una diga con modello SPH, Monaghan (2005) e simulazione di un ingranaggio rotante con modello SPH, Marks (2013) .....	9
Figura 8: Dominio e diagramma di calcolo del metodo Particle-in-Cell (PIC), Nishiguchi (1983) .....	10
Figura 9: Problema di stato piano di deformazione del solido cilindrico, applicazione del metodo PIC, Burgess, Brackbill, Sulsky (1992) .....	11
Figura 10: Figura sinistra: Variazione delle proprietà reologiche (tensione di snervamento, viscosità, parametro Herschel-Bulkey k) in funzione della frazione solida di volume, Malet et al. (2004).....	12
Figura 11: Figura destra: Simulazione di deposito di debris flow con modello DFEM-2D e fluido di Voellmy, Hurlimann et al. (2008) .....	12
Figura 12: Analogia tra flussi granulari e gas termodinamici (gas granulari) .....	13
Figura 13: Figura sinistra: Flusso granulare con fasi solida, fluida, gassosa, (Forterre e Pouliquen, 2008) .....	14
Figura 14: Figura destra: Catene di forza in materiale granulare in compressione con particelle foto-elastiche, (Bassett et al., 2011) .....	14
Figura 15: Configurazioni di flusso granulare studiate dal gruppo di ricerca MiDi (2004).....	17
Figura 16: Curva tipica di $\mu(I)$ .....	18
Figura 17: Deformazione della colonna in crollo e distanza di run-out, modellazione DEM (Staron e Hinch, 2005).....	22
Figura 18: Figura sinistra: Deformazioni e campo di velocità del cedimento di una fondazione, modello MPM (Solowski e Sloan, 2015).....	23
Figura 19: Figura destra: Simulazione MPM di collasso di colonna con confronto sperimentale (Solowski e Sloan, 2015).....	23
Figura 20: Figura sinistra: Grandi deformazioni allo sfilamento dei tiranti di ancoraggio, modello MPM, Coetzee et al. (2005) .....	29
Figura 21: Figura destra: Confronto MPM, DEM e dati sperimentali per lo scarico di un silos, Coetzee et al. (2006) .....	29
Figura 22: Passaggi di calcolo del MPM .....	31
Figura 23: Superficie di rottura di Mohr-Coulomb.....	34
Figura 24: Rappresentazione del test di taglio diretto.....	35
Figura 25: Confronto grafico tra i metodi MPM, SPH, DEM nella modellazione del materiale granulare, Mast (2014) .....	36
Figura 26: Barriera terminale presso Charles Creek, Vancouver .....	39
Figura 27: Geometria del modello MPM (inclinazione barriera 33°).....	40

Figura 28: Schema geometrico e fotografia della canaletta dell'esperimento di Mancarella e Hungr (2010), dimensioni in cm.....	41
Figura 29: Vista frontale della mesh del modello MPM (inclinazione barriera 33°) .....	42
Figura 30: Parametri di output del modello MPM per la previsione del run-up.....	43
Figura 31: Forma finale del deposito al variare del parametro $\mu$ .....	44
Figura 32: Relazioni tra $\mu$ e i parametri di output .....	45
Figura 33: Relazioni tra $\phi_i$ e i parametri di output .....	46
Figura 34: Relazioni tra la coesione e i parametri di output .....	48
Figura 35: Fronte in avanzamento: particelle selezionate per eseguire la media delle posizioni e delle velocità .....	51
Figura 36: Grafico Avanzamento del fronte vs Tempo, errore misura LAB +/- 0,01m .....	52
Figura 37: Grafico Velocità del fronte vs Tempo, errore misura LAB +/- 0.2m/s .....	52
Figura 38: Profilo di massimo run-up (inclinazione barriera 7°).....	55
Figura 39: Profilo finale (inclinazione barriera 7°).....	55
Figura 40: Profilo di massimo run-up (inclinazione barriera 33°).....	56
Figura 41: Profilo finale (inclinazione barriera 33°).....	56
Figura 42: Profilo di massimo run-up (inclinazione barriera 61°).....	57
Figura 43: Profilo finale (inclinazione barriera 61°).....	57
Figura 44: Confronto dell'altezza di run-up tra i diversi modelli .....	59
Figura 58: Distanza di run-out in relazione alle dimensioni del materiale in collasso, Fern e Soga (2016) ....	61
Figura 45: Geometria della simulazione di impatto contro la parete: configurazione tratta dall'esperimento di Jiang et al. (2015).....	64
Figura 46: Discretizzazione del dominio, con evidenziato il volume di materiale granulare, il piano di scorrimento e la parete .....	66
Figura 47: : Influenza di $\mu$ sulla $F_{max}$ : $\alpha = 35^\circ$ , $\phi = 53^\circ$ e $\alpha = 40^\circ$ , $\phi = 53^\circ$ .....	67
Figura 48: Processo di innesco del flusso granulare, $\phi = 53^\circ$ , $\alpha = 30^\circ$ , $\mu = 0,466$ .....	68
Figura 49: Evoluzione temporale dell'evento nella simulazione numerica; intervallo 0,3s .....	69
Figura 50: Diagrammi di tensione nel flusso (compressione negativa), inclinazione $\alpha=30^\circ$ , materiale n.1....	71
Figura 51: Diagrammi di tensione nel flusso (compressione negativa), inclinazione $\alpha=45^\circ$ , materiale n.1....	71
Figura 52: Confronto dei depositi finali con inclinazioni del piano di $30^\circ$ e $45^\circ$ , materiale n.1 .....	72
Figura 53: Forma del deposito con materiale n.1, n.2, n.3 ad inclinazione fissa $\alpha = 45^\circ$ . Confronto tra simulazione MPM ed esperimento (Jiang et al., 2015) .....	73
Figura 54: Grafico $F_{max}$ vs Tempo, $\alpha=30^\circ$ , $\phi=53^\circ$ , confronto simulazione numerica MPM ed esperimento in scala Jiang et al. ....	74
Figura 55: Grafico $F_{max}$ vs Tempo, $\alpha=45^\circ$ , $\phi=53^\circ$ , confronto simulazione numerica MPM ed esperimento in scala Jiang et al. ....	74
Figura 56: Confronto tra $F_{max}$ dell'esperimento di Jiang et al. e della simulazione numerica MPM.....	76
Figura 57: Schema dei differenti regimi del flusso (Jiang et al., 2015).....	80
Figura 59: Schema di propagazione dell'onda granulare (Faug, 2015) .....	83
Figura 60: Parametri caratteristici dell'onda granulare (simulazione MPM) .....	85
Figura 61: Fasi di propagazione dell'onda granulare nella simulazione numerica MPM, $\alpha = 30^\circ$ , $\phi = 53^\circ$ .....	85
Figura 62: Figura sinistra: Numero di Froude $Fr_1$ (a monte della compressione) vs Tempo .....	86
Figura 63: Figura destra: Velocità dell'onda di compressione $U$ vs Tempo.....	86
Figura 64: Rappresentazione schematica dei fattori di tempo $T_p$ e $T_v$ (MiDi, 2004) .....	93
Figura 65: Curva tipica di $\mu(l)$ .....	95

# INDICE DELLE TABELLE

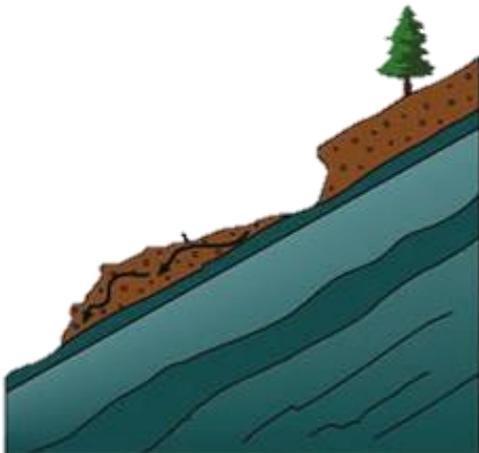
Tabella 1: Parametri del modello MPM .....	41
Tabella 2: Intervallo di variazione del parametro: Coefficiente di attrito di base $\mu$ .....	44
Tabella 3: Intervallo di variazione del parametro: Angolo di attrito interno $\phi$ .....	46
Tabella 4: Intervallo di variazione del parametro: Coesione.....	47
Tabella 5: Parametri per paragone step per step MPM - LAB.....	49
Tabella 6: Confronto step per step modello MPM e prova di laboratorio (inclinazione barriera 33°) .....	49
Tabella 7: Parametri per il confronto MPM-LAB ad inclinazione della barriera di 7°, 33°, 61°.....	53
Tabella 8: Materiali granulari impiegati nella simulazione numerica MPM dell'impatto.....	65
Tabella 9: Inclinazioni della canaletta e componenti del vettore gravità .....	65
Tabella 10: Confronto tra $F_{max}$ dell'esperimento di Jiang et al. e della simulazione numerica MPM.....	75



# INTRODUZIONE

Le frane possono essere definite come processi morfogenetici di distacco e movimento di materiale, che può essere roccia, detrito o terra, e successiva caduta o scorrimento lungo un versante ad opera della gravità.

Una particolare tipologia di frana, di interesse per questo studio, è la frana di scivolamento traslazionale di detrito, classificata in letteratura secondo la tipologia di movimento da Varnes (1978) e successivi autori. La frana di scivolamento avviene quando la massa di distacco di materiale detritico scivola lungo un versante su una superficie di rottura, detta anche di scivolamento, che può avere forme differenti, ad esempio planari, Figura 1.



**Figura 1:** Figura sinistra: Distacco del materiale e flusso in scorrimento su superficie planare

**Figura 2:** Figura destra: Barriera terminale presso Charles Creek, Vancouver

Esistono cause innescanti e fattori predisponenti che determinano l'instabilità di un pendio; solitamente essi sono molteplici, complessi e spesso combinati tra loro. Citandone alcuni: la conformazione geometrica del versante, la situazione geologica e le proprietà geotecniche delle terre e delle rocce coinvolte nel processo ed il regime idraulico caratteristico del sito.

Nonostante le conoscenze e gli strumenti a disposizione per lo studio dei pendii a rischio, nella storia si ricordano eventi catastrofici per la civiltà umana provocati dai movimenti franosi. Sul territorio nazionale italiano ogni anno si contano circa 2500 movimenti franosi, che interessano una superficie di 141235 ettari. Tra questi circa un centinaio sono eventi principali di frana che causano vittime, feriti, evacuati e danni a edifici, beni culturali e infrastrutture di comunicazione primarie, con un danno economico alla comunità di

circa 1÷2 miliardi di euro all'anno (banca dati IFFI: inventario fenomeni franosi in Italia dell'ISPRA: Istituto Superiore per la Protezione e la Ricerca Ambientale).

La prevenzione e il monitoraggio sono elementi essenziali per salvaguardare l'uomo, anche se in alcuni casi è necessario difendersi con delle opere artificiali. Un tipologia di struttura di difesa è la barriera di ritenuta, Figura 2, posta solitamente alla base del pendio, che serve per bloccare o rallentare il materiale oggetto di frana. Può essere costruita con diversi materiali e forme, può essere rigida o flessibile. Sono opere di ingegneria la cui progettazione richiede un'accurata conoscenza dei parametri geotecnici, della massa e della velocità del flusso in scorrimento, dell'evoluzione del fenomeno, delle sollecitazioni provocate dall'impatto del materiale sulla barriera stessa.

Il modello numerico è uno strumento efficace per lo studio dei parametri in gioco, da affiancare alle teorie analitiche di comprovata validità. Con la potenza computazionale odierna e la crescente disponibilità di codici di calcolo, in continua evoluzione e sviluppo, la modellazione numerica è diventata un essenziale supporto per la progettazione.

Nei successivi capitoli è descritto come si possono applicare le simulazioni numeriche con il Material Point Method (MPM) all'indagine di semplici casi di flusso granulare secco in scorrimento su un piano inclinato e allo studio delle altezze di risalita (run-up) del materiale contro una barriera di ritenuta, oltre che allo studio delle forze di impatto sviluppate contro una barriera rigida.

# CAPITOLO 1: STATO DELL'ARTE

Il settore degli studi sui flussi granulari annovera molti scienziati. Si può citare tra i primi Bagnold (1941) che ricavò relazioni fondamentali per il flusso granulare riguardanti lo sforzo di taglio e la pressione normale nel materiale. Nel tempo questo settore ha subito sostanziali evoluzioni legate all'avvento dei modelli numerici.

Risalgono infatti agli anni '80 le prime simulazioni numeriche sui flussi granulari per la valutazione dei moduli elastici e delle densità del materiale (Campbell, 1982, 1988, 1989) e gli studi tridimensionali sulla generazione della temperatura granulare, causata da frizione e collisione (Campbell, 1989; Brennen, 1985; Campbell e Gong, 1986; Walton e Braun, 1986; Hopkins, 1987). Lo stesso Campbell nel 1990 fa una chiara distinzione dei regimi quasi statici e teorie cinetiche dei gas (detti sistema granulare e sistema molecolare), associati a differenti modalità di dissipazione di energia frizionale e per collisione e urto. Si può considerare tra i primi scienziati a proporre delle relazioni costitutive per il materiale granulare considerando la compresenza di diversi regimi nel flusso stesso.

Si analizzano i principali modelli numerici utilizzati sinora per grandi spostamenti e grandi deformazioni, mettendo in risalto le peculiarità di ciascun metodo, i campi applicativi idonei e gli svantaggi legati sia al metodo computazionale, sia al modello costitutivo e la reologia del materiale.

## 1.1 Tipi di modelli numerici per le grandi deformazioni

### 1.1.1 Metodi discreti (DEM)

I modelli discreti sono adatti per i materiali che consistono in un insieme di particelle, per esempio materiali granulari (cereali, sabbie ecc.), polveri industriali o chimiche, soluzioni biologiche (sangue, proteine, ecc.), ammassi rocciosi a blocchi.

Dalla fine degli anni '50, quando il metodo di dinamica molecolare (MD method) è stato sviluppato da Alder e Wainwright (1959) e Rahman (1964), i metodi discreti sono cresciuti in popolarità. Diverse tecniche di modellazione discreta sono state sviluppate, inclusi il metodo Monte Carlo e il metodo agli elementi discreti (DEM). Quest'ultimo è il più popolare in geomeccanica. È stato originariamente applicato alla meccanica delle rocce da Cundall e Strack nel 1979 (Figura 3).

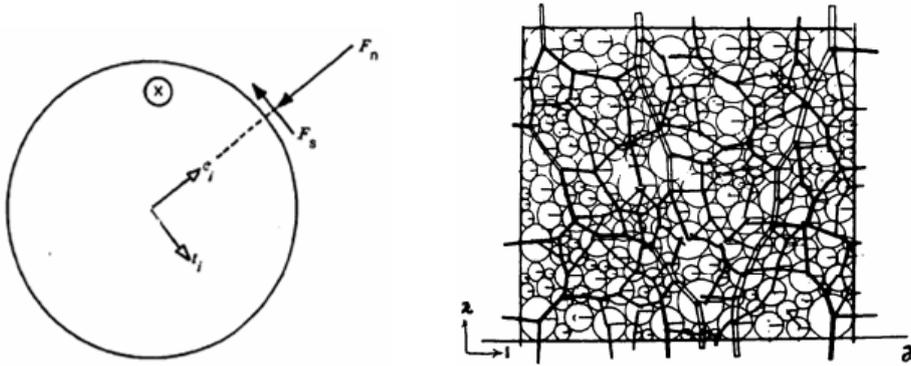


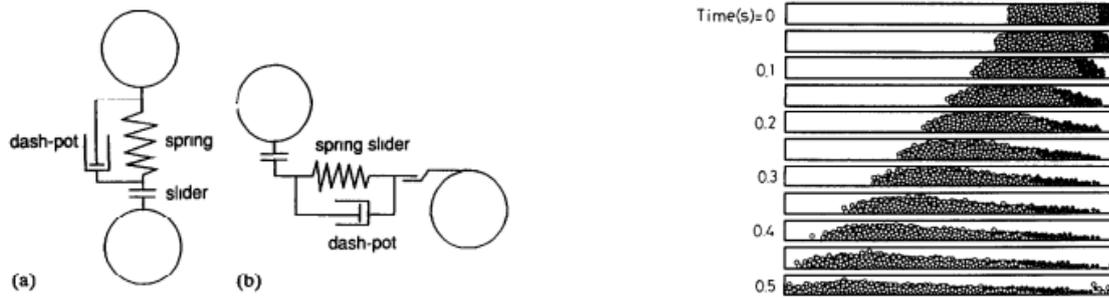
Figura 3: Convenzioni dei vettori delle forze di contatto nei primi DEM e rappresentazione delle particelle e le direzioni di contatto, Cundall (1979)

Il comportamento macroscopico di un particolare problema è determinato dalle interazioni tra le singole particelle granulari e anche dalle interazioni con i fluidi e le pareti, se presenti.

La comprensione dei meccanismi microscopici che governa queste interazioni è il punto chiave nella formulazione del metodo. Negli ultimi anni, tale ricerca è stata sviluppata rapidamente in tutto il mondo, supportata dal rapido sviluppo delle tecniche di simulazione delle particelle discrete e dalla tecnologia informatica.

Le formulazioni DEM più comuni sono i cosiddetti metodi soft-particles e hard-particles. Il metodo soft-particles a sfere, originariamente sviluppato da Cundall e Strack (1979), è stata la prima tecnica di simulazione di dinamica granulare pubblicata in letteratura. In questo approccio, le particelle sperimentano piccole deformazioni, e queste deformazioni sono utilizzate per calcolare le forze elastiche, plastiche e di attrito tra le particelle. Il moto delle particelle è descritto dalle consolidate leggi del moto di Newton. Una caratteristica dei modelli soft-particles è che essi sono in grado di gestire contatti multipli tra particelle, che sono importanti quando si modellano sistemi quasi-statici. Al contrario, in una simulazione hard-particles, viene elaborata una serie di collisioni. Spesso le forze tra le particelle non sono esplicitamente considerate. Pertanto, tipicamente, il metodo hard-particles è più adatto per i flussi granulari rapidi.

Il flusso di particelle è spesso accoppiato con un fluido (gas e/o liquido). Per descrivere questo flusso a due fasi, il DEM è stato accoppiato con la fluidodinamica computazionale (CFD). L'approccio CFD-DEM in primo luogo è stato proposto da Tsuji et al. (1992, 1993) (Figura 4), seguito da molti altri. Con questo approccio, il moto delle particelle discrete è descritto dal modello DEM sulla base di principi della dinamica applicati alle singole particelle e il flusso del fluido è descritto dalla tradizionale CFD sulla base delle equazioni localmente mediate di NavierStokes (Zhu et al., 2007).



**Figura 4: Descrizione delle forze di contatto normali e tangenziali tra le particelle in CFD-DEM Tsuji et al. (1993) e percorso del flusso in una simulazione, Tsuji et al. (1992)**

Le simulazioni DEM possono fornire informazioni dinamiche, quali le traiettorie e le forze istantanee che agiscono sulle singole particelle. Sono adatte per studiare il fondamentale comportamento del terreno durante il carico e per sviluppare e convalidare le relazioni costitutive per il terreno.

Lo svantaggio principale del DEM è l'enorme carico computazionale. Il numero massimo di particelle e la durata di una simulazione virtuale è limitata dalla capacità di calcolo. I flussi tipici contengono miliardi di particelle, ma solo di recente le simulazioni DEM su super-computer sono state in grado di avvicinarsi ad una scala della simulazione comparabile con la realtà. Quando si esegue la modellazione di problemi a scala reale serve un metodo che limiti il numero di particelle per mantenere il problema computazionalmente risolvibile. Un'ulteriore questione riguarda i parametri di input, che si riferiscono alle proprietà delle particelle anziché alle proprietà aggregate. I parametri DEM devono essere scelti in modo da modellare realisticamente il comportamento del terreno (Ting et al., 1989).

Con l'utilizzo di una corretta procedura di media, un sistema di particelle discrete può essere trasposto in un sistema continuo corrispondente. Le variabili macroscopiche nell'approccio continuo possono essere collegate alle variabili microscopiche nell'approccio discreto, tramite la media locale.

Questa procedura offre un modo conveniente per collegare le simulazioni DEM per applicazioni di ingegneria con le più comuni modellazione del continuo. Una vasta ricerca è stata effettuata per sviluppare dei metodi per eseguire le medie, ma una teoria generale è ancora mancante.

I metodi discreti sembrano essere molto promettenti per lo studio dei materiali granulari, ma sono più adatti per l'applicazione scientifica che per la pratica ingegneristica a causa del loro approccio microscopico e dell'alto costo computazionale (Figura 5).

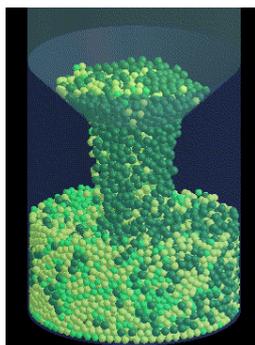


Figura 5: Simulazione DEM di flusso granulare attraverso un restringimento con particelle sferiche a granulometria variabile

### 1.1.2 Metodi agli elementi finiti (FEM)

Per risolvere i problemi di meccanica del continuo non sono possibili soluzioni analitiche (in forma chiusa) a causa delle complessità geometrica, dei carichi e delle varie condizioni al contorno. Pertanto è diventato essenziale in ambito ingegneristico adottare metodi numerici per ottenere la soluzione approssimata.

Si possono considerare i principali metodi per la modellazione delle grandi deformazioni suddivisi in tre categorie: i metodi agli elementi finiti, i metodi meshless (privi di reticolo mesh) e metodi mesh-based particle (impostati sul reticolo della mesh).

Il metodo degli elementi finiti (FEM) è una tecnica numerica che approssima le soluzioni di problemi alle condizioni al contorno. Il FEM è stato utilizzato con successo per decenni per analizzare una vasta gamma di problemi di meccanica dei solidi e dei fluidi.

Le soluzioni approssimate di problemi alle condizioni al contorno che utilizzano il calcolo delle variazioni sono state utilizzate inizialmente da Rayleigh e Ritz nello studio delle teorie delle onde sonore già nel 1877. In questo approccio, l'equazione differenziale è approssimata mediante una funzione di test o di prova che viene scelta per essere continua sul dominio e soddisfare le condizioni al contorno. L'approssimazione della funzione di test avviene tramite una combinazione di un numero finito di funzioni coordinate, ciascuna ponderata per un coefficiente costante. La funzione di test viene sostituita nella approssimazione variazionale del problema. Il risultato dell'espressione variazionale porta ad una serie di equazioni lineari che sono risolte per i coefficienti costanti della funzione di test. Rayleigh fu il primo ad usare il calcolo delle variazioni nel 1877 nel calcolo della frequenza naturale fondamentale per sistemi diversi, ad esempio, barre e piastre. Nel 1909, Ritz applicò l'approccio variazionale alle piastre vibranti.

Un altro metodo per approssimare le soluzioni di equazioni differenziali è il metodo dei residui pesati, in cui la funzione di test viene utilizzata insieme ad un forma integrale dell'equazione differenziale per minimizzare l'errore come media sul dominio del problema. Il metodo dei residui pesati comprende molte tecniche di approssimazione, per esempio, il metodo di Galerkin (1915), il metodo del sottodominio e il

metodo di collocazione. Attualmente, il metodo Galerkin è il più popolare metodo per la formulazione agli elementi finiti.

Anche se i precedenti metodi di residui variazionali e ponderati hanno fornito la base per approssimare la soluzione di problemi alle condizioni al contorno, avevano uno svantaggio. Una funzione di test che sia valida per l'intero dominio può richiedere un numero eccessivo di termini, il che ne rende complicato l'utilizzo per i problemi con geometrie complesse. Nel 1943, Courant ha introdotto il concetto di funzione continua a tratti nel contesto dei metodi variazionali. Ha applicato questa teoria ai sottodomini triangolari per risolvere un problema piano di torsione. L'idea di Courant potrebbe essere considerata come il vero inizio del metodo degli elementi finiti. Successivamente, un metodo di analisi a matrice strutturale è stato sviluppato da Argyris e Kelsey nel 1954 e la matrice di rigidità di elementi bidimensionali è stata ricavata da Turner et al. nel 1956. Il nome elementi finiti è stato introdotto da Clough nel 1960, quando si sono definiti elementi finiti triangolari e rettangolari per l'analisi di stati piani di tensione.

Zienkiewicz e Cheung hanno scritto il primo libro di testo sugli elementi finiti nel 1967. Un anno dopo, Zienkiewicz et al. hanno pubblicato un articolo sull'estensione del metodo all'analisi dello stress viscoelastico. Belytschko e Hsieh (1973) hanno iniziato l'uso del metodo per l'analisi di grandi spostamenti e piccole deformazioni per problemi con non linearità dei materiali. Hanno ideato gli elementi triangolari a deformazione costante e gli elementi trave di Eulero-Bernoulli, ottenendo riscontri nei dati sperimentali. Nell'ambito del metodo degli elementi finiti, ci sono due formulazioni di base: l'approccio Lagrangiano ed Euleriano. Il primo è ampiamente usato nelle modellazioni per la meccanica dei solidi, mentre il secondo è utilizzato principalmente nella modellazione della meccanica dei fluidi. Esistono anche formulazioni sviluppate dalla combinazione di approccio Lagrangiano e Euleriano, nominate come (ALE).

Nella descrizione Lagrangiana, tempo e coordinate materiali sono usati come variabili indipendenti per descrivere il moto e le altre proprietà fisiche del materiale. La configurazione di riferimento nella descrizione lagrangiana è quella iniziale (indeformata).

La descrizione Euleriana utilizza invece le coordinate spaziali e il tempo per tracciare il movimento e le altre proprietà fisiche in punti fissi nello spazio, mentre il materiale scorre con il tempo. Si utilizza la configurazione spaziale come reticolo di riferimento.

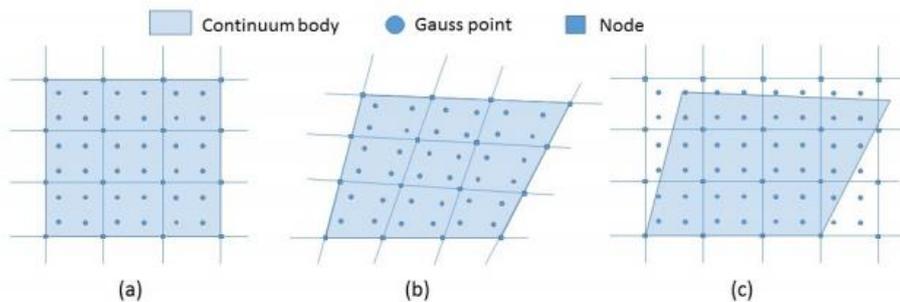
Nell'ambito dei FEM Lagrangiani, due formulazioni possono essere sviluppate a seconda del sistema di riferimento utilizzato per calcolare tensioni e sollecitazioni. Se le coordinate materiali iniziali sono utilizzate per determinare le sollecitazioni, la formulazione viene chiamata total-Lagrangian. Se invece le coordinate aggiornate del materiale vengono utilizzate per calcolare le sollecitazioni, il metodo FEM si denomina updated-Lagrangian.

Le formulazioni di entrambi i metodi per un elemento trave tridimensionale sono state ricavate per l'analisi di grandi spostamenti e grandi rotazioni da Bathe e Bolourchi nel 1979. Essi hanno dimostrato che

entrambe le formulazioni forniscono gli stessi elementi nella matrice di rigidezza e gli stessi vettori di forza nodali, ma che il metodo “updated” è più efficace dal punto di vista computazionale.

Nel FEM lagrangiano, i nodi sono sempre coincidenti con i punti materiali. Quindi, i nodi che sono inizialmente al contorno del continuum rimarranno sempre al contorno durante i calcoli, cioè, la superficie libera del continuum è ben definita nell'ambito del FEM Lagrangiano, consentendo un facile tracciamento dell'interfaccia tra materiali diversi e la semplicità nell'imposizione delle condizioni al contorno. Un altro vantaggio dei FEM Lagrangiani è che, per definizione, non consentono al materiale di scorrere tra gli elementi e quindi modellano facilmente il comportamento dipendente dal tempo (history-dependent) dei materiali, infatti, i punti di quadratura rimangono coincidenti con i punti materiali. Tuttavia il problema di distorsione della mesh rende il metodo non efficace per la modellazione delle grandi deformazioni.

A differenza del FEM Lagrangiano, nel FEM euleriano la mesh di calcolo viene mantenuta spazialmente fissa mentre il materiale si deforma nel tempo (Figura 6).



**Figura 6: Configurazione iniziale (a), configurazione deformata con mesh Lagrangiana (b) e con mesh Euleriana (c)**

Questo permette di gestire le grandi deformazioni senza il problema della distorsione della mesh che avviene nell'updated-Lagrangian FEM. Poiché la mesh computazionale è completamente disaccoppiata dal materiale, si generano dei termini convettivi nel FEM Euleriano, introducendo quindi delle difficoltà numeriche per le loro proprietà non simmetriche. In compenso il FEM Lagrangiano ha difficoltà nella modellazione dell'interfaccia tra i materiali e nell'applicazione delle condizioni al contorno.

Utilizzando mesh grossolane con il FEM Euleriano si hanno imprecisioni nelle variabili di stato. Per risultati di buona qualità sono necessarie mesh fitte e computazionalmente costose.

La combinazione di descrizioni lagrangiane ed euleriane è utilizzata nel cosiddetto metodo Euleriano-Lagrangiano arbitrario (Arbitrary Lagrangian-Eulerian: ALE). Nei metodi ALE, la relazione tra la mesh computazionale e il continuum può essere arbitraria e selezionata dall'utente, permettendo di modellare grandi deformazioni combinando gli aspetti migliori delle descrizioni lagrangiana ed euleriana ed evitando il più possibile gli inconvenienti di ciascuna di esse. Le variabili di stato sono riportate dalla mesh precedente e distorta ad una nuova mesh. I metodi di aggiornamento della mesh hanno una grande influenza sul successo dei metodi ALE. La maglia può essere completamente rigenerata o adattata. L'adattamento della

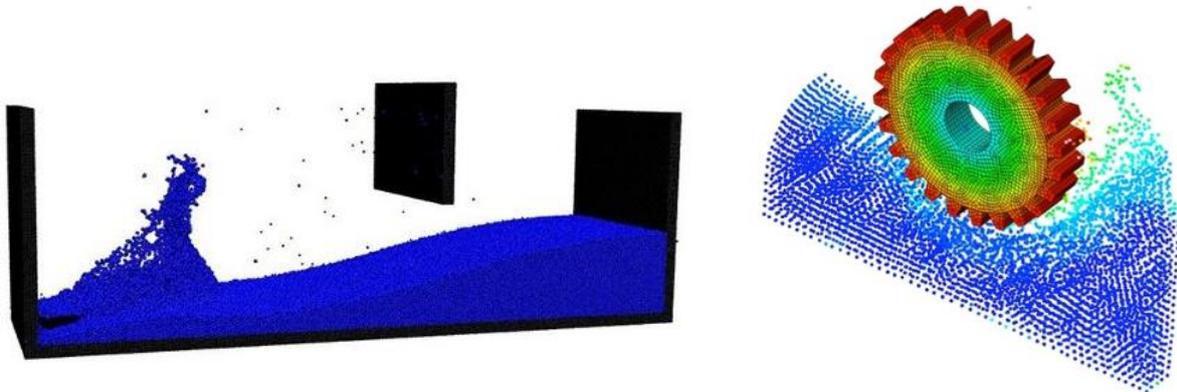
mesh mantiene gli stessi nodi e la topologia, ma i nodi vengono riallocati al fine di evitare distorsioni dell'elemento.

Il cosiddetto metodo accoppiato Euleriano-Lagrangiano (CEL) è uno dei più efficaci metodi ALE per la modellazione di problemi di penetrazione. Nei metodi CEL, il provino è discretizzato con mesh euleriana, mentre il penetrometro è discretizzato con mesh di Lagrange. L'interazione tra le due maglie è modellata utilizzando l'algoritmo di contatto selezionato dal utente.

### 1.1.3 Metodi Meshless

Nei metodi meshless (privi del reticolo della mesh) la connettività dei nodi, ovvero dei punti, viene regolata costantemente durante la deformazione del continuo, evitando il problema della distorsione della mesh.

Il metodo dell'idrodinamica delle particelle levigate (smoothed particle hydrodynamics: SPH) (Figura 7) è il primo metodo meshless. Il metodo SPH è un metodo a particelle, in cui la forma chiusa delle equazioni alle derivate parziali (PDE) è discretizzata con metodi di collocazione. Il metodo SPH non richiede una predefinita mesh per calcolare le derivate spaziali, come invece avviene nel metodo del punto materiale (Material Point Method: MPM), trattato nel capitolo successivo.



**Figura 7: Simulazione del crollo di una diga con modello SPH, Monaghan (2005) e simulazione di un ingranaggio rotante con modello SPH, Marks (2013)**

Il metodo element-free di Galerkin (EFG) è un metodo senza mesh relativamente recente, Onate et al. (1996). Si può anche classificare il metodo particle finite element method (PFEM) come metodo meshless in quanto adopera l'interpolazione meshless. Nel metodo PFEM, i punti nodali rappresentano le particelle e la mesh computazionale è costruita collegando questi punti. La mesh viene quindi utilizzata per risolvere le equazioni di Lagrange. Una grande deformazione richiede un remeshing frequente per mantenere la connettività degli elementi.

Come affermato da Belytschko et al. (1994), i metodi meshless sono adatti per problemi che coinvolgono grandi deformazioni, ma richiedono ancora un notevole miglioramento dell'efficienza computazionale. È stato anche dimostrato che il costo computazionale del metodo di Galerkin (EFG) è molto superiore a quello del metodo FEM.

### 1.1.4 Metodi mesh-based particle

A differenza dei metodi meshless, i metodi a particelle basati sulla mesh utilizzano una prefissata mesh di base e i punti materiali si muovono all'interno di questa.

Tra i metodi mesh-based si annovera il metodo PIC. Lo sviluppo originale del metodo particle-in-cell (PIC) può essere fatto risalire al 1955.

È stato sviluppato a Los Alamos da Harlow per simulare problemi di fluidodinamica. Anche se l'obiettivo in quel momento era sviluppare un metodo che fosse in grado di gestire problemi in due e tre dimensioni, lo sviluppo iniziale del metodo PIC è stato eseguito per problemi monodimensionali.

Tuttavia è stato dimostrato in seguito che il metodo PIC originale valutava eccessivamente le dissipazioni di energia. La ragione di tale dissipazione è stata attribuita al fatto che la formulazione originale di Harlow era parzialmente Lagrangiana, nel senso che solo massa e posizione erano assegnati a ciascuna particella; le altre proprietà fisiche come velocità, quantità di moto ed energia erano solo temporaneamente associate alle particelle per trasportare informazioni tra le celle alla fine dello step temporale. Le proprietà assegnate alle particelle al termine della fase di tempo erano ponderate rispetto alla massa di ciascuna particella. In altre parole, se una particella si sposta da una cella all'altra la quantità di moto e l'energia ad essa associate sono sottratte dalla precedente cella e aggiunte alla nuova cella, ma non memorizzate stabilmente nelle particelle stesse. In questo frangente il metodo può essere considerato Euleriano. Nonostante questo inconveniente, il metodo PIC è stato usato con successo in problemi di modellazione in fluidodinamica che trattano grandi spostamenti.

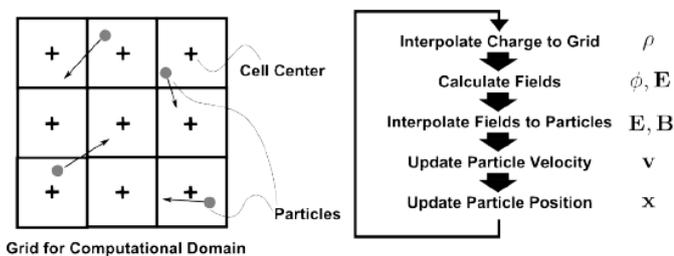
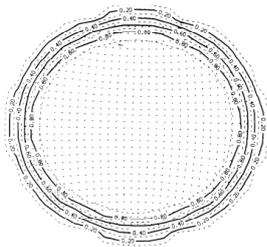


Figura 8: Dominio e diagramma di calcolo del metodo Particle-in-Cell (PIC), Nishiguchi (1983)

Dal primo sviluppo del metodo PIC, molti studi sono stati condotti per migliorare il metodo e aumentare l'accuratezza numerica. Nel 1983, Nishiguchi e Yabe hanno sviluppato uno schema più accurato per la

connessione tra le particelle e i punti della griglia (Figura 8). Durante gli anni settanta e ottanta, sono stati raggiunti notevoli miglioramenti. Lo sforzo principale si è concentrato sulla modifica del PIC originale dalla rappresentazione parziale Lagrangiana (partially Lagrangian) alla rappresentazione pienamente Lagrangiana (fully-Lagrangian). In questa modifica, tutte le grandezze fisiche, quali quantità di moto ed energia, sono state assegnate alle particelle. La griglia è stata poi utilizzata solo per ottenere la soluzione delle equazioni del modello. Come conseguenza dell'utilizzo dell'approccio fully-Lagrangian, si è ottenuta una notevole riduzione nella dispersione numerica. Tale riduzione è stata tuttavia compromessa dalla necessità di una maggiore capacità di memorizzazione di quanto richiesto dall'approccio partially-Lagrangian.



**Figura 9: Problema di stato piano di deformazione del solido cilindrico, applicazione del metodo PIC, Burgess, Brackbill, Sulsky (1992)**

Nel 1986, Brackbill e Ruppel hanno utilizzato il fully-Lagrangian PIC come base per estendere l'applicabilità del metodo usando una mesh adattiva suddivisa in zone. Hanno sviluppato quello che è il cosiddetto metodo fluid-implicit particle (FLIP), che è una formulazione del metodo PIC, in cui le particelle si portano tutte le proprietà fisiche del continuo, ad esempio: massa, quantità di moto, energia e proprietà costitutive. Come beneficio dell'uso delle mesh adattative, le geometrie complesse possono essere modellate con il metodo FLIP e una migliore precisione può essere raggiunta. Inoltre, essi separano il ciclo di calcolo del metodo PIC nella "fase Lagrangiana" dalla "fase Euleriana" di convezione. Questa separazione ha permesso l'uso di algoritmi alle differenze finite già esistenti per risolvere le equazioni discrete nella fase di Lagrange, visto che le particelle non giocano alcun ruolo essenziale in questa fase.

Nel 1991, il metodo FLIP è stato esteso da Sulsky e Brackbill per modellare problemi che coinvolgono l'interazione tra i corpi elastici e i fluidi. Dato che nel metodo PIC le velocità sono valutate separatamente nella mappatura e nella procedura di re-mapping tra punti della griglia, il metodo è in grado di gestire facilmente il contatto frizionale tra corpi diversi, senza alcun algoritmo aggiuntivo.

Nel 1992, Burgess et al. hanno dimostrato che le trasposizioni delle velocità dalle particelle ai nodi possono essere eseguite sulla base di una procedura ai minimi quadrati ponderati sulla massa.

Questa procedura richiede di invertire la matrice di elasticità per calcolare le velocità dalla quantità di moto. Tuttavia invertire tale matrice è risultato essere computazionalmente costoso.

Il metodo FLIP è stato ben sviluppato per problemi di scorrimento del fluido. Le equazioni del moto sono discrete e vengono risolte utilizzando classici metodi alle differenze finite.

## 1.2 Reologia e modelli costitutivi del materiale

La reologia è utilizzata nei modelli dinamici per descrivere il comportamento di attrito dei flussi di materiale solido. Ciò che è essenziale nella modellazione della dinamica del continuo è la scelta di una reologia accurata (Rickenmann, 2005). Le reologie più comuni utilizzate nei modelli dinamici sono: la resistenza di attrito frizionale (o di "Coulomb") (Hungri e McDougall, 2009); la resistenza frizionale-turbolenta (Voellmy, 1955); la resistenza visco-plastica "Bingham" (o "Herschel-Bulkey") (Coussot, 1997; Malet et al., 2004) (Figura 10) e la resistenza "quadratica" (O'Brien et al., 1993).

Il modello con resistenza di Voellmy ha trovato buoni risultati nelle back-analysis di colate detritiche ed è una delle reologie più diffuse per simulare le colate di detriti (Ayotte e Hungri, 2000; Hurlimann et al., 2003, 2008 (Figura 11); Rickenmann et al., 2006; Pirulli e Sorbino, 2008; Hungri e McDougall, 2009). Inoltre la necessità di solo due parametri rende il modello di Voellmy facile da usare e calibrare con eventi storici.

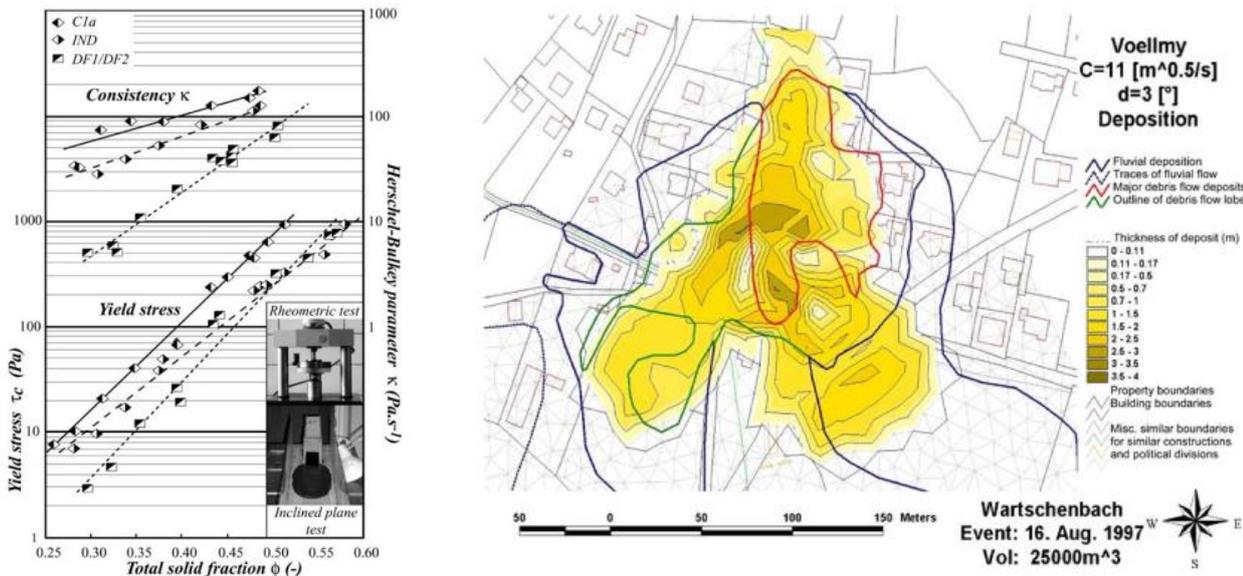


Figura 10: Figura sinistra: Variazione delle proprietà reologiche (tensione di snervamento, viscosità, parametro Herschel-Bulkey  $k$ ) in funzione della frazione solida di volume, Malet et al. (2004)

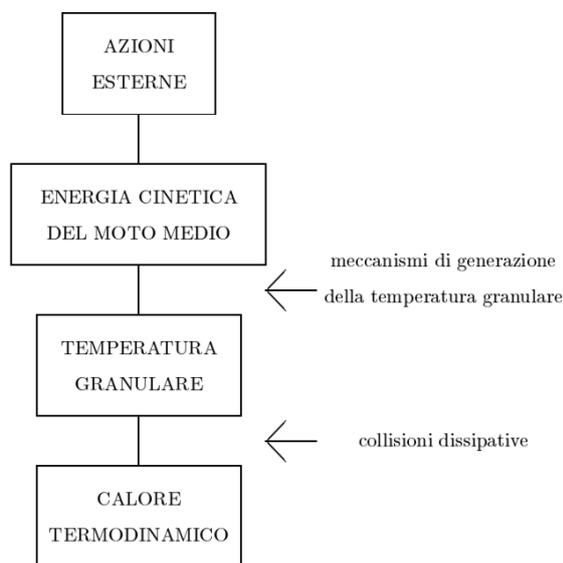
Figura 11: Figura destra: Simulazione di deposito di debris flow con modello DFEM-2D e fluido di Voellmy, Hurlimann et al. (2008)

In realtà è una questione aperta nello studio della fisica granulare se un singolo insieme di relazioni costitutive potrà mai catturare l'ampio spettro dei comportamenti granulari.

Infatti gli studiosi dei flussi granulari non hanno una solida base come gli studiosi della dinamica dei fluidi che possono sfruttare le collaudate equazioni di Navier-Stokes.

A seconda della modalità di deformazione, il materiale granulare può comportarsi come un gas, un liquido o un solido. Inoltre tutte le tre fasi possono esistere simultaneamente in un flusso granulare e la distinzione tra i tre comportamenti non è ben definita.

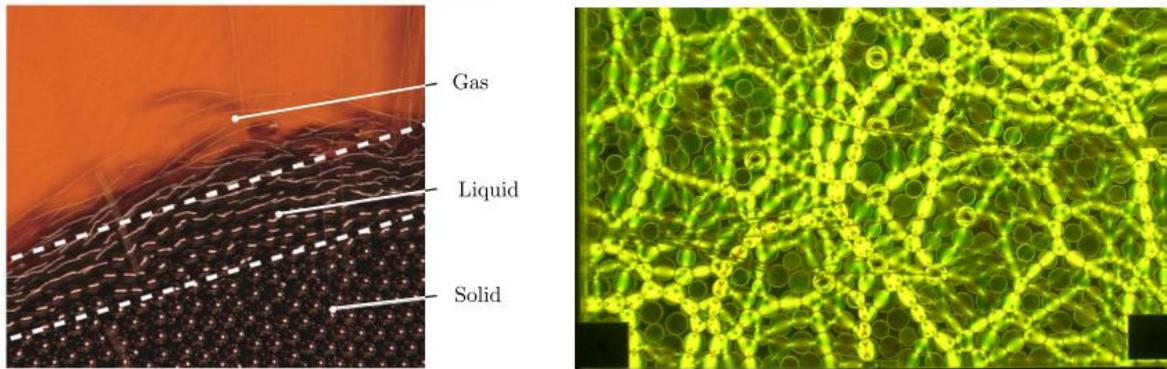
Si può notare che le particelle vicine alla superficie libera di un flusso granulare formano uno strato sciolto, e la mancanza di forze coesive tra le particelle ha portato ad un'analogia con un gas molecolare (Lun et al., 1984), prendendo ispirazione dalla teoria dei gas densi di Chapman e Cowling (1939). Ciò presuppone che le particelle interagiscano attraverso collisioni binarie istantanee e la lontananza delle particelle renda scarsa la probabilità di collisione. Si definisce in regime cinetico un materiale granulare che possiede questa modalità di deformazione. Una teoria cinetica può essere derivata per i materiali granulari e potrebbe essere utilizzata per trarne delle relazioni costitutive. E' possibile farlo definendo una temperatura granulare (Figura 12), che è una misura delle fluttuazioni della velocità delle particelle rispetto alla media (Lun et al, 1984;. Campbell, 1990).



**Figura 12: Analogia tra flussi granulari e gas termodinamici (gas granulari)**

Tuttavia l'anelasticità delle particelle complica la situazione in modo significativo, in quanto porta alla dissipazione di energia e alla condensazione del gas e le leggi termo ed idro dinamiche devono essere adattate.

Si possono distinguere zone sovrapposte (layers) in cui il flusso si presenta nelle tre fasi (Figura 13). Alla base il flusso è molto lento e la dinamica è governata da contatti prolungati e catene di forza, causati principalmente dall'attrito interparticellare. Il materiale granulare deformandosi in questo modo si comporta come un solido plastico, anche se, per i materiali granulari con limitato sforzo di taglio, l'agglomerato risponde come un solido elastico (Brown e Richards, 1970). Questo è in contrasto con il meccanismo di trasferimento dominante di collisioni binarie in regime cinetico.



**Figura 13:** Figura sinistra: Flusso granulare con fasi solida, fluida, gassosa, (Forterre e Pouliquen, 2008)

**Figura 14:** Figura destra: Catene di forza in materiale granulare in compressione con particelle foto-elastiche, (Bassett et al., 2011)

Una prova dell'instaurarsi delle catene di forza si può avere utilizzando materiali granulari con particelle foto-elastiche (Bassett et al., 2011) (Figura 14). Il materiale viene messo in compressione e le catene forza interessano l'intero sistema, quindi una reologia locale può non essere in grado di riprodurre con precisione il comportamento dell'insieme. Le catene di forza indicano anche una forte eterogeneità nella risposta del sistema granulare ad una sollecitazione.

La difficoltà di svuotamento di materiali granulari da contenitori e silos può essere attribuita a queste catene di forza che, instaurate presso l'apertura, causano l'arresto del flusso.

Per velocità di scorrimento superiori, il solido esibisce una tensione di snervamento come è tipico nella descrizione coulombiana (Coulomb, 1773), in cui la sollecitazione di taglio in una direzione  $T$  è proporzionale alla tensione normale  $p$ , e avviene lo snervamento quando si incontra un determinato valore di  $\mu$ .

Questa fase dei materiali granulari è stata studiata in meccanica dei solidi ed è ben descritta dalle teorie dello stato critico e della plasticità (Nedderman, 2005; Schofield e Wroth, 1968).

Ci si riferisce a questi flussi lenti come appartenenti al "creep state" o regime quasi statico.

Nella regione tra i regimi cinetici e quasi statici il materiale granulare scorre come un liquido. In questo caso, le interazioni tra le particelle sono governate da collisioni, interazioni di attrito e ingranamento geometrico tra le particelle. Quest'ultimo meccanismo può essere osservato eseguendo simulazioni con particelle senza attrito e notando che il flusso risultante comunque mostra un coefficiente di attrito macroscopico (Denlinger e Iverson, 2004). I contatti prolungati e le catene forza possono anche evidenziarsi quando la frazione di vuoto del volume complessivo è solo leggermente inferiore alla frazione solida. Perciò i flussi granulari densi possono essere collocati nella famiglia dei materiali visco-plastici, giacché si osserva una dipendenza dalla velocità di scorrimento, che conferisce loro un comportamento di tipo viscoso.

Il regime intermedio è quello stato a cui manca una soddisfacente spiegazione teorica, diverse teorie sono state proposte, ciascuna con i propri svantaggi. Oltre a queste difficoltà nel descrivere una teoria per il materiale granulare, anche la verifica sperimentale è soggetta a numerose complicazioni. Le teorie micromeccaniche inevitabilmente pongono assunzioni sulle particelle costitutive al fine di rendere l'analisi trattabile. Un esempio tipico è la forma delle particelle, che sono di solito assunte come mono-disgiunte e sferiche. Anche se è stato possibile trovare esempi di particelle effettivamente sferiche, gli esperimenti vengono generalmente svolti con miscele leggermente poli-disperse per evitare l'ordinazione e la cristallizzazione che in effetti avvengono raramente nei flussi reali. Uno svantaggio è che il diametro delle particelle, che è una delle più importanti grandezze di riferimento del problema, non essendo ben definito, rende molto difficile il confronto con la teoria.

Dopo il lavoro innovativo di Bagnold, gli studi sono progrediti lentamente fino al 1980, con l'avvento di due diversi tipi di modelli per materiali granulari secchi e incoerenti (privi di coesione). La prima famiglia di modelli rientrano nella teoria cinetica e tentano di descrivere flussi granulari sciolti, tanto che la principale modalità di trasferimento della quantità di moto si verifica attraverso le collisioni. Essi sono trattabili con la tradizionale descrizione dei gas classici con la media stocastica. La derivazione di questa teoria è di Lun et al. (1984), anche se il modello è stato indipendentemente sviluppato allo stesso tempo da Jenkins e Savage (1983) e Haff (1983). In questo modello le espressioni per il movimento di un generico terreno mediante collisioni sono dedotte utilizzando un analogia della temperatura termodinamica nota come temperatura granulare (Ogawa et al., 1980).

La temperatura granulare è dovuta alla variazione delle velocità dei grani dalla loro media. Un presupposto fondamentale della teoria è che le interazioni tra le particelle siano binarie e istantanee, il che limita effettivamente l'applicazione della teoria classica ai problemi con elevati volumi dei vuoti: all'aumentare della densità media, le interazioni multi-corpo diventano più frequenti al punto che i contatti possono perdurare indefinitamente e cade il presupposto di istantaneità del contatto.

Come accennato in precedenza, la differenza fondamentale tra teoria cinetica granulare e la teoria tradizionale è l'anelasticità delle particelle: ogni teoria di successo deve prendere in considerazione questa dissipazione. Si può notare che, affinché la descrizione cinetica sia valida per i flussi reali, dell'energia deve essere sempre fornita al sistema, altrimenti il sistema si addensa fino a fermarsi.

La teoria può includere un tensore degli sforzi indipendente dalla velocità per computare gli effetti di attrito tra le particelle stesse (Johnson et al., 1990; Anderson e Jackson, 1992; Hutter e Rajagopal, 1994) e qualitativamente può prevedere l'esistenza di flussi stazionari per una serie di inclinazioni come già notato nei dati sperimentali.

Uno dei principali svantaggi è che il confronto diretto con gli esperimenti è reso difficile a causa dei molteplici parametri introdotti nei modelli che sono difficili da misurare in modo preciso, inoltre vi è una particolare difficoltà quando si tenta di formulare le condizioni al contorno corrette.

Un certo numero di estensioni alla teoria sono state fatte nel corso degli anni, tra cui l'effetto della rugosità della particella in due dimensioni (Jenkins e Richman, 1985) e l'effetto di attrito tra particelle (Johnson et al., 1990). Tuttavia le ultime espressioni della teoria estendono la loro applicabilità alle densità più elevate assumendo un attrito infinito tra particelle e includendo gli effetti della reazione tangenziale nella reazione normale.

La seconda famiglia di modelli non si basa su parametri micro-meccanici del materiale per descrivere il flusso. Quello che viene adottato è un approccio fenomenologico.

Spesso questi modelli sono strutturati con le equazioni di profondità integrata del moto (depth-integrated) come per i flussi poco profondi (shallow-water) o con le equazioni di De Saint-Venant (1871). In una delle prime documentazioni di questo approccio, il taglio interno del materiale viene completamente ignorato (Savage e Hutter, 1989) e perciò non esiste il problema di definire un tensore di stress e una formulazione per la reologia.

Un modello per i flussi granulari densi che negli ultimi anni ha dato efficaci riscontri con la pratica è basato sulla reologia  $\mu(I)$  proposta da Jop et al. (2006). La trattazione completa del modello con la reologia  $\mu(I)$  è contenuta nell'APPENDICE B. Di seguito si riporta un breve excursus.

La reologia  $\mu(I)$  è un'estensione del modello shallow-water presentato da Pouliquen e Forterre (2002), che è impostato sulla base di leggi fenomenologiche dei flussi stazionari su piani inclinati osservati da Pouliquen (1999). Pouliquen (1999) ha determinato sperimentalmente la variazione della velocità media  $u$  in funzione dell'inclinazione  $\theta$ , dello spessore dello strato  $h$ , e della scabrezza del fondo: i vari parametri adimensionalizzati di questo problema hanno permesso di impostare una relazione. Questi parametri sono

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g h \cos \theta}} \quad n = \frac{h}{d} \quad \theta$$

che sono rispettivamente il numero di Froude, l'altezza adimensionale e l'inclinazione del piano.

Si applica il presupposto che le particelle siano sufficientemente rigide in modo che le sole grandezze significative sono: la lunghezza  $d$  (diametro, per particelle sferiche) e la loro  $\rho_p$  densità, con il tempo di riferimento della collisione elastica sufficientemente piccolo da risultare istantaneo rispetto a qualsiasi tempo di riferimento per il trasferimento della quantità di moto.

La formulazione della reologia completa è dovuta al gruppo di ricerca francese MiDi (2004), che ha raccolto i risultati sperimentali per i sei esperimenti granulari più frequentemente studiati (Figura 15).

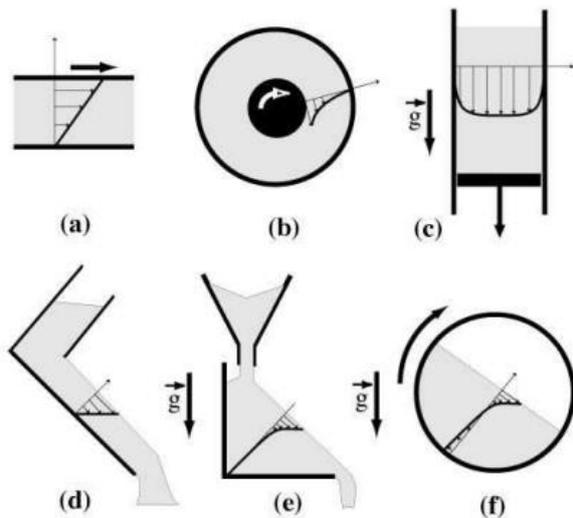


Figura 15: Configurazioni di flusso granulare studiate dal gruppo di ricerca MiDi (2004)

Tre scale di grandezza che influenzano il flusso sono state identificate: una scala in cui l'interazione particella-particella è governata dalla deformazione dei grani, un scala granulometrica che governa il riordinamento locale delle particelle, e la scala del sistema.

Si rilevano che, lontano dalle condizioni di transizione di flusso, l'attrito particella-particella su scala microscopica e la rugosità (scabrezza), hanno scarso effetto sulla scala maggiore della cinematica del flusso, per valori non estremi, e anzi servono solo a modificare il coefficiente di attrito efficace. Ciò significa che, su scala locale, il flusso non è governato da una scala di riferimento associata alla deformazione o alla dissipazione anelastica delle particelle. Per grandi sistemi questo lascia la scala dimensionale delle particelle come unica scelta. Perciò si prende questa scala come un presupposto nella reologia  $\mu(I)$ .

Si assume che in un flusso di scorrimento omogeneo in un sistema sufficientemente esteso dove i confini abbiano un'influenza trascurabile sul flusso interno, i soli campi che governano il flusso sono la velocità di deformazione  $\dot{\gamma}$ , la pressione  $p$ , e lo sforzo di taglio  $\tau$ . Nel fare questo, implicitamente si assume che la temperatura granulare  $T$  non svolga alcun ruolo, e quindi la generazione locale dell'energia cinetica delle particelle agitate bilancia la dissipazione. Siccome l'unica massa nel problema è la massa della particella, il flusso è indipendente dalla densità del materiale e non esiste alcun grado di sollecitazione interna. Queste assunzioni limitano fortemente l'applicazione di qualsiasi legge reologica locale alla dimensione dei grani (Cruz et al., 2005; Lois et al., 2005). Le combinazioni dei parametri sopra citati producono due sistemi adimensionali, ossia il coefficiente di attrito e il parametro  $I$ :

$$\mu = \frac{\tau}{p} \quad I = \frac{\dot{\gamma} d}{\sqrt{\frac{p}{\rho}}}$$

Si nomina  $I$  il numero inerziale, definito come la radice quadrata del numero di Savage o il numero di Coulomb, ed è il rapporto tra la tensione collisionale e la tensione totale (Savage, 1984; Ancey et al., 1999).

L'interpretazione di  $I$  in questo modo fornisce una corrispondenza tra il valore di  $I$  ed il tipo di flusso che si analizza. Per i flussi lenti e quasi-statici, il movimento tra gli strati di particelle è lento, mentre il tempo di confinamento è relativamente veloce e l'inerzia delle particelle ha poco effetto.

Viceversa, i flussi con grandi velocità di scorrimento tali che l'inerzia delle particelle supera la forza di confinamento, risultano agitati e probabilmente sciolti. Questi flussi corrispondono ad un valore elevato di  $I$ .

È noto da alcuni dei primi studi sui mezzi granulari che il flusso granulare appena messo in movimento scorre presentando effetti di dilatanza e che le particelle scorrono l'una sull'altra (Reynolds, 1885). Tuttavia, una volta che questa transizione si è verificata, la percentuale di volume solido (frazione solida  $\phi$ ) varia poco. Ciò è stato verificato con le simulazioni (Silbert et al., 2001) e gli esperimenti (Louge e Keast, 2001).

A riprova di questo effetto, numerosi studi sperimentali e numerici (Rajchenbach, 2003; Louge e Keast, 2001; Jenkins, 2007) suggeriscono che l'approssimazione  $\phi = \text{cost.}$  risulti accettabile.

Partendo dal presupposto che la reologia è valida localmente ed è governata dalle leggi citate precedentemente, il coefficiente di attrito deve essere una funzione del numero inerziale  $I$ , e si possono estendere i risultati ottenuti per lo scorrimento planare a una reologia generale per i materiali granulari.

Questa nuova reologia locale dovrebbe produrre valori simili a quelli sperimentali, ovvero alla legge di attrito basale (Figura 16).

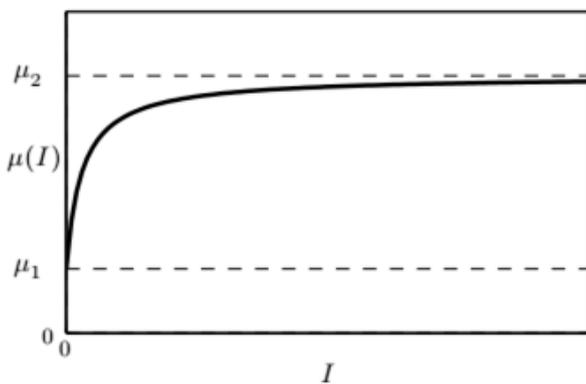


Figura 16: Curva tipica di  $\mu(I)$

Una reologia unidimensionale per descrivere il comportamento precedente può essere scritta come:

$$\tau = \pm \mu(I) p$$

Questa reologia monodimensionale ha due caratteristiche importanti. In primo luogo, esiste una tensione di "snervamento"  $\tau = \mu_1 p$  al di sotto della quale non avviene lo scorrimento. Si introducono notevoli complicazioni alla soluzione del flusso: nelle aree dove non c'è alcun taglio, le sollecitazioni diventano mal definite e dipendono dalla storia di deformazione. La sollecitazione di taglio in queste zone rispetta la disuguaglianza

$$\tau < \mu_1 p$$

Per ovviare al problema, in queste aree si introduce una superficie di snervamento lungo la quale la tensione equivale alla tensione di snervamento. Poi si calcola il movimento della regione collegata come un blocco unico considerando le sollecitazioni sul contorno.

La seconda caratteristica è che  $\mu$  è superiormente delimitata da  $l \rightarrow \infty$ , indicando che vi è un limite all'attrito che il materiale granulare può esprimere. Oltre questo limite, il modello prevede che il materiale acceleri indefinitamente, in assenza di ulteriori forze come la resistenza dell'aria.

La reologia  $\mu(l)$  unidimensionale è un buon modello per simulare l'evoluzione del flusso che scorre verso il basso in un piano inclinato. Tuttavia non dà informazioni sulla struttura interna del flusso. Jop et al. (2006) hanno generalizzato questa reologia ad una formulazione tensoriale completa per predire sia la pendenza trasversale sia la dipendenza dalla profondità (spessore) del flusso su un ostacolo.

Un importante lavoro per verificare i campi di applicabilità di questa reologia è stato fatto per via sperimentale e numerica dal gruppo di ricerca francese MiDi (2004).

Non sorprende che la reologia  $\mu(l)$  dia i migliori risultati con flussi stazionari su un piano inclinato visto che i parametri utilizzati per calibrare la legge di attrito sono stati dedotti dagli esperimenti stessi.

La reologia mostra quantitativamente la dipendenza descritta da Bagnold del profilo della velocità dalla profondità per i flussi profondi. A questa conclusione si arriva anche attraverso l'analisi dimensionale di qualsiasi reologia locale. Dal momento che l'attrito deve bilanciare la gravità in tutto il flusso, si prevede che  $l$  sia costante e lo sia anche la frazione di volume solido.

Tuttavia il flusso di scorrimento "steady plane shear flow" è solo un tipo specifico di flusso osservabile sui piani inclinati. Sebbene la reologia  $\mu(l)$  non riesca a spiegare l'isteresi e l'instabilità di frane e valanghe, è stata utilizzata con ottimi risultati per prevedere altre instabilità, come ad esempio la presenza di onde roll (Forterre e Pouliquen, 2003) e la formazione di argini e dell'auto-canalizzazione (Mangeney et al., 2007).

### 1.2.1 Algoritmo di contatto

La necessità di modellare il contatto e l'interazione dei grani è stata a lungo al centro di numerose ricerche. Un algoritmo di contatto per la prima volta è stato affrontato nell'articolo di Bardenhagen et al. (2000) e successivamente migliorato nella pubblicazione di Bardenhagen et al. (2001). È stato sviluppato in particolare per il metodo MPM, ed è in grado di gestire attrito di scorrimento e di rotolamento (volvente). Questi lavori introducono l'idea del contatto nel contesto della modellazione dei materiali granulari e sono particolarmente significativi per due motivi: essi rappresentano il primo tentativo di calcolare una forza di contatto (o trazione) tra grani interagenti, e sono i primi a proporre l'utilizzo di griglie multiple adattive per

modellare il contatto o interazione. Negli ultimi anni l'idea di utilizzare più griglie per modellare il contatto e l'interazione dei grani è stata esplorata da molti ricercatori in varie configurazioni. Tra queste si include il processo di meshing delle "ruote dentate" (spur-gears) (Hu e Chen, 2003) e lo sviluppo di algoritmi di contatto generali a tre dimensioni di Pan et al. (2008) e Huang et al. (2011). Il concetto è stato inoltre esteso per modellare l'interazione di trascinamento tra le zone spaziali in cui il materiale ha proprietà uniformi. Quest'ultimo argomento è affrontato da Mackenzie-Helnwein et al. (2010), in cui la forza di trascinamento tra due zone di materiale è una funzione delle velocità relative dei materiali, ciascuna delle quali è calcolata su una griglia separata. Un approccio simile è usato da Zhang et al. (2008), dove il trattamento delle diverse zone è gestito in un ambiente multi-griglia, e si garantisce la continuità tra gli step temporali. Infine, nella pubblicazione di Shen e Chen (2005), un metodo multi-griglia è usato per sovrapporre uno strato di confine per distribuire le forze di smorzamento viscoso. Le forze vengono applicate lungo l'interfaccia computazionale che si sposta tra due zone dei materiali.

Gli algoritmi di contatto sono stati estesi per includere l'impatto e la simulazione di fenomeni esplosivi. Due esempi sono descritti in Ma e Zhang (2009) e Lian et al. (2011). L'interazione tra terreno saturo e corpi solidi che impattano viene esplorata nel lavoro di Zhang et al. (2009). Questa ricerca presenta lo sviluppo di un Material Point Method accoppiato (CMPM) e viene utilizzato per predire la risposta dinamica dei suoli saturi.

### **1.3 Modellazione per il run-up e run-out**

Per calcolare il flusso dalla partenza su un pendio ripido al run-out su un piano orizzontale, Savage e Hutter (1991) hanno introdotto un sistema di coordinate curvilinee che ha permesso di descrivere la variazione di inclinazione lungo la direzione discendente del pendio. Questa teoria ha permesso di prevedere caratteristiche fondamentali di una valanga: lo scorrimento sopra un ostacolo opportunamente sagomato (Greve e Hutter 1993) e la formazione di onde perpendicolari all'ostacolo (Gray e Hutter 1997), caratteristiche che non erano note al momento in cui la teoria è stata formulata. La versatilità della teoria Savage-Hutter è stata dimostrata anche dalla sua possibile generalizzazione ai flussi di scivolamento quasi-bidimensionali a profondità integrata (depth-integrated) (Hutter et al. 1993; Greve, Koch e Hutter 1994; Koch, Greve e Hutter 1994).

A prima vista la teoria di Savage-Hutter (1989) ha una struttura matematica molto simile alle equazioni di flusso poco profondo (shallow-water) dell'idrodinamica. Tuttavia le proprietà costitutive complicano notevolmente il modello introducendo nella teoria un coefficiente di spinta del terreno non lineare, che pre-moltiplica la pressione nel bilancio della quantità di moto nel tratto discendente. L'idea alla base di

questo termine deriva da un problema classico dell'ingegneria civile: la spinta del terreno sui muri di sostegno.

Savage e Hutter (1989) hanno utilizzato il modello Mohr-Coulomb e le leggi di attrito di base per mostrare che la pressione del terreno è una funzione costante a tratti della divergenza della velocità di discesa.

Esistono due stati di tensione, ma la legge Mohr-Coulomb non fornisce informazioni sufficienti per dire quale stato è associato ad una particolare deformazione; inoltre basandosi sull'analogia con la parete di ritenuta, il valore più basso di spinta attiva è stato associato a grandi spostamenti e il valore passivo più grande è stato associato ai movimenti di compressione. Savage e Hutter presuppongono che ci sia una transizione netta tra i due stati quando la divergenza della velocità è nulla.

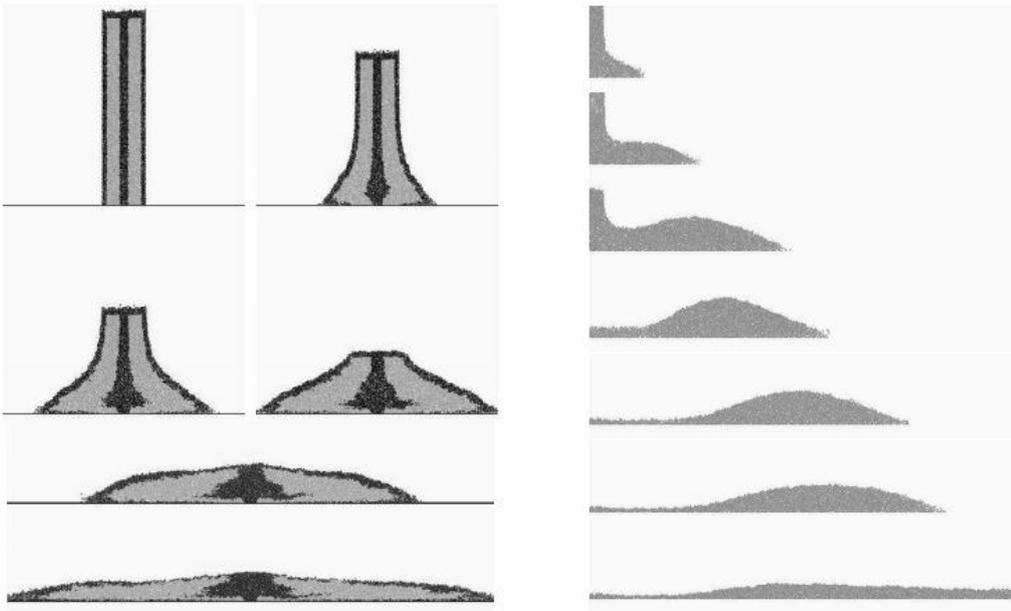
Fino ad oggi non ci sono prove sperimentali convincenti che suggeriscono che avvenga di fatto una netta transizione dello stato di tensione, quindi si dovrebbero indagare altri modelli costitutivi.

Un'ipotesi idraulica alternativa è stata suggerita in letteratura facendo un'analogia diretta tra valanghe granulari e flussi "shallow-water" (Grigorian, Eglit e Iakimov 1967; Kulikovskii e Eglit 1973; Eglit 1983). Gray et al. (1999) e Gray (2001) hanno scoperto che questo semplice modello dà anche risultati molto promettenti per i flussi su pendii ripidi e in tamburi rotanti industriali.

Il modello idraulico è sufficiente per catturare caratteristiche qualitative chiave, come le onde d'urto granulari, le zone morte (no-flow dead zone) e le regioni libere da particelle, che si verificano comunemente nei flussi granulari rapidi. Queste caratteristiche non sono fini a sé stesse, ma contengono una grande quantità di informazioni che può essere utilizzata per migliorare i modelli costitutivi esistenti.

Negli ultimi dieci anni diversi modelli dinamici di run-out hanno introdotto la modellazione del trascinarsi; questi modelli generalmente usano il metodo "process-based" per la deformazione di taglio (Crosta et al, 2003; D'Ambrosio et al, 2003; Medina et al, 2008) in cui la quantità di materiale trascinato viene calcolata da algoritmi che tengono in considerazione le proprietà del materiale o usando una deformazione definita (Chen e Lee, 2007; Begueria et al, 2009; Hungr e McDougall, 2009; Pastor et al, 2009) dove la quantità di materiale è modificabile manualmente in ogni modellazione.

Nell'ambito dei modelli numerici per le previsioni del run-out, Staron e Hinch (2005), hanno presentato simulazioni agli elementi discreti (DEM) (Figura 17) che mostrano un buon accordo con i risultati sperimentali in termini di distanza di run-out. Non hanno però trovato una spiegazione fisica alla relazione esponenziale tra proporzioni iniziali e distanza di run-out. Inoltre non è stata studiata l'influenza delle proprietà del materiale e dello stato iniziale sul comportamento durante il crollo.



**Figura 17: Deformazione della colonna in crollo e distanza di run-out, modellazione DEM (Staron e Hinch, 2005)**

Zenit (2005) ha presentato delle simulazioni DEM utilizzando un modello a particelle deformabili (soft-particles model) e le differenze osservate tra le simulazioni e i risultati sperimentali sono state attribuite all'incertezza sulla stima dell'angolo di riposo. Sia Staron e Hinch che Zenit si sono incentrati sui profili di deposizione finale con poca attenzione al meccanismo di collasso.

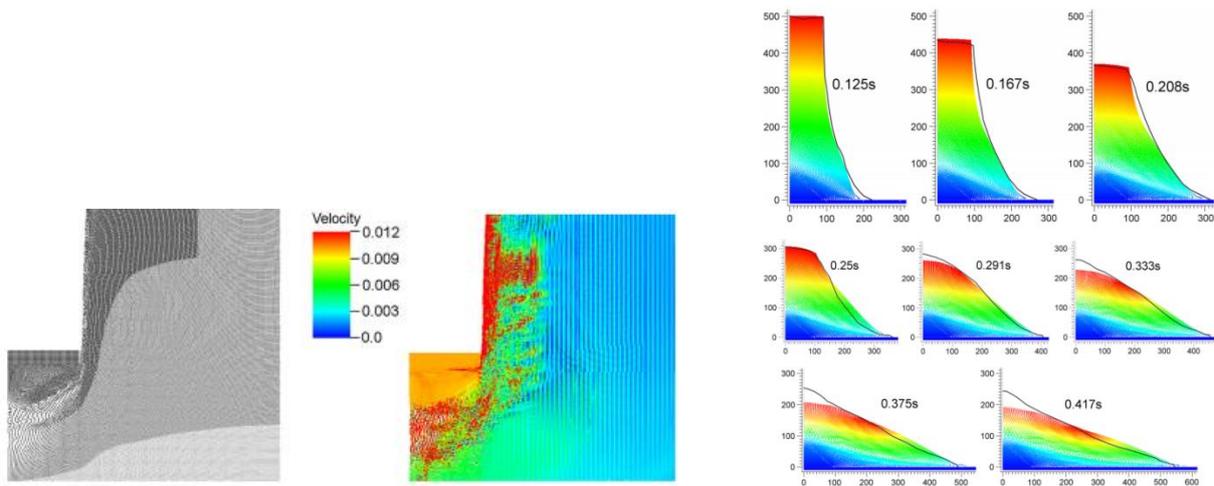
Lacaze et al. (2003) invece hanno effettuato delle simulazioni DEM con buon accordo con i risultati sperimentali, sia in termini di comportamento del flusso che in distanza di run-out. Tuttavia hanno commentato la necessità di investigare l'influenza delle dimensioni delle particelle. Girolami et al. (2012) hanno usato sfere piuttosto che dischi nella loro simulazione DEM ottenendo un migliore accordo con gli esperimenti. Utili et al. (2015) hanno usato particelle a granulometria mista (multi-sized) ottenendo angoli di riposo più vicini ai valori sperimentali. Hanno commentato l'influenza della forma dei grani sull'angolo di riposo e discusso le caratteristiche di dilatanza del materiale granulare.

Kumar (2014) ha effettuato simulazioni DEM per studiare il ruolo delle proprietà iniziali dei grani e ha dimostrato che esse hanno un'influenza significativa sulla cinematica del flusso e sulla struttura interna del flusso.

Il modello DEM è adatto per le analisi di micro-meccanica, ma soffre sul costo computazionale quando applicato a problemi di grande scala. Per questo motivo molti ricercatori hanno preferito metodi continui come il metodo adattivo Lagrangiano-Euleriano agli elementi finiti (ALE FEM). Crosta et al. (2009) hanno presentato una serie di simulazione utilizzando il metodo ALE FEM con un modello Mohr-Coulomb. I risultati erano in linea con quelli sperimentali.

Il metodo SPH è computazionalmente più conveniente per la modellazione delle grandi deformazioni. Chen e Qiu (2012), nonché Liang e He (2014) hanno effettuato delle simulazioni utilizzando il metodo SPH con, rispettivamente, un criterio di rottura Drucker-Prager e un criterio di rottura di Mohr-Coulomb. Nonostante

un buon accordo con i dati sperimentali in termini di distanze di run-out e altezze finali di risalita (run-up), entrambi i modelli sono semplici criteri di rottura che non tengono in considerazione la densità e i comportamenti di rammollimento (softening) del materiale. È noto che i comportamenti di rammollimento svolgono un ruolo chiave nell'instabilità dei pendii e che i modelli semplici non possono tenere in conto della complessità del comportamento meccanico. Per di più, nel modello SPH, sorgono delle difficoltà nell'applicazione delle condizioni al contorno a causa dell'assenza di una mesh computazionale. Un'alternativa al metodo SPH è il metodo MPM. La sua applicazione all'ingegneria geotecnica è stata discussa da Solowski e Sloan (2015) (Figura 18 e Figura 19).



**Figura 18: Figura sinistra: Deformazioni e campo di velocità del cedimento di una fondazione, modello MPM (Solowski e Sloan, 2015)**

**Figura 19: Figura destra: Simulazione MPM di collasso di colonna con confronto sperimentale (Solowski e Sloan, 2015)**

La capacità di affrontare comportamenti di materiale granulare simili a fluidi è stata dimostrata da Wieckowski. Andersen ha mostrato che il modello MPM è in grado di simulare il collasso della colonna utilizzando un semplice modello di Mohr-Coulomb. Bandara (2013) ha simulato il crollo della colonna sia con SPH e MPM e ha ottenuto gli stessi risultati. Tuttavia la simulazione SPH ha richiesto un grande numero di particelle per ottenere un'accurata previsione della distanza di run-out e dell'altezza di risalita, rendendolo computazionalmente più costoso.

Solowski e Sloan hanno comparato simulazioni MPM con i dati sperimentali di Lube et al. dimostrando che il modello Mohr-Coulomb non dissipa energia sufficiente. Quindi le distanze di run-out e le altezze di run-up venivano in gran parte sovrastimate e doveva essere applicato lo smorzamento numerico (damping) al fine di ottenere la corrispondenza con i risultati sperimentali.

Kumar ha effettuato simulazioni del crollo della colonna con modelli MPM e DEM e ha dimostrato che l'MPM con un modello di Mohr-Coulomb ha sofferto dell'insufficiente dissipazione di energia rispetto al DEM. La motivazione è stata attribuita all'assenza di collisioni inter-particellari che dissipano una porzione

dell'energia. Kumar ha anche paragonato la formulazione standard del MPM con il metodo di interpolazione generalizzata del punto materiale (GIMP) e non ha trovato alcun miglioramento evidente per le simulazioni del collasso della colonna.

Finora gran parte degli studi si sono concentrati sul metodo stesso con scarse ricerche sul ruolo che il modello costitutivo svolge nella previsione. Mast et al. (2014) hanno effettuato simulazioni di collasso della colonna utilizzando un modello Drucker-Prager e un modello di Matsuoka-Nakai indurente-rammollente (hardening-softening) e hanno mostrato che la scelta del modello costitutivo influisce moltissimo sul profilo di deposizione finale in termini di altezza finale di run-up e di distanza di run-out. Inoltre hanno mostrato che un incremento della forza di picco provoca altezze finali maggiori e distanze di run-out più brevi.

## **1.4 Modellazione dell'impatto contro le strutture**

L'energia dissipata è una grandezza fisica che può essere utilizzata per stimare gli effetti protettivi di ostacoli naturali o artificiali contro le frane e valanghe (Fuhrer, 2000). La capacità di dissipazione di energia degli alberi è stata quantificata da esperimenti e simulazioni (Bartelt e Stockli, 2001; Dorren e Berger, 2006; Dorren et al., 2006). Contro le frane, in particolare, possono essere utilizzate diverse tecniche di difesa artificiali per dissipare energia (Descoeurdes, 1997; Peila et al., 1998; Anderheggen et al., 2002; Cazzani et al., 2002). Le barriere per i massi sono progettate per dissipare l'energia tramite danni strutturali irreversibili, danni al calcestruzzo, deformazione plastica dell'armatura in acciaio e deformazione plastica dei supporti in metallo appositamente progettati (Delhomme et al., 2005). Nello studio delle valanghe, gli effetti della neve sugli ostacoli sono per lo più studiati attraverso le forze e le pressioni esercitate all'ostacolo stesso (Schaerer e Salway, 1980; McClung e Schaerer, 1985; Norem et al., 1985; Schaerer e Issler, 2001; Berthet-Rambaud et al., 2008; Sovilla et al., 2008; Thibert et al., 2008). Per quanto riguarda l'analisi del flusso, queste forze rappresentano la variazione della quantità di moto della valanga. Altri parametri esaminati sono spesso la deviazione del flusso, la deposizione della neve attorno all'ostacolo e gli effetti degli ostacoli sulla distanza run-out (Larsen e Norem, 1996; Harbitz et al., 2000; Johannesson, 2001; Naaïm et al., 2004; Cui et al., 2007; Faug et al., 2008). Nonostante molteplici studi, non è stato affrontato frequentemente il problema di calcolare l'energia dissipata durante l'impatto della valanga contro gli ostacoli. Solo Sheikh et al. (2008) hanno sperimentalmente stimato la quantità di energia dissipata dall'interazione del flusso con vari tipi di ostacoli (dossi, dissipatori e barriere di ritenuta) utilizzando un bilancio energetico, per cui l'energia potenziale gravitazionale del flusso si trasforma in energia cinetica e la differenza determina le perdite per dissipazione.

Un bilancio energetico globale è utile per determinare come l'energia meccanica viene dissipata internamente da processi di attrito e collisione. In un valanga o in una frana, la dissipazione di energia interna comporta processi irreversibili come la deformazione viscosa, le collisioni anelastiche, la frattura del materiale, il consumo abrasivo, la resistenza dell'aria e l'attrito per scorrimento basale su superfici di terreno scabre. Ad esempio, un'applicazione del bilancio energetico globale è stata adottata da Bartelt et al. (2006) per determinare come l'energia cinetica associata al moto casuale di granuli di neve influenzi i flussi interni di energia e quindi il movimento della valanga (Buser e Bartelt, 2009). Risulta ancora più importante eseguire un bilancio energetico globale per la progettazione di strutture con funzioni differenziate di dissipazione di energia.

Il moto delle correnti granulari è stato studiato sperimentalmente da numerosi ricercatori, tra cui ad esempio Savage e Hutter, (1989); Johnson e Jackson (1990); Hutter et al. (1995); Wieland et al. (1999); Louge e Keast (2001); Pouliquen e Forterre (2002).

I primi esperimenti sulle interazioni tra i flussi granulari e gli ostacoli includono Chu et al. (1995); Rericha et al. (2002); Faug et al. (2002 e 2003); Gray et al. (2003). Inoltre, su piccola scala, sono stati condotti esperimenti di laboratorio sul movimento di neve fluida e sfere di ghiaccio da Nishimura (1990); Nishimura et al. (1991) e (1993); Bouchet et al. (2003); e Tiefenbacher e Kern (2004).

Salm (1964) ha studiato le forze di impatto sugli ostacoli facendo scorrere la neve su un grande scivolo e Bozhinskiy e Losev (1998) descrivono studi simili dove gli ostacoli si muovono e la neve è stazionaria.

Per stimare la forza di impatto di flussi granulari contro le barriere esistono diversi modelli.

I modelli possono essere classificati in modelli di collisione idraulici e solidi. I modelli idraulici sono ulteriormente suddivisi in modelli idro-statici e idro-dinamici. Esempi di modelli idro-statici sono le formule di Lichtenhahn e Armanini. La semplice formula di Lichtenhahn è molto popolare, perché è richiesta solo l'altezza del flusso di detriti. In un progetto spesso l'altezza delle strutture è presa come l'altezza del flusso di detriti e non ci sono incognite nella formula.

In generale, le formule idro-statiche hanno la forma:

$$p_{max} = k \rho_{Mu} g h_{Mu}$$

dove:

$p_{max}$  = pressione massima di impatto del flusso di detriti in  $[N/m^2]$ . La massima non è correlata a considerazioni statistiche, ma al valore massimo di pressione nella distribuzione del carico sulla struttura

$k$  = fattore empirico

$\rho_{Mu}$  = densità del flusso granulare in  $[kg/m^3]$

$g$  = accelerazione di gravità in  $[m/s^2]$

$h_{Mu}$  = altezza del flusso granulare in  $[m]$

Le formule idrodinamiche hanno la forma:

$$p_{max} = a \rho_{Mu} v^2$$

dove:

$p_{max}$  = pressione massima di impatto del flusso di detriti in N

a = fattore empirico

v = velocità del flusso granulare in [m/s]

Il valore del fattore empirico dipende dal tipo di flusso. Ad esempio, per flusso laminare e materiale a grana fine Watanabe e Ikeya (1981) stimano il valore 2, per materiale grossolano valori fino a 4 sono suggeriti da Egli e Geo (2005). Zhang (1993) raccomanda valori compresi tra 3 e 5. I valori di Zhang sono basati su misure in campo su più di 70 colate di detriti.

Un'espressione specifica è data da Hübl e Holzinger, dove la forza d'impatto, misurata su test in piccola scala, è normalizzata per la formula idro-dinamica. Inoltre il numero di Froude è stato utilizzato per ottenere relazioni adimensionali ed è stato correlato alla forza di impatto normalizzata.

Sulla base di un'analisi di correlazione un'espressione numerica è data come:

$$p_{max} = 5 \rho_{Mu} v^{0,8} (g h_{Mu})^{0,6}$$

Alcuni modelli misti che considerano elementi idro-statici e idro-dinamici sono stati proposti da Kherkeulitze (1967) e Arattano e Franzi (2003).

Per la stima delle forze d'impatto del flusso di detriti, oltre ai modelli idraulici vengono utilizzati i modelli per gli impatti tra corpi solidi.

I modelli di impatto del corpo solido si basano principalmente sul modello di Hertz assumendo un comportamento elastico del materiale. Tuttavia sono noti anche modelli alternativi che considerano il comportamento viscoso-elastico e elasto-plastico: Kuwabara e Kono (1987), Lee e Hermann (1993), Walton e Braun (1986) e Thornton (1997).

Altre pubblicazioni utilizzano il modello di Kelvin-Voigt basato sul sistema molla-ammortizzatore (spring-damper systems).

Inoltre esistono modelli che non appartengono ad alcun tipo sopra menzionato. Per esempio Yu (1992) ha pubblicato un modello empirico. Anche Aulitzky ha introdotto un modello che considera la velocità dell'onda d'urto all'interno di un debris flow. Tuttavia entrambi i modelli utilizzano dati di input, come la velocità dell'onda d'urto, che sono estremamente difficili da individuare per le reali frane e colate.

# CAPITOLO 2: MPM, BREVE INTRODUZIONE DEL METODO

## 2.1 Sviluppo del metodo MPM

Dopo la prima pubblicazione sul metodo MPM di Sulsky et al. (1994), il metodo è stato applicato a molti campi dell'ingegneria e della scienza e ampliato con funzionalità avanzate.

Le radici del metodo MPM risiedono in una classe più generale di schemi numerici noti come metodi di particle-in-cell (PIC). La tecnica PIC è stato sviluppato negli anni '50 da Harlow et al. (1957) ed è stata utilizzata principalmente per applicazioni di meccanica dei fluidi. Le prime implementazioni soffrivano di eccessiva dissipazione di energia, rendendo preferibili altri metodi.

Molti problemi che affliggevano i primi metodi PIC sono stati risolti sviluppando la formulazione fluid-implicit-particle (FLIP) (Brackbill e Ruppel, 1986 e Brackbill et al., 1988), in cui le particelle portano tutte le informazioni del continuo, ad esempio: massa, quantità di moto, energia e proprietà costitutive.

Negli anni '90 Sulsky et al. (1994) hanno adeguato il metodo FLIP alle applicazioni di meccanica dei solidi. La formulazione debole e le equazioni discrete sono state proposte in una forma simile al metodo degli elementi finiti tradizionale. Inoltre hanno applicato l'equazione costitutiva ad ogni singola particella, evitando l'interpolazione delle variabili che sono dipendenti dal percorso deformativo del materiale (history-dependent), così le particelle vengono tracciate durante il calcolo. Elementi con parametri del materiale differenti o equazioni costitutive differenti erano trattati automaticamente: un chiaro vantaggio rispetto al FEM Euleriano.

Sulsky et al. hanno preso in considerazione esempi numerici di grandi rotazioni del corpo rigido e hanno dimostrato che la dissipazione di energia che si verifica nell'approccio euleriano non si è verificata nel loro approccio. Sulsky et al. hanno indagato anche i problemi di impatto in condizioni di stato piano di deformazione con comportamenti dei materiali elastico e plastico-incrudente.

Ulteriori applicazioni del metodo PIC per la meccanica dei solidi sono riportate da Sulsky et al. (1995).

Anche la risposta sforzo-deformazione macroscopica dei materiali granulari secchi sottoposti a compressione è stata studiata da Sulsky, mostrando che il MPM può riprodurre le osservazioni sperimentali di irrigidimento del materiale in compressione.

Nel 1996 Sulsky e Schreyer hanno nominato il metodo come material point method e hanno presentato la formulazione assialsimmetrica. Hanno applicato il MPM al problema di impatto di Taylor. Essi hanno inoltre incorporato l'effetto termico nell'equazione costitutiva.

Bardenhagen e Brackbill (1998) hanno utilizzato il MPM per modellare i percorsi tensionali e la concentrazione delle tensioni in materiali granulari, sia per carico quasi-statico, sia per carico dinamico.

La maggior parte delle implementazioni del metodo MPM sono codici dinamici che impiegano un schema di integrazione esplicita, l'integrazione implicita però è stata utilizzata da diversi ricercatori (Guilkey e Weiss 2001, Sulsky e Kaul 2004, Beuth et al. 2008).

Sebbene sia possibile utilizzare programmi dinamici espliciti anche per l'analisi dei problemi quasi statici risulta computazionalmente inefficiente perché l'integrazione esplicita richiede intervalli temporali molto piccoli e può portare ad elevati tempi di calcolo.

Beuth et al. (2008) hanno proposto uno schema di integrazione implicita per l'MPM utilizzando le equazioni quasi-statiche. L'equazione dei lavori virtuali ottenuto dall'equilibrio interna ed esterno del continuo è stata usata come principale equazione nel metodo proposto. Questo metodo è stato applicato al problema del collasso del pendio e a problemi del muro di sostegno (Beuth, 2011), per la simulazione numerica di penetrazione del piezocono in argilla (Beuth e Vermeer, 2013) e per l'installazione di pali battuti (Elkadi e Nguyen, 2013). Numada e Konagai (2003) sono stati i primi ad applicare il metodo allo studio del run-out di frane indotte dal sisma.

Bardenhagen e Kober (2004) hanno generalizzato la procedura di discretizzazione dell'MPM originale. Le funzioni di forma dell'elemento e le funzioni delle caratteristiche delle particelle vengono introdotte nella formulazione variazionale, come in altri metodi meshless. Differenti combinazioni delle funzioni di forma e delle funzioni caratteristiche delle particelle hanno prodotto una famiglia di metodi chiamati Generalized Interpolation Material Point Method (GIMP).

L'MPM e le sue estensioni sono stati utilizzati per molti problemi che coinvolgono le grandi deformazioni, come l'esplosione e l'impatto (Hu e Chen 2006, Lian et al. 2011), la formazione e l'evoluzione della frattura (Nairn, 2003), la lavorazione dei metalli (Chen et al. 1998), la dinamica del ghiaccio (Sulsky et al. 2007).

Tra le prime applicazioni nel campo dell'ingegneria geotecnica si possono considerare: la simulazione del flusso granulare (Wieckowski et al. 1999, 2001), la subsidenza delle terre, la risposta di una geomembrana al cedimento del terreno (Zhou et al. 1999). Konagai e Johansson (2001) hanno applicato il metodo allo stato piano di deformazione di una prova di compressione.

Coetzee (2003) ha applicato il metodo MPM per modellare il flusso del materiale granulare di fronte alla pala del bulldozer e di escavatori a cavo. La sua formulazione è basata sul continuo di Cosserat. Coetzee et al. (2006) (Figura 21) hanno eseguito con l'MPM un confronto con il DEM e dati sperimentali, per studiare lo scarico dei silos. Coetzee et al. (2005) (Figura 20) hanno usato l'MPM per studiare il problema delle grandi deformazioni dello sfilamento dei tiranti (pull-out). La capacità massima dell'ancoraggio in sabbia con angolo di attrito di 45° presentava una differenza soltanto del 10% tra il modello MPM e i dati misurati.

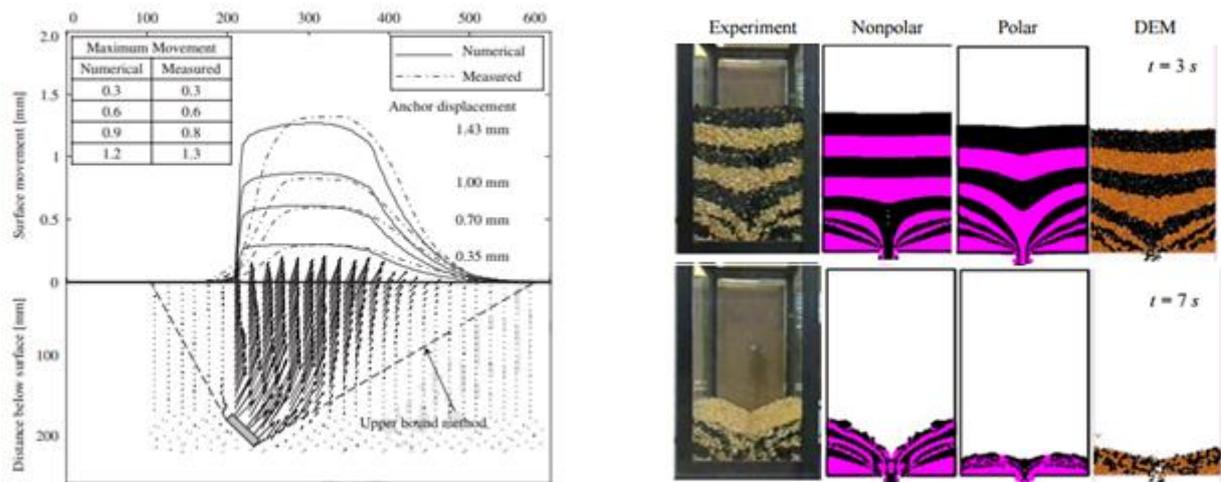


Figura 20: Figura sinistra: Grandi deformazioni allo sfilamento dei tiranti di ancoraggio, modello MPM, Coetzee et al. (2005)

Figura 21: Figura destra: Confronto MPM, DEM e dati sperimentali per lo scarico di un silos, Coetzee et al. (2006)

Più complessa è la modellazione dei suoli saturi a cui viene applicato un rapido carico, ad esempio, la battitura dei pali nei terreni saturi, che richiede un metodo che sia in grado di modellare le grandi deformazioni e che conteggi la successiva generazione e dissipazione delle pressioni interstiziali, ovvero il ben noto fenomeno del consolidamento (Zhang et al., 2009).

Guilkey et al. (2007) hanno sviluppato uno schema numerico per l'interazione fluido-struttura. Nel loro schema, hanno usato il metodo MPM per modellare il solido in una struttura Lagrangiana, mentre per il fluido è stata utilizzata una struttura Euleriana. Il fatto che l'MPM utilizza una mesh temporanea per calcolare la soluzione incrementale delle equazioni differenziali, ha permesso loro di utilizzare la stessa mesh euleriana per il solido e il liquido. Inoltre hanno associato il loro approccio con una procedura di mesh-refinement adattivo per perfezionare la mesh in alcune porzioni del dominio, ottenendo quindi maggiore efficienza nel calcolo.

Recentemente il metodo MPM è stato applicato con successo allo studio di numerosi problemi di geomeccanica, come frane e valanghe (Mast et al, 2014;. Soga et al, 2016; Yerro et al, 2016)., stabilità dei versanti (Alonso e Zabala, 2011; Abe et al, 2013), e modelli di penetrazione del terreno (Ceccato et al, 2016; Phuong et al, 2016).

### 2.1.1 Software MPM utilizzato (Anura3D)

In questo studio, le simulazioni numeriche sono eseguite utilizzando il codice di integrazione esplicita tridimensionale chiamato Anura3D ([www.anura3d.eu](http://www.anura3d.eu)). Il software è stato originariamente sviluppato presso l'Università di Stoccarda dal gruppo di ricerca del Prof. P.A. Vermeer con lo scopo di introdurre la modellazione MPM in ingegneria geotecnica. Lo sviluppo del software è tuttora condotto da una comunità

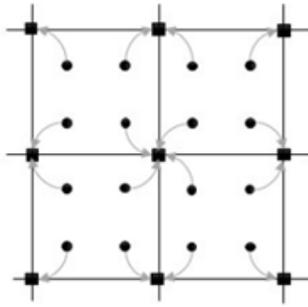
di ricerca che comprende: Deltares (Delft, Paesi Bassi), Università di Cambridge (UK), Università di Catalunya (Barcellona, Spagna), TU Hamburg-Harburg (Germania), Università di Padova (Italia), TU Delft (Paesi Bassi).

Il software implementa una versione migliorata dell'MPM originale proposto da Sulsky et al. (1994), che è stato ampiamente validato per problemi di geomeccanica.

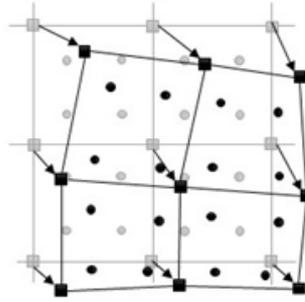
## 2.2 Funzionamento del metodo MPM

Il metodo del punto materiale (MPM) può essere visto come un'estensione del metodo agli elementi finiti, in cui il continuo è rappresentato da punti lagrangiani, chiamati punti materiali (material points) o particelle (Coetzee et al.; 2005, Moresi et al., 2003; Sulsky e Schreyer, 1996; Sulsky e Schreyer, 2004; Wieckowski, 2004). Il dominio in cui si prevede che il corpo si muova è discretizzato da una mesh agli elementi finiti. Le deformazioni del continuo sono modellate seguendo le particelle (MP) che si muovono attraverso una mesh fissa Euleriano; ciò richiede una particolare contabilità per la mappatura delle informazioni dalle particelle ai nodi della mesh e viceversa.

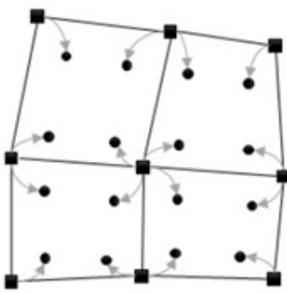
Le particelle trasportano tutte le proprietà fisiche del continuo come massa, quantità di moto, parametri del materiale, deformazioni, tensioni, proprietà costitutive, carichi esterni, mentre la mesh euleriana ed i suoi punti di Gauss non contengono alcuna informazione. All'inizio dello step temporale, le informazioni sono trasferite dalle particelle alla mesh computazionale (Figura 22 a). Quindi vengono calcolati gli integrali che caratterizzano le equazioni discretizzate del moto. La mesh è poi utilizzata per determinare la soluzione incrementale delle equazioni differenziali (Figura 22 b). Questa soluzione nodale è trasferita di nuovo ai material points per aggiornare la posizione, la velocità e tutte le altre grandezze (Figura 22 c). In seguito la mesh può essere reimpostata alla configurazione iniziale o modificata arbitrariamente (Figura 22 d).



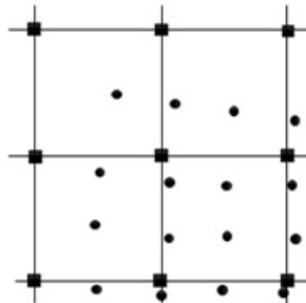
a) Le informazioni passano dai Material Point ai nodi della mesh



b) Le equazioni differenziali sono risolte sulla mesh e la mesh si deforma



c) Le informazioni sono nuovamente trasferite dai nodi ai Material Point



d) La mesh è ridefinita

**Figura 22: Passaggi di calcolo del MPM**

Attraverso questo approccio, l'MPM combina gli aspetti migliori di entrambe le formulazioni lagrangiana ed euleriana, sopperendo nel contempo ad alcune carenze dei due approcci. Infatti la diffusione numerica associata ai termini convettivi dell'approccio euleriano non compare nella soluzione nel MPM. Inoltre viene evitato, nell'approccio MPM, il problema della distorsione della mesh che si verifica nella soluzione con il metodo updated-Lagrangian per le grandi deformazioni (Sulsky et al., 1993; Sulsky et al., 1994).

La forma debole e le equazioni discrete del moto nel MPM sono coerenti con quelle del metodo agli elementi finiti tradizionale. Inoltre l'equazione costitutiva è applicata ad ogni singola particella, evitando l'interpolazione delle variabili dipendenti dallo step precedente (history-dependent) delle particelle che vengono mosse durante i calcoli. Il metodo è quindi in grado di gestire il comportamento history-dependent del materiale. Elementi che hanno un materiale con diversi parametri o diverse equazioni costitutive sono automaticamente trattati, ottenendo quindi un chiaro vantaggio rispetto al FEM Euleriano (Sulsky et al., 1994).

## 2.3 Algoritmo di contatto

Il material point method è capace di simulare il contatto no-slip tra differenti corpi senza un particolare algoritmo. Tuttavia in molti problemi di ingegneria è richiesto un algoritmo per modellare il moto relativo all'interfaccia. Un algoritmo semplice è stato proposto da York et al. (1999) per consentire il rilascio del vincolo no-slip. Nel metodo di York, se due corpi si avvicinano tra loro, la condizione di impenetrabilità viene imposta come nel MPM standard. Se i corpi si allontanano l'uno dall'altro, si muovono nel proprio campo di velocità per consentire la separazione.

Hu e Chen (2003) hanno presentato un algoritmo di contatto /separazione in ambiente multimesh. Nel loro algoritmo di contatto la componente normale della velocità di ogni particella materiale sulla superficie di contatto è calcolata nella mesh fissa, mentre la componente tangenziale della velocità viene calcolata sulle rispettive mesh individuali. Anche se gli algoritmi di contatto sopra indicati sono efficienti per simulare la separazione, l'attrito tra i corpi in contatto non è mai considerato.

Bardenhagen et al. (2000) hanno sviluppato un algoritmo di attrito per modellare l'interazione tra i granuli dei materiali granulari. L'algoritmo consente lo scorrimento e il rotolamento con attrito e la separazione tra i granuli, ed impedisce invece la compenetrazione. Il punto di forza dell'algoritmo è il riconoscimento automatico dei punti di contatto, quindi non è richiesta una definizione iniziale della superficie di contatto. E' stato successivamente migliorato da Bardenhagen et al. (2001) e applicato per simulare la propagazione della tensione nei materiali granulari. Questo algoritmo è il più utilizzato in letteratura MPM (Andersen, 2009, Bardenhagen et al., 2000, Coetzee, 2003, Al-Kafaji, 2013).

Huang e Zhang (2011) si sono focalizzati sul problema di impatto e penetrazione, come la perforazione di una piastra da parte di un proiettile. La condizione di contatto antiscivolo (no-slip) nel MPM impone una grande resistenza alla penetrazione, per cui il bersaglio assorbe eccessivamente l'energia di impatto e diminuisce eccessivamente la velocità del proiettile. Per simulare in modo accurato l'interazione proiettile-bersaglio, l'inserimento della condizione di impenetrabilità era necessario. Nell'analisi ad elementi finiti alle piccole deformazione, i problemi di contatto sono risolti con elementi di interfaccia, ciò può essere fatto anche con l'MPM (Vermeer et al., 2009). Gli elementi di interfaccia sono stati utilizzati con il MPM quasi-statico per problemi di stabilità dei pendii e per risolvere il contatto piezocono-suolo nella simulazione del test di penetrazione (Beuth e Vermeer, 2013).

Lim et al. (2014) hanno applicato un algoritmo di contatto basato sui livelli (Andreykiv et al., 2012) per simulare problemi di penetrazione del suolo, come può essere l'installazione di fondazioni offshore.

L'idea del metodo è quella di descrivere il terreno e l'oggetto che viene incluso con due domini completamente indipendenti che si sovrappongono e si utilizza un moltiplicatore di Lagrange e una funzione di livello per fornire l'interazione di contatto. Questo approccio è specifico per problemi di penetrazione e non è possibile l'estensione ad altri tipi di applicazioni.

Ma et al. (2014) hanno implementato nel GIMPM un algoritmo di contatto per facilitare le analisi delle grandi deformazioni con contatto liscio, parzialmente ruvido o ruvido. Essi riconoscono che l'algoritmo di contatto di Bardenhagen ha due limitazioni:

- La precisione dell'algoritmo di contatto diventa discutibile quando la rigidità dei materiali a contatto è molto diversa, come nel caso di interazione tra argilla morbida e penetrometro o fondazione. Si osservano oscillazioni non realistiche della velocità e dell'accelerazione.
- Nel modello di attrito di Coulomb, come previsto da Bardenhagen et al. (2001), la tensione tangenziale lungo l'interfaccia è sempre proporzionale alla tensione normale, ovvero la tensione tangenziale può essere aumentata indefinitamente con l'aumento dello sforzo normale. Questo meccanismo può essere ragionevole per materiali elastici a contatto, ma non è realistico per terreni coesivi in condizioni non drenate perché la tensione tangenziale non può superare la resistenza al taglio non drenata del terreno.

Una funzione penalità viene quindi introdotta per evitare oscillazioni non giustificate delle velocità e delle accelerazioni, inoltre, per modellare le condizioni di contatto in ambito geotecnico, viene inserito nel modello di attrito di Coulomb un limite massimo alla tensione tangenziale, indipendente dalla tensione normale.

Il concetto chiave dell'idea della penalità è quello di consentire una leggera compenetrazione tra i materiali a contatto. Il metodo ha dimostrato di essere in grado di ridurre le oscillazioni numeriche nella forza di contatto, inoltre con una selezione ottimale delle proprietà della funzione di penalità, la compenetrazione è limitata ad un livello molto basso, mentre la precisione di il calcolo è decisamente migliorata.

## 2.4 Modello costitutivo

### 2.4.1 Il criterio di rottura di Mohr-Coulomb

Coulomb ha sviluppato il criterio di rottura osservando che il terreno trae la sua resistenza dalla coesione ( $c$ ) e dall'attrito, ovvero dall'angolo di attrito interno del materiale ( $\phi$ ):

$$\tau_{max} = c + \sigma \tan \phi$$

Con

$\tau_{max}$  = tensione tangenziale massima [kPa]

$c$  = coesione [kPa]

$\sigma$  = tensione normale [kPa]

$\tan\phi$  = coefficiente di attrito [adimensionale]

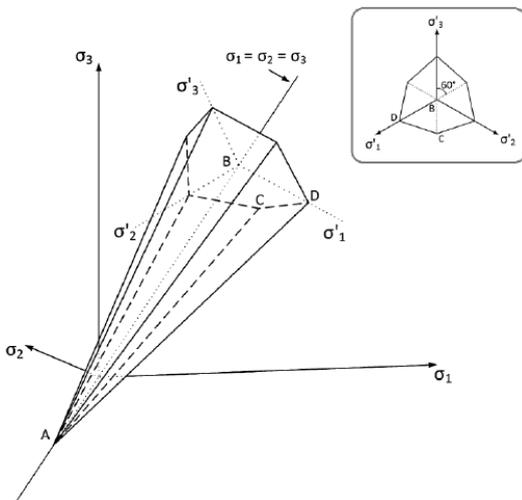
La condizione di rottura (snervamento) di Mohr-Coulomb è un'estensione della legge di attrito di Coulomb agli stati generali di tensione. Le condizioni di rottura di Mohr-Coulomb sono costituite da sei funzioni formulate in termini di tensioni principali:

$$F_1 = \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| + \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \phi - c \cos \phi$$

$$F_2 = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - c \cos \phi$$

$$F_3 = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi - c \cos \phi$$

Le condizioni  $F_i = 0$  rappresentano una piramide a sei facce nello spazio delle tensioni principali Figura 23.



**Figura 23: Superficie di rottura di Mohr-Coulomb**

Nessuna legge di indurimento è inclusa nel modello originale, quindi la funzione di rottura (snervamento) è fissata nello spazio delle tensioni.

La funzione di potenziale plastico contiene il parametro  $\psi$ , chiamato angolo di dilatanza. Le funzioni sono definite come:

$$G_1 = \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| + \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \psi$$

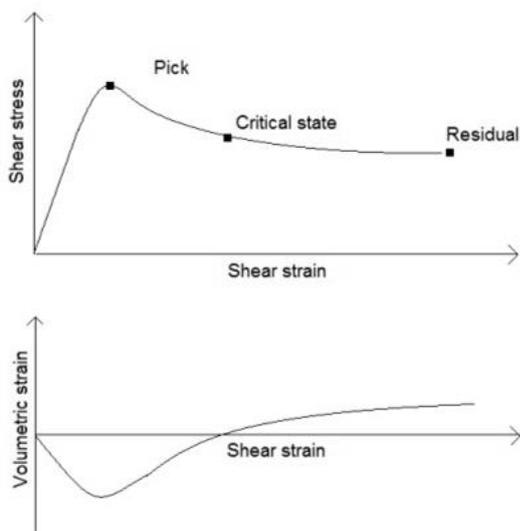
$$G_2 = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \psi$$

$$G_3 = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \psi$$

Fatto salvo per gli strati fortemente sovraconsolidati, i terreni argillosi tendono a mostrare poca dilatanza ( $\psi \approx 0$ ). La dilatanza della sabbia dipende sia dalla densità che dall'angolo di attrito Bolton (1986).

Il modello elastico-perfettamente plastico Mohr-Coulomb è ampiamente usato per analisi geotecnica. Esso non fornisce però una previsione precisa dell'effettivo comportamento di taglio dei terreni. Questo modello dovrebbe essere adottato in combinazione con l'analisi delle tensioni efficaci, e devono essere utilizzati un angolo di attrito efficace  $\phi'$  e la coesione efficace  $c'$ .

La scelta dei parametri di resistenza deve essere fatta con cura, tenendo conto delle caratteristiche dei carichi e delle deformazioni del problema. Infatti la resistenza del suolo spesso presenta un picco, associato ad un'espansione volumetrica, seguito da una riduzione della resistenza che conduce allo stato critico, nel quale si ha deformazione volumetrica nulla e infine si giunge al valore residuo (Figura 24).



**Figura 24: Rappresentazione del test di taglio diretto**

Diverse estensioni del modello sono state proposte in letteratura per incorporare aspetti specifici del comportamento del terreno come: la dilatanza non lineare, il comportamento strain-softening (calo della tensione con la deformazione ovvero deformazione-rammollente), la forza dipendente dalla densità, eccetera; questo richiede spesso una modifica della funzione di snervamento e l'introduzione di una legge di indurimento. Una panoramica efficace si trova nella pubblicazione di Wood (2003).

## 2.5 Comparazione con gli altri metodi numerici

### 2.5.1 Differenze tra MPM, SPH, DEM

Il metodo MPM viene spesso messo a confronto con il metodo Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) e il metodo degli elementi discreti (DEM).

La similitudine tra i tre metodi è l'utilizzo di sistemi di riferimento di Lagrange per la descrizione del materiale. La caratteristica distintiva del MPM è la soluzione delle equazioni differenziali sui punti nodali

stazionari, non nei punti che effettivamente rappresentano il corpo. Le funzioni di forma coprono porzioni del dominio, catturando in modo efficace il contributo delle particelle vicine ad un punto nodale. Il MPM è infatti l'unico metodo basato sulla griglia tra questi tre approcci. Sia SPH che DEM risolvono le equazioni a livello locale cioè nella posizione delle particelle, creando un ambiente di simulazione meshfree. In questi due metodi, il contributo delle particelle adiacenti viene gestito con una serie di singole forze provenienti dalle particelle stesse. Nel SPH, ogni punto ha una zona di influenza, in maniera simile ad una funzione di forma nodale centrata sul punto dove avviene il calcolo. Da questo punto di vista, le particelle SPH funzionano come i nodi nel MPM, con l'importante differenza che nel SPH i punti si muovono nel tempo. I grani del DEM invece interagiscono tanto quanto si potrebbe immaginare in un reale contatto particelle - particelle in un mezzo granulare.

Un modo per collegare questi tre metodi è illustrato nella Figura 25 (questa figura è applicabile solo alle descrizioni dei materiali granulari). Il MPM è al limite verso la rappresentazione del continuo, mentre il DEM è la rappresentazione discreta per eccellenza, l'SPH cade tra questi due estremi. Un'altra considerazione è la scala. Il DEM risulta valido per le simulazioni su scala ridotta, quando è importante valutare i dettagli. Aumentando la scala, l'MPM diventa più appropriato, perché le interazioni tra i singoli grani diventano meno rilevanti. L'SPH si trova nel mezzo, in termini di scale di grandezza.

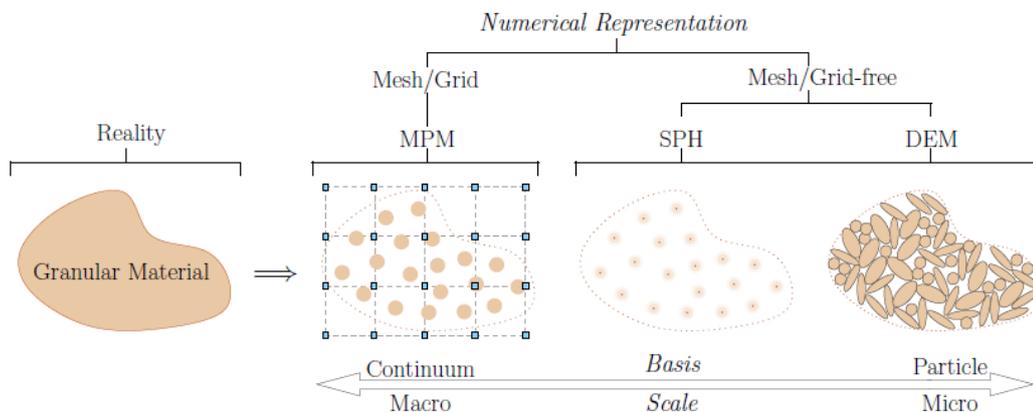


Figura 25: Confronto grafico tra i metodi MPM, SPH, DEM nella modellazione del materiale granulare, Mast (2014)

## 2.5.2 Efficienza computazionale del MPM

Il metodo MPM impiega meno tempo computazionale rispetto ai metodi meshless. A differenza dei metodi meshless, la soluzione incrementale nel MPM è ottenuta sulla mesh fissa pre-definita e la condizione di CFL (Courant, Friedrichs e Lewy) dipende dall'ampiezza della maglia, piuttosto che dalla distanza dei punti materiali [146]. Può essere necessario ridurre lo step temporale in modo significativo durante i calcoli nei metodi meshless. In un particolare esempio di impatto ad alta velocità, Ma et al., (2009) hanno mostrato che, durante i calcoli con il metodo SPH, la dimensione dello step temporale è stata ridotta di un fattore di

3,8 a causa della notevole riduzione della distanza tra punti materiali dovuta alla forte compressione del materiale. Il MPM ha invece mantenuto lo step di tempo costante durante i calcoli. Inoltre il tempo di ricerca delle particelle vicine (confinanti), che non è richiesto nel MPM, è essenziale nella maggior parte dei metodi meshless come l'SPH e l'EFG.



# CAPITOLO 3: SIMULAZIONE MPM DI PROPAGAZIONE GRANULARE E FENOMENO DI RUN-UP

## 3.1 Introduzione e obiettivo

La modellazione con software MPM è indicata per simulare lo scorrimento di flussi granulari su pendii inclinati. In questo capitolo è presentata una simulazione numerica MPM di propagazione di flusso granulare basata sulla geometria di un esperimento in scala eseguito in laboratorio da Mancarella e Hungr (2010). Sono dunque rispettate la stessa geometria e le stesse caratteristiche dei materiali. Infine è presentato un confronto tra i risultati numerici e i dati sperimentali.

L'obiettivo dell'esperimento consiste nel valutare alcuni parametri tra cui l'altezza di run-up (risalita) e la velocità del flusso granulare al variare dell'inclinazione di una barriera in contropendenza posta al termine del piano inclinato. Questi parametri sono rilevanti per la progettazione di una barriera di ritenuta per frane e colate detritiche come quella illustrata in Figura 26. La valutazione viene effettuata tramite il modello MPM ed il confronto con l'esperimento in scala offre un'indicazione della bontà del modello.



Figura 26: Barriera terminale presso Charles Creek, Vancouver

## 3.2 Descrizione test MPM

La simulazione numerica riproduce un evento di frana costituito da un flusso rapido che scorre su un pendio inclinato e termina infine contro una barriera protettiva inclinata. La prova simula l'esperimento di Mancarella e Hungr (2010) (Figura 28) ove un volume di sabbia asciutta viene posizionato di in un serbatoio posto in sommità ad un piano inclinato. Il piano inclinato è costituito da una canaletta in plexiglass con

inclinazione di  $29^\circ$  rispetto all'orizzontale. Il serbatoio viene istantaneamente aperto e rilascia tutto il materiale granulare. Il materiale scorre sul piano inclinato, raggiunge la velocità di avvicinamento di 2,39 m/s alla base della rampa (valore ricorrente in tutte le prove di Mancarella e Hungr), affronta una sezione curva di transizione posta alla base del piano e successivamente risale lungo una barriera inclinata in contropendenza rispetto al piano di discesa. Dopo aver raggiunto la massima altezza sulla barriera, detta altezza di run-up, il materiale granulare si deposita secondo geometrie differenti in base all'inclinazione della barriera stessa.

### 3.2.1 Geometria

Le caratteristiche geometriche sono riportate in Figura 27. Il serbatoio di sabbia prismatico triangolare ha base di 0,5m e altezza 0,3m. La lunghezza del tratto discendente, calcolata a partire dalla base del serbatoio, è di 1,14m e la proiezione sull'orizzontale risulta di 1m. L'angolo del tratto discendente è di  $29^\circ$  rispetto all'orizzontale. Il tratto di curvatura ha raggio 0,1m. Il tratto in contropendenza, definito come barriera, ha inclinazione variabile a seconda della prova tra  $7^\circ$ ,  $33^\circ$  e  $61^\circ$  rispetto all'orizzontale. La lunghezza di quest'ultimo dipende dall'inclinazione, ma non è influente sul risultato della prova giacché il massimo run-up determina sia la massima distanza curvilinea sia la massima altezza raggiunta dal materiale. La profondità assegnata al modello numerico è di 0,02m. Il problema è infatti schematizzabile con una modellazione bi-dimensionale ove la profondità non influisce sui risultati. Il software MPM lavora con 3 dimensioni quindi è stata scelta una profondità di 0,02m per limitare le operazioni richieste al software. Nell'esperimento in scala di Mancarella e Hungr è stata scelta invece una profondità di 0,35m necessaria ad istituire al centro della canaletta un moto bidimensionale dove eseguire le misurazioni, che non fosse influenzato dall'attrito laterale offerto dalle pareti in plexiglass. Lo spessore della canaletta è di 0,05m.

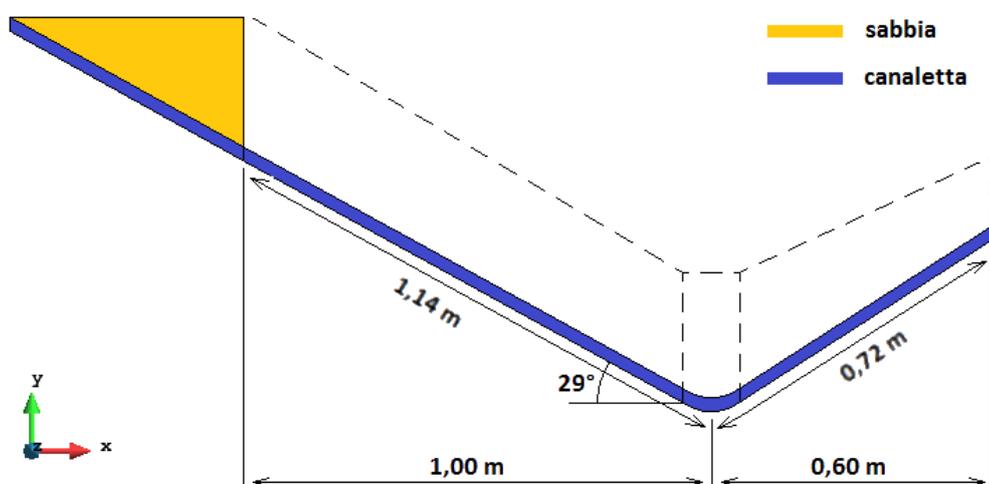


Figura 27: Geometria del modello MPM (inclinazione barriera  $33^\circ$ )

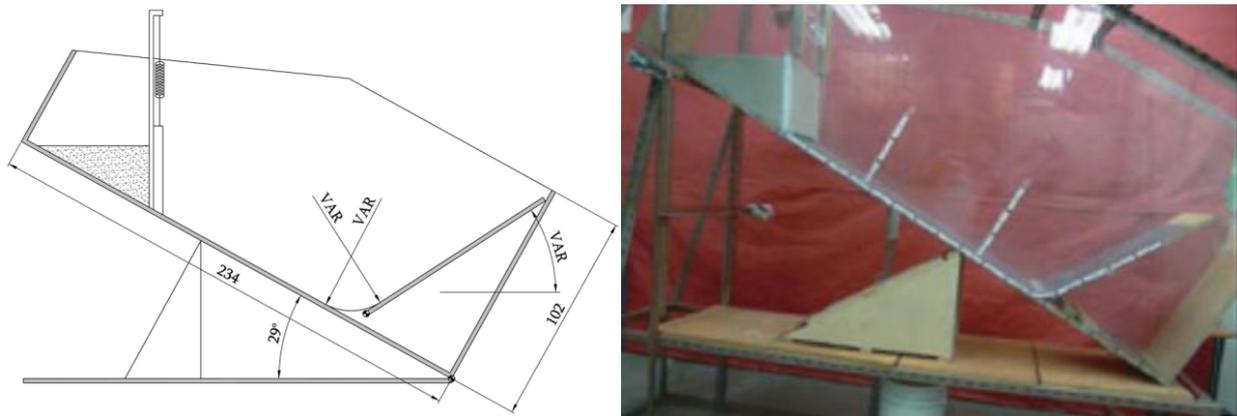


Figura 28: Schema geometrico e fotografia della canaletta dell'esperimento di Mancarella e Hungr (2010), dimensioni in cm

### 3.2.2 Materiali e parametri di input

I materiali del problema sono due: il terreno (sabbia) e la canaletta.

Il terreno è un materiale monofase con criterio di rottura di Mohr-Coulomb, possiede le caratteristiche illustrate in Tabella 1. Alcuni di questi parametri sono stati variati nelle successive analisi con il software MPM per valutare la loro influenza sull'esito dell'esperimento.

Tabella 1: Parametri del modello MPM

Materiale	Sabbia
Densità del solido $\rho$	2673 kg/m <sup>3</sup>
Porosità $n$	39 %
Angolo di attrito interno $\phi_i$	30,9°
Modulo di Young	500 kPa
Coefficiente di Poisson	0,2
Coefficiente di attrito di base $\mu$	0,40

La canaletta è modellata come materiale monofase con comportamento elastico-lineare. Sulla superficie di scorrimento viene impostato un angolo di attrito di base (ovvero all'interfaccia canaletta-terreno) di 21,7°, corrispondente ad un coefficiente di attrito  $\mu = 0,40$ . Questo parametro è oggetto delle successive analisi e risulta influenzare la maggior parte dei parametri di output del software MPM.

### 3.2.3 Condizioni di vincolo e di carico

La canaletta è vincolata ad incastro in tutte tre le direzioni sul lato inferiore. Le pareti laterali della canaletta sono simulate tramite elementi privi di spessore con condizione di vincolo sull'asse z (sulla profondità). Infine sono apposti vincoli ad incastro sui lati sinistro e destro del modello a bloccare lo scorrimento lungo la direzione del moto (asse x).

Lungo la superficie di scorrimento (parte superiore della canaletta) è imposta la condizione di nessun vincolo (libere tutte le tre direzioni), che rimane durante lo svolgimento della prova.

Nessun carico addizionale è assegnato, salvo il peso proprio del materiale granulare.

### 3.2.4 Mesh

La mesh non strutturata ad elementi tetraedrici lineari contiene 5307 elementi e 10884 nodi (Figura 29). La mesh è più raffinata presso la sezione di curvatura (zona di deposito del materiale) e lungo tutta la superficie di scorrimento.

Sono stati impostati i numeri di nodi presenti in ogni elemento sui volumi del problema. Il volume di terreno è stato impostato a 20 nodi per elemento tetraedrico, corrispondenti ai punti Gauss, mentre il volume della canaletta 1 nodo per elemento.

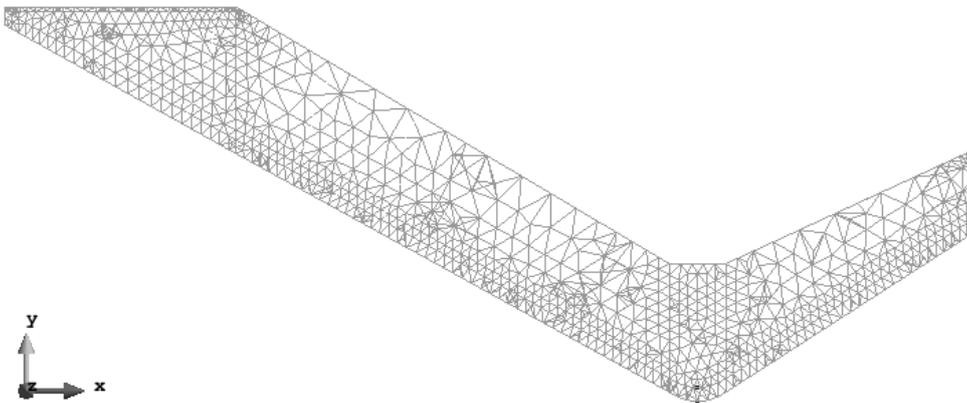


Figura 29: Vista frontale della mesh del modello MPM (inclinazione barriera 33°)

## 3.3 Risultati

### 3.3.1 Analisi parametrica

La fase successiva dell'indagine individua l'influenza che hanno i singoli parametri sui risultati del modello MPM. Per l'analisi il riferimento è la prova sperimentale di Mancarella – Hungr con inclinazione della barriera di 33°. Sono predisposti 15 test con variazioni dei seguenti parametri, uno per volta:

- coefficiente di attrito di base  $\mu$
- angolo di attrito interno  $\phi_i$
- coesione
- modulo di Young
- coefficiente di Poisson  $\nu$  (coeff. di contrazione trasversale)

Si definiscono le seguenti grandezze, indicate nella Figura 30, quali parametri di output del modello MPM:

- $H_e$  = altezza di massimo run-up, corrispondente alla distanza verticale dalla base del punto di curvatura alla sommità del fronte nell'istante di massimo run-up
- $v_0$  = velocità di discesa del fronte, calcolata parallelamente al piano di scorrimento appena prima della sezione di curvatura
- $D_f$  = lunghezza finale del percorso, calcolata lungo l'ascissa curvilinea, dal punto di partenza (punto più basso del serbatoio di sabbia) al punto più distante raggiunto dal deposito
- $H_f$  = altezza del deposito finale, calcolata verticalmente dalla base del punto di curvatura
- $L_d$  = lunghezza del deposito a monte della curvatura del fondo (lato sx)
- $\alpha_f$  = angolo del deposito a monte della curvatura calcolato rispetto all'orizzontale

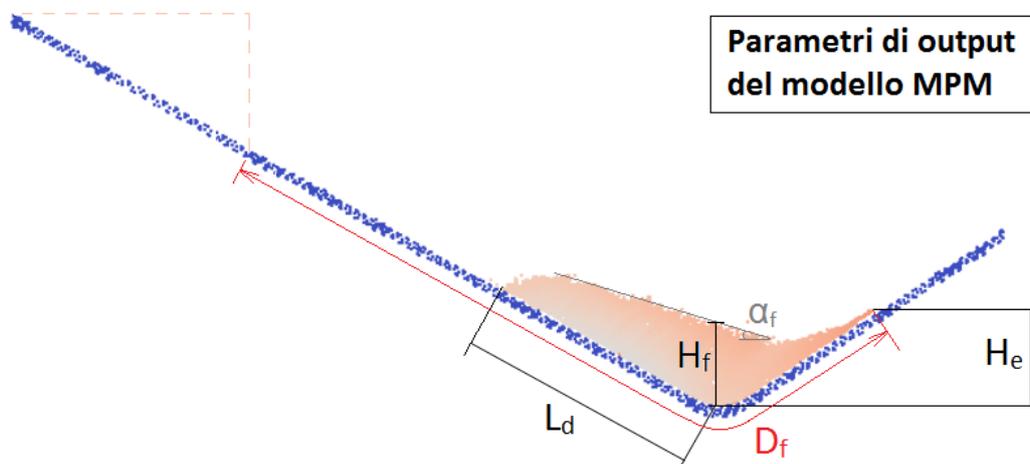


Figura 30: Parametri di output del modello MPM per la previsione del run-up

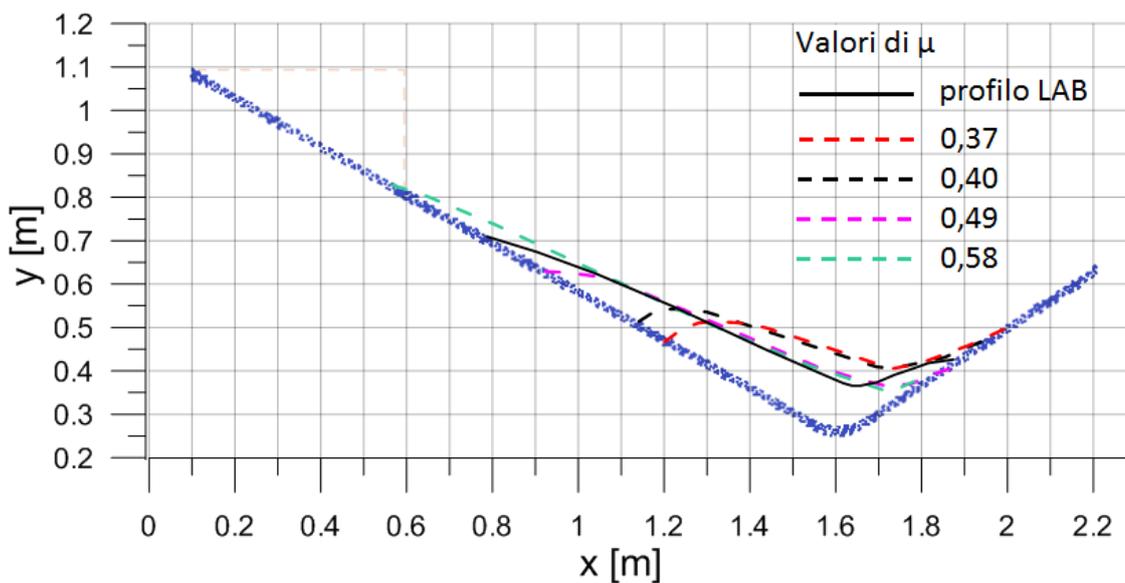
### 3.3.2 Influenza del coefficiente di attrito di base $\mu$

Il parametro Coefficiente di attrito di base  $\mu$  risulta influenzare in maniera proporzionale l'altezza del massimo run-up e quasi tutti i parametri di output. L'intervallo entro cui viene variato il coefficiente è 0,37-0,58 (Tabella 2).

**Tabella 2: Intervallo di variazione del parametro: Coefficiente di attrito di base  $\mu$**

COEFFICIENTE DI ATTRITO DI BASE	0,37	0,40	0,43	0,46	0,49	0,58

La Figura 31 rappresenta i depositi finali ottenuti con i differenti valori di  $\mu$ . Si nota come crescendo il coefficiente d'attrito  $\mu$  diminuisca l'altezza di run-up e aumenti la lunghezza del deposito a monte della curvatura  $L_d$ . L'assunzione di un coefficiente  $\mu$  compreso tra 0,49 e 0,58 comporterebbe una modellazione più fedele della forma del deposito a monte della curvatura, ma provocherebbe una sottostima dell'altezza di run-up e una concomitante errata previsione dello spessore del deposito a valle della curvatura (nel tratto di risalita). Per contro l'assunzione di coefficienti prossimi a quello reale 0,37-0,40 provocano una netta sottostima della lunghezza del deposito ma una sovrastima dell'altezza di run-up.



**Figura 31: Forma finale del deposito al variare del parametro  $\mu$**

I grafici (Figura 32) mostrano le relazioni tra il coefficiente  $\mu$  e i parametri di output. Si nota che, nell'intorno del reale coefficiente di attrito, c'è una dipendenza quasi lineare in tutti i parametri misurati come lunghezze:  $H_e$ ,  $D_f$ ,  $H_f$  mostrano una forte correlazione tra loro e sono decrescenti all'aumentare del coefficiente di attrito  $\mu$ . Allo stesso modo sussiste logicamente una dipendenza crescente tra  $L_d$  e il coefficiente  $\mu$ . In particolare la variazione della lunghezza di deposito a monte  $L_d$  si attesta intorno a 0,70 m, rendendo  $L_d$  il parametro maggiormente influenzato dal coefficiente di attrito di base.

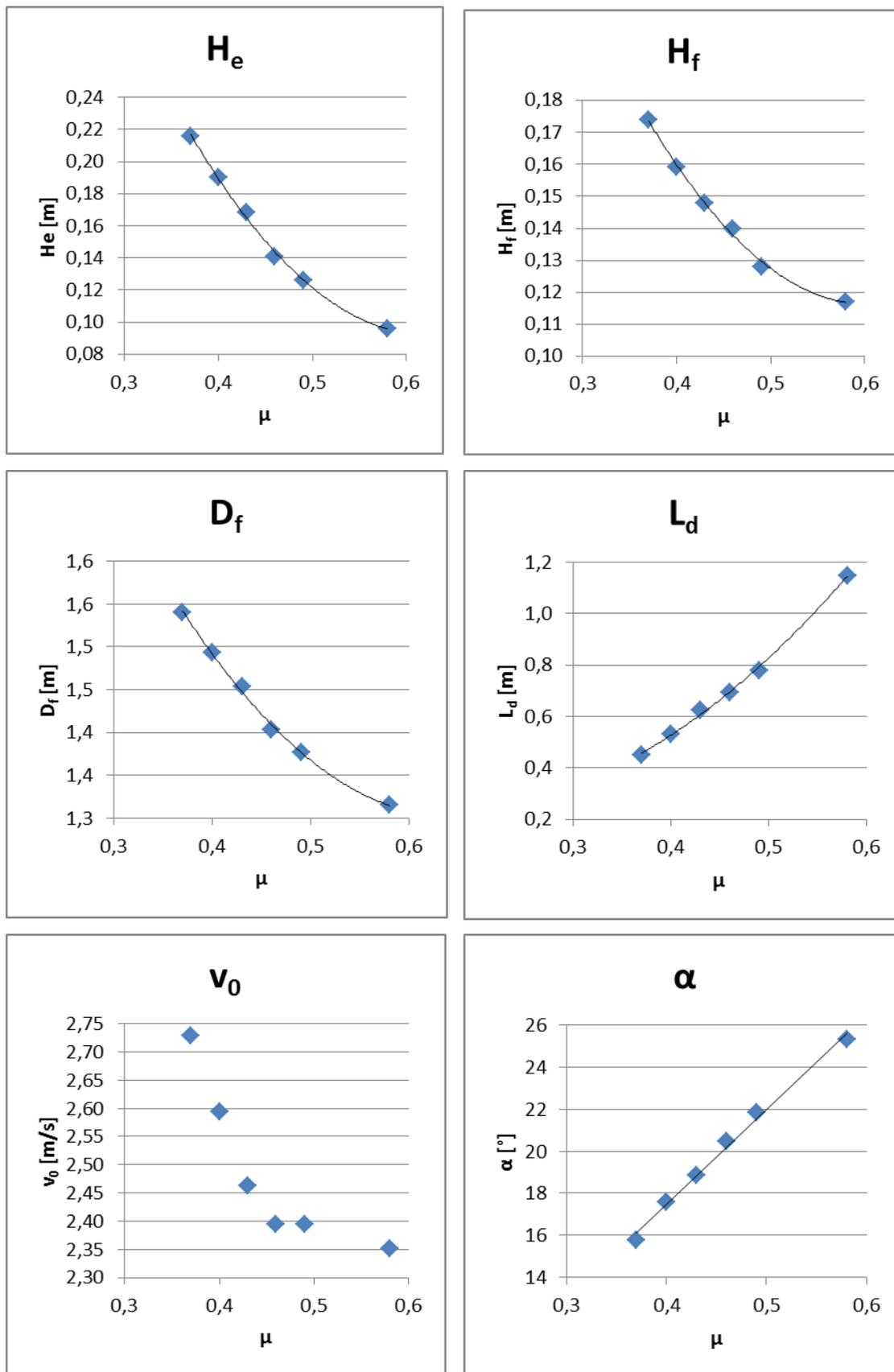


Figura 32: Relazioni tra  $\mu$  e i parametri di output

Il parametro  $v_0$  risulta decrescente all'aumentare del coefficiente di attrito  $\mu$ . La forma della dipendenza non è chiara, probabilmente anche a causa dell'imprecisione nella valutazione della velocità calcolata come

media di velocità di più particelle presenti nel fronte, ma è evidente che sopra un determinato valore di  $\mu$  ( $\mu = 0,46$ ) la velocità di avvicinamento decresce drasticamente.

L'angolo del deposito a monte  $\alpha_f$  è in dipendenza lineare crescente con il coefficiente di attrito  $\mu$ .

### 3.3.3 Influenza dell'angolo di attrito interno $\phi_i$

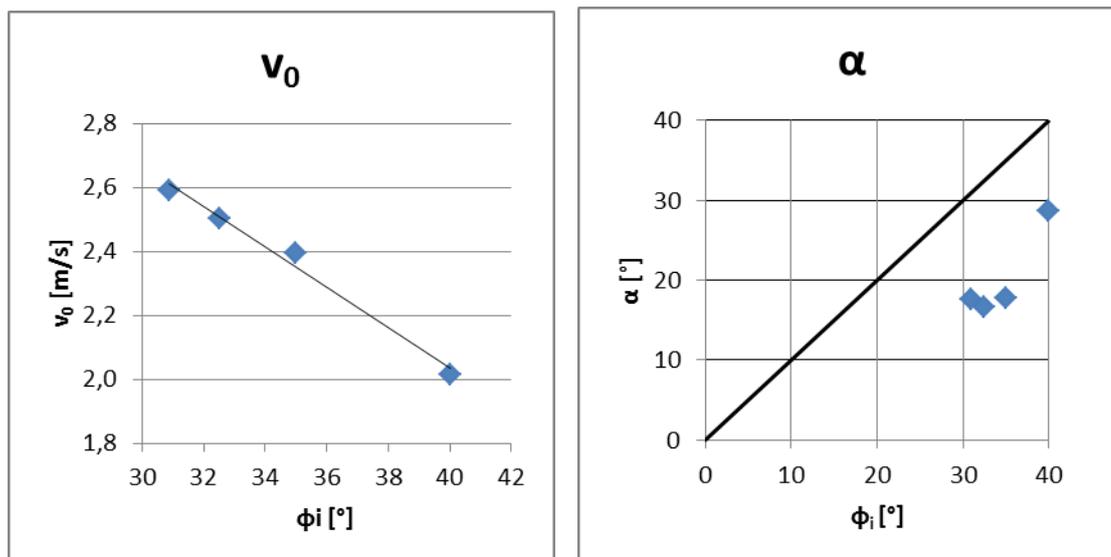
L'intervallo di variazione dell'angolo di attrito interno è il seguente:

**Tabella 3: Intervallo di variazione del parametro: Angolo di attrito interno  $\phi_i$**

ANGOLO DI ATTRITO INTERNO	30,9°	32,5°	35,0°	40,0°

L'angolo di attrito interno influisce proporzionalmente su  $v_0$ . La dipendenza è di tipo lineare decrescente, infatti un elevato angolo di attrito comporta una velocità di avanzamento ridotta. La diminuzione di velocità è consistente e si attesta intorno al 6% per ogni grado in più dell'angolo di attrito interno. Gli altri parametri di output non risultano dipendenti da  $\phi_i$ .

Dal secondo grafico (Figura 33) si nota come l'angolo del deposito a monte della curvatura  $\alpha$  sia sempre inferiore all'angolo di attrito interno  $\phi_i$ . La spiegazione è attribuibile alle condizioni dinamiche in cui si trova il materiale, che non ne permettono una deposizione naturale, come avviene per la misura dell'angolo di riposo (o di natural declivio). La retta inclinata a 45° sul grafico  $\alpha - \phi_i$  indica la corrispondenza tra i due angoli, come ritenuto finora secondo letteratura.



**Figura 33: Relazioni tra  $\phi_i$  e i parametri di output**

### 3.3.4 Influenza della coesione

L'intervallo di variazione della coesione è il seguente:

Tabella 4: Intervallo di variazione del parametro: Coesione

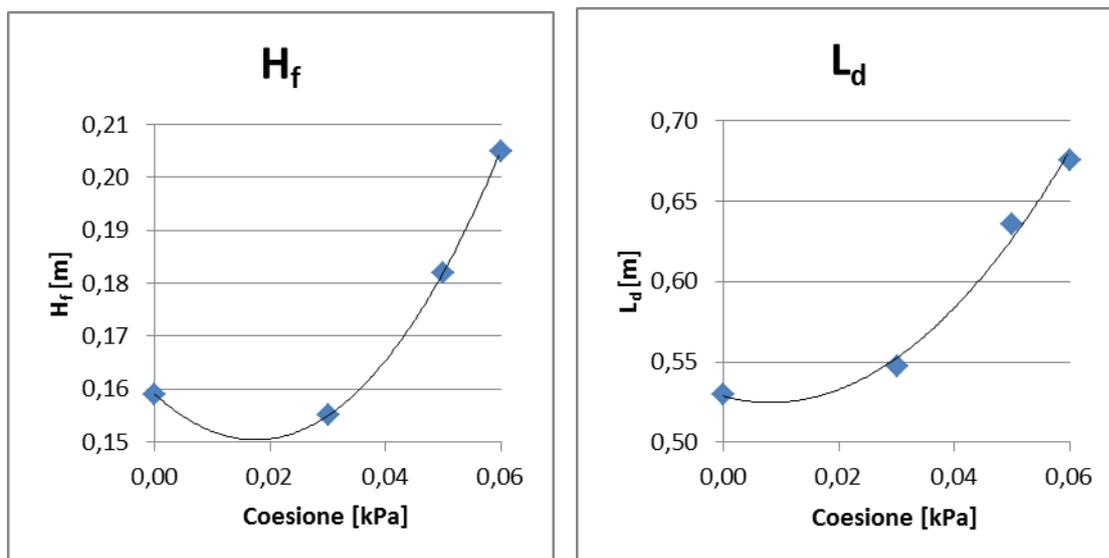
COESIONE	0,00 kPa	0,03 kPa	0,05 kPa	0,06 kPa

Visto l'esiguo numero di prove non è possibile avere la certezza di quale tipo di relazioni esistano con il parametro coesione. Un test eseguito con coesione pari a 0,07 kPa dimostra che il materiale granulare non riesce a scivolare completamente verso il fondo, bloccando il deposito lungo la rampa di discesa. Per questo motivo le prove sono state eseguite con valori inferiori a 0,07 kPa.

Il parametro coesione non influenza l'altezza di run-up, né la lunghezza finale del percorso  $D_f$ , che è correlata alla precedente. Sono invece fortemente influenzate  $H_f$  e  $L_d$  che risultano pressoché crescenti a partire dal valore di coesione di 0,02 kPa. L'altezza di deposito dal fondo della curvatura  $H_f$  aumenta di circa 5 cm (incremento del 30%) crescendo la coesione fino a 0,06 kPa.

La velocità di avvicinamento  $v_0$  si riduce già con piccoli valori di coesione. Con un valore di coesione di 0,03 kPa la velocità risulta inferiore a 2,00 m/s contro 2,60 m/s della prova senza coesione, equivalente a una riduzione di velocità superiore al 20%. Incrementando la coesione oltre 0,03 kPa la velocità si assesta intorno a 2,00 m/s.

L'analisi dell'inclinazione del deposito  $\alpha_f$  non denota una relazione chiara con la coesione. L'incremento di  $\alpha_f$  con valori bassi di coesione può essere causato dal rafforzamento che la coesione provoca all'effetto naturale di attrito dovuto all'angolo di attrito interno. La successiva diminuzione di inclinazione  $\alpha_f$  con coesione superiore a 0,03 kPa, che è legata all'incremento di altezza del deposito  $H_f$ , potrebbe essere dovuta alla ridotta velocità  $v_0$  che permette un deposito con pendenza meno accentuata.



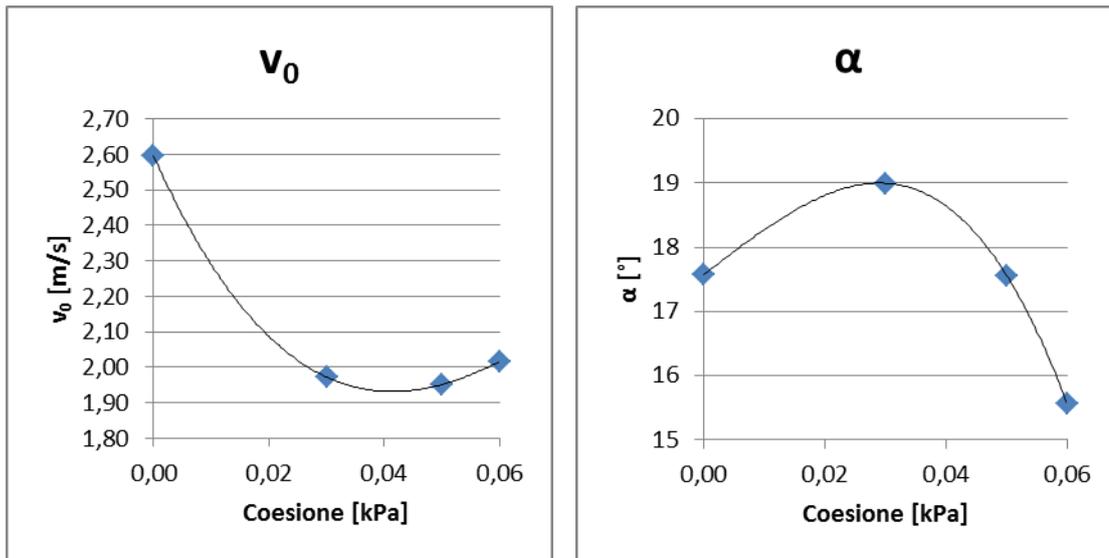


Figura 34: Relazioni tra la coesione e i parametri di output

### 3.3.5 Influenza del modulo di Young e del coefficiente di Poisson

La variazione del modulo di Young non comporta alcuna differenza nei risultati della modellazione MPM. I valori sottoposti ad analisi sono:

MODULO DI YOUNG	1 kPa	50 kPa	500 kPa	1000 kPa	3000 kPa
-----------------	-------	--------	---------	----------	----------

Allo stesso modo avviene con la variazione del coefficiente di Poisson:

COEFFICIENTE DI POISSON	0,20	0,30	0,35
-------------------------	------	------	------

## 3.4 Confronto dei risultati con il test sperimentale (Mancarella e Hungr, 2010)

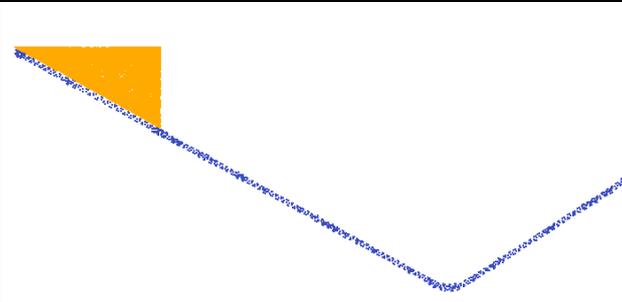
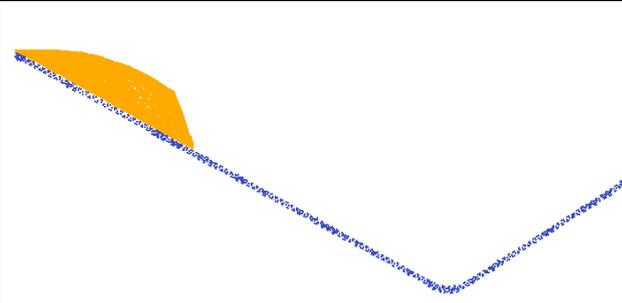
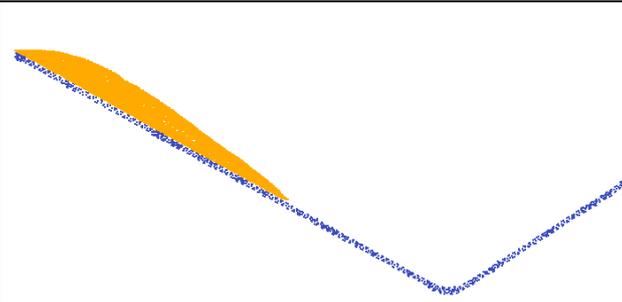
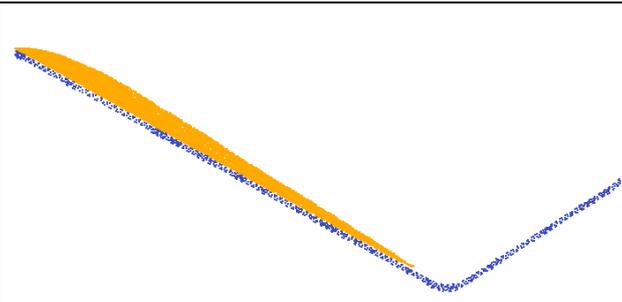
### 3.4.1 Confronto step per step modello MPM – prova in laboratorio, inclinazione barriera 33°

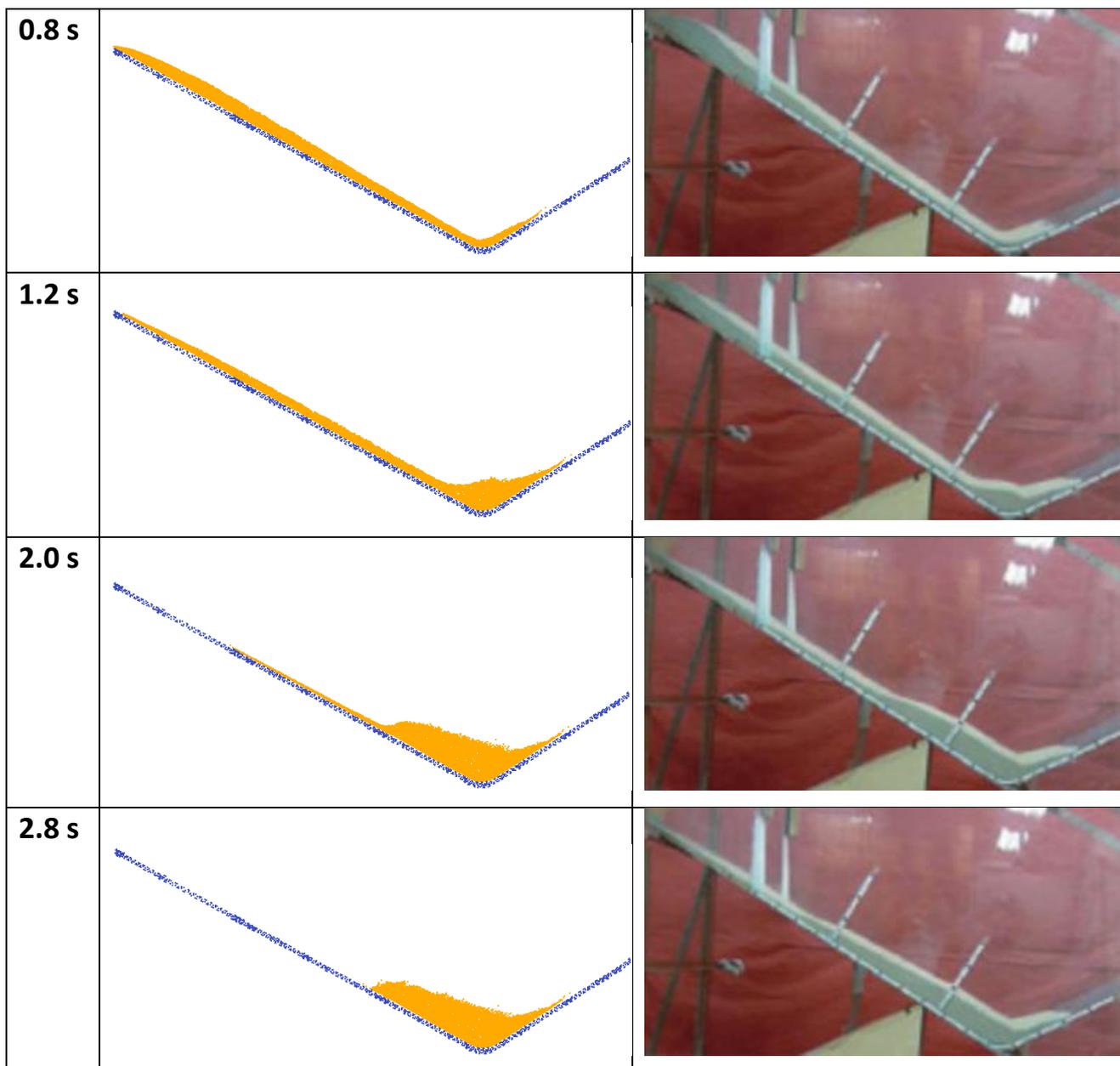
La prima analisi riguarda una prova con il software MPM eseguita con gli stessi parametri ricavati da Mancarella – Hungr per la prova sperimentale (Tabella 5). L'inclinazione della barriera con la quale si effettua il paragone è di 33° rispetto all'orizzontale. L'obiettivo è confrontare visivamente l'evoluzione del fenomeno modellato con il software MPM con l'evoluzione dell'esperimento di laboratorio. A tale scopo vengono affiancate le immagini ad intervalli di tempo regolari di 0,2 o 0,4 o 0,8 secondi (Tabella 6).

**Tabella 5: Parametri per paragone step per step MPM - LAB**

Materiale	Sabbia
Densità del solido $\rho$	2673 kg/m <sup>3</sup>
Porosità $n$	39 %
Angolo di attrito interno $\phi_i$	30,9°
Modulo di Young	500 kPa
Coefficiente di Poisson	0,2
Coefficiente di attrito di base $\mu$	0,40
Inclinazione rampa di discesa	29°
Inclinazione barriera	33°

**Tabella 6: Confronto step per step modello MPM e prova di laboratorio (inclinazione barriera 33°)**

<b>0.0 s</b>		
<b>0.2 s</b>		
<b>0.4 s</b>		
<b>0.6 s</b>		



Si può osservare che la modellazione con i parametri scelti riproduce correttamente l'evoluzione del fenomeno fino al raggiungimento del massimo run-up, ovvero a 1,2 secondi dall'inizio della prova. Le fasi successive in cui il materiale si accumula presso la sezione di curvatura e quindi la forma finale del deposito non sono coerenti. Il deposito della prova in scala è molto allungato, mentre nella simulazione è compatto e di spessore più elevato. Si nota che il modello non dissipa sufficiente energia durante l'urto e il deposito, nonostante l'inclinazione sia soltanto di 33°.

La durata temporale complessiva del fenomeno e delle varie fasi è invece rispettata.

### 3.4.2 Avanzamento del fronte vs Tempo, Velocità del fronte vs Tempo

Si analizza l'avanzamento del fronte del materiale in funzione del tempo. Il confronto è eseguito tra il modello MPM e i risultati di laboratorio di Mancarella – Hungr sulla prova con inclinazione della barriera di 33°. Il rilievo dell'avanzamento del fronte nel output del software MPM è effettuato ogni 0,2 secondi mediando aritmeticamente le coordinate di posizione globale delle prime 20 particelle (Figura 35). La media è necessaria per eliminare l'errore che sarebbe commesso selezionando esclusivamente la prima particella che risulta "sfuggente" e non rappresentativa della posizione del fronte. Nell'esperimento in laboratorio il rilievo è effettuato ogni 0,2 secondi tramite una striscia centimetrica posizionata lungo l'ascissa curvilinea che segue il profilo della canaletta. L'errore commesso è +/- 1 cm.

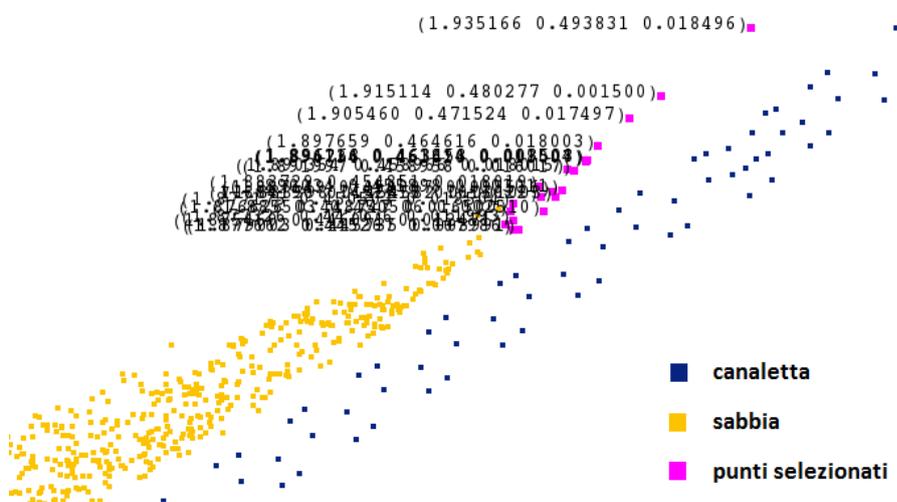


Figura 35: Fronte in avanzamento: particelle selezionate per eseguire la media delle posizioni e delle velocità

Allo stesso modo è misurata la velocità istantanea dal file di output del software MPM mediando aritmeticamente i moduli dei vettori velocità delle prime 20 particelle del fronte. Al fine di valutare la correttezza di questo procedimento di media tra proprietà delle particelle, viene calcolata anche la velocità media come rapporto tra l'incremento spaziale e l'incremento temporale tra due step successivi. I due metodi per ricavare la velocità del fronte dal software MPM producono risultati analoghi.

Il grafico in Figura 36 mostra l'avanzamento del fronte calcolato dal software MPM e misurato in laboratorio. Si nota come il modello sovrastimi leggermente la distanza a partire da  $t=0,5s$  per un valore che raggiunge al massimo 0,05m in corrispondenza dello step 1,0s (fronte fermo). La sovrastima dell'avanzamento implica anche la sovrastima dell'altezza di run-up, essendo le due misure direttamente proporzionali.

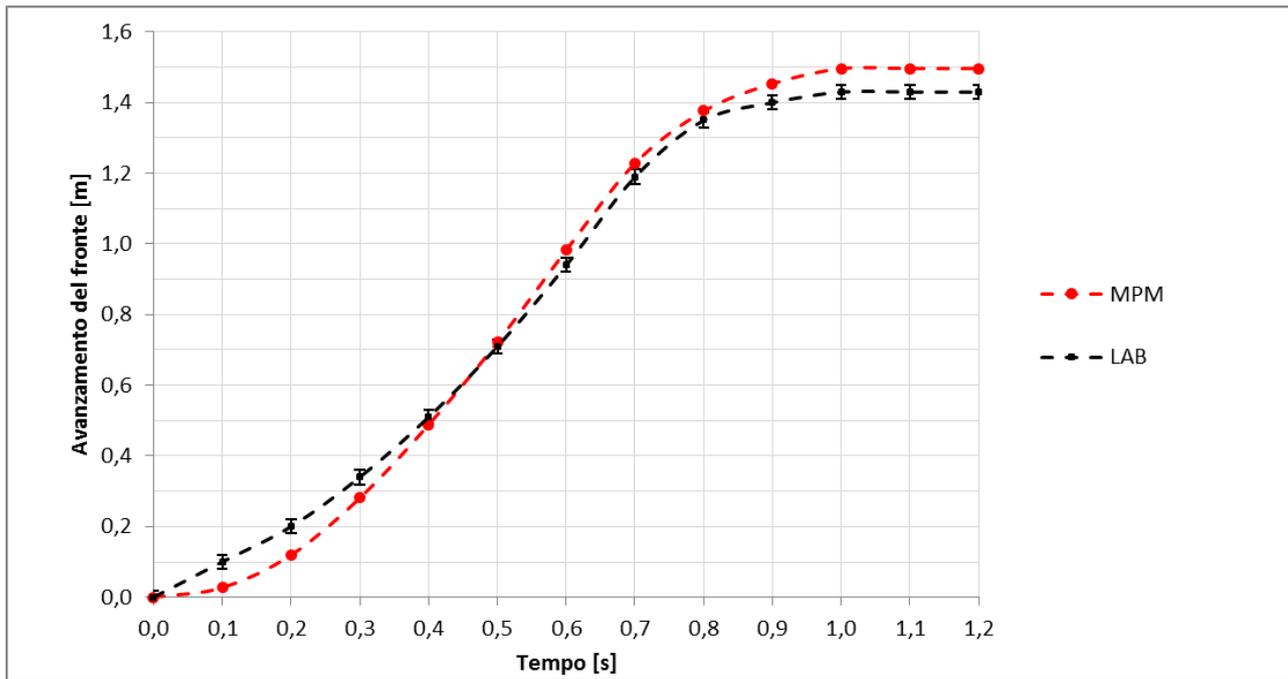


Figura 36: Grafico Avanzamento del fronte vs Tempo, errore misura LAB +/- 0,01m

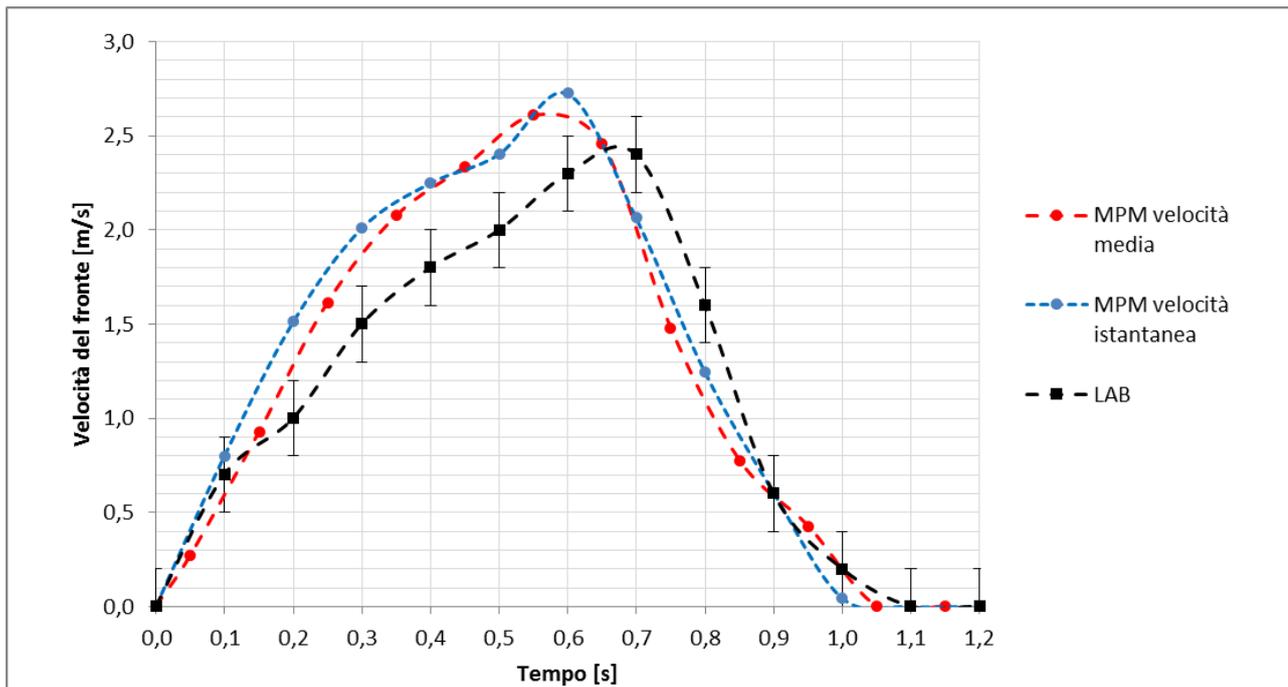


Figura 37: Grafico Velocità del fronte vs Tempo, errore misura LAB +/- 0.2m/s

Il modello MPM sovrastima anche la velocità di avanzamento del fronte nelle fasi di avvicinamento alla sezione di curvatura (Figura 37). La massima sovrastima della velocità equivale a +0,40m/s rilevata nel tratto discendente della rampa tra  $t=0,4s$  e  $t=0,6s$ . La decelerazione relativa al tratto in risalita è invece riprodotta correttamente, infatti la pendenza nel grafico è simile, ma è presente uno sfasamento temporale evidenziato anche dal picco di velocità che avviene a  $t=0,6s$  secondo il modello MPM mentre a  $t=0,7s$  nel esperimento in laboratorio.

L'eccesso di velocità e lo sfasamento temporale concorrono a giustificare l'ipotesi, discussa nei paragrafi successivi, di insufficiente dissipazione energetica del modello MPM.

### 3.4.3 Confronto ad inclinazione della barriera di 7°, 33°, 61° del deposito finale e del massimo run up

Un'analisi importante riguarda il confronto della forma del deposito finale e della fase di massimo run-up. Le prove sono eseguite con i parametri ricavati da Mancarella – Hungr nell'esperimento in laboratorio (Tabella 7).

**Tabella 7: Parametri per il confronto MPM-LAB ad inclinazione della barriera di 7°, 33°, 61°**

Materiale		Sabbia
Densità del solido	$\rho$	2673 kg/m <sup>3</sup>
Porosità	$n$	39 %
Angolo di attrito interno	$\phi_i$	30,9°
Modulo di Young	$E$	500 kPa
Coefficiente di Poisson	$\nu$	0,2
Coefficiente di attrito di base	$\mu$	0,40
Inclinazione rampa di discesa	$\alpha$	29°
Inclinazione barriera	$\theta$	7°, 33°, 61°

I confronti sulla forma e disposizione del deposito finale mostrano delle differenze tra modello MPM e prova in laboratorio: per tutte le inclinazione della barriera il deposito risulta più compatto di quanto avviene realmente; mentre l'evoluzione del fenomeno fino al massimo run-up è pressoché identica sia nella forma che nel tempo di max run-up (come evidenziato dal confronto diretto MPM-LAB step per step nella prova a 33°).

L'incoerenza sulla forma finale del deposito si suppone sia dovuta all'insufficiente dissipazione di energia nel modello MPM. Quest'ipotesi è avallata sia da un confronto visivo sul volume di materiale mancante nella coda del deposito (porzione a monte della curvatura) che risulta accumulato invece a valle della curvatura, sia dalla velocità di avvicinamento  $v_0$  che risulta superiore a quanto misurato in laboratorio. La maggiore energia cinetica posseduta dal flusso prima della curvatura e la scarsa dissipazione nella fase di deposito (dopo il massimo run-up) provocano la differenza di forma che si può notare nelle figure: Figura 38, Figura 39, Figura 40, Figura 41, Figura 42, Figura 43.

La forma assunta dal volume di materiale in movimento nel momento di massimo run-up è somigliante tra modello MPM e prova di laboratorio. La stima dello spessore del flusso risulta buona in tutti i punti del

percorso, sebbene si possa rilevare la sovrastima dell'avanzamento finale del fronte che corrisponde alla sovrastima dell'altezza di run-up sulla barriera.

La spiegazione plausibile delle discrepanze può risiedere nel modello costitutivo/di rottura del terreno utilizzato dal software MPM. Il modello di rottura di Mohr-Coulomb, essendo un modello frizionale, riproduce correttamente lo scorrimento sulla rampa di discesa, ma trascura le dissipazioni energetiche causate dagli urti tra i grani di materiale, che necessariamente avvengono in un processo dinamico come quello in esame, in particolare nella fase di urto e deposizione del materiale. Il comportamento reale di un flusso di materiale granulare è contemporaneamente frizionale e collisionale. Gli urti tra le particelle disperdono energia e rallentano il flusso, provocando una minore risalita sulla barriera e un deposito distribuito in lunghezza anziché accumulato nella sezione di curvatura.

Barriera inclinata a 7°: confronto tra i profili di massimo run-up (Figura 38) e finale (Figura 39) determinati in laboratorio (nero) e i profili calcolati tramite software MPM (colore).

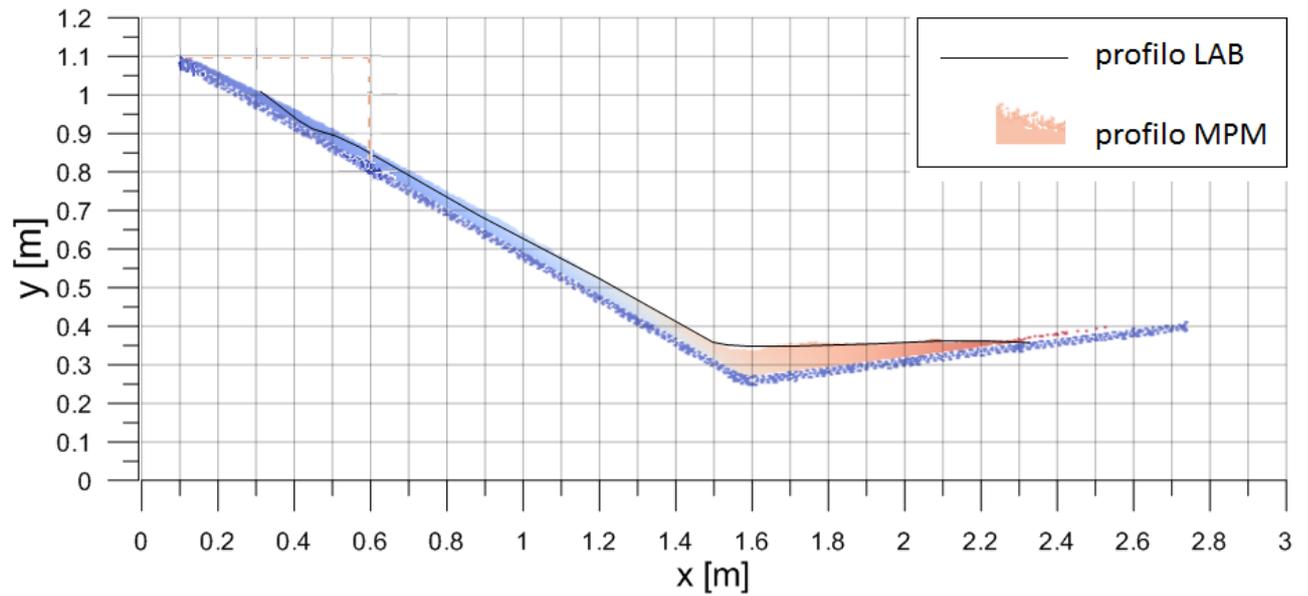


Figura 38: Profilo di massimo run-up (inclinazione barriera 7°)

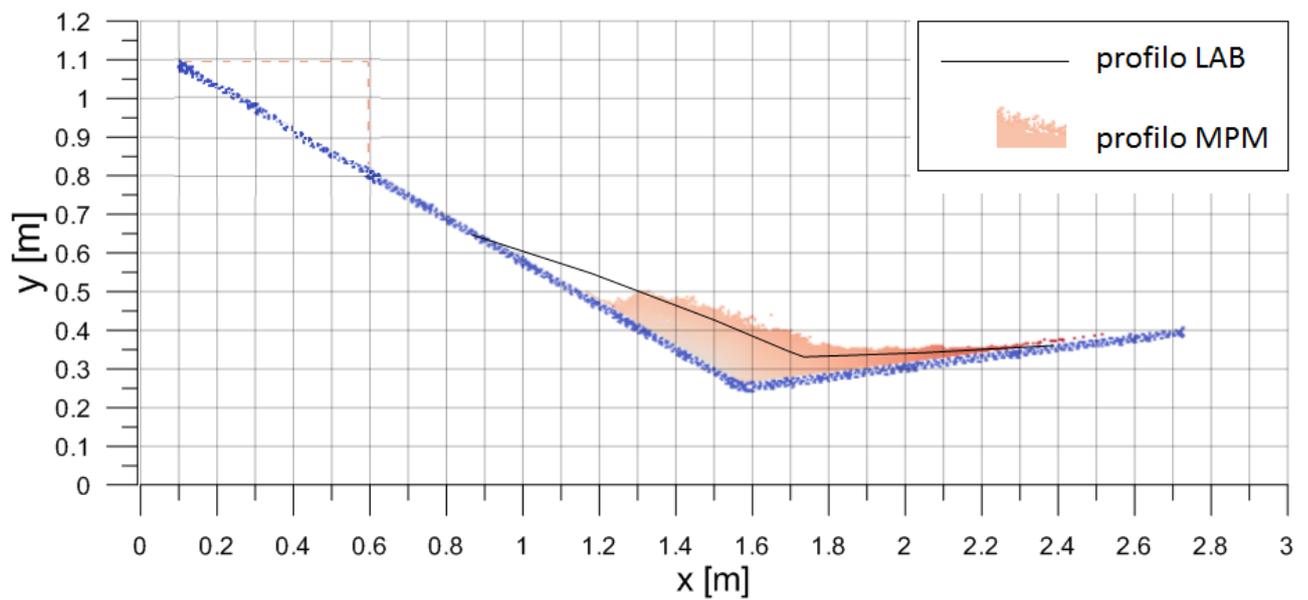


Figura 39: Profilo finale (inclinazione barriera 7°)

Barriera inclinata a 33°: confronto tra il profilo di massimo run-up (Figura 40) e finale (Figura 41) determinati in laboratorio (nero) e i profili calcolati tramite software MPM (colore).

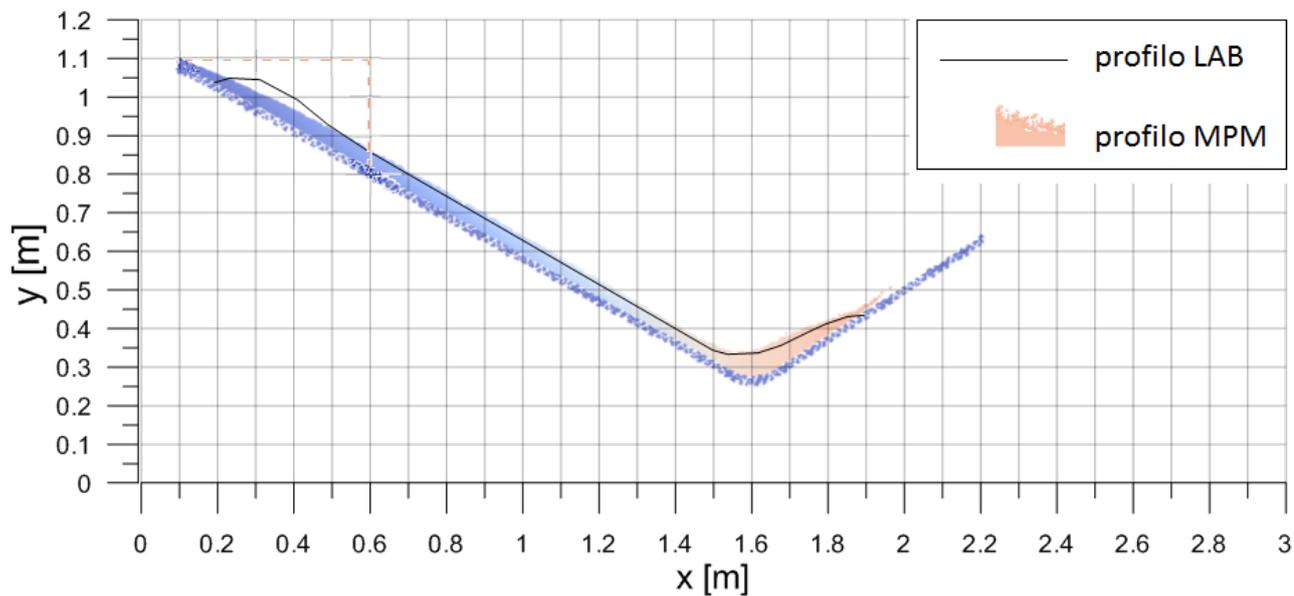


Figura 40: Profilo di massimo run-up (inclinazione barriera 33°)

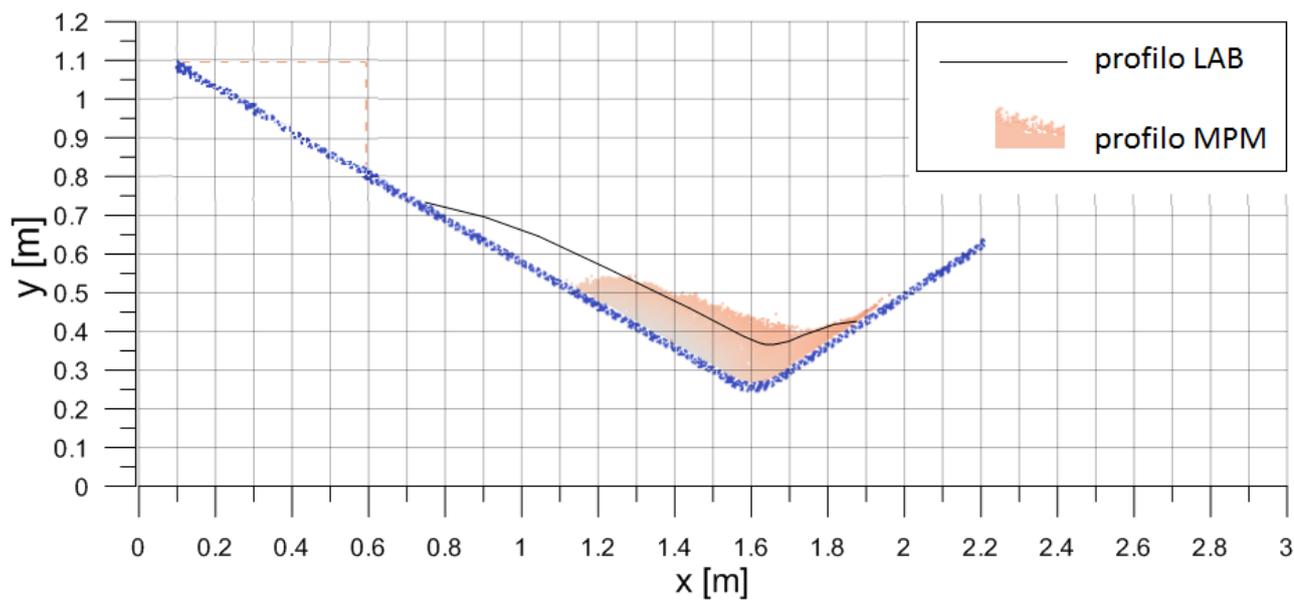


Figura 41: Profilo finale (inclinazione barriera 33°)

Barriera inclinata a 61°: confronto tra il profilo di massimo run-up (Figura 42) e finale (Figura 43) determinati in laboratorio (nero) e i profili calcolati tramite software MPM (colore).

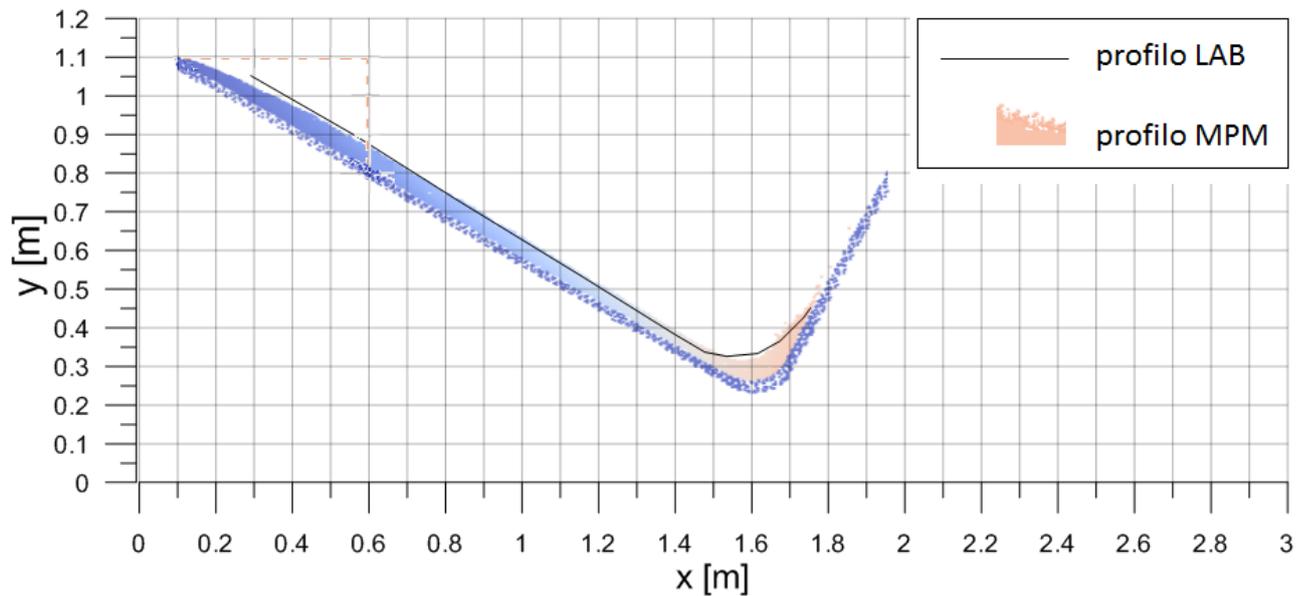


Figura 42: Profilo di massimo run-up (inclinazione barriera 61°)

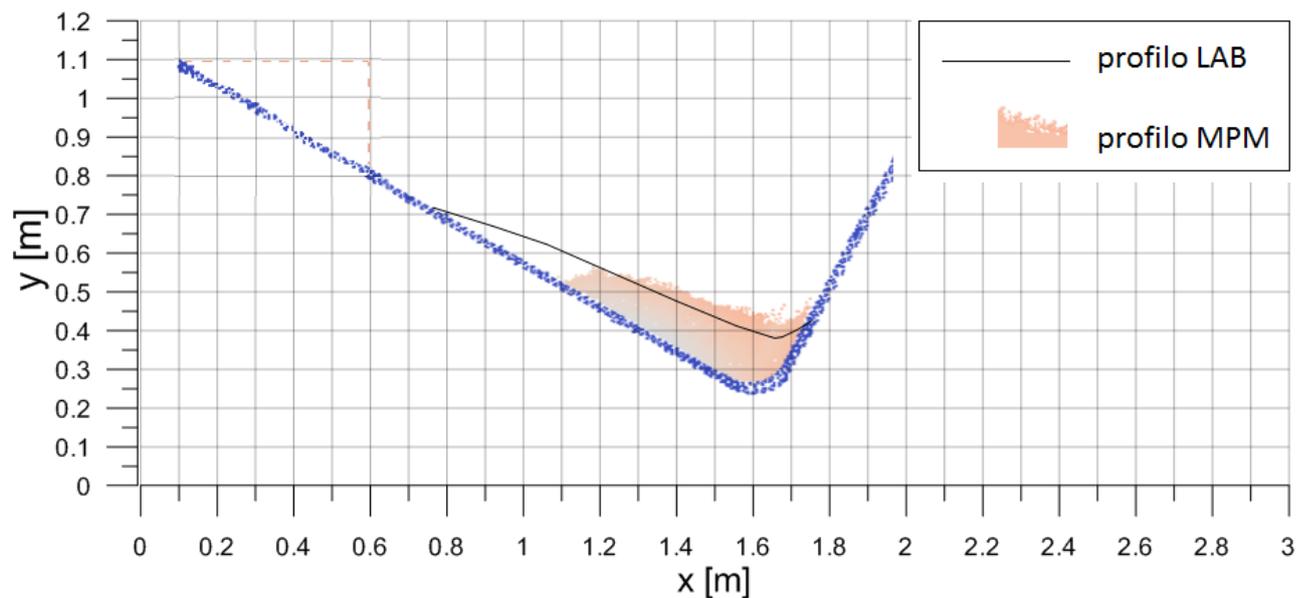


Figura 43: Profilo finale (inclinazione barriera 61°)

Con i dati raccolti, mostrati nelle figure precedenti, si esegue un confronto dell'altezza di massimo run-up ( $H_e$ ) calcolata tramite MPM con i risultati sperimentali, con la modellazione numerica DAN di Mancarella-Hungr e con le soluzioni analitiche secondo l'equazione di Voellmy.

Il modello DAN (Lagrangian shallow flow dynamic analysis model) è stato sviluppato da Hungr (1995) sulla base dell'algoritmo SH (Savage e Hutter, 1989). Le equazioni differenziali sono state derivate in forma

tridimensionale da McDougall (2006). La derivazione dettagliata delle equazioni in forma monodimensionale utilizzate nel software DAN da Mancarella e Hungr è contenuta in Mancarella e Hungr (2010). L'equazione di Voellmy (1955) è basata sulla conservazione dell'energia meccanica tra la sezione di curvatura e quella di massimo run-up. Si utilizza per stimare l'altezza di massimo run-up con soli tre parametri: la velocità di avvicinamento ( $v_0$ ), l'inclinazione della barriera ( $\theta$ ) rispetto all'orizzontale e il coefficiente di attrito di base ( $\mu$ ). Essendo disponibili le misure sperimentali ricavate da Mancarella-Hungr, è possibile calcolare  $H_e$  anche con la semplice formula di Voellmy:

$$H_e = \frac{v_0^2 |\sin \theta|}{2g(\mu \cos \theta - \sin \theta)}$$

Il confronto delle altezze di run-up evidenzia un accordo tra le varie stime quando l'inclinazione della barriera è bassa (7° e 13°). All'aumentare dell'inclinazione i modelli numerici MPM e DAN sovrastimano l'altezza  $H_e$  di circa 0,05m. La sovrastima ottenuta dal modello MPM ad elevati angoli della barriera è consistente, sebbene sia in accordo con i risultati del software con modellazione DAN e sia a favore di sicurezza. La simulazione in laboratorio mostra invece come incrementando l'inclinazione della barriera oltre i 22° l'influenza sull'altezza  $H_e$  sia limitata. Le modellazioni numeriche prevedono meglio l'altezza  $H_e$  ad elevate inclinazioni della barriera (61°), riportando la sovrastima rispetto alla prova di laboratorio a circa 0,04m. L'equazione di Voellmy risulta efficace solamente con le inclinazioni della barriera poco accentuate, inferiori a 33°, in cui le dissipazioni energetiche nella sezione curva di transizione sono limitate.

Il paragone effettuato con le inclinazioni della barriera a 7°, 13°, 22°, 33°, 45°, 61° (per interpolazione laddove non eseguite le simulazioni numeriche) è rappresentato nel grafico in Figura 44.

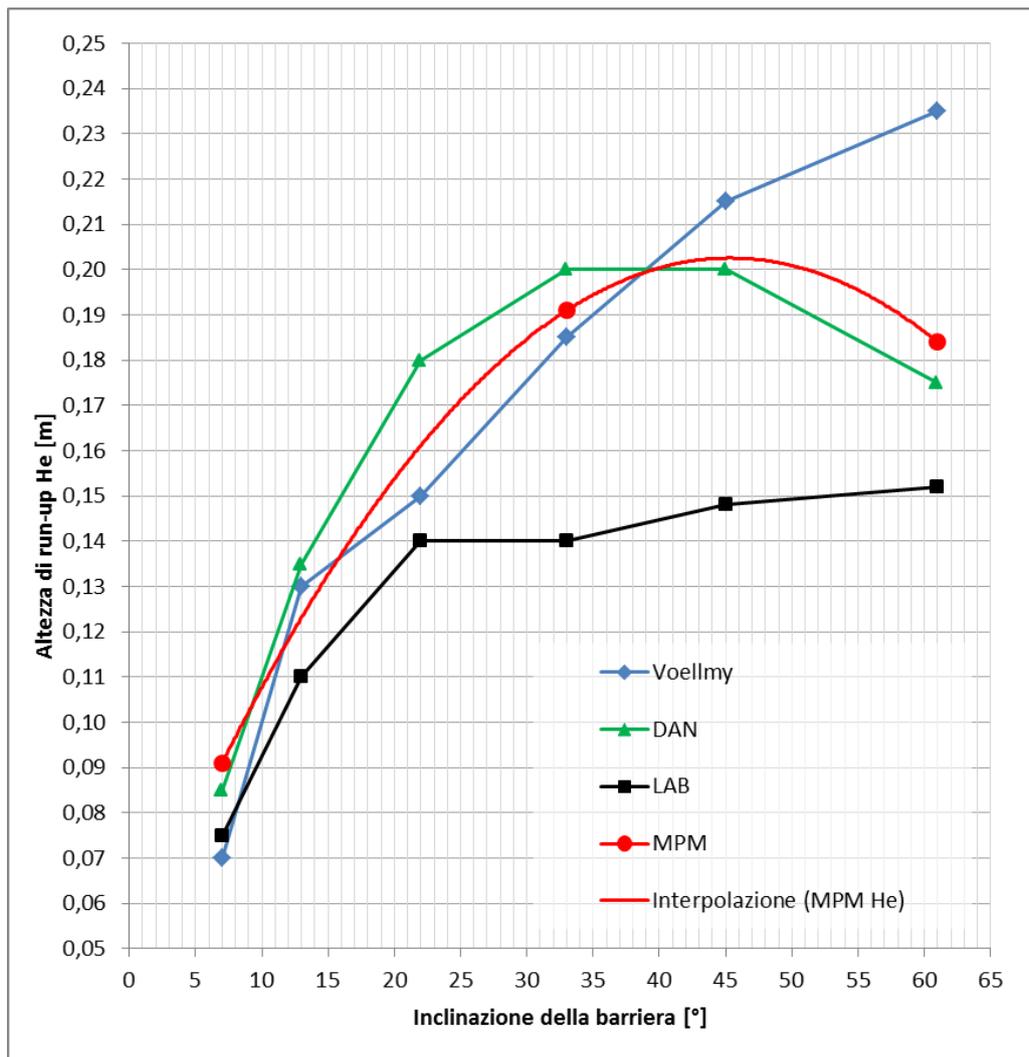


Figura 44: Confronto dell'altezza di run-up tra i diversi modelli

### 3.5 Conclusioni

Il modello MPM non dissipa sufficiente energia durante l'urto e il deposito, nemmeno quando l'inclinazione è soltanto di 33°. In quest'ultimo caso però il divario con i dati sperimentali è ridotto, quindi la modellazione MPM dà buon accordo per le basse inclinazioni ed è più indicata per le previsioni della lunghezza di run-out (con piano orizzontale) piuttosto che per la stima dell'altezza di run-up.

La velocità del flusso e l'altezza di run-up sono sovrastimate in tutti i casi analizzati. Nonostante ciò la durata temporale complessiva del fenomeno e delle varie fasi è invece rispettata e la previsione dell'avanzamento del fronte è in perfetta coerenza con i dati sperimentali.

Anche la simulazione del flusso (posizione e forma) durante la discesa sulla rampa è in accordo con l'esperimento in scala.

Il modello MPM risulta confrontabile con gli altri metodi sia numerici che analitici, in particolare produce risultati simili al modello DAN. Entrambi sovrastimano l'altezza di run-up di un aliquota variabile tra il 10% e il 30% con i risultati migliori con le basse inclinazioni. La sovrastima in fase progettuale è sicuramente a favore di sicurezza.

Per ottenere risultati ancora più precisi, uno sviluppo futuro da implementare nel MPM è l'estensione del modello elasto-plastico di Mohr-Coulomb includendo il comportamento Strain-Softening (rammollente con le deformazioni). Esso permette di diminuire l'angolo di attrito, la coesione e l'angolo di dilatanza con l'accumulo di deformazione tangenziale plastica. La riduzione della resistenza e della dilatanza permette al materiale modellato di ammorbidire.

Un altro sviluppo per migliorare la modellazione costitutiva del materiale è l'introduzione del modello Nor-Sand (Fern e Soga, 2016).

Le simulazioni con il modello Mohr-Coulomb prevedono distanze di run-out analoghe per sabbie sciolte e dense. Al contrario, le simulazioni con Nor-Sand prevedono diverse distanze di run-out. Questa differenza nelle previsioni può essere spiegata considerando il meccanismo di dissipazione di energia. Mohr-Coulomb prevede un materiale rigido scorrevole che dissipa energia per contatto frizionale lungo le superfici di rottura e alla base. Il materiale mostra limitata deformazione e, quindi, dissipa poca energia. Inoltre la fase di indurimento (hardening-phase) è modellata come elastica e non comporta dissipazione di energia.

Il modello Nor-Sand simula un materiale morbido scorrevole in cui avviene una considerevole deformazione di taglio. Pertanto l'energia è dissipata lungo la superficie di rottura primaria, alla base e dentro il materiale. Inoltre il modello Nor-Sand permette alla deformazione plastica di avvenire durante la fase di indurimento, dove l'energia è dissipata. Le differenze tra Mohr-Coulomb e Nor-Sand sono in gran parte dovute al loro sviluppo storico. Il modello Mohr-Coulomb si è evoluto dalla legge di attrito di Coulomb applicata a una banda di taglio in cui vi è un blocco scorrevole, fino a diventare un criterio di rottura, poi convertito in un modello costitutivo comprendendo eventualmente una fase di indurimento elastica. Il modello Mohr-Coulomb Strain-Softening, che prevede il rammollimento, è un adattamento del modello Mohr-Coulomb per soddisfare la teoria dello stato critico (Roscoe et al., 1958) e imitare il comportamento meccanico del suolo. Invece il modello Nor-Sand (Jefferies, 1993) è stato sviluppato direttamente dalla teoria stato critico per modellare il rapporto sforzo-deformazione della sabbia. La sua legge di dissipazione di energia si basa sulla teoria dello stress-dilatanza e permette all'energia di essere dissipata quando il materiale è distorto, fin dall'inizio del processo di taglio.

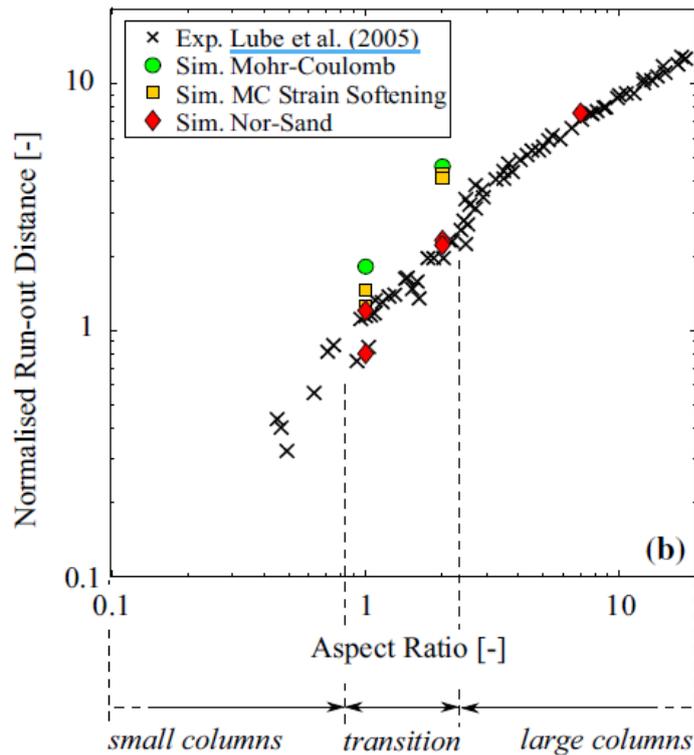


Figura 45: Distanza di run-out in relazione alle dimensioni del materiale in collasso, Fern e Soga (2016)

I risultati di Fern e Soga (2016) mostrano che il modello costitutivo svolge un ruolo chiave nel comportamento del materiale granulare. Esso influenza il comportamento alle piccole e grandi deformazioni definendo la massa mobilitata e controllando il meccanismo di dissipazione di energia.

Un modello variabile come il Nor-Sand include le caratteristiche di dilatanza del materiale e la sua influenza sull'angolo di rottura.

La dissipazione di energia è un elemento chiave nella previsione del comportamento di collasso e della distanza di run-out. La dissipazione è controllata dal modello costitutivo in cui indurimento e rammollimento svolgono un ruolo importante. Inoltre nella modellazione con comportamento elastoplastico-indurente (Jefferies, 1993) la dissipazione di energia inizia ad un livello inferiore a quello del criterio di rottura. In più la dissipazione plastica comporta distanze di run-out minori. Infatti, quando è usato il modello Nor-Sand, la distanza di run-out valutata è maggiormente in accordo con i dati sperimentali rispetto alla previsione fatta dai modelli Mohr-Coulomb (Figura 45).

Un altro miglioramento da addurre al metodo MPM consiste nello studio di una reologia più accurata che sia in grado di interpretare le modifiche dei parametri geotecnici durante lo scorrimento di un flusso granulare, ovvero gli effetti dinamici sui coefficienti di attrito laterali, di base e sulle interfacce e l'influenza sull'angolo di attrito interno. Alcuni suggerimenti sono stati proposti da Jop et al. (2006) nella teorizzazione della reologia  $\mu(I)$ , si veda Appendice B.



# CAPITOLO 4: SIMULAZIONE MPM DELL'IMPATTO DEL FLUSSO GRANULARE CONTRO UN OSTACOLO

## 4.1 Introduzione e obiettivo

La modellazione con software MPM è indicata per simulare l'impatto di un flusso granulare contro un ostacolo. Nel caso specifico l'ostacolo è costituito da una parete rigida, ovvero una barriera di ritenuta, perpendicolare al piano di scorrimento. Infine è presentato un confronto tra la simulazione del problema tramite software MPM e l'esperimento in scala eseguito in laboratorio (Jiang, Towhata, Zhao et al., 2015). L'obiettivo dell'esperimento consiste nel valutare le forze di impatto che si generano sulla parete e le variazioni nel tempo, durante il fenomeno di impatto. L'inclinazione del piano di scorrimento viene variata tra 30°, 35°, 40° e 45° e i tre materiali granulari utilizzati sono di pezzatura differente, con relativi angoli di attrito interno di 33°, 40° e 53°.

## 4.2 Descrizione test MPM

L'esperimento simula un flusso granulare che scivola su un pendio inclinato ed impatta contro una barriera di ritenuta perpendicolare al pendio.

La prova consiste nel posizionamento di un volume di materiale granulare, bloccato inizialmente in sommità ad un piano inclinato. Il volume di materiale varia secondo alcune geometrie prescelte, quindi variano altezza e lunghezza del deposito iniziale.

Il materiale viene liberato istantaneamente tramite la rimozione del vincolo e scivola lungo il piano inclinato per impattare contro una barriera rigida ortogonale (forma un angolo di 90° con il piano di scorrimento) posta al termine del piano di scorrimento.

### 4.2.1 Geometria

La geometria del problema (Figura 46) è stata riprodotta secondo la configurazione dell'esperimento di Jiang, Towhata, Zhao et al. (2015). Data la possibilità del software MPM di impostare il vettore gravità (modulo e inclinazione) si è scelto di porre il piano di scorrimento parallelo all'orizzontale ed applicare il vettore gravità secondo l'inclinazione della canaletta nell'esperimento di Jiang et al.. L'angolo di inclinazione della canaletta ( $\alpha$ ) è variato tra 30°, 35°, 40°, 45°.

La lunghezza del piano di scorrimento, calcolata a partire dalla base del deposito iniziale, è di 2,19 m. Il deposito iniziale è alto (H) 0,15 m e lungo (L) 0,44 m. L'altezza della parete di ritenuta è di 0,40 m.

La profondità assegnata al modello è di 0,02 m anziché 0,30 m dell'esperimento in scala Jiang. Il problema è infatti schematizzabile con una modellazione bidimensionale ove la profondità non influisce sui risultati. Il software MPM lavora con 3 dimensioni quindi è stata scelta una profondità di 0,02 m per limitare le operazioni richieste al software.

Le pareti laterali forniscono attrito nullo.

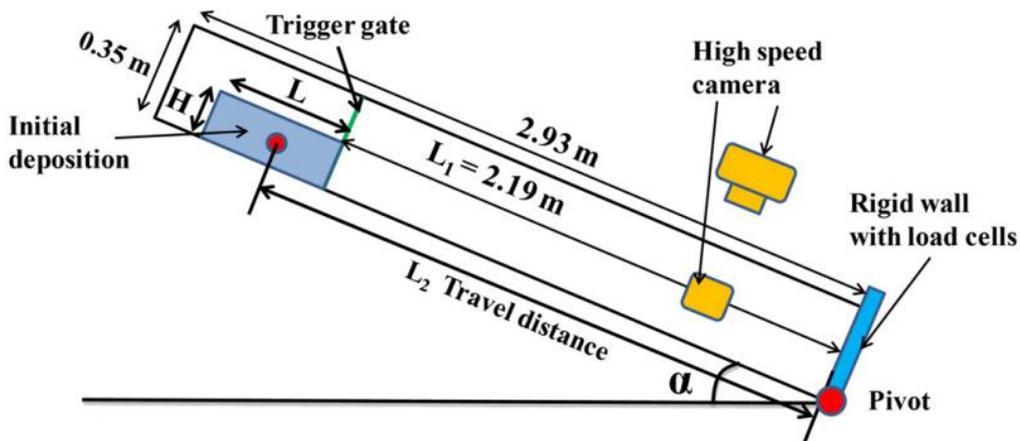


Figura 46: Geometria della simulazione di impatto contro la parete: configurazione tratta dall'esperimento di Jiang et al. (2015)

#### 4.2.2 Materiali e parametri

Nelle prove sono utilizzati tre tipi di terreno. Il terreno è modellato come un materiale monofase con criterio di rottura di Mohr-Coulomb.

Il materiale n. 1 ha l'angolo di attrito interno  $\phi = 53^\circ$ . L'angolo di attrito di base (tra materiale e piano inclinato) è  $\delta = 25^\circ$  quindi il coefficiente di attrito  $\mu_{sx} = \tan \delta = 0,466$ . Diverso è il coefficiente di attrito con la parete di ritenuta perché è simulato un materiale differente, quindi  $\mu_{dx} = \tan 21^\circ = 0,384$ . Le caratteristiche dei tre materiali sono riportate in Tabella 8.

La canaletta è modellata invece come materiale monofase con comportamento elastico-lineare. Sulla superficie di scorrimento viene impostato un angolo di attrito di base, ovvero un coefficiente di attrito canaletta-terreno ( $\mu_{sx}$ ), variabile secondo il tipo di terreno utilizzato. Analogamente viene impostato un coefficiente di attrito tra terreno e parete di ritenuta ( $\mu_{dx}$ ). Le caratteristiche sono riportate in Tabella 8.

**Tabella 8: Materiali granulari impiegati nella simulazione numerica MPM dell'impatto**

	Materiale n. 1	Materiale n. 2	Materiale n. 3
Densità del solido $\rho$	2650 kg/m <sup>3</sup>	2650 kg/m <sup>3</sup>	2650 kg/m <sup>3</sup>
Porosità $n$	0,480	0,492	0,440
Angolo di attrito interno $\phi_i$	53°	40°	33°
Modulo di Young	1000-100 kPa	1000-100 kPa	1000-100 kPa
Coefficiente di Poisson	0,25	0,25	0,25
Coefficiente di attrito di base (fondo canaletta) $\mu_{sx}$	0,466	0,445	0,424
Coefficiente di attrito parete (parete di ritenuta) $\mu_{dx}$	0,384	0,384	0,344

### 4.2.3 Condizioni di vincolo e di carico

La canaletta è vincolata ad incastro in tutte tre le direzioni sul lato inferiore. Le pareti laterali della canaletta sono simulate tramite elementi privi di spessore con condizione di vincolo sull'asse z (sulla profondità). Infine sono apposti vincoli ad incastro sui lati sinistro e destro del modello a bloccare lo scorrimento lungo la direzione del moto (asse x).

Il deposito iniziale è vincolato su tutti i lati nella fase di inizializzazione, successivamente si rimuovono le condizioni di vincolo a destra e superiori per simulare l'apertura della paratia che permette la discesa del materiale.

Nella fase di inizializzazione al materiale è attribuito un modulo elastico di 1000kPa, successivamente è modificato a 100kPa. Il modulo elastico infatti è un parametro che lega le tensioni alle deformazioni e il materiale granulare solo nella fase iniziale permane in campo elastico, dove è attribuito un valore relativamente elevato. Il materiale entra subito in campo plastico e il modulo di Young decresce. Un'analisi riportata in Capitolo 3 mostra che l'influenza del modulo elastico sugli esiti della simulazione è irrilevante, quindi è assunto il valore di 100kPa che permette al codice di calcolo un minore tempo computazionale.

Lungo la superficie di scorrimento (parte superiore della canaletta) e sulla parete di ritenuta è imposta la condizione di nessun vincolo (libere tutte le tre direzioni), che rimane durante lo svolgimento della prova.

Nessun carico addizionale è assegnato. L'unica accelerazione agente è dovuta al vettore gravità che assume le configurazioni riportate in Tabella 9 a seconda dell'inclinazione della canaletta dell'esperimento di Jiang.

**Tabella 9: Inclinazioni della canaletta e componenti del vettore gravità**

Inclinazione canaletta ( $\alpha$ )	Componente orizzontale (asse x)	Componente verticale (asse y)
30°	0,500	-0,866
35°	0,574	-0,819
40°	0,643	-0,766
45°	0,707	-0,707

## 4.2.4 Mesh e discretizzazione

La mesh (Figura 47) è semistrutturata ed è costituita di 9459 elementi tetraedrici lineari e 19036 nodi, è più raffinata presso il piano di scorrimento, la parete di ritenuta e la zona di deposito finale del materiale.

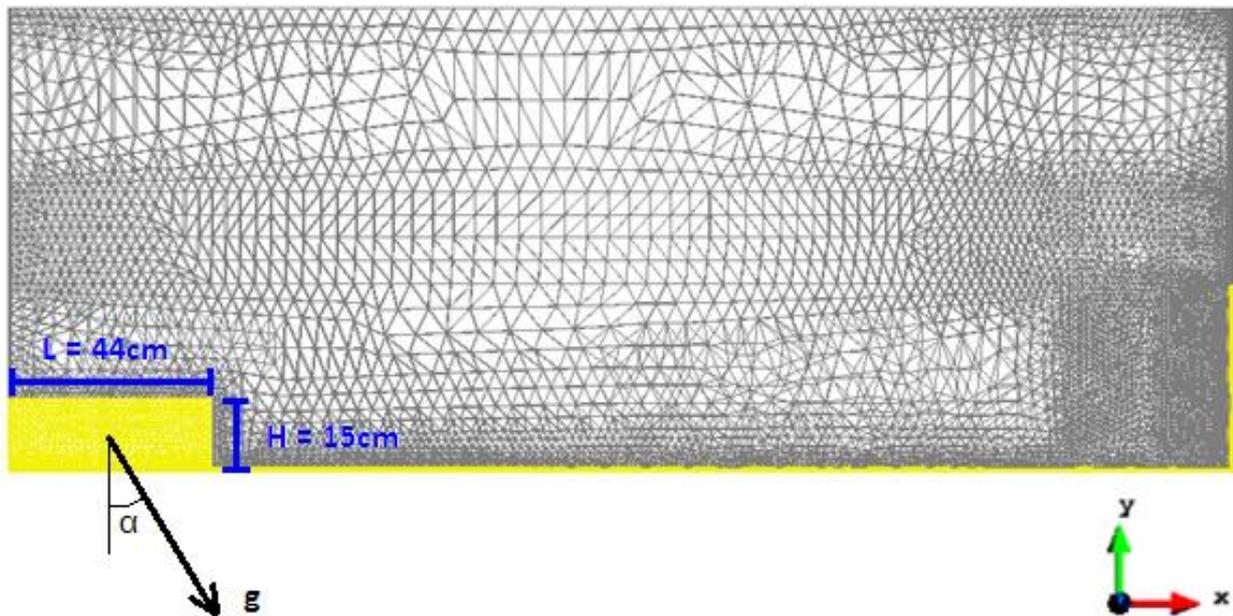


Figura 47: Discretizzazione del dominio, con evidenziato il volume di materiale granulare, il piano di scorrimento e la parete

## 4.3 Risultati

### 4.3.1 Influenza del coefficiente di attrito di base

Un'analisi di sensitività è condotta sul coefficiente di attrito della canaletta. Si vuole valutarne l'influenza sulla forza massima. Si ritiene infatti che esista una forte correlazione tra i due parametri, come evidenziato nella prova di run-up al Capitolo 3.

Sono condotte tre simulazioni numeriche (Figura 48) sul materiale n.1 ( $\phi = 53^\circ$ ) con coefficiente di attrito  $\mu = 0,3, 0,466$  (valore reale),  $0,6$  sia ad inclinazione  $\alpha = 35^\circ$  sia  $\alpha = 40^\circ$ .

Si conclude che il parametro  $\mu$  condiziona notevolmente la forza d'impatto e piccoli errori nella valutazione, soprattutto in eccesso, comportano sottostime della forza d'impatto.

Ad inclinazione maggiore della canaletta il problema di sovrastima è accentuato se viene sottovalutato il coefficiente  $\mu$ . Una differenza di  $0,05$  (10%) del coefficiente  $\mu$  comporta una differenza di  $400$  N/m (40%) nella forza di impatto. Meno influente è invece un errore in eccesso del coefficiente  $\mu$ .

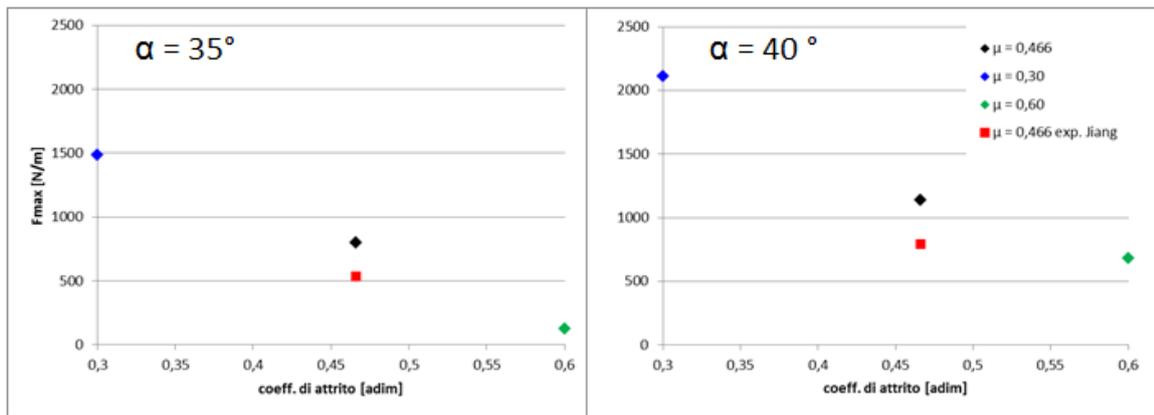
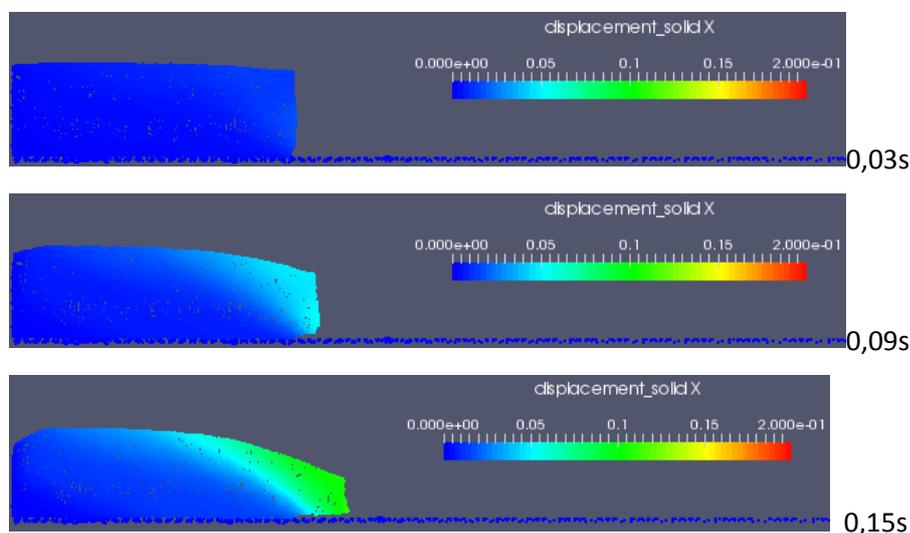


Figura 48: : Influenza di  $\mu$  sulla  $F_{max}$ :  $\alpha = 35^\circ$ ,  $\phi = 53^\circ$  e  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\phi = 53^\circ$

### 4.3.2 Innesco

Per descrivere il fenomeno di innesco del flusso granulare, si utilizza la simulazione eseguita con materiale n.1 ed inclinazione del piano  $\alpha = 30^\circ$ . Si può notare lo spostamento iniziale della porzione superiore del deposito, mentre la parte a contatto con il piano inclinato rimane ferma a causa dell'attrito con il piano stesso. Le deformazioni del materiale granulare sono molto elevate sull'unghia già nei primi istanti (0,15s). Seguendo le particelle superiori del deposito è possibile constatare che si verifica un crollo come avviene negli esperimenti della colonna granulare e le particelle diventano il fronte del flusso granulare.

Il processo di innesco si può osservare nella Figura 49. È evidente una caratteristica forma "a lingua", dove il fronte è ben disteso ed acquisisce subito velocità ( $v = 1,57 \text{ m/s}$  a  $t = 0,24\text{s}$ ) mentre il retro del deposito è sostanzialmente ancora fermo. Si intuisce quindi l'inizio della formazione di una "campana" con altezza al centro elevata e decrescente ai lati. Si veda anche Figura 50 per notare come si modifica il profilo della massa granulare seppur mantenendo la forma a campana fino all'impatto.



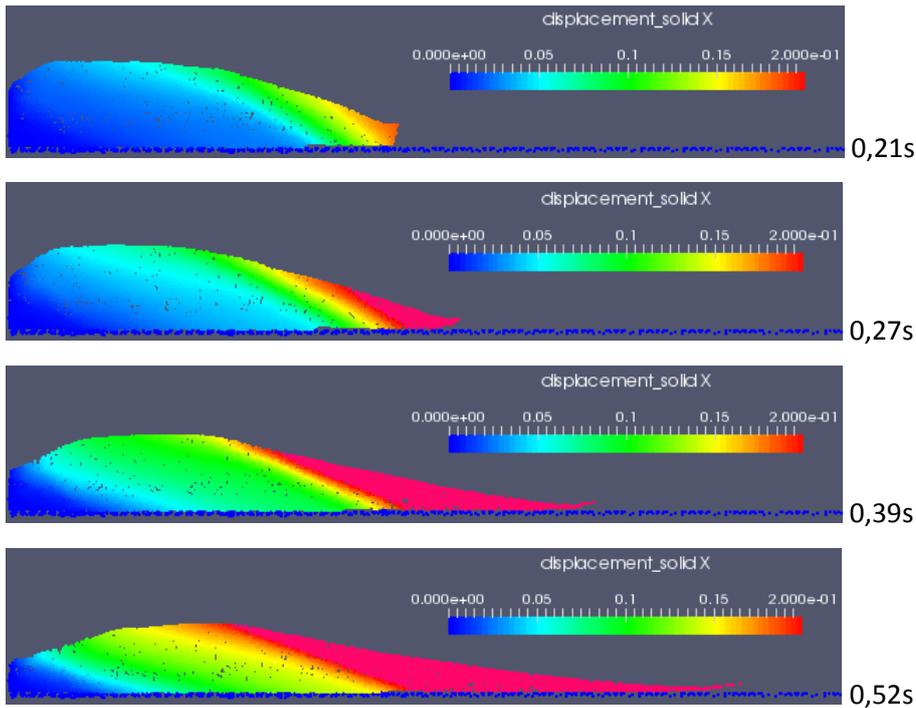
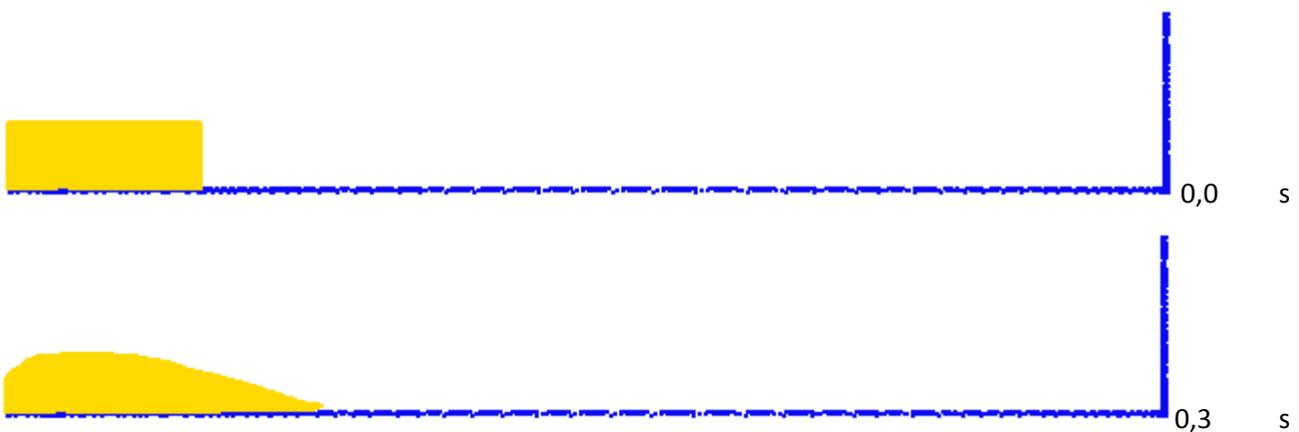


Figura 49: Processo di innesco del flusso granulare,  $\phi = 53^\circ$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\mu = 0,466$

### 4.3.3 Evoluzione temporale dell'evento di impatto

Al fine di comprendere l'evoluzione del fenomeno di impatto, si mostrano le immagini (Figura 50) di alcuni istanti temporali della simulazione numerica, con passo 0,3s. E' preso come esempio il caso con Materiale n.1, inclinazione del piano di scorrimento  $\alpha=30^\circ$ . Si ricorda che nonostante il piano di scorrimento sia rappresentato orizzontale, l'accelerazione di gravità è applicata secondo la corretta inclinazione della canaletta nell'esperimento.



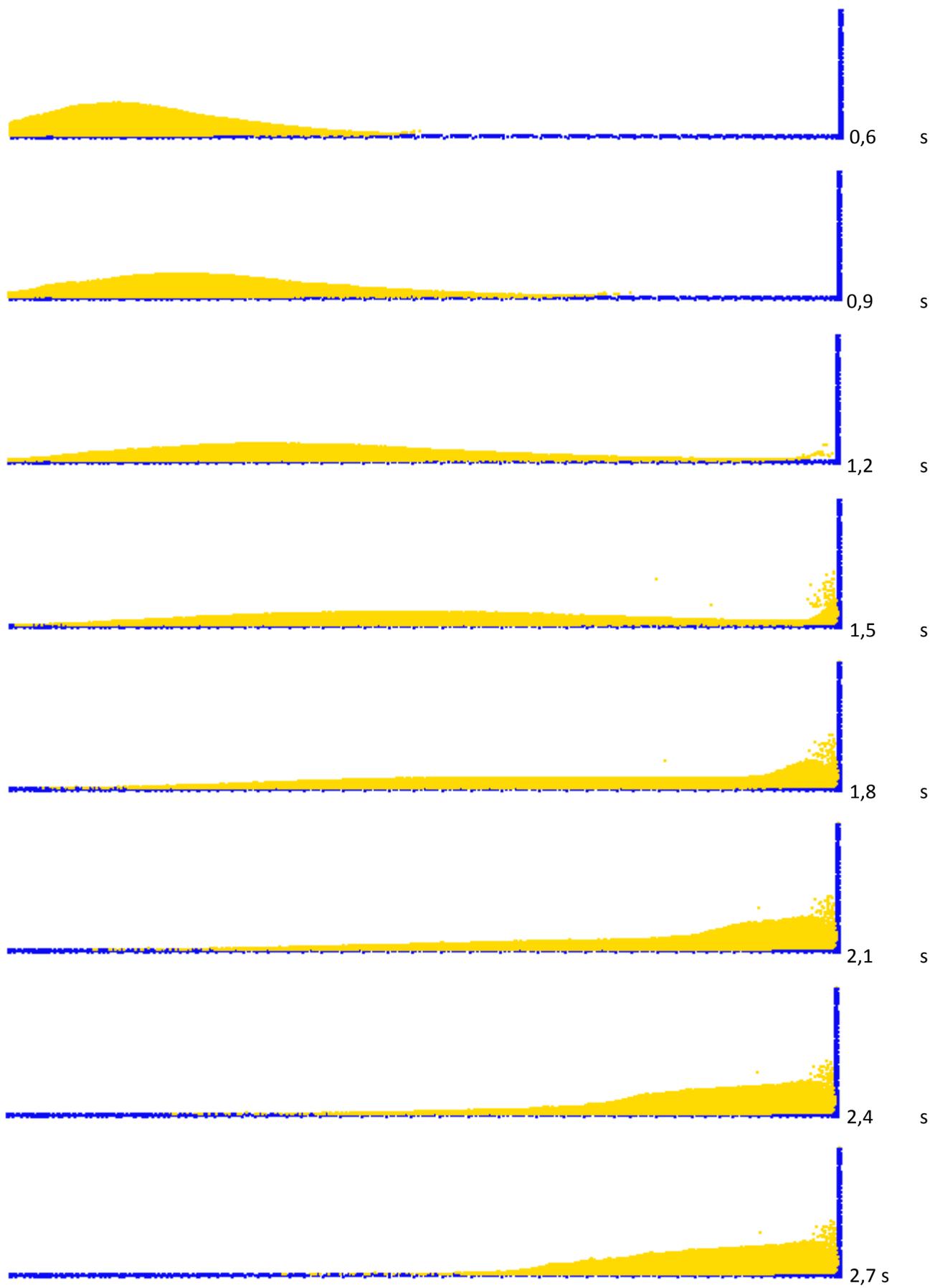


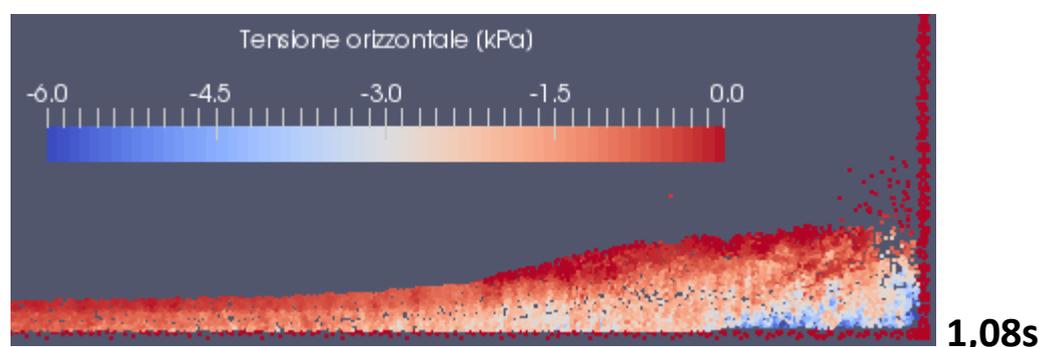
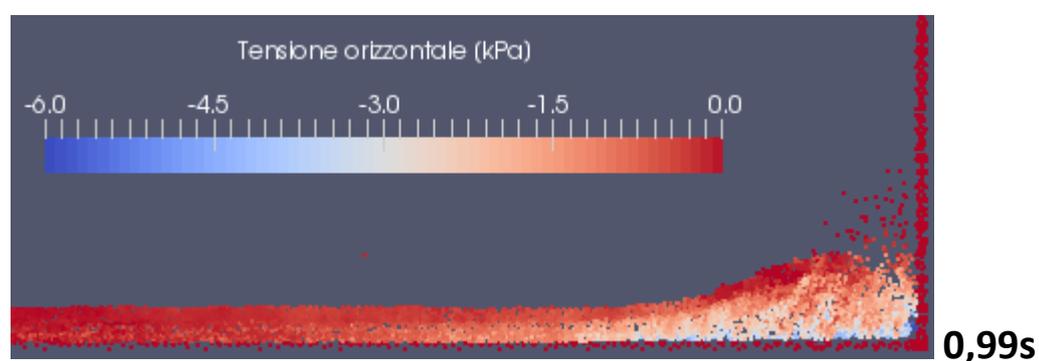
Figura 50: Evoluzione temporale dell'evento nella simulazione numerica; intervallo 0,3s

La disposizione del materiale di partenza genera una forma “ a campana” del flusso in scorrimento, in quanto, oltre agli effetti gravitazionali dovuti all’inclinazione del piano di scorrimento, il peso stesso del materiale, non più contenuto dalla paratia rimossa, contribuisce a ridisporre il materiale mantenendo una porzione con tirante più elevato in prossimità del centro del flusso. Questa particolarità rende complicata l’evoluzione temporale del fenomeno e la valutazione delle velocità del flusso in scorrimento, influenzando anche la fase di impatto. Ne deriva una difficoltà nel individuare dei parametri precisi per descrivere il fenomeno e la sua geometria.

La fase di deposito successiva all’impatto è invece ben rappresentata.

#### 4.3.4 Analisi delle tensioni durante l’impatto

Si vuole presentare un confronto delle tensioni del corpo solido che si generano negli istanti dell’impatto. Il confronto è eseguito con il materiale n.1 ad inclinazioni del piano di 30° e 45°. Nel caso con  $\alpha = 30^\circ$  (Figura 51) la tensione che si genera raggiunge il valore massimo e permane fino al termine della deposizione. Nel caso con  $\alpha = 45^\circ$  (Figura 52) la tensione raggiunge un picco per decrescere successivamente ad un valore residuo quando termina l’effetto dinamico di spinta del materiale in scorrimento.



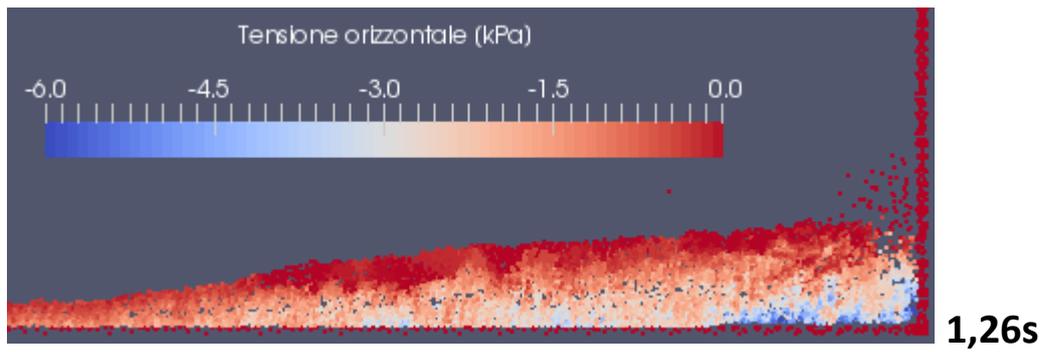


Figura 51: Diagrammi di tensione nel flusso (compressione negativa), inclinazione  $\alpha=30^\circ$ , materiale n.1

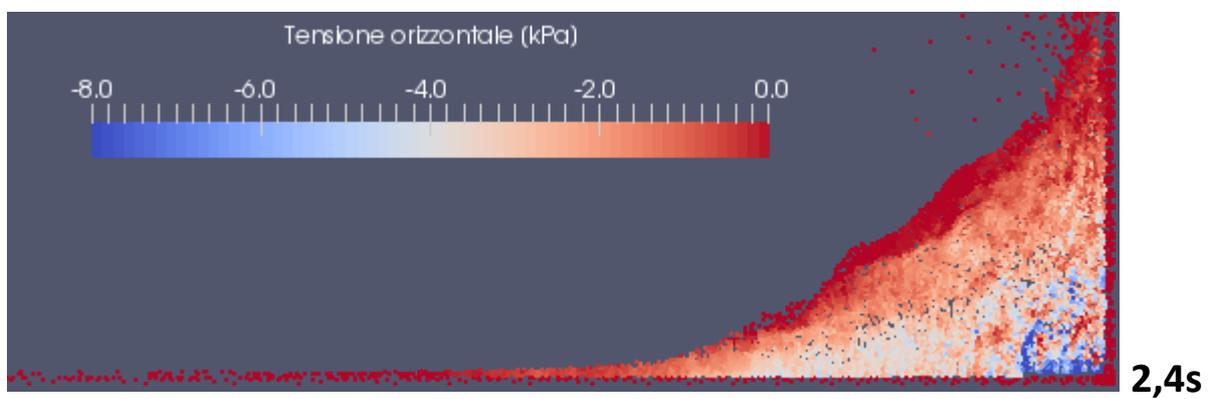
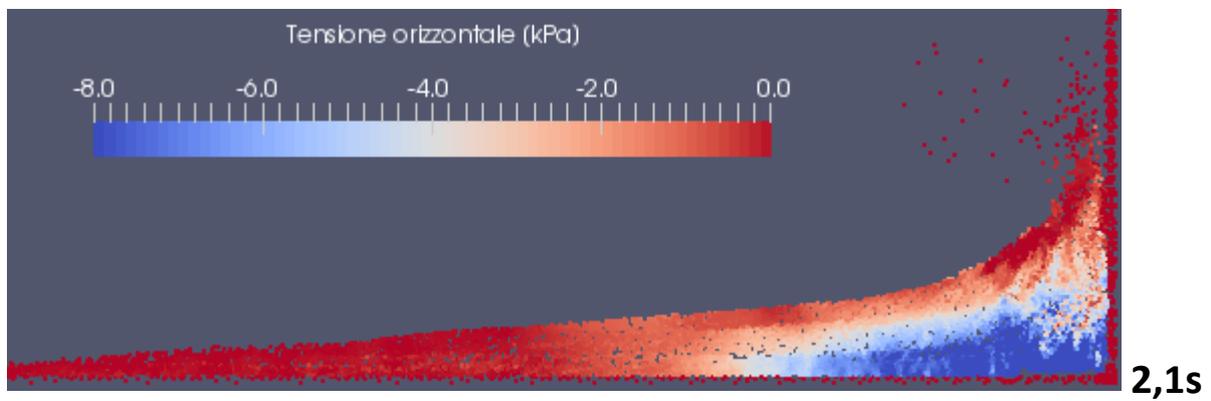
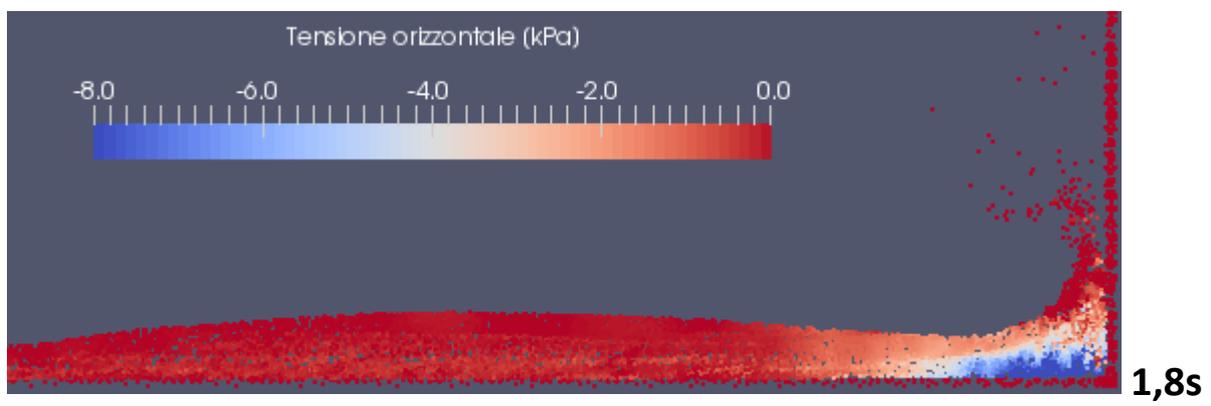


Figura 52: Diagrammi di tensione nel flusso (compressione negativa), inclinazione  $\alpha=45^\circ$ , materiale n.1

### 4.3.5 Deposito finale

Gli effetti dell'inclinazione del piano di scorrimento: altezza e larghezza del deposito, sono evidenti dalla Figura 53. La velocità del materiale e quindi l'energia cinetica sono molto superiori nel caso con  $\alpha = 45^\circ$ . Il materiale del fronte impatta contro la parete creando una zona statica, in letteratura definita come dead zone (Jiang et al., 2013), ma ulteriore materiale, che ha ancora molta energia cinetica, scorre sopra questa zona raggiungendo la parete ad un'altezza superiore. Il deposito finale risulta compatto ovvero la sua altezza è paragonabile con la larghezza. Molto più allungato è invece nel caso con  $\alpha = 30^\circ$ , conclusione imputabile alla velocità più bassa e il tempo di deposizione più lungo. Il materiale del fronte si ferma quasi istantaneamente a contatto con la parete, costituendo via via una base per il successivo materiale in arrivo. Ulteriori spiegazioni per la forma del deposito sono riportate nel Paragrafo 4.4.1.

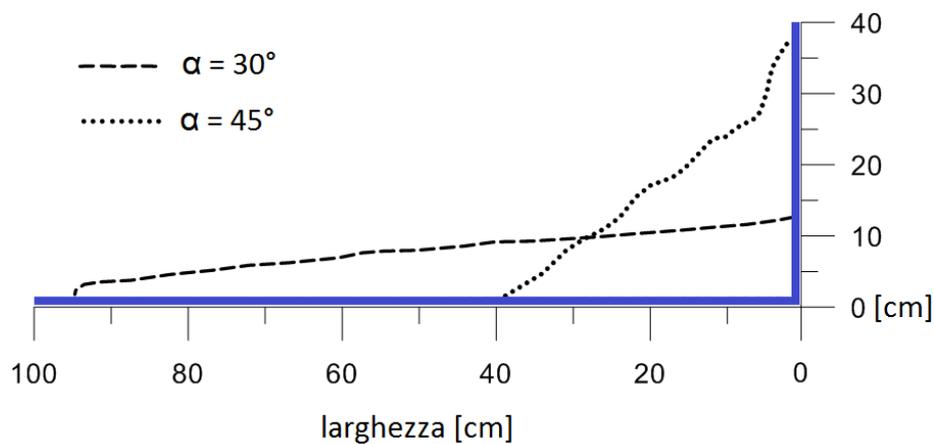


Figura 53: Confronto dei depositi finali con inclinazioni del piano di  $30^\circ$  e  $45^\circ$ , materiale n.1

Mantenendo fissa l'inclinazione ad  $\alpha = 45^\circ$ , si confrontano i depositi variando il tipo di materiale, ossia l'angolo di attrito tra  $\phi = 53^\circ$ ,  $\phi = 40^\circ$  e  $\phi = 33^\circ$  (Figura 54). Il materiale n.3, con angolo di attrito più basso ( $\phi = 33^\circ$ ), mostra un deposito molto alto ed alcune particelle superano l'altezza della parete di ritenuta. La larghezza del deposito è invece ridotta. E' presentato anche un confronto con le forme dei depositi ottenute da Jiang et al. (Figura 54) dove è evidente che il materiale non influisce molto sui depositi finali essendo pressoché alti uguali con piccole variazioni nella larghezza.

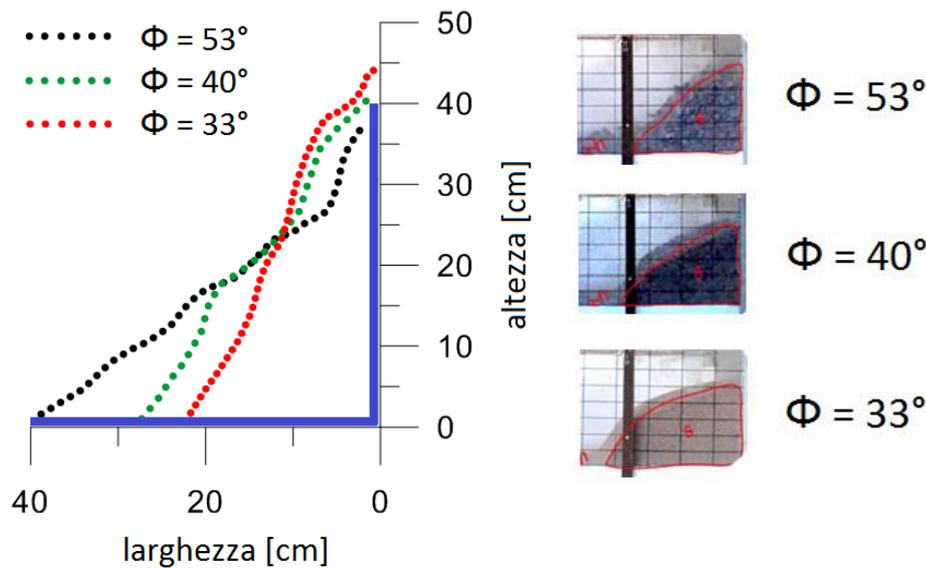


Figura 54: Forma del deposito con materiale n.1, n.2, n.3 ad inclinazione fissa  $\alpha = 45^\circ$ . Confronto tra simulazione MPM ed esperimento (Jiang et al., 2015)

## 4.4 Confronto risultati con il test sperimentale (Jiang et al., 2015)

### 4.4.1 Reazione orizzontale vs Tempo

Nel software MPM viene calcolata la reazione fornita dalle sei strisce orizzontali della parete di ritenuta ed anche la reazione totale in direzione orizzontale ( $F_x$ ). Nei confronti con i valori sperimentali si utilizzano soltanto le reazioni totali.

Per una verifica qualitativa dei risultati del modello numerico si paragonano i grafici  $F_x$  vs Tempo Totale per il materiale n.1 ( $\phi=53^\circ$ ) con due diverse inclinazioni della canaletta:  $30^\circ$  (Figura 55) e  $45^\circ$  (Figura 56). La configurazione utilizzata ha un volume di partenza di larghezza  $L = 44\text{cm}$  e  $H = 20\text{cm}$ , come i dati sperimentali forniti da Jiang et al. (2015).

Si nota la perfetta coincidenza temporale dell'evento tra modellazione MPM ed esperimento in scala ad entrambe le inclinazioni, il comportamento che si riscontra è qualitativamente analogo e conferma che il modello numerico prevede correttamente l'evoluzione del fenomeno e la distribuzione della forza orizzontale nel tempo. Diversamente invece vale per i valori della forza, come riportato nel Paragrafo 4.4.2.

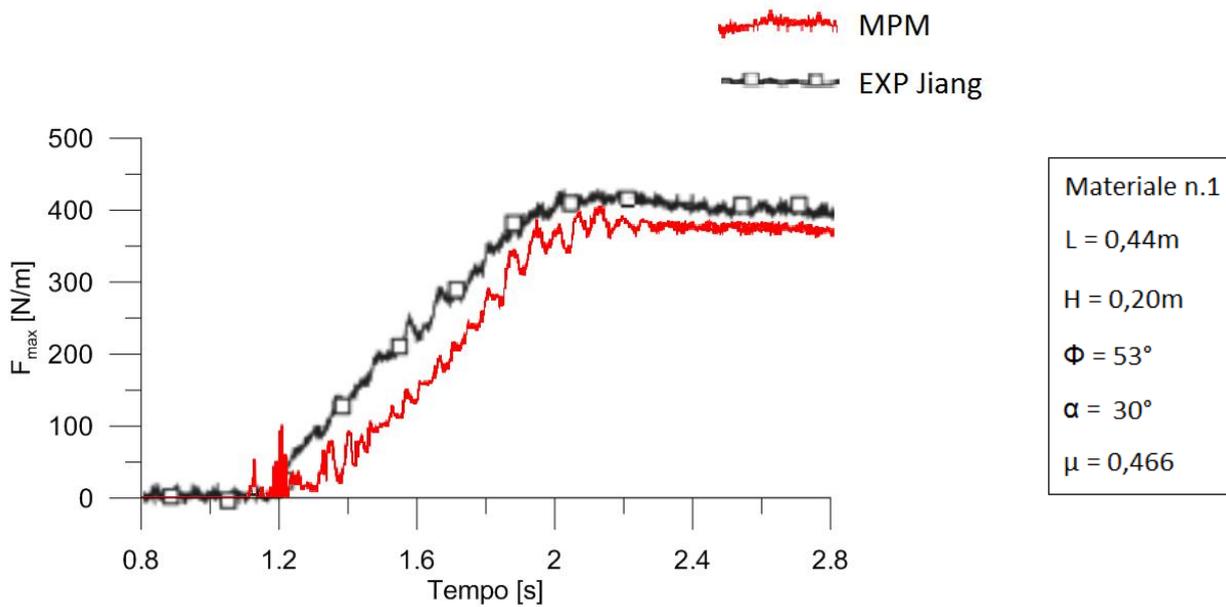


Figura 55: Grafico  $F_{\max}$  vs Tempo,  $\alpha=30^\circ$ ,  $\phi=53^\circ$ , confronto simulazione numerica MPM ed esperimento in scala Jiang et al.

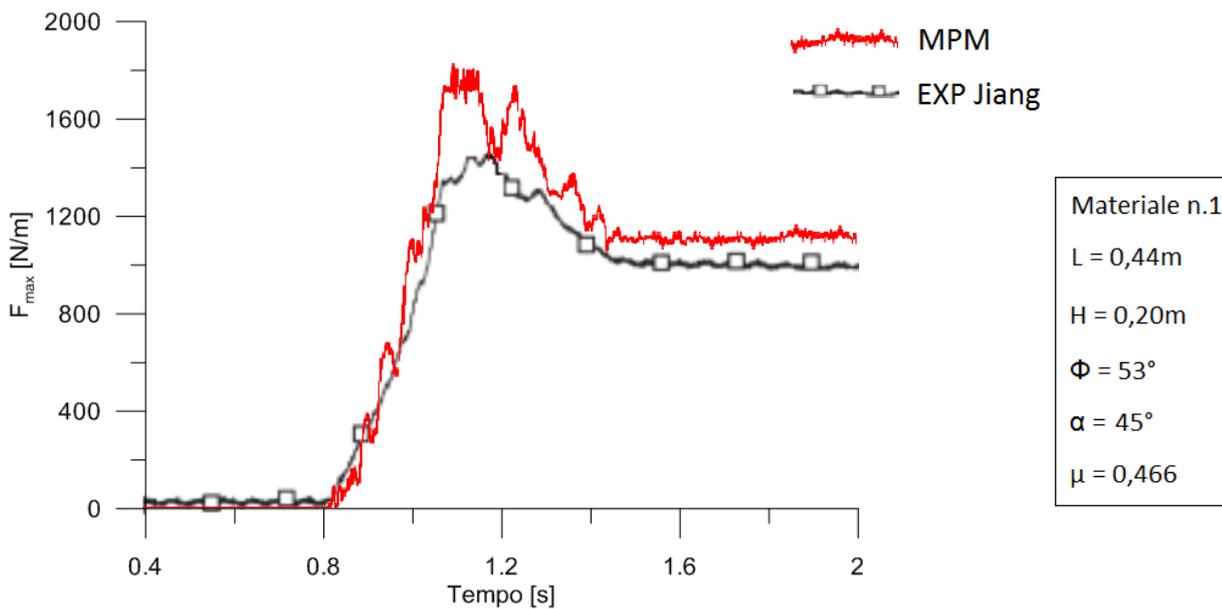


Figura 56: Grafico  $F_{\max}$  vs Tempo,  $\alpha=45^\circ$ ,  $\phi=53^\circ$ , confronto simulazione numerica MPM ed esperimento in scala Jiang et al.

Nella prova con inclinazione a  $30^\circ$  la forza durante l'impatto cresce fino a raggiungere il valore massimo che è corrispondente al valore finale (residuo). E' possibile individuare l'istante in cui inizia l'impatto con la parete, corrispondente a 1,2 secondi dall'inizio dello scivolamento del materiale. Il valore massimo della forza pari a 0,375 kN/m permane al termine della deposizione del materiale, pertanto è prossimo al valore della forza statica generata dalla spinta orizzontale (spinta a riposo) del materiale fermo sommata alla componente di peso dovuta all'inclinazione.

Con inclinazione della canaletta  $\alpha = 45^\circ$  il materiale che impatta imprime una forza di picco sulla parete. Successivamente il valore di forza decresce e si assesta su un valore residuo che è costante.

La differenza di comportamento è dovuta alla maggiore energia cinetica del materiale impattante nel caso con inclinazione a  $45^\circ$  rispetto al caso con inclinazione  $30^\circ$ . Si nota anche che, nel caso con  $\alpha = 45^\circ$ , l'istante dell'impatto avviene a  $t = 0,8$  s, infatti la velocità e l'energia cinetica risultano maggiori rispetto al caso con  $\alpha = 30^\circ$ .

Nel caso con  $\alpha = 30^\circ$  il materiale si deposita gradualmente contro la parete, incrementando l'altezza del deposito e il peso e quindi la spinta. Non c'è influenza della spinta dinamica del materiale in scorrimento sulla spinta complessiva. Nel caso con  $\alpha = 45^\circ$  quando viene raggiunta l'altezza massima del materiale contro la parete, il flusso in movimento esercita una spinta dinamica generando una forza massima superiore al valore finale di spinta, in cui il materiale è fermo. Se si effettua un confronto della velocità media del materiale all'istante del raggiungimento dell'altezza massima del deposito contro la parete si conferma la precedente teoria. La velocità con  $\alpha = 30^\circ$  è  $v_m = 1,72$  m/s, mentre con  $\alpha = 45^\circ$  è  $v_m = 2,66$  m/s.

I valori differenti della forza residua tra la simulazione MPM e l'esperimento di Jiang et al. (2015) sono dovuti alle diverse forme del deposito finale, essendo il peso stesso del deposito a generare la spinta residua.

#### 4.4.2 Valori della reazione totale sulla parete di ritenuta

Il fine principale dell'analisi numerica è la stima della forza massima d'impatto ( $F_{max}$ ). Per verificare la bontà del modello si eseguono i confronti con i risultati sperimentali di Jiang, Towhata et al. (2015). La configurazione geometrica utilizzata ha il volume di partenza del materiale con larghezza  $L = 44$ cm e altezza  $H = 15$ cm. Sono riportati un grafico (Figura 57) e una tabella (Tabella 10) riassuntivi dei valori massimi con le relative differenze tra esperimento in scala e modello numerico.

**Tabella 10: Confronto tra  $F_{max}$  dell'esperimento di Jiang et al. e della simulazione numerica MPM**

INCLINAZIONE canaletta	Ang. ATTRITO INTERNO	$\mu$ base	$\mu$ parete	$F_{max}$ MPM	$F_{max}$ Jiang	Differenza MPM-Jiang	Differenza %
$\alpha$ [°]	$\phi$ [°]	[adim]	[adim]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	
30	53	0,466	0,384	319	296	23	8%
35	53	0,466	0,384	799	533	266	50%
40	53	0,466	0,384	1141	794	347	44%
45	53	0,466	0,384	1650	1224	426	35%
30	40	0,445	0,384	354	216	138	64%
35	40	0,445	0,384	749	412	337	82%
40	40	0,445	0,384	1220	637	583	92%
45	40	0,445	0,384	1381	856	524	61%
30	33	0,424	0,344	480	176	303	172%
35	33	0,424	0,344	839	345	494	144%
40	33	0,424	0,344	1038	474	563	119%
45	33	0,424	0,344	1308	620	688	111%

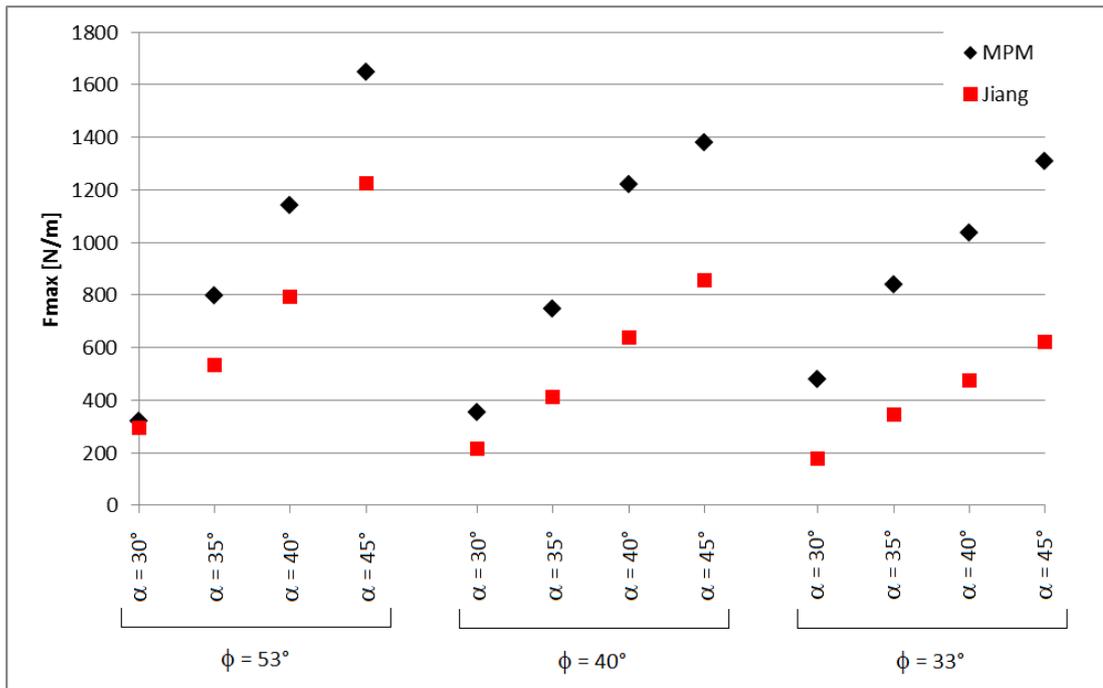


Figura 57: Confronto tra  $F_{max}$  dell'esperimento di Jiang et al. e della simulazione numerica MPM

Si nota che il modello numerico sovrastima sempre la forza d'impatto (Figura 57). L'errore commesso cresce proporzionalmente con inclinazioni della canaletta  $\alpha$  crescenti. L'inclinazione crescente comporta valori crescenti di energia cinetica nell'impatto. Una porzione di questa energia viene dissipata dagli urti tra le particelle di materiale granulare, diminuendo di fatto l'entità della forza di impatto.

L'angolo di attrito  $\phi$  invece non presenta una particolare correlazione alla forza d'impatto. L'errore di sovrastima, commesso dal modello numerico, è maggiore con il materiale n.3, non a causa dell'angolo di attrito, quanto alle caratteristiche granulometriche del materiale n.3 reale. Infatti le particelle della sabbia n.3 sono più fini rispetto agli altri materiali, quindi il numero maggiore di grani comporta anche un numero maggiore di collisioni e una maggiore dissipazione energetica.

Le prove sul materiale n. 3, hanno infatti gli errori più elevati, con sovrastime superiori al 100%.

## 4.5 Conclusioni

Il confronto con i dati sperimentali evidenzia che il modello di rottura di Mohr-Coulomb ha difficoltà nel computare correttamente le perdite energetiche nella fase di urto. Infatti il divario aumenta con le inclinazioni elevate.

Il materiale a grana grossa, ovvero la ghiaia con  $\phi = 53^\circ$ , è quello che viene modellato con migliore accordo ai dati sperimentali. Il motivo può essere imputato all'angolo di attrito elevato che rende preponderante l'effetto dei meccanismi frizionali anziché quelli collisionali. Inoltre il numero di contatti di collisione è minore, essendo minore il numero di grani.

Il confronto tra i depositi finali ottenuti con i diversi materiali mostra come l'MPM non simuli correttamente il materiale con basso angolo di attrito. Oltre alla causa sopra citata dell'elevato numero di collisioni, un altro motivo di discrepanza con i risultati sperimentali è il coefficiente di attrito, che è inferiore nel caso del materiale n.3: 0,424 per il materiale n.3 contro 0,466 per il materiale n.1. Vista l'elevata sensibilità del parametro, una piccola variazione comporta grandi differenze nel risultato. Il caso con  $\mu = 0,466$  è simulato correttamente e ciò conferma che l'MPM con modello Mohr-Coulomb è tanto migliore quanto più il regime è prettamente frizionale.

Nonostante le differenze quantitative tra simulazione ed esperimento in scala, risulta buona la rappresentazione qualitativa dell'andamento della  $F_{max}$  sulla parete, sia nel caso ad elevata inclinazione ( $\alpha = 45^\circ$ ) che presenta il picco, sia quando il picco è assente ( $\alpha=30^\circ$ ).

I diagrammi delle tensioni permettono di intuire la formazione della cosiddetta dead zone che costituisce una massa statica nei pressi della parete ed assorbe parte della spinta dinamica del flusso di materiale, il quale si deposita dietro la dead zone senza incrementare la spinta sulla parete.

Un'ulteriore trattazione sulla formazione della dead zone e la propagazione delle onde granulari si trova nell'Appendice A.

L'errore commesso dal software MPM nella simulazione della forza di impatto è sempre in eccesso, ovvero la forza è sovrastimata e, in caso di reale progettazione, la condizione è a favore di sicurezza.



# CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

Il metodo numerico MPM è migliorato notevolmente negli ultimi anni, anche a livello di efficienza computazionale, aumentando il numero di problemi che possono essere studiati. Le simulazioni numeriche sono più economiche e fattibili rispetto alle prove in campo e ai test di laboratorio. Un gran numero di variabili può essere controllato e sono possibili studi parametrici, permettendo così una migliore comprensione dei fenomeni fisici.

Si può quindi ritenere che il Metodo del Punto Materiale (MPM) è uno strumento promettente nel campo della geomeccanica delle simulazioni delle grandi deformazioni.

In questa tesi l'MPM è stato applicato allo studio delle frane costituite da flussi rapidi di materiale granulare secco. In particolare nei Capitoli 3,4 sono simulati due test di laboratorio di collasso di pendio. Nonostante siano già numerose le applicazioni del MPM, raramente è stato usato per studiare il comportamento del flusso granulare in interazione con degli oggetti, come le barriere protettive inclinate. Questo studio ha apportato un contributo in questo campo, in particolare nell'innovativa analisi delle forze di impatto su una barriera di ritenuta, ottenendo buoni riscontri nei dati sperimentali.

Nella prima simulazione è stato riprodotto un flusso granulare che affronta una barriera inclinata. Lo studio è stato rivolto in particolare all'influenza dei parametri del materiale sull'altezza di run-up. Si sono individuate alcune correlazioni importanti con il coefficiente di attrito di base, che influenza l'altezza di run-up e la forma del deposito, e con l'angolo di attrito del materiale, che influenza la velocità del flusso in scorrimento.

L'innesco e la propagazione sono simulati in perfetto accordo ai dati sperimentali, come anche l'evoluzione temporale del fenomeno. L'altezza di run-up, essenziale parametro per la pratica progettuale delle strutture difensive, è stato stimato con buoni risultati ed accordo con i dati sperimentali. Qualche differenza è stata rilevata nella forma del deposito a causa del modello costitutivo utilizzato che è carente nella dissipazione energetica.

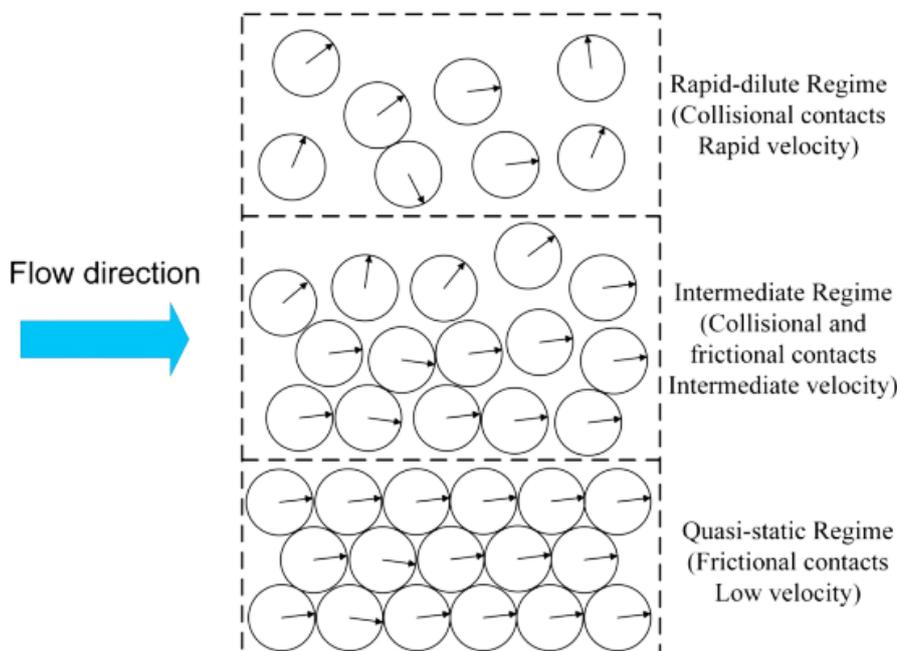
Nella seconda simulazione sono state studiate le forze di impatto di diversi flussi granulari contro una parete rigida ortogonale al piano di scorrimento. Sono stati utilizzati tre materiali differenti e sono state simulate quattro diverse inclinazioni del piano e differenti geometrie del volume di partenza. L'innesco, la propagazione e la velocità del flusso in discesa sul piano inclinato sono stati simulati in perfetto accordo ai valori sperimentali. L'analisi delle forze di impatto ha mostrato come avviene il fenomeno di impatto, l'influenza dei parametri del materiale e del coefficiente di attrito di base sulla forza stessa e sulle forme del deposito finale.

L'andamento delle forze nel tempo riproduce il comportamento reale misurato nell'esperimento in scala, si nota qualche differenza per le elevate inclinazioni del pendio sulla stima della forza di picco, ovvero la forza

è sovrastimata. Gli errori che si riportano con i materiali più fini sono dovuti al maggiore numero di particelle presenti, le quali hanno minore peso, maggior numero di urti e collisioni e raggiungono più facilmente il triplice comportamento solido-liquido-gassoso non prevedibile dal continuo del MPM.

La motivazione della sovrastima è imputata alla scarsa capacità dissipativa del modello Mohr-Coulomb. Nella fase di impatto e di deposito del materiale, il comportamento dinamico collisionale e gli urti tra i grani sono prevalenti rispetto allo scorrimento frizionale.

Questo comportamento è descritto in letteratura (Bagnold, 1954; Jenkins e Savage, 1983; Campbell, 1990; Goldhirsch, 2003; Forterre e Pouliquen, 2008) ed anche da Jiang et al. (2013) dove si distinguono i flussi prettamente collisionali (flussi gassosi rapidi) e i flussi a comportamento frizionale (pseudo-statici, con movimento delle particelle molto lento). Tra queste categorie ci sono i casi intermedi in cui coesistono il regime frizionale e collisionale (Figura 58).



**Figura 58: Schema dei differenti regimi del flusso (Jiang et al., 2015)**

Il regime del flusso granulare nei casi esaminati è intermedio. Crescendo l’inclinazione della canaletta cresce l’effetto collisionale, spiegando così l’errore commesso dal software MPM, con modello di Mohr-Coulomb, che non è in grado di computare correttamente gli urti tra le particelle.

Uno dei problemi principali della geotecnica è infatti la modellazione costitutiva del terreno. Il modello di Mohr-Coulomb fornisce una rappresentazione di massima del comportamento del terreno. Tuttavia spesso è sufficiente nella pratica ingegneristica e può essere usato per individuare le caratteristiche principali del problema considerato.

Ovviamente un modello così semplice, sebbene non sia in grado di rappresentare con precisione il comportamento reale del terreno, richiede pochi parametri di input ed è molto efficiente computazionalmente.

Modelli più sofisticati sono più realistici, ma aggiungono significativa complessità alla simulazione e la stima dei parametri di input può risultare difficoltosa. Implementazioni e applicazioni di modelli costitutivi più avanzati dovranno comunque essere prese in considerazione in futuro per ottenere risultati sempre più coerenti alla realtà.

In conclusione questo studio conferma che l'MPM è un potente metodo numerico che vanta una marcata efficienza computazionale rispetto agli altri metodi. Può essere applicato ad una vasta serie di problemi geotecnici. I problemi alle grandi deformazioni sono il campo di applicazione preferenziale, ma l'applicazione può essere ulteriormente estesa ad altri settori con delle particolarizzazioni del metodo.

Lo studio delle forze di impatto è un'interessante ed innovativa applicazione del metodo, in quanto gli studi numerici finora effettuati in questo ambito sono molto pochi ed eseguiti con strumenti meno sofisticati e precisi rispetto al MPM.

Nonostante i risultati ottenuti con il semplice modello di Mohr-Coulomb siano buoni, sicuramente le evoluzioni future del metodo dovranno includere l'implementazione di nuovi modelli costitutivi da utilizzare indipendentemente o in combinazione con modelli già comprovati, per una migliore previsione della dissipazione energetica, ad esempio modelli con strain softening/hardening e modelli Nor-Sand (Jefferies, 1993). Nuove reologie dovranno essere implementate, ad esempio la reologia  $\mu(I)$  (Jop et al., 2006), per simulare meglio il comportamento del flusso granulare quando coesistono i regimi frizionale e collisionale.



# Appendice A: PROPAGAZIONE DELLE ONDE GRANULARI

Un'ulteriore sperimentazione riguarda le onde di compressione granulari (granular-bore) che si generano successivamente all'impatto e si propagano nel materiale in scorrimento. La simulazione MPM viene messa a confronto con la trattazione analitica di Faug (2015). Il modello numerico è ripreso dall'analisi precedente sulle forze d'impatto con materiale n.1 ( $\phi = 53^\circ$ ) ed inclinazione della canaletta  $\alpha = 30^\circ$ . Il coefficiente di attrito sulla base della canaletta e sulla parete è posto  $\mu = 0,3$ . Con gli stessi parametri e con le semplificazioni successivamente citate sono calcolati i valori analitici.

## A.1 Teoria analitica di Faug

La teoria proposta da Faug (2015) descrive il comportamento di un flusso di materiale in presenza di un ostacolo nel percorso. Sono trattati sia il caso di ostacolo "basso", in cui avviene il superamento dell'ostacolo (overflow) e si genera un risalto (granular jump), sia il caso di ostacolo "alto" ovvero non sormontabile, in cui si genera un'onda di compressione (granular bore) che si propaga nel materiale in scorrimento. Il primo caso è trattato con le equazioni di moto di un fluido in regime stazionario, mentre il secondo con le equazioni di bilancio di massa e della conservazione della quantità di moto. Il confronto con il modello MPM riguarda solamente il secondo caso. I parametri e la geometria sono illustrati in Figura 59.

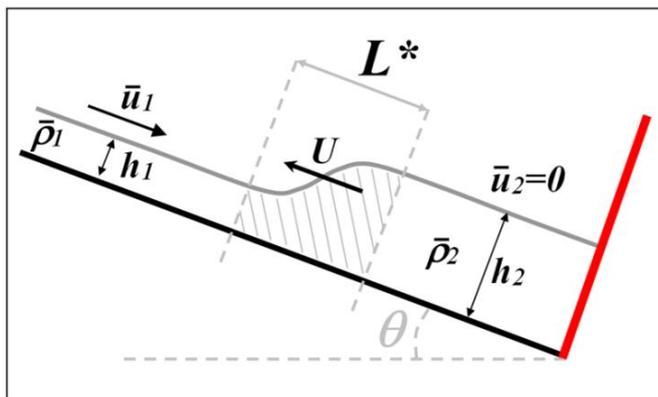


Figura 59: Schema di propagazione dell'onda granulare (Faug, 2015)

L'obiettivo è confrontare il numero di Froude a monte dell'onda di compressione ( $Fr_1$ ) e la velocità di propagazione dell'onda granulare ( $U$ ).

L'equazione di Faug per calcolare il numero di Froude ( $Fr_1$ ) è:

$$Fr_1^2 = \frac{1}{2} \left[ k_2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^2 - k_1 - \frac{K L^*}{h_1} \left( 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{h_2}{h_1} \right) (\tan \theta - \mu_e) \right] \left[ 1 - \frac{1}{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{h_2}{h_1}} \right]$$

Dove:

$k_1$  e  $k_2$  sono i coefficienti di spinta del terreno a monte e a valle dell'onda di compressione e sono assunti pari a 1 (Faug, 2015)

$\rho_1$  e  $\rho_2$  sono le densità del terreno a monte e a valle dell'onda di compressione e sono assunte uguali, quindi il loro rapporto è unitario

$h_1$  e  $h_2$  sono le altezze del flusso granulare a monte e a valle dell'onda di compressione, sono individuate come indicato in Figura 60. Risulta difficile stabilire l'effettiva posizione del fronte d'onda e soprattutto la lunghezza di transizione  $L^*$ . Ciò comporta un'incertezza nel valore dell'altezza  $h_1$ , diversamente dall'altezza  $h_2$  che risulta ben definita.

$K$  è un coefficiente di forma del salto granulare, assumibile pari a 1 (Faug, 2015)

$L^*$  è la lunghezza di transizione che include il salto granulare, ovvero la lunghezza della sezione in cui si individua il fronte d'onda

$\theta$  è l'inclinazione della canaletta, pari a  $30^\circ$  rispetto all'orizzontale

$\mu_e$  è il coefficiente di attrito effettivo tra materiale e canaletta, posto pari a 0,3

L'equazione per la velocità di propagazione dell'onda ( $U$ ) deriva direttamente dalla conservazione della quantità di moto:

$$\rho_1 h_1 (u_1 + U) = \rho_2 h_2 U$$

Dove:

$\rho_1$  e  $\rho_2$  sono le densità del terreno a monte e a valle dell'onda di compressione e sono assunte uguali

$u_1$  è la velocità del flusso granulare a monte del salto granulare

$U$  è la velocità di propagazione dell'onda di compressione nel materiale in scorrimento

## A.2 Simulazione numerica dell'onda granulare

Per calcolare il numero di Froude ( $Fr_1$ ) nella simulazione numerica si utilizza direttamente la definizione:

$$Fr_1 = \frac{u_1}{\sqrt{gh_1 \cos \theta}}$$

Mentre la velocità di propagazione dell'onda ( $U$ ) è calcolata in base alla posizione del fronte d'onda nei vari istanti temporali. Rapportando lo spostamento del fronte e l'intervallo temporale si ottiene la velocità  $U$ .

I parametri necessari vengono misurati come illustrato in Figura 60:

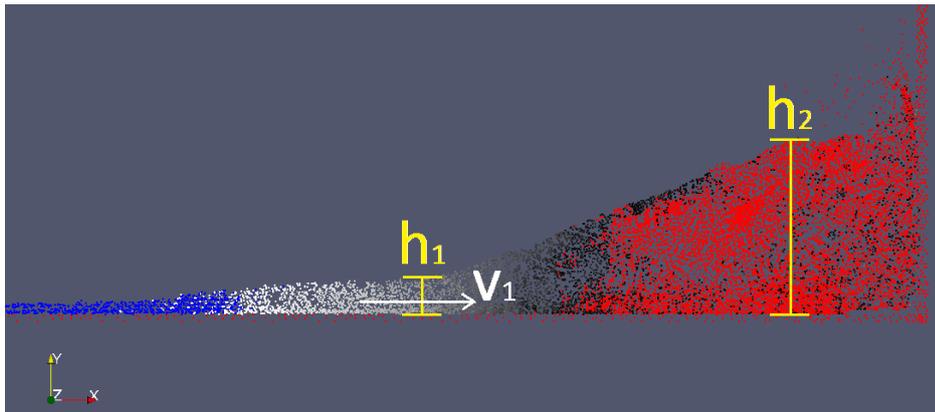


Figura 60: Parametri caratteristici dell'onda granulare (simulazione MPM)

Per comprendere il fenomeno di propagazione dell'onda granulare, si presentano una serie di immagini a distanza temporale di 0,6 secondi (Figura 61). Le particelle blu indicano materiale con velocità superiore a 2,5 m/s, le particelle rosse indicano il materiale fermo (velocità 0 m/s). La campitura tra nero e bianco indica velocità comprese tra 0 e 2,5 m/s.

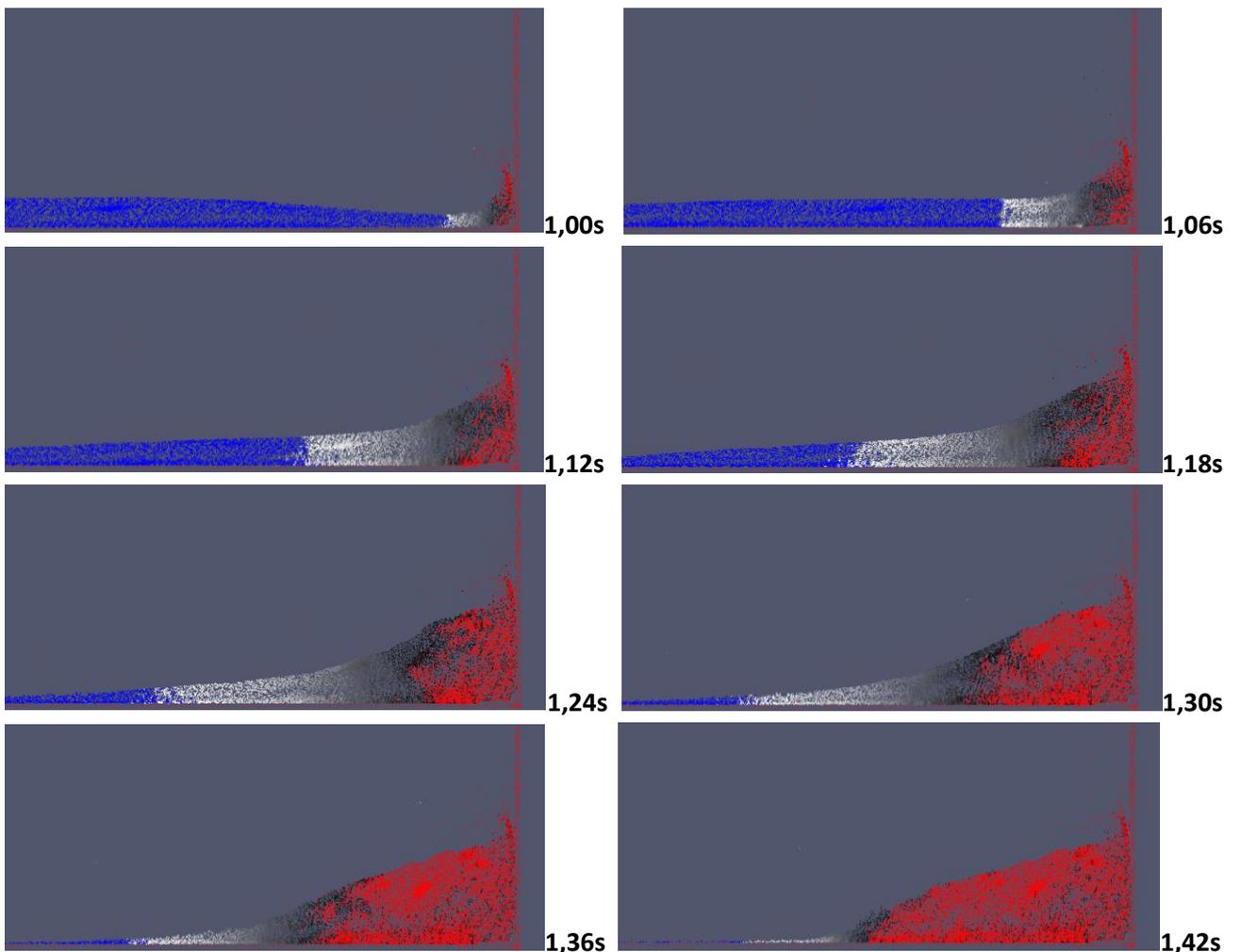


Figura 61: Fasi di propagazione dell'onda granulare nella simulazione numerica MPM,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\phi = 53^\circ$

## A.3 Risultati

Nel confronto con la simulazione numerica si conferma il comportamento previsto da Faug (2015) in seguito all'impatto con la parete che non viene sormontata ed è possibile individuare l'onda di compressione in propagazione.

Si mostrano i grafici di confronto tra le soluzioni analitiche e numeriche per il numero di Froude a monte dell'onda di compressione ( $Fr_1$ ) (Figura 62) e la velocità di propagazione dell'onda granulare ( $U$ ) (Figura 63). Il tempo iniziale è considerato all'istante dell'impatto, quando inizia la compressione, ovvero a  $t = 1s$ .

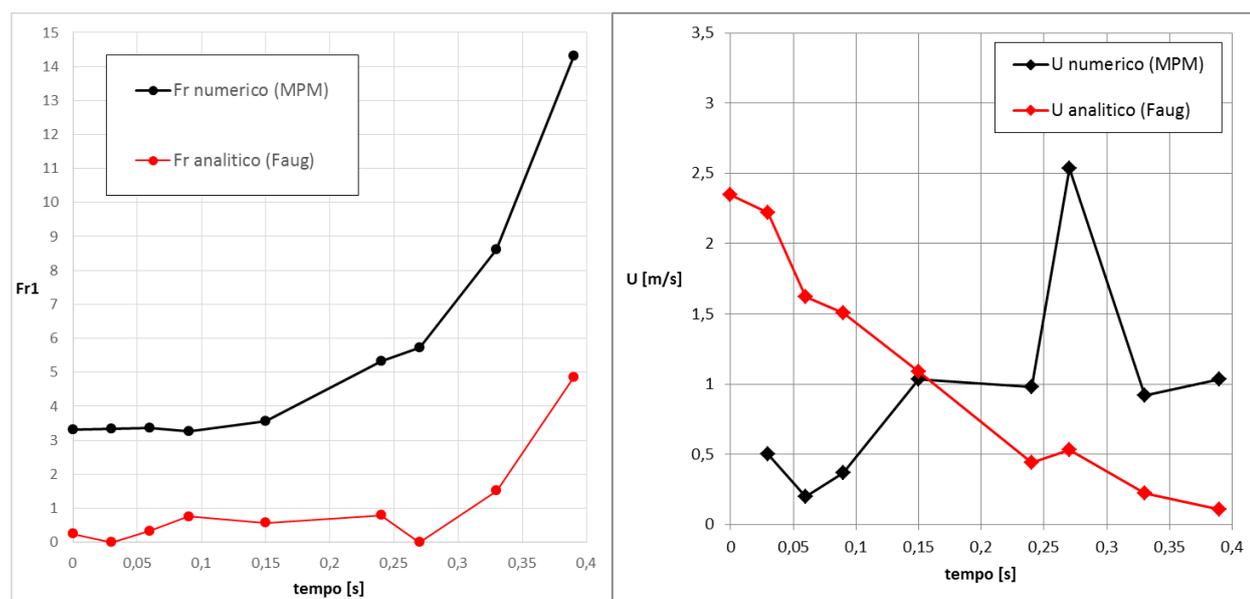


Figura 62: Figura sinistra: Numero di Froude  $Fr_1$  (a monte della compressione) vs Tempo

Figura 63: Figura destra: Velocità dell'onda di compressione  $U$  vs Tempo

## A.4 Conclusioni

La difficoltà principale dell'analisi delle onde di compressione granulare con software MPM consiste nella corretta individuazione della lunghezza di transizione ( $L^*$ ) e delle altezze di flusso ( $h_1$  e  $h_2$ ). Inoltre la teoria di Faug è valida se  $h \ll L^*$ , condizione in cui sono limitati gli effetti di dissipazione dovuti alla collisione. Il caso in esame possiede invece altezze del flusso commisurabili, come ordine di grandezza, con la lunghezza  $L^*$ .

Un'analisi di sensitività eseguita conferma che l'influenza dei parametri  $L^*$  e  $h_1$  è consistente, l'errore prodotto da una sovrastima dei precedenti parametri modifica completamente il risultato. Una sovrastima di  $h_1$  del 30% comporta una maggiorazione del numero di Froude ( $Fr_1$ ) del 200%.

L'impossibilità della misura precisa dei parametri deriva dalla natura del fenomeno analizzato: il materiale in discesa ancora in movimento non possiede un "pelo libero" di altezza costante sia per la scarsità di materiale sia per le condizioni di partenza del deposito iniziale: più appropriato per simulazioni delle onde granulari è il rilascio del materiale sotto battente che permette un'altezza di pelo libero ( $h_1$ ) costante, si veda l'esperimento di Pudasaini et al. (2008), inoltre il materiale è troppo poco per riscontrare comportamento descritto da Faug (2015): risulta preponderante il tempo di urto contro la parete piuttosto che la deposizione successiva con conseguenza che l'altezza  $h_2$  non è ben definibile durante la prima fase. Vista quindi la difficoltà di individuare i vari parametri non è possibile dare concretezza all'analisi numerica effettuata.

La geometria simulata con l'MPM è molto differente da quella analitica schematizzata da Faug (2015). Per poter effettuare paragoni con la teoria analitica è necessaria una simulazione con una nuova geometria semplificata ed eventualmente un nuovo modello costitutivo frizionale-collisionale.



## Appendice B: REOLOGIA $\mu(I)$

Un modello per i flussi granulari densi che negli ultimi anni ha dato efficaci riscontri con la pratica è basato sulla reologia  $\mu(I)$  proposta da Jop et al. (2006). Si utilizza l'analisi dimensionale e un fitting di dati provenienti da esperimenti per implementare una reologia tridimensionale con il criterio di attrito di Coulomb.

La reologia  $\mu(I)$  è un'estensione del modello shallow-water presentato da Pouliquen e Forterre (2002), che è impostato sulla base di leggi fenomenologiche dei flussi stazionari su piani inclinati osservati da Pouliquen (1999). Pouliquen (1999) ha determinato sperimentalmente la variazione della velocità media  $u$  in funzione dell'inclinazione  $\theta$ , dello spessore dello strato  $h$ , e della scabrezza del fondo: i vari parametri adimensionalizzati di questo problema hanno permesso di impostare una relazione. Questi parametri sono

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g h \cos \theta}} \quad n = \frac{h}{d} \quad \theta$$

che sono rispettivamente il numero di Froude, l'altezza adimensionale e l'inclinazione del piano.

Si applica il presupposto che le particelle siano sufficientemente rigide in modo che le sole grandezze significative sono: la lunghezza  $d$  (diametro, per particelle sferiche) e la loro  $\rho_p$  densità, con il tempo di riferimento della collisione elastica sufficientemente piccolo da risultare istantaneo rispetto a qualsiasi tempo di riferimento per il trasferimento della quantità di moto.

Si è scoperto che, su una base scabra, l'intervallo dei parametri  $(\theta, n)$  dove si riscontrano i flussi sopra descritti è limitato. Per un'inclinazione  $\theta$  troppo elevata tutti i flussi sono accelerati, mentre per un'inclinazione  $\theta$  troppo bassa il flusso si arresta. Per le inclinazioni intermedie il flusso raggiunge una velocità e un'altezza costanti. I risultati dipendono sensibilmente dalla scabrezza basale ovvero dal coefficiente di attrito. Holyoake (2012), e in precedenza anche Pouliquen (2002), hanno rilevato negli esperimenti in scala per i flussi stazionari che, una volta rimossa la sorgente di materiale chiudendo la paratia in cima al pendio, l'altezza del flusso lentamente diminuisce con la velocità, e si crea un deposito di altezza costante. Questa altezza è stata definita come  $h_{STOP}(\theta)$ .

Le curve di  $h_{STOP}$  hanno due importanti caratteristiche: ad angolo  $\theta_1$  vi è un asintoto, che corrisponde al punto in cui il coefficiente di attrito interno del materiale è maggiore della tangente dell'inclinazione. Questo causa la formazione di un deposito. La seconda caratteristica importante è che c'è un punto  $\theta_2 > \theta_1$  dove  $h_{STOP} = 0$ . Sopra questo limite, la forza gravitazionale è maggiore dell'attrito disponibile, e non possono formarsi depositi stabili.

E' possibile bypassare qualsiasi caratterizzazione microscopica del materiale granulare, giacché le informazioni sono tutte codificate nella funzione  $h_{STOP}(\theta)$ .

Con tali esperimenti è anche possibile definire un'altra variabile  $h_{start}$ , che è l'altezza alla quale il flusso inizia a muoversi. Questa risulta essere una funzione dell'inclinazione (Mangeney et al., 2007), tuttavia è interessante notare che  $h_{STOP}$  è diverso da  $h_{start}$ , il che dà una buona indicazione della presenza dell'isteresi di materiali granulari e dimostra una differenza tra attrito statico e attrito radente. È questa differenza che è causa della instabilità dei pendii in cui frane o valanghe si manifestano come flussi poco profondi (shallow-flow).

La relazione per il flusso è:

$$\frac{u}{\sqrt{g h}} = \beta \frac{h}{h_{stop}(\theta)}$$

con  $\beta = 0,136$  per le particelle sferiche che sono state utilizzate negli esperimenti di Pouliquen.

Per le particelle spigolose la legge del flusso prende la forma:

$$\frac{u}{\sqrt{g h}} = \alpha + \beta \frac{h}{h_{stop}(\theta)}$$

Prendendo un volumetto di materiale e bilanciando le forze che agiscono su di esso, si può scrivere

$$\tau = \rho g h \sin \theta$$

dove il secondo termine è la proiezione dell'accelerazione gravitazionale che, se il flusso è costante, deve essere bilanciata da una sollecitazione di taglio alla base  $\tau$ . La densità media,  $\rho$  è data dalla densità della particella moltiplicata per la frazione di volume solido.

Dato che la pressione normale alla base, assumendo condizioni idrostatiche, è  $p = \rho g h \cos \theta$ , si ottiene una legge di attrito semplice

$$\frac{\tau}{p} = \tan \theta = \mu_b \left( \frac{u}{\sqrt{g h}}, n \right)$$

dove  $\mu_b$  il coefficiente di attrito basale.

Quando il flusso rallenta e si avvicina l'arresto, si ha, per definizione, che  $h \rightarrow h_{STOP}$ .

Poiché la relazione deve essere valida sia per un flusso a velocità costante sia per un deposito statico, il coefficiente di attrito basale deve obbedire alla relazione:

$$\mu_b = \mu_{stop} = \tan(\theta_{stop}(h))$$

dove l'angolo  $\theta_{stop}$  è definito come l'inverso della funzione  $h_{stop}(\theta)$ . Quindi si può scrivere la legge di attrito come

$$\mu_b \left( \frac{u}{\sqrt{g h}}, n \right) = \mu_{stop} \left( h \frac{\beta h}{\frac{u}{\sqrt{g h}}} \right)$$

Per completare i parametri utilizzati in questo schema di attrito semplice, la dipendenza funzionale di  $h_{stop}(\theta)$  si ottiene sperimentalmente. Una funzione è proposta da Pouliquen e Forterre (2002):

$$\frac{h_{stop}(\theta)}{d} = B \frac{\tan \theta - \mu_2}{\mu_1 - \tan \theta}$$

che è espressa in termini di limiti del coefficiente di attrito  $\mu_1 = \tan \theta_1$  e  $\mu_2 = \tan \theta_2$  e di una costante B, tutti parametri dipendenti solo dal materiale e dalle condizioni al contorno. Risulta adatta qualsiasi formulazione che condivida le proprietà di  $\theta_1$  e  $\theta_2$  e sia monotona decrescente.

Mettendo a sistema le equazioni precedenti si ottiene:

$$\mu_b \left( \frac{u}{\sqrt{g h}}, n \right) = \frac{\mu_1 + \mu_2 \frac{u}{\sqrt{g h}} \frac{B}{\beta n}}{1 + \frac{u}{\sqrt{g h}} \frac{B}{\beta n}}$$

È importante notare che questa espressione non è il risultato delle proprietà del materiale, ma piuttosto è una manifestazione dell'interazione tra il materiale e la superficie basale. Questa funzione, assieme all'assunzione  $h < h_{stop}$ , viene utilizzata con buoni risultati da Pouliquen e Forterre (2002) per descrivere i flussi shallow-water e per prevedere la diffusione e lo spargimento di una massa granulare.

Questa formulazione riproduce bene i flussi granulari a profondità media, ma non può essere pensata come una reologia in quanto contiene solo l'interazione tra il materiale e il contorno.

Il passo successivo per estendere i risultati di  $h_{STOP}$  ad una reologia completa è dovuto al gruppo di ricerca francese MiDi (2004), che ha raccolto i risultati sperimentali per i sei esperimenti granulari più frequentemente studiati.

Tre scale di grandezza che influenzano il flusso sono state identificate: una scala in cui l'interazione particella-particella è governata dalla deformazione dei grani, una scala granulometrica che governa il riordinamento locale delle particelle, e la scala del sistema.

Si rilevano che, lontano dalle condizioni di transizione di flusso, l'attrito particella-particella su scala microscopica e la rugosità (scabrezza), hanno scarso effetto sulla scala maggiore della cinematica del flusso, per valori non estremi, e anzi servono solo a modificare il coefficiente di attrito efficace. Ciò significa che, su scala locale, il flusso non è governato da una scala di riferimento associata alla deformazione o alla dissipazione anelastica delle particelle. Per grandi sistemi questo lascia la scala dimensionale delle particelle come unica scelta. Perciò si prende questa scala come un presupposto nella reologia  $\mu(I)$ .

Si assume che in un flusso di scorrimento omogeneo in un sistema sufficientemente esteso dove i confini abbiano un'influenza trascurabile sul flusso interno, i soli campi che governano il flusso sono la velocità di deformazione  $\dot{\gamma}$ , la pressione  $p$ , e lo sforzo di taglio  $\tau$ . Nel fare questo, implicitamente si assume che la temperatura granulare  $T$  non svolga alcun ruolo, e quindi la generazione locale dell'energia cinetica delle particelle agitate bilanci la dissipazione. Siccome l'unica massa nel problema è la massa della particella, il flusso è indipendente dalla densità del materiale e non esiste alcun grado di sollecitazione interna. Queste assunzioni limitano fortemente l'applicazione di qualsiasi legge reologica locale alla dimensione dei grani (Cruz et al, 2005; Lois et al, 2005). Le combinazioni dei parametri sopra citati producono due sistemi adimensionali, ossia il coefficiente di attrito e il parametro  $I$ :

$$\mu = \frac{\tau}{p} \quad I = \frac{\dot{\gamma} d}{\sqrt{\frac{p}{\rho}}}$$

Si nomina  $I$  il numero inerziale, definito come la radice quadrata del numero di Savage o il numero di Coulomb, ed è il rapporto tra la tensione collisionale e la tensione totale (Savage, 1984; Ancey et al., 1999). Questo numero adimensionale può essere anche descritto come il rapporto di due fattori di tempo a livello di particelle. Questi sono dati da

$$T_{\dot{\gamma}} = \frac{1}{\dot{\gamma}}$$

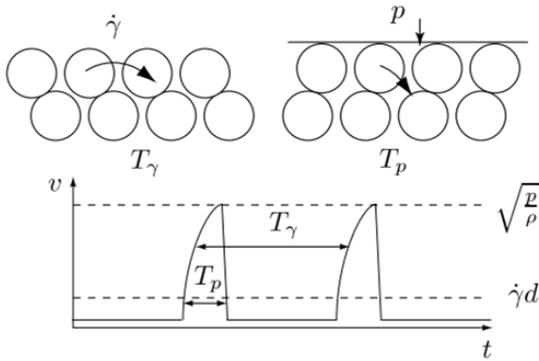
Con  $T_{\dot{\gamma}}$  = tempo impiegato per uno strato di particelle in scorrimento per spostarsi di una distanza  $d$ , e

$$T_p = d \sqrt{\frac{\rho}{p}}$$

Con  $T_p$  = tempo di confinamento che corrisponde al tempo impiegato dalla pressione per spingere la particella al suo livello (altezza) originale dopo essersi spostata per superare le particelle sottostanti. Il numero inerziale  $I$  è quindi dato da

$$I = \frac{T_{\dot{\gamma}}}{T_p}$$

È importante sottolineare che questa definizione di  $I$  vale solo per particelle rigide invece per particelle più comprimibili la scala temporale elastica è preponderante (Campbell, 2002).



**Figura 64: Rappresentazione schematica dei fattori di tempo  $T_p$  e  $T_\gamma$  (MiDi, 2004)**

L'interpretazione di  $I$  in questo modo fornisce una corrispondenza tra il valore di  $I$  ed il tipo di flusso che si analizza. Per i flussi lenti e quasi-statici, il movimento tra gli strati di particelle è lento, mentre il tempo di confinamento è relativamente veloce e l'inerzia delle particelle ha poco effetto.

Viceversa, i flussi con grandi velocità di scorrimento tali che l'inerzia delle particelle supera la forza di confinamento, risultano agitati e probabilmente sciolti. Questi flussi corrispondono ad un valore elevato di  $I$ .

Con le ipotesi descritte sopra, si può anche sostenere che la frazione di volume solido  $\phi$  deve essere una grandezza dipendente da  $I$  (Pouliquen et al., 2006). Considerando il movimento di un singolo grano su un livello, si può vedere che la massima frazione di volume ( $\phi_{max}$ ) è raggiunta quando il centro della particella è il più basso possibile, cioè quando la particella giace nello spazio tra le particelle contigue. Tuttavia, quando viene applicato il taglio, la particella è costretta a salire in modo da scavalcare le particelle sottostanti, lasciando così lo spazio vuoto finché si trova completamente in cima alla particella sottostante, al punto che la frazione di volume raggiunge il suo minimo ( $\phi_{min}$ ).

Dato che il tempo tipico per riordinamento è  $T_v$ , e il tempo che la particella rimane intrappolata è  $T_\gamma - T_p$ , la frazione di volume mediata sul tempo è data da

$$\phi = \frac{T_\gamma \phi_{min} + (T_p - T_\gamma) \phi_{max}}{T_p}$$

Equivalente a

$$\phi = \phi_{max} - (\phi_{max} - \phi_{min}) I$$

Tuttavia questa formulazione di  $\phi$  è applicabile solo quando le particelle sono fortemente in contatto tra loro e per piccoli valori di  $I$ . Questo suggerisce che, mentre  $I$  cresce, il flusso diventa diluito (più sciolto) e la relazione lineare non è più valida. I valori tipicamente assunti sono:  $\phi_{max} = 0,6$  e  $\phi_{min} = 0,5$  (Baran et al, 2006; Pouliquen et al., 2006; MiDi, 2004), che indicano un ristretto intervallo di  $I$  nelle applicazioni che sono state studiate in passato.

È noto da alcuni dei primi studi sui mezzi granulari che il flusso granulare appena messo in movimento scorre presentando effetti di dilatanza e che le particelle scorrono l'una sull'altra (Reynolds, 1885). Tuttavia, una volta che questa transizione si è verificata, la percentuale di volume solido (frazione solida  $\phi$ ) varia poco. Ciò è stato verificato con le simulazioni (Silbert et al., 2001) e gli esperimenti (Louge e Keast, 2001).

A riprova di questo effetto, numerosi studi sperimentali e numerici (Rajchenbach, 2003; Louge e Keast, 2001; Jenkins, 2007) suggeriscono che l'approssimazione  $\phi = \text{cost.}$  risulti accettabile.

Partendo dal presupposto che la reologia è valida localmente ed è governata dalle leggi citate precedentemente, il coefficiente di attrito deve essere una funzione del numero inerziale  $I$ , e si possono estendere i risultati ottenuti per lo scorrimento planare a una reologia generale per i materiali granulari.

Questa nuova reologia locale dovrebbe produrre valori simili a quelli sperimentali, ovvero alla legge di attrito basale.

Per i flussi di scorrimento stazionari per i quali si applica la legge di attrito basale, l'equilibrio di forze porta a:

$$\mu(I(z)) = \tan \theta$$

Nel sistema di coordinate si prende  $z = 0$  sulla superficie basale e  $z = h$  sulla superficie libera. Ciò implica che  $I$  è costante per tutta la profondità ed è funzione solo di  $\theta$  e quindi costante in tutto il flusso. La definizione di  $I$  permette di integrare il profilo di velocità per ottenere:

$$\frac{u(z)}{\sqrt{g d}} = \frac{2}{3} I(\theta) \sqrt{\cos \theta} \frac{\left( h^{\frac{3}{2}} - (z-h)^{\frac{3}{2}} \right)}{d^{\frac{3}{2}}}$$

che ricorda il profilo di velocità di Bagnold. Con un'ulteriore integrazione si ottiene:

$$I = \frac{5}{2} \frac{Fr}{n}$$

Sostituendo questa nella legge di attrito basale si ottiene la relazione:

$$\mu(I) = \mu(I)|_{z=0} = \frac{\mu_1 I_0 + \mu_2 I}{I_0 + I}$$

Con

$$I_0 = \frac{5}{2} \frac{\beta}{B \sqrt{\cos \theta}}$$

L'analisi del flusso di scorrimento stazionario motiva la scelta di adottare l'equazione precedente come definizione di reologia applicabile a tutti i flussi granulari densi.

I due parametri  $\mu_1$  e  $\mu_2$  dipendono dal materiale e sono ottenuti dalla determinazione dell'intervallo di inclinazioni per i quali esiste  $h_{STOP}$ .

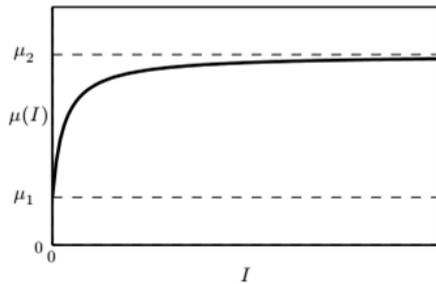


Figura 65: Curva tipica di  $\mu(I)$

Solitamente  $I_0$  si presume essere una costante, cioè un altro parametro del materiale. Questo può essere fatto per flussi di scorrimento stazionari, nei quali la dipendenza dall'inclinazione è piuttosto debole all'interno dell'intervallo limitato per i quali i flussi stazionari sono possibili. Per gli esperimenti con sfere di vetro, nella reologia  $\mu(I)$  si considera il valore di  $I_0$  intorno a 0,3. Il valore preciso di  $I_0$  non preclude l'applicabilità della reologia  $\mu(I)$  ai flussi granulari ad alta velocità (Holyoake, 2012).

Una reologia unidimensionale per descrivere il comportamento precedente può essere scritta come:

$$\tau = \pm \mu(I) p$$

Che risulta non nulla quando  $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$ .

Si è introdotta la quantità  $\frac{\partial u}{\partial z}$  per assicurarsi che l'attrito agisca per opporsi al taglio nel materiale. Questa reologia monodimensionale ha due caratteristiche importanti. In primo luogo, esiste una tensione di "snervamento"  $\tau = \mu_1 p$  al di sotto della quale non avviene lo scorrimento. Si introducono notevoli complicazioni alla soluzione del flusso: nelle aree dove non c'è alcun taglio, le sollecitazioni diventano mal definite e dipendono dalla storia di deformazione. La sollecitazione di taglio in queste zone rispetta la disuguaglianza

$$\tau < \mu_1 p$$

Per ovviare al problema, in queste aree si introduce una superficie di snervamento lungo la quale la tensione equivale alla tensione di snervamento. Poi si calcola il movimento della regione collegata come un blocco unico considerando le sollecitazioni sul contorno.

La seconda caratteristica è che  $\mu$  è superiormente delimitata da  $I \rightarrow \infty$ , indicando che vi è un limite all'attrito che il materiale granulare può esprimere. Oltre questo limite, il modello prevede che il materiale acceleri indefinitamente, in assenza di ulteriori forze come la resistenza dell'aria.

La reologia  $\mu(I)$  unidimensionale è un buon modello per simulare l'evoluzione del flusso che scorre verso il basso in un piano inclinato. Tuttavia non dà informazioni sulla struttura interna del flusso. Jop et al. (2006)

hanno generalizzato questa reologia ad una formulazione tensoriale completa per predire sia la pendenza trasversale sia la dipendenza dalla profondità (spessore) del flusso su un ostacolo. Con le coordinate assunte tali che  $z = 0$  sulla base e  $z = h$  sulla superficie libera,  $x$  aumenta verso la base del pendio e  $y$  completa la terna cartesiana. Il tensore degli sforzi, che ha la stessa forma proposta da Schaeffer (1987) è dato da:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

Con

$$\tau_{ij} = \eta(|\gamma|, p) \gamma_{ij}$$

dove  $p$  è la pressione,  $\tau$  la sollecitazione di taglio,  $\delta_{ij}$  il delta di Kronecker e  $\gamma$  è il tensore simmetrico della deformazione dato da

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Si definisce il modulo del tensore della deformazione come

$$|\gamma| = \sqrt{\frac{1}{2} \gamma_{ij} \gamma_{ij}}$$

In analogia alla meccanica dei fluidi newtoniani, Jop et al. (2006) hanno introdotto una viscosità non costante  $\eta$ , che è definita in termini di coefficiente di attrito:

$$\eta(|\gamma|, p) = \frac{\mu(I) p}{|\gamma|}$$

Questo indica che la resistenza del materiale diminuisce quanto più rapidamente si deforma. Si nota anche che, insolitamente, la viscosità è anche una funzione della pressione.

Generalizzando la definizione di  $I$  per la natura tridimensionale del flusso:

$$I = \frac{|\gamma| d}{\sqrt{p/\rho}}$$

In questa formulazione si ottiene che lo sforzo totale di taglio è  $|\tau| = \mu(I) p$  come nella reologia unidimensionale. La formulazione tensoriale serve solo per orientare le sollecitazioni di attrito lungo le direzioni della deformazione.

La reologia tridimensionale presenta ancora un carico di snervamento, l'unica differenza è che la sollecitazione di taglio della reologia monodimensionale deve essere sostituita dal suo valore assoluto:

$$|\tau| = \mu_1 p$$

Un importante lavoro per verificare i campi di applicabilità di questa reologia è stato fatto per via sperimentale e numerica dal gruppo di ricerca francese MiDi (2004).

Non sorprende che la reologia  $\mu(I)$  dia i migliori risultati con flussi stazionari su un piano inclinato visto che i parametri utilizzati per calibrare la legge di attrito sono stati dedotti dagli esperimenti stessi.

La reologia mostra quantitativamente la dipendenza descritta da Bagnold del profilo della velocità dalla profondità per i flussi profondi. A questa conclusione si arriva anche attraverso l'analisi dimensionale di qualsiasi reologia locale. Dal momento che l'attrito deve bilanciare la gravità in tutto il flusso, si prevede che  $I$  sia costante e lo sia anche la frazione di volume solido.

Forse più interessanti sono i flussi su il piano inclinato per cui la reologia non prevedere il comportamento correttamente. Per i flussi poco profondi, quando  $h \sim h_{\text{stop}}$ , il profilo di velocità osservato è lineare, e non può essere previsto dalla reologia.

Una spiegazione plausibile per questa discrepanza è la comparsa di effetti non locali quali catene di forza e conglomerati di particelle, che aggiungono un'altra grandezza di riferimento al problema, rendendo imprecisa la reologia basata solo su  $I$ . Ciò è indicativo di un comportamento più generale della reologia  $\mu(I)$  che dà scarsa attendibilità nelle condizioni di transizione del flusso.

Tuttavia il flusso di scorrimento "steady plane shear flow" è solo un tipo specifico di flusso osservabile sui piani inclinati. Sebbene la reologia  $\mu(I)$  non riesca a spiegare l'isteresi e l'instabilità di frane e valanghe, è stata utilizzata con ottimi risultati per prevedere altre instabilità, come ad esempio la presenza di onde roll (Forterre e Pouliquen, 2003) e la formazione di argini e dell'auto-canalizzazione (Mangeney et al., 2007).



## Riferimenti bibliografici

- ABE, Keita; SOGA, Kenichi; BANDARA, Samila. Material point method for coupled hydromechanical problems. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2013, 140.3: 04013033.
- ALDER, Berni J.; WAINWRIGHT, T. E. Studies in molecular dynamics. I. General method. *The Journal of Chemical Physics*, 1959, 31.2: 459-466.
- AMSLER, Claude, et al. Review of particle physics. *Physics Letters B*, 2008, 667.1: 1-6.
- ANCEY, Christophe; COUSSOT, Philippe; EVESQUE, Pierre. A theoretical framework for granular suspensions in a steady simple shear flow. *Journal of Rheology (1978-present)*, 1999, 43.6: 1673-1699.
- ANDERHEGGEN, Edoardo; VOLKWEIN, Axel; GRASSL, Hans. Numerical simulation of highly flexible rockfall protection systems. In: *Proceedings of Fifth World Congress on Computational Mechanics*. Vienna, Austria. 2002. p. 1-9.
- ANDREYKIV, Andriy, et al. A level-set-based large sliding contact algorithm for easy analysis of implant positioning. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012, 89.10: 1317-1336.
- ANURA3D, <http://mpm-dredge.eu/>, 2016.
- ARATTANO, M.; FRANZI, L. Analysis of different water-sediment flow processes in a mountain torrent. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 2004, 4.5/6: 783-791.
- ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. Energy theorems and structural analysis. 1960. 1954.
- ARMANINI, Aronne. On the dynamic impact of debris flows. In: *Recent developments on debris flows*. Springer Berlin Heidelberg, 1997. p. 208-226.
- ASHWOOD, Wesley; HUNGR, Oldrich. Estimating the total resisting force in a flexible barrier impacted by a granular avalanche using physical and numerical modeling. *Canadian Geotechnical Journal*, 2016, ja.
- BAGNOLD, Ralph A. *The physics of wind blown sand and desert dunes*. Methuen, London, 1941, 265.10.
- BARDENHAGEN, S. G. Energy conservation error in the material point method for solid mechanics. *Journal of Computational Physics*, 2002, 180.1: 383-403.
- BARDENHAGEN, S. G., et al. An improved contact algorithm for the material point method and application to stress propagation in granular material. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2001, 2.4: 509-522.
- BARDENHAGEN, S. G.; BRACKBILL, J. U.; SULSKY, D. Numerical study of stress distribution in sheared granular material in two dimensions. *Physical Review E*, 2000, 62.3: 3882.
- BARDENHAGEN, S. G.; BRACKBILL, J. U.; SULSKY, Deborah. The material-point method for granular materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2000, 187.3: 529-541.
- BARDENHAGEN, S. G.; KOBER, E. M. The generalized interpolation material point method. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2004, 5.6: 477-496.

- BARTELT, P.; BUSER, O.; PLATZER, K. Starving avalanches: Frictional mechanisms at the tails of finite-sized mass movements. *Geophysical research letters*, 2007, 34.20.
- BARTELT, P.; STÖCKLI, V. The influence of tree and branch fracture, overturning and debris entrainment on snow avalanche flow. *Annals of Glaciology*, 2001, 32.1: 209-216.
- BATHE, Klaus-Jürgen; BOLOURCHI, Said. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1979, 14.7: 961-986.
- BEGUERÍA, Santiago, et al. A GIS-based numerical model for simulating the kinematics of mud and debris flows over complex terrain. 2009.
- BELYTSCHKO, T.; HSIEH, B. J. Non-linear transient finite element analysis with convected coordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1973, 7.3: 255-271.
- BELYTSCHKO, Ted; LU, Yun Yun; GU, Lei. Element-free Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 1994, 37.2: 229-256.
- BERTHET-RAMBAUD, Philippe, et al. Characterization of avalanche loading on impacted structures: a new approach based on inverse analysis. *Journal of Glaciology*, 2008, 54.185: 324-332.
- BEUTH, L., et al. Formulation and validation of a quasi-static material point method. In: *Proceedings of the 10th international symposium on numerical methods in Geomechanics (NUMOG)*, Rhodes, Greece. 2007. p. 189-195.
- BEUTH, L.; VERMEER, P. A. Large deformation analysis of cone penetration testing in undrained clay. In: *International conference on installation effects in geotechnical engineering (ICIEGE)*, Rotterdam. 2013. p. 1-7.
- BEUTH, L.; WIĘCKOWSKI, Z.; VERMEER, P. A. Solution of quasi-static large-strain problems by the material point method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2011, 35.13: 1451-1465.
- BEUTH, Lars, et al. Large deformation analysis using a quasi-static material point method. 2008.
- BOLTON, M. D. The strength and dilatancy of sands. Cambridge University Engineering Department, 1984.
- BOZHINSKIY, Alexander Nickolaevich; LOSEV, Kim Semionovich; BARTELT, Charles Edward. Fundamentals of avalanche science. Eidgenössisches Institut für Schnee und Lawinenforschung, 1998.
- BRACKBILL, J. U.; RUPPEL, H. M. FLIP: A method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations of fluid flows in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, 1986, 65.2: 314-343.
- BRACKBILL, Jeremiah U.; KOTHE, Douglas B.; RUPPEL, Hans M. FLIP: A low-dissipation, particle-in-cell method for fluid flow. *Computer Physics Communications*, 1988, 48.1: 25-38.
- BROWN, R. L.; RICHARDS, J. C\_. Principles of powder mechanics. 1970.
- BUSER, Othmar; BARTELT, Perry. Production and decay of random kinetic energy in granular snow avalanches. *Journal of Glaciology*, 2009, 55.189: 3-12.
- CAMPBELL, C. S.; BRENNEN, C. E. Computer simulation of chute flows of granular materials. 1982.

CAMPBELL, Charles S. Rapid granular flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1990, 22.1: 57-90.

CAMPBELL, Charles S. The stress tensor for simple shear flows of a granular material. *Journal of Fluid Mechanics*, 1989, 203: 449-473.

CAMPBELL, Charles S.; BRENNEN, Christopher E. Computer simulation of granular shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 1985, 151: 167-188.

CAMPBELL, Charles S.; GONG, Ailing. The stress tensor in a two-dimensional granular shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 1986, 164: 107-125.

CAZZANI, A.; MONGIOVI, L.; FRENEZ, T. Dynamic finite element analysis of interceptive devices for falling rocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2002, 39.3: 303-321.

CECCATO, Francesca, et al. Two-phase Material Point Method applied to the study of cone penetration. *Computers and Geotechnics*, 2016.

CECCATO, Francesca. Study of large deformation geomechanical problems with the Material Point Method. 2015.

CECCATO, Francesca; BEUTH, Lars; SIMONINI, Paolo. Analysis of Piezocone Penetration under Different Drainage Conditions with the Two-Phase Material Point Method. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2016, 04016066.

CECCATO, Francesca; BEUTH, Lars; VERMEER, Pieter A. Two-phase analysis of soil penetration using MPM.

CHAPMAN, S.; COWLING, T. G. The velocity of diffusion in a mixed gas; the second approximation. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, 1941. p. 159-169.

CLOUGH, Ray W. The finite element method in plane stress analysis. 1960.

COETZEE, C. J.; BASSON, A. H.; VERMEER, P. A. Discrete and continuum modeling of silo discharge. *R&D Journal incorporated into The SA Mechanical Engineer*, 2006, 22.2.

COETZEE, C. J.; EIS, D. N. J. Modelling Excavator Bucket Filling with DEM. In: *Fifth World Congress on Computational Mechanics*. 2002. p. 7-12.

COETZEE, C. J.; VERMEER, P. A.; BASSON, A. H. The modelling of anchors using the material point method. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 2005, 29.9: 879-895.

CORTELLAZZO Giampaolo, FAVARETTI Marco, *Movimenti franosi di estensione limitata*, Università di Padova

COULOMB, C. A. In *memories de mathematique et de physique*. Academie Royal des Sciences par divers sans, 1773, 7: 343-382.

COURANT, Richard, et al. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc*, 1943, 49.1: 1-23.

COUSSOT, Philippe. *Mudflow rheology and dynamics*. Balkema, 1997.

CROSTA, G. B.; FRATTINI, P. Distributed modelling of shallow landslides triggered by intense rainfall. *Natural Hazards and Earth System Science*, 2003, 3.1/2: 81-93.

CUNDALL, Peter A.; STRACK, Otto DL. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 1979, 29.1: 47-65.

DA CRUZ, Frédéric, et al. Rheophysics of dense granular materials: Discrete simulation of plane shear flows. *Physical Review E*, 2005, 72.2: 021309.

DELHOMME, Fabien, et al. Behavior of a structurally dissipating rock-shed: experimental analysis and study of punching effects. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42.14: 4204-4219.

DENLINGER, Roger P.; IVERSON, Richard M. Granular avalanches across irregular three-dimensional terrain: 1. Theory and computation. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 2004, 109.F1.

DESCOEUDRES, F. Aspects géomécaniques des instabilités de falaises rocheuses et des chutes de blocs. *Publications de la société suisse de mécanique des sols et des roches*, 1997, 135: 3-11.

DORREN, L. K. A.; BERGER, F.; PUTTERS, U. S. Real-size experiments and 3-D simulation of rockfall on forested and non-forested slopes. *Natural Hazards and Earth System Science*, 2006, 6.1: 145-153.

DORREN, Luuk KA; BERGER, Frédéric. Stem breakage of trees and energy dissipation during rockfall impacts. *Tree physiology*, 2006, 26.1: 63-71.

ECKERT, Nicolas, et al. Optimal design under uncertainty of a passive defense structure against snow avalanches: from a general Bayesian framework to a simple analytical model. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 2008, 8.5: 1067-1081.

EGLIT, M. E. Some mathematical models of snow avalanches. 1983.

ERTAŞ, D., et al. Gravity-driven dense granular flows. *EPL (Europhysics Letters)*, 2001, 56.2: 214.

EVANS, Martha W.; HARLOW, Francis H.; BROMBERG, Eleazer. The particle-in-cell method for hydrodynamic calculations. *LOS ALAMOS NATIONAL LAB NM*, 1957.

FAUG, T., et al. Overrun length of avalanches overtopping catching dams: Cross-comparison of small-scale laboratory experiments and observations from full-scale avalanches. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 2008, 113.F3.

FAUG, T., et al. Varying dam height to shorten the run-out of dense avalanche flows: developing a scaling law from laboratory experiments. *Surveys in geophysics*, 2003, 24.5: 555-568.

FAUG, T.; LACHAMP, P.; NAAIM, M. Experimental investigation on steady granular flows interacting with an obstacle down an inclined channel: study of the dead zone upstream from the obstacle. Application to interaction between dense snow avalanches and defence structures. *Natural Hazards and Earth System Science*, 2002, 2.3/4: 187-191.

FAUG, Thierry. Depth-averaged analytic solutions for free-surface granular flows impacting rigid walls down inclines. *Physical Review E*, 2015, 92.6: 062310.

FAUG, Thierry; BEGUIN, Rémi; CHANUT, Benoit. Mean steady granular force on a wall overflowed by free-surface gravity-driven dense flows. *Physical Review E*, 2009, 80.2: 021305.

FERN, Elliot James; SOGA, Kenichi. The role of constitutive models in MPM simulations of granular column collapses. *Acta Geotechnica*, 2016, 1-20.

FORTERRE, Yoël; POULIQUEN, Olivier. Flows of dense granular media. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2008, 40: 1-24.

FORTERRE, Yoël; POULIQUEN, Olivier. Long-surface-wave instability in dense granular flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 2003, 486: 21-50.

GALERKIN, Boris Grigoryevich. Series solution of some problems of elastic equilibrium of rods and plates. *Vestn. Inzh. Tekh*, 1915, 19: 897-908.

GRAY, J. M. N. T.; TAI, Y.-C.; NOELLE, S. Shock waves, dead zones and particle-free regions in rapid granular free-surface flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 2003, 491: 161-181.

GRAY, J. M. N. T.; WIELAND, M.; HUTTER, K. Gravity-driven free surface flow of granular avalanches over complex basal topography. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, 1999. p. 1841-1874.

GREVE, R.; KOCH, Th; HUTTER, K. Unconfined flow of granular avalanches along a partly curved surface. I. Theory. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, 1994. p. 399-413.

GREVE, Ralf; HUTTER, Kolumban. Motion of a granular avalanche in a convex and concave curved chute: experiments and theoretical predictions. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1993, 342.1666: 573-600.

GRIGORIAN, S. S.; EGLIT, M. E.; IAKIMOV, Iu L. New statement and solution of the problem of the motion of snow avalanche. *Snow, Avalanches & Glaciers. Tr. Vysokogornogo Geofizich Inst*, 1967, 12: 104-113.

GUILKEY, James Edward; WEISS, Jeffrey A. Implicit time integration for the material point method: Quantitative and algorithmic comparisons with the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 57.9: 1323-1338.

GUO, Yajun; NAIRN, John A. Calculation of J-integral and stress intensity factors using the material point method. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2004, 6: 295-308.

HAFF, P. K. Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, 134: 401-430.

HARBITZ, Carl Bonnevie; DOMAAS, Ulrik; ENGEN, Arne. Design of snow avalanche deflecting dams. In: *Internationales Symposium, Interpraevent*. 2000. p. 383-396.

HARLOW, Francis H. Hydrodynamic problems involving large fluid distortions. *Journal of the ACM (JACM)*, 1957, 4.2: 137-142.

HARLOW, Francis H. The particle-in-cell computing method for fluid dynamics. *Methods in computational physics*, 1964, 3.3: 319-343.

HOLYOAKE, Alexander James. Rapid Granular Flows in an Inclined Chute. 2012. PhD Thesis. University of Cambridge.

ISPRA, <http://www.isprambiente.gov.it/it/progetti/suolo-e-territorio-1>, 2016

- HU, W.; CHEN, Z. A multi-mesh MPM for simulating the meshing process of spur gears. *Computers & structures*, 2003, 81.20: 1991-2002.
- HÜBL, Johannes, et al. Debris flow impact estimation. In: Eleventh international symposium on water management and hydraulic Engineering. 2009. p. 137-148.
- HUNGR, Oldrich; MCDOUGALL, Scott. Two numerical models for landslide dynamic analysis. *Computers & Geosciences*, 2009, 35.5: 978-992.
- HÜRLIMANN, M.; RICKENMANN, D.; GRAF, Ch. Field and monitoring data of debris-flow events in the Swiss Alps. *Canadian geotechnical journal*, 2003, 40.1: 161-175.
- HÜRLIMANN, Marcel, et al. Evaluation of approaches to calculate debris-flow parameters for hazard assessment. *Engineering Geology*, 2008, 102.3: 152-163.
- HUSSIN, H. Y., et al. Parameterization of a numerical 2-D debris flow model with entrainment: a case study of the Faucon catchment, Southern French Alps. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 2012, 12.10: 3075-3090.
- HUTTER, K., et al. The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. Part II. Experiments. *Acta Mechanica*, 1995, 109.1-4: 127-165.
- HUTTER, K.; RAJAGOPAL, K. R. On flows of granular materials. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 1994, 6.2: 81-139.
- HUTTER, K.; SVENDSEN, B.; RICKENMANN, D. Debris flow modeling: A review. *Continuum mechanics and thermodynamics*, 1994, 8.1: 1-35.
- HUTTER, Kolumban; WANG, Yongqi; PUDASAINI, Shiva P. The Savage–Hutter avalanche model: how far can it be pushed?. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2005, 363.1832: 1507-1528.
- IVERSON, Richard M.; LOGAN, Matthew; DENLINGER, Roger P. Granular avalanches across irregular three-dimensional terrain: 2. Experimental tests. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 2004, 109.F1.
- JAKOB, M., et al. An unusually large debris flow at Hummingbird Creek, Mara Lake, British Columbia. *Canadian Geotechnical Journal*, 2000, 37.5: 1109-1125.
- JASSIM, I.; COETZEE, C.; VERMEER, P. A. A dynamic material point method for geomechanics. *Installation Effects in Geotechnical Engineering*. Taylor & Francis Group, London, 2013.
- JEFFERIES, M. G. Nor-Sand: a simple critical state model for sand. *Geotechnique*, 1993, 43.1: 91-103.
- JENKINS, J. T.; RICHMAN, M. W. Boundary conditions for plane flows of smooth, nearly elastic, circular disks. *Journal of Fluid Mechanics*, 1986, 171: 53-69.
- JENKINS, J. T.; SAVAGE, S. B. Theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, 130.1: 187-202.
- JIANG, Y. J., et al. Experimental investigation of dry granular flow impact via both normal and tangential force measurements. *Géotechnique Letters*, 2015, 5.1: 33-38.

JIANG, Yuan-Jun, et al. Influence of particle characteristics on impact event of dry granular flow. *Powder Technology*, 2015, 270: 53-67.

JIANG, Yuan-Jun; TOWHATA, Ikuo. Experimental study of dry granular flow and impact behavior against a rigid retaining wall. *Rock mechanics and rock engineering*, 2013, 46.4: 713-729.

JOP, Pierre; FORTERRE, Yoël; POULIQUEN, Olivier. A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 2006, 441.7094: 727-730.

JOP, Pierre; FORTERRE, Yoël; POULIQUEN, Olivier. Crucial role of sidewalls in granular surface flows: consequences for the rheology. *Journal of Fluid Mechanics*, 2005, 541: 167-192.

KAJAJI, Issam KJ al. Formulation of a dynamic material point method (MPM) for geomechanical problems. 2013.

KOCH, Th; GREVE, R.; HUTTER, K. Unconfined flow of granular avalanches along a partly curved surface. II. Experiments and numerical computations. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, 1994. p. 415-435.

KONAGAI, K.; JOHANSSON, J. Lagrangian particles for modeling large soil deformations. *Proc., Seismic Fault-induced Failures*, 2001, 99-106.

KULIKOVSKII, A. G.; EGLIT, M. E. Two-dimensional problem of the motion of a snow avalanche along a slope with smoothly changing properties: *PMM vol. 37, n<sup>o</sup> 5, 1973, pp. 837-848. Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1973, 37.5: 792-803.

KUWABARA, Goro; KONO, Kimitoshi. Restitution coefficient in a collision between two spheres. *Japanese journal of applied physics*, 1987, 26.8R: 1230.

LAIGLE, Dominique; COUSSOT, Philippe. Numerical modeling of mudflows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1997, 123.7: 617-623.

LAJEUNESSE, E.; MONNIER, J. B.; HOMSY, G. M. Granular slumping on a horizontal surface. *Physics of Fluids (1994-present)*, 2005, 17.10: 103302.

LIM, L. J.; ANDREYKIV, A.; BRINKGREVE, R. B. J. Pile penetration simulation with material point method. *Installation Effects in Geotechnical Engineering*, 2012, 24-30.

LIM, L.; ANDREYKIV, A.; BRINKGREVE, R. B. J. On the application of the material point method for offshore foundations. *Numerical methods geotechnical engineering*. Taylor and Francis Group, London, 2014, 253-258.

LOIS, Gregg; LEMAÎTRE, Anaël; CARLSON, Jean M. Numerical tests of constitutive laws for dense granular flows. *Physical Review E*, 2005, 72.5: 051303.

LOUGE, Michel Y.; KEAST, Stephen C. On dense granular flows down flat frictional inclines. *Physics of Fluids (1994-present)*, 2001, 13.5: 1213-1233.

LUBE, Gert, et al. Collapses of two-dimensional granular columns. *Physical Review E*, 2005, 72.4: 041301.

LUN, C. K. K., et al. Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in Couette flow and slightly inelastic particles in a general flowfield. *Journal of fluid mechanics*, 1984, 140: 223-256.

MA, Jin; LU, Hongbing; KOMANDURI, Ranga. Structured mesh refinement in generalized interpolation material point (GIMP) method for simulation of dynamic problems. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2006, 12.3: 213.

MA, S.; ZHANG, X.; QIU, X. M. Comparison study of MPM and SPH in modeling hypervelocity impact problems. *International Journal of Impact Engineering*, 2009, 36.2: 272-282.

MA, Xia, et al. Distribution coefficient algorithm for small mass nodes in material point method. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229.20: 7819-7833.

MACKENZIE-HELNWEIN, P., et al. Modeling strategies for multiphase drag interactions using the material point method. *International journal for numerical methods in engineering*, 2010, 83.3: 295-322.

MALET, J.-P., et al. Assessing debris flow hazards associated with slow moving landslides: methodology and numerical analyses. *Landslides*, 2004, 1.1: 83-90.

MANCARELLA, Davide; HUNGR, Oldrich. Analysis of run-up of granular avalanches against steep, adverse slopes and protective barriers. *Canadian Geotechnical Journal*, 2010, 47.8: 827-841.

MANGENEY, A., et al. Avalanche mobility induced by the presence of an erodible bed and associated entrainment. *Geophysical Research Letters*, 2007, 34.22.

MANGENEY, A., et al. Numerical modeling of self-channeling granular flows and of their levee-channel deposits. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 2007, 112.F2.

MAST, Carter M. Modeling landslide-induced flow interactions with structures using the material point method. 2013. PhD Thesis. University of Washington.

MAST, Carter M., et al. Avalanche and landslide simulation using the material point method: flow dynamics and force interaction with structures. *Computational Geosciences*, 2014, 18.5: 817-830.

MCCLUNG, David M., et al. Characteristics of flowing snow and avalanche impact pressures. NRCC, 1985.

MIDI, G. D. R. On dense granular flows. *The European Physical Journal E*, 2004, 14.4: 341-365.

MITCHELL, James Kenneth, et al. *Fundamentals of soil behavior*. 2005.

MOORMANN, C.; FATEMIZADEH, S.; ASCHRAFI, J. Comparison of advanced numerical methods for geomechanical problems with large deformations.

MORESI, Louis; DUFOUR, Frédéric; MÜHLHAUS, H.-B. A Lagrangian integration point finite element method for large deformation modeling of viscoelastic geomaterials. *Journal of Computational Physics*, 2003, 184.2: 476-497.

NAAIM, Mohamed, et al. Dense snow avalanche modeling: flow, erosion, deposition and obstacle effects. *Cold regions science and technology*, 2004, 39.2: 193-204.

NEDDERMAN, Ronald Midgley. *Statics and kinematics of granular materials*. Cambridge University Press, 2005.

NISHIGUCHI, A.; YABE, T. Second-order fluid particle scheme. *Journal of Computational Physics*, 1983, 52.2: 390-413.

NOREM, H.; KVISTERØY, T.; EVENSEN, B. D. Measurement of avalanche speeds and forces: instrumentation and preliminary results of the Ryggfonn Project. *Annals of Glaciology*, 1985, 6: 19-22.

NUMADA, Muneyoshi, et al. Material point method for run out analysis of earthquake-induced long-traveling soil flows. *Journal of Earthquake Engineering*, 2003, 27.

NUMADA, Muneyoshi; KONAGAI, Kazuo. Numerical Study of Relationship Between Landslide Geometry and Run-out Distance of Landslide Mass.

O'BRIEN, J. S.; JULIEN, P. Y.; FULLERTON, W. T. Two-dimensional water flood and mudflow simulation. *Journal of hydraulic engineering*, 1993, 119.2: 244-261.

OGAWA, Satoru; UMEMURA, Akira; OSHIMA, Nobunori. On the equations of fully fluidized granular materials. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 1980, 31.4: 483-493.

ONATE, E., et al. A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. *International journal for numerical methods in engineering*, 1996, 39.22: 3839-3866.

PEILA, Daniele; PELIZZA, S.; SASSUDELLI, F. Evaluation of behaviour of rockfall restraining nets by full scale tests. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 1998, 31.1: 1-24.

PIRULLI, Marina; SORBINO, G. Assessing potential debris flow runout: a comparison of two simulation models. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 2008, 8: 961-971.

POULIQUEN, O., et al. How do grains flow: towards a simple rheology for dense granular flows. *Powders and Grains*, 2005, 859-865.

POULIQUEN, Olivier; CHEVOIR, François. Dense flows of dry granular material. *Comptes Rendus Physique*, 2002, 3.2: 163-175.

POULIQUEN, Olivier; FORTERRE, Yoel. A non-local rheology for dense granular flows. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2009, 367.1909: 5091-5107.

POULIQUEN, Olivier; FORTERRE, Yoel. Friction law for dense granular flows: application to the motion of a mass down a rough inclined plane. *Journal of fluid mechanics*, 2002, 453.1: 133-151.

PUDASAINI, Shiva P., et al. Rapid flow of dry granular materials down inclined chutes impinging on rigid walls. *Physics of Fluids (1994-present)*, 2007, 19.5: 053302.

PUDASAINI, Shiva P.; HUTTER, Kolumban. *Avalanche dynamics: dynamics of rapid flows of dense granular avalanches*. Springer Science & Business Media, 2007.

PUDASAINI, Shiva P.; KRÖNER, Christian. Shock waves in rapid flows of dense granular materials: Theoretical predictions and experimental results. *Physical Review E*, 2008, 78.4: 041308.

RAHMAN, A. Correlations in the motion of atoms in liquid argon. *Physical Review*, 1964, 136.2A: A405.

RAJCHENBACH, Jean. Dense, rapid flows of inelastic grains under gravity. *Physical review letters*, 2003, 90.14: 144302.

RAYLEIGH, Lord. re-issue *Theory of Sound* (two volumes). 1877.

- RERICHA, Erin C., et al. Shocks in supersonic sand. *Physical review letters*, 2001, 88.1: 014302.
- REYNOLDS, Osborne. LVII. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. With experimental illustrations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1885, 20.127: 469-481.
- RICKENMANN, D., et al. Comparison of 2D debris-flow simulation models with field events. *Computational Geosciences*, 2006, 10.2: 241-264.
- RICKENMANN, Dieter. Runout prediction methods. In: *Debris-flow hazards and related phenomena*. Springer Berlin Heidelberg, 2005. p. 305-324.
- ROSCOE, K. H.; SCHOFIELD, ANn; WROTH, C. P. On the yielding of soils. *Geotechnique*, 1958, 8.1: 22-53.
- SAFFMAN, PGf; TURNER, J. S. On the collision of drops in turbulent clouds. *Journal of Fluid Mechanics*, 1956, 1.01: 16-30.
- SAVAGE, S. B.; HUTTER, K. The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. Part I: Analysis. *Acta Mechanica*, 1991, 86.1-4: 201-223.
- SAVAGE, St B.; HUTTER, K. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *Journal of fluid mechanics*, 1989, 199: 177-215.
- SCHAEFFER, David G. Instability in the evolution equations describing incompressible granular flow. *Journal of differential equations*, 1987, 66.1: 19-50.
- SCHAER, Mark; ISSLER, Dieter. Particle densities, velocities and size distributions in large avalanches from impact-sensor measurements. *Annals of Glaciology*, 2001, 32.1: 321-327.
- SCHAERER, Peter A.; SALWAY, Anthony Austen. Seismic and impact-pressure monitoring of flowing avalanches. National Research Council Canada, Division of Building Research, 1980.
- SCHOFIELD, Andrew; WROTH, Peter. *Critical state soil mechanics*. 1968.
- SHEIKH, Ansar Hamid; VERMA, Satish Chandra; KUMAR, Amod. Interaction of retarding structures with simulated avalanches in snow chute. *Current Science (00113891)*, 2008, 94.7.
- SHEN, Luming; CHEN, Zhen. A silent boundary scheme with the material point method for dynamic analyses. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2005, 7.3: 305-320.
- SHIN, Wookuen, et al. Dynamic meshing for material point method computations. *Eng. Technol*, 2010, 48.9: 84-92.
- SILBERT, Leonardo E., et al. Granular flow down an inclined plane: Bagnold scaling and rheology. *Physical Review E*, 2001, 64.5: 051302.
- SOGA, K., et al. Trends in large-deformation analysis of landslide mass movements with particular emphasis on the material point method. *Geotechnique*, 2016, 66: 248-273.
- SOŁOWSKI, W. T.; SLOAN, S. W. Evaluation of material point method for use in geotechnics. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2015, 39.7: 685-701.

SOVILLA, Betty, et al. Impact pressures and flow regimes in dense snow avalanches observed at the Vallée de la Sionne test site. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 2008, 113.F1.

STARON, L.; HINCH, E. J. Study of the collapse of granular columns using two-dimensional discrete-grain simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 2005, 545: 1-27.

SULSKY, D.; KAUL, A. Implicit dynamics in the material-point method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193.12: 1137-1170.

SULSKY, Deborah, et al. Using the material-point method to model sea ice dynamics. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 2007, 112.C2.

SULSKY, Deborah; BRACKBILL, J. U. A numerical method for suspension flow. *Journal of Computational Physics*, 1991, 96.2: 339-368.

SULSKY, Deborah; CHEN, Zhen; SCHREYER, Howard L. A particle method for history-dependent materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1994, 118.1: 179-196.

SULSKY, Deborah; SCHREYER, Howard L. Axisymmetric form of the material point method with applications to upsetting and Taylor impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139.1: 409-429.

TAI, Yih-Chin, et al. Shock-capturing and front-tracking methods for granular avalanches. *Journal of Computational Physics*, 2002, 175.1: 269-301.

THIBERT, Emmanuel, et al. Avalanche impact pressure on an instrumented structure. *Cold Regions Science and Technology*, 2008, 54.3: 206-215.

TIEFENBACHER, F.; KERN, M. A. Experimental devices to determine snow avalanche basal friction and velocity profiles. *Cold regions science and technology*, 2004, 38.1: 17-30.

TING, T. C. T. Interface cracks in anisotropic bimetals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1990, 38.4: 505-513.

TSUJI, Yutaka; KAWAGUCHI, Toshihiro; TANAKA, Toshitsugu. Discrete particle simulation of two-dimensional fluidized bed. *Powder technology*, 1993, 77.1: 79-87.

TSUJI, Yutaka; TANAKA, Toshitsugu; ISHIDA, T. Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe. *Powder technology*, 1992, 71.3: 239-250.

UTILI, Stefano; ZHAO, Tao; HOULSBY, G. T. 3D DEM investigation of granular column collapse: evaluation of debris motion and its destructive power. *Engineering geology*, 2015, 186: 3-16.

VARNES, David J. Slope movement types and processes. *Transportation Research Board Special Report*, 1978, 176.

VERMEER, P. A.; BEUTH, L.; BENZ, T. A quasi-static method for large deformation problems in geomechanics. In: *Proceedings of the 12th international conference of international association for computer methods and advances in geomechanics (IACMAG)*, Goa, India. 2008. p. 55-63.

VERRUIJT, Arnold; VAN BAARS, Stefan. *Soil mechanics*. Delft, the Netherlands: VSSD, 2007.

- VOELLMY, Adolf. Ueber die Zerstoerungskraft von Lawinen. Schweizerische Bauzeitung, 1955
- WACHS, Anthony, et al. Grains3D, a flexible DEM approach for particles of arbitrary convex shape—Part I: Numerical model and validations. Powder Technology, 2012, 224: 374-389.
- WALLSTEDT, P. C.; GUILKEY, J. E. Improved velocity projection for the material point method. Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2007, 19.3: 223.
- WALTON, Otis R.; BRAUN, Robert L. Viscosity, granular-temperature, and stress calculations for shearing assemblies of inelastic, frictional disks. Journal of Rheology (1978-present), 1986, 30.5: 949-980.
- WIĘCKOWSKI, Zdzisław; YOUN, Sung-Kie; YEON, Jeoung-Heum. A particle-in-cell solution to the silo discharging problem. International journal for numerical methods in engineering, 1999, 45.9: 1203-1225.
- YERRO COLOM, Alba; ALONSO PÉREZ DE AGREDA, Eduardo; PINYOL PUIGMARTÍ, Núria Mercè. The material point method for unsaturated soils. Geotechnique, 2015, 65.3: 201-217.
- YERRO COLOM, Alba; ALONSO PÉREZ DE AGREDA, Eduardo; PINYOL PUIGMARTÍ, Núria Mercè. The Material Point Method: a promising computational tool in geotechnics. In: Challenges and Innovations in Geotechnics. 2013. p. 853-856.
- YERRO, A.; ALONSO, E. E.; PINYOL, N. M. Run-out of landslides in brittle soils. A MPM analysis. Geomech from Micro to Macro, 2014, 1: 977-982.
- YERRO, A.; ALONSO, E.; PINYOL, N. Modelling progressive failure with MPM. Analytical Methods in Petroleum Upstream Applications, 2015, 319.
- YORK, Allen R.; SULSKY, Deborah; SCHREYER, Howard L. Fluid–membrane interaction based on the material point method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 48.6: 901-924.
- ZABALA, F.; ALONSO, E. E. Progressive failure of Aznalcóllar dam using the material point method. Géotechnique, 2011, 61.9: 795-808.
- ZENIT, Roberto. Computer simulations of the collapse of a granular column. Physics of Fluids (1994-present), 2005, 17.3: 031703.
- ZHAO, Dapeng, et al. Structural heterogeneity in the megathrust zone and mechanism of the 2011 Tohoku-oki earthquake (Mw 9.0). Geophysical Research Letters, 2011, 38.17.
- ZIENKIEWICZ, Olgierd Cecil; CHEUNG, Yan Kai. The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 1964, 28.4: 471-488.